



HAL
open science

Intégration des critères de tenue mécanique et de dimensionnement de structures lattices multi-matériau dans la méthode d'optimisation topologique basée sur les entités NURBS

Thibaut Roiné

► To cite this version:

Thibaut Roiné. Intégration des critères de tenue mécanique et de dimensionnement de structures lattices multi-matériau dans la méthode d'optimisation topologique basée sur les entités NURBS. Mécanique [physics.med-ph]. HESAM Université, 2022. Français. NNT : 2022HESAE047 . tel-04024092

HAL Id: tel-04024092

<https://pastel.hal.science/tel-04024092>

Submitted on 10 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES DES MÉTIERS DE L'INGÉNIEUR
[I2M/IMC – Campus de Talence]

THÈSE

présentée par : **Thibaut ROINÉ**

soutenue le : **22 novembre 2022**

pour obtenir le grade de : **Docteur d'HESAM Université**

préparée à : **École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers**

Spécialité : « **Mécanique et ingénierie** »

Intégration des critères de tenue mécanique et de dimensionnement de structures lattices multi-matériau dans la méthode d'optimisation topologique basée sur les entités NURBS
(Integration of failure criteria and of design requirements related to multi-material lattice structures in the topology optimisation method based on NURBS entities)

THÈSE dirigée par :
[**M. MONTEMURRO Marco**]

et co-encadrée par :
[**M. PAILHES Jérôme et M. GUILLOU Bernard**]

Jury

M. François JOUVE, Professeur, Université Paris Cité, LJLL
M. Joseph MORLIER, Professeur, ISAE-SUPAERO, ICA
M. Andrei COSTANTINESCU, DR CNRS, École polytechnique, LMS
Mme. Angela VINCENZI, Professeure, Sorbonne Universités, IJLRA
M. François-Xavier IRISARRI, IR HDR, ONERA, DMSC
M. Jérôme PAILHES, Professeur, ENSAM, I2M
M. Marco MONTEMURRO, Professeur, ENSAM, I2M
M. Bernard GUILLOU, Ingénieur, Alsymex

Président
Rapporteur
Rapporteur
Examinatrice
Examineur
Examineur
Examineur
Invité

**T
H
È
S
E**

Remerciements

Je voudrais profiter de ce petit paragraphe pour remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu et qui ont permis le bon déroulement de cette thèse.

Je voudrais remercier dans un premier temps mes encadrants à l'I2M : Marco Montemurro et Jérôme Pailhès qui grâce à leurs conseils et leur soutien m'ont permis de réaliser cette thèse. Je voudrais remercier en particulier Marco, pour son implication tout au long de la thèse, sa patience, sa rigueur scientifique et la confiance qu'il m'a donné. Ses éléments ont été essentiels à la bonne réalisation et à la finalisation de ce doctorat. Je voudrais remercier également le laboratoire I2M qui m'a accueilli tout au long de cette thèse.

Un grand merci également à toute l'entreprise Alsymex Mérignac qui a participé à cette thèse. En particulier à Bernard Guillou et Bertrand Blanchard qui ont été à l'écoute et qui m'ont apporté leurs conseils tout au long de la thèse.

Je suis très reconnaissant également envers les personnes qui ont évaluées mes travaux de thèse. C'est pourquoi je voudrais remercier aux rapporteurs de cette thèse, Joseph Morlier et Andrei Constantinescu, ainsi qu'aux examinateurs, François Jouve, Angela Vincenti et François-Xavier Irisarri, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et les questions pertinentes qu'ils ont posé lors de la soutenance.

Un autre élément essentiel au déroulement de cette thèse est la bonne ambiance qui règne entre les doctorants du laboratoire I2M/IMC. C'est pourquoi je voudrais adresser un grand merci à mon collègue de bureau, Michele, à mon collègue de soirées, Thomas, et à l'ensemble des doctorants que j'ai pu rencontrer au cours de ces années de thèse au sein du labo et qui ont participer à cette bonne ambiance : Giulia, Thibaut Rz, Marco D, Giulio, Soukhaina, Sonia, Enrico, Alexandre, Carlos, Marco PS, Alberto et bien d'autres encore que malheureusement je ne cite pas ici mais que je n'oublie pas.

À travers ces quelques lignes, je voudrais également remercier mes parents, Philippe et Marylène, ainsi que mes frères, Aurélien et Raphaël, pour leur soutien moral durant ces longues années de thèse et qui je sais seront toujours là pour moi. Un autre remerciement va à mes amis/ex-colocs, Thomas, Chloé, Chris, Sol, Lara, Mathilde, Yann, Guillaume et tous les autres pour votre bonne humeur et pour m'avoir permis de me distraire tout au long de cette thèse. Enfin, merci à Prune, qui partage ma vie depuis bientôt 3 ans, d'avoir été un soutien moral important et d'avoir patienté toutes ces soirées et tous ces week-end ou je devais travailler sur cette thèse.

Financement

Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans l'aide de différents financeurs qui, au travers de leur soutien matériel et financier, ont reconnu mon travail et m'ont fait confiance : l'entreprise ALSYMEX Mérignac et l'ANRT.

Table des matières

Remerciement	iii
Financement	v
1 Introduction	1
1.1 Introduction	1
1.2 Les enjeux de la FA	3
1.3 Objectifs de la thèse	7
1.4 Structure du manuscrit	8
2 Revue de littérature	11
2.1 Introduction	11
2.2 L'optimisation structurale	11
2.2.1 Problème d'optimisation structurale	12
2.2.2 Les algorithmes déterministes	14
2.3 Les problèmes d'optimisation structurale	15
2.3.1 L'optimisation topologique	15
2.4 Les critères de tenue mécanique et l'optimisation topologique	25
2.5 Les matériaux et structures architecturés	28
2.6 Les méta-matériaux auxétiques	34
2.7 Conclusion de l'étude bibliographique	35
3 La méthode NURBS-based SIMP - L'algorithme SANTO	37
3.1 Introduction	37
3.2 La méthode NURBS-based SIMP	38
3.2.1 Les entités NURBS	38
3.3 La méthode NURBS-based SIMP	40
3.4 L'algorithme SANTO	43
3.5 Exemples d'applications de SANTO	46
3.5.1 Cas 2D	46
3.5.2 Cas 3D	49
3.6 Conclusion	51
4 Critère de Von Mises dans SANTO	53
4.1 Introduction	53
4.2 Contrôle des contraintes	54
4.3 Formulation de la contrainte	58
4.4 Résultats numériques	61

4.4.1	Cas d'études 2D	62
4.4.2	Résultats BK1-2D	63
4.4.3	Résultats BK2-2D	66
4.4.4	Cas d'études 3D	72
4.5	Conclusion	76
5	Critère de rupture dans SANTO	79
5.1	Introduction	79
5.2	Formulation de la contrainte	81
5.2.1	Stratégie de mise à jour du paramètre χ	84
5.3	Résultats numériques	85
5.3.1	Benchmark 2D	86
5.3.2	Cas d'études 3D	97
5.4	Conclusion	100
6	Multi-échelle dans SANTO	107
6.1	Introduction	107
6.2	L'homogénéisation	108
6.3	multi-matériau	111
6.3.1	Variables de conception et descripteurs géométriques et topologiques	111
6.3.2	Définition des fonctions de coût et contraintes	113
6.4	Résultats numériques	116
6.4.1	Cas d'études 2D	117
6.4.2	Résultats BKMS1-2D	120
6.4.3	Résultats BKMS2-2D	126
6.4.4	Cas d'études 3D	128
6.5	Conclusion multi-matériau/multi-échelle	132
7	Matériaux auxétiques	135
7.1	Introduction	135
7.2	Définition du problème d'optimisation	136
7.3	Cas d'étude	139
7.4	Cas d'étude 2D : résultats	141
7.4.1	Influence de la topologie initiale sur la solution optimale	142
7.4.2	Influence des paramètres entiers des NURBS sur la topologie optimale	144
7.4.3	Influence du paramètre α sur la topologie optimale	146
7.4.4	Influence des paramètres α et β et de l'anisotropie sur la topologie optimale	148
7.5	Cas d'étude 3D : résultats	150
7.6	Conclusions et perspectives	152
8	Conclusion générale	157
8.1	Conclusion Générale	157
8.2	Perspectives de la thèse	160
A	Calcul gradient HHVM	163
B	Définition des critères de rupture	167
C	Calcul gradient pour critères de rupture	169

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	ix
D Gradient compliance multi-échelle/multi-matériau	173
Bibliographie	187
Liste des publications issues de cette thèse	189

Table des figures

1.1	Les méthodes d'optimisation structurale [1]	4
1.2	Cycle de fabrication d'une pièce pour la FA	9
2.1	Algorithme de la méthode SIMP	18
2.2	Exemple de fonctions de bases et le support associé	20
2.3	L'algorithme BESO	25
2.4	a)Benchmark étudié, b)Holmberg <i>et al.</i> , 2013, c)Pereira <i>et al.</i> , 2004, d)Bruggi, 2008, e)Allaire <i>et al.</i> , 2008	27
2.5	a) Structure globale : échelle supérieure b) VER : échelle inférieure	29
2.6	Interpolation Méthode SIMP ordonnée	32
3.1	Propriété du support local	40
3.2	Structure générale de l'algorithme SANTO	44
3.3	Calcul du plan de coupe : cas 2D	45
3.4	Cas d'étude 2D : poutre encastrée	47
3.5	Topologie finale cas d'étude 2D	48
3.6	Cas d'étude 2D : résultat ANSYS Workbench® - $C = 4518$ N.mm	48
3.7	Cas d'étude 3D : poutre encastrée	50
3.8	Topologie finale, cas d'étude 3D	50
3.9	Cas d'étude 3D : résultat ANSYS Workbench® - $C = 4281$ N.mm	51
4.1	Résultat suite à un problème de singularité pour un problème résolu avec l'agorithme d'optimisation TOSCA	55
4.2	Effet de la relaxation des contraintes	58
4.3	Premier cas d'étude (BK1-2D) : géométrie de la plaque MBB 2D et conditions aux limites	62
4.4	Second cas d'étude (BK2-2D) : géométrie du domaine en L 2D et les conditions aux limites associées.	63
4.5	Résultats B-Spline : problème BK1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de forme pour le problème (4.20)	64
4.6	Résultats NURBS : problème BK1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de forme pour le problème (4.20)	65
4.7	Probleme BK1-2D : fraction volumique vs. nombre de PC et degrés pour les solutions B-spline et NURBS du problème (4.20)	65
4.8	Critère de HHVM adimensionné de l'Eq. (4.16) pour les solutions B-spline du problème (4.20)	66

4.9	Critère de HHVM adimensionné de l'Eq. (4.16) pour les solutions NURBS du problème (4.20)	67
4.10	Fonction objectif et fonction contrainte vs. nombre d'itérations	71
4.11	Frontière de la topologie optimisée et maillage correspondant à la fin du processus d'optimisation	72
4.12	Critère de HHVM [MPa] et performances des solutions optimisées après reconstruction de la frontière : (a) solution B-Spline du problème (4.20), (b) solution B-Spline du problème (4.21), (c) solution ANSYS-SIMP du problème (4.20), (d) solution ANSYS-SIMP du problème (4.21)	73
4.13	Troisième cas d'étude (BK3-3D) : géométrie de la barre en L 3D	74
5.1	Cas d'étude 2D (BKF-2D) : domaine 2D en L	87
5.2	Résultats B-Spline : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (5.13)	88
5.3	Résultats NURBS : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (5.13)	89
5.4	Fraction volumique vs. nombre de PC et degrés pour les solutions B-spline et NURBS du problème (5.13)	89
5.5	Résultats B-spline : distribution de l'indice de rupture au sein de la structure pour le problème (5.13)	90
5.6	Résultats NURBS : distribution de l'indice de rupture au sein de la structure pour le problème (5.13)	91
5.7	Résultats B-Spline et NURBS : sensibilité de la topologie optimale à la direction d'orthotropie pour le problème (5.13)	93
5.8	Sensibilité de la topologie optimale à l'amplitude du chargement pour le problème (5.13)	94
5.9	Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 4 pour les différentes orientations de l'axe principal d'orthotropie sur le problème (5.13)	95
5.10	Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 1 pour les différentes directions de fibre sur le problème (5.14)	96
5.11	Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 3 sur le problème (5.14)	97
5.12	Cas d'étude 3D (BK3-3D) : géométrie et maillage	98
5.13	Résultats B-Spline : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.13) pour différents critères de rupture considérés	99
5.14	Résultats NURBS : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.13) pour différents critères de rupture considérés	103
5.15	Distribution spatiale de l'indice de rupture pour les topologies optimisées dans les Figs. 5.13 et 5.14	104
5.16	Résultats B-Spline : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.14) pour différents critères de rupture considérés	105
5.17	Résultats NURBS : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.14) pour différents critères de rupture considérés	106
6.1	Représentation schématique du domaine de définition du VER composé de $N_m = 4$ matériaux et le vide.	111
6.2	Premier cas d'étude 2D (BKMS1-2D) : géométrie de la poutre encastree	118

6.3	Configuration initiale du CG de chaque phase matériau dans le VER - BKMS1-2D	119
6.4	Deuxième cas d'étude 2D (BKMS2-2D) : géométrie de la plaque trouée	119
6.5	Configuration initiale du CT de chaque phase matériau dans le VER - BKMS2-2D	120
6.6	Résultats B-spline - problème BKMS1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (6.26)	121
6.7	Résultats NURBS : problème BKMS1-2D - sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (6.26)	122
6.8	Problème BKMS1-2D : synthèse résultats	123
6.9	Problème BKMS1-2D : influence de la configuration initiale sur la solution optimale	123
6.10	BKMS1-2D - sensibilité de la solution optimale aux fractions volumiques et aux nombre de phases matériau pour le problème (6.26) pour des solutions B-spline (a) - (d) et NURBS (e) - (h).	125
6.11	BKMS2-2D : sensibilité de la topologie optimale aux sollicitations extérieures macroscopiques - initialisation avec $N_h = 4$ trous; solutions B-spline (a) - (c) et NURBS (d) - (f)	127
6.12	BKMS2-2D : sensibilité de la topologie optimale aux sollicitations extérieures macroscopiques - initialisation avec $N_h = 1$ trou; solutions B-spline (a) - (c) et NURBS (d) - (f)	128
6.13	BKMS3-3D : Géométrie et conditions de chargement	129
7.1	Comportement d'un matériau auxétique	135
7.2	Dimensions des VER pour les cas 2D et 3D	140
7.3	Topologie initiale cas d'étude 3D	141
7.4	Configuration optimisée du VER dans le cas mono-matériau - $\alpha = 0.05$	153
7.5	Configuration optimisée du VER dans le cas bi-matériau - $\alpha = 0.05$	154

Liste des tableaux

3.1	Paramétrage de l'algorithme GC-MMA	47
4.1	paramètres de l'algorithme GC-MMA	61
4.2	BK2-2D : Topologies optimales pour différentes formulations du CNLPP	68
4.3	BK2-2D : critère de HHVM adimensionné de l'Eq. (4.16) pour les topologies optimales pour les différentes formulations du CNLPP	69
4.4	BK3-3D : topologies optimisées pour différentes formulations du problème	75
4.5	BK3-3D : critère de HHVM adimensionné de Eq. (4.16) pour les topologies optimales pour les différentes formulations	76
5.1	propriétés mécaniques du matériaux composite	86
5.2	propriétés de résistance du matériau	86
5.3	conditions de chargement étudiées	87
6.1	propriétés mécaniques des matériaux	117
6.2	Fractions volumiques BKMS1-2D	118
6.3	Conditions de chargement utilisées pour BKMS2-2D	120
6.4	Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS2-2D - résultats Figure 6.11	126
6.5	Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS2-2D - résultats Figure 6.12	126
6.6	Fractions volumiques BKMS3-3D	129
6.7	BK3-3D : topologies optimisées pour différents cas de chargement	130
6.8	Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS3-3D	130
6.9	BK3-3D : topologies optimisées pour différentes fractions volumiques imposées aux phases matériau	131
7.1	propriétés mécaniques des matériaux	140
7.2	Définition des topologies initiales pour le modèle 2D	141
7.3	Coefficient de Poisson vs. N_h , cas mono-matériau	142
7.4	Coefficient de Poisson vs. N_h , deux phases matériau	143
7.5	Coefficient de Poisson vs. N_h , trois phases matériau	143
7.6	Courbes d'évolution de la valeur du coefficient de Poisson et de la fonction objectif en fonction du nombre de PC et des degrés des fonctions de base - une seule phase matériau	145
7.7	Courbes d'évolution de la valeur du coefficient de Poisson et de la fonction objectif en fonction du nombre de PC et des degrés des fonctions de base - deux phases matériau	146

7.8	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas mono-matériau	147
7.9	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas bi-matériau	148
7.10	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas tri-matériau	149
7.11	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas mono-matériau	150
7.12	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas bi-matériau	151
7.13	Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas tri-matériau	152
7.14	Coefficients de Poisson finaux des résultats Figs. 7.4 et 7.5	152
B.1	Composantes de la matrice M^f	168
B.2	Composantes du vecteur m^f	168

Table des abréviations

AESO : Addition Evolutionary Structural Optimization
AIG : Analyse IsoGéométrique
ALM : Additive Layer Manufacturing
AS : Active Set
BESO : Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation
CAO : Conception Assistée par Ordinateur
CL : Conditions aux Limites
CLP : Conditions aux Limites Périodiques
CONLIN : CONvex LINearization
DL : Degré de Liberté
DR : Design Region
EF : Éléments finis
ESO : Evolutionary Structural Optimisation
FA : Fabrication Additive
FAO : Fabrication Assistée par Ordinateur
FEM : Finite Element Method
GC-MMA : Globally-Convergent Method of Moving Asymptotes
HHVM : Huber Hencky Von Mises
IGES : Initial Graphics Exchange Specification
HJ : Hamilton-Jacobi
IP : Indice de Performance
KKt : Karush-Kuhn-Tucker
LMD : Layer Metal Deposition
LSF : Level-Set function
LSM : Level-Set Method
MBB : Messerschmitt Bölkow Blohm
MMA : Method of Moving Asymptotes
N-MMI : NURBS-based Multi-Material Interpolation
NDR : Non-Design Region
NPR : Negative Poisson Ratio
NURBS : Non-Uniform Rational B-Spline
OCEAN-ALM : Optimisation et Conception pour une mÉthodologies AvaNcée pour l'ALM
OT : Optimisation Topologique
PC : Point de Contrôle

PI : méthode des Points Intérieurs
PPNLC : Problème de Programmation Non-Linéaire sous contraintes
RAMP : Rational Approximation of Material Properties
RBF : Radial Basis Function
SANTO : SIMP-and-NURBS for Topology Optimisation
SEHM : Strain Energy-based Homogénéization Method
SIMP : Solid Isotropic Material with Penalisation
SLM : Selective Layer Manufacturing
SLSQP : Sequential Least Square Programming
STEP : STandard for the Exchange of Product model data
STL : Standard Tessellation Language
SQP : Sequential Quadratic Programming
TH : critère de rupture de Tsai-Hill
TI : Taux d'Inclusion
TR : Taux de Rejet
TW : critère de rupture de Tsai-Wu
VAT : Variable Angle Toe
VER : Volume Élémentaire Représentatif

Chapitre 1

Introduction

1.1 Introduction

L'industrie a évolué petit à petit à partir des années 80 et arrive désormais à un tournant depuis les 15 dernières années. En effet, les attentes des entreprises ont fortement changé et le concept d'industrie de masse, privilégié il y a quelques années, se perd aujourd'hui au profit d'une demande beaucoup plus ciblée et variant fortement d'une entreprise à une autre ou encore d'un consommateur à un autre. C'est pourquoi le besoin de développer des produits qui soient adaptés aux besoins très variés des consommateurs prend de plus en plus d'importance. Cependant, pour y parvenir, les procédés de fabrication traditionnels seraient trop coûteux en termes de temps mais également en termes d'argent. Dans ce contexte très particulier, une branche de procédés semble pouvoir apporter des solutions : la fabrication additive (FA). Apparue dans les années 80 avec les premiers procédés de prototypage rapide, la FA est un procédé par lequel un modèle dessiné numériquement est recréé par l'ajout de couches successives de matière. Aujourd'hui considérée comme l'une des principales technologies du futur au même titre que la réalité augmentée, l'intelligence artificielle ou encore la simulation numérique, elle offre une possibilité de fabrication des pièces beaucoup plus vaste que l'ensemble des procédés traditionnels existants jusqu'à présent. En effet, la FA offre la possibilité de produire des pièces aux géométries très complexes et non réalisables autrement, et ce à un coût raisonnable.

Les découvertes réalisées dans ce domaine ainsi que le savoir-faire grandissant permettent aujourd'hui de fabriquer des pièces à forte valeur ajoutée tout en limitant les déchets (notamment de matière) lors de la fabrication et réduisant ainsi son impact environnemental, ce qui en fait un atout supplémentaire dans une époque où le facteur écologique affecte de plus en plus le domaine de l'industrie. Chaque année, l'étendue des possibilités de la FA est repoussée un peu plus à tel point que certaines recherches ont permis d'imprimer des neurones de synthèse ainsi que de la peau humaine artificielle, ou encore de fabriquer rapidement des moteurs de fusée. Ainsi, de plus en plus de secteurs où les besoins en termes de technologie de pointe sont très variés, tels que l'aéronautique, l'aérospatial, le médical, l'automobile ou encore le militaire, s'y intéressent. La FA offre la possibilité de coupler rapidité, économie de matière, complexité et bonne résistance des produits.

Bien que la FA offre un potentiel incroyable, elle est néanmoins soumise à quelques limites qui empêchent une bonne utilisation systématique dans le milieu de l'entreprise. Les principales limites auxquelles se confronte la FA se classent suivant 4 catégories :

- *Les procédés* : la FA étant une technique en forte évolution, les procédés évoluent énormément et de nombreuses questions se posent sur les capacités de cette technologie à s'adapter à ces

changements. En effet, les problèmes physiques sont propres à chacun des procédés (transferts thermiques, viscosité des matériaux, magnétisme des poudres dans le cas des matériaux métalliques, contraintes résiduelles, phases de post-traitement, ...). Une autre question qui se pose réside dans la définition même de la FA. En effet, lorsqu'il s'agit de fabriquer des produits par empilement de couches de matière, le bon état des surfaces des produits fabriqués n'est pas toujours garanti. Souvent, des retouches d'usinage sont nécessaires et cela crée des défauts géométriques et l'impact de ces défauts sur la tenue mécanique de la pièce n'est pas toujours connu...

- *Les machines* : La FA se traduit également par l'arrivée de nouveaux paramètres de fonctionnement des machines : approvisionnement en poudre, vitesse de déplacement de la buse, puissance du laser, mise en place des supports, définition du chemin de fabrication...
- *Les outils numériques* : Une autre limite se trouve sur le développement des moyens numériques de conception des pièces qui seront dédiés à la FA : en effet les outils numériques doivent évoluer pour apporter des réponses satisfaisantes aux possibilités apportées par la FA. De plus, les méthodes de définition du modèle numérique sont modifiées à toutes les phases de définition du produit, c'est à dire lors de la *Conception Assistée par Ordinateur* (CAO), les simulations, la *Fabrication Assistée par Ordinateur* (FAO)...

Ces différentes interrogations font donc de la FA un élément clé de l'industrie de demain mais qui reste aujourd'hui en cours de développement.

Au vu de ces récents développements, la région Nouvelle-Aquitaine, dans le cadre de son plan « usine du futur » a décidé de soutenir un projet régional visant à apporter une réponse à l'ensemble des verrous suivants :

- Le développement d'outils d'optimisation topologique permettant la conception de pièces aux performances fonctionnelles ciblées (rupture, flambage, fréquences propres, stockage d'énergie élastique. ...). En effet, comment prendre en compte les avantages de la FA pour produire des pièces qui permettent de répondre de manière optimale à des performances ciblées ? Cela peut passer par l'optimisation de la topologie du produit permettant d'améliorer ces performances mais également sur la définition des propriétés mécaniques du matériau.
- La caractérisation des propriétés mécaniques pour la conception, la fabrication et le contrôle des pièces dédiées à l'ALM afin d'être utilisées dans des domaines tels que l'aéronautique, le nucléaire, etc.
- L'élaboration et le développement des techniques de FA au sein de la région.

Dans ce contexte, les entreprises CEA Cesta, SEIV Alcen et Catie ainsi que les laboratoires I2M de l'ENSAM et ESTIA-Recherche de l'ESTIA ont décidé d'associer leurs compétences afin de proposer cinq thèses et deux post-doc visant à apporter des réponses à l'ensemble de ces interrogations, à travers le projet OCEAN-ALM (Optimisation et Conception pour une mÉthodologies AvaNcée pour l'ALM). Ce projet permet également d'éclairer les plateformes d'innovation régionales telles que FUTURPROD ou encore ADDIMADOUR qui sont majoritairement dédiés à la FA. D'un point de vue général, le projet OCEAN-ALM a pour but d'étudier deux technologies de FA : la *Selective Laser Manufacturing* (SLM) et la *Laser Metal Deposition* (LMD) qui sont deux technologies de FA à base de poudre métallique. Plus précisément, le projet OCEAN-ALM doit ainsi répondre à deux enjeux majeurs.

1. Développer des méthodes et des outils numériques prenant en compte les libertés de conception apportées par la FA. Pour cela, il est nécessaire de proposer des solutions permettant la prise en compte des contraintes liées à l'environnement des pièces, des contraintes liées à la fabrication et des contraintes de conception dans des méthodes d'optimisation définies pour la FA. Ainsi, la maîtrise de la chaîne numérique en amont de la fabrication permettrait d'apporter des solutions et des alternatives aux problèmes rencontrés par les algorithmes d'optimisation disponibles dans le commerce, qui sont complexes et limités en termes de type de pièce réalisable et ne permettent pas une bonne compatibilité avec les logiciels de CAO. En effet, les résultats proposés par ces logiciels d'optimisation nécessitent des temps de reconstruction très longs qui peuvent faire appel à des décisions humaines, qui pourraient être qualifiées de « subjectives ». Les axes de recherche privilégiés dans le cadre du projet OCEAN-ALM sont le développement d'outils numériques permettant de contrôler, lors de la conception, différents phénomènes physiques tels que la tenue mécanique de la structure (à travers l'analyse des critères de limite d'élasticité ou de rupture), des déplacements structuraux, des contraintes de fabrication (tels que le rayon de courbure, les diamètres minimal et maximal des branches topologiques de la structure). Un deuxième aspect étudié dans ce contexte est la prise en compte dans la conception des comportements multi-échelle ou multi-matériau des structures qui permettent une plus vaste liberté de conception.
2. Caractériser les matériaux et procédés de FA. En effet, il est nécessaire de prendre en compte les contraintes et les particularités apportées par la fabrication additive directement dans la conception et le dimensionnement des pièces. Les procédés sont soumis à des phénomènes physiques différents (tels que les variations de température, le changement d'état de la matière, l'oxydation...) qui doivent être connus et contrôlés pour permettre la bonne réalisation des pièces, c'est-à-dire en conservant les performances obtenues par la définition numérique de la topologie de la pièce. Pour cela, la caractérisation des matériaux et des procédés utilisés via l'ALM est un sujet crucial, principalement maîtrisé pour des pièces simples (mono-matériau) mais peut difficilement être généralisé à des pièces plus complexes. Les principaux travaux sur le sujet étudiés dans le cadre du projet OCEAN-ALM, sont la caractérisation (numérique et expérimentale) en fatigue des pièces en titane tout en considérant les défauts géométriques ainsi que l'hétérogénéité de matière. Des travaux portent également sur l'étude de la tenue mécanique des structures architecturées obtenues via le procédé SLM.

Cette thèse porte sur le premier enjeu de ce projet : le développement d'outils numériques dédiés à la FA.

1.2 Les enjeux de la chaîne numérique de conception en fabrication additive

Les larges possibilités en termes de performances des pièces fabriquées par la FA nécessitent de développer des méthodes de conception des pièces qui soient adaptées. En effet, pour pouvoir optimiser les performances vis-à-vis d'un critère donné, la méthode de conception doit être orientée de manière à optimiser ce critère de performance, c'est pourquoi la notion d'optimisation a été introduite dans la chaîne de conception. En particulier, les problèmes abordés dans les applications relatives au projet OCEAN-ALM appartiennent à la classe de problèmes d'optimisation structurale. Les méthodes d'optimisation structurale ont beaucoup évolué au cours des dernières années, mais, fondamentalement, il est possible de les classer en trois familles, représentées à titre illustratif dans la Fig. 1.1 :

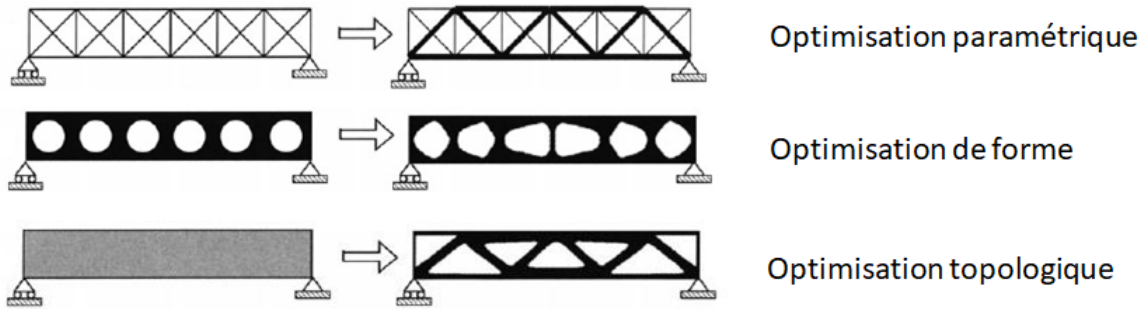


FIGURE 1.1 – Les méthodes d'optimisation structurale [1]

- L'optimisation paramétrique : les variables sont des paramètres géométriques ou matériau de la structure. En pratique cette méthode consiste à venir modifier certaines dimensions de la structure pour améliorer les performances de celle-ci vis-à-vis d'un ensemble de critères (formulés sous la forme de fonction objectif et de contraintes d'optimisation). Lors des deux premières décennies qui ont suivies le début des travaux portés sur l'optimisation structurale, les recherches se sont focalisées sur l'optimisation paramétrique. Celle-ci a, dans un premier temps, été principalement utilisée dans le but d'alléger des structures treillis [2–4], puis a été étendue à des structures d'ordre plus élevé [5]. Ce type d'optimisation est très apprécié d'un point de vue industriel car elles sont définies et résolues rapidement sans ajouter d'artefact particulier et avec peu de contraintes d'optimisation [6]. Cependant, les algorithmes développés sont souvent tournés vers le cadre académique et ne permettent pas toujours de prendre en compte les attentes industrielles. C'est pourquoi de plus en plus de travaux se concentrent sur cet aspect [6].
- L'optimisation de forme : les paramètres qui décrivent la frontière du domaine sont optimisés [7, 8]. Ce type d'optimisation a marqué un tournant dans le développement des processus de conception car elle requiert d'avoir un modèle éléments finis (EF) qui évolue au cours du calcul. Dans une telle méthode la représentation de la frontière est un facteur important. Il existe plusieurs méthodes de représentation de la frontière. Dans un premier temps, les fonctions polynômes ont été utilisées [9, 10] en prenant les coefficients de définition du polynôme comme variables d'optimisation. Une approche plus générale consiste à décrire la frontière comme une combinaison linéaire de fonctions (polynômiales) de base [11]. Cependant, l'utilisation de polynômes de degré élevé peut créer des oscillations sur la frontière. Une deuxième méthode consiste à utiliser des fonction Splines [12, 13]. Ces fonctions sont usuellement définies par des polynômes de faible degré permettant d'éviter ce phénomène oscillatoire. Bien qu'elle apporte plus de liberté par rapport à l'optimisation paramétrique, l'optimisation de forme dépend fortement de la topologie initiale et son application est souvent limitée par les problèmes liés au remaillage du domaine (opération souvent très délicate) lorsque sa frontière évolue au cours des itérations. Pour pallier à ce problème, des stratégies de remaillage dédiées s'avèrent nécessaires.
- L'optimisation topologique (OT) : La géométrie est optimisée en agissant sur la distribution du matériau dans le domaine initial. Ce type d'optimisation a connu un gain d'intérêt important depuis les premiers travaux à la fin des années 1980 [14]. Dans ce type de problèmes, les variations des propriétés au sein du domaine d'optimisation sont définies en traduisant mathématiquement la répartition de la matière à travers le domaine topologique. La ma-

tière est alors répartie au sein du domaine d'optimisation par des phases *solides* ou *vides* qui définissent la présence ou non de matière. Ces phases de matières sont exprimées mathématiquement et implémentées dans un *Problème de Programmation Non-Linéaire sous Contraintes* (PPNLC) qui vise à optimiser une fonction objectif tout en respectant une ou plusieurs fonctions contraintes. Sa formulation permet d'étendre le champ des problèmes et de considérer des problématiques plus complexes telles que la prise en compte des contraintes mécaniques, des phénomènes de flambage, etc. Elle permet aussi de considérer d'autres types de problèmes tels que l'optimisation multi-échelle ou encore l'optimisation multi-matériau.

Les travaux présentés dans ce manuscrit se focalisent sur le thème de la conception par l'OT.

Comme le montre la Fig. 1.2, dans le cadre de la FA, le cycle de fabrication d'un produit est modifié par rapports aux cycles de fabrication traditionnels. En effet, dans un cycle de conception traditionnel, la géométrie est d'abord créée à partir d'un logiciel CAO, puis maillée et soumise à des calculs par EF de manière à valider la définition de la conception, tout en respectant à chaque étape les normes de validation du produit. Dans un cadre de FA, les trois étapes détaillées ci-dessus sont regroupées en une seule et même étape permettant de fournir un modèle numérique optimisé et validant les règles de conception spécifiques au produit. Deux aspects importants se dégagent ainsi lors de la conception : l'exactitude des modèles mathématiques définissant les propriétés mécaniques et la précision de la reconstruction de la géométrie en fin d'optimisation de manière à assurer une cohérence lors de l'utilisation future par des logiciels CAO et/ou FAO. Plus généralement, le cycle de fabrication d'un produit se divise alors en plusieurs étapes, comme montré à la Fig. 1.2 :

- *La définition du problème* : cette étape vise à donner les limites du problème d'OT, c'est-à-dire à définir l'objectif principal de l'OT, à définir les matériaux considérés ainsi que les dimensions d'enveloppe de la structure étudiée. De plus, l'environnement de la pièce est également pris en compte, c'est-à-dire qu'il faut définir si la pièce évoluera dans un contexte purement mécanique ou alors thermique, définir le type de comportement que doit prendre un compte l'optimisation (multi-échelle, multi-physique...). Enfin un dernier aspect à prendre en compte dès cette étape est l'étude des contraintes liées au procédé de fabrication (dimension des branches topologiques, supports...).
- *L'OT et la définition de la CAO/FAO* : cette étape a pour but de résoudre le PPNLC défini par le couple de fonction objectif et fonctions contraintes déterminé lors de l'étape précédente. À la suite de l'optimisation, la topologie finale de la pièce est créée. La deuxième partie de cette étape consiste à transporter cette géométrie finale vers un format qui soit réutilisable par les modèles CAO/FAO tout en gardant les performances trouvées grâce à l'OT.
- *Impression de la pièce* : cette étape se divise en deux parties principales. Une première partie qui a pour but de déterminer les paramètres liés au procédé de fabrication (par exemple le débit de poudre, la vitesse de la buse, la puissance du laser ou encore la définition des supports, dans le cadre des procédés SLM et LMD. Une deuxième étape qui consiste à déterminer le modèle FAO qui permettra l'impression de la pièce, puis la fabrication. À la suite de cette étape les post-traitements (ré-usinage pour un meilleur état de surface, traitement chimique pour de meilleures propriétés...) sont appliqués à la pièce.
- *Validation de la pièce* : dans un dernier temps, la pièce est validée à travers divers essais et simulations dans le but d'assurer que les performances obtenues à la suite de l'OT soient bien retrouvées sur la pièce finale.

À travers la Fig. 1.2, il est possible de comprendre que l'OT a un impact sur l'ensemble des étapes du cycle de fabrication d'un produit.

- *Impact sur la définition du problème* : Quelles sont les limites des fonctions pouvant être utilisées dans un algorithme d'OT? *A priori* aucun, à partir du moment où le modèle mathématique de la fonction a été correctement défini et implémenté dans l'algorithme d'OT. Cependant, dans la réalité, seul un nombre très limité de fonctions d'OT sont disponibles dans les logiciels d'OT du commerce (OpstiStruct d'Altair®, TOSCA de Dassault Systèmes® ou encore le module d'OT disponible sur ANSYS Workbench®).
- *Impact sur le processus de conception* : Le problème d'OT doit être suffisamment vaste pour considérer l'ensemble des phénomènes physiques auxquels sera soumise la pièce lors de sa fabrication mais également lors de sa mise en service.

À cela s'ajoute le développement des procédés de fabrication qui permettent l'impression de structures architecturées type *structures lattices*. C'est pourquoi certains logiciels du commerce (tel que TOSCA) proposent aujourd'hui la possibilité de réaliser des optimisations multi-échelles. Néanmoins, la définition et la formulation de ce type de problèmes nécessite une bonne définition mathématique de la géométrie et des propriétés physiques sur les deux échelles du problème étudié (microscopique/mésoscopique et macroscopique) ainsi qu'une méthode robuste d'homogénéisation permettant de faire le lien entre les deux échelles, tout en conservant des temps de calcul raisonnables ainsi qu'une bonne fiabilité vis-à-vis de la robustesse et de la fabricabilité de la structure.

Les progrès des procédés de FA permettent également de concevoir des structures multi-matériaux. Avec ces problèmes, intervient une nouvelle fois la nécessité d'une bonne formulation mathématique du problème d'OT, de manière à définir correctement la frontière entre les différents domaines matériaux. Si cette fonctionnalité n'est pas encore disponible dans les logiciels du commerce, de nombreux travaux se consacrent à l'étude de ce sujet.

En réunissant l'ensemble des développements précédents, un nouveau défi est à considérer : la complexité des problèmes d'OT augmente fortement et un nombre plus important de variables d'optimisation est nécessaire pour décrire correctement le problème. Les algorithmes doivent donc être plus robustes pour être en mesure de trouver les solutions optimales ou, tout simplement, pour converger.

De plus, la description de la géométrie lors de l'OT doit être faite de manière à être correctement réutilisée par des logiciels de CAO et/ou de FAO. En effet, à la suite de l'optimisation les géométries des structures doivent être fidèlement exportées en conservant notamment des frontières exactes. Pour cela, de plus en plus de méthodes d'OT utilisent des méthodes d'*Analyse IsoGéométriques* (AIG) pour décrire la topologie de la structure. Cependant, les logiciels disponibles dans le commerce utilisent des représentations de la topologie basée sur la modélisation EF. Ces techniques de modélisation nécessitent de discrétiser la structure, ce qui donne en sortie d'OT une géométrie qui n'est pas directement exploitable par les logiciels de CAO et des étapes intermédiaires doivent être réalisées pour obtenir une géométrie CAO-exploitable. En général, la frontière de la topologie est approximée sous un format STL (*Standard Tessellation Language*), qui est un format définissant la topologie à l'aide d'un maillage composé de triangles créés grâce à leurs sommets et leurs normales extérieures. D'autres méthodes utilisent des formats STEP (*STandard for the Exchange of Product model data*) ou encore le format IGES (*Initial Graphics Exchange Specification*). Cependant, les frontières des modèles 3D obtenues suite à ce type de reconstruction n'est pas parfaite et

des différences peuvent apparaître entre la géométrie trouvée en sortie d’optimisation et la géométrie trouvée après la reconstruction.

- *Impact sur le processus de fabrication* : Lors de la fabrication d’une pièce, la géométrie est d’abord discrétisée à l’aide d’un logiciel FAO dans le but de préparer la géométrie pour la fabrication. Lors de cette étape, le modèle est divisé en tranches d’épaisseur définie modélisant les couches successives d’apport de matière lors de l’impression. Les logiciels de FAO sont capables d’utiliser un fichier STL pour obtenir une géométrie de base avant la préparation à l’impression. Dans ce contexte, la topologie est alors soumise à une double discrétisation successive qui altère, inéluctablement, ses propriétés par rapport à la géométrie trouvée en sortie d’optimisation. Un axe important de recherche est, aujourd’hui, dédié à la définition des formats de fichier utilisés par les logiciels FAO.

De plus, les procédés de fabrication disponible pour la FA sont souvent accompagnés de limites de conception importantes (dimensions minimales et maximales des branches topologiques, angles de surplomb, définition des supports...) et doivent être directement intégrées en tant que fonctions contraintes lors du processus d’OT au moment de la conception. Ces contraintes peuvent être difficilement prises en compte lors de l’optimisation car elles nécessitent une représentation mathématique ayant un sens géométrique. La discrétisation de la géométrie, comme c’est le cas dans la plupart des méthodes d’OT, ne permet donc que difficilement de considérer de telles contraintes, car elles entraînent des imprécisions entre les données trouvées en sortie d’OT et sur la géométrie reconstruite.

1.3 Objectifs de la thèse

À la suite des problèmes énoncés ci-dessus, les travaux de ce manuscrit visent à proposer des solutions et méthodologies pour éviter certains écueils souvent rencontrés lors de la conception d’un produit. Cette thèse a comme objectif principal de continuer (et généraliser) le développement de la méthode d’OT basée sur les hypersurfaces NURBS (de l’anglais *non-uniform rational basis spline*) proposée par G. Costa [15–17] et d’apporter des solutions de manière à prendre en compte des critères de dimensionnement faisant intervenir des réponses structurales à la fois locales (par exemple le tenseur des contraintes calculé en un point critique) et globales (par exemple l’énergie de déformation). En particulier, les travaux s’orientent autour de différents points :

- Comment intégrer les principaux critères de tenue mécanique, pour matériaux isotropes et anisotropes, dans la méthode d’OT basée sur les hypersurfaces NURBS ? En effet, les algorithmes d’OT disponibles dans le commerce proposent la possibilité d’intégrer le critère de Huber Hencky Von Mises (HHVM) dans la formulation du problème d’OT. Cependant, ces logiciels utilisent des heuristiques pour résoudre le problème dans un temps raisonnable et la solution trouvée ne respecte pas le critère de HHVM sur les topologies trouvées, ni avant, ni après la reconstruction de la frontière. De plus, la formulation du problème ne prend pas en compte les soucis de convergence vers les optimum locaux qui sont fortement augmentés à cause des spécificités propres à la prise en compte des contraintes mécaniques dans l’OT, telle que le problème de singularité ou encore le problème de non-linéarité. Plus de détails sur ces problèmes sont donnés dans le chapitre 4. De plus, un autre problème non pris en compte par les logiciels du commerce lors de l’intégration des critères de tenue mécanique, réside dans la nécessité d’utiliser des fonctions d’agrégation, qui si elles ne sont pas formulées correctement, peuvent créer des problèmes d’*overflow* (plus de détails sont donnés dans le chapitre 4). En ce qui concerne l’intégration des critères de tenue pour matériaux anisotropes, les problèmes

fondamentaux (tels que le problème de singularité, de non-linéarité ou encore d'*overflow*) restent les mêmes, cependant, ils ne sont pas codés dans les logiciels du commerce.

- En ce qui concerne les matériaux architecturés (dont les structures lattice) cette thèse vise à généraliser l'approche d'optimisation multi-échelle présenté dans le cadre des travaux de thèse de G. Bertolino [18] au cas des matériaux lattice dont le volume élémentaire représentatif est composé par plusieurs phases matériaux. L'idée est d'élargir le champ des possibles en exploitant le potentiel des nouveaux procédés FA multi-matériau (les dernières avancées en terme de FA multi-matériau sont résumées dans [19]) pour créer des matériaux architecturés ayant des propriétés mécaniques, thermiques etc. bien meilleurs que celles des structures lattice composées par un seul matériau.
- Grâce aux nouvelles technologies FA multi-matériau il est possible de fabriquer des métamatériaux caractérisés par des propriétés mécaniques extrêmes comme les matériaux auxétiques, c'est à dire des matériaux anisotropes dont les coefficients de Poisson, dans les diverses directions de l'espace, sont négatifs. Avec l'utilisation des technologies FA multi-matériau il est possible d'optimiser non seulement la topologie mais aussi la répartition des divers matériaux afin d'atteindre des valeurs extrêmes des coefficients de Poisson, c-à-d inférieurs à -1 .

1.4 Structure du manuscrit

La structure de ce manuscrit de thèse a été conçue pour répondre aux objectifs définis préalablement. Ainsi, le chapitre 2 vise à réaliser une étude de littérature pour présenter concrètement les différents termes et méthodes utilisées dans ce manuscrit et faire un état de l'art succinct des travaux réalisés portant sur des sujets similaires.

Le chapitre 3 présente la méthode d'OT basée sur la pseudo-densité reformulée dans le cadre des hypersurfaces NURBS [15] et les différents travaux réalisés grâce à cette méthode. Les avantages et les inconvénients de la méthode seront également mis en avant : certaines limites de la méthode seront étudiées et résolues dans ce manuscrit.

Le chapitre 4 a pour objectif d'intégrer dans le cadre de la méthode d'OT basée sur les hypersurfaces NURBS une formulation efficace et originale du critère de tenue de Huber-Hencky-von-Mises pour matériaux isotropes (et a fortiori possédant un système cubique), permettant de contrôler la répartition des contraintes mécaniques au sein de la structure au cours du processus d'optimisation. Le chapitre 5 a pour but d'élargir l'étude réalisée au chapitre 4 au cas des critères de tenue pour matériaux anisotropes en introduisant la notion d'*indice de rupture* et charge à rupture dans la formulation du problème d'OT et en considérant divers critères phénoménologiques : Tsai-Hill, Hoffmann et Tsai-Wu.

Le chapitre 6 détaille le cadre théorique et numérique pour réaliser l'optimisation multi-échelle de matériaux architecturés multi-matériau, tandis que le chapitre 7 propose une application pratique de la méthodologie détaillée au chapitre 6 dans le but d'obtenir des métamatériaux auxétiques à propriétés extrêmes.

Enfin, le dernier chapitre expose les conclusions générales et les perspectives de ces travaux de thèse, suivies par les annexes, et par les références bibliographiques citées dans le manuscrit.

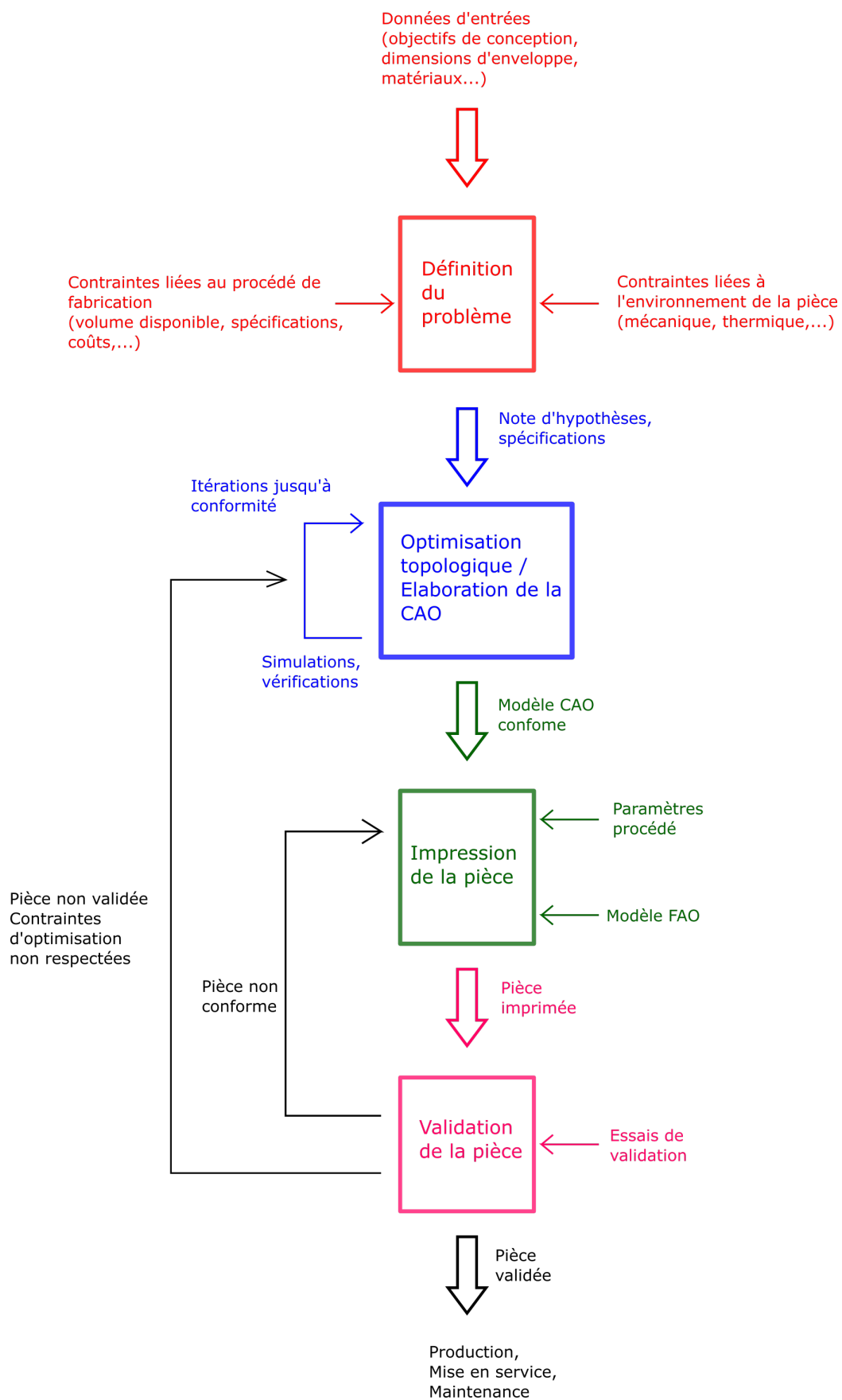


FIGURE 1.2 – Cycle de fabrication d'une pièce pour la FA

Chapitre 2

Revue de littérature

2.1 Introduction

Le deuxième chapitre de ce manuscrit vise à présenter un état de l'art des principaux sujets traités dans ces travaux. Premièrement, les principales méthodes d'optimisation topologique présentes et développées dans la communauté scientifique sont rappelées et détaillées. Leurs principaux avantages seront mis en avant ainsi que les quelques limites qu'ils peuvent rencontrer. Cette étude détaillera ces différents inconvénients et proposera une méthode permettant de surmonter ces difficultés. Cette nouvelle méthode sera détaillée dans le Chapitre 3. Deuxièmement, cet état de l'art se focalisera sur les méthodes utilisées pour prendre en compte la distribution des contraintes mécaniques dans la structure au cours de l'optimisation. Deux points de vue seront pris en compte : l'approche classique, utilisée dans le cadre d'un matériau isotrope, qui consiste à implémenter directement une contrainte explicite basée sur le critère de limite d'élasticité de Huber-Hencky Von Mises (HHVM) ainsi qu'une seconde approche permettant la réalisation d'optimisation pour matériaux anisotropes et se basant sur les critères de ruptures phénoménologiques : Tsai-Hill (TH), Hoffman (Hoff) et Tsai-Wu (TW). Finalement, le développement des techniques permettant la mise en place de nouveaux matériaux tel que les structures lattices ou encore l'optimisation multi-matériau seront détaillés. Ainsi, plusieurs aspects seront développés : une approche multi-échelle classique consistant en l'optimisation de la topologie du Volume Elementaire Représentatif (VER) de la structure lattice tout en minimisant les performances de la structure à l'échelle macroscopique, une approche multi-matériau permettant la répartition de plusieurs matériaux différents dans le domaine d'optimisation et enfin une combinaison de ces deux approches permettant de réaliser des calculs multi-échelle/ multi-matériau. Ce dernier aspect permettra alors de concevoir des méta-matériaux dont le comportement macroscopique est non-conventionnel, tels que les matériaux auxétiques (c'est-à-dire des matériaux dont les coefficients de Poisson sont négatifs).

2.2 L'optimisation structurale

La fabrication additive, ou Additive Layer Manufacturing (ALM), a été désignée par le *Global Agenda Council* du *World Economic Forum* comme l'une des 10 technologies émergentes qui permettront une croissance durable au cours des prochaines années [20]. Elle marque une étape importante dans le phénomène de mutation vers l'industrie de demain. L'ALM présente l'avantage de fabriquer des pièces de géométrie très complexe que les procédés classiques, maîtrisés aujourd'hui, ne permettent pas de réaliser, avec, en plus, la possibilité d'y intégrer la fabrication de pièces multi-matériau. L'ensemble de ces performances offre ainsi la possibilité de réaliser des gains importants

en matière de coût, de masse et de réalisation.

Cependant, la fabrication additive n'en est qu'à ses débuts et de nombreux points restent encore à éclaircir. En effet, la fabrication additive marque un virage important par rapport aux précédentes technologies et les outils actuels, que ce soit d'un point de vue numérique ou technique, ne sont pas adaptés à cette nouvelle technologie et ne permettent pas encore de répondre aux contraintes qu'elle impose, ni de tirer parti de l'ensemble des avantages apportés par cette technologie. En effet, du point de vue numérique, l'ALM offre la possibilité d'utiliser des logiciels directement adaptés à la fabrication additive qui permettraient de prendre en compte les différentes contraintes imposées par celle-ci directement dans le processus de conception des pièces. Du point de vue technique, l'ALM nécessite la compréhension de nouveaux paramètres n'intervenant pas dans les procédés de fabrication traditionnels tels que la fabrication et l'approvisionnement en poudre, la maîtrise de nouveaux procédés de fabrication en constante évolution, les post-traitements.

2.2.1 Problème d'optimisation structurale

L'optimisation structurale est définie par [21], comme le principe de faire en sorte qu'un assemblage de matériaux supporte des charges appliquées de la meilleure façon possible. L'idée principale qui vient à l'esprit quand on parle d'améliorer les performances d'une structure est de la rendre la plus légère possible, cependant il existe d'autres possibilités telle que l'amélioration de la rigidité, de la résistance, de la durée de vie, etc. Il est évident que de tels processus ne peuvent être réalisés sans l'ajout de fonctions contraintes au cours de l'optimisation. Ainsi, plusieurs paramètres fondamentaux interviennent dans la résolution d'un calcul d'optimisation :

- *La fonction objectif* : C'est la fonction principale dont la valeur doit être améliorée lors du calcul d'optimisation. Généralement, elle est définie de manière à être minimisée plutôt que maximisée. Par exemple, si le but de l'optimisation est de maximiser la rigidité d'une structure, il est préférable de réaliser un problème équivalent qui consiste à minimiser la souplesse de la structure.
- *Les variables d'optimisation* : Généralement regroupées dans un vecteur, elles constituent l'ensemble des paramètres qui permettent de décrire le domaine de définition et influent sur la fonction objectif. Leurs valeurs varient au cours de l'optimisation dans le but de minimiser la fonction objectif. Elles représentent souvent des variables géométriques ou des paramètres du matériau.
- *Les fonctions contraintes* : Elles correspondent aux fonctions qui permettent de fixer les frontières du domaine de définition. Elles sont formulées sous la forme d'égalités ou d'inégalités qui doivent impérativement être respectées en sortie d'optimisation. Le choix de ces fonctions varie énormément et dépend généralement du problème considéré. En effet, elles peuvent être de nature géométrique comme le diamètre minimal des branches topologiques [22], le diamètre maximal [23], le rayon de courbure ou encore les angles de surplomb [24], mais aussi de nature physique comme le contrôle des contraintes mécaniques [25–27], des déplacements structuraux [28–30] ou encore des fréquences propres [31, 32].

D'un point de vue mathématique, un problème d'optimisation structurale est classiquement formulé [33–35] comme un problème de minimisation sous contraintes, comme-suit :

$$\begin{aligned}
& \min_{\mathbf{x}} : f(\mathbf{x}), \\
& \text{soumi à :} \\
& \left\{ \begin{array}{l} g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \\ h_j(\mathbf{x}) = 0, \\ \mathbf{x}_{\min} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}_{\max}, \\ i = 1, \dots, n_c \quad j = 1, \dots, m_c, \end{array} \right. \quad (2.1)
\end{aligned}$$

où $f(\mathbf{x})$ est la fonction objectif, g_i les n_c fonctions contraintes d'inégalité, h_j les m_c fonctions contraintes d'égalité et \mathbf{x} le vecteur des variables d'optimisation du problème. Dans l'Eq. (2.1), \mathbf{x}_{\min} et \mathbf{x}_{\max} sont respectivement les vecteurs des bornes inférieure et supérieure du vecteur des variables d'optimisation \mathbf{x} . Ce problème est communément appelé "*Problème de Programmation Non-Linéaire sous contraintes*" (PPNLC). Ce type de problème, souvent complexe, ne peut se résoudre directement et la solution doit être déterminée à l'aide d'un algorithme d'optimisation judicieusement choisi via des critères tels que la présence ou non de contraintes, la linéarité, la convexité et la continuité des fonctions objectif et contraintes par rapport aux variables d'optimisation.

Les algorithmes d'optimisation peuvent être classés suivant certains principes détaillés dans [36]. La première catégorie concerne la présence (ou non) de contraintes d'optimisation. Comme expliqué précédemment, les fonctions contraintes servent à borner le domaine de définition et elles sont généralement utilisées dans les problèmes d'ingénierie classique. Néanmoins, il existe certains domaines tel que le "*curve/surface fitting*" qui peuvent être formulés comme des problèmes d'optimisation sans contraintes [37, 38]. Dans un deuxième temps, la linéarité est considérée. Ce type de problème est considéré lorsque la fonction objectif et les fonctions contraintes sont linéaires par rapport aux variables d'optimisation : ces problèmes forment la classe "*Linear Programming*" [39–41]. Ensuite, il faut regarder la convexité. Cet aspect est fondamental lors de la résolution du problème d'optimisation car il donne des informations sur la nature de la solution. En effet, si \mathbf{x}^f est un optimum global et que la fonction f est convexe, alors $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}, f(\mathbf{x}^f) \leq f(\mathbf{x})$, \mathcal{D} étant le domaine de définition du problème considéré. Par contre, si cette inégalité n'est vérifiée que sur le voisinage de \mathbf{x}^f , alors \mathbf{x}^f est minimum local et la fonction f est non convexe, voir [36]. Dans la majorité des problèmes traités, les fonctions sont non-convexes et l'une des solutions utilisées, par exemple, par l'algorithme *Sequential Quadratic Programming* (SQP) [42, 43], pour les résoudre est d'approximer, à chaque itération du processus d'optimisation, ce problème non-convexe en un problème convexe qui peut être résolu. Enfin, le dernier aspect qui affecte le problème d'optimisation est la continuité. Un problème est dit continu si les fonctions objectif et contraintes sont continues et si le vecteur de variables définition l'est au minimum sur un sous-espace de \mathbb{R}^n .

Une fois que l'ensemble de ces aspects est déterminé, il faut choisir le meilleur algorithme permettant de résoudre le PPNLC en question. Les algorithmes d'optimisation peuvent être classés suivant deux grandes catégories : les algorithmes déterministes [44, 45] et les algorithmes méta-heuristiques [46]. Si le modèle est parfaitement connu et que toutes les fonctions ainsi que les variables d'optimisation sont continues et les fonctions dérivables, les algorithmes déterministes sont souvent considérés. Cependant, si certaines quantités sont discrètes, alors dans ce cas les algorithmes méta-heuristiques seront préférés. En effet, ces algorithmes ajoutent une composante aléatoire pour rechercher la solution optimale, ce qui permet de parcourir la totalité du domaine de définition. Ces méthodes sont très intéressantes lorsque les problèmes sont non-convexes car la convergence n'est pas interrompue lorsqu'un minimum local est rencontré. De plus, les méthodes méta-heuristiques sont les seules à pouvoir résoudre des problèmes discontinus. Cependant, les coûts de calcul de

ces algorithmes sont généralement plus importants. Les problèmes considérés dans ce manuscrit sont non-convexes mais continus, c'est pourquoi uniquement les algorithmes déterministes seront considérés dans ce chapitre. Pour plus d'informations sur les méthodes méta-heuristiques, le lecteur est invité à consulter l'ouvrage [46].

2.2.2 Les algorithmes déterministes

Les algorithmes déterministes sont également appelées algorithmes au gradient. En effet, elles exploitent l'opérateur gradient des fonctions objectif et contraintes pour mettre à jour le vecteur des variables d'optimisation. Ces méthodes sont très présentes en littérature et ont prouvé de nombreuses fois leur robustesse et leur efficacité [44, 45].

Les algorithmes au gradient utilisent les informations connues du modèle pour mettre à jour les variables d'optimisation au cours des itérations. Le calcul est considéré comme terminé lorsque le vecteur des variables d'optimisation permet de respecter les conditions d'optimalité. Ces conditions sont appelées les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Elles correspondent à des tests sur les dérivées primaire et secondaire pour déterminer si la solution actuelle d'un problème non-linéaire est optimale. Si l'on considère un PPNLC de la forme de l'Eq. (2.1), il est possible de définir le Lagrangien de ce problème à l'aide des multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ pour les contraintes d'inégalité et $\boldsymbol{\mu}$ pour les contraintes d'égalité. Le Lagrangien s'écrit ainsi :

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}), \quad (2.2)$$

Theorem 2.2.1 *Conditions KKT du premier ordre :*

Supposons :

- $\mathbf{x}^* \in \mathcal{D}$,
- f, g_i et h_j sont convexes sur \mathbb{R}^n , différentiables et continues en \mathbf{x}^* ,
- Les gradients de chaque contrainte d'égalité et d'inégalité sont linéairement indépendants en \mathbf{x}^* .

Alors il existe un couple de coefficient de Lagrange $(\boldsymbol{\lambda}^*, \boldsymbol{\mu}^*)$ tel que les conditions KKT suivantes soient respectées :

$$\begin{cases} \nabla_x L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = 0, \\ \lambda_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n_c, \\ \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \quad \forall j = 1, \dots, m_c. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dans l'Eq. (2.3), ∇_x est l'opérateur gradient par rapport au vecteur des variables d'optimisation \mathbf{x} . Le point $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ est appelé le point KKT.

Theorem 2.2.2 *Conditions KKT du deuxième ordre :*

Supposons :

- f, g_i et h_j sont deux fois continues et dérivables,
- $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ est un point KKT,
- La matrice Hessienne, i.e. la matrice composée des dérivées partielles secondes, $\nabla^2 L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})$ est définie positive.

Alors \mathbf{x}^* est un optimum local du problème (2.1).

Les démonstrations sont données dans [44, 45, 47].

Il existe un grand nombre d'algorithmes d'optimisation déterministes tels que les algorithmes SQP [42, 43, 48], les méthodes des *Points Intérieurs* (IP) [49], l'algorithme *Globally-Convergent Method of Moving Asymptotes* (GC-MMA) [50, 51] ou encore les algorithmes *Active Set* (AS). Les algorithmes SQP et AS sont similaires. En effet, l'algorithme AS est une méthode SQP où les fonctions contraintes sont traitées différemment et peuvent être amenées à temporairement n'être plus respectées. Ces méthodes ont pour objectif de transformer le PPnLC (2.1) en une suite de problèmes quadratiques convexes, c'est à dire où la fonction objectif est devenue une fonction quadratique des variables d'optimisation et toutes les fonctions contraintes (i.e. les contraintes d'égalité et d'inégalité) sont des fonctions linéaires. Ces méthodes sont robustes et permettent de trouver une solution à chaque fois (si celle-ci existe) mais leur coût de calcul dépend fortement du type de fonction objectif utilisée et sont moins efficaces lorsque le nombre de contraintes d'optimisation est élevé. Les méthodes IP sont généralement moins robustes que les méthodes SQP, mais permettent de trouver une solution optimale en moins d'itérations que les méthodes SQP. L'idée derrière cette méthode est de transformer le PPnLC (2.1) en une série de problèmes d'optimisation simplifiés où uniquement des contraintes d'égalité sont considérées. Ces méthodes poussent les solutions vers des valeurs éloignées des frontières du domaine et des stratégies spécifiques doivent être réalisées pour explorer les zones proches des frontières. D'un autre côté, l'algorithme GC-MMA [50] permet de traiter efficacement les problèmes non-convexes comprenant un grand nombre de fonctions contraintes et de variables d'optimisation. Typiquement, cette méthode consiste à transformer le problème non-convexe en une série de problèmes convexes où les $n_c + m_c$ fonctions contraintes sont linéarisées. Le choix de ces approximations est fait grâce aux informations données par le calcul du gradient mais aussi grâce à certains vecteurs de variables $\mathbf{l}(k)$ et $\mathbf{u}(k)$ qui bornent le vecteur des variables d'optimisation \mathbf{x} et qui varient au cours des itérations. Ces deux vecteurs sont appelés les "moving asymptotes".

Dans ce manuscrit, les calculs effectués nécessitent d'utiliser un grand nombre de variables d'optimisation et plusieurs fonctions contraintes d'inégalité, principalement non convexes, c'est pourquoi l'algorithme GC-MMA sera principalement utilisé.

2.3 Les problèmes d'optimisation structurale

Parmi les trois grandes familles d'optimisation structurale, l'OT est sans doute la plus générale de toutes car elle permet de redéfinir totalement le domaine matériau au sein de la structure et d'obtenir, ainsi, des performances optimales.

2.3.1 L'optimisation topologique

Parmi les trois formulations présentées en Fig. 1.1, l'optimisation topologique est la seule qui permet de prendre en compte une formulation générale du problème et d'explorer l'ensemble des solutions possibles. C'est une méthode qui consiste à répartir la matière au sein d'un domaine de définition préalablement donné, dans le but d'améliorer la réponse de la structure finale vis-à-vis d'une fonction objectif fixée (usuellement compliance, fréquences propres, etc.) tout en respectant certaines contraintes telles que la masse, les critères de ruptures, les dimensions maximales/minimales des pièces, etc. Cette méthode est la plus générale car elle n'impose aucune restriction sur la forme de la structure finale.

En littérature, trois méthodes d'optimisation topologique sont généralement utilisées : la méthode *Solid Isotropic Material with Penalization* (SIMP), la *Level-Set Method* (LSM) et la méthode d'*Evolutionary Structural Optimisation* (ESO). Cette section détaille rapidement leurs principes de fonctionnement et fournis les principaux outils mathématiques permettant de les utiliser.

La méthode SIMP

La méthode SIMP est une technique d'optimisation topologique basée sur un champ *pseudo-densité*, c'est-à-dire que la répartition du matériau à l'intérieur du volume d'optimisation se fait par la définition d'une densité fictive qui évolue dans l'intervalle $[0, 1]$ et qui est utilisée pour pénaliser les tenseurs caractéristiques impliqués dans la formulation du problème d'optimisation.

Généralement, les méthodes d'optimisation topologique sont basées sur des modèles de calculs par éléments finis (EF). Dans le cadre de la méthode SIMP, le champ de densité fictive est évalué au centroïde de chaque élément du maillage modèle EF fournissant ainsi des informations sur la topologie : une densité égale à 0 impose une phase de "vide", tandis qu'une densité égale à 1 impose une phase "solide". Les éléments dont la densité fictive est égale ni à 1 ni à 0, *i.e.* les régions appelées *zones grises*, restent autorisées mais sont pénalisées à l'aide d'un coefficient de pénalisation. La méthode SIMP se distingue des autres méthodes d'optimisation basée sur la densité telle que la méthode Rational Approximation of Material Properties (RAMP), voir [1, 52, 53], par sa méthode de pénalisation. Les propriétés mécaniques ainsi calculées lors de l'optimisation dépendent donc du champ de densité fictive.

La formulation mathématique d'un problème d'optimisation pour un cas 3D basée sur la méthode SIMP est détaillée par la suite. Le problème présenté porte sur la minimisation de la souplesse, appelée par la suite *compliance*, de la structure tout en considérant une contrainte d'égalité sur le volume final de la topologie.

Définissons d'abord le domaine limite global \mathcal{D} comme un sous-ensemble compact de \mathbb{R}^3 où un repère orthogonal cartésien $O(x, y, z)$ est défini. \mathcal{D} peut être défini mathématiquement comme :

$$\mathcal{D} := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1 \in [0, a_1], x_2 \in [0, a_2], x_3 \in [0, a_3]\}, \quad (2.4)$$

où a_1 , a_2 et a_3 sont les longueurs caractéristiques du domaine de définition \mathcal{D} , définies suivant les axes du repère cartésien. Soit $\Omega \subseteq \mathcal{D}$ le domaine matériau. Sous les hypothèses de petits déplacements et déformations et comportements élastique linéaire du matériau, dans un problème d'optimisation structurale, seulement deux paramètres matériau sont modifiés : le volume du matériau $V(x_1, x_2, x_3)$ et le tenseur d'élasticité E_{ijkl} :

$$E_{ijkl}(\rho(x_1, x_2, x_3)) = \rho(x_1, x_2, x_3)^\alpha E_{ijkl}^0, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3, \quad (2.5)$$

où E_{ijkl}^0 le tenseur de rigidité du matériau de base, $\alpha \geq 1$ le facteur de pénalisation associé à la méthode SIMP (en général $\alpha = 3$).

Suivant cette formulation, la matrice de rigidité globale de la structure $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}} \times N_{\text{DOF}}}$ (N_{DOF} étant le nombre de degrés de liberté de la structure après application des conditions aux limites) peut être pénalisée et se définit ainsi tel que :

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e^\alpha \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{L}_e, \quad (2.6)$$

où $\mathbf{K}_e^0 \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e}$ est la matrice de rigidité non-pénalisée de l'élément générique e , N_e est le nombre d'éléments composant le modèle EF, N_{DOF}^e le nombre de degrés de liberté de l'élément e et $\mathbf{L}_e \in$

$\mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e \times N_{\text{DOF}}}$ la matrice de connectivité de l'élément e reliant le vecteur déplacements nodaux dans le repère local de l'élément $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e}$ avec sa contrepartie $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}$ exprimée dans le repère global de la structure définit comme suit :

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{L}_e \mathbf{u}. \quad (2.7)$$

Considérons la formulation EF du problème d'équilibre pour une analyse statique élastique linéaire dans le repère global, soit $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}$ le vecteur des forces nodales généralisées. Le problème d'équilibre s'écrit alors :

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (2.8)$$

Sous l'application de conditions aux limites de Neumann non-nulles et de Dirichlet nulles [54], la compliance de la structure s'écrit alors :

$$\mathcal{C} = \mathbf{u}^T \mathbf{K}\mathbf{u}. \quad (2.9)$$

Ainsi, le problème d'optimisation peut être formulé comme suit :

$$\begin{aligned} & \min_{\rho_e} : \mathcal{C}(\rho_e), \\ & \text{soumis à :} \\ & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \\ \frac{V(\rho_e)}{V_{\text{ref}}} = \frac{\sum_{e=1}^{N_e} \rho_e V_e}{V_{\text{ref}}} = \gamma_V, \\ \rho_{\min} \leq \rho(\mathbf{x}_e) \leq 1, e = 1, \dots, N_e, \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec V_e le volume de l'élément générique e . Le paramètre γ_V est la fraction volumique souhaitée définie par l'utilisateur. Dans le cadre de la méthode SIMP, les variables d'optimisation sont les valeurs de densité fictive définies aux centroïdes des éléments du modèle EF. Le nombre de variables d'optimisation est alors égal au nombre total d'éléments du modèle EF, soit N_e .

Le problème d'optimisation est résolu en utilisant un algorithme déterministe. Par conséquent, les dérivées des fonctions objectif et contrainte par rapport aux variables d'optimisation (*i.e.* la valeur de pseudo-densité évaluée au centroïde de chaque élément) doivent être calculées. Par souci de compréhension, les dérivées finales sont données ici sans être détaillées, mais peuvent être facilement obtenues (pour plus d'informations, voir [55]). Ainsi, la dérivée de la compliance donne :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \rho_e} = -\alpha \rho_e^{\alpha-1} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e^0 \mathbf{u}, e = 1, \dots, N_e, \quad (2.11)$$

et la dérivée du volume donne :

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = V_e, e = 1, \dots, N_e, \quad (2.12)$$

Il est bien établi que le problème classique du SIMP (1.6) est mal posé [1]. En fait, les topologies proposées par la méthode SIMP changent lorsqu'une taille de maille différente est utilisée. Ceci est dû au fait que plus le nombre de trous dans la structure est élevé (pour un volume constant), meilleure est la performance de la structure. La limite de ce processus est une variation structurelle à l'échelle microscopique, qui ne peut être prise en compte par une description isotrope du matériau. Il en résulte une instabilité numérique où un plus grand nombre de trous apparaît si un maillage plus fin est utilisé. Plusieurs techniques peuvent être adoptées pour surmonter ce problème [1]. La

première est, trivialement, un contrôle du périmètre : une contrainte sur la valeur maximale du périmètre entraîne, de facto, une limitation du nombre de trous. Alternativement, une contrainte sur le gradient spatial de la fonction de densité joue un rôle similaire. Cependant, le choix le plus populaire fait par les développeurs d’algorithmes d’OT est d’éliminer la dépendance au maillage au moyen d’une opération de filtrage. En effet, lorsqu’une valeur de densité est associée à un élément du maillage, il n’existe a priori aucune interdépendance entre les éléments adjacents. Ce fait conduit à la disposition en ”damier“ bien connue de la distribution des matériaux, qui est une solution souvent obtenue mais totalement dénuée de sens d’un point de vue physique [1]. Par conséquent, les filtres peuvent être utilisés afin d’établir une dépendance entre les éléments adjacents. Par exemple, les filtres basés sur la distance sont très souvent utilisés. L’utilisation de filtres dans les problèmes d’OT permet de surmonter à la fois le problème de la dépendance du maillage et l’apparition de motifs en damier. On peut montrer que toutes les techniques précédentes aboutissent, en fin de compte, à l’établissement d’une échelle de longueur minimale dans la conception, comme cela est discuté dans [22].

Le détail de l’algorithme de calcul de la méthode SIMP est rappelé brièvement dans la Fig. 2.1.

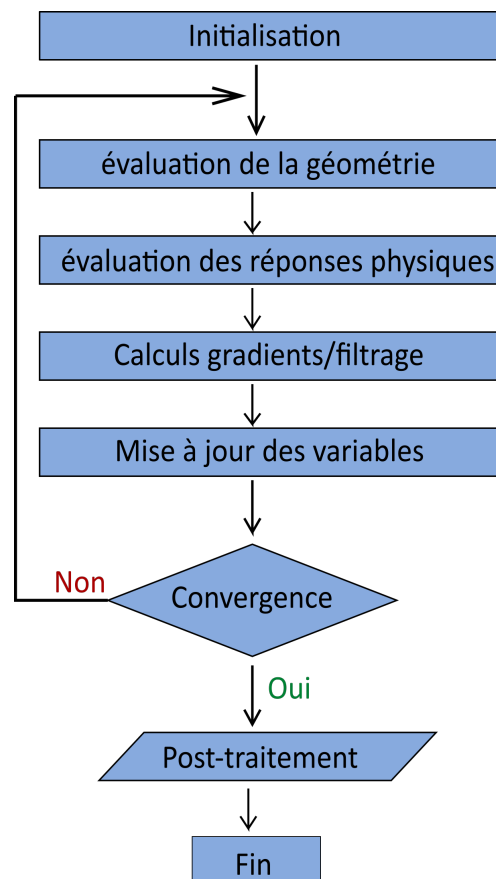


FIGURE 2.1 – Algorithme de la méthode SIMP

Sur la Fig. 2.1, une étape de mise à jour des variables d’optimisation est évoquée. Elle est réalisée soit à l’aide d’un algorithme déterministe soit à l’aide d’un critère d’optimalité, voir [1].

La méthode SIMP présente de nombreux avantages :

- Une robustesse testée et prouvée de nombreuses fois en littérature. En effet, un nombre

important de travaux se basant sur cette méthode ont prouvé son efficacité et sa capacité d'adaptation pour différentes implémentations de fonctions objectifs et/ou contraintes.

- Cette méthode est immédiate à comprendre et peut être facilement implémentée
- Sa fiabilité lui a permis d'être utilisée dans des logiciels bien-connus disponible dans le commerce, tels que Altair OptiStruct[®], TOSCA[®] et ANSYS Workbench[®]).

Cependant, cette méthode présente encore quelques limites :

- Le caractère bien posé du problème est soumis à des choix artificiels dépendant de l'utilisateur (la taille du filtre, le type de filtre, la méthode de projection, etc.).
- Un nombre important de variables d'optimisation (égale au nombre d'éléments dans le modèle EF), ce qui crée une dépendance importante de la topologie finale vis-à-vis de la qualité du maillage EF.
- Il n'y a pas de possibilité de garder le contrôle de la frontière de la topologie optimisée au cours des itérations. La raison est qu'il manque une entité purement géométrique pour définir la topologie.
- La géométrie en sortie d'optimisation n'est pas CAO-compatible. En effet, des opérations de post-traitement sont nécessaires pour obtenir des solutions purement géométriques compatibles avec les logiciels CAO.
- Les différentes opérations de filtrage puis de post-traitement au cours de l'analyse amènent à des décalages entre les valeurs des fonctions contraintes évaluées en sortie d'optimisation et des réponses physiques réelles calculées sur la géométrie reconstruite.

La méthode Level-Set

Bien que les méthodes basées sur la densité soient parmi les plus utilisées et qu'elles aient déjà prouvé leur efficacité, la limite sur la non-connaissance de la frontière de la topologie à chaque itération constitue un point bloquant. Plus récemment, de nouvelles méthodes ont émergé telle que la Level-Set Method (LSM) [56, 57] et de nombreux algorithmes basés sur cette méthode ont été testés avec succès dans le cadre de l'OT. Le principe de base de cette méthode consiste à décrire la topologie à l'aide d'une *Level-Set Function* (LSF) dont le signe est associé aux différentes phases matériau du domaine de définition (une LSF négative implique une phase de vide, une LSF positive implique une phase solide tandis qu'une LSF nulle correspond à la frontière de la topologie) :

$$\begin{cases} \psi(\mathbf{y}) > 0 \iff \mathbf{y} \in \Omega/\partial\Omega, \\ \psi(\mathbf{y}) = 0 \iff \mathbf{y} \in \partial\Omega, \\ \psi(\mathbf{y}) < 0 \iff \mathbf{y} \in \mathcal{D}/(\Omega \cup \partial\Omega). \end{cases} \quad (2.13)$$

Dans l'Eq. (2.13), ψ représente la LSF définie sur le domaine de calcul \mathcal{D} . Ω représente le domaine matériau, tandis que $\partial\Omega$ représente la frontière du domaine matériau. Bien qu'il existe une pluralité de méthodes basées sur la LSM [58–61], chacune suit les 6 principales étapes détaillées ci-dessous :

- *Paramétrage de la LSF* : Les paramètres de la LSF sont définis en fonction des variables d'optimisation. La forme fonctionnelle de cette relation a une influence sur les variations

possibles de la géométrie et peut même donner un certain contrôle sur la magnitude du gradient de la LSF sur la frontière structurale, ce qui est important pour la stabilité numérique de l'optimisation. Généralement, les LSFs s'écrivent de la forme suivante :

$$\psi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \sum_i^n \psi_i(\mathbf{y}, x_i) = \sum_i^n N_i(\mathbf{y})x_i, \quad (2.14)$$

où \mathbf{x} correspond au vecteur des variables d'optimisation et $N_i(\mathbf{y})$ sont les fonctions de base définissant la LSF. Le type de fonction choisi pour définir la LSF peut-être pris parmi plusieurs, dont les principaux sont détaillées dans [62]. Quelque soit le type de fonction choisi, le premier critère pour définir une LSF adéquate est la taille du support des fonctions de bases (i.e. l'intervalle sur lequel la fonction de base est non-nulle).

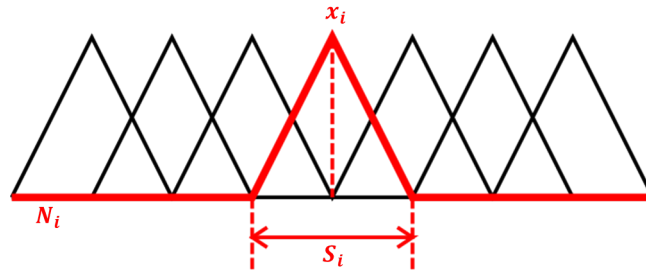


FIGURE 2.2 – Exemple de fonctions de bases et le support associé

La Fig. 2.2, S_i représente le support de la fonction de base N_i . Plus le support est grand, plus les réponses lors de l'optimisation sont sensibles aux variations des paramètres définissant la LSF. Bien qu'il existe un certain nombre de familles de fonctions de base, les plus utilisées sont les Radial Basis Functions (RBF) grâce à leurs simplicité et leur polyvalence. Les RBFs peuvent être utilisées de manière compacte en utilisant des fonctions polynomiales [63], des gaussiennes [64] ou encore des fonctions Splines multi-quadratiques [65]. Une autre approche possible est la paramétrisation spectrale [66], où les fonctions de base sont définies à l'aide de séries de Fourier dont les coefficients deviennent alors les variables d'optimisation.

- *Geometry Mapping* : C'est l'opération qui permet de transférer les informations fournies par la LSF au modèle EF associé afin d'évaluer les réponses physiques. Il existe plusieurs méthodes permettant de réaliser cette partie, mais la formulation utilisée joue un rôle important dans l'algorithme d'OT car elle influencera fortement la précision de la réponse structurale, en particulier dans les zones proches des frontières de la topologie, mais également le résultat final. Une première approche consiste à transformer la LSF en une distribution de densité, c'est la *density-based mapping* technique. À l'image de ce qui est réalisé dans la méthode SIMP, la discrétisation du modèle EF est gardée fixe tout au long de l'optimisation et la topologie est décrite par une fonction de densité fictive $\rho(y)$ qui indique si chaque élément du modèle EF correspond à une phase solide, $\rho(\mathbf{y}) = 1$, ou une phase de vide $\rho(\mathbf{y}) = \epsilon$, où ϵ correspond à la borne inférieure des variables topologiques. Lorsque cette méthode est utilisée dans la LSM, une représentation type "noir et blanc" est utilisée puisqu'une fonction de type Heaviside $H(\mathbf{y})$ est adoptée pour définir la densité fictive :

$$\rho(\mathbf{y}) = \epsilon + (1 - \epsilon)H(\mathbf{y}), \quad (2.15)$$

La densité fictive est ensuite affectée au tenseur d'élasticité de chaque élément de sorte que :

$$E_{ijkl} = \rho(\mathbf{y})E_{ijkl}^0. \quad (2.16)$$

Cette méthode est la plus souvent utilisée à cause de sa robustesse et de sa rapidité de convergence, cependant elle souffre des mêmes problèmes que la méthode SIMP.

Une autre méthode est la *discrétisation conforme* [62]. Lorsque cette méthode est utilisée, seul le domaine matériau est discretisé et non la totalité du domaine de définition. Avec cette méthode, la description de la frontière est particulièrement nette et les réponses physiques proches des interfaces sont très précises, comparées à la *density-based method*. Cet aspect est fortement apprécié lorsque l'optimisation nécessite une connaissance des réponses physiques précise dans ces zones, ce qui est le cas notamment pour les calculs où la distribution des contraintes mécaniques est prise en compte. Si cette technique permet une représentation précise de la frontière, la nécessité de redéfinir le maillage du modèle EF à chaque itération entraîne une étape de calcul supplémentaire et amène un "bruit" supplémentaire dans le calcul d'OT.

- *Résolution structurale* : Cette étape consiste à évaluer les réponses physiques lorsque le mapping est terminé, i.e. à résoudre le modèle par EF.
- *Analyse de sensibilité* : Cela correspond à l'évaluation de la sensibilité des réponses physiques pour une variation de la frontière dans sa direction normale. Dans la majorité des cas, cette étape consiste en la résolution de l'équation aux dérivées partielles de l'équation de Hamilton-Jacobi (HJ) :

$$\frac{\partial \psi(\mathbf{y}, t)}{\partial t} + V_n(\mathbf{y}, t) |\nabla \psi(\mathbf{y}, t)| = 0, \quad \mathbf{y} \in \mathcal{D}. \quad (2.17)$$

Dans l'Eq. (2.17), t est un paramètre fictif représentant le temps tandis que $V_n(\mathbf{y}, t)$ est la composante normale du champ de vitesse. Lorsque l'optimum est atteint, le champ de vitesse disparaît et la LSF stagne. Du point de vue de l'optimisation, l'équation HJ discrétisée dans le temps (Eq. 2.17) peut être interprétée comme une méthode primale sans contrainte, faisant progresser les valeurs de la LSF dans la direction normale en mettant à jour les valeurs de la LSF pour une taille de pas locale. L'objectif principal du champ de vitesse dans l'équation HJ est d'orienter l'iso-contour de niveau zéro de la LSF vers la géométrie optimale, tout en maintenant une LSF régulière dans tout le domaine de conception. En l'absence de contraintes d'optimisation, les champs de sensibilité de conception étendus peuvent être utilisés directement pour construire le champ de vitesse d'HJ. En présence de contraintes d'optimisation, le PPNLC doit être transformé en un problème non contraint, par exemple, via des formulations de pénalité [56, 58] ou de multiplicateur de Lagrange augmenté [67–69]. Cela peut entraver de manière significative la convergence du processus d'optimisation, en particulier en présence d'un grand nombre de contraintes

- *Procédure de mise à jour* : Les sensibilités évaluées lors de l'étape précédente sont utilisées pour mettre à jour la LSF. La procédure de mise à jour associée, comprenant les techniques de traitement des limites et des contraintes de déplacement, influence fortement l'efficacité et le taux de convergence du processus d'optimisation, ainsi que le résultat final. Dans certains cas, des techniques de régularisation sont intégrées dans la procédure de mise à jour de la LSF. Nous distinguons deux grandes classes de stratégies de mise à jour. La première classe traite le processus d'optimisation comme un processus quasi-temporel dans lequel les limites

du domaine matériau sont avancées en fonction d'un champ de vitesse, i.e. découlant de la résolution de l'Eq. (2.17). La deuxième classe de méthodes est basée sur la programmation mathématique. Cette dernière classe consiste à utiliser un algorithme déterministe traditionnel tels que l'algorithme SQP, l'algorithme MMA [70] ou encore l'algorithme CONVex LINearization (CONLIN)[71].

- *La régularisation* : Dans la majorité des travaux basés sur la LSM, une procédure de régularisation est réalisée. Cette procédure consiste à obtenir un problème d'optimisation bien posé, c'est-à-dire à supprimer les artefacts numériques des résultats finaux, à améliorer le comportement de convergence et à éviter la convergence vers des minima locaux. En outre, les techniques de régularisation sont souvent employées pour contrôler les propriétés géométriques des modèles résultants.

En effet, la topologie finale de l'OT dépend exclusivement du contour de niveau 0 de la LSF qui généralement n'est pas unique. La procédure de régularisation permet alors d'établir l'unicité de la LSF pour éviter les problèmes de convergence. Cette étape permet également de supprimer les divers artefacts numériques présents dans l'OT. En effet, certaines méthodes utilisées par la LSM, telles que la méthode *density-based mapping* qui laisse certaines zones "grises" symbolisant les densités intermédiaires, ne permettent pas une représentation de la topologie finale claire et doivent être corrigées.

À l'image de la méthode SIMP, la LSM présente différents avantages qui en font une méthode particulièrement utilisée en littérature :

- Contrairement à la méthode SIMP, la LSM permet d'obtenir une représentation claire et précise de la frontière de la topologie finale. De plus, la topologie est définie par une LSF et sa description est donc totalement indépendante du maillage du modèle EF. Ainsi, le choix de la précision du maillage n'est pas lié à la qualité de la topologie finale mais uniquement à la précision des réponses physiques évaluées tout au long de l'OT.
- Les problèmes numériques présents dans la méthode SIMP, tels que les zones "grises", sont évités grâce à cette méthode. Bien que cette problématique puisse revenir lorsqu'une méthode de *mapping* basée sur la densité est utilisée, les méthodes de régularisation travaillant sur le contour de niveau 0 de la LSF permettent de limiter fortement ce phénomène.
- Cette méthode peut-être utilisée pour une grande variété de problèmes, et même des problèmes non-linéaires plus complexes.

Néanmoins, la LSM est une méthode complexe et souvent lourde à mettre en place, ce qui apporte quelques inconvénients :

- Comme expliqué précédemment, la topologie dépend uniquement du contour de niveau 0 de la LSF et donc elle n'est pas unique (tout comme son gradient). Par conséquent, la topologie finale dépend fortement de la topologie initiale de la LSF et la convexité du problème n'est pas toujours garantie.
- La résolution de l'équation HJ n'est pas souvent immédiate. En effet, pour la résoudre le problème doit être modifié en problème non contraint, par exemple par l'intermédiaire de la méthode des multiplicateurs de Lagrange, dont le choix influe fortement sur la topologie finale et augmente considérablement le coût de calcul.
- Tout au long du processus d'OT, la LSM nécessite l'utilisation de procédures de régularisation qui, généralement, sont purement mathématiques et n'ont pas de réel sens physique.

La méthode BESO

L'algorithme *Bi-directional Evolutionary Structural Optimisation* (BESO) [72] est basée sur la méthode *Evolutionary Structural Optimisation* (ESO) développée par Xie et Steven [73] et la méthode *Addition Evolutionary Structural Optimization* (AESO) [74]. La méthode ESO se base sur le principe que la topologie optimale peut-être obtenue en supprimant itérativement les zones de matière non sollicitées du domaine de définition, au contraire de la méthode AESO, qui part du domaine minimale faisable et ajoute de la matière autour des zones de contraintes élevées. Dans la méthode BESO, la matière peut-être soit ajoutée, soit retirée du domaine de définition. Le taux de matière enlevé ou ajouté est déterminé à l'aide de deux coefficients, respectivement le taux d'inclusion (TI) ou le taux de rejet (TR). Considérons, dans un premier temps, le domaine de définition \mathcal{D} défini dans l'Eq. (2.4). \mathcal{D} est discrétisé à l'aide d'un maillage et les différentes conditions aux limites sont appliquées à la structure.

Lorsque le i -ième élément est retiré ou ajouté à la structure, la compliance est modifiée d'une différence de plus ou moins $\Delta\mathcal{C}_i$, avec :

$$\Delta\mathcal{C}_i = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K}_i \mathbf{u}_i. \quad (2.18)$$

La sensibilité de l'élément i par rapport à son ajout ou à sa suppression est définie par :

$$\alpha_i = \frac{\Delta\mathcal{C}_i}{2V_i}, \quad (2.19)$$

avec V_i le volume de l'élément générique i .

Cette sensibilité est alors comparée à un seuil α_{th} défini au préalable :

$$\alpha_i \leq \alpha_{th}, \quad (2.20)$$

$$\alpha_i \geq \alpha_{th}, \quad (2.21)$$

Ainsi, si l'Eq. (2.20) est respectée, l'élément est retiré, par contre, si c'est l'Eq. (2.21) qui est respectée, l'élément est ajouté.

Lorsque la sensibilité est calculée directement telle que dans l'Eq. (2.19), il n'y a aucun lien entre les différents éléments et leurs voisins, ainsi, il est fréquent d'obtenir une topologie dite "damier".

C'est pourquoi, Li *et al.* [75], ont proposé une méthode de lissage qui permet de "connecter" les éléments à leurs voisins directs par l'intermédiaire des nœuds de chaque élément. Ils ont alors défini le coefficient de sensibilité de chaque nœud tel que :

$$\alpha_k^* = \frac{\sum_{i=1}^m V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^m V_i}, \quad k = 1, \dots, N_{\text{nœuds}}, \quad (2.22)$$

avec $N_{\text{nœuds}}$ le nombre de nœuds total de la structure, α_k^* la sensibilité du nœud k et m le nombre d'éléments connectés au nœud k .

La sensibilité de l'élément est ensuite recalculée telle que :

$$\alpha_i^l = \frac{\sum_{n=1}^N \alpha_n^*}{N}, \quad (2.23)$$

avec α_i^l la sensibilité lissée de l'élément générique i , N le nombre de nœuds de l'élément i et α_n^* la sensibilité du nœud n .

La convergence de l'optimisation est définie à l'aide d'un indice de performance (IP) directement relié à la fonction objectif. Dans le cas ci-dessus, l'IP est donné par rapport à la compliance par unité de volume. Ainsi l'IP donne :

$$\text{IP} = \frac{1}{\mathcal{C}_{\text{av}}V}, \quad (2.24)$$

avec \mathcal{C}_{av} la compliance moyenne et V le volume du domaine matériau à l'itération actuelle. Lorsque le volume entre les différentes itérations n'évolue plus, seule la compliance moyenne varie et diminue petit à petit vers un optimum, l'IP augmente donc progressivement. La convergence est considérée comme atteinte lorsque l'Eq. (2.25) est respectée.

$$\epsilon_i = \frac{|PI_i - PI_{i-1}|}{PI_i} \leq \epsilon_{\text{th}}, \quad (2.25)$$

avec i l'itération courante et ϵ_{th} est l'erreur maximale acceptable définie par l'utilisateur.

L'explication ci-dessus est détaillée en se basant sur un critère d'énergie, mais il est également possible de définir un critère basé sur les contraintes mécaniques de la structure. En effet, les éléments seraient itérativement retirés ou ajoutés en fonction de leur respect des Eq. (2.26) (élément i retiré) et (2.27) (élément i ajouté).

$$\sigma_i^{\text{VM}} \leq \text{TR}\sigma_{\text{max}}^{\text{VM}}, \quad (2.26)$$

$$\sigma_i^{\text{VM}} \geq \text{TI}\sigma_{\text{max}}^{\text{VM}}, \quad (2.27)$$

Où σ_i^{VM} représente la contrainte équivalente de Von-Mises et $\sigma_{\text{max}}^{\text{VM}}$ la contrainte équivalente de Von-Mises maximale à l'intérieur de la structure. TR et TI sont les coefficients de taux de rejet et d'inclusion dont les définitions sont données dans [76].

La Fig. 2.3 représente l'algorithme simplifié d'un calcul d'optimisation utilisant la méthode BESO. Même si la méthode BESO est un peu moins populaire que les méthodes SIMP ou LSM, elle présente de nombreux avantages :

- Contrairement aux algorithmes ESO et AESO, la méthode BESO permet d'atteindre l'optimum depuis n'importe quelle configuration initiale. En effet, les algorithmes ESO et AESO sont fortement dépendants de leur point de départ et convergent souvent vers les minima locaux les plus proches. La capacité de l'algorithme BESO à modifier les éléments dans les deux directions (i.e. à retirer et ajouter), lui permet d'atteindre la solution optimale peu importe la condition initiale.
- L'algorithme BESO est un algorithme facile et rapide à implémenter dans n'importe quel logiciel de calcul EF et qui ne nécessite pas d'utiliser des techniques de programmations mathématiques avancées telles que celles utilisées dans les méthodes SIMP et LSM. Grâce à cette simplicité d'utilisation, l'algorithme BESO peut être utilisé dans un grand nombre de problèmes d'optimisation structurale différents (rigidité, flambage, fréquences propres, etc.).

Néanmoins, elle présente quand même certains défauts :

- À l'image de la méthode SIMP, l'algorithme BESO répartit la matière au sein du domaine de définition en "activant" (ou "désactivant") les éléments du modèles EF. Cela implique de ne pas avoir une définition claire de la frontière de la structure finale car elle n'est pas définie à l'aide d'une entité purement géométrique (comme pour la LSM).

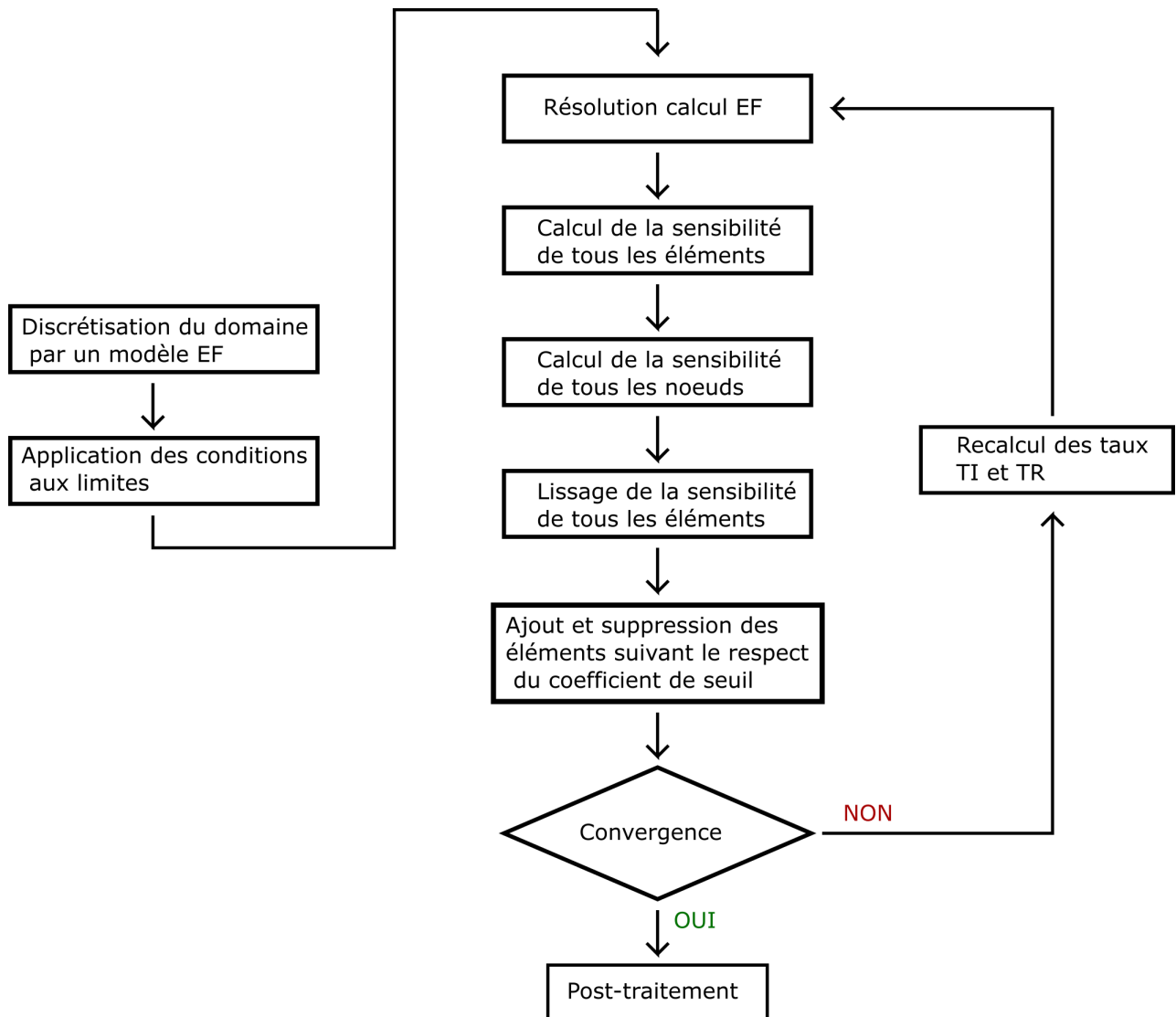


FIGURE 2.3 – L'algorithme BESO

- Par sa nécessité d'ajouter puis de supprimer des éléments du domaine de définition, l'évolution de la fonction objectif oscille beaucoup et il faut généralement un grand nombre d'itérations pour atteindre la convergence. En effet, le coût de calcul dans ce type d'optimisation est souvent élevé.

2.4 Les critères de tenue mécanique et l'optimisation topologique

Les techniques de fabrication additive (pour matériaux métalliques et polymères) sont de plus en plus utilisées dans le secteur industriel. C'est pourquoi les nouveaux outils de conception ou de spécification des produits apportés par la FA, tel que les logiciels d'OT, doivent permettre d'intégrer les exigences propres à ces nouvelles technologies. L'une des premières considérations lors de la définition de la topologie d'une pièce pour un bureau d'études est la parfaite connaissance de la répartition des contraintes mécaniques à l'intérieur de la structure. À la suite d'un calcul d'OT,

les géométries obtenues ne peuvent plus être retravaillées ni modifiées. Ainsi, si une zone de la structure est soumise à une forte concentration de contrainte, celle-ci ne pourra plus être allégée ni éliminée, au risque de ne plus respecter les autres contraintes ou les performances obtenues en terme de fonction objectif. C'est pourquoi la répartition des contraintes mécaniques doit être contrôlée tout au long du calcul d'OT par l'intermédiaire d'une contrainte d'optimisation explicite basée sur un critère général de tenue mécanique (p. ex. le critère de la contrainte mono-axiale équivalente de Huber-Hencky von Mises (HHVM)).

La formulation d'une contrainte d'optimisation basée sur un critère de tenue mécanique dans le processus d'OT est un sujet fréquemment étudié. En effet, de nombreux travaux présentent différentes méthodologies pour imposer à la contrainte de HHVM d'être respectée à chaque étape du processus d'optimisation [1, 57, 77–88]. Ainsi, à la suite des travaux fondateurs de Bendsoe et Sigmund [1], Pereira *et al.* [77] utilisèrent la méthode SIMP en utilisant un champ de densité continu comme variable d'optimisation dans le but de résoudre un problème de minimisation de la masse soumis à une contrainte basée sur un critère de tenue [77]. Ce type de problème donne des résultats aussi bon qu'un problème de minimisation de la souplesse mais propose des topologies finales avec un nombre réduit de zone de densité intermédiaire. Un autre point de vue a été testé par Bruggi *et al.* [78] qui avait pour but d'intégrer les contraintes de la structure en tant que variables directement dans la formulation du modèle par éléments finis. Cette formulation présente l'avantage de pouvoir résoudre le problème d'optimisation sans que des étapes de post-processing, qui donnent généralement des résultats moins précis, ne soient nécessaires. Une approche semi locale est proposée par Holmberg *et al.* [80]. Le principe est de répartir les éléments du maillage EF par *clusters* dont la définition est souvent arbitraire. L'élément dont la valeur du critère équivalent est la plus élevée est déterminée pour chaque cluster et utilisé comme contrainte d'optimisation. Cette méthode a pour avantage de diminuer fortement le nombre de contraintes d'optimisation par rapport à une approche locale pure (i.e. où le nombre de contraintes d'optimisation est égal au nombre d'éléments du maillage EF) tout en conservant une bonne connaissance de la répartition des contraintes. Cette méthode est particulièrement adaptée dans le cas où plusieurs zones du domaine d'optimisation sont soumises à des concentrations de contraintes élevées. Le *et al.* [79] proposent une approche globale normalisée pour calculer la contrainte d'optimisation basée sur le critère HHVM. Cette approche permet de ne considérer qu'une seule contrainte d'optimisation en approximant la valeur maximale du critère de HHVM à l'aide d'une fonction d'agrégation. Ces méthodes d'agrégation n'ont pas de réel sens physique et leur utilisation peut amener à certaines difficultés de convergence car il n'y a pas de continuité entre les itérations. C'est pourquoi une approche normalisée permet de modifier à chaque itération le paramètre de définition de la fonction d'agrégation en prenant en compte les itérations précédentes. Yang *et al.* [83] proposent une comparaison entre une approche globale et une approche locale lors du traitement des contraintes mécaniques. La première approche consiste à approximer la valeur maximale du critère de tenue mécanique par l'utilisation d'une fonction d'agrégation dans laquelle un schéma de correction des contraintes est proposé. Ce schéma de correction a pour but d'éviter les phénomènes d'oscillation provoqués par le comportement non-linéaire des contraintes dans le matériau et ainsi de faciliter la convergence de l'algorithme. La deuxième approche est une approche locale. Pour alléger le coût de calcul, seuls les éléments ou le critère équivalent atteint un niveau critique sont considérés dans l'optimisation. Les deux schémas permettent d'obtenir des résultats satisfaisants. Néanmoins, pour être efficace, l'approche locale doit utiliser un maillage assez grossier avec un nombre d'éléments réduit. D'autres travaux se basant sur la LSM ont également été réalisés [57, 84–86, 89–92]. En effet, Allaire *et al.* [57] ont prouvé qu'utiliser la LSM donnait des topologies finales sans "zones grises" et sans effet "damier" qui sont susceptibles de se produire avec la méthode SIMP. La LSM peut aussi être associée aux

méthodes de calcul par éléments finis X-FEM [84]. Le modèle X-FEM fournit un maillage fixe, ce qui amène à diminuer le nombre de variables d'optimisation. Picelli *et al.* [85] proposent une approche globale pour résoudre le problème d'OT en considérant le critère HHVM. La majorité des travaux [86, 89, 90] propose une amélioration de la fonction d'agrégation de la contrainte équivalente maximale. Verbart *et al.* [91] ont ensuite utilisé la LSM avec les mêmes techniques que celles utilisées avec la méthode SIMP, telles que les fonctions d'agrégation. Wang *et al.* [92] ont proposé l'OT sous contrainte en considérant un nouveau problème d'équilibre de forme des contraintes mécaniques actives, permettant ainsi de supprimer les non-différenciabilités intrinsèques apportées par le comportement local des contraintes mécaniques. Emmendoerfer *et al.* [93, 94] ont également proposé une approche permettant l'activation et la discrétisation des contraintes critiques au cours du processus d'optimisation. D'autres travaux [95–97] se sont basés sur les algorithmes BESO (ou ESO) pour résoudre ce problème tout en contrôlant la répartition des contraintes mécaniques. La Fig. 2.4 montre certains des principaux résultats lors de l'OT en considérant une contrainte basée sur le critère HHVM. Ces résultats sont montrés pour le benchmark le plus populaire en littérature quand il s'agit d'intégrer un critère de tenue mécanique dans la formulation du problème d'OT : le domaine 2D en L. Ce cas d'étude est détaillé et approfondi dans le cadre de la méthode NURBS-based-SIMP dans le Chapitre 4.

Cet état de l'art non-exhaustif, met en avant le fait que la majorité des travaux réalisés sur les critères de tenue mécanique est réduit au critère HHVM applicable seulement pour les matériaux isotropes. En effet, l'optimisation topologique sur des matériaux anisotropes est un sujet beaucoup moins étudié. Ainsi, la première fois que les critères de rupture pour matériaux anisotropes sont apparus dans un problème d'optimisation a été lorsque Groenwold et Haftka ont essayé de minimiser le critère de Tsai-Wu (TW) dans le but d'optimiser l'orientation des fibres dans des composites stratifiés [98]. Les auteurs ont montré qu'utiliser une fonction objectif égale au *failure index* calculé avec le critère de TW dépendait fortement des caractéristiques matériaux et de la force appliquée. Pour pallier à ce problème, ils ont utilisé une formulation différente consistant à maximiser un facteur de sécurité proprement défini pour une plaque multi-couche. Mirzendehtdel *et al.* [99], proposent ensuite une optimisation ayant pour but de minimiser l'opposée du facteur de sécurité défini par Groenwold et Haftka, et soumise à une contrainte sur la compliance. Cette approche, permet de définir une borne inférieure sur la rigidité de la structure et donc éviter à l'algorithme de converger vers la solution triviale qui consiste à enlever la matière sur tout le domaine matériau.

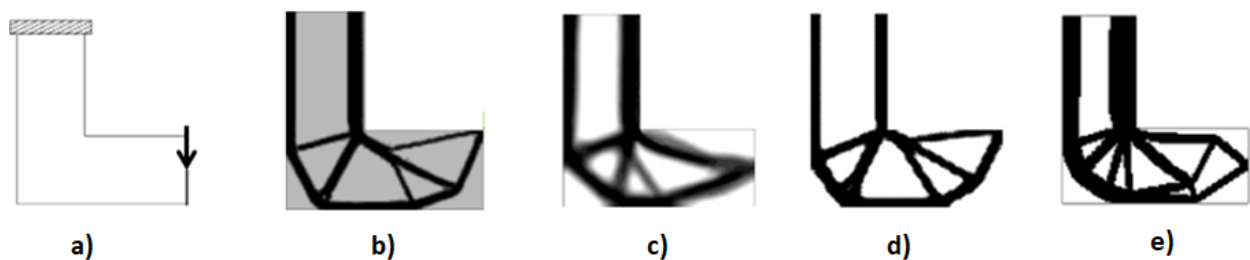


FIGURE 2.4 – a)Benchmark étudié, b)Holmberg *et al.*, 2013, c)Pereira *et al.*, 2004, d)Bruggi, 2008, e)Allaire *et al.*, 2008

Cette étude bibliographique a permis de mettre en avant trois principaux problèmes rencontrés lors d'une optimisation basée sur les critères de rupture :

- La nature locale des contraintes : lorsque l'optimisation topologique est menée via une approche locale, le nombre de contraintes à imposer lors du calcul est équivalent au nombre

d'éléments de la structure. En effet, le critère de tenue mécanique doit être respecté pour chaque élément. Il existe plusieurs approches permettant de surmonter ce problème. Certains travaux [83] utilisent une approche locale tout en limitant le le coût de calcul par l'élimination des éléments dont le critère de tenue mécanique reste faible. Un très grand nombre de travaux [1, 57, 77–79, 81–88] préfère utiliser une approche globale, c'est-à-dire en ne considérant que l'élément où le critère équivalent est le plus critique. L'opérateur *maximum* ne pouvant pas être dérivé et donc implémenté dans les algorithmes déterministes, une fonction d'agrégation est utilisée pour approximer la valeur de la contrainte équivalente maximale. Une dernière approche [80] considérée comme globale/locale a aussi été développée. Cet aspect est important dans l'implémentation d'une telle contrainte car elle nécessite de trouver un équilibre entre la précision du résultat, le coût de calcul et la difficulté de convergence.

- Le comportement non-linéaire des contraintes [78] : les contraintes mécaniques au sein de la structure dépendent de beaucoup de facteurs et notamment des cas de chargement appliqués et de la géométrie de la structure dans le voisinage de l'élément. Ce dernier aspect est difficile à prendre en compte dans les calculs d'OT car la topologie de la structure évolue constamment au cours des itérations et une petite variation de la topologie peut créer une augmentation forte et soudaine des contraintes mécaniques dans certaines zones de la structure. Certaines méthodes, telle que la méthode SIMP, permettent un contrôle intrinsèque de ce comportement. En effet, dans ce type de méthode, pour éviter les phénomènes type "damier", il est nécessaire de créer un lien entre chaque élément et les éléments dans leur voisinage par l'intermédiaire de techniques de filtrage. Ce lien peut permettre de limiter les croissances brusques des contraintes sur des éléments isolés.
- Le problème de singularité [78] : lorsque la solution optimale se trouve être un point isolé du domaine de calcul, elle devient impossible à atteindre pour l'algorithme et ainsi amener celui-ci à converger vers des solutions non-optimales. Ce phénomène est un élément clé du contrôle des contraintes dans l'OT car il influence énormément le calcul d'optimisation et les techniques numériques apportées pour contrôler ce phénomène modifient légèrement le problème d'optimisation pour pouvoir arriver à convergence. Ce problème mérite un intérêt particulier, c'est pourquoi il est abordé plus en détail dans le Chapitre 4.

Ces trois problèmes liés au comportement des contraintes mécaniques sont un enjeu fondamental dans l'implémentation d'une contrainte d'optimisation basée sur les critères de tenue mécanique dans un algorithme d'OT. Les solutions mathématiques et les méthodes numériques permettant d'éviter ces phénomènes (ou au moins de limiter leur influence) sont détaillées dans le Chapitre 4 pour les matériaux isotropes et dans le Chapitre 5 pour les matériaux anisotropes.

2.5 L'optimisation topologique de structures architecturées multi-matériau

La FA a connu une croissance importante depuis les dernières décennies et offre, aujourd'hui, la possibilité de réaliser des structures aux géométries plus complexes et plus efficaces telles que les structures lattices. Aujourd'hui, ce type de structures rencontre de plus en plus d'intérêt dans différents secteurs de l'ingénierie tels que l'aérospatial, l'automobile ou encore le biomédical grâce notamment à la possibilité de concevoir l'architecture des matériaux à différentes échelles. Cet aspect permet ainsi d'obtenir des propriétés mécaniques très spécifiques et des performances qui

s'accordent avec les exigences du problème étudié (i.e. un excellent ratio poids/rigidité, une bonne perméabilité ou encore une bonne isolation thermique).

Une structure lattice est un matériau architecturé d'origine synthétique ou naturelle. Du point de vue mécanique une structure lattice est un milieu périodique dont l'unité répétitive est le Volume Élémentaire Représentatif (VER), défini à une échelle microscopique ou mésoscopique, qui se répète dans les différentes directions pour former une structure dense à l'échelle macroscopique, voir Fig. 2.5. Le matériau de la structure à l'échelle macroscopique peut être défini comme un matériau homogène anisotrope équivalent dont les propriétés dépendent de la topologie du VER défini à l'échelle inférieure.

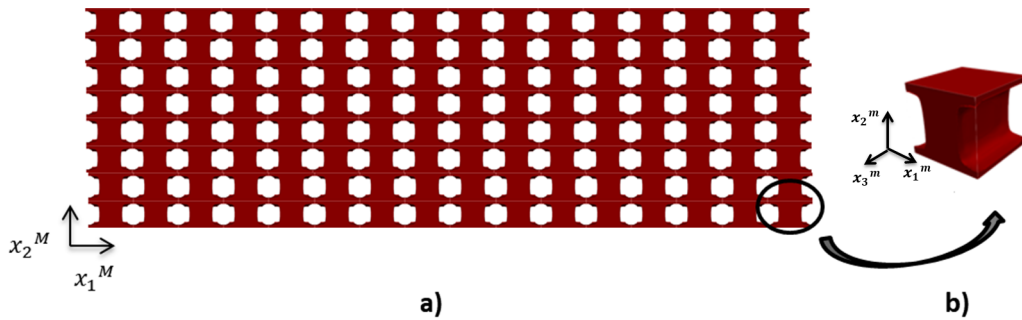


FIGURE 2.5 – a) Structure globale : échelle supérieure b) VER : échelle inférieure

Un grand nombre de travaux est aujourd'hui dédié au développement d'approches d'OT multi-échelle pour les structures lattices. Le but de ce type de recherches est de concevoir une approche générale qui réduit le nombre d'hypothèses simplificatrices et qui intègre directement dans la formulation du problème les variables d'optimisation définies aux deux échelles. Parmi celles-ci, la méthode SIMP est souvent utilisée pour réaliser l'optimisation de structures cellulaires allégées telles que les structures lattices [100–103]. Néanmoins, quand il est question d'aborder le problème de conception d'un matériau architecturé, une stratégie d'OT multi-échelle adéquate est nécessaire. En effet, la structure lattice peut être optimisée aux deux échelles : inférieure (celle du VER, qui peut être microscopique ou mésoscopique selon la longueur caractéristique du VER) et supérieure (macroscopique). À l'échelle inférieure, le comportement de la structure lattice est décrit au moyen des réponses physiques de son VER. À l'inverse, à l'échelle supérieure, la structure lattice est représentée par un matériau homogène équivalent dont les propriétés dépendent de l'échelle inférieure. Ainsi, il est nécessaire de lier les deux échelles de manière cohérente et cela passe par l'utilisation d'une technique d'homogénéisation adéquate.

Les travaux réalisés dans ce manuscrit se focaliseront uniquement sur l'OT de la topologie du VER de la structure lattice en considérant des exigences de conception définies à toute échelle. En conséquence, les variables topologiques sont définies uniquement à l'échelle du VER de la structure lattice, tandis que les réponses physiques et les exigences de conception sont définies aussi bien à l'échelle du VER qu'à l'échelle macroscopique. De plus, l'approche proposée dans ce manuscrit, et détaillée aux Chapitres 6 et 7, vise à généraliser la méthode d'OT multi-échelle des matériaux architecturés présentée dans le cadre des travaux de thèse de G. Bertolino au cas des structures lattices dont le VER est composé par plusieurs phases matériau [18].

Des études portant sur l'optimisation de la topologie du VER sont disponibles en littérature. Par exemple, Zhang *et al.* [104] ont utilisé la méthode SIMP combinée à une technique d'homogénéisation basée sur l'énergie de déformation du milieu périodique pour déterminer la topologie optimale du VER des matériaux cellulaires. La méthode d'homogénéisation fondée sur l'énergie de déforma-

tion [105–107] se base sur l’hypothèse fondamentale que l’énergie de déformation réelle du matériau hétérogène est équivalente à celle du matériau anisotrope homogène équivalent. En partant de cette hypothèse, il est possible de déterminer tous les composants de la matrice de rigidité équivalente du matériau homogénéisé à l’échelle macroscopique. Il est évident que des conditions aux limites (CL) adéquates doivent être imposées au VER sous la forme de conditions aux limites périodiques (CLP). L’hypothèse derrière l’application de CLP est que le VER est indéfiniment répété suivant les axes du repère global de la structure. Le schéma d’homogénéisation utilisé dans la méthode joue un rôle essentiel car il permet de lier les variables topologiques définies à l’échelle inférieure avec les réponses physiques évaluées à l’échelle supérieure. Le développement des méthodes d’homogénéisation a été un sujet fortement étudié au cours des deux dernières décennies. Sigmund *et al.* [108, 109] ont d’abord proposé un schéma d’homogénéisation inverse pour concevoir des matériaux avec des paramètres constitutifs et des propriétés élastiques pré-définies en utilisant la méthode SIMP. Une variante de la méthode d’homogénéisation basée sur l’énergie de déformation du milieu périodique est proposée par Barbero *et al.* [110, 111] : dans ce contexte, les propriétés élastiques du milieu homogène équivalent à l’échelle macroscopique sont calculés à partir du champ de contraintes moyenne à l’intérieur du VER. Une autre méthode, appelée homogénéisation asymptotique, a été utilisée dans différents travaux [102, 112, 113]. Il existe d’autres méthodes d’homogénéisation purement numériques et efficaces [100, 114]. Toutes ces méthodes numériques d’homogénéisation sont, de facto, équivalentes et leur efficacité et l’utilisation de l’une d’entre elle dépend fortement de la méthode d’OT utilisée et du problème physique étudié.

Il est évident que la technique d’homogénéisation des milieux périodiques requiert un coût de calcul important si le comportement de la structure lattice à l’échelle macroscopique est complètement anisotrope. Cela peut se produire lorsque le VER de la structure lattice ne possède pas de symétries. Sivapuram *et al.* [115] ont utilisés la méthode LSM combinée à un schéma d’homogénéisation asymptotique. Le problème à l’échelle microscopique est divisé en plusieurs sous-problèmes d’OT, un pour chaque zone spécifique du domaine de définition. Cette approche permet d’économiser du temps de calcul car la solution recherchée pour chaque sous-problème est menée en parallèle des autres. Cependant, chaque sous-problème donne une architecture de VER différent et, dans certains cas, les CL des différentes meso-structures ne sont pas compatibles. Cheng *et al.* [113] ont abordé l’OT de structures lattice à gradient de propriétés en utilisant la méthode MMA ainsi que l’homogénéisation asymptotique. Ils ont alors proposé un modèle de rupture multi-échelle afin de contrôler la limite d’élasticité de la micro-structure soumise à des contraintes macroscopiques. Dans ce contexte, la conception de la structure lattice gérant la répartition des contraintes mécaniques améliore les propriétés élastiques et plastiques de la structure macroscopique, mais le phénomène appelé "*homogenisation boundary layer phenomenon*" apparaît. Ce phénomène est dû au manque de périodicité à la frontière entre VER ayant différentes densités et apporte une erreur dans la prédiction de la contrainte maximale. Li *et al.* [114] proposent une méthode d’homogénéisation multi-échelle où le VER est défini par une gyroïde. La structure lattice gyroïde permet d’obtenir des propriétés mécaniques excellentes en utilisant une formulation mathématique compacte. L’utilisation des gyroïdes permet d’obtenir une structure lattice à gradient de propriétés, c’est-à-dire avec une topologie de VER qui évolue suivant les zones de la structure macroscopique, tout en gardant une continuité entre les différentes géométries de VER à l’échelle inférieure. Tromme *et al.* [103] utilisent des méthodes de réduction de modèle combinées à la méthode SIMP pour réaliser des OT multi-échelle. Une telle méthode permet de résoudre le problème sans séparation d’échelle. Cependant, cette méthode ne donne pas de résultat optimal pour les problèmes de maximisation de la rigidité. Li *et al.* [102] proposent un couplage entre la méthode d’homogénéisation asymptotique et la méthode SIMP pour réaliser une optimisation double-échelle (i.e. une optimisation de

la topologie du VER à l'échelle inférieure et de la topologie de la structure à l'échelle supérieure) tout en considérant différents modèles de VER à l'échelle mésoscopique. Cette méthode permet d'obtenir de meilleures performances en terme de rigidité que les structures périodiques usuelles, cependant, l'interface entre les différentes topologies de VER à l'échelle inférieure n'est pas correctement définie et peut affecter les performances globales de la structure. Gao *et al.* [116] ou encore Li *et al.* [117] utilisent des approches basées sur la méthode LSM périodique pour réaliser l'OT de matériaux composites poreux avec des microstructures multi-domaines. D'autres OT multi-échelle de structures lattice [100] sont basées sur la méthode BESO. Une autre approche [118–120] propose de coupler la méthode d'homogénéisation basée sur l'énergie de déformation (SEHM) à un algorithme d'OT basée sur les entités géométriques NURBS pour obtenir différentes propriétés des matériaux architecturés. Cette méthode a pour avantages d'utiliser une approche d'homogénéisation efficace qui réduit le nombre de calculs pour déterminer le tenseur d'élasticité du matériau homogène équivalent tout en permettant une définition propre de la frontière de la topologie du VER qui est alors définie par une entité purement géométrique. Tous les détails de cette approche sont donnés dans les Chapitres 6 et 7.

Outre les réponses physiques globales (masse, raideur, etc.), il est nécessaire d'assurer une tenue mécanique correcte des matériaux architecturés. Au cours des dernières années, plusieurs travaux se sont intéressés à la résistance en cisaillement de ce type de structures. En effet, certains travaux ont été réalisés sur des structures type sandwich [105, 106] ou encore Li *et al.* [121] qui ont testé la rigidité effective dans le plan des structures hexagonales en nid d'abeille à l'échelle macroscopique selon un modèle de flexion.

L'OT a pour but d'obtenir des structures les plus efficaces possibles tout en respectant certaines attentes par rapport à différents phénomènes physiques. Cependant, lorsque plusieurs contraintes d'optimisation basées sur des phénomènes différents sont utilisées, il est possible qu'aucune des solutions présentes dans le domaine faisable puisse permettre de satisfaire l'ensemble des contraintes d'optimisation. Cela peut être du au fait que le comportement du matériau utilisé dans le calcul d'optimisation n'est pas efficace contre l'ensemble des phénomènes étudiés. L'une des solutions à ce type de problème est d'élargir le domaine de faisabilité en considérant plusieurs matériaux pour définir la structure finale. [19] propose un état de l'art des avancées technologiques et des différentes applications permises grâce à la FA multi-matériau.

C'est pourquoi différents auteurs se sont penchés sur l'OT multi-matériau. Dans [1], les auteurs décrivent le module d'élasticité d'un matériau à deux phases dans le cadre de la méthode SIMP tel que :

$$E(\rho) = \rho^\alpha E_1 + (1 - \rho^\alpha)E_2, \quad (2.28)$$

où ρ définit la densité artificielle propre à la méthode SIMP, E_1 et E_2 sont les modules d'élasticité des deux matériaux. Dans le cas où le deuxième matériau est le vide, le module E_2 est laissé nul.

Un autre point de vue a été développé dans [122], en introduisant une "peak function" implémentée dans la méthode SIMP pour décrire plusieurs phases de matériaux au sein du domaine de définition. Le principal intérêt de cette méthode est de pouvoir inclure plusieurs matériaux dans le domaine de définition sans augmenter le nombre de variables d'optimisation. Néanmoins, comme la recherche de la valeur optimale dépend de la pente du point local de la courbe, cette méthode peut amener certaines difficultés pour que l'algorithme franchisse les points singuliers permettant de faire la transition d'une phase matériau à une autre.

Zuo *et al.* [123] ont utilisé la méthode d'optimisation multi-matériau SIMP ordonnée, couplée à une fonction de coût. Dans une telle méthode, les valeurs de densité projetées sur les éléments sont rangées puis séparées en différents paliers suivant la valeur de leur module d'Young pénalisé,

comme illustré dans la Fig. 2.6. Les paliers sont définis par intervalle de densité tel que :

$$\rho_i = \rho_i^T / \rho_{\max}, \quad i = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \quad (2.29)$$

avec ρ_i^T la densité à l'interface entre deux matériaux, ρ_{\max} la densité maximale et N_{mat} le nombre de matériaux utilisés.

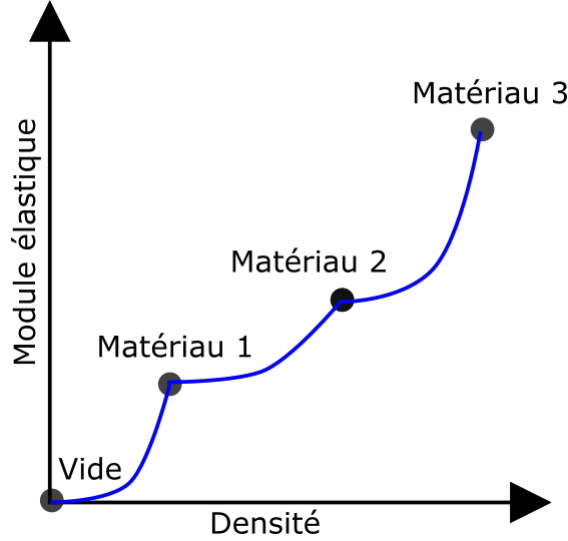


FIGURE 2.6 – Interpolation Méthode SIMP ordonnée

En introduisant le coefficient d'échelle A_e et le coefficient de translation B_e , le module d'élasticité pénalisé peut s'écrire en fonction de la densité tel que :

$$E_e(\rho_e) = A_e \rho_e^p + B_e, \quad (2.30)$$

où A_e et B_e sont définis pour $\rho_e \in [\rho_i, \rho_{i+1}]$, tels que :

$$A_e = \frac{E_i - E_{i+1}}{\rho_i^p - \rho_{i+1}^p}, \quad B_e = E_i - A_e \rho_i^p. \quad (2.31)$$

La force de cette méthode est qu'elle est conceptuellement simple et n'ajoute pas de variables supplémentaires dans le problème d'optimisation bien que plusieurs matériaux soient présents dans le domaine de définition. Cependant, certains effets "damiers" peuvent apparaître aux interfaces entre les différents matériaux. Ce phénomène peut être surmonté en incluant certains artifices numériques qui peuvent augmenter considérablement le temps de calcul et perdre ainsi les avantages apportés par cette méthode. Une approche basée sur la LSM est proposée par Sha *et al.* [124]. Dans cette méthode un nombre total de N LSFs est utilisé pour représenter $N + 1$ phases matériau.

Un schéma de pénalisation différent est proposé dans [125]. Cette méthode est basée sur un principe de superposition d'un nombre de champs de variables d'optimisation équivalent au nombre de matériaux (hors vide) utilisés dans le calcul d'optimisation. Ainsi, le tenseur d'élasticité de chaque élément du modèle EF est défini comme la somme des tenseurs d'élasticité de chaque matériau pénalisé par son champ de variables respectif. Ainsi, pour chaque élément e , la matrice d'élasticité (notation de Voigt) s'écrit :

$$\mathbf{C}_e = \sum_{n=1}^{N_{\text{mat}}} \phi_n^\alpha \mathbf{C}_{e0n}, \quad (2.32)$$

où ϕ_n est la fonction de pénalisation du tenseur d'élasticité du matériau n , définie telle que :

$$\phi_n = \prod_{m=1}^n (\rho_m) \prod_{m=n+1}^{N_{\text{mat}}} (1 - \rho_m), \quad (2.33)$$

où ρ_m est le champ de pseudo-densité de la méthode SIMP pour la phase m et N_{mat} est le nombre total de phases..

Cette méthode présente différents avantages :

- La méthode de description des différentes phases matériaux est réalisée à partir d'entités géométriques, telles que les NURBS, voir [125] et les travaux de thèse de T. Rodriguez [126], ce qui permet une description précise des domaines matériaux. Cette méthode ne souffre pas de problèmes lorsqu'il s'agit de traiter d'un nombre important de phases matériau différentes.
- Elle présente une complexité numérique faible et permet de surmonter les difficultés numériques (tel que l'effet "damier") sans alourdir le calcul par l'ajout d'artefacts numériques.
- Les interfaces entre les différentes phases matériau sont correctement définies et les matériaux ne se chevauchent pas grâce au modèle de pénalisation imposé. Il n'est ainsi pas nécessaire d'ajouter une contrainte d'optimisation supplémentaire sur les variables d'optimisation.

Par contre, lors de l'utilisation de cette méthode, le nombre de variables d'optimisation augmente de la même manière que le nombre de matériaux, ce qui est moins efficace que les méthodes proposées précédemment.

Cependant, les méthodes d'OT multi-matériau se basent sur un certain nombre de matériaux initiaux fixés et définis par l'utilisateur en entrée d'optimisation. De telles techniques ne permettent pas d'intégrer les propriétés matériau en tant que variables du problème d'optimisation. Néanmoins, le développement des approches multi-matériau et des techniques de fabrication des pièces de plus en plus avancées, permet la possibilité d'obtenir des structures lattices dont le VER serait défini par plusieurs matériaux : c'est l'optimisation multi-échelle/multi-matériau. Ce type d'OT a été de plus en plus étudié au cours des dernières années. En effet, [127] a dans premier temps utilisé la méthode d'homogénéisation inverse pour concevoir des micro-structures périodiques composées de trois phases matériau, dans le but d'obtenir des matériaux aux coefficients de dilatation thermique extrêmes. D'autres travaux [128], utilisent l'OT pour trouver les topologies optimales des composites viscoélastiques multi-phase afin d'adapter leur comportement de dissipation d'énergie en fonction de leur fréquence. Récemment, Kazemi *et al.* [129] ont proposé une approche basée sur une méthode de projection géométrique pour obtenir des structures lattices multi-matériau. En attribuant une variable de taille à chaque composant géométrique qui est pénalisé selon l'idée des méthodes basées sur la densité, la projection géométrique permet de supprimer entièrement un composant de la conception. [130] a utilisé la méthode Smolyak fusionnée aux méthodes de description de la géométrie des entités NURBS pour caractériser les propriétés matériaux de toutes sortes de microstructures définies par plusieurs matériaux. La méthode est étendue de manière à définir deux champs de variables différents, un à l'échelle du VER et un autre à l'échelle macroscopique, dans le but de réaliser une double optimisation : une première qui a pour but d'optimiser la topologie du VER (composée de plusieurs phases matériau) et une seconde qui a pour but d'optimiser la géométrie de la structure à l'échelle macroscopique. D'un autre côté, une approche multi-matériau a été implémentée dans [131] pour définir des microstructures composites magnétiques. Les travaux sur le développement des microstructures architecturées dont le VER est défini par plusieurs phase matériau permet également d'obtenir des méta-matériaux équivalents ayant des propriétés

extrêmes, tels qu'un coefficient de dilatation thermique extrême [127], une conductivité extrême [132] ou encore un coefficient de Poisson négatif. Ce dernier aspect a connu un gain d'intérêt de plus en plus important au cours des dernières années, un récapitulatif non exhaustif des travaux sur le sujet est donné dans la Section 2.6.

2.6 Les méta-matériaux auxétiques

Une autre approche, permise par le développement des stratégies d'optimisation multi-échelle et multi-matériau, est celle utilisée pour la conception de matériaux auxétiques [133–141]. En effet, lors des calculs multi-échelle, les techniques d'homogénéisation permettent de déterminer le tenseur de rigidité du matériau équivalent à l'échelle macroscopique. Un état de l'art complet sur les différents types de métamatériaux et de leurs propriétés est donné dans [140]. Par la suite, [133] propose une approche multi-échelle et multi-matériau basée sur la LSM pour optimiser les coefficients du tenseur de rigidité obtenu en sortie d'homogénéisation. Le principe est de minimiser la différence entre les paramètres de ce tenseur en sortie d'homogénéisation et des paramètres fixés par l'utilisateur en début d'optimisation à l'aide d'une méthode aux moindres carrés. Dans ce contexte, la fonction objectif J est définie telle que :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d w_{ij} \left(C_{ij}^M - C_{ij}^* \right)^2, \quad (2.34)$$

où w_{ij} sont les poids associés aux composants correspondants, C_{ij}^H sont les composants du tenseur de rigidité homogénéisé et C_{ij}^* sont les coefficients du tenseur de rigidité imposés par l'utilisateur et $d = 3, 6$ représente le nombre de composants du tenseur selon la dimension du problème (2D et 3D, respectivement). Dans le cadre de cette méthode, l'utilisation d'une approche multi-matériau a permis d'obtenir des méta-matériaux auxétiques dont les coefficients de Poisson sont différents suivant les directions d'orthotropie. [134] proposent une méthode basée sur l'*independent point-wise density interpolation* (iPDI) couplée à un modèle bi-matériau pour obtenir des structures architecturées auxétiques dont le motif élémentaire serait composé de deux phases matériau. Dans la méthode iPDI, le champ de densité est construit par interpolation des valeurs de densité aux points de la variable de conception, également appelés point de densité. La méthode iPDI permet d'avoir une bonne qualité de la description des frontières. Les méthodes d'OT classiques sont souvent utilisées pour réaliser ce type d'OT. Ainsi, [137, 139] obtiennent des coefficients de Poisson négatifs en utilisant la méthode SIMP tandis que [138, 141] préfèrent utiliser la LSM ou la PLSM. Plus particulièrement, [141] décident de coupler la LSM à la méthode d'homogénéisation inverse pour obtenir des matériaux auxétiques aux frontières bien définies. [137] couple la méthode d'OT SIMP modifiée au schéma d'homogénéisation inverse pour obtenir des structures auxétiques 3D qui ne nécessitent pas d'opération de post-traitement. Ils réussissent ainsi à obtenir des méta-matériaux dont le coefficient de Poisson atteint des valeurs jusqu'à $-0,5$. La majorité des travaux sur les matériaux auxétiques ont permis d'obtenir de nouvelles géométries aux propriétés bien définies. Par ailleurs, l'une des principales interrogations réside dans la diminution du coût de calcul. C'est pourquoi, [139] propose une solution alternative à l'homogénéisation pour définir les propriétés du matériau à l'échelle supérieure. Les auteurs préfèrent ainsi utiliser des essais de déformation par traction pour déterminer le tenseur homogénéisé du matériau à l'échelle macroscopique, car dans ce type d'essai, le matériau est uniformément étiré, soit longitudinalement, soit transversalement. Le comportement du matériau peut alors être caractérisé après avoir soumis la cellule unitaire à des déplacements unitaires. [142] réutilise la méthode basée sur les essais de déformation par

traction pour concevoir des structures 3D en matériaux auxétiques capables de garder des valeurs de coefficient de Poisson constantes sur des grands intervalles de déformation.

Comme il peut-être déduit de cette revue de littérature, certains problèmes apparaissent lorsqu'il s'agit d'aborder le problème de l'OT multi-échelle des structures lattices :

1. Comment intégrer l'analyse multi-échelle dans l'optimisation topologique ?
2. Est-il possible d'optimiser la topologie du VER en intégrant des critères de conception définis à toutes les échelles ?
3. Quel procédé d'homogénéisation offre le meilleur compromis entre la qualité des résultats et un coût de calcul raisonnable ?
4. Est-il possible d'obtenir des matériaux architecturés dont le VER est composé par plusieurs matériaux grâce à l'OT multi-échelle multi-matériau ?

Une étude détaillée de l'implémentation de l'algorithme d'OT multi-échelle multi-matériau pour les matériaux architecturés multi-matériau est présentée dans le Chapitre 6. Cette étude sera étendue ensuite dans le Chapitre 7 dans le but d'obtenir des méta-matériaux auxétiques.

2.7 Conclusion de l'étude bibliographique

Cette étude bibliographique a mis en avant plusieurs aspects :

- Il existe plusieurs familles d'optimisation structurale, cependant, la plus générale d'entre elles est l'optimisation topologique. En effet, cette méthode permet une distribution du matériau à l'intérieur du domaine de définition en considérant le moins de contraintes possibles. Ces méthodes ont été fortement développées au cours des dernières années, pourtant certaines difficultés sont toujours présentes. Les topologies en sorties d'optimisation sont souvent basées sur un maillage EF et dont le principe est d'activer ou de désactiver les éléments au sein du domaine matériau. Ainsi, les frontières de la structure ne sont pas précises et les résultats ne sont pas compatibles avec les logiciels CAO. Une autre difficulté découle de ce manque de description : les géométries sont souvent retravaillées/lissées en sortie d'optimisation et il apparaît ainsi un décalage entre les réponses physiques calculées lors à la fin du processus d'optimisation et celles retrouvées à partir de la pièce reconstruite.
- Il existe trois grandes familles d'algorithmes d'OT. La première est composée de l'ensemble des méthodes basées sur l'implémentation d'une densité fictive, la seconde comprend les méthodes LSM tandis que la dernière comporte les méthodes basées sur des algorithmes évolutionnaires (ESO, BESO). Chacune d'entre elles apporte un grand nombre d'avantages mais aussi quelques inconvénients ; il est impossible de prédire quelle méthode donne les meilleurs résultats. Le choix d'une méthode ou une autre doit être fait en fonction du problème étudié.
- Un grand nombre de travaux ont été réalisés pour permettre le contrôle de la répartition du champ de contraintes dans les processus d'OT. Ces études ont mis en avant trois principaux problèmes liés au comportement des contraintes : le comportement "local" des contraintes, leur comportement non-linéaire et le phénomène de singularité. La gestion de ces phénomènes n'est pas triviale et chaque méthode développée met en avant des artefacts numériques permettant de résoudre plus ou moins efficacement ces difficultés. La grande majorité de ces études a été réalisée dans le cadre des matériaux isotropes. Il existe très peu de travaux prenant en compte

les matériaux anisotropes. Néanmoins, les technologies de fabrication additive se développant énormément, il est aujourd'hui possible de réaliser des structures en matériaux composites. Ainsi, la prise en compte de la répartition des contraintes mécaniques lors d'un processus d'optimisation dans le cadre de matériaux anisotropes, va devenir une nécessité.

- La fabrication additive permet aujourd'hui une plus grande liberté dans le processus de conception des structures. En effet, la fabrication de structures aux géométries complexes, telles que les structures architecturées, ou encore les structures multi-matériaux est désormais accessible. Ainsi, il est nécessaire de développer des méthodes d'optimisation adéquates permettant de tirer pleinement parti des bénéfices apportés par la FA. C'est pourquoi, de nombreuses méthodes d'optimisation multi-échelle et/ou multi-matériau se sont développées. Les recherches sont actuellement en cours pour améliorer ces techniques qui sont soumises aux mêmes problèmes que les procédés d'optimisation classiques.

Chapitre 3

Un algorithme d'optimisation basé sur les NURBS : L'algorithme SANTO

3.1 Introduction

La revue de littérature dans le chapitre précédent a permis de mettre en avant certaines difficultés rencontrées par les algorithmes d'optimisation. En effet, la majorité des méthodes, telles que les méthodes SIMP ou BESO, n'utilise pas d'entité géométrique pour définir la topologie de la structure et celle-ci se retrouve donc imprécise et sans contour correctement défini.

Les entités NURBS (*Non-Uniform Rational Basis Spline*) sont utilisées pour représenter mathématiquement des objets géométriques. Elles sont utilisées dans les logiciels CAO pour définir des courbes et surfaces complexes. Cependant, leur utilisation ne se limite pas uniquement à cela et elles sont de plus en plus testées dans d'autres domaines tels que la compression d'images [143, 144], dans les techniques d'approximation des courbes [145] ou encore pour l'optimisation des composites à rigidité variable (CRV) [146]. Leur polyvalence et leur robustesse ont donc été un atout dans de nombreux domaines et il est désormais possible aujourd'hui de les utiliser dans l'OT. En effet, de nombreux travaux pour développer une méthode d'OT innovante basée sur les entités NURBS ont été réalisés [15, 17, 147] : cette méthode est la méthode *NURBS-based SIMP*.

Ce chapitre a pour but de détailler les principes fondamentaux de la méthode NURBS-based SIMP, qui sera exploitée et développée dans les travaux de ce manuscrit. Cette méthode est une généralisation des premiers travaux proposés dans [148, 149]. Dans cette méthode, le champ de pseudo-densité défini dans le modèle SIMP traditionnel est représenté par une surface/hyper-surface NURBS pour les problèmes 2D/3D, respectivement. Dans les cas 2D, le champ de pseudo-densité est représenté par une surface NURBS dont les points de contrôle sont décrits par 3 coordonnées, 2 coordonnées cartésiennes classiques et une troisième coordonnée qui est la pseudo-densité. Dans le cas 3D, le champ de densité fictif est défini par une entité NURBS 4D, dont les 3 premières coordonnées sont les coordonnées cartésiennes et la quatrième coordonnée représente la pseudo-densité.

Dans ce contexte, pour les calculs 2D, la topologie de la structure est définie au cours de l'optimisation par une entité purement géométrique, la solution est donc compatible et exploitable par les logiciels CAO. Le cas des calculs 3D est légèrement différent, car l'extraction de la topologie finale 3D à partir de l'hyper-surface 4D utilise une entité géométrique d'ordre supérieur qui n'est pas encore définie dans les logiciels CAO et nécessite donc une étape de post-traitement ultérieure. En effet, pour les calculs 3D, la topologie finale est donnée par un fichier STL "*propre*" (non-dégénéré) qui peut être reconstruit par des assemblages de patch élémentaires comme décrit dans [150].

Ce chapitre est divisé en quatre sections : une première partie qui détaille plus précisément les propriétés des entités NURBS et donne leurs différents avantages qui en font un outil de choix pour les calculs d'OT. Une seconde partie explique la méthode NURBS-based SIMP et fournit les principaux éléments permettant de comprendre l'utilisation de cette méthode. Enfin, une dernière partie est consacrée à l'application de la méthode aux exemples 2D et 3D et met en avant les premières constatations suite au développement de cette méthode.

Notation Les tenseurs et les matrices sont indiqués en gras avec des lettres et/ou symboles majuscules, tandis que les vecteurs sont indiqués en gras avec des lettres et/ou symboles minuscules. Le symbole $\#\mathcal{S}$ indique la taille (ou le nombre d'éléments) de l'ensemble \mathcal{S} .

3.2 La méthode NURBS-based SIMP

3.2.1 Les entités NURBS

Les principaux principes des hyper-surfaces NURBS sont rappelés dans cette section. Les formules des courbes et surfaces, largement discutées dans [151], peuvent être facilement déduites à partir des relations suivantes.

Une hypersurface NURBS est une fonction basée sur les polynômes de Bernstein, définie dans un *espace paramétrique* (domaine), et prenant des valeurs dans *l'espace NURBS* (co-domaine). De plus, si N est la dimension de *l'espace paramétrique* et M la dimension de *l'espace NURBS*, une entité NURBS est définie telle que $\mathbf{h} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. Par exemple, un paramètre scalaire ($N = 1$) peut décrire soit une courbe plane ($M = 2$), soit une courbe 3D ($M = 3$). Dans le cas d'une surface, deux paramètres scalaires sont nécessaires ($N = 2$) avec trois paramètres physiques ($M = 3$). La formule mathématique d'une hypersurface générique NURBS est :

$$\mathbf{h}(u_1, \dots, u_N) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_N=0}^{n_N} R_{i_1, \dots, i_N}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) \mathbf{P}_{i_1, \dots, i_N}, \quad (3.1)$$

où $R_{i_1, \dots, i_N}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ sont les fonctions de base rationnelles, qui sont liées aux fonctions de formes de l'entité NURBS $N_{i_k, p_k}(\zeta_k)$, $k = 1, \dots, N$ par la relation suivante :

$$R_{i_1, \dots, i_N}(\zeta_1, \dots, \zeta_N) = \frac{\omega_{i_1, \dots, i_N} \prod_{k=1}^N N_{i_k, p_k}(\zeta_k)}{\sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_N=0}^{n_N} \left[\omega_{j_1, \dots, j_N} \prod_{k=1}^N N_{j_k, p_k}(\zeta_k) \right]}. \quad (3.2)$$

Dans les Eqs. (3.1) et (3.2), $\mathbf{h}(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ est une fonction vectorielle à valeurs réelles de dimension M , $(\zeta_1, \dots, \zeta_N)$ sont des paramètres scalaires sans dimension définis dans l'intervalle $[0, 1]$, $(n_j + 1)$ est le nombre de points de contrôle (PC) le long de la direction ζ_j , tandis que $\mathbf{P}_{i_1, \dots, i_N}$ sont les PC. La j -ième coordonnée du PC ($X_{i_1, \dots, i_N}^{(j)}$) est rangée dans le tableau $\mathbf{X}^{(j)} \in \mathbb{R}^{(n_1+1) \times \cdots \times (n_N+1)}$. L'expression explicite des coordonnées des PC dans \mathbb{R}^M est :

$$\mathbf{P}_{i_1, \dots, i_N} = \{X_{i_1, \dots, i_N}^{(1)}, \dots, X_{i_1, \dots, i_N}^{(M)}\}, \quad (3.3)$$

$$\mathbf{X}^{(j)} \in \mathbb{R}^{(n_1+1) \times \cdots \times (n_N+1)}, \quad j = 1, \dots, M.$$

Pour les surfaces NURBS, $\mathbf{P}_{i_1, i_2}^T = \{X_{i_1, i_2}^{(1)}, X_{i_1, i_2}^{(2)}, X_{i_1, i_2}^{(3)}\}$ et chaque coordonnée est rangé dans une matrice définie dans $\mathbb{R}^{(n_1+1) \times (n_2+1)}$. L'agencement des PC est appelée *polygone de contrôle* pour

les courbes NURBS, réseau de contrôle pour les surfaces et hyper-réseau de contrôle (ou *hyper-net*) pour les hypersurfaces [151]. Le nombre total de PC constituant l'hyper-net est :

$$n_{\text{CP}} := \prod_{i=1}^N (n_i + 1). \quad (3.4)$$

Le PC générique n'appartient pas directement à l'entité NURBS mais il influe sur la forme de l'entité au moyen de ses coordonnées. À chaque PC, $\mathbf{P}_{i_1, \dots, i_N}$, est assigné un poids ω_{i_1, \dots, i_N} . Plus le poids est important, plus l'entité NURBS est attirée vers le PC. Pour chaque direction paramétrique ζ_k , $k = 1, \dots, N$, les fonctions de formes de la NURBS sont de degré p_k et peuvent être définies de manière récursive telle que :

$$N_{i_k, 0}(\zeta_k) = \begin{cases} 1, & \text{if } v_{i_k}^{(k)} \leq \zeta_k < v_{i_k+1}^{(k)}, \\ 0, & \text{autrement,} \end{cases} \quad (3.5)$$

$$N_{i_k, q}(\zeta_k) = \frac{\zeta_k - v_{i_k}^{(k)}}{v_{i_k+q}^{(k)} - v_{i_k}^{(k)}} N_{i_k, q-1}(\zeta_k) + \frac{v_{i_k+q+1}^{(k)} - \zeta_k}{v_{i_k+q+1}^{(k)} - v_{i_k+1}^{(k)}} N_{i_k+1, q-1}(\zeta_k), \quad (3.6)$$

$$q = 1, \dots, p_k,$$

où chaque polynôme de Bernstein est défini sur le vecteur de nœuds :

$$\mathbf{v}^{(k)\text{T}} = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p_k+1}, v_{p_k+1}^{(k)}, \dots, v_{m_k-p_k-1}^{(k)}, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p_k+1}, \quad (3.7)$$

dont la dimension est $m_k + 1$, avec :

$$m_k = n_k + p_k + 1. \quad (3.8)$$

Chaque vecteur de nœuds $\mathbf{v}^{(k)}$ est une suite non-décroissante de nombres réels qui peut être interprétée comme une collection discrète des valeurs du paramètre sans dimension u_k . Les fonctions de forme de la NURBS apportent différentes propriétés intéressantes : pour plus d'informations et pour une compréhension plus profonde du sujet, le lecteur est adressé à [151]. Dans ce chapitre, uniquement la propriété du *support local* sera rappelée parce qu'elle joue un rôle important dans l'algorithme d'optimisation NURBS-based SIMP [15, 147] :

$$R_{i_1, \dots, i_N}(u_1, \dots, u_N) \neq 0$$

$$\text{if } (u_1, \dots, u_N) \in \left[v_{i_1}^{(1)}, v_{i_1+p_1+1}^{(1)} \right] \times \dots \times \left[v_{i_N}^{(N)}, v_{i_N+p_N+1}^{(N)} \right]. \quad (3.9)$$

L'équation précédente signifie que chaque PC (et le poids respectif) affecte uniquement une zone précise de *l'espace paramétrique*, qui est appelée *support local* ou encore *zone d'influence*.

La Fig 3.1 illustre cette propriété pour le cas (a) d'une B-spline (i.e. avec un poids égale à 1) et (b) pour une NURBS (i.e. dont le poids du PC modifié est strictement supérieur à 1), tandis que l'image (c) montre la zone d'influence du PC modifié sur le reste de l'entité NURBS. Il est immédiat de voir sur la Fig 3.1, que plus le nombre de PC est élevé, plus petite sera la zone d'influence par rapport à l'entité NURBS.

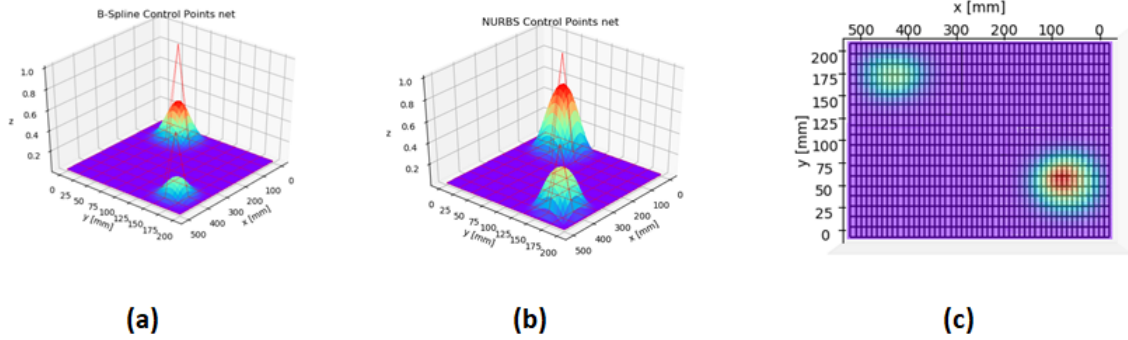


FIGURE 3.1 – Propriété du support local

3.3 La méthode NURBS-based SIMP

Les détails de l'implémentation de la méthode d'OT dans le cadre des hypersurfaces NURBS sont donnés dans [15, 147]. Les principales propriétés de cette méthode sont rappelées ici dans le cadre des problèmes d'OT pour une bonne compréhension des travaux présentés dans les chapitres suivants. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ un espace Euclidien compact défini dans un repère cartésien orthogonal $O(x_1, x_2, x_3)$:

$$\mathcal{D} := \{\mathbf{x}^T = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \in [0, a_1], x_2 \in [0, a_2], x_3 \in [0, a_3]\}, \quad (3.10)$$

où a_j , $j = 1, 2, 3$ est la longueur caractéristique du domaine suivant l'axe j . La formulation mathématique se limite ici, dans un souci de clarté, au problème de la minimisation de la compliance d'une structure, soumise à une contrainte d'inégalité sur le volume. Ce problème peut-être mathématiquement bien posé à travers certaines techniques, voir [1]. Le but de l'OT est de chercher la meilleure distribution d'un "matériau hétérogène" donné (i.e. la définition des zones de vide et de matériau), qui satisfasse les conditions du problème initial.

Soit l'équation d'équilibre (cas statique) d'un modèle EF dans le cas le plus général :

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \quad \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{f}} \in \mathbb{R}^{\hat{N}_{\text{DOF}}}, \quad \hat{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{\hat{N}_{\text{DOF}} \times \hat{N}_{\text{DOF}}}, \quad (3.11)$$

où \hat{N}_{DOF} représente le nombre total de degrés de liberté (DL) avant l'application des conditions aux limites (CL), $\hat{\mathbf{K}}$ est la matrice de rigidité (singulière) non-réduite du modèle EF, tandis que $\hat{\mathbf{f}}$ et $\hat{\mathbf{u}}$ sont les vecteurs non-réduits des forces nodales externes généralisées et des déplacements respectivement. Soit la définition suivante :

Definition 1 Soit la matrice $\hat{\mathbf{M}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et les deux ensembles de nombres naturels positifs $\mathcal{R} \subset \{i \mid 1 \leq i \leq m\}$ et $\mathcal{C} \subset \{j \mid 1 \leq j \leq n\}$. L'opérateur $\mathfrak{M} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{M}}, \mathcal{R}, \mathcal{C})$ retourne la matrice \mathfrak{M} obtenue en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne de $\hat{\mathbf{M}}$, $\forall i \in \mathcal{R}$ et $\forall j \in \mathcal{C}$. Similairement, pour $\hat{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^n$ donné, $\mathbf{v} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{v}}, \mathcal{R})$ donne le vecteur obtenu en supprimant la i -ème ligne de $\hat{\mathbf{v}}$, $\forall i \in \mathcal{R}$.

Soient $\mathcal{I}_U \subset \{i \mid 1 \leq i \leq \hat{N}_{\text{DOF}}\}$ et $\mathcal{I}_{BC} \subset \{i \mid 1 \leq i \leq \hat{N}_{\text{DOF}}\}$ deux ensembles génériques d'indices tels que : $\mathcal{I}_U \cap \mathcal{I}_{BC} = \emptyset$, $\#\mathcal{I}_U = N_{\text{DOF}}$, $\#\mathcal{I}_{BC} = N_{BC}$ et $N_{\text{DOF}} + N_{BC} = \hat{N}_{\text{DOF}}$ (i.e. N_{BC} est le nombre de DL où les déplacements sont imposés, tandis que N_{DOF} est le nombre de DL inconnus). En appliquant Def. 1 à l'Eq. (3.11), on obtient :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_{\text{BC}} \\ \mathbf{K}_{\text{BC}}^T & \tilde{\mathbf{K}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{u}_{\text{BC}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{r} \end{Bmatrix}, \quad (3.12)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &:= \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{u}}, \mathcal{I}_{\text{BC}}), \quad \mathbf{f} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{f}}, \mathcal{I}_{\text{BC}}) \\ \mathbf{u}_{\text{BC}} &:= \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{u}}, \mathcal{I}_{\text{U}}), \quad \mathbf{r} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{f}}, \mathcal{I}_{\text{U}}), \\ \mathbf{K} &:= \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{K}}, \mathcal{I}_{\text{BC}}, \mathcal{I}_{\text{BC}}), \quad \mathbf{K}_{\text{BC}} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{K}}, \mathcal{I}_{\text{BC}}, \mathcal{I}_{\text{U}}), \quad \tilde{\mathbf{K}} := \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{K}}, \mathcal{I}_{\text{U}}, \mathcal{I}_{\text{U}}), \\ \mathbf{u}, \mathbf{f} &\in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}, \quad \mathbf{u}_{\text{BC}}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^{N_{\text{BC}}}, \\ \mathbf{K} &\in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}} \times N_{\text{DOF}}}, \quad \mathbf{K}_{\text{BC}} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}} \times N_{\text{BC}}}, \quad \tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{N_{\text{BC}} \times N_{\text{BC}}}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Dans l'Eq. (3.12), \mathbf{u} et \mathbf{u}_{BC} sont les vecteurs de déplacements généralisés inconnus et imposés respectivement. \mathbf{f} est le vecteur des forces nodales externes généralisées, tandis que \mathbf{r} est le vecteur des réactions nodales (inconnues) aux nœuds où les DL sur les déplacements généralisés sont imposés. \mathbf{K} , \mathbf{K}_{BC} et $\tilde{\mathbf{K}}$ sont les matrices de rigidité du modèle EF après application des CL. En accord avec la définition donnée dans [54, 152], la *compliance* de la structure, sous l'action de CL mixtes non nulles de Neumann-Dirichlet s'écrit :

$$\mathcal{C} := \mathbf{f}^T \mathbf{u} - \mathbf{r}^T \mathbf{u}_{\text{BC}}. \quad (3.14)$$

Dans l'approche SIMP, le *domaine matériau* $\Omega \subseteq \mathcal{D}$ est identifié au moyen d'une fonction de pseudo-densité $\rho(\mathbf{x}) \in [0, 1]$ pour $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$: $\rho(\mathbf{x}) = 0$ indique une zone de vide, alors que $\rho(\mathbf{x}) = 1$ indique une zone matériau. Le champ de densité affecte la matrice de rigidité des éléments et donc la matrice de rigidité globale du modèle EF comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}} &:= \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e^\alpha \hat{\mathbf{L}}_e^T \mathbf{K}_e^0 \hat{\mathbf{L}}_e = \sum_{e=1}^{N_e} \hat{\mathbf{L}}_e^T \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{L}}_e, \\ \mathbf{K}_e^0, \mathbf{K}_e &\in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e \times N_{\text{DOF}}^e}, \quad \hat{\mathbf{L}}_e \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e \times \hat{N}_{\text{DOF}}^e}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

où ρ_e est la densité fictive calculée au centroïde de chaque élément e , tandis que $\alpha \geq 1$ est un paramètre dont le but est de pénaliser les densités intermédiaires comprises entre 0 et 1, aussi appelées *zones grises*, comme défini dans l'approche SIMP classique ($\alpha = 3$ dans cette étude). N_e est le nombre total d'éléments et N_{DOF}^e est le nombre de DLs de l'élément générique e . Dans l'Eq. (3.15), \mathbf{K}_e^0 et \mathbf{K}_e sont les matrices de rigidité de l'élément e non-pénalisée et pénalisée, exprimées dans le repère global du modèle EF, tandis que $\hat{\mathbf{L}}_e$ est la matrice de connectivité de l'élément e définie comme :

$$\mathbf{u}_e = \hat{\mathbf{L}}_e \hat{\mathbf{u}}, \quad (3.16)$$

où $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e}$ est le vecteur des déplacements nodaux pour l'élément e . Dans le contexte de la méthode NURBS-based SIMP, le champ de pseudo-densité pour un problème d'OT de dimension D est représenté par une hypersurface de dimension $D + 1$. Ainsi pour un problème 3D, une entité 4D est nécessaire et le champ de pseudo-densité est donc défini par :

$$\rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} R_{i_1, i_2, i_3}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \rho_{i_1, i_2, i_3}. \quad (3.17)$$

Dans l'Eq. (3.17), $\rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ constitue la quatrième coordonnées de \mathbf{h} définie par l'Eq. (3.1), alors que $R_{i_1, i_2, i_3}(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ sont les fonctions de forme de la NURBS définies à l'Eq. (3.2). Les paramètres sans dimension ζ_j sont définis par leurs coordonnées cartésiennes tels que :

$$\zeta_j = \frac{x_j}{a_j}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (3.18)$$

Comme discuté dans la Section 3.2.1, différents paramètres influencent la forme de l'entité NURBS. Parmi eux, la valeur de la pseudo-densité aux PC et le poids associé sont définis en tant que *variables d'optimisation* et collectés dans les vecteurs ξ_1 et ξ_2 , respectivement, définis par :

$$\xi_1^T := (\rho_{0,0,0}, \dots, \rho_{n_1, n_2, n_3}), \quad \xi_2^T := (\omega_{0,0,0}, \dots, \omega_{n_1, n_2, n_3}), \quad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^{n_{CP}}. \quad (3.19)$$

Ainsi, dans le cas le plus général, le nombre total de variables d'optimisation est $n_{\text{var}} = 2n_{CP}$.

C'est pourquoi, un problème d'OT de minimisation de la compliance soumise à une contrainte d'inégalité sur le volume, peut être formulé comme :

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}_{\text{ref}}\|}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, & \frac{V}{V_{\text{ref}}} - \gamma \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}], & \xi_{2k} \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{CP}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Dans l'Eq. (3.20), V_{ref} correspond au volume de référence, V est le volume du domaine Ω , tandis que γ indique la fraction de volume. ρ_{\min} et ρ_{\max} sont les bornes supérieure et inférieure de la pseudo-densité à chaque PC, alors que ω_{\min} et ω_{\max} sont les bornes des poids. Il est évident que la borne inférieure de la pseudo-densité est définie telle que $\rho_{\min} > 0$ pour éviter les problèmes de singularité lors du calcul de la solution du problème d'équilibre. La fonction objectif est divisée par la valeur absolue de la compliance de référence, \mathcal{C}_{ref} , afin d'obtenir une valeur adimensionnée. A noter que dans le cas général de CL mixtes non-nulles la compliance de l'Eq. (3.14) n'est plus une quantité définie positive [54].

Le volume du domaine matériau apparaissant dans l'Eq. (3.20) est définie comme suit :

$$V := \sum_{e=1}^{N_e} \rho_e V_e, \quad (3.21)$$

où V_e est le volume de l'élément e . De plus, dans l'Eq. (3.20), l'indice k a été introduit par souci de compacité. La relation entre k et i_j , ($j = 1, 2, 3$) est :

$$k := 1 + i_1 + i_2(n_1 + 1) + i_3(n_1 + 1)(n_2 + 1). \quad (3.22)$$

Les autres paramètres impliqués dans la définition de l'entité NURBS (i.e. les degrés, les vecteurs de nœuds, et le nombre de PC) sont gardés constants et leurs valeurs sont paramétrées *a-priori* au début de l'analyse d'OT.

Le calcul des dérivées des fonctions objectif et contrainte par rapport aux variables d'optimisation est nécessaire pour résoudre le problème (3.20) avec un algorithme déterministe. Cette tâche est atteinte en exploitant la propriété du support local de l'Eq. (3.9). Par exemple, l'expression générale des dérivées de la compliance et du volume [15, 54, 147] s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{C}}{\partial \xi_{ik}} = -\alpha \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{w_e}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{CP}, \quad (3.23)$$

avec

$$w_e := \mathbf{u}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e, \quad (3.24)$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial \xi_{ik}} = \sum_{e \in \mathcal{S}_k} V_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{CP}. \quad (3.25)$$

Dans les formules précédentes w_e est le travail des forces internes de l'élément e , \mathcal{S}_k est la version discrétisée du support local de l'Eq. (3.9), tandis que $\frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}}$ s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} = \begin{cases} R_k^e, & \text{if } i = 1, \\ \frac{R_k^e}{\xi_{2k}} (\xi_{1k} - \rho_e), & \text{if } i = 2. \end{cases} \quad (3.26)$$

La quantité scalaire R_k^e qui apparaît dans l'Eq. (3.26) est la fonction de base rationnelle de l'entité NURBS définie par l'Eq. (3.2) et évaluée au centroïde de l'élément.

La méthode NURBS-based SIMP apporte les avantages suivants :

1. Le nombre de variables d'optimisation n'est pas lié au nombre d'éléments contrairement à la méthode SIMP classique ;
2. La topologie optimisée n'est pas liée à la qualité du maillage EF choisie, contrairement à la méthode SIMP classique ;
3. La propriété du support local assure implicitement un effet de filtrage, i.e. chaque PC (et son poids relatif) affecte uniquement les éléments dont le centroïde tombe dans le support local \mathcal{S}_k . Cette propriété est équivalente à la définition d'un filtre explicite dans la méthode SIMP classique, qui est généralement introduit pour éviter certains problèmes numériques (tel que l'*effet damier*).

Pour une compréhension plus profonde de l'utilisation de la méthode NURBS-based SIMP lors de la résolution des problèmes d'OT, le lecteur est adressé à [15, 147].

3.4 L'algorithme SANTO

Dans le but de résoudre les problèmes d'OT, un algorithme d'optimisation a été développé au sein du département IMC du laboratoire I2M : l'algorithme SANTO (*SIMP and NURBS for Topology Optimisation*). Cet algorithme dédié à l'optimisation dans le cadre des hypersurfaces NURBS est très général et polyvalent et permet de lancer des calculs se basant sur des entités B-spline ou NURBS aussi bien pour des cas 2D que 3D. L'algorithme est disponible sous deux environnements différents : le langage Matlab et le langage open-source Python. Les deux environnements utilisent le logiciel ANSYS® pour définir le modèle EF et pour mettre à jour les paramètres physiques au cours de l'optimisation. La totalité des travaux détaillés dans ce manuscrit ont été réalisés à l'aide de l'environnement Python.

La structure générale de l'algorithme ainsi que les différents outils utilisés sont donnés dans la Fig. 3.2. Les principales étapes ainsi que la stratégie de calcul sont récapitulées ci-dessous :

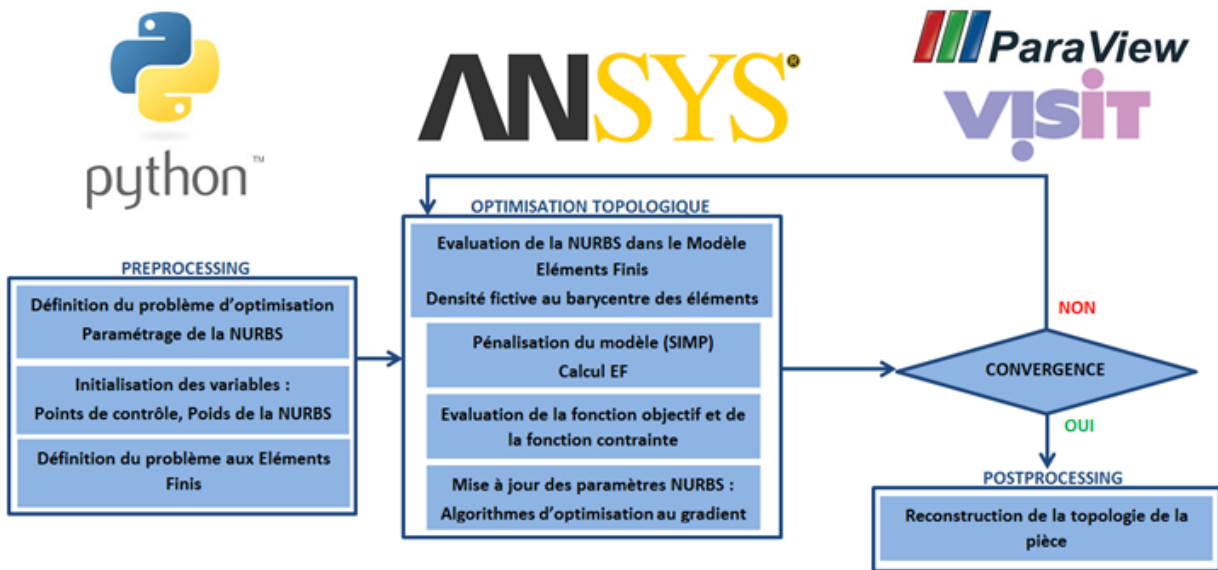


FIGURE 3.2 – Structure générale de l'algorithme SANTO

1. *La phase de pré-traitement* : Dans cette étape, l'utilisateur extérieur doit définir les différents paramètres nécessaires lors du calcul d'OT et les variables d'optimisation sont initialisées. Ainsi, les paramètres NURBS, tels que les vecteurs de nœuds, les degrés des fonctions de forme ou encore le nombre de PC sont définis. Le domaine d'optimisation est également initialisé avec la recherche et l'identification des régions de design (DR) ainsi que les régions de Non-design (NDR). Les DR correspondent aux zones du modèle EF où la topologie de la structure sera optimisée alors que les NDRs définissent les zones où la topologie demeurera inchangée. Les variables d'optimisation (i.e. la valeur de la pseudo-densité aux PC ainsi que leurs poids) sont initialisées dans cette étape. Le modèle EF est également paramétré lors de cette étape. Les valeurs de référence, détaillées dans l'Eq. (3.20), sont également calculées lors de cette étape. Les différentes symétries définissant le problème peuvent également être introduites dans le calcul par l'utilisateur extérieur. Les différentes quantités et vecteurs qui resteront inchangés tout au long de l'optimisation sont aussi calculés, particulièrement les supports locaux de tous les PC sont calculés ici et rangés dans des tableaux pour être réutilisés à chaque étape du calcul d'optimisation.
2. *Optimisation déterministe* : un grand nombre d'algorithmes au gradient sont disponibles dans les différentes bibliothèques Python mais seulement deux permettent une utilisation telle que désirée dans le cadre de la méthode NURBS-based SIMP : l'algorithme GC-MMA (*Globally-Convergent Method of Moving Asymptotes*) et l'algorithme SLSQP (*Sequential Least Square Programming*). Ces deux algorithmes sont assez robustes et peuvent converger même si le point initial de l'optimisation se situe dans une zone non-faisable du domaine d'optimisation. Cet aspect est particulièrement important pour les cas d'études d'OT prenant en compte les champs de contraintes mécaniques telles que celles définies dans les Chapitres (4) et 5. Dans ces travaux, l'algorithme GC-MMA sera privilégié car il a montré une plus grande robustesse et une meilleure efficacité lorsque le nombre de variables d'optimisation était élevé (i.e. supérieur à 1000) ou quand les contraintes d'optimisation prenaient en compte plus d'un paramètre physique, voir Chapitres (4) et 5. Une fois l'OT lancée, les valeurs de fonctions objectif et

contraintes ainsi que leurs gradients respectifs sont calculés depuis des routines dédiées et implémentées dans l'algorithme. Ensuite, le calcul du Lagrangien et de ses dérivées est fait. Les tableaux des variables d'optimisation sont mis à jour et une vérification des conditions de convergence est effectuée. Cette procédure est répétée jusqu'à convergence.

3. *Post-traitement* Une fois la convergence atteinte, certaines procédures doivent être réalisées de manière à obtenir une géométrie réutilisable sur les logiciels CAO. Dans un premiers temps, une opération de coupe est réalisée de manière à obtenir la géométrie finale à (i.e 2D/3D) à partir de l'entité NURBS définie dans la dimension supérieure (i.e 3D/4D), voir Fig. 3.3. Cette opération n'est pas immédiate si la formulation du problème prend en compte plus d'une fonction contrainte et certaines méthodologies numériques telle qu'une optimisation de la hauteur du plan de coupe peuvent-être mises en place de manière à obtenir un résultat cohérent plus rapidement. Ensuite, la géométrie est exportée sous format *.igs* et reconstruite à l'aide d'un logiciel CAO. Dans le cas où l'optimisation prend en compte des contraintes basées sur des phénomènes physiques telles que celles développées dans les chapitres ci-après, la structure optimisée doit ensuite être ré-importée sur un logiciel de calcul EF pour s'assurer que les contraintes soient réellement respectées sur la géométrie finale.

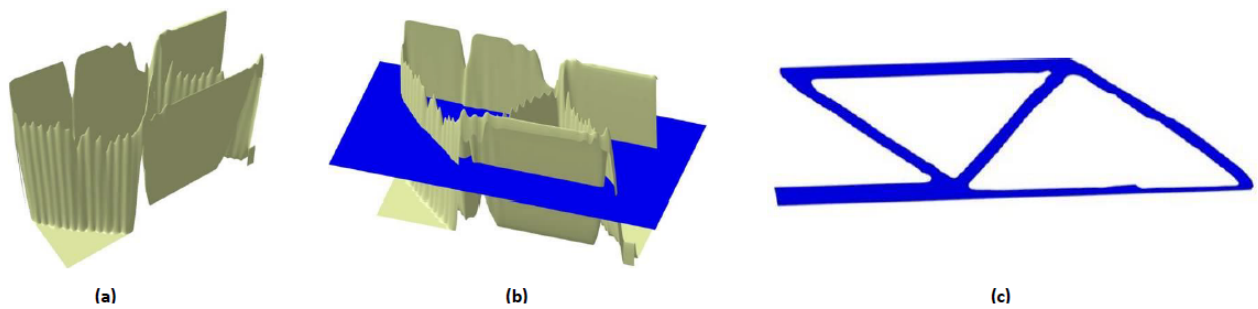


FIGURE 3.3 – Calcul du plan de coupe : cas 2D

La Fig 3.3 montre les différentes étapes du calcul du plan de coupe de l'entité NURBS optimisée afin d'obtenir la géométrie finale. Cette étape se divise en trois parties :

1. Dans un premier temps (a), l'algorithme récupère les valeurs optimisées des densités aux PC et de leurs poids dans le but de reconstruire l'entité NURBS 3D équivalente.
2. Ensuite, un plan de coupe est défini tel que $x_3 = \text{const.}$ (b). La NURBS est projetée sur ce plan de coupe puis le volume de la géométrie projetée est calculé. Une vérification de la valeur des fonctions contraintes est effectuée en étant comparée aux valeurs de références définies lors de l'initialisation du calcul. Si les contraintes dans la géométrie projetée sont respectées alors cette géométrie est gardée comme géométrie finale, sinon le plan de coupe est incrémenté d'une valeur définie par l'utilisateur lors de la paramétrisation du calcul tel que $x_3 = \text{const.} + k\Delta x_3$ avec k le nombre de fois où le plan de coupe a été incrémenté. L'opération est répétée jusqu'à obtenir une géométrie projetée qui respecte les contraintes.
3. La géométrie projetée (c) est récupérée puis une routine permettant de l'extraire directement sous format *.igs* est utilisée. Ce format permet ainsi la réutilisation directe de la géométrie finale sur les logiciels de CAO.

La dernière étape de cette méthode (i.e. l'extraction de la géométrie projetée sous un format de fichier CAO compatible) est valable uniquement pour les cas 2D. En effet, dans un cas 3D, il est possible de calculer la valeur du plan de coupe, mais il n'existe pas de fonction python permettant de récupérer les iso-valeurs de l'hyper-surface NURBS pour le plan de coupe considéré. En pratique, l'hyper-surface NURBS est extraite sous un format *.vtk* puis la géométrie finale est extraite depuis ce fichier *.vtk* à l'aide du logiciel opensource ParaView[®]. Cette géométrie est ensuite convertie au format *.stl* avant d'être reconstruite en utilisant la méthode semi-automatique de reconstruction de surfaces proposée par Bertolino *et al.* [150].

3.5 Exemples d'applications de SANTO

La méthode d'optimisation NURBS-based-SIMP est une méthode qui apporte de nombreux avantages par rapport aux méthodes classiques. Dans cette section, la méthode est testée sur des cas d'optimisation simples 2D puis 3D et sous les configurations NURBS ainsi que B-splines. Ensuite, les résultats seront comparés avec ceux trouvés à l'aide de l'outil d'OT disponible sur le logiciel Ansys Workbench[®].

3.5.1 Cas 2D

Le cas 2D présenté dans cette section est la résolution du problème d'OT de l'Eq. (3.20) dans le cas d'une poutre encastree, dont la géométrie est donnée Fig 3.4. Les dimensions sont données pour une valeur $L = 100$ mm. Les nœuds sur le bord gauche de la poutre, i.e. les nœuds sur le plan $x_1 = 0$, sont encastres tandis qu'une force concentrée $P = 1500$ N est appliquée sur l'extrémité droite de la poutre sur le nœud ($x_1 = 3L$, $x_2 = \frac{L}{2}$). La structure est approximée à l'aide d'un maillage de 4800 éléments PLANE182 (2 DL par nœud) sous l'hypothèse de contraintes planes et d'épaisseur unitaire. Un matériau équivalent au titane est utilisé pour ce calcul, son module d'Young est de $E = 110000$ MPa, son coefficient de Poisson est $\nu = 0.34$ et sa masse volumique est égale à $\gamma = 4.5$ gcm⁻³.

L'entité NURBS est composée d'un maillage de $92 \times 32 = 2944$ PC, le nombre de PC correspond ainsi à 60% du nombre total d'éléments du maillage. Les degrés des fonctions de base de la NURBS sont $p_1 = p_2 = 2$. Comme explique dans [16], un des avantages de la méthode NURBS-based SIMP concerne l'imposition de la contrainte sur l'épaisseur minimale des branches topologiques via un réglage des paramètres entiers (i.e. nombre de PC et degrés des fonctions de base) de l'entité NURBS au lieu de l'introduction d'une contrainte explicite dans la formulation du problème d'optimisation. Par conséquent, le paramétrage choisi ici correspond à une épaisseur minimale supérieure ou égale à $d_{\min} = 7.5$ mm Le calcul est réalisé sous deux configurations différentes : la configuration B-spline et la configuration NURBS. Pour ces deux calculs, la valeur de la pseudo-densité à chaque PC peut varier dans l'intervalle $[1e^{-3}, 1]$. Dans le cas de la configuration NURBS, le poids de chaque PC évolue dans l'intervalle $[0.5, 10]$.

Il est fréquent que les calculs utilisant l'algorithme GC-MMA aient besoin d'un grand nombre d'itérations avant de converger même si l'optimum local est atteint rapidement. Cela est du au fait que la fonction objectif oscille très légèrement autour de son optimum local et les conditions d'arrêt de l'algorithme ne sont pas totalement respectées. Le paramétrage de l'algorithme GC-MMA est détaillé dans le Tab. 3.1. Les critères "*move*" et "*albafa*" sont des paramètres propres à l'algorithme GC-MMA qui permettent de déterminer le pas et la direction de descente de l'algorithme [50].

Le résultat du calcul d'optimisation est donné pour les deux configurations dans la Fig 3.5. Les calculs sont comparés en terme de fonction objectif (i.e. la compliance \mathcal{C}).

TABLE 3.1 – Paramétrage de l'algorithme GC-MMA

Paramètres	Valeur
<i>move</i>	0.1
<i>albefa</i>	0.1
Critères d'arrêt	
N. maximal d'évaluation de la fonction	$100 \times n_{\text{var}}$
N. maximal d'itérations	300
Tolérance fonction objectif	10^{-4}
Tolérance fonctions contraintes	10^{-4}
Tolérance variation variables d'entrée	10^{-4}
Tolérance sur la norme de Karush–Kuhn–Tucker	10^{-4}

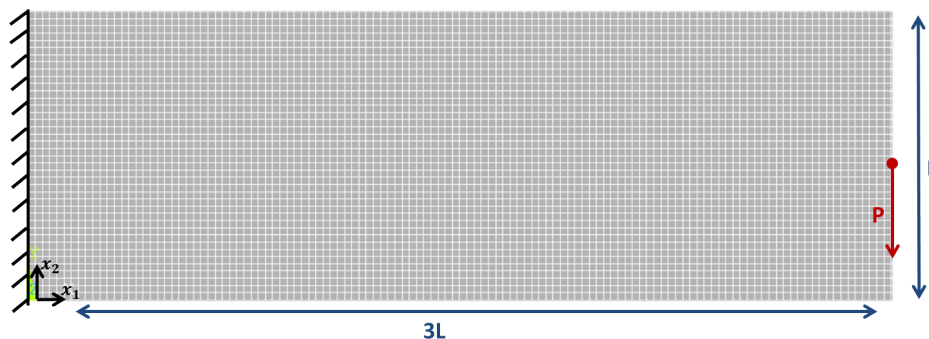


FIGURE 3.4 – Cas d'étude 2D : poutre encastree

Les résultats obtenus avec les configurations B-spline et NURBS seront comparés à la solution obtenue à l'aide du logiciel commercial Ansys Workbench[®]. Les mêmes conditions ont été imposées et le même domaine de définition a été donné. La structure initiale est discrétisée par un maillage de 4800 éléments. Le logiciel utilise la méthode SIMP classique comme méthode d'optimisation, les variables d'optimisation sont donc les valeurs de densité définies au centroïde des éléments du maillage. De plus, le logiciel Ansys Workbench[®] nécessite une taille minimale de branche topologique pour fonctionner correctement, ainsi, une contrainte sur le diamètre des branches $d_{\min} = 7.5$ mm est imposée lors du calcul. Cette valeur correspond à trois fois la taille des éléments du maillage EF, voir [153].

Plusieurs remarques peuvent être effectuées par rapport à ces analyses :

- L'utilisation de l'entité NURBS donne un meilleur résultat en terme de fonction objectif que le résultat B-spline. Ce résultat est retrouvé et généralisé à d'autres cas d'études dans [15, 147, 154]. De plus, la Fig 3.5 montre que la solution NURBS a une frontière plus lisse que le résultat B-spline. Il est possible de voir un phénomène de "vaguelettes" sur la frontière de la topologie B-spline qui est fortement diminué sur la topologie NURBS grâce à l'utilisation des poids.
- Le nombre de PC utilisé et le degré des fonctions de base utilisé pour décrire l'entité NURBS jouent également un rôle important sur la topologie finale. En effet, il a été réalisé dans [15] une analyse de sensibilité faisant varier le nombre de PC et le degré des fonctions de base

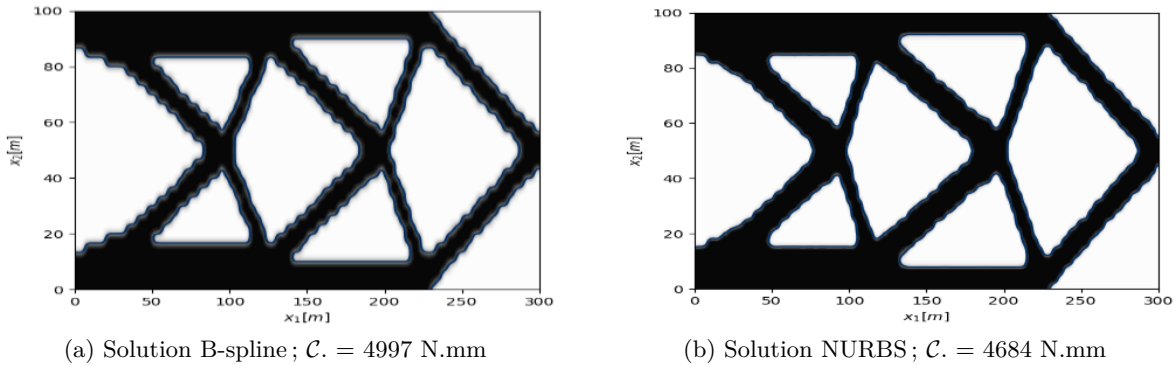
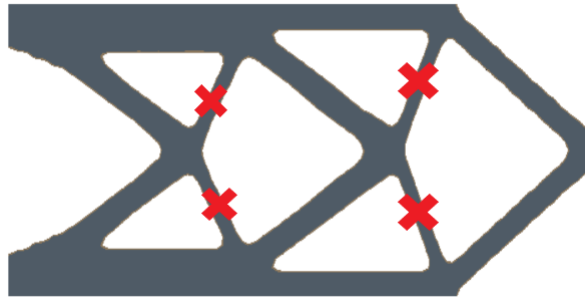


FIGURE 3.5 – Topologie finale cas d'étude 2D

FIGURE 3.6 – Cas d'étude 2D : résultat ANSYS Workbench® - $\mathcal{C} = 4518$ N.mm

en comparant les valeurs finales de la fonction objectif. Il a été montré que ces paramètres affectaient directement le *Support Local* des fonctions de base, i.e. la région d'influence du PC générique. Cette région permet, dans ce type de méthode, d'éviter le phénomène d'effet "damier". Jouer sur la taille de ce support local permet d'obtenir des solutions finales contenant différentes tailles de branches topologiques. En effet, plus le support local est réduit, plus fines seront les branches. À l'inverse, plus le support local augmente, plus les branches topologiques de la structure finale seront épaisses. La taille du support local est directement dépendante du nombre de PC, des degrés des fonctions de base et de ses vecteurs de nœuds [16]. Ainsi, plus le nombre de PC est élevé et plus le degré des fonctions de base est faible, plus petite est la taille du support local et donc plus petite est la taille des branches topologiques présentes dans la solution finale. Cela a pour conséquence d'avoir une structure plus rigide, et donc un meilleur résultat en terme de compliance. À l'inverse, plus le degré est élevé et plus le nombre de PC est faible, plus grandes sont les branches topologiques et moins bons sont les résultats en terme de compliance.

- Ce dernier aspect est très intéressant si l'on considère une condition sur la taille minimale des branches topologiques, voir [16]. En effet, cela permet d'imposer une taille minimale sans ajouter de contrainte explicite supplémentaire dans le calcul d'optimisation, i.e. uniquement en jouant sur le nombre de PC et sur le degré des fonctions de base. Cette formulation du critère de taille de branche minimale a plusieurs conséquences. Premièrement, c'est une méthode purement géométrique qui ne dépend pas du maillage du modèle EF. Ainsi, la définition du

diamètre minimal des branches topologiques est totalement indépendant de la précision du maillage. Deuxièmement, le diamètre minimal peut être contrôlé pas seulement sur le modèle EF, mais également sur la géométrie reconstruite en sortie d'optimisation. Dernièrement, en paramétrant correctement les vecteurs de nœuds, il est possible de définir plusieurs zones du domaine de définition avec chacune leur diamètre minimal respectif. De plus, l'ensemble de ces aspects peut être facilement paramétré et contrôlé par l'utilisateur en amont du calcul d'optimisation. Cependant, il existe quelques restrictions. En effet, si cette méthode est très efficace dans le cadre des B-splines, elle est légèrement moins précise avec la configuration NURBS, voir [16].

- Le résultat présenté Fig. 3.6 est obtenu en utilisant le logiciel Ansys Workbench[®]. Pour ce calcul, un volume de dimension $3L \times L$ et d'épaisseur $1mm$ a été approximée à l'aide d'une surface moyenne sur le module SpaceClaim disponible dans ANSYS Workbench[®]. Cette surface a ensuite été maillée à l'aide 4680 éléments de forme quadrilatère. L'outil d'OT disponible dans le logiciel ANSYS, utilise la méthode SIMP pour trouver la solution optimale. L'OT a ainsi été lancée en considérant les mêmes conditions aux limites et le même chargement ainsi que les mêmes paramètres propres à la méthode SIMP (borne du champs de densité, facteur de pénalisation) que pour le cas d'étude présenté dans la Fig. 3.5. La topologie obtenue est similaire à celles trouvées par le logiciel d'OT basé sur les hypersurfaces NURBS, cependant la valeur de compliance finale est légèrement meilleure que celle obtenue par les formulations NURBS et B-spline. L'impact de la contrainte intrinsèque sur le diamètre minimal des branches topologiques présente dans la formulation basée sur les hypersurface NURBS se retrouve sur la comparaison de ces 2 calculs. En effet, si on considère les résultats montrés dans la Fig. 3.5, le diamètre minimal des branches topologiques sur la géométrie finale est de $d_{min} = 7,5mm$ alors qu'il est de $d_{min} = 6,5mm$ sur le résultat obtenu à l'aide du logiciel ANSYS, donc la contrainte sur l'épaisseur minimale des branches topologiques n'est pas satisfaite (celles marquées par une croix rouge dans la Fig. 3.6) dans le cas du logiciel du commerce.

3.5.2 Cas 3D

Le cas 3D présenté dans cette section est de nouveau la résolution du problème d'OT de l'Eq. (3.20) dans le cas d'une poutre encastree dont la géométrie est donnée dans la Fig 3.7. Les dimensions sont données pour une valeur $L = 100$ mm. Les nœuds sur la surface gauche de la poutre (i.e. les nœuds pour $x_1 = 0$) sont encastres tandis qu'une force concentrée $P = 10000$ N est appliquée sur l'extrémité droite de la poutre au nœud ($x_1 = 3L$, $x_2 = \frac{L}{2}$, $x_3 = \frac{L}{4}$). La structure est approximée à l'aide d'un maillage de $N_e = 12000$ éléments SOLID185 (8 nœuds avec 3 DL par nœud). Un matériau équivalent au titane est utilisé pour ce calcul, son module d'Young est de $E = 110000$ MPa, son coefficient de Poisson est $\nu = 0.34$ et sa masse volumique est égale à $\gamma = 4.5$ gcm⁻³.

L'entité NURBS utilisé pour ce calcul est composée d'un maillage de $52 \times 18 \times 10 = 10440$ PC. Le nombre de PC correspond ainsi à 85% du nombre total d'éléments du maillage. Les degrés des fonctions de base de la NURBS sont $p_1 = p_2 = p_3 = 2$. Ce paramétrage correspond à une épaisseur minimale supérieure ou égale à $d_{min} = 7.5$ mm. Comme dans le cas 2D, le calcul est réalisé sous deux configurations différentes : la configuration B-spline et la configuration NURBS. Pour ces deux calculs, la valeur de la pseudo-densité pour chaque PC peut varier dans l'intervalle $[1e^{-3}, 1]$ et les poids de chaque PC évoluent dans l'intervalle $[0.5, 10]$. Les paramètres de l'algorithme GC-MMA sont les mêmes que ceux détaillés dans le Tab. 3.1.

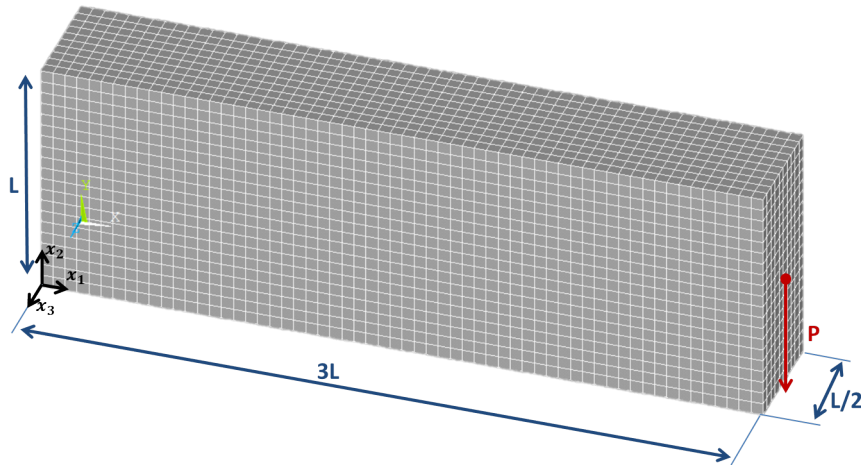


FIGURE 3.7 – Cas d'étude 3D : poutre encastrée

Les résultats obtenus avec les configurations B-spline et NURBS sont de nouveau comparés à la solution obtenue à l'aide du logiciel commercial Ansys Workbench[®]. Les mêmes conditions ont été imposées et le même domaine de définition a été donné. La structure initiale est discrétisée par un maillage de $N_e = 12000$ éléments. Le logiciel utilise la méthode SIMP classique comme méthode d'optimisation, les variables d'optimisation sont donc les valeurs de densité définies aux éléments du maillage EF. De plus, le logiciel Ansys Workbench[®] nécessite une taille minimale de branche topologique pour fonctionner correctement, ainsi, une contrainte sur le diamètre des branches $d_{\min} = 7.5$ mm est imposée lors du calcul. Cette valeur correspond à trois fois la taille des éléments du maillage EF, voir [153].

Le résultat du calcul d'optimisation est donné pour les deux configurations dans la Fig 3.8. Les calculs sont comparés en terme de fonction objectif (i.e. la compliance \mathcal{C}).

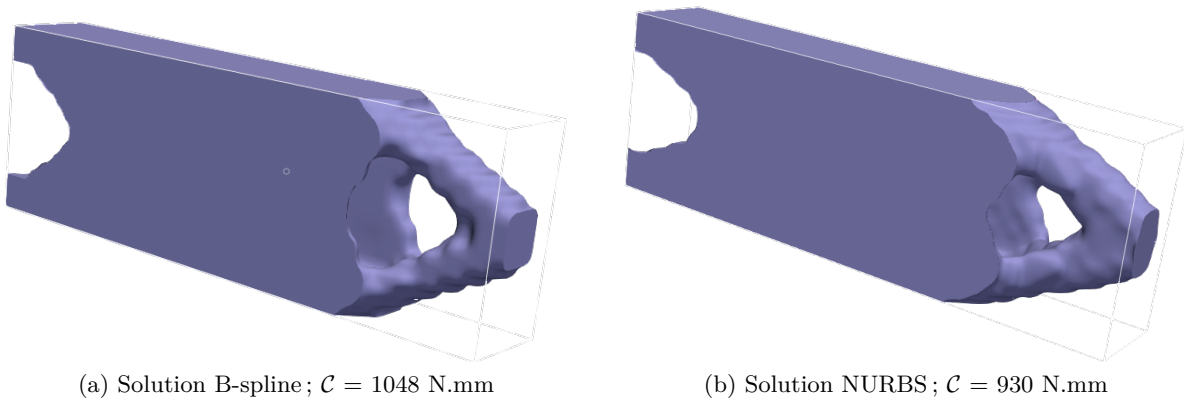


FIGURE 3.8 – Topologie finale, cas d'étude 3D

Plusieurs remarques peuvent être effectuées de ces analyses :

- Une nouvelle fois, le résultat NURBS est caractérisé par une valeur inférieure de la fonction objectif que pour la configuration B-spline. En effet, les mêmes constatations concernant l'impact du nombre de PC et du degré des fonctions de base sur la topologie finale peuvent être

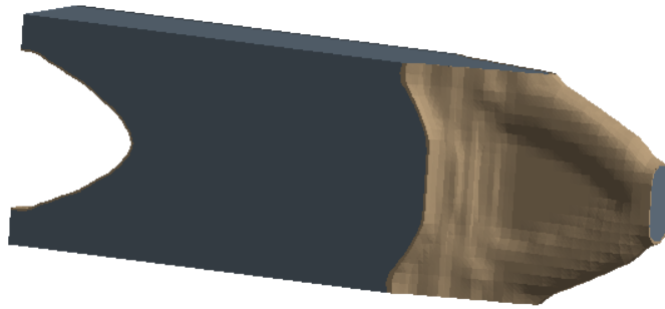


FIGURE 3.9 – Cas d'étude 3D : résultat ANSYS Workbench® - $C = 4281$ N.mm

faites, voir [17]. En effet, il a été montré [17] que la taille du support de l'hyper-surface dépend de ces deux paramètres et que plus le nombre de PC augmente et plus le degré des fonctions de base diminue, meilleur sera le résultat en terme de compliance.

- L'impact des poids des PC sur la qualité de la topologie finale a également pu être montré lors de ces calculs. En effet, ce calcul confirme la remarque effectuée sur le cas 2D : la configuration NURBS permet de minimiser le phénomène de "vaguelette" qui apparaît sur les solutions B-splines.
- Le résultat présenté dans la Fig. 3.9 a été obtenu en utilisant le logiciel Ansys Workbench®. Il a été obtenu à parité de CL par rapport aux résultats présentés dans la Fig. 3.8. Contrairement aux résultats 2D, le résultat obtenu à l'aide du logiciel ANSYS donne des résultats nettement moins performants que ceux obtenus à l'aide du formalisme basé sur les hypersurfaces NURBS, pour un nombre pourtant plus élevé d'éléments composant le maillage du modèle EF.
- Pour les deux résultats présentés dans la Fig. 3.8, la condition intrinsèque sur le diamètre minimal des branches topologiques imposée par la formulation basée sur les hypersurfaces NURBS est respectée.

3.6 Conclusion

La méthode NURBS-based SIMP est une méthode robuste et efficace pour traiter de nombreux problèmes d'OT. Elle utilise les avantages apportés par la formulation SIMP classique tout en évitant ses principaux défauts grâce à l'utilisation d'une entité purement géométrique pour définir la topologie au cours du processus d'optimisation. En effet, dans cette méthode, le champ de densité fictif est exprimé à l'aide d'une surface/hyper-surface NURBS pour les problèmes 2D/3D, ce qui comporte de nombreux avantages :

- Le nombre de variables d'optimisation est plus faible que pour un calcul SIMP classique. Dans cette méthode les variables d'optimisation sont les valeurs de la pseudo-densité (et le poids associé) évaluées aux PC alors que dans la méthode SIMP classique, elles correspondent aux valeurs de densité fictive évaluées aux centroïdes des éléments du maillage. De plus, la propriété du support local des entités NURBS joue un rôle fondamental : chaque PC influe uniquement sur le champ de densité situé dans son voisinage (en termes d'éléments appartenant au support local) et non sur sa totalité, contrairement à la méthode SIMP traditionnelle où il est nécessaire d'ajouter un filtre. Dans le cadre de la méthode NURBS-based SIMP, la taille de ce filtre dépend des paramètres de définition de l'entité NURBS, i.e. le

nombre de PC, les degrés de ses fonctions de base et ses vecteurs de nœuds qui sont paramétrés par l'utilisateur. Plus le nombre de PC est élevé, plus faible sera la taille de ce filtre. Le coût de calcul sera alors plus élevé, mais les performances de l'algorithme d'optimisation seront meilleures.

- Cette méthode apporte un moyen unique et innovant de contrôler le diamètre minimal des branches topologiques sans ajouter de contrainte supplémentaire au calcul d'optimisation. Cet aspect est particulièrement important car les pièces optimisées sont destinées à la fabrication additive et les contraintes géométriques concernant les dimensions des pièces à imprimer doivent être prises en compte directement dans le calcul d'optimisation.
- La formulation NURBS permet d'obtenir de meilleures performances que la solution B-spline. Le rôle des poids des PC en tant que variables d'optimisation est particulièrement important car il permet d'obtenir des structures plus rigides mais également d'atténuer le phénomène de "vaguelettes" qui est très présent dans les calculs B-splines. En contrepartie, le coût de calcul est plus important car le nombre de variables d'optimisation est doublé.
- Cette méthode a également montré sa robustesse en donnant des résultats équivalents voire meilleurs que ceux fournis par les logiciels du commerce tel que Ansys Workbench®.

La méthode NURBS-based SIMP est une méthode récente puisqu'elle a été développée à partir de 2016. Si cette méthode a montré son efficacité sur de nombreux problèmes tels que les fréquences propres [155] ou encore les déplacements structuraux [154], elle nécessite encore de nombreux développements avant de pouvoir être utilisée dans le secteur industriel. En effet, un point essentiel lors du développement des structures dans le cadre d'un bureau d'études est la connaissance de la répartition des contraintes mécaniques à l'intérieur de la structure. Malheureusement, que ce soit dans le cadre des matériaux isotropes classiques ou dans celui des matériaux anisotropes tels que les composites, l'implémentation puis la gestion au cours du processus d'optimisation des critères de tenue est loin d'être une tâche triviale et de nombreux travaux sont encore à réaliser sur ce sujet.

De plus, pour pouvoir tirer parti de l'ensemble des avantages apportés par la FA, les méthodes d'optimisation doivent pouvoir prendre en compte le comportement de matériaux particuliers. En effet, les matériaux architecturés permettent d'obtenir des propriétés intéressantes qu'il n'est pas possible d'obtenir avec des matériaux classiques, tel qu'un coefficient de Poisson négatif dans le cas des matériaux auxétiques. La définition propre et lisse de la frontière de la géométrie optimisée et la possibilité d'intégrer directement les informations géométriques de la frontière dans le processus d'optimisation font de la méthode NURBS-based SIMP un outil de choix pour la réalisation d'optimisation multi-échelle de structures architecturées composées par plusieurs matériaux. Ces aspects seront abordés dans les chapitres suivants.

Chapitre 4

Les critères de tenue mécanique pour matériaux isotropes dans la méthode NURBS-based-SIMP

4.1 Introduction

Pour utiliser l’algorithme d’OT SANTO décrit dans le Chapitre 3 dans des problèmes d’ingénierie réel, la répartition du champ des contraintes mécaniques au sein de la structure doit être parfaitement maîtrisée pendant le processus d’optimisation. Cette tâche requiert la définition d’une formulation pertinente du problème ainsi que de développer des stratégies efficaces pour connaître la distribution finale de ces contraintes dans la topologie optimisée. Dans le cadre de la méthode SIMP, sans mentionner les problématiques liées au schéma de pénalisation appliqué au champ de contraintes, le principal problème lorsqu’il s’agit d’utiliser des critères basés sur les contraintes mécaniques est le traitement de l’information locale liée au champ de contraintes de chaque élément.

Indépendamment de l’approche utilisée, trois principaux problèmes apparaissent dans l’OT lorsque des conditions sur le champ de contraintes sont introduites dans la formulation du problème d’OT. Premièrement, la nature locale des contraintes : il existe différentes méthodes pour traiter les problèmes d’OT gérant le champ de contraintes, mais quand celles-ci utilisent des approches locales, le nombre de contraintes d’optimisation devient très élevé car il est au moins égale au nombre d’éléments du modèle EF. Ceci constitue une forte limitation d’un point de vue temps de calcul. Néanmoins, les contraintes locales sont souvent limitées à une unique fonction contrainte globale par le biais d’un opérateur *maximum*. Cependant, comme cet opérateur n’est pas dérivable, quelques travaux dans la littérature [79–81, 83, 85, 86] utilisent une approximation continue de cet opérateur, telle que la fonction χ -norm [156], la fonction χ -norm modifiée [157] ou encore la fonction de Kreisselmeier-Streinhauser (KS) [158]. Une approche différente est proposée par Holmberg *et al.* dans [80], où l’approximation χ -norm est appliquée par l’intermédiaire de différents clusters (composés d’éléments), à la place du domaine entier. Les éléments constituant le maillage sont ainsi séparés en clusters sur la base de leur niveau de contrainte. Cette approche qui peut être qualifiée de “semi-globale”, représente un bon compromis entre le coût important de temps de calcul d’une approche locale et le résultat plus grossier d’une approche globale. Deuxièmement, il faut faire face au problème de singularité : ce phénomène apparaît quand la solution optimale se situe dans un point isolé du domaine de définition. Dans la littérature, l’ ϵ -relaxation [159] ou la *qp-relaxation* [160] sont communément utilisées pour surmonter ce problème, voir [78, 81, 82]. En particulier, la *qp-relaxation* permet de relaxer les forces internes dans la structure afin d’éviter

les phénomènes singuliers. Enfin, le troisième problème est lié au comportement non-linéaire : le champ de contraintes peut fortement évoluer pour une légère variation de la géométrie. Une pénalisation adéquate de la contrainte, telle que réalisée dans la méthode SIMP, agit comme un filtre de relaxation implicite et réduit l'influence de ce phénomène sur la topologie optimisée finale.

Dans ce chapitre, le critère d'Huber-Henky-Von-Mises (HHVM) pour matériaux isotropes est intégré dans la méthode NURBS-based SIMP. En particulier, la contribution de cette étude se divise en trois points. Premièrement, le gradient du critère HHVM par rapport aux variables d'optimisation est dérivé dans le cas le plus général, en exploitant les principales propriétés des entités NURBS. En particulier, la formulation de la condition sur le critère de limite d'élasticité dans le cadre des hypersurfaces NURBS utilise la propriété du support local des fonctions de forme de la NURBS [151], qui établit une relation implicite entre les pseudo-densités des éléments adjacents. Grâce à cette propriété, il n'est pas nécessaire d'introduire un schéma de filtration supplémentaire, au contraire de la méthode SIMP classique. Deuxièmement, une stratégie efficace est proposée pour définir, à chaque itération du processus d'optimisation, les paramètres régissant la fonction continue utilisée pour agréger la condition sur le champ des contraintes, évalué pour chaque élément, dans une unique contrainte globale. Ces paramètres sont mis-à-jour dans le but d'éviter les problèmes de dépassement de mémoire mais également d'accélérer la convergence de l'algorithme vers une topologie optimisée faisable. Enfin, une analyse de sensibilité des topologies optimisées est menée par rapport aux paramètres définissant l'entité NURBS. Ces paramètres peuvent être opportunément choisis pour définir une condition sur la taille minimale des branches topologiques sans introduire de contrainte explicite supplémentaire dans la formulation du problème, voir [16].

L'efficacité de la méthode proposée est testée sur des cas d'étude 2D et 3D provenant de la littérature.

Remarque 4.1.1 *Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'un article publié dans *Mechanics of Advanced Materials and Structures* [161].*

4.2 Contrôle des contraintes mécaniques dans les algorithmes d'OT

Cette section détaille les principaux problèmes rencontrés lorsqu'il s'agit d'intégrer des critères liés aux contraintes mécaniques dans le cadre des algorithmes d'OT basés sur la densité, à l'image de la méthode SIMP ou encore la méthode NURBS-based-SIMP. En effet, le schéma de pénalisation utilisé dans la méthode SIMP affecte également le tenseur des contraintes mécaniques en chaque point du domaine de définition. Ainsi, le vecteur des contraintes de chaque élément $\boldsymbol{\sigma}_e \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ (en notation de Voigt) peut-être exprimé dans le repère local de l'élément tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = f_\rho(\rho_e) \mathbf{C}_0 \boldsymbol{\varepsilon}_e, \quad (4.1)$$

où $\mathbf{C}_0 \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est la matrice d'élasticité du matériau constitutif, f_ρ est la fonction qui définit la pénalisation du vecteur des contraintes de l'élément e et $\boldsymbol{\varepsilon}_e \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ est le vecteur des déformations de l'élément e défini tel que :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{L}}_e \mathbf{u}_e, \quad (4.2)$$

avec $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e \times 1}$ le vecteur des déplacements de l'élément e et $\mathbf{B}_e \in \mathbb{R}^{6 \times N_{\text{DOF}}^e}$ la *strain-displacement matrix*. Cette dernière matrice est définie à l'aide des dérivées des fonctions de forme définies pour chaque élément du modèle EF. N_{DOF}^e est le nombre de degrés de liberté de l'élément e .

La fonction de pénalisation f_ρ joue un rôle important dans le contrôle des contraintes mécaniques au cours du calcul d'optimisation. En effet, comme expliqué dans le Chapitre (2), les contraintes mécaniques sont fortement non-linéaires (par rapport au champ de pseudo-densité) et singulières et ces deux comportements apportent des erreurs numériques qui peuvent amener l'algorithme à diverger ou au moins l'amener à converger vers des solutions pseudo-optimales.

Le comportement non-linéaire est lié à une forte dépendance du vecteur des contraintes à la géométrie de la structure. En effet, certaines géométries, telles que des trous ou des angles droits, pouvant apparaître lors du processus d'optimisation, sont soumises à une très importante concentration de contraintes.

De plus, les contraintes d'optimisation basées sur des critères de tenue mécanique peuvent produire un ensemble d'inégalités qui est, en général, non convexe et qui peut contenir des sous-domaines dégénérés pour des valeurs proches de 0. La présence de ce type de sous-domaines est un problème important pour la convergence des algorithmes d'optimisation déterministes standards qui ne peuvent pas traiter correctement ces singularités et qui sont alors amenés à converger vers des minimum locaux. La Fig. 4.1 montre un exemple de résultat d'un calcul d'OT (mené avec la méthode SIMP classique codée dans le logiciel TOSCA d'ABAQUS^R) sur un cas d'étude bien connu : la barre en L (ce cas d'étude est plus amplement détaillé dans la suite du chapitre). Ce problème traite de la minimisation du volume de la structure tout en ayant une topologie qui respecte les conditions sur le critère de HHVM. Plus de détails sur ces topologies particulières peuvent être trouvés dans [162].

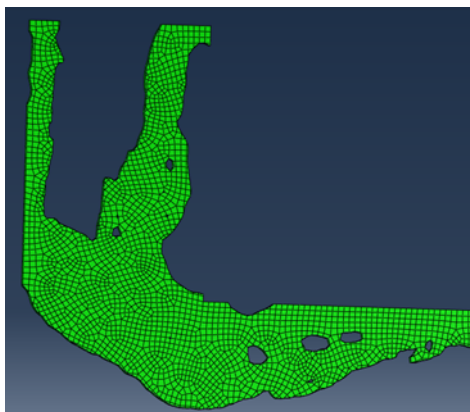


FIGURE 4.1 – Résultat suite à un problème de singularité pour un problème résolu avec l'algorithme d'optimisation TOSCA

Ce problème de singularité est un problème typique des algorithmes d'OT basés sur la méthode SIMP. En effet, dans les algorithmes d'OT basés sur la méthode SIMP, le vecteur des contraintes est pénalisé comme suit :

$$\sigma_e = \rho_e^\alpha \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \mathbf{u}_e, \quad (4.3)$$

où le vecteur des déplacements \mathbf{u}_e respecte l'équation d'équilibre du problème EF :

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{u} \iff \mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}, \quad (4.4)$$

avec \mathbf{K} la matrice de rigidité de la structure (sous l'application de conditions aux limites de Dirichlet nulles). Par cette formulation, on peut supposer que la limite du vecteur des déplacements lorsque la densité tend vers zéro est équivalente à :

$$\lim_{\rho_e \rightarrow 0} \mathbf{u}_e \equiv \lim_{\rho_e \rightarrow 0} \rho_e^{-\alpha} * A, \quad (4.5)$$

où A est une valeur constante non-nulle qui ne dépend pas de la densité ρ_e . En combinant les Eqs.(4.3) et (4.5), la limite du vecteur des contraintes lorsque ρ_e tend vers zéro peut être déduite :

$$\lim_{\rho_e \rightarrow 0} \sigma_e \equiv \lim_{\rho_e \rightarrow 0} \rho_e^{-\alpha} * \rho_e^\alpha * A_{bis} \rightarrow A_{bis}. \quad (4.6)$$

avec A_{bis} une valeur constante non-nulle qui ne dépend pas de la densité ρ_e .

L'Eq.(4.6) montre que lorsque la pseudo-densité de l'élément e prend une valeur faible, la contrainte mécanique de cet élément n'est pas nulle, ce qui conduit à une contradiction physique puisque les régions de faible densité correspondent à des zones sans matière et la contrainte devrait y être nulle. Certaines études,[163, 164], ont démontré que la solution optimale de ces problèmes d'OT est située dans ces régions dégénérées.

Ainsi la fonction de pénalisation f_ρ définie dans l'Eq.(4.1) est cruciale pour obtenir de bonnes performances de l'algorithme d'OT. Cependant, cette fonction doit respecter certaines conditions :

1. Elle doit permettre de relaxer le phénomène de singularité et le comportement non-linéaire.
2. Elle doit intégrer la pénalisation implicite de la méthode SIMP.
3. La limite du vecteur des contraintes, lorsque la densité tend vers zéro, doit être zéro.

Le comportement non-linéaire des contraintes peut-être allégé dans les algorithmes d'OT basés sur une méthode de densité grâce à la pénalisation implicite du vecteur des contraintes par la fonction de pseudo-densité, comme montré dans l'Eq.(4.3). Dans la majorité des cas, ce filtre de relaxation implicite est suffisant pour éviter l'apparition des éléments, dont la contrainte mécanique est élevée, entre deux itérations du processus d'OT.

Cependant, pour certains cas particuliers, par exemple lorsque le domaine initial contient des zones de haute concentration de contraintes, il est nécessaire d'éliminer les éléments dont la contrainte équivalente de HHVM est la plus élevée. Dans ce cas, à chaque calcul de la contrainte d'optimisation basée sur les contraintes mécaniques, la valeur du critère équivalent est calculée pour chaque élément puis rangée dans un ordre croissant avant que la densité, pour un nombre prédéfini d'éléments dont les valeurs du critère de HHVM sont les plus élevées, soit fixée à 1.

L'élimination des contraintes équivalentes de ces éléments apporte deux avantages :

1. Les éléments dont la contrainte équivalente augmente soudainement et fortement entre deux itérations ne sont pas pris en compte lors du calcul de la contrainte topologique et ne perturbent donc pas le processus d'optimisation.
2. Les éléments proches de la zone d'application de la force, dont la contrainte mécanique est élevée et ne peut pas être modifiée, ne sont pas pris en compte lors du calcul d'OT.

Cependant, l'usage d'une telle méthode modifie la valeur de la contrainte maximale réelle et la contrainte d'optimisation en sortie de calcul d'OT peut être inférieure à la contrainte de la structure réelle reconstruite. Ainsi, le nombre d'éléments retirés doit être judicieusement choisi, de manière à atténuer correctement le phénomène de non-linéarité tout en gardant une approximation cohérente de la valeur maximale réelle.

Comme expliqué dans les Eqs.(4.3) - (4.6), le filtre implicite présent dans la méthode basée sur la densité n'est pas efficace pour éliminer les régions avec des faibles valeurs de densité et qui

créent les phénomènes de singularité. En littérature, plusieurs auteurs ont développé des méthodes de relaxation, telle que la relaxation- ϵ ou la relaxation-qp, pour atténuer ce phénomène.

Ces deux méthodes sont détaillées ici dans le cadre ou la contrainte basée sur le critère de HHVM σ^{VM} doit respecter la limite d'élasticité $\sigma_{\mathbf{y}}$, tel que :

$$\sigma^{VM} \leq \sigma_{\mathbf{y}}, \quad (4.7)$$

Cette dernière formulation a été une première fois modifiée en étant multipliée par une fonction de pseudo-densité de manière à forcer la valeur de la contrainte équivalente à zéro lorsque la densité est nulle :

$$(\sigma_e^{VM} - \sigma_{\mathbf{y}})\rho_e \leq 0, \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (4.8)$$

Cependant, en utilisant cette formulation, le domaine de définition est équivalent au précédent, défini par l'Eq.(4.7), et une forte discontinuité est toujours présente dans les contraintes mécaniques. De cette manière, l'optimum singulier (i.e. un optimum qui se situe dans un sous-espace dégénéré créé par le phénomène de singularité) existe toujours et ne peut pas être atteint par l'algorithme.

Dans [165] les auteurs proposent une nouvelle approche, appelée ϵ -relaxation, qui a pour but de modifier la borne inférieure des variables d'optimisation en introduisant un paramètre ϵ strictement positif de valeur très faible, de sorte que :

$$(\sigma_e^{VM} - \sigma_{\mathbf{y}})\rho_e \leq \epsilon, \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (4.9)$$

et :

$$\epsilon^2 \leq \rho_e, \quad e = 1, \dots, N_e. \quad (4.10)$$

Cette formulation redessine le domaine faisable en relaxant la contrainte de tenue mécanique pour les régions de densité nulle. La Fig. 4.2 montre l'effet de cette relaxation. Sur cette figure, ζ_k représente les variables d'optimisation tandis que $\rho(\zeta_k)$ représente la valeur de pseudo-densité. La relaxation "agrandit" le domaine de définition au niveau des valeurs de faible densité et permet ainsi à l'algorithme d'atteindre un optimum singulier. Les auteurs montrent que pour chaque ϵ positif et non nul, l'Eq.(4.9) est toujours respectée pour les valeurs de faibles densités.

Une autre méthode appelée relaxation-qp, qui a pour but de pénaliser la limite d'élasticité, est proposée par [160]. Cette méthode reformule l'Eq.(4.7) tel que :

$$\sigma_e^{VM} - \rho_e^q \sigma_{\mathbf{y}} \leq 0, \quad e = 1, \dots, N_e. \quad (4.11)$$

Les auteurs montrent que l'Eq.(4.11) est respectée pour tout $q < \alpha$, même en présence de sous-domaines dégénérés où $\rho_e = 0$, ainsi le phénomène de singularité est surmonté. Dans cette dernière formulation, α est le facteur de pénalisation utilisé dans la méthode SIMP pour projeter les valeurs de pseudo-densité intermédiaires sur leurs frontières et ainsi éviter les "zones grises".

Il est évident que cette dernière formulation est la plus adaptée pour les algorithmes d'OT qui utilisent la méthode SIMP. De plus, la relaxation- ϵ affecte également les contraintes mécaniques des éléments correspondant à un matériau dense, i.e. où la pseudo-densité est égale à 1, voir [160].

Suivant cette formulation, l'expression de la contrainte mécanique pénalisée est modifiée :

$$\sigma_{\mathbf{e}} = \rho_e^{\alpha-q} \mathbf{C}_0 \mathbf{B}_{\mathbf{e}} \hat{\mathbf{L}}_{\mathbf{e}} \mathbf{u}_{\mathbf{e}}, \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (4.12)$$

et la fonction de pénalisation f_{ρ} est donc définie telle que :

$$f_\rho = \rho_e^\beta, \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (4.13)$$

où $\beta = \alpha - q$ est le facteur de pénalisation dérivé de la relaxation- qp . Comme souligné dans [160], β doit impérativement être inférieur à α . Typiquement, β peut varier dans l'intervalle $[0.25, 0.5]$. Dans cette étude, une valeur de $\beta = 0.5$ est considérée. Pour plus de détails concernant l'approche qp , le lecteur est invité à regarder [160].

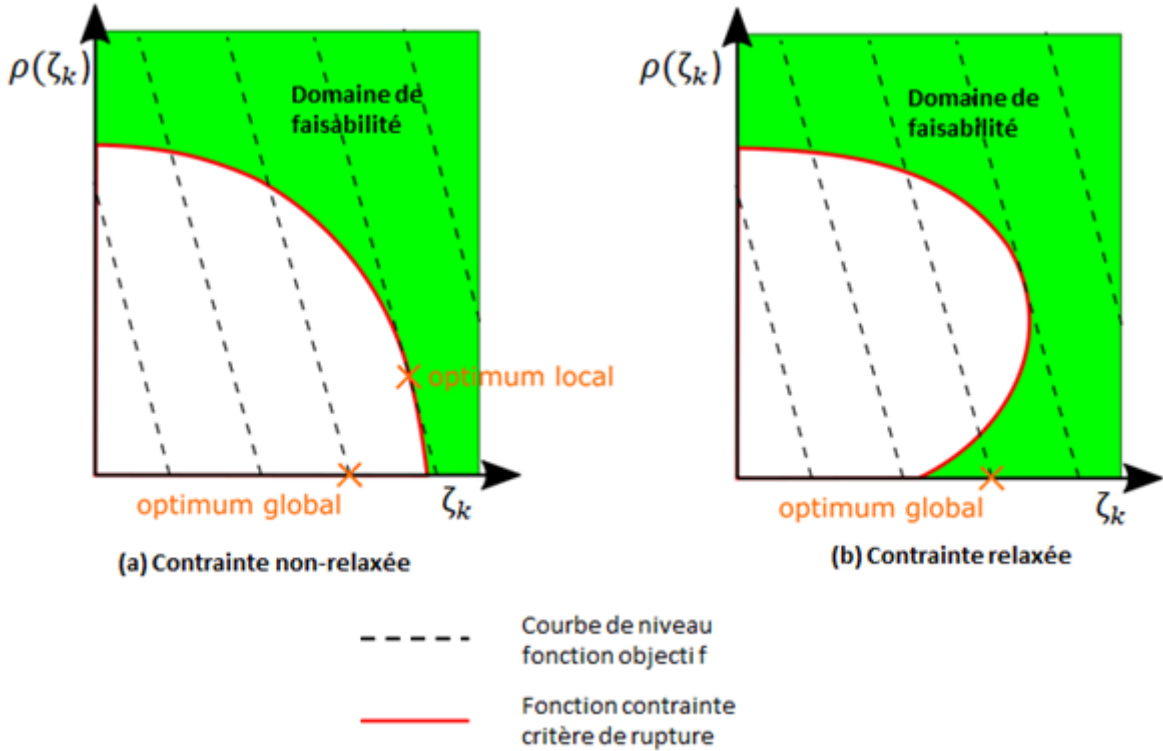


FIGURE 4.2 – Effet de la relaxation des contraintes

4.3 Formulation d'une contrainte basée sur le critère de HHVM dans la méthode NURBS-based SIMP

Dans cette section, le critère de HHVM est reformulé dans le cadre de la méthode NURBS-based-SIMP. En particulier, ce critère peut-être écrit sous la forme suivante :

$$g \leq 0, \text{ avec :} \quad g := \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma} - 1, \quad (4.14)$$

où $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{R}^6$ est le vecteur des contraintes exprimé en utilisant la notation de Voigt, tandis que $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ est une matrice définie par :

$$\mathbf{M} := \frac{1}{\sigma_y^2} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

Bien entendu, l'Eq. (4.14) doit-être vérifiée pour chaque élément constituant le modèle EF au cours du processus d'optimisation, i.e. :

$$\begin{aligned} g_e &\leq 0, \forall e = 1, \dots, N_e, \\ g_e &:= \delta_e - 1, \text{ avec : } \delta_e := \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Cependant, cela affecte fortement le coût de calcul et peut causer des problèmes de convergence (le problème d'optimisation résultant est fortement non linéaire dans ce cas)[26]. Certaines méthodes, notamment celles basées sur la fonctionnelle Lagrangienne augmentée, permettent de surmonter ces problèmes en prenant en compte les contraintes locales, i.e. pour chaque élément.

Une autre manière de surmonter ce problème consiste à ne plus considérer les contraintes localement pour l'ensemble des éléments mais de se concentrer uniquement sur l'élément le plus sollicité. La contrainte devient alors :

$$g_{\max} < 0, \text{ avec : } g_{\max} := \max_e \delta_e - 1, \quad (4.17)$$

Cependant, au vue de la non-différentiabilité de l'opérateur *maximum*, une approximation continue et différentiable doit être considérée. Pour cela, la fonction d'agrégation χ -norm sera utilisée dans ces travaux. Elle est définie tel que :

$$g_{\max} \approx g_\chi := \left(\sum_{e=1}^{N_e} \delta_e^\chi \right)^{\frac{1}{\chi}} - 1, \quad \chi \gg 1. \quad (4.18)$$

Il est évident que plus χ est élevé, meilleure sera l'approximation. Pour autant, comme expliqué dans les travaux [80, 160], une valeur trop haute de χ peut causer des problèmes d'*overflow*, tandis qu'une valeur trop faible peut empêcher une convergence correcte de l'algorithme d'optimisation ou l'amener à converger vers un minimum local (car la fonction d'agrégation χ -norm est une approximation par excès et donc plus la valeur de χ est faible plus le domaine d'optimisation est contraint).

Dans le but d'éviter les problèmes d'*overflow* et pour accélérer la convergence vers un minimum faisable, une stratégie de mise à jour du coefficient χ au fil des itérations est mise en place, tel que :

$$\begin{cases} \chi(\tau) = \chi_0 + \lfloor \frac{\tau}{N_{\text{it}}} \rfloor \Delta\chi, & \text{si } \chi(it) < \chi_{\max}, \\ \chi(\tau) = \chi_{\max}, & \text{si } \chi(it) > \chi_{\max} \end{cases} \quad (4.19)$$

où τ est l'itération courante, χ_0 est la valeur de χ à l'itération initiale, χ_{\max} est la valeur maximale que peut prendre l'exposant de la fonction d'agrégation pour assurer une approximation suffisante de la valeur maximale réelle et N_{it} représente le nombre d'itérations au bout duquel le paramètre χ

est augmenté de la valeur $\lfloor \frac{\tau}{N_{it}} \rfloor \Delta\chi$ (où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la fonction partie entière). Les paramètres χ_0 , N_{it} et $\Delta\chi$ sont dépendants du problème d'optimisation et doivent être soigneusement choisis par l'utilisateur. L'idée derrière l'Eq. (4.19) est de démarrer l'optimisation avec une valeur faible du paramètre χ afin d'éviter les problèmes d'*overflow* et de l'augmenter petit à petit au fil des itérations pour ainsi réduire l'écart entre la fonction d'agrégation et l'opérateur maximum afin d'obtenir une topologie optimisée faisable.

Le problème d'OT peut-être formulé comme un CNLPP, où la condition basée sur les contraintes mécaniques, i.e. Eq. (4.18), est intégrée en tant que fonction contrainte explicite. Dans cette étude, les deux CNLPPs suivants sont considérés :

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \frac{V}{V_{ref}}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \\ g_\chi \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{min}, \rho_{max}], \quad \xi_{2k} \in [\omega_{min}, \omega_{max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{CP}. \end{cases} \quad (4.20)$$

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \frac{\mathcal{C}}{\|\mathcal{C}_{ref}\|}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \\ \frac{V}{V_{ref}} - \gamma \leq 0, \\ g_\chi \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{min}, \rho_{max}], \quad \xi_{2k} \in [\omega_{min}, \omega_{max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{CP}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Dans le but de résoudre les problèmes (4.20) et (4.21) par le biais d'un algorithme au gradient, les dérivées des réponses physiques par rapport aux variables d'optimisation ξ_1 et ξ_2 doivent être calculées. Les gradients de la compliance et du volume sont donnés respectivement dans les Eqs. (3.23) et (3.25). Par ailleurs, le calcul du gradient du critère HHVM requiert une attention particulière. Dans le but de dériver son expression analytique, la propriété du support local des entités NURBS de l'Eq. (3.9) ainsi que la méthode de l'adjoint [166] seront utilisés. Pour cela, il faut considérer la proposition suivante :

Proposition 4.3.1 *Considérons un milieu isotrope déformable soumis à des charges externes données. Si les forces volumiques sont identiquement nulles et que les déplacements imposés sont indépendants de la pseudo-densité, le gradient du critère HHVM s'écrit comme suit :*

$$\begin{cases} \frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{i\tau}} = (g_\chi + 1)^{1-\chi} \sum_{e \in S_\tau} 2\delta_e^\chi \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{f}_{i\tau}, \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\eta}, \\ i = 1, 2, \quad \tau = 1, \dots, n_{CP}, \end{cases} \quad (4.22)$$

où $\mathbf{f}_{i\tau}$ et $\boldsymbol{\eta}$ sont définis tel que :

$$\mathbf{f}_{i\tau} := \sum_{e \in S_\tau} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\alpha}{\rho_e} \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_e, \quad (4.23)$$

$$\boldsymbol{\eta} := (g_\chi + 1)^{1-\chi} \sum_{e=1}^{N_e} 2\delta_e^{\chi-1} \rho_e^\beta \mathbf{L}_e^T \mathbf{B}_e^T \mathbf{C} \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e, \quad (4.24)$$

avec :

$$\mathbf{L}_e := \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_{\text{BC}} \right), \quad (4.25)$$

et \emptyset correspond à l'ensemble vide.

La preuve de la proposition 4.3.1 et le pseudo-code de l'algorithme utilisé pour calculer le gradient du critère HHVM sont donnés en Annexe A.

Remarque 4.3.2 Dans l'Eq. (4.23), \mathbf{f}_e est le vecteur des forces nodales externes agissant sur l'élément générique et exprimé dans le repère global du modèle EF.

Remarque 4.3.3 Dans l'Eq. (4.22), la quantité $\boldsymbol{\mu}^T \mathbf{f}_{i\tau}$ représente la contribution "non-locale" du gradient de la contrainte d'optimisation basée sur les contraintes mécaniques, i.e. la variation de la fonction contrainte g_χ causée par la redistribution des contraintes mécaniques suite à une variation de $\xi_{i\tau}$.

4.4 Résultats numériques

Dans cette section, l'efficacité de la méthode NURBS-based-SIMP est montrée sur des cas d'études 2D et 3D tirés de la littérature. Les résultats montrés dans cette section sont obtenus au moyen du code SANTO, détaillé au Chapitre 3. Comme expliqué dans le Chapitre 3, le code SANTO utilise l'algorithme GC-MMA pour déterminer les solutions de chaque CNLPP. Les paramètres de l'algorithme GC-MMA ainsi que les critères de convergence sont détaillés dans le Tab. 4.1.

Les paramètres utilisés pour paramétrer l'algorithme GC-MMA, détaillés dans le Tab. (4.1), seront employés pour l'ensemble des calculs réalisés dans les chapitres suivants.

TABLE 4.1 – paramètres de l'algorithme GC-MMA

Paramètres	Valeur
<i>move</i>	0.1
<i>albefa</i>	0.1
Critères d'arrêt	
N. maximal d'évaluation de la fonction	$100 \times n_{\text{var}}$
N. maximal d'itérations	10000
Tolérance fonction objectif	10^{-6}
Tolérance fonctions contraintes	10^{-6}
Tolérance variation variables d'entrée	10^{-6}
Tolérance sur la norme de Karush–Kuhn–Tucker	10^{-4}

Les opérations de post-traitement seront réalisées à l'aide du logiciel ParaView[®]. Afin de considérer convenablement les résultats numériques, plusieurs aspects seront pris en compte dans cette étude :

1. L'influence de l'entité géométrique étudiée, i.e. l'entité utilisée pour décrire le champ de pseudo-densité, qui pourra être une B-spline ou une NURBS, sera testée pour des cas 2D et 3D ;
2. L'influence des paramètres définissant les entités NURBS et B-spline, i.e. le nombre de PC ainsi que le degré des fonctions de forme, sur la topologie finale sera détaillée sur des cas 2D ;

3. L'impact de l'utilisation de la contrainte basée sur le critère HHVM sur la topologie optimisée sera étudié au travers de différents cas d'études 2D et 3D en comparant les solutions optimisées des problèmes (4.20) et (4.21) avec les solutions du problème (3.20).

Pour les CNLPPs des Eqs. (3.20), (4.20) et (4.21), les bornes inférieure et supérieure des variables d'optimisation sont définies respectivement à : $\rho_{\min} = 10^{-3}$, $\rho_{\max} = 1$, $\omega_{\min} = 0.5$, $\omega_{\max} = 10$. De plus, les composantes des vecteurs de nœuds, définis dans l'Eq. (3.7) ont été distribuées uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ pour chaque cas d'étude.

Pour l'ensemble des calculs de ce chapitre, les propriétés élastiques du matériau isotrope utilisé sont : le module d'Young $E = 71000 \text{ MPa}$, le coefficient de Poisson $\nu = 0.33$ et la limite d'élasticité $\sigma_y = 350 \text{ MPa}$.

4.4.1 Cas d'études 2D

Pour l'ensemble des problèmes 2D, le volume de référence détaillé dans la formulation du CNLPP, correspond au volume du domaine de définition, multiplié par une épaisseur unitaire t . La quantité C_{ref} correspond à la valeur de la compliance évaluée à l'itération initiale.

Le premier benchmark (noté BK1-2D), tiré de [80], est illustré dans la Fig. 4.3 et traite du cas classique de la poutre 2D de Messerschmitt Bölkow Blohm (MBB). Les paramètres géométriques sont $a_1 = 3L$, $a_2 = L$, avec $L = 1000 \text{ mm}$ et $t = 1 \text{ mm}$. Une condition de symétrie ($u_1 = 0$) est appliquée sur les nœuds placés en $x_1 = 0$, tandis qu'une condition en déplacement $u_2 = 0$ est imposée sur les trois nœuds placés ($x_1 = a_1 - ke_{\text{size}}$, $x_2 = 0$), avec $k = 0, 1, 2$ et $e_{\text{size}} = 2.5 \text{ mm}$ qui correspond à la taille des éléments du modèle EF. Une force concentrée $P = 1500 \text{ N}$ (orientée suivant l'axe x_2) est distribuée sur 5 nœuds situés en ($x_1 = ke_{\text{size}}$, $x_2 = a_2$), pour $k = 0, \dots, 4$. Le modèle EF est ainsi constitué de $N_e = 4800$ éléments PLANE182 (élément plan sous l'hypothèse des contraintes planes, composés de 4 nœuds, chacun ayant 2 degrés de liberté).

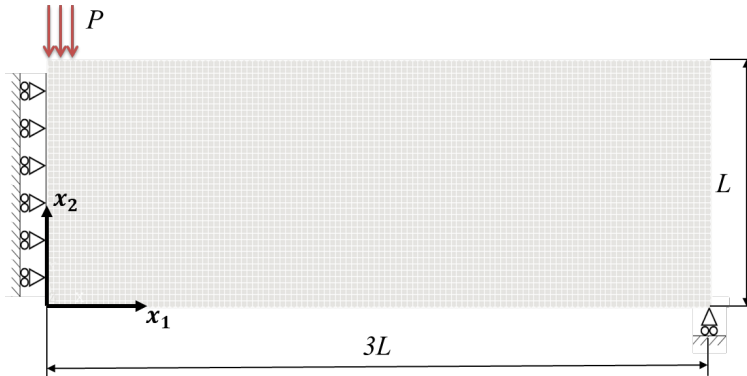


FIGURE 4.3 – Premier cas d'étude (BK1-2D) : géométrie de la plaque MBB 2D et conditions aux limites

Le second cas d'étude (noté BK2-2D), est utilisé dans de nombreuses études [57, 77, 80, 81] et traite de l'optimisation topologique d'une barre en L. Comme montré dans la Fig. 4.4, la géométrie du BK2-2D est caractérisée par les dimensions suivantes : $a_1 = a_2 = L$ et $L = 200 \text{ mm}$, $t = 1 \text{ mm}$. Le modèle EF est composé de 6400 éléments PLANE182 (sous l'hypothèse des contraintes planes). La barre en L est encastée en $x_2 = L$, tandis qu'une force concentrée $P = 1500 \text{ N}$ est appliquée sur le nœud situé en ($x_1 = L$, $x_2 = 0.4L$). Comme couramment réalisé dans la littérature [77, 80], une région de Non-Design (NDR), composée de 3×3 éléments, comme illustré dans la Fig. 4.4, est

définie dans le voisinage de la force appliquée et exclue de l'analyse d'OT. Les éléments dans cette zone sont soumis à une concentration de contraintes importante qui peut entraîner des problèmes de convergence au cours du processus d'optimisation. Ainsi, la valeur du champ de pseudo-densité lié à ces éléments est fixée égale à 1.

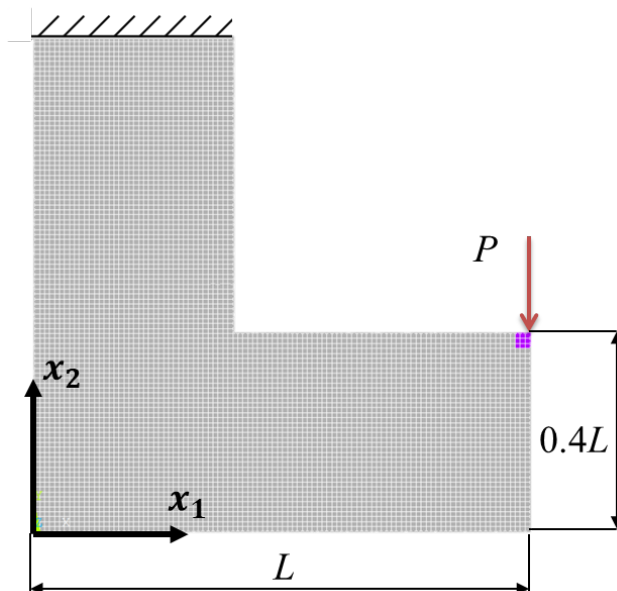


FIGURE 4.4 – Second cas d'étude (BK2-2D) : géométrie du domaine en L 2D et les conditions aux limites associées.

4.4.2 BK1-2D : analyse de sensibilité de l'impact des paramètres B-spline et NURBS sur la topologie optimisée

Une vaste campagne de tests a été réalisée sur le BK1-2D : le but étant d'étudier la sensibilité de la topologie optimisée aux paramètres définissant les entités B-Spline et NURBS. En particulier, le CNLPP donné par l'Eq. (4.20) est résolu en considérant les combinaisons suivantes de degrés des fonctions de forme et du nombre de PC : (a) $p_j = 2, 3, 4$, ($j=1,2$); (b) $n_{CP} = 1960, 2880, 3960$ pour les entités B-spline et NURBS.

L'expression du volume de référence apparaissant dans l'Eq. (4.20) est $V_{\text{ref}} = 3tL^2$. Pour l'ensemble des calculs résolvant l'Eq. (4.20), une densité initiale de $\rho(\zeta_1, \zeta_2) = 1.0$ est considérée pour chaque PC. Dans le but de mettre à jour le paramètre $\chi(\tau)$ détaillé dans l'Eq. (4.19), les valeurs suivantes ont été sélectionnées après quelques ajustements empiriques : $\chi_0 = 12$, $\chi_{\text{max}} = 80$, $N_{\text{it}} = 150$ et $\Delta\chi = 10$.

Les résultats sont détaillés en termes de fraction volumique $\frac{V}{V_{\text{ref}}}$ et du nombre d'itérations N_{iter} pour les entités B-spline et NURBS respectivement, et sont donnés dans les Figs. 4.5 et 4.6. Une synthèse de l'ensemble de ces résultats est illustrée dans la Fig. 4.7 et compare le résultat obtenu en terme de fraction volumique par rapport au nombre de PC et au degré des fonctions de forme.

À la suite de ces résultats, différentes remarques peuvent être faites :

1. Pour les solutions B-spline et NURBS, plus le nombre de PC est élevé, plus la valeur de la fonction objectif est faible. À l'inverse, plus le degré des fonctions de forme est petit, plus

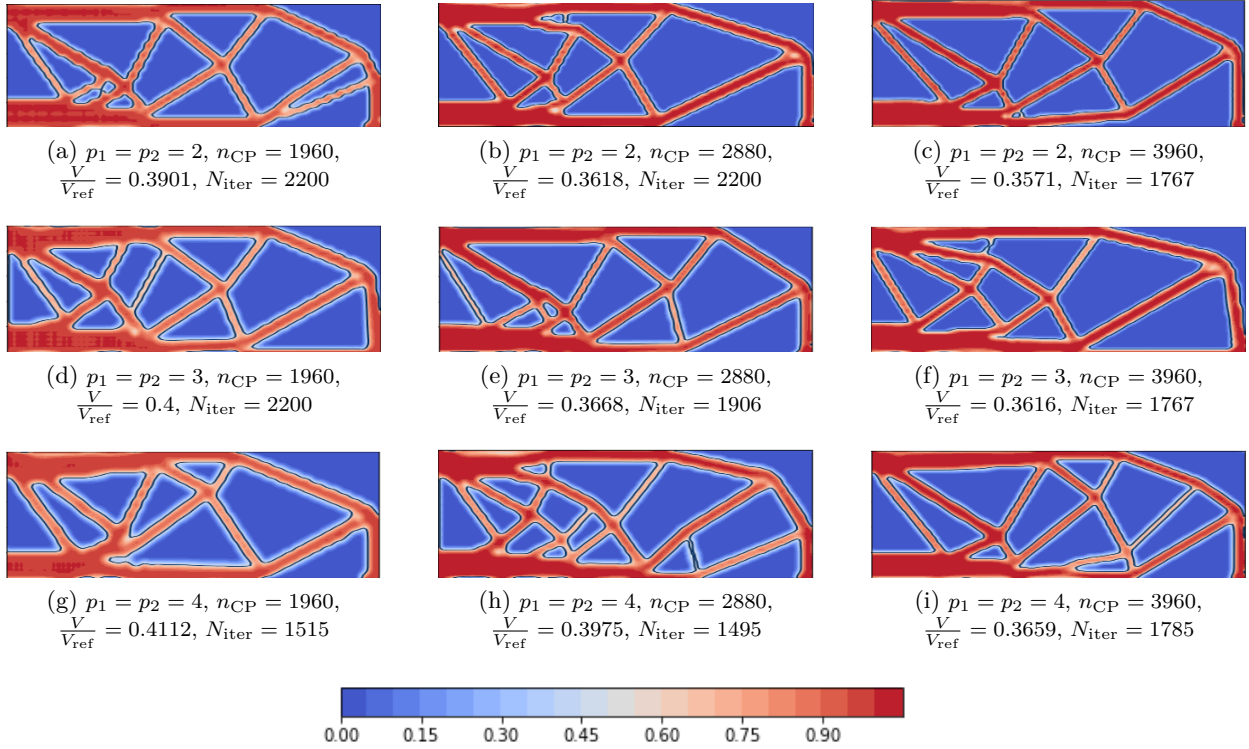


FIGURE 4.5 – Résultats B-Spline : problème BK1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de forme pour le problème (4.20)

la valeur de la fonction objectif est faible. Comme expliqué dans [15, 16, 147], cela est dû à l'effet de la taille du support local : plus le nombre de PC est élevé (et le degré des fonctions est faible), plus la taille du support local est petite et donc plus petites sont les branches topologiques qui apparaissent dans la géométrie finale. Cependant, en considérant certains résultats NURBS, certaines combinaisons de PC et de degrés, ne suivent pas cette tendance globale : cela est certainement lié à la forte non-convexité du CNLPP de l'Eq. (4.20).

2. Comme expliqué précédemment, le nombre de PC et le degré des fonctions de base suivant chaque direction affectent la taille du support local, ce qui impose une condition intrinsèque sur la taille minimale des branches topologiques [16]. En considérant cet aspect, il est possible de noter que plus le degré est élevé (et plus le nombre de PC est petit), plus le support local est grand, ce qui a pour conséquence que chaque PC affecte une zone plus large du maillage pendant l'optimisation. Ainsi, plus le degré est élevé, plus la frontière de la topologie après reconstruction CAO sera lisse. C'est pourquoi, un nombre important de PC et un degré faible doivent être considérés s'il n'y a pas de restriction sur la taille minimale des branches topologiques. Sinon, il est préférable d'utiliser un degré élevé et un nombre de PC plus faible.
3. Les solutions optimisées obtenues en utilisant les entités NURBS sont caractérisées par une valeur de fonction objectif plus faible ou égale à celles trouvées sur des calculs B-spline pour un nombre de PC et un degré similaires, comme montré en Fig. 4.7. De plus les Figs. 4.5 et 4.6 montrent que les résultats NURBS permettent d'obtenir une frontière plus lisse que les

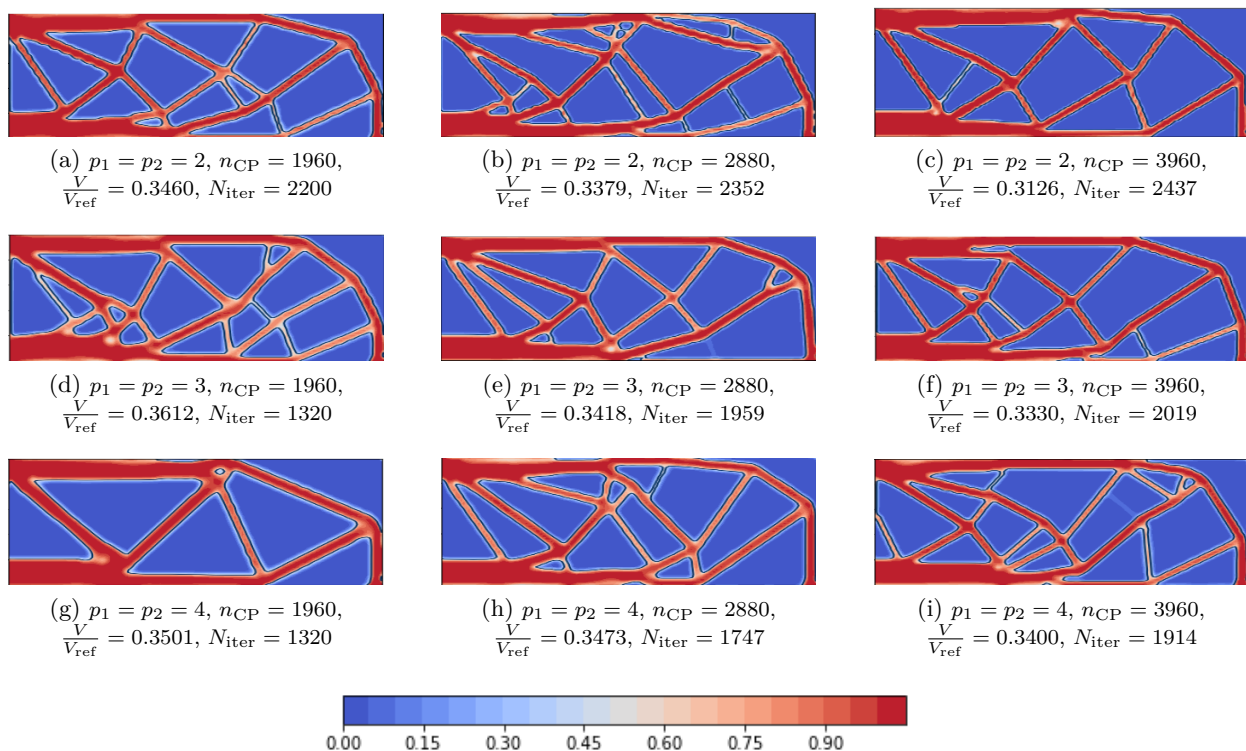


FIGURE 4.6 – Résultats NURBS : problème BK1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de forme pour le problème (4.20)

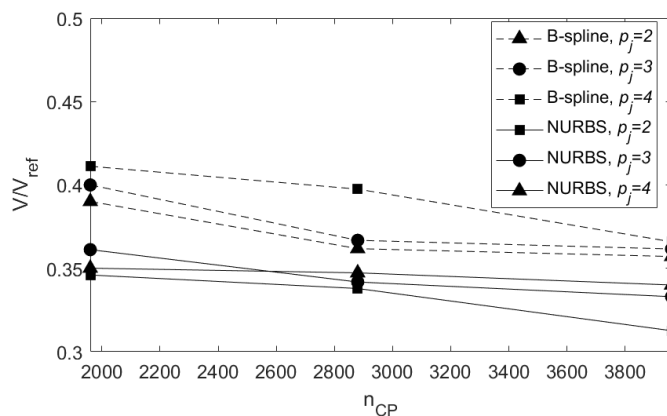


FIGURE 4.7 – Probleme BK1-2D : fraction volumique vs. nombre de PC et degrés pour les solutions B-spline et NURBS du problème (4.20)

résultats B-spline.

4. Pour chaque solution illustrée dans les Figs. 4.5 et 4.6, la contrainte sur la valeur maximale du critère de HHVM est toujours satisfaite et la solution se situe sur la limite du domaine de faisabilité. Pour montrer cela, les graphiques affichant la quantité δ_e , définie à l'Eq. (4.16),

sont illustrés dans les Figs. 4.8 et 4.9 pour chaque topologie optimisée. Ces figures montrent que, contrairement aux résultats trouvés dans la littérature [80], le critère de HHVM est toujours localement respecté (i.e. pour chaque élément) et que la topologie optimisée résiste aux sollicitations appliquées en maintenant une valeur de contrainte quasi uniforme (presque égale à la limite élastique) sur l'ensemble des branches topologiques.

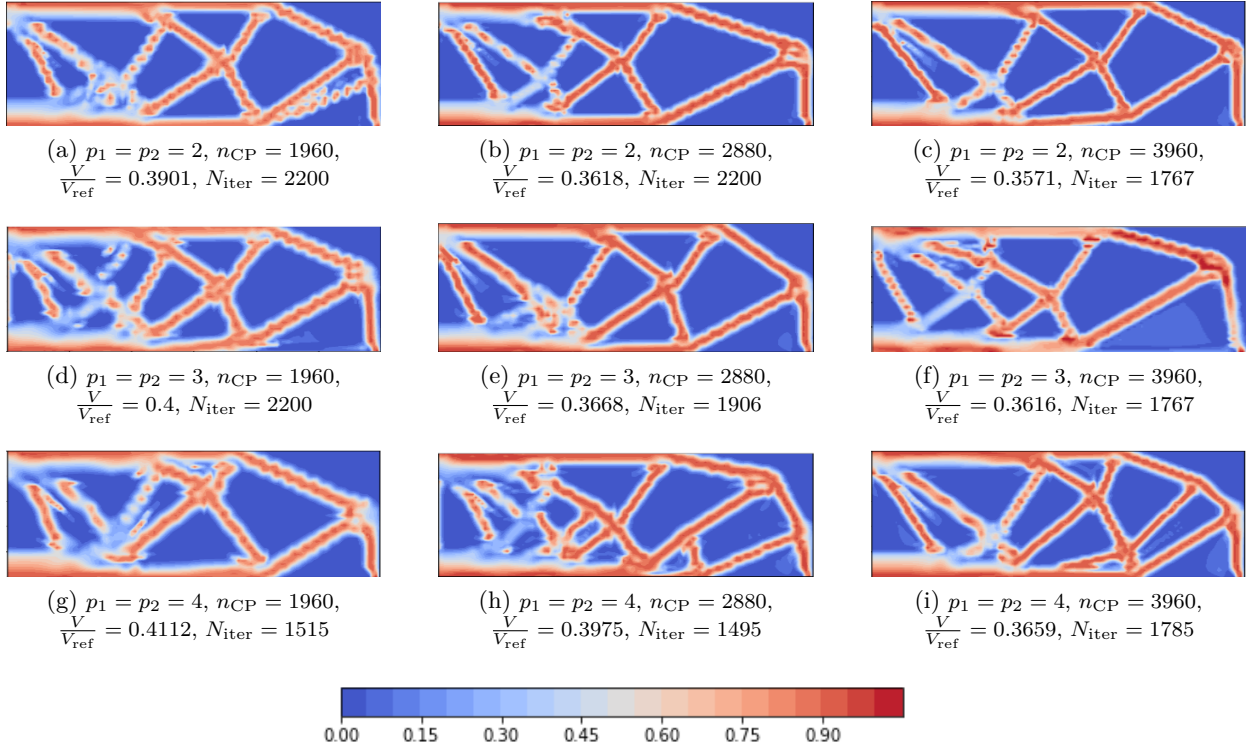


FIGURE 4.8 – Critère de HHVM adimensionné de l'Eq. (4.16) pour les solutions B-spline du problème (4.20)

4.4.3 BK2-2D : influence de la formulation du CNLPP sur la topologie finale

L'influence du critère de tenue sur la topologie optimisée est étudiée ici en considérant différentes formulations du CNLPP. En particulier, une condition sur l'épaisseur minimale des branches topologiques a été ajoutée à la formulation mathématique des problèmes (3.20), (4.20) et (4.21). Les dimensions minimales des branches topologiques de la géométrie optimisée doivent être supérieures ou égales à $d_{\min} = 2.5 \text{ mm}$. Pour satisfaire directement cette condition sans ajouter une contrainte d'optimisation explicite dans la formulation du problème, et comme détaillé dans [16], des entités B-spline et NURBS, avec des degrés $p_1 = p_2 = 2$ et $n_{\text{CP}} = 82 \times 82$ PC, sont utilisées dans les analyses. Cependant, il est évident que les PC se situant en dehors du domaine d'optimisation de la barre en L (plus précisément les PC dont le support local est vide) ne sont pas inclus dans les vecteurs de variables d'optimisation (i.e. la valeur de pseudo-densité de ces PC est fixée à 0). Ainsi, le nombre total de PC actifs durant ces calculs est $n_{\text{CP}} = 4416$.

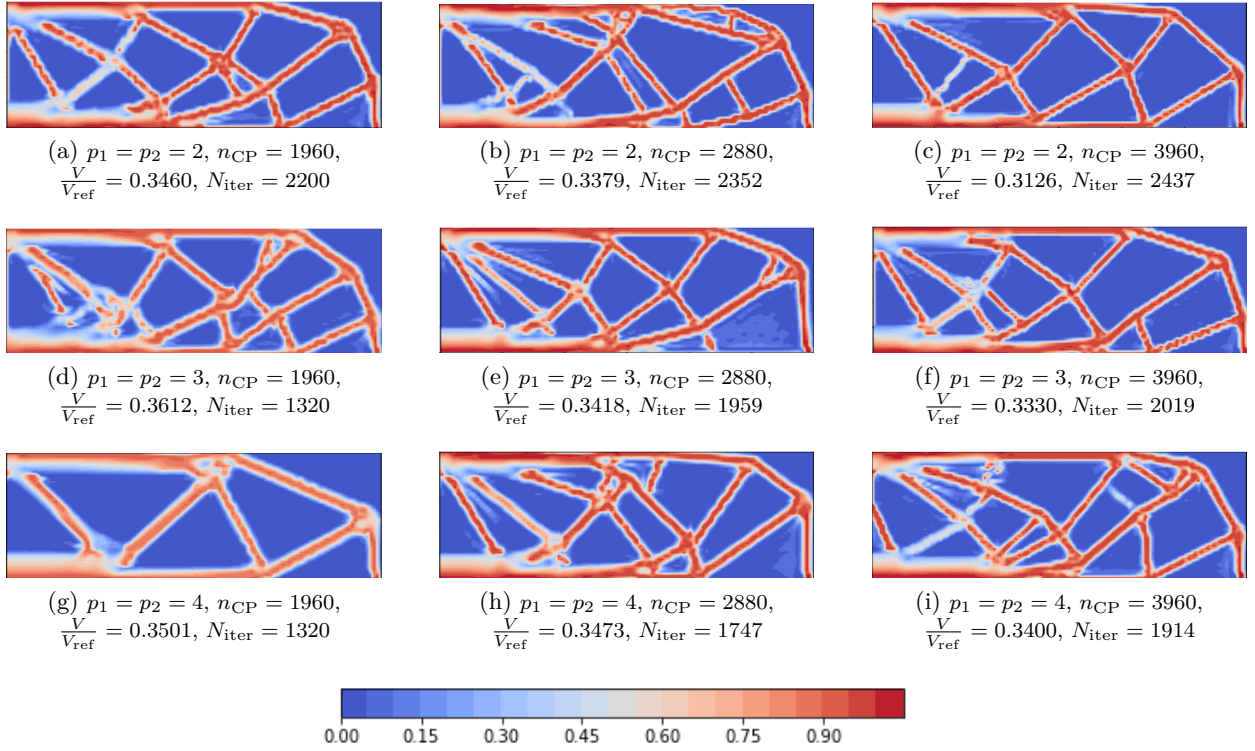


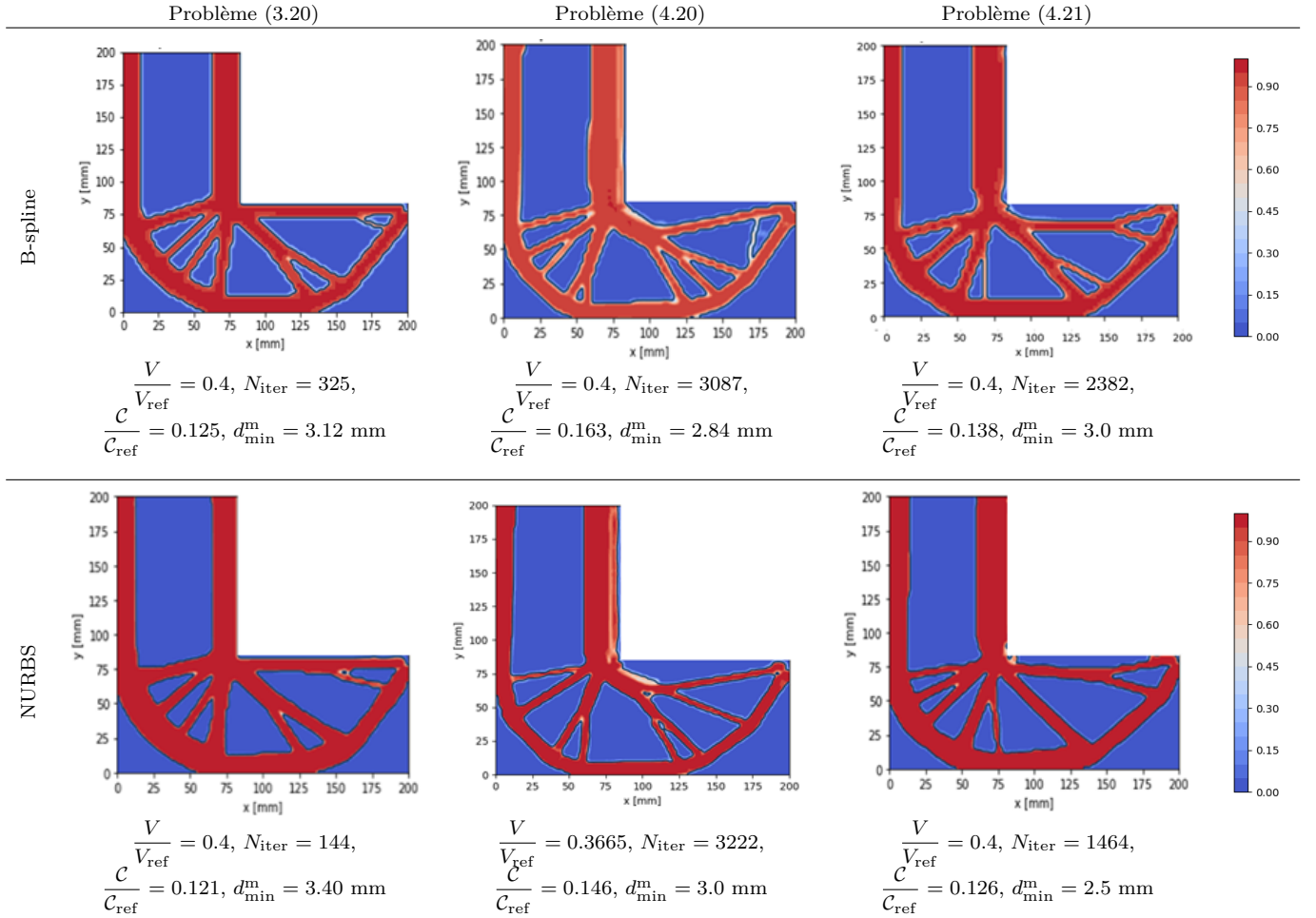
FIGURE 4.9 – Critère de HHVM adimensionné de l’Eq. (4.16) pour les solutions NURBS du problème (4.20)

Pour chaque CNLPP, le volume de référence est calculé en suivant la formule suivante : $V_{ref} = tL^2(1 - 0.6^2)$. De plus, la fraction de volume apparaissant dans les Eqs. (3.20) et (4.21) est fixée à $\gamma = 0.4$. Pour les problèmes (3.20) et (4.21), le champ de pseudo-densité initial est défini uniforme et de valeur $\rho(\zeta_1, \zeta_2) = \gamma$ et la valeur de la compliance de la solution initiale est égale à $\mathcal{C}_{ref} = 22945$ Nmm. À l’inverse, le point de départ du CNLPP de l’Eq. (4.20) est caractérisé par une pseudo-densité uniforme tel que $\rho(\zeta_1, \zeta_2) = 1$. Il est évident que, à cause de la géométrie particulière de la barre en L qui possède un angle droit favorisant les concentrations élevées de contraintes, les points de départ des Eqs. (4.20) et (4.21) sont non-faisables et ne respectent pas la limite élastique. Pour ces calculs, la mise à jour du paramètre $\chi(\tau)$ détaillé dans l’Eq. (4.19) est donc particulièrement importante : les valeurs suivantes ont été sélectionnées après quelques ajustements empiriques : $\chi_0 = 20$, $\chi_{max} = 80$, $N_{it} = 150$ et $\Delta\chi = 10$.

Les solutions optimisées des problèmes (3.20), (4.20) et (4.21) sont listées dans le Tab. 4.2 pour les calculs B-spline et NURBS. Dans ce tableau, les résultats numériques sont donnés en terme de compliance adimensionnée $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_{ref}}$, de fraction volumique $\frac{V}{V_{ref}}$, de nombre d’itérations pour atteindre la solution optimale et de valeur mesurée du diamètre minimale des branches topologiques d_{min}^m , i.e. la valeur minimale mesurée après reconstruction CAO de la frontière de la topologie optimisée [16]. Pour chaque solution des problèmes (4.20) et (4.21) la contrainte sur le critère de HHVM est toujours satisfaite et la solution se situe à la frontière du domaine de faisabilité.

Le graphique représentant le critère de HHVM adimensionné de l’Eq. (4.16), i.e. la quantité δ_e , est illustré en Tab. 4.3 pour chaque topologie optimale et pour chaque formulation du problème.

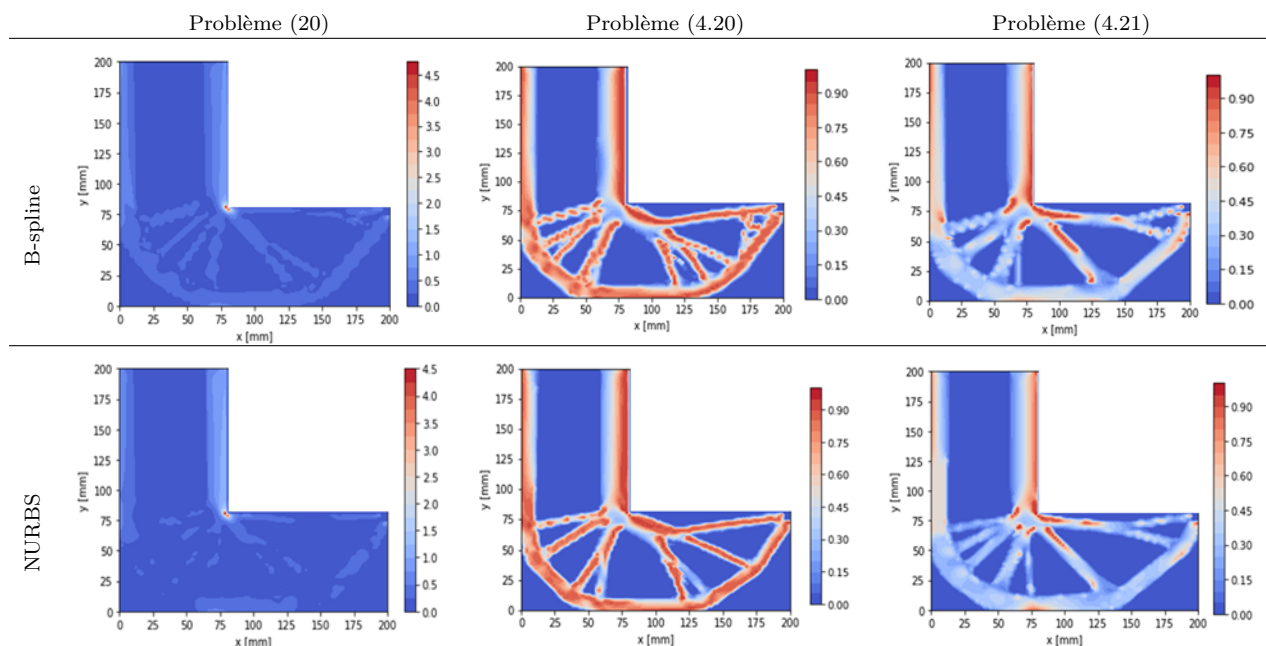
TABLE 4.2 – BK2-2D : Topologies optimales pour différentes formulations du CNLPP



À partir de l'analyse des résultats détaillés dans les Tabs. 4.2 et 4.3, les remarques suivantes peuvent être faites :

1. Pour chaque problème considéré, la topologie optimale obtenue par la formulation NURBS est caractérisée par une valeur de fonction objectif plus faible que celle caractérisant les entités B-spline.
2. Grâce aux propriétés géométriques des fonctions de forme des entités NURBS, la contrainte sur la dimension minimale des branches topologiques est toujours satisfaite. En particulier pour la solution NURBS du problème (4.21) la contrainte sur la dimension minimale des branches topologiques est active (i.e. elle est égale à 0).
3. Les solutions NURBS et B-spline du problème (3.20) donnent des valeurs de compliance finale plus faibles que celles des problèmes (4.20) et (4.21). De plus, les valeurs de compliance du problème (4.21) sont plus faibles que celles obtenues pour les solutions du problème (4.20). Ce résultat était attendu car la fonction compliance était incluse en tant que fonction coût dans les problèmes (3.20) et (4.21).
4. La solution NURBS du problème (4.20) donne le meilleur résultat en terme de fraction volumique parmi tous les calculs montrés dans le Tab. (4.2). Ce résultat était attendu car la

TABLE 4.3 – BK2-2D : critère de HHVM adimensionné de l'Eq. (4.16) pour les topologies optimales pour les différentes formulations du CNLPP



fonction volume était définie en tant que fonction objectif du problème (4.20).

5. Comme attendu, les solutions optimales du problème (3.20) ne respectent pas les valeurs maximales imposées par le critère de HHVM à cause, principalement, de la forte concentration de contrainte localisée proche du coin du domaine en L (cf. Tab 4.3), qui est caractérisé par un angle droit, comme montré dans Tab 4.2. À l'inverse, comme illustré dans le Tab. 4.2, les solutions optimales des problèmes (4.20) et (4.21) présentent un congé plus ou moins important entre le passage de la région horizontale vers la région verticale du domaine en L, permettant ainsi une transition plus douce entre les branches topologiques. En particulier, pour ces topologies, la valeur maximale du critère de HHVM adimensionné est toujours inférieure à 1, comme détaillé dans le Tab. 4.3. De plus, les géométries obtenues par le problème (4.20) présentent un champ de contraintes presque uniforme sur l'ensemble des branches topologiques.
6. La contrainte g_χ prend une valeur extrêmement faible (entre $-1e-6$ et 0) sur les topologies optimisées obtenues à partir du problème (4.20), ainsi le minimum local se situe sur la frontière du domaine faisable.
7. Toutes les analyses ont été menées sur une station de calcul utilisant un processeur Intel Xeon E5-2697v2 (2.70–3.50 GHz) et 4 cœurs dédiés aux calculs d'optimisation. Le temps de calcul le plus long est celui de la solution B-spline du problème (4.20), qui a pris un peu moins de 10h pour trouver une solution faisable. Cela est dû principalement au nombre important d'itérations nécessaire à la convergence de ce calcul. En effet, le problème (4.20) étant fortement non-linéaire, la topologie évolue très lentement vers un minimum faisable et nécessite donc un grand nombre d'itérations.

Pour avoir une meilleure compréhension du comportement de l'algorithme GC-MMA quand

il s'agit d'aborder des problèmes d'OT basés sur les contraintes mécaniques et formulés dans le cadre de la méthode NURBS-based SIMP, le graphique représentant l'évolution de la fonction objectif ainsi que des fonctions contraintes tout au long des itérations est donné dans la Fig. 4.10, dans le cas de la solution optimale B-spline pour les problèmes (4.20) et (4.21).

Pour le cas de la solution B-spline du problème (4.20), la solution initiale est non-faisable car la fonction g_χ est positive, comme illustré dans la Fig. 4.10 (a). Néanmoins, l'algorithme est capable de trouver un point faisable après seulement 140 itérations (point A sur la Fig. 4.10 (a)). Cependant, à cette itération, selon la valeur des différents paramètres impliqués dans l'Eq. (4.19) du cas d'étude BK2-2D, le paramètre χ est toujours égale à sa valeur χ_0 et la valeur de l'approximation χ -norme est toujours plus élevée que la valeur maximale réelle du critère de HHVM dans la structure (car plus le paramètre χ est faible, moins l'approximation est précise). Lorsque le nombre d'itérations atteint $N_{it} = 150$, le paramètre χ est incrémenté une première fois selon la formule $\chi = \chi_0 + \Delta\chi$ et la valeur de la fonction objectif et celle de la fonction contrainte décroissent fortement au cours des 150 itérations suivantes. Cette tendance apparaît toutes les 150 itérations lorsque χ est mis à jour en accord avec l'Eq. (4.19) jusqu'à atteindre la valeur maximale. De plus, la Fig. 4.10 (a), montre que le minimum local est atteint à l'itération 1075 (point B sur la Fig. 4.10 (a)) lorsque la fonction contrainte prend une valeur négative très faible, i.e. $-7.18e-7$, et la solution se situe à la frontière du domaine faisable. Les itérations suivantes sont uniquement des légères variations de la topologie dans le but d'atteindre les critères d'arrêt de l'algorithme listés dans le Tab. 4.1. En particulier, pour cette analyse, l'optimisation s'est arrêtée car le critère sur la différence relative de valeur de fonction objectif entre deux itérations consécutives était inférieur à $1e-6$, qui est probablement une condition trop restrictive puisque la fonction objectif est une quantité adimensionnée dans tous les problèmes considérés dans ce chapitre.

D'un autre côté, trouver un minimum faisable pour le problème (4.21) est plus difficile pour l'algorithme car il y a deux contraintes d'optimisation intégrées dans la formulation du problème : comme détaillé dans la littérature [78, 80], ce problème peut poser des difficultés de convergence. En regardant la solution B-spline du problème (4.21), et le résultat montré dans la Fig. 4.10 (b), il est possible de remarquer qu'uniquement la valeur de la fonction contrainte basée sur le volume est respectée (point A sur la Fig. 4.10 (b)), tandis que g_χ est toujours positive. En particulier, l'algorithme tend à décroître monotonement la valeur de g_χ , tandis que la fonction sur le volume à une valeur non-monotone jusqu'à l'itération 780 quand g_χ devient négative (et donc respectée), point B sur la Fig. 4.10 (b). À ce moment, l'algorithme essaie de décroître monotonement la fraction volumique (tout en respectant la condition sur le critère de HHVM) jusqu'à ce que les deux contraintes soient respectées, c-à-d à l'itération 1980 (point C sur la Fig. 4.10 (b)). À ce moment, la topologie évolue très faiblement dans le but de satisfaire les conditions d'arrêt listées dans le Tab. 4.1. Puis l'analyse s'arrête car le critère sur la tolérance de la variation des variables d'optimisation est satisfaite après 2380 itérations. Il convient de noter que les solutions B-spline du problème (4.21) sont faisables mais non localisées à la frontière entre les domaines faisable et non-faisable car les fonctions contraintes sur la fraction volumique et sur le critère HHVM prennent des valeurs négatives, i.e. -0.0016 et -0.1168 , respectivement.

Pour conclure cette analyse, une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode SIMP classique disponible dans le logiciel ANSYS Workbench[®] et ceux obtenus par la méthode NURBS-based SIMP est menée pour les deux problèmes (4.20) et (4.21). Par souci de simplicité, uniquement les solutions B-spline illustrées dans le Tab. 4.2 ont été considérées.

La reconstruction de la frontière de la topologie optimisée dans le cas de la méthode NURBS-based SIMP est une tâche immédiate. Comme expliqué dans le Chapitre 3, dans le cas des problèmes 2D, le champ de pseudo-densité optimal en sortie du processus d'optimisation est disponible sous la

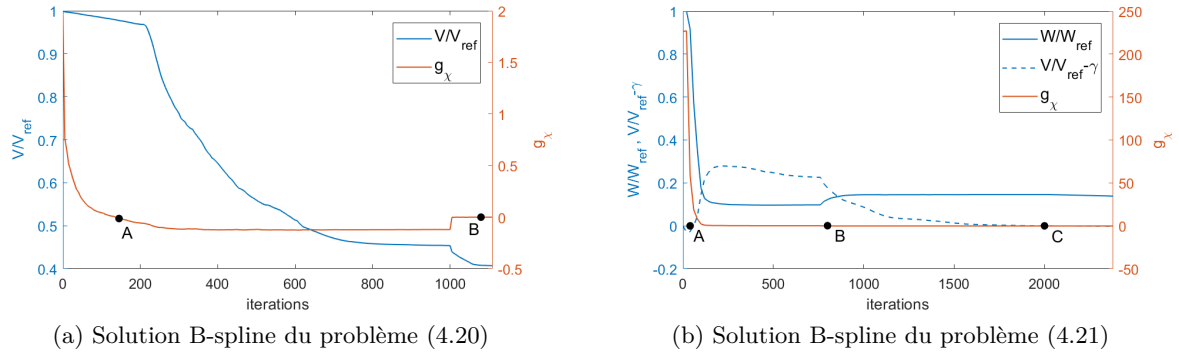


FIGURE 4.10 – Fonction objectif et fonction contrainte vs. nombre d'itérations

forme d'une surface NURBS 3D et peut être directement importé dans un environnement CAO en tant que fichier Initial Graphics Exchange Specification (IGES). L'opération de coupe est détaillée dans la Fig. 3.3 pour une erreur relative de 0.01. Ensuite, le fichier résultant et constituant la frontière de la topologie optimisée peut être importé dans un logiciel EF où il peut être traité ultérieurement à des fins de vérification. Plus de détails sur le sujet sont donnés dans [15, 147].

Dans ces travaux, la frontière de la topologie optimisée a été importée dans ANSYS Workbench[®] et le modèle EF des deux solutions B-spline aux problèmes (4.20) et (4.21), qui sont illustrées en Fig. 4.11 (a) et (b), respectivement, ont été maillées à l'aide d'éléments PLANE182 triangulaires (hypothèse contraintes planes) pour une dimension moyenne de l'élément égale à 1.5 mm. Le nombre total d'éléments est respectivement 10961 et 12122 pour les solutions B-spline des problèmes (4.20) et (4.21).

Pour ce qui est des frontières des topologies optimisées obtenues par la méthode SIMP classique disponible dans le logiciel ANSYS Workbench[®], elles ont été reconstruites avec l'outil ANSYS SpaceClaim[®] disponible dans le package ANSYS : les modèles EF résultants sont illustrés dans la Fig. 4.11 (c) et (d), pour les problèmes (4.20) et (4.21), respectivement. Le maillage de ces modèles est fait également d'éléments PLANE182 triangulaires (hypothèse contraintes planes) pour une dimension moyenne des éléments égale à 1.5 mm. Le nombre total d'éléments est 11793 et 7411 pour les problèmes (4.20) et (4.21), respectivement.

Le graphique montrant la valeur de la contrainte de HHVM est illustrée dans la Fig. 4.12 pour chaque solution optimisée (et pour chaque formulation du problème) montrée dans la Fig. 4.11. Il convient de signaler que la NDR illustrée dans la Fig. 4.4 est exclue de ce graphique à cause de l'application de la force concentrée. De plus, la valeur de la compliance adimensionnée $\frac{C}{C_{\text{ref}}}$ et de

la fraction volumique $\frac{V}{V_{\text{ref}}}$ obtenues après reconstruction de la frontière de la topologie optimisée sont indiquées sur la Fig. 4.12.

Ces graphiques montrent que les solutions B-spline des problèmes (4.20) et (4.21) respectent les contraintes sur la valeur maximale du critère de HHVM même après reconstruction de la frontière de la topologie optimisée. Comme illustré dans la Fig. 4.12, la contrainte équivalente de HHVM est toujours inférieure à la limite élastique, i.e. $\sigma_y = 350$ MPa, utilisée dans ces analyses. Par contre, la contrainte sur la valeur maximale du critère de HHVM n'est pas respectée après reconstruction de la frontière des solutions optimales obtenues à l'aide de la méthode SIMP classique implémentée dans ANSYS Workbench[®], puisque les valeurs maximales des contraintes équivalentes HHVM des problèmes (4.20) et (4.21) sont respectivement de 534 MPa et 495 MPa.

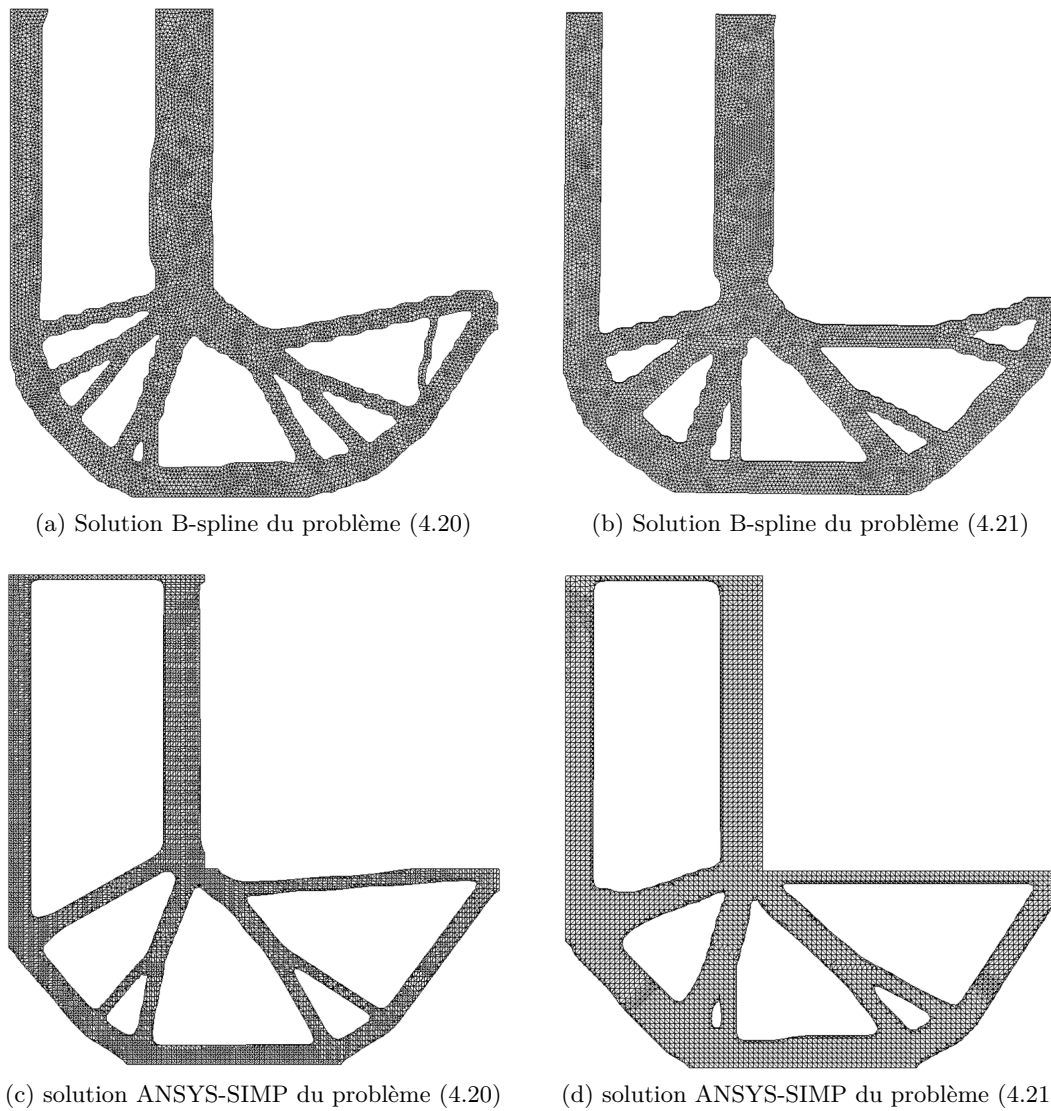


FIGURE 4.11 – Frontière de la topologie optimisée et maillage correspondant à la fin du processus d’optimisation

Finalement, il convient de noter la cohérence entre les performances des solutions B-spline, pour les deux problèmes (4.20) et (4.21), en terme de compliance adimensionnée $\frac{W}{W_{\text{ref}}}$ et de fraction volumique $\frac{V}{V_{\text{ref}}}$, avant et après la reconstruction de la frontière de la topologie optimisée.

4.4.4 Cas d’études 3D

Le troisième cas d’étude (BK3-3D) traite de l’OT du domaine en L 3D. Comme montré dans la Fig. 4.13, la géométrie du BK3-3D est définie par les dimensions suivantes : $a_1 = a_2 = L = 150 \text{ mm}$, $a_3 = 10 \text{ mm}$.

Le modèle EF est composé de $N_e = 9216$ SOLID185 éléments (intégration complète, 8 nœuds, 3 degrés de liberté par nœud). Le domaine en L est encastree en $x_2 = a_2$, tandis qu’une force

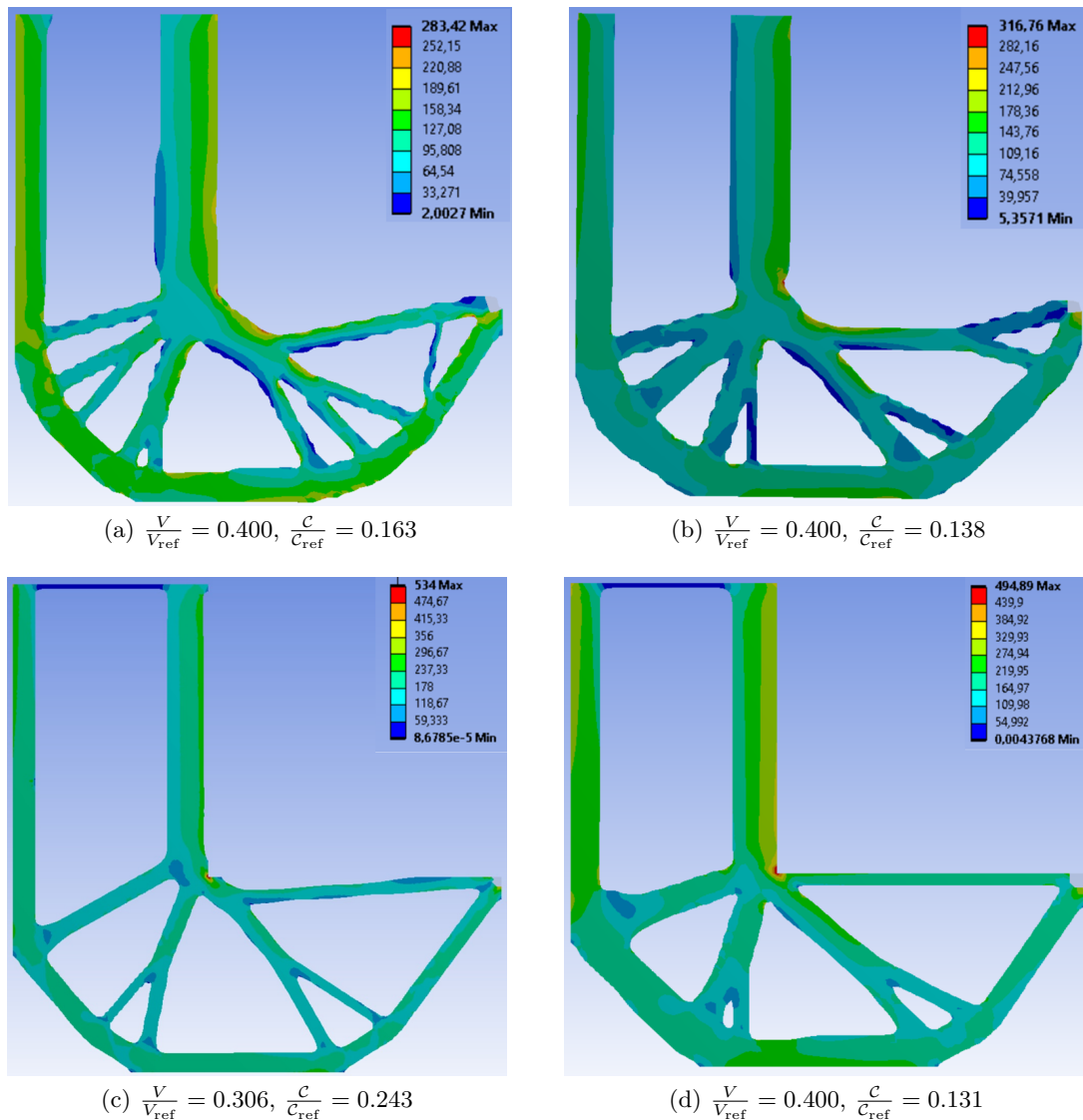


FIGURE 4.12 – Critère de HHVM [MPa] et performances des solutions optimisées après reconstruction de la frontière : (a) solution B-Spline du problème (4.20), (b) solution B-Spline du problème (4.21), (c) solution ANSYS-SIMP du problème (4.20), (d) solution ANSYS-SIMP du problème (4.21)

concentrée $P = 10000 \text{ N}$ est répartie également sur les nœuds situés en $(x_1 = a_1, x_2 = 0.4x_2)$. Une NDR composée de $2 \times 2 \times 4$ éléments, comme illustré dans la Fig. 4.13, est définie au voisinage de la force appliquée et est exclue de l'analyse car le critère équivalent de HHVM local est trop élevé et peut provoquer des problèmes de convergence lors du processus d'optimisation. Pour cela, la valeur du champ de pseudo-densité affecté à ces éléments et appartenant à la NDR est imposée égale à 1.

Comme dans les problèmes du cas d'étude BK2-2D, l'influence du critère de HHVM sur la topologie finale est étudiée en considérant les différentes formulations des CNLPPs (3.20), (4.20) et (4.21). Comme dans l'exemple 2D, une condition sur le diamètre minimal des branches topologiques

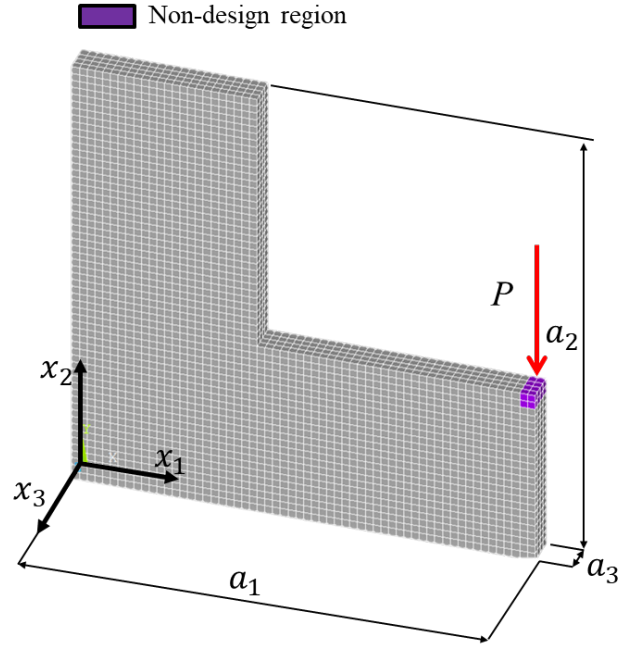


FIGURE 4.13 – Troisième cas d'étude (BK3-3D) : géométrie de la barre en L 3D

est considérée ici : les branches topologiques de la géométrie finale doivent avoir une épaisseur supérieure à une valeur $d_{\min} = 2.0 \text{ mm}$. Pour satisfaire cette condition de diamètre minimal, sans introduire de fonction explicite, la formulation du problème détaillée dans [16] est encore utilisée dans ce cas. Ainsi, les entités B-spline et NURBS utilisées dans ces calculs sont définies telles que : $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ et $n_{\text{CP}} = 52 \times 52 \times 4$. Cependant, les PC dont le support local est vide (i.e. qui tombent en dehors du domaine de définition de la barre en L) sont exclus des vecteurs des variables de définition (i.e. leur valeur de pseudo-densité est fixée à 0), ainsi le nombre total de PC actifs est $n_{\text{CP}} = 7200$.

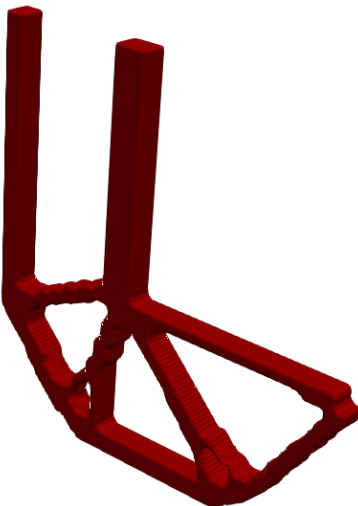
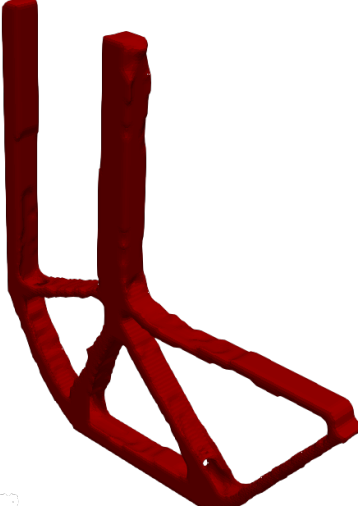
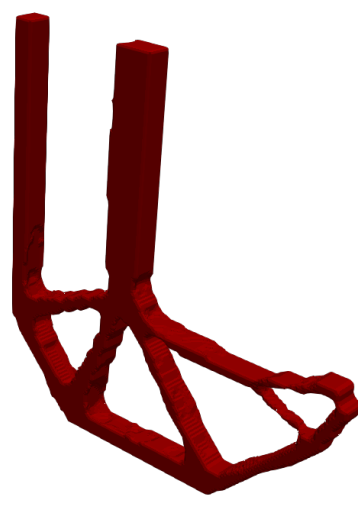
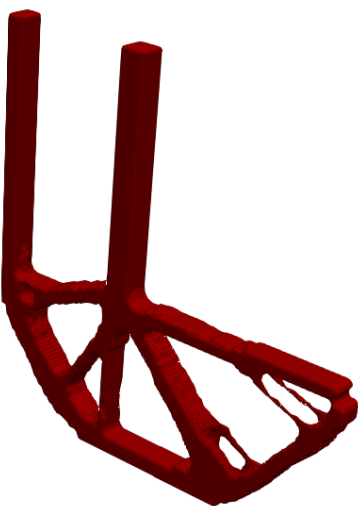
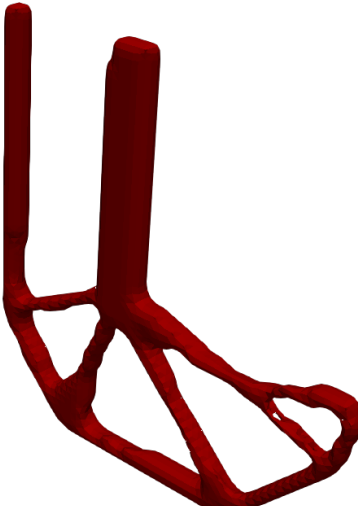

Pour chaque CNLPP, le volume de référence est calculé selon la formule suivante : $V_{\text{ref}} = a_1 a_2 a_3 (1 - 0.6^2)$. De plus, la fraction volumique apparaissant dans les Eqs. (3.20) et (4.21) est fixée telle que $\gamma = 0.4$ et par une compliance de référence $C_{\text{ref}} = 283393 \text{ Nmm}$. Par ailleurs, le point de départ du CNLPP de l'Eq. (4.20) est fixé tel que $\rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = 1.0$. Cependant, les points de départ des CNLPPs définis par les Eqs. (3.20) et (4.21) sont fixés afin d'avoir une pseudo-densité uniforme $\rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \gamma$. Comme pour les cas BK2-2D, les points de départ des problèmes (4.20) et (4.21) correspondent à des solutions non-faisables car elles ne respectent pas la contrainte d'optimisation relative au critère de HHVM. Une nouvelle fois, le paramètre $\chi(\tau)$ va jouer un rôle important pour revenir petit à petit dans le domaine faisable tout en évitant les problèmes d'*overflow* causés par des contraintes mécaniques trop élevées. Ainsi, suite à différentes études empiriques, les paramètres utilisés sont : $\chi_0 = 20$, $\chi_{\max} = 80$, $N_{\text{it}} = 150$ et $\Delta\chi = 10$.

Les solutions optimales des problèmes (3.20), (4.20) et (4.21) sont données dans le Tab. 4.4 pour les solutions basées sur les hypersurfaces B-spline et NURBS et sont listées en terme de $\frac{C}{C_{\text{ref}}}$,

$\frac{V}{V_{\text{ref}}}$, N_{iter} et d_{\min}^m .

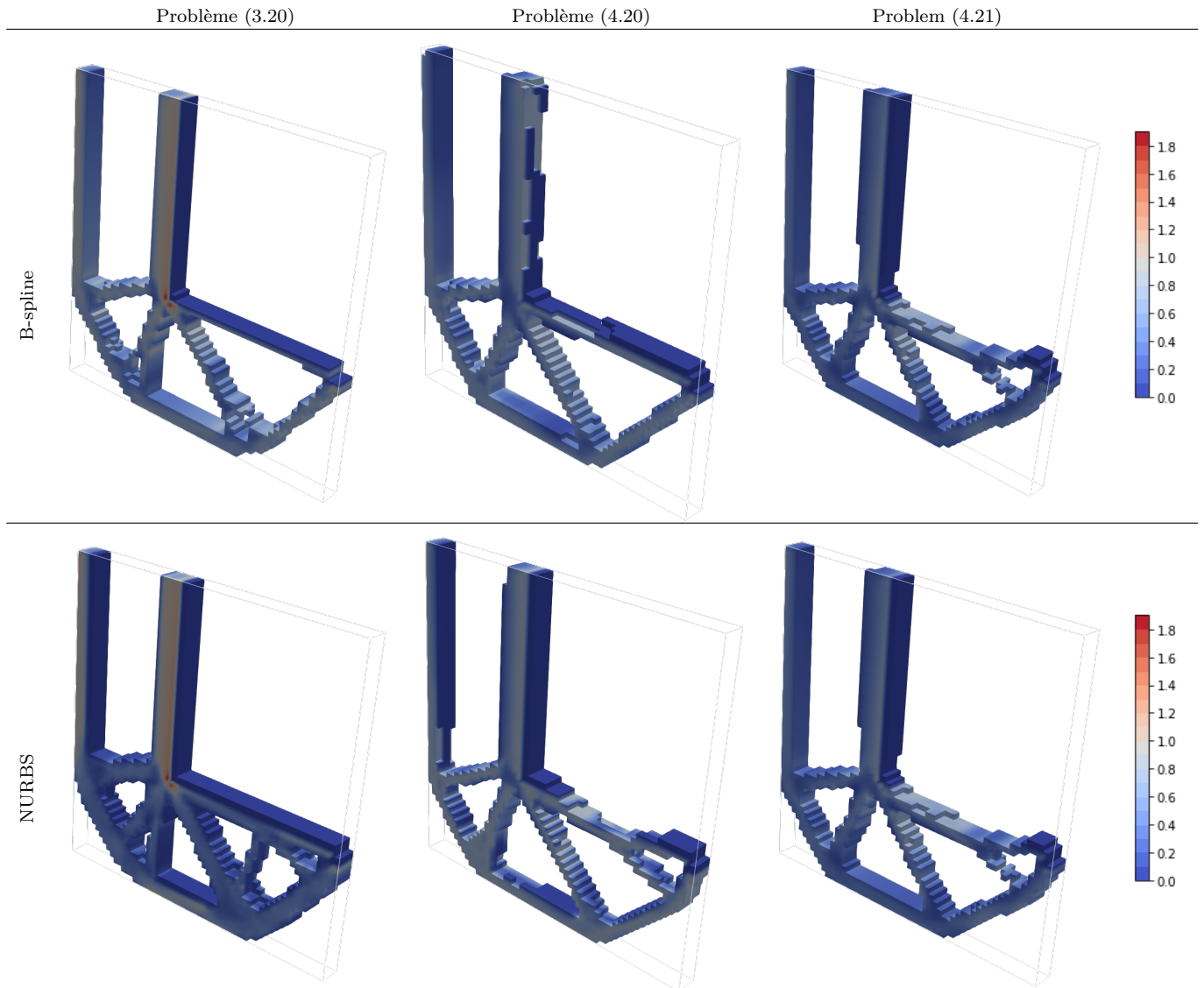
Suite à ces calculs, il est nécessaire de souligner que les solutions optimisées et présentées dans le Tab. 4.4 ont été obtenues après avoir effectué l'opération de seuillage sur le champ de pseudo-

TABLE 4.4 – BK3-3D : topologies optimisées pour différentes formulations du problème

	Problème (3.20)	Problème (4.20)	Problème (4.21)
B-spline	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.4, N_{\text{iter}} = 187,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.115, d_{\text{min}}^m = 4.0 \text{ mm}$	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.371, N_{\text{iter}} = 844,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.142, d_{\text{min}}^m = 3.5 \text{ mm}$	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.4, N_{\text{iter}} = 270,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.125, d_{\text{min}}^m = 2.7 \text{ mm}$
NURBS	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.4, N_{\text{iter}} = 162,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.107, d_{\text{min}}^m = 3.0 \text{ mm}$	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.322, N_{\text{iter}} = 650,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.163, d_{\text{min}}^m = 2.8 \text{ mm}$	 $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.4, N_{\text{iter}} = 472,$ $\frac{C}{C_{\text{ref}}} = 0.111, d_{\text{min}}^m = 2.9 \text{ mm}$

densité, i.e. $\rho(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \geq \rho_{\text{th}}$, comme détaillé au Chapitre 3. Pour chaque solution des problèmes (4.20) et (4.21), la condition sur le critère HHVM est toujours satisfaite et la solution se situe sur la frontière du domaine de faisabilité. Le graphique de la quantité δ_e , définie par l'Eq. (4.16), est illustré en Tab. 4.5 pour chaque topologie optimisée et pour chaque formulation du problème. Ce graphique est obtenu en ne sélectionnant seulement que les éléments satisfaisant la condition de seuil du champ de pseudo-densité, i.e. $\rho_e \geq \rho_{\text{th}}$ (qui correspondent seulement aux éléments dont les champs de contraintes prennent des valeurs significatives). Bien évidemment, les différentes remarques faites pour le cas d'étude BK2-2D peuvent être reprises pour ce cas d'étude.

TABLE 4.5 – BK3-3D : critère de HHVM adimensionné de Eq. (4.16) pour les topologies optimales pour les différentes formulations



4.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, le problème d'OT prenant en compte le champ des contraintes mécaniques, où la valeur maximum du critère de HHVM est intégrée en tant que contrainte explicite dans la formulation du problème, a été revisité dans le contexte de l'approche NURBS-based SIMP..

Certains aspects de la méthode proposée peuvent être mis en avant :

- La théorie des hypersurfaces NURBS apporte, au moins, trois avantages : (a) au contraire de la méthode SIMP classique, il n'y a pas besoin de définir de zone de filtrage, car le support local des entités NURBS établit une relation implicite entre les éléments du maillage qui sont adjacents ; (b) le nombre de variables d'optimisation nécessaire à définir une topologie optimale ainsi qu'une approximation finale correcte du champ des contraintes dans la géométrie optimisée est réduit ; (c) comme expliqué dans le Chapitre 3, la reconstruction de la frontière

de la topologie optimisée est plus directe et plus précise que les méthodes plus conventionnelles et donc la connaissance des contraintes mécaniques dans la géométrie reconstruite est plus précise. Une analyse de sensibilité, où l'influence des paramètres de définition de l'entité NURBS sur la topologie optimale a été mise en avant, a été menée. Certaines règles générales sur le choix de ces différents paramètres ont pu être définies : plus le nombre de PC est élevé (pour un degré donné) ou plus le degré des fonctions de forme est faible (pour un nombre de PC donné) plus la valeur de la fonction objectif sera faible, aussi bien pour les résultats B-spline, que pour les résultats NURBS. De plus, un excellent compromis entre les performances de calcul et la précision de la solution a pu être atteint en utilisant un nombre de PC égal à trois-quart du nombre d'éléments du maillage EF.

- Le rôle des poids des PC des NURBS a été évalué. En particulier, en considérant le même nombre de PC et les mêmes degrés, la valeur de la fonction objectif de la solution NURBS est plus faible que celle obtenue pour les calculs B-spline et les frontières des topologies finales sont plus lisses et précises que celles des cas B-spline.
- L'influence de la formulation du problème d'optimisation a été étudiée. En particulier, la formulation du problème a un effet important sur la topologie finale et une attention particulière doit être portée sur cet aspect car des performances très différentes ont pu être constatées sur les topologies optimales, aussi bien en termes de valeur de fonction objectif et de fonctions contraintes que sur le nombre d'itérations nécessaires avant convergence.
- La condition sur la dimension minimale des branches topologiques est correctement prise en compte, sans introduire de contrainte explicite supplémentaire, mais en paramétrant correctement les paramètres de définition de l'entité NURBS.

En ce qui concerne les perspectives, cette étude n'est pas exhaustive sur le sujet de l'OT intégrant des critères de tenue et d'autres aspects doivent être pris en considération. Premièrement, la méthodologie proposée peut être étendue au cas des matériaux et structures anisotropes où des critères de rupture adéquats doivent être utilisés (cet aspect constitue l'objet du prochain Chapitre). Ces critères, qui prennent en compte les aspects spécifiques en lien avec l'hétérogénéité et l'anisotropie des matériaux, sont disponibles sous différentes formes et doivent être proprement intégrés dans l'algorithme NURBS-based-SIMP, mais cette tâche est loin d'être triviale. Deuxièmement, le comportement non-linéaire du matériau doit être pris en compte lorsqu'il s'agit de réaliser une OT en intégrant un critère sur la tenue de la structure. Cette tâche n'est pas immédiate car l'introduction du comportement non-linéaire du matériau dans la formulation du problème d'optimisation conduit souvent à des difficultés de convergence des algorithmes d'optimisation, mais qui peuvent être contournées grâce à l'utilisation de stratégies de pénalisation adéquates et en utilisant des méthodes numériques cohérentes. Finalement, les exigences de fabrication de nature géométrique, liées au processus de fabrication additive, doivent être intégrées dans la formulation du problème, comme la contrainte sur l'angle de surplomb ou celle sur le rayon de courbure admissible, ce qui pourrait contribuer à accélérer la convergence de l'algorithme d'optimisation vers des minima locaux.

Chapitre 5

Les critères de tenue mécanique pour matériaux anisotropes dans la méthode NURBS-based-SIMP

5.1 Introduction

Les technologies et les procédés de fabrication additive ont beaucoup évolué au cours des dernières années et il est aujourd’hui possible d’imprimer des pièces en utilisant des matériaux composites. En effet, l’intérêt du développement des procédés d’impression 3D en matériaux composites est multiple. D’abord, cela permet d’obtenir des pièces mécaniques plus résistantes, plus rigides, plus solides et ayant un meilleur comportement à la chaleur que les thermoplastiques traditionnels, permettant ainsi d’élargir les possibilités apportées par la FA. De plus, les matériaux composites sont souvent constitués de deux matériaux mélangés et conservent les propriétés mécaniques des matériaux de base tout en acquérant de nouvelles caractéristiques. Cependant, pour que ce type de matériaux soit pleinement utilisé dans un cadre industriel, les problématiques propres à un bureau d’études, telles que la bonne résistance mécanique de la structure aux diverses sollicitations extérieures, doivent être prises en compte. Pour cela, la répartition des contraintes mécaniques au sein de la structure doit être contrôlée pour ne pas imposer à une zone de la géométrie une concentration de contraintes trop importante qui entraînerait la rupture de la structure. À l’image du critère HHVM dans le cas des matériaux isotropes, il existe certains critères phénoménologiques de rupture permettant de prédire si la répartition des contraintes au sein de la structure entraînera la rupture de celle-ci. Comme dans le cadre des matériaux isotropes, la répartition des contraintes doit être prise en compte pendant le processus d’OT via une formulation et une stratégie pertinentes..

L’étude bibliographique non exhaustive détaillée dans le chapitre 2, montre que la majorité des travaux réalisés sur les critères de tenue mécanique est réduite au critère HHVM applicable seulement aux matériaux isotropes (cette hypothèse peut être relaxée et le critère HHVM peut s’étendre aux matériaux caractérisés par une syngonie cubique). En effet, l’optimisation topologique sur des matériaux anisotropes est un sujet beaucoup moins étudié. Ainsi, la première fois que les critères de rupture pour matériaux anisotropes sont apparus dans un problème d’optimisation a été lorsque Groenwold et Haftka ont essayé de minimiser le critère de Tsai-Wu (TW) dans le but d’optimiser l’orientation des fibres dans des composites stratifiés [98]. Les auteurs ont montré qu’utiliser une fonction objectif calculée directement à partir du critère de TW dépendait fortement des propriétés matériaux et de la force appliquée. Pour pallier à ce problème, ils ont utilisé une formulation différente consistant à maximiser un facteur de sécurité proprement défini pour une plaque multi-

couche. Mirzendehtel *et al.* [99], proposent ensuite une optimisation ayant pour but de minimiser l'opposée du facteur de sécurité défini par Groenwold et Haftka, et soumise à une contrainte sur la compliance. Cette approche, permet de définir une borne inférieure sur la rigidité de la structure et donc d'éviter à l'algorithme de converger vers la solution triviale qui consiste à enlever la matière sur tout le domaine. Dans le cadre des méthodes d'optimisation multi-niveau de structures composites à rigidité variable (CRV), IJsselmuiden [167] a proposé une formulation conservative du critère de Tsai-Wu (TW) dans l'espace des paramètres de lamination. Catapano et Montemurro [168] ont proposé une formulation unifiée des critères phénoménologiques de rupture pour matériaux anisotropes, regroupant les critères de TW, Tsai-Hill (TH) et Hoffmann (entre autres), dans l'espace des paramètres polaires. Cette formulation a été ensuite appliquée à l'optimisation de la résistance des CRV dans [169]. En s'inspirant de l'approche proposée dans [98] et en utilisant la formulation unifiée des critères de rupture proposée dans [168], Izzi, Catapano et Montemurro [170] ont proposé une méthode efficace pour l'optimisation de la résistance des CRV dans l'espace des paramètres polaires en intégrant également des critères de nature technologique sur la faisabilité de ces matériaux (comme le critère technologique sur le rayon de courbure minimal des fibres). Les résultats obtenus dans [170] représentent la meilleure solution optimale disponible en littérature du problème de maximisation de la résistance des CRV en considérant les benchmarks proposés dans [98, 167].

L'étude proposée dans [99] est un des rares travaux s'intéressant à l'optimisation topologique des matériaux anisotropes. Dans cette étude le critère de Tsai-Wu est intégré dans la formulation du problème d'OT. Cependant, la formulation proposée reste très classique (une contrainte sur le *failure index* est imposée au cours de l'optimisation). De plus, ni la formulation ni la méthode utilisée dans [99] ne sont validées en prenant en compte les benchmarks classiques utilisés pour les matériaux isotropes et discutés dans le chapitre 4.

Dans ce chapitre, les critères phénoménologiques de TW, TH et Hoffmann sont intégrés dans la formulation du problème d'OT en utilisant la notion d'indice de rupture défini dans [98]. La contribution de l'étude présentée dans ce chapitre s'articule autour de trois points. Premièrement, la formulation unifiée des critères de rupture présentée dans [168], en utilisant l'approche basée sur le facteur de sécurité défini dans [98], est intégrée dans l'algorithme SANTO. Dans ce contexte, le gradient du facteur de sécurité est formellement dérivé (et calculé) en exploitant la propriété de support local des entités NURBS. Deuxièmement, une stratégie efficace pour définir, à chaque itération du processus d'optimisation, les paramètres régissant la fonction continue utilisée pour agréger l'indice de rupture, évalué pour chaque élément, dans une unique contrainte globale est proposée. Ces paramètres sont mis-à-jour dans le but d'éviter les problèmes de dépassement de mémoire mais également d'accélérer la convergence de l'algorithme vers une topologie optimisée faisable. Enfin, une analyse de sensibilité des topologies optimales est menée par rapport aux paramètres définissant l'entité NURBS ainsi que par rapport aux différentes caractéristiques matériaux (orientation de l'axe principal d'orthotropie) ou encore par rapport au chargement appliqué (direction et amplitude).

Remarque 5.1.1 *Le contenu de ce Chapitre a fait l'objet de l'article [171].*

5.2 Formulation d'une contrainte basée sur les critères de tenue mécanique pour matériaux anisotropes dans la méthode NURBS-based SIMP

Dans cette section, les principaux critères phénoménologiques de rupture sont reformulés dans le cadre de la méthode NURBS-based-SIMP. Trois critères seront détaillés : le critère de Tsai-Hill (TH), le critère de Hoffman et le critère de Tsai-Wu (TW). L'utilisation de l'un ou l'autre de ces critères, dépend du comportement du matériau utilisé. Par exemple, le critère TH suppose que le comportement du matériau soit équivalent en traction et en compression.

À l'image du critère de HHVM, les critères de rupture peuvent s'écrire sous une forme matricielle compacte, telle que détaillée dans l'Eq. (4.14), en ajoutant un terme linéaire, de sorte que :

$$g_e^f := \boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_e + \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}_e - s_{th}, \quad e = 1, \dots, N_e, \quad (5.1)$$

où $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ et $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$ sont respectivement une matrice et un vecteur permettant de définir le critère de rupture et $s_{th} \leq 1$ est un coefficient de sécurité. Le détail des composantes des arrays \mathbf{M} et \mathbf{m} est donné en Annexe B.

Dans le cadre des matériaux anisotropes, il n'est pas conseillé d'intégrer le critère de rupture dans la formulation du problème d'OT en considérant une fonction explicite qui comparerait la valeur du critère pour chaque élément avec la borne supérieure, telle que définie dans le chapitre précédent. En effet, [99] a montré que les critères phénoménologiques de rupture sont fortement influencés par les conditions de chargement appliquées à la structure. Ainsi, une approche qui ne considérerait pas les conditions de chargement dans sa formulation, ne permettrait pas de contrôler efficacement la répartition des contraintes mécaniques à l'intérieur d'une structure anisotrope et amènerait l'algorithme à converger vers des minima locaux (parfois non faisables). C'est pourquoi, les auteurs ont proposés une approche différente se basant sur le "facteur de sécurité" du matériau, défini dans [98]. Ce facteur correspond au multiplicateur maximum pouvant être appliqué aux chargements actuels tout en continuant de respecter le critère de rupture utilisé dans l'étude. Dans le cadre des travaux de [99], ce facteur a été utilisé pour l'optimisation structurale de composites stratifiés mais n'a pas encore été testé dans un cadre d'OT générale. Les travaux détaillés dans ce chapitre présentent l'utilisation de ce facteur de sécurité dans la méthode NURBS-based-SIMP, dans le but de réaliser l'OT d'une de structure composée d'un matériau orthotrope. En particulier, l'influence de l'orientation de l'axe principal d'orthotropie du matériau ainsi que celle relative au choix du critère phénoménologique sur la topologie optimale seront étudiés.

Considérons dans un premier temps, le système à l'équilibre suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{u} &= \mathbf{f}, \\ \mathbf{f} &= \lambda \mathbf{f}_0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

avec \mathbf{u} et \mathbf{f} les vecteurs des déplacements structuraux et des efforts appliqués, respectivement, \mathbf{K} la matrice de rigidité globale de la structure, \mathbf{f}_0 le chargement de référence appliqué à la structure et λ le *facteur de sécurité* défini dans [98]. Dans le cas $\lambda = 1$, on obtient :

$$\mathbf{K} \mathbf{u}_0 = \mathbf{f}_0, \quad (5.3)$$

avec \mathbf{u}_0 le vecteur des déplacements de la solution lorsque le facteur de sécurité prend la valeur unitaire. Pour chaque élément générique e du modèle EF, le vecteur des déformations $\boldsymbol{\varepsilon}_e$ s'écrit :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{B}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{L}}_e \mathbf{u} = \lambda \mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{L}}_e \mathbf{u}_0, \quad (5.4)$$

avec \mathbf{u}_e les déplacements de l'élément générique e , \mathbf{B}_e et $\widehat{\mathbf{L}}_e$ sont définis dans l'Eq. (4.2) et l'Eq. (6.20), respectivement.

En considérant la relaxation- qp [160], le vecteur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}_e$ de l'élément e , s'écrit :

$$\boldsymbol{\sigma}_e = \rho_e^\beta \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}_e = \lambda \rho_e^\beta \mathbf{C} \mathbf{B}_e \widehat{\mathbf{L}}_e \mathbf{u}_0, \quad (5.5)$$

où ρ_e est le champ de densité fictive de l'Eq. (3.17) évalué au centroïde de l'élément e . β , le coefficient de pénalisation de la contrainte, est donné par la relaxation- qp tel que $\beta = p - q$ avec p le facteur de pénalisation de la méthode SIMP et q le coefficient de relaxation de la contrainte. Dans l'Eq. (5.5), \mathbf{C} est la matrice d'élasticité du matériau.

Le critère de rupture s'écrit pour chaque élément de manière compacte en utilisant la formulation définie dans l'Eq. (5.1). La rupture intervient lorsque $g_e^f := 0$; l'Eq. (5.1) devient alors :

$$Q_e \lambda_e^2 + J_e \lambda_e - s_{\text{th}} = 0, \text{ avec : } \begin{cases} Q_e = \boldsymbol{\sigma}_{0e}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\sigma}_{0e}, \\ J_e = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma}_{0e}, \end{cases} \quad (5.6)$$

où $\boldsymbol{\sigma}_{0e}$ est le vecteur des contraintes de l'élément e lorsque $\lambda = 1$.

L'Eq. (5.6) est un polynôme du second degré, d'inconnu λ dont les racines sont :

$$\lambda_{e,1,2} = \frac{-J_e \pm \sqrt{J_e^2 + 4Q_e}}{2Q_e}. \quad (5.7)$$

Il est évident que la solution négative n'a aucun sens physique, ainsi uniquement la solution positive est retenue, soit :

$$\lambda_e = \frac{\lambda_{eN}}{\lambda_{eD}}, \text{ avec : } \begin{cases} \lambda_{eN} = -J_e + \sqrt{J_e^2 + 4Q_e}, \\ \lambda_{eD} = 2Q_e. \end{cases} \quad (5.8)$$

Le principe de cette méthode est de maximiser la valeur du facteur de chargement λ_e , pour chaque élément, tout en restant dans le domaine faisable (i.e. l'Eq. (5.1) est toujours vérifiée). Afin de pouvoir appliquer les critères d'agrégation basés sur la χ -norm ou sur la fonction KS, il est plus avantageux d'introduire la notion d'indice de rupture, défini tel que :

$$h_{Fe} := \lambda_e^{-1}. \quad (5.9)$$

Pour éviter d'avoir un nombre de réponses physiques égal au nombre d'éléments du modèle EF, uniquement l'élément dont la valeur de l'indice de rupture est maximum sera considéré pour le calcul de la contrainte d'optimisation, soit :

$$h_{F_{\max}} := \max_e \lambda_e^{-1}. \quad (5.10)$$

L'opérateur *maximum* utilisé dans l'Eq. (5.10) n'est pas différentiable et ne peut donc pas être utilisé sous cette forme dans l'optimisation. Il doit donc être approximé par une fonction d'agrégation, i.e. la fonction χ -norm :

$$h_{F\chi} := \sum_{e=1}^{N_e} (\lambda_e^{-\chi})^{\frac{1}{\chi}}. \quad (5.11)$$

L'expression précédente peut être intégrée dans la formulation du problème d'OT soit en tant que fonction objectif soit en tant que fonction contrainte. Dans ce dernier cas, la contrainte d'optimisation s'écrit alors :

$$g := h_{F\chi} - 1. \quad (5.12)$$

Dans l'Eq. (5.11), le paramètre χ est l'exposant de la fonction d'agrégation : plus il est élevé, plus l'approximation est précise. La fonction d'agrégation χ -norm est toujours supérieure à la valeur réelle du maximum, ainsi, si l'Eq. (5.11) est respectée au cours de l'optimisation, l'Eq. (5.10) est respectée également.

Dans ce chapitre, les deux formulations de PPnLC suivantes sont considérées :

$$\min_{\xi_1, \xi_2} \frac{V}{V_{\text{ref}}}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \\ g \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}], \quad \xi_{2k} \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{\text{CP}}, \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\min_{\xi_1, \xi_2} h_{F\chi}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}, \\ \frac{V}{V_{\text{ref}}} - \gamma \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}], \quad \xi_{2k} \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{\text{CP}}. \end{cases} \quad (5.14)$$

où ξ_{1k} et ξ_{2k} sont respectivement les densités aux PC et les poids de l'entité NURBS et γ est la fraction volumique imposée lorsque le PPnLC (4.21) est considéré.

Dans le but de résoudre les problèmes (5.13) et (5.14) au moyen d'un algorithme au gradient, les dérivées des réponses physiques par rapport aux variables d'optimisation doivent être calculées. Le gradient du volume est calculé directement via l'Eq. (3.25). À l'inverse, le gradient de la fonction sur l'indice de rupture nécessite une attention particulière. Le calcul complet du gradient de cette fonction n'est pas détaillé dans ce chapitre par soucis de compacité, mais son résultat final est donné par l'Eq. (5.15). La démonstration complète de l'Eq. (5.15) est détaillée dans l'Annexe C.

$$\begin{cases} \frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{i\tau}} = -h_{F\chi}^{1-\chi} \sum_{e \in S_\tau} \lambda_e^{-\chi} \eta_{e1} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{f}_{i\tau}, \\ \mathbf{K}\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\eta}_0, \\ i = 1, 2, \quad \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}}, \end{cases} \quad (5.15)$$

où $\mathbf{f}_{i\tau}$ et $\boldsymbol{\eta}_0$ sont définis tels que :

$$\mathbf{f}_{i\tau} := \sum_{e \in S_\tau} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\alpha}{\rho_e} \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_{e0}, \quad (5.16)$$

$$\boldsymbol{\eta}_0 := -h_{F\chi}^{1-\chi} \sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \boldsymbol{\eta}_{e0}, \quad (5.17)$$

et η_{e1} et $\boldsymbol{\eta}_{e0}$ sont égaux à :

$$\eta_{e1} := -\frac{J_e}{\lambda_{eN} + J_e} + \frac{4Q_e}{\lambda_{eN}} \left(\frac{s_{\text{th}}}{\lambda_{eN} + J_e} - \lambda_e \right), \quad (5.18)$$

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T := \rho_e^\beta \left[-\frac{1}{\lambda_{eN} + J_e} \mathbf{m}^T + \frac{4}{\lambda_{eN}} \left(\frac{s_{\text{th}}}{\lambda_{eN} + J_e} - \lambda_e \right) \boldsymbol{\sigma}_{e0}^T \mathbf{M} \right] \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e, \quad (5.19)$$

$$\boldsymbol{\eta}_{e0} = \mathfrak{R}(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}, \mathcal{I}_{\text{BC}}). \quad (5.20)$$

5.2.1 Stratégie de mise à jour du paramètre χ

Comme expliqué au chapitre 4, l'utilisation de la fonction d'agrégation χ -norm conduit à avoir une approximation par excès de la valeur réelle du maximum. En pratique, plus la valeur de l'exposant χ est élevée plus l'approximation donnée par la fonction χ -norm approche la valeur réelle du maximum. Comme expliqué dans [170], il est possible de calculer la valeur du paramètre χ_ϵ donnant une erreur relative inférieure ou égale à ϵ par rapport à la valeur actuelle du maximum :

$$\chi_\epsilon = \left\lceil \frac{\log N_e}{\log(\epsilon + 1)} \right\rceil, \quad (5.21)$$

où $\lceil \cdot \rceil$ représente la partie entière par excès et N_e est le nombre d'éléments constituant le modèle EF. Il est immédiat de constater que l'Eq. (5.22) donne des valeurs de χ_ϵ très élevées. Considérons le cas d'une erreur relative égale à 1% et un modèle EF composé de 1500 éléments : la valeur correspondant du paramètre χ est $\chi_\epsilon=735$. Cependant, utiliser une valeur très élevée de l'exposant χ dès le début du processus d'optimisation peut amener à des difficultés numériques. D'une part, il faut prendre en compte les problèmes de convergence de l'algorithme déterministe en présence d'une valeur du paramètre χ très élevée (qui se traduisent en une difficulté à accéder à la région faisable lorsque χ prend une valeur très élevée). D'autre part, puisque la solution initiale est, souvent, non faisable pendant les premières itérations, la valeur de l'indice de rupture h_{F_χ} est largement supérieure à l'unité, ce qui conduit à des problèmes d'*overflow*.

Pour pallier à ces problèmes, la stratégie suivante est mise en place. Tout d'abord, dans le but d'éviter les problèmes d'*overflow*, la fonction h_{F_χ} et son gradient ont été normalisés comme suit :

$$h_{F_\chi} = \frac{1}{\lambda_{\min}} \left[\sum_{e=1}^{N_e} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_e} \right) \right]^{\frac{1}{\chi}}, \quad (5.22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_{F_\chi}}{\partial \xi_{i\tau}} = -(\lambda_{\min} h_{F_\chi})^{1-\chi} \sum_{e \in \mathcal{S}_\tau} \frac{1}{\lambda_e} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_e} \right)^{\chi-1} \frac{\beta}{\rho_e} \eta_{e1} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{f}_{i\tau}, \\ \mathbf{K} \boldsymbol{\mu} = -\hat{\boldsymbol{\eta}}_0, \\ i = 1, 2, \quad \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}}, \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}_0 = -(\lambda_{\min} h_{F_\chi})^{1-\chi} \sum_{e=1}^{N_e} \frac{1}{\lambda_e} \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_e} \right)^{\chi-1} \boldsymbol{\eta}_{e0}, \end{array} \right. \quad (5.23)$$

où λ_{\min} est la valeur minimale de λ_e à l'itération courante, c'est à dire :

$$\lambda_{\min} = \min_e \lambda_e. \quad (5.24)$$

Il est évident que, à chaque itération, le rapport $\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_e} < 1$ et, par conséquent, les équations précédentes permettent d'éviter les problèmes d'*overflow*, même en présence d'une valeur de χ très élevée.

D'autre part, afin de faciliter la convergence vers une solution faisable, le paramètre χ est calculé à l'aide de l'Eq. (5.22), dans laquelle l'erreur relative ϵ est mis à jour selon la stratégie suivante :

$$\epsilon(t) = \begin{cases} \epsilon_0 - \left\lfloor \frac{t}{N_{\text{it}}} \right\rfloor \Delta\epsilon, & \text{si } \epsilon(t) > \bar{\epsilon}, \\ \bar{\epsilon}, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (5.25)$$

Dans la formule précédente, t est l'itération courante, ϵ_0 est la valeur de l'erreur relative à l'itération initiale, $\bar{\epsilon}$ est la valeur souhaitée de l'erreur relative et N_{it} représente le nombre d'itérations au bout duquel le paramètre ϵ est diminué de la quantité $\left\lfloor \frac{t}{N_{\text{it}}} \right\rfloor \Delta\epsilon$, $\lfloor \cdot \rfloor$ étant la fonction partie entière. Il est évident que les valeurs des paramètres intervenant dans l'Eq. (5.25), i.e., ϵ_0 , N_{it} et $\Delta\epsilon$, dépendent du problème considéré. L'idée à la base de l'Eq. (5.25) est simple. On démarre le processus d'optimisation avec une valeur importante de l'erreur relative ϵ_0 (qui correspond à une valeur faible de χ) afin de permettre à l'algorithme déterministe d'accéder facilement à la région faisable. Ensuite on diminue la valeur de $\epsilon(t)$ au fil des itérations jusqu'à atteindre la précision souhaitée $\bar{\epsilon}$ pour ainsi réduire l'écart entre la fonction χ -norm et l'opérateur maximum.

5.3 Résultats numériques

Dans cette section, l'influence de la fonction contrainte basée sur l'indice de rupture pour les matériaux anisotropes sera étudiée à l'aide de cas d'études 2D et 3D couramment utilisés dans la littérature lors de l'analyse de problèmes d'optimisation étudiant la répartition des contraintes dans la structure. Les résultats montrés dans cette section ont été obtenus à l'aide de l'algorithme SANTO dans lequel la contrainte sur l'indice de rupture a été implémentée. SANTO utilise la méthode GC-MMA pour déterminer les solutions du PPNLC et mettre à jour les variables d'optimisation. L'ensemble des analyses mécaniques, telles que la détermination de la répartition des contraintes au sein de la structure, sont effectuées par le logiciel ANSYS[®]. Les paramètres définissant le comportement de l'algorithme GC-MMA sont détaillés dans le Tableau 4.1. Les opérations de post-traitement sont effectuées directement dans l'algorithme SANTO dans le cas des résultats 2D et à l'aide du logiciel ParaView[®] pour les résultats 3D.

Pour tester l'efficacité de la méthode, plusieurs aspects seront étudiés :

1. Les paramètres de définition des entités NURBS, i.e. le nombre de PC ainsi que le degré des fonctions de base (pour les cas 2D uniquement). En particulier, trois différents nombres de PC (équivalant à 1/4, 1/2 et 3/4 du nombre d'éléments présent dans le modèle EF) ainsi que deux valeurs des degrés des fonctions de base seront pris en compte.
2. Le type d'entité géométrique considéré pour décrire le champ de pseudo-densité, i.e. entre une formulation B-spline et une formulation NURBS.
3. La direction d'orthotropie du matériau, i.e. le sens d'orientation des fibres au sein de la structure. Les différentes orientations de fibres considérées sont $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 45^\circ$, θ étant l'angle autour de l'axe x_3 défini à partir de l'axe x_1 et pouvant prendre toute valeur dans l'intervalle $]-90^\circ, 90^\circ]$.
4. Le type de chargement utilisé. En particulier, deux aspects seront traités : la direction d'application de la force et son intensité. Les cas de chargements étudiés sont définis dans le Tableau. 5.3.
5. Le type de critère utilisé, i.e. les différences entre une formulation se basant sur le critère de TH, le critère de Hoffman et le critère de TW. Plus précisément, l'ensemble des résultats 2D

présentés dans la section 5.3.1 seront obtenus en considérant le critère de rupture de Hoffman tandis que les résultats 3D, détaillés section 5.3.2, présenteront une comparaison des résultats obtenus en considérant les critères de Hoffman, TH et TW.

Les bornes inférieure et supérieure des variables d'optimisation sont fixées à : $\rho_{\min} = 10^{-3}$ et $\rho_{\max} = 1$ pour la valeur de la densité aux PC et $\omega_{\min} = 0.5$ et $\omega_{\max} = 10$ pour les poids des PC. De plus, les composantes des vecteurs de nœuds définis dans l'Eq. (3.7) ont été réparties uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ pour chaque cas d'étude. Le matériau utilisé pour cette étude est un pli à renfort unidirectionnel (fibres de carbone) caractérisé par un comportement orthotrope, dont les propriétés élastiques sont détaillées dans le Tableau 5.1.

TABLE 5.1 – propriétés mécaniques du matériaux composite

Paramètres	matériau 1
E_1 (MPa)	132380
$E_2 = E_3$ (MPa)	10760
G_{23} (MPa)	3380
$G_{12} = G_{13}$ (MPa)	5650
ν_{23}	0,49
$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,24

Les valeurs des contraintes limites intervenantes dans les critères de rupture, dont l'écriture formelle est donnée en Annexe B, sont listées dans le Tableau 5.2 pour les cas où le matériau considéré à un comportement différent en traction et en compression, i.e. pour les critères de Hoffman et de TW.

TABLE 5.2 – propriétés de résistance du matériau

Paramètres	matériau 1
<i>Résistance longitudinale en traction</i> X_t (MPa)	2280
<i>Résistance longitudinale en compression</i> X_c (MPa)	1440
<i>Résistance transversale en traction</i> $Y_t = Z_t$ (MPa)	570
<i>Résistance transversale en compression</i> $Y_c = Z_c$ (MPa)	228
<i>Contrainte limite de cisaillement</i> S_{23} (MPa)	27
<i>Contrainte limite de cisaillement</i> $S_{12} = S_{13}$ (MPa)	71

Dans le cas du critère de TH, qui ne fait pas de différence entre les comportements en traction et en compression, les contraintes limites ont été calculées comme suit : $M = \frac{M_t + M_c}{2}$, $M = X, Y, Z$.

Dans ce chapitre, un cas d'étude 2D et un cas d'étude 3D seront étudiés.

5.3.1 Cas d'étude 2D

Le cas d'étude 2D, appelé BKF-2D, est le problème du domaine 2D en L. Ce cas d'étude, déjà considéré dans le chapitre 4, est le cas le plus pertinent quand il s'agit d'étudier une contrainte d'OT définie à l'aide des contraintes mécaniques dans la structure. La géométrie du domaine 2D en L est rappelée dans la Fig. 5.1.

Dans la Fig. 5.1, la plaque est de dimension d'enveloppe $L \times L$, avec $L = 200 \text{ mm}$. Son épaisseur est de 5 mm . La plaque est encadrée sur toute son extrémité en $x_2 = L$. La structure est soumise à une force P appliquée au nœud de coordonnées $x_1 = L$, $x_2 = 0.4L$, de composantes P_1 et $-P_2$,

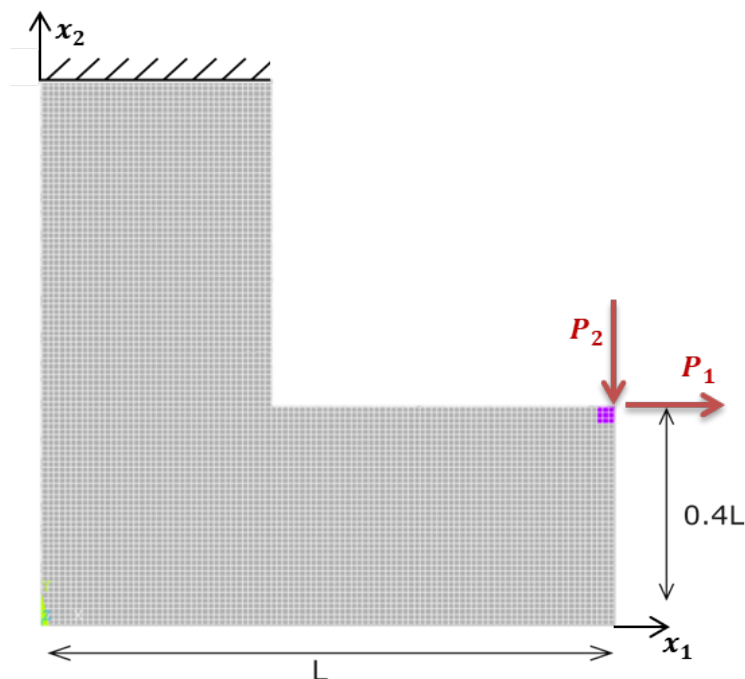


FIGURE 5.1 – Cas d'étude 2D (BKF-2D) : domaine 2D en L

suivant les directions x_1 et x_2 , respectivement. Comme dans le chapitre précédent, une zone de 3×3 éléments autour du point d'application de la force est exclue du domaine d'optimisation. Le but étant d'éliminer du calcul d'optimisation les contraintes mécaniques locales très élevées engendrées dans le voisinage du point d'application de la force concentrée (problème de singularité) et qui créent des problèmes de convergence lors du processus d'OT. Dans cette zone, la matière est gardée tout au long de l'optimisation (i.e. la pseudo-densité aux PC influant sur cette région sont gardés constants de valeur 1). Différents cas de chargement seront pris en compte dans cette étude et sont détaillés dans le Tableau 5.3.

TABLE 5.3 – conditions de chargement étudiées

Paramètres	chargement 1	chargement 2	chargement 3	chargement 4
P_1 (N)	0	0	0	700
P_2 (N)	1000	1500	2000	700

La géométrie est maillée à l'aide de $N_e = 6400$ éléments PLANE182 (élément plan sous l'hypothèse de contraintes planes, composés de 4 nœuds, chacun ayant 2 degrés de liberté). Pour les différents cas d'étude 2D présentés dans la suite, la solution initiale est constituée par un champ de pseudo-densité uniforme égal à l'unité lorsque le problème (5.13) est abordé, tandis que le champ de pseudo-densité est initialisé à une valeur uniforme égale à γ lorsque la formulation (5.14) est considérée.

Influence du type d'entité et des paramètres entiers sur la topologie optimale

Une campagne de tests a été lancée pour étudier la sensibilité de la topologie finale au type d'entité (B-spline ou NURBS) et aux paramètres entiers régissant la forme de cette entité. En

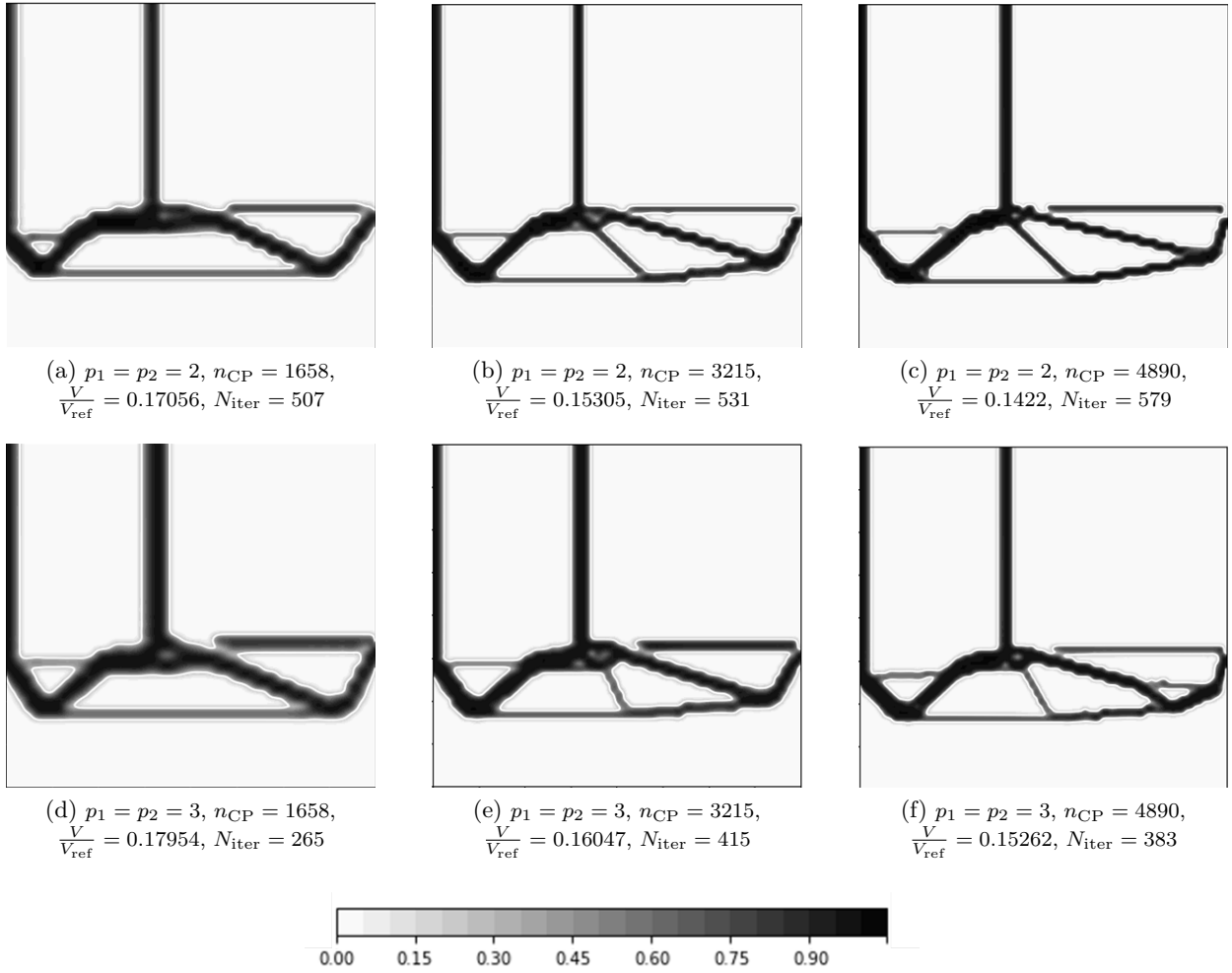


FIGURE 5.2 – Résultats B-Spline : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (5.13)

particulier, dans cette section, l'Eq. (5.13) est résolue, pour les entités B-spline et NURBS, en considérant différentes combinaisons de degrés des polynômes de Bernstein, $p_j = 2, 3$, et de nombre de PC, $n_{CP} = 1658, 3215, 4890$. Pour cette première campagne de calculs, seul le critère de Hoffman est considéré dans la formulation de l'indice de rupture de l'Eq. (5.13) et l'axe majeur d'orthotropie du matériau (i.e. la direction du renfort) est aligné avec l'axe x_1 ($\theta = 0^\circ$). La situation de chargement considérée dans ces analyses correspond au cas 1, c'est à dire $P_1 = 0 N$ et $P_2 = -1000 N$.

Il est évident que vu la géométrie particulière du domaine 2D en L, la fonction contrainte basée sur l'indice de rupture n'est pas respectée à l'itération initiale, ainsi, la stratégie de mise à jour du paramètre ϵ (défini dans l'Eq. (5.25)) au cours de l'optimisation est particulièrement importante. Après plusieurs essais, les valeurs suivantes ont été choisies : $\epsilon_0 = 0.2$, $\bar{\epsilon} = 0.05$, $N_{it} = 200$ et $\Delta\epsilon = 0.05$.

Les solutions optimisées du problème (5.13) sont détaillées dans les Figs. 5.2 et 5.3 pour les solutions B-spline et NURBS, respectivement. Les résultats sont donnés en termes de valeurs de

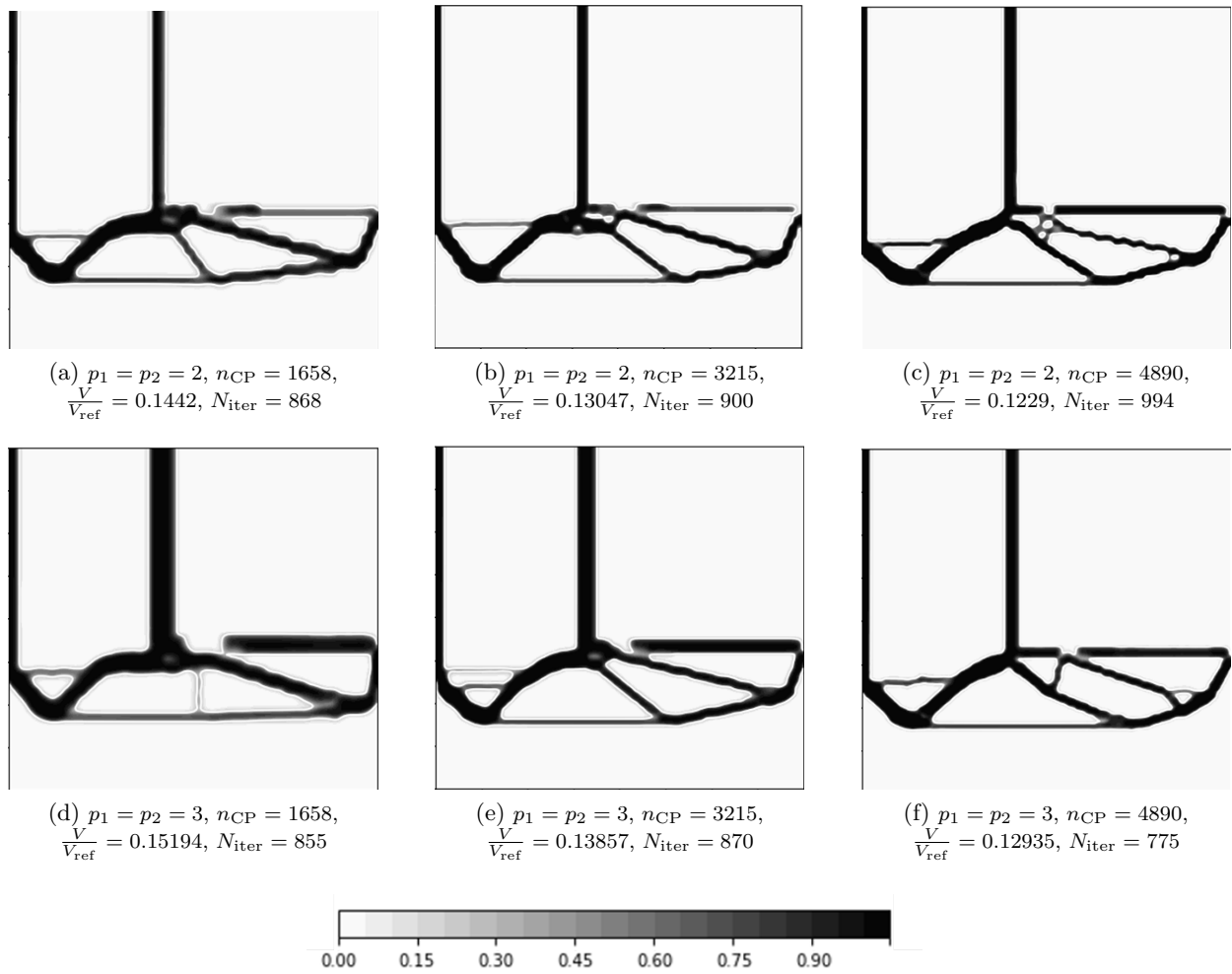


FIGURE 5.3 – Résultats NURBS : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (5.13)

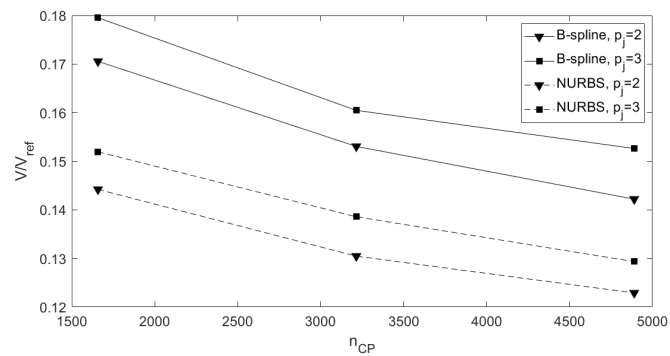


FIGURE 5.4 – Fraction volumique vs. nombre de PC et degrés pour les solutions B-spline et NURBS du problème (5.13)

fraction volumique finale $\frac{V}{V_{\text{ref}}}$, avec $V_{\text{ref}} = tL^2(1 - 0,6^2)$ le volume de référence et N_{iter} le nombre d'itérations pour atteindre la convergence selon un des critères d'arrêt de l'algorithme GC-MMA listés dans le tableau 4.1. Une synthèse comparant l'ensemble des résultats de cette analyse de sensibilité sur le nombre de PC et sur le degré des fonctions de forme est donnée dans la Fig. 5.4. Les graphiques représentant la valeur de l'indice de rupture, pour chaque élément, au sein de la structure en sortie d'optimisation sont donnés dans les Figs. 5.5 et 5.6 pour les cas B-spline et NURBS, respectivement.

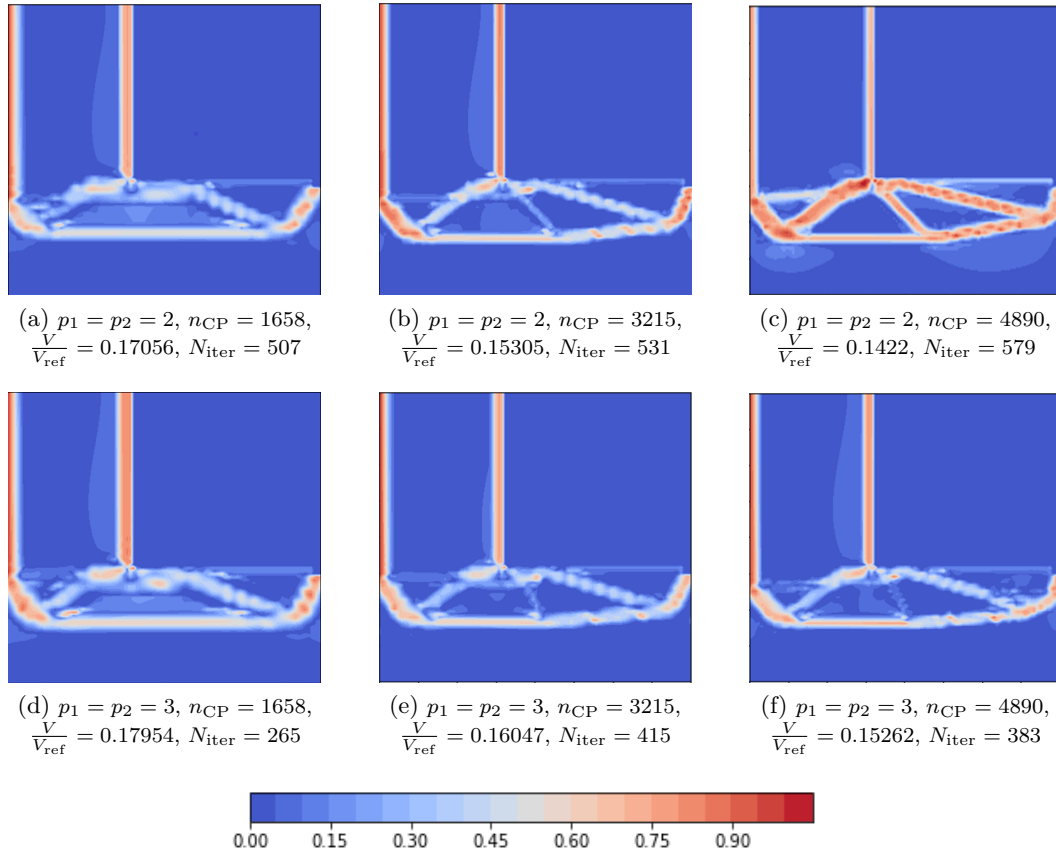


FIGURE 5.5 – Résultats B-spline : distribution de l'indice de rupture au sein de la structure pour le problème (5.13)

À partir des résultats montrés dans l'analyse de sensibilité, plusieurs constatations peuvent être faites :

1. Plus le nombre de PC est élevé et plus le degré des fonctions de forme est petit, meilleur sera le résultat en termes de fonction objectif. Cette constatation est en accord avec ce qui a été montré dans le chapitre précédent. En effet, la taille réduite du support local qu'il est possible d'obtenir en augmentant le nombre de PC et en réduisant le degré des polynômes de Bernstein permet d'obtenir des solutions ayant plus de détails en termes de branches topologiques et permet, par conséquent, de mieux distribuer les contraintes au sein de la structure.
2. Les Figs. 5.2 et 5.3 montrent également l'impact de la taille du support local sur le diamètre

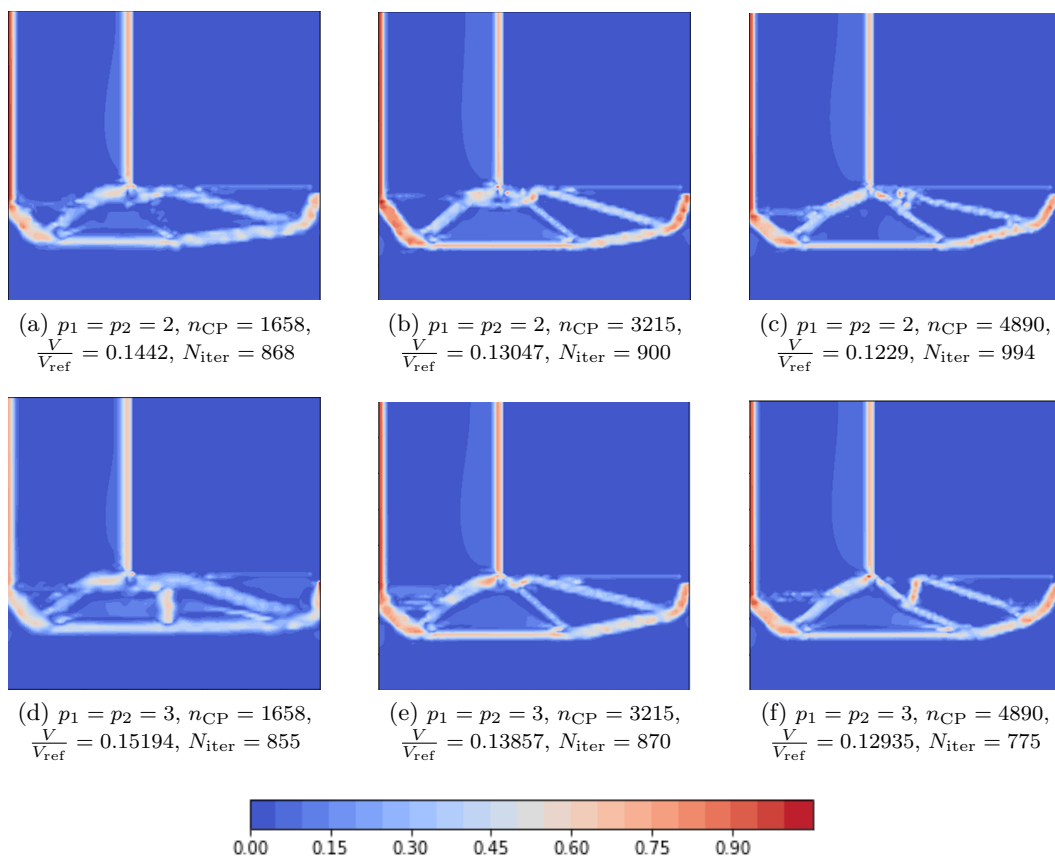


FIGURE 5.6 – Résultats NURBS : distribution de l'indice de rupture au sein de la structure pour le problème (5.13)

des branches topologiques. En effet, plus le degré est élevé et plus le nombre de PC est faible, plus grandes seront les branches topologiques sur la structure finale.

3. La Fig. 5.4 montre que les résultats NURBS donnent de meilleures performances en termes de fonction objectif que les résultats B-spline. Cependant, les calculs ont besoin de plus d'itérations pour atteindre la convergence que les résultats B-spline.
4. Les topologies optimisées ont des géométries particulières. En effet, pour l'ensemble des calculs, les branches topologiques se concentrent dans une zone proche de l'angle droit du domaine 2D en L et s'orientent majoritairement dans des directions suivant la direction d'orthotropie principale du matériau (i.e. l'axe x_1). Seules deux branches fines relient cette partie de la géométrie jusqu'à la partie encastrée en $x_2 = L$.
5. Comme illustré dans les Figs. 5.5 et 5.6, la contrainte sur l'indice de rupture est respectée pour l'ensemble des topologies optimisées et se situe exactement à la frontière du domaine de faisabilité, i.e. l'indice de rupture prend une valeur presque uniforme et égale à l'unité dans les éléments pour lesquels la densité a convergé à 1, à l'exception des éléments appartenant aux branches diagonales (qui semblent être sous-sollicitées).

Influence de l'orientation du matériau sur les topologies optimales

Dans la suite, le problème (5.13) a été résolu en considérant le critère d'Hoffman et deux orientations différentes, i.e. $\theta = 90^\circ, 45^\circ$. La situation de chargement correspond au cas 1 listé dans le Tableau 5.3.

La Fig. 5.7 montre les topologies finales, dans les cas B-spline et NURBS, en considérant des directions d'orthotropie principales orientées à $\theta = 90^\circ$ et $\theta = 45^\circ$. Ces calculs ont été réalisés en considérant des degrés de fonction de base tels que $p_j = 2, j = 1, 2$ et pour un nombre de PC tel que $n_{PC} = 4890$. Les graphiques montrant les valeurs de l'indice de rupture au sein des topologies optimisées sont donnés également dans la Fig. 5.7.

À partir de la Fig. 5.7, les remarques suivantes peuvent être faites :

1. Les topologies optimisées utilisant des entités NURBS donnent des résultats dont les fractions volumiques finales sont plus faibles que pour les résultats B-spline. En particulier, les résultats NURBS font apparaître plus de petites branches topologiques au sein de la topologie optimale de manière à rigidifier la structure et ainsi obtenir de meilleures performances.
2. Les figures montrent des topologies fortement différentes suivant la direction d'orthotropie principale considérée au sein du matériau. En effet, les topologies optimales ont tendance à augmenter le nombre de branches topologiques s'orientant dans le sens de l'axe d'orthotropie principal de manière à résister le plus efficacement possible au chargement appliqué.
3. Dans les cas B-spline, la valeur de la fraction volumique finale est de 0.1422 lorsque $\theta = 0^\circ$, 0.149 lorsque $\theta = 45^\circ$ et 0.158 lorsque $\theta = 90^\circ$. Pour le cas NURBS, ces valeurs sont respectivement de 0.123, 0.138 et 0.149 pour les orientations $0^\circ, 45^\circ$ et 90° , respectivement. Ces valeurs montrent que les meilleures performances sont obtenues lorsque l'axe principal d'orthotropie est confondu avec l'axe x_1 . Cela correspond au cas de chargement où la direction d'orthotropie principale est perpendiculaire à la direction du chargement appliqué.
4. La Fig. 5.7 montre également la valeur de l'indice de rupture au sein de la structure à la fin du calcul d'OT. Celui-ci est respecté pour l'ensemble des calculs et se situe à la frontière du domaine de faisabilité. Il est à noter que pour l'ensemble de ces calculs, l'indice de rupture est très faible dans l'ensemble de la structure, seules quelques branches de la topologie sont soumises à un indice presque unitaire. Ces branches ne correspondent pas à celles qui sont orientées dans la direction d'orthotropie du matériau.

Influence du cas de chargement sur la solution optimale

La troisième campagne d'analyses réalisées sur le problème (5.13) vise à étudier l'influence du chargement appliqué sur la topologie finale. En particulier, deux aspects sont analysés dans ce chapitre : l'intensité du chargement et son orientation. Tous les calculs ont été réalisés en considérant le critère d'Hoffman et des entités B-spline et NURBS caractérisés par un nombre de PC $n_{PC} = 4890$ et degrés des polynômes de Bernstein $p_j = 2$ ($j = 1, 2$). Ainsi, la Fig. 5.8 montre les topologies optimales lors de la résolution du problème défini à l'Eq. (5.13), pour les chargements 2 et 3 du Tableau 5.3 (en considérant une orientation $\theta = 0^\circ$), tandis que la Fig. 5.9 montre les topologies optimisées en considérant le chargement 4 et trois orientations différentes, i.e. $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$.

Pour l'ensemble de ces calculs, la contrainte d'optimisation est respectée et se situe sur à la limite du domaine de faisabilité. À la suite de ces résultats, plusieurs remarques peuvent être faites :

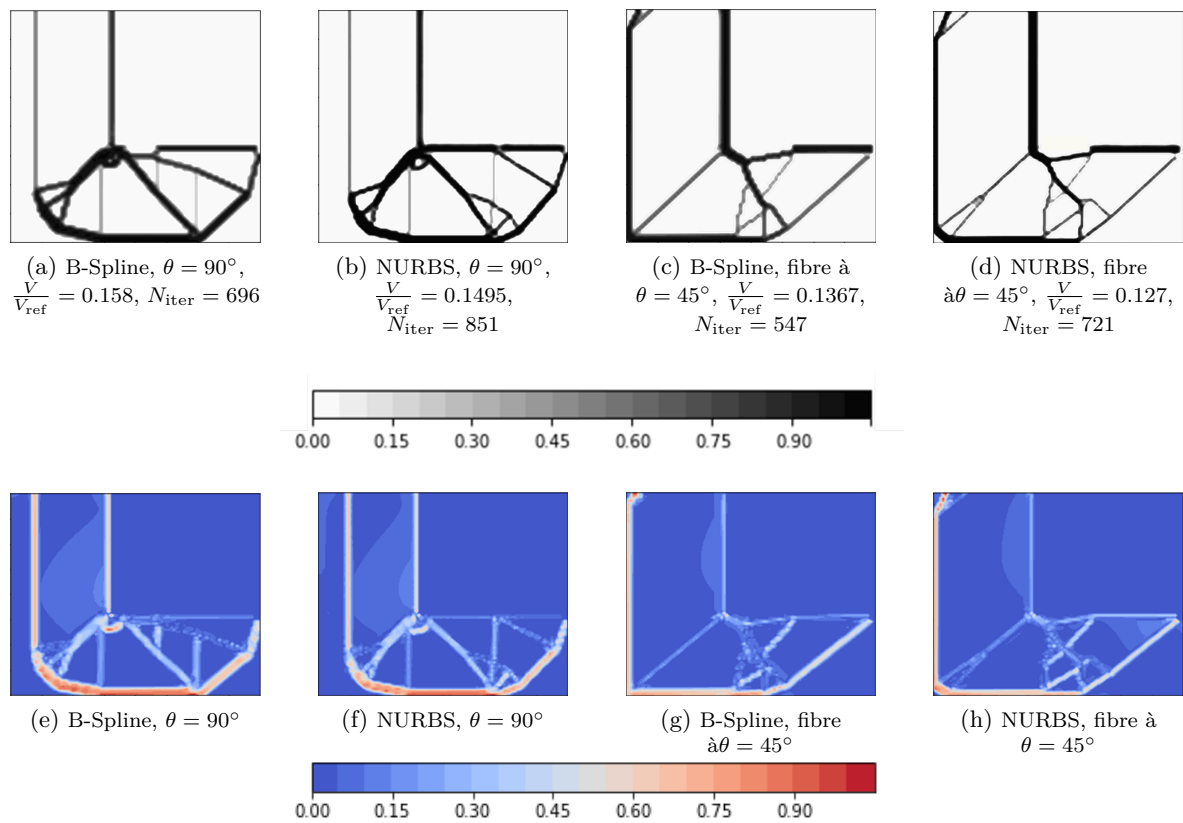


FIGURE 5.7 – Résultats B-Spline et NURBS : sensibilité de la topologie optimale à la direction d'orthotropie pour le problème (5.13)

1. À conditions de chargement et de matériau équivalentes, les résultats utilisant la formulation NURBS ont donné de meilleurs résultats que ceux utilisant la formulation B-spline.
2. La Fig. 5.9, montre que la direction principale d'orthotropie du matériau a une forte influence sur la topologie finale. En effet, on peut s'apercevoir que sur l'ensemble des calculs, les branches topologiques s'orientent dans la direction d'orthotropie principale du matériau utilisé. Ainsi, sur les images (a) et (d) de la Fig. 5.9, les fines branches topologiques qui apportent de la rigidité à la structure sont pour la plupart orientées à 0° , pour les résultats (b) et (e), elles sont orientées à 90° , tandis qu'elles sont orientées à 45° pour les résultats (c) et (f). Le but de cette répartition est d'aligner la matière avec la direction principale d'orthotropie dans le but de résister le plus efficacement possible aux conditions de chargement.
3. Pour le cas de chargement 4, les meilleures performances en termes de fonction objectif sont obtenues lorsque $\theta = 45^\circ$. Une nouvelle fois, cela correspond au calcul d'OT où l'axe principal d'orthotropie est orientée perpendiculairement au chargement appliqué.
4. Les calculs ont convergés correctement en utilisant la formulation de l'indice de rupture basée sur l'Eq. (5.9). L'utilisation d'une contrainte se basant sur l'indice de rupture permet d'avoir un algorithme suffisamment robuste pour converger avec des amplitudes de chargement allant

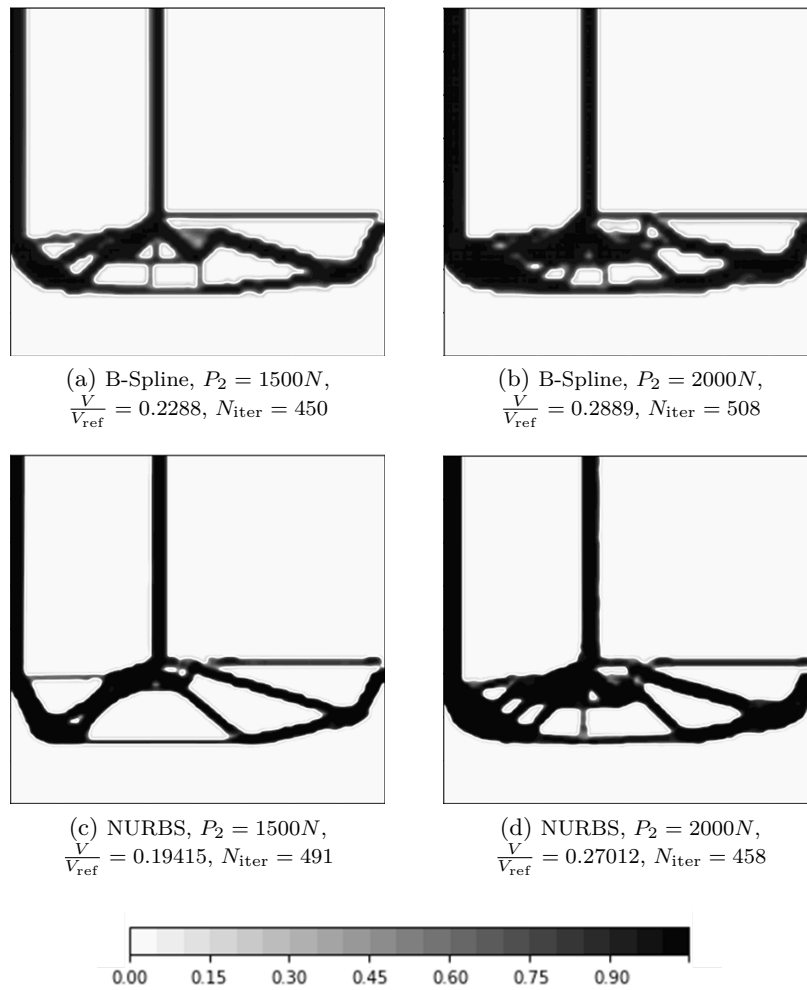


FIGURE 5.8 – Sensibilité de la topologie optimale à l’amplitude du chargement pour le problème (5.13)

jusqu’à $2000N$, ce qui n’est pas le cas en considérant une contrainte d’optimisation directement basée sur le critère de rupture de l’Eq. (5.1).

- Contrairement aux topologies finales obtenues en considérant une fonction contrainte basée sur le critère de Von Mises, les topologies finales ici ne suppriment pas totalement les angles droits dans la zone de forte concentration de contraintes du L. Seules les topologies finales lorsque $\theta = 45^\circ$ dessinent un arrondi au niveau de l’angle. En effet, deux autres aspects apparaissent sur les topologies finales lorsque l’axe d’orthotropie est orienté soit à $\theta = 0^\circ$ soit à $\theta = 90^\circ$: les branches qui partent de l’angle droit pour aller vers le point d’application de la force sont très fines et un amas de matière se concentre au niveau de l’angle droit. Cependant, en considérant la Fig. 5.8, il est possible de remarquer que cet amas de matière s’épaissit et prend une forme arrondie lorsque l’amplitude du chargement augmente ce qui permet de limiter les concentrations de contrainte dans cette zone de la structure tout en gardant une bonne rigidité structurelle.

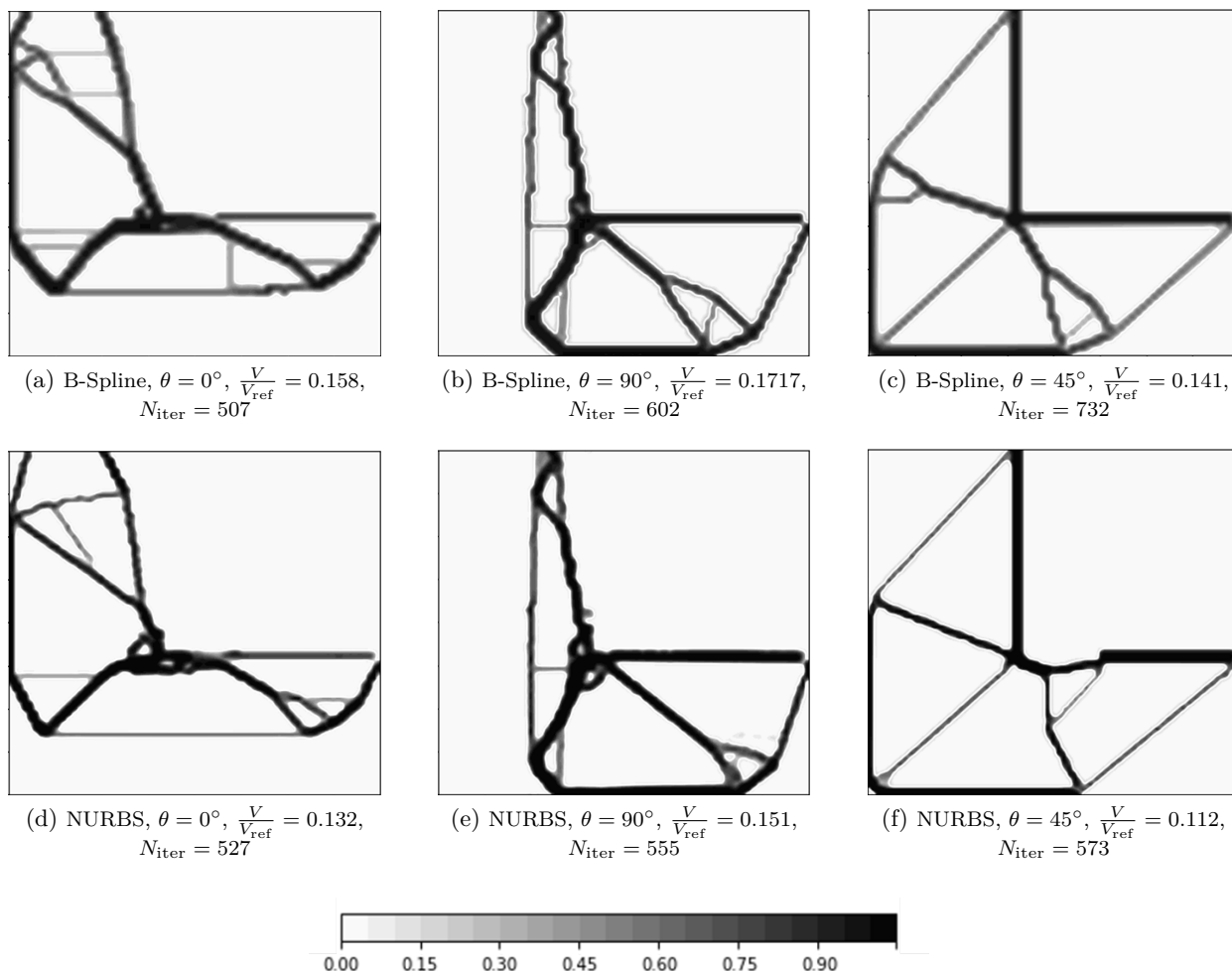


FIGURE 5.9 – Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 4 pour les différentes orientations de l’axe principal d’orthotropie sur le problème (5.13)

Influence de la formulation du problème d’optimisation sur la topologie optimale

Une dernière campagne d’analyses a été lancée sur le cas d’étude 2D, visant à étudier l’influence de la formulation du problème d’optimisation sur la topologie optimale. En particulier, la formulation basée sur l’Eq. (5.14) sera considérée. L’ensemble des calculs présentés dans cette section a été réalisé en considérant le critère de Hoffman et des entités NURBS et B-Spline définies par un nombre de PC $n_{\text{CP}} = 4890$ et des degrés de polynômes de Bernstein $p_j = 2/(j = 1, 2)$. Ainsi, la Fig. 5.10 montre les topologies optimisées lors de la résolution du problème défini à l’Eq. (5.14), pour le chargement 1 du Tableau 5.3 et trois orientations différentes, i.e. $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. La valeur seuille de fraction volumique utilisée dans ces calculs est fixée à $\gamma = 0.25$. Enfin, la Fig. 5.11 donne les topologies optimales à la suite de la résolution du problème défini à l’Eq. (5.14), pour le chargement 3 du Tableau 5.3 et en considérant une direction d’orthotropie principale telle que $\theta = 0^\circ$. Les résultats sont donnés en termes de valeur d’indice de rupture finale.

Pour l’ensemble de ces calculs, la contrainte sur le volume du matériau est respectée et se situe

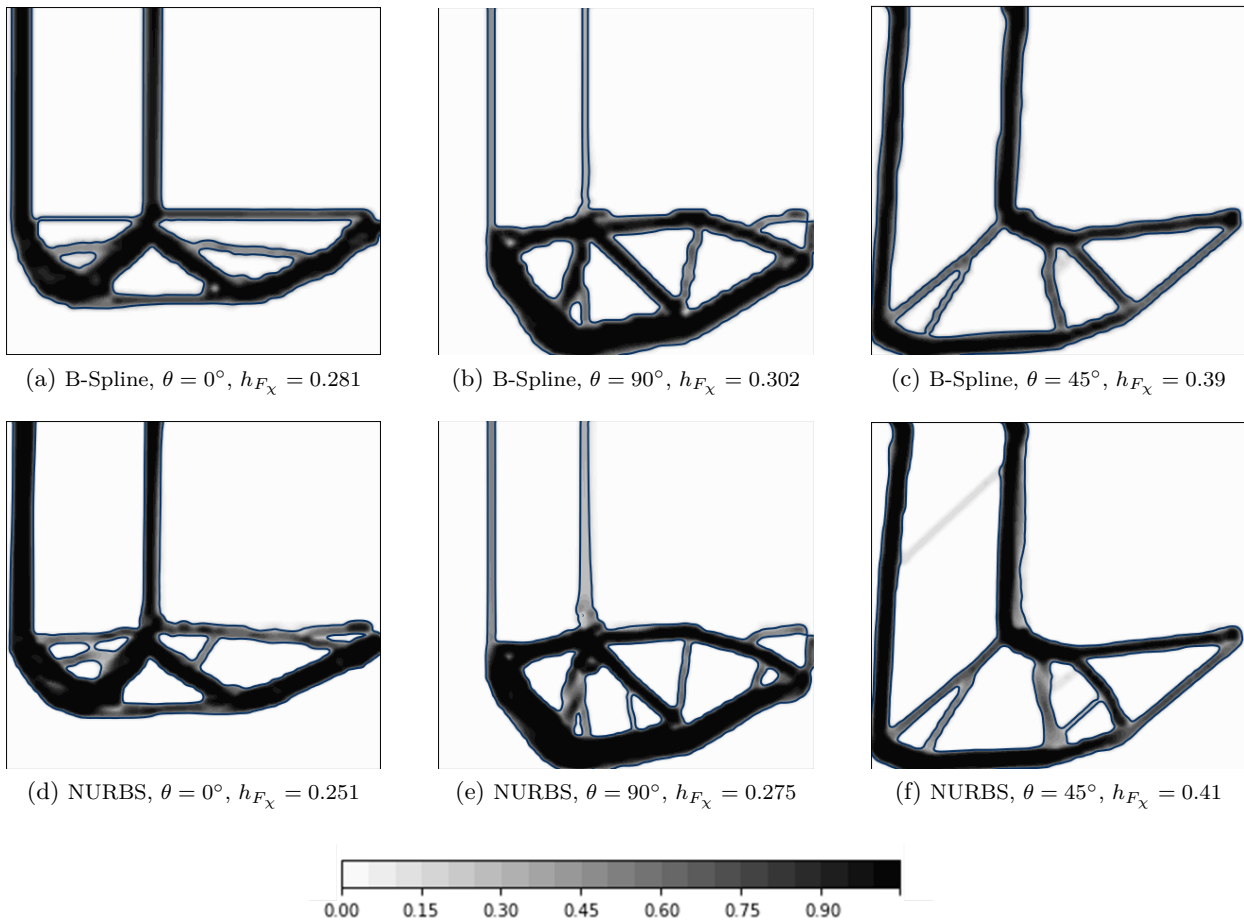


FIGURE 5.10 – Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 1 pour les différentes directions de fibre sur le problème (5.14)

à la limite du domaine de faisabilité. À la suite de ces résultats, plusieurs remarques peuvent être faites :

1. À conditions de chargement et de matériau équivalentes, les solutions NURBS donnent de meilleures performances vis à vis de la valeur de l'indice de rupture finale, que les solutions B-Spline.
2. À l'image des résultats présentés dans les Figs. 5.7 et 5.9, les topologies optimales détaillées dans la Fig. 5.10 montrent que les branches topologiques s'orientent dans la direction d'orthotropie principale.
3. En comparant les topologies (a) et (d) de la Fig. 5.10 avec les topologies de la Fig. 5.11, on voit que, malgré un effort appliqué à la structure deux fois plus important sur les topologies de la Fig. 5.11, les solutions optimales sont similaires (et même identique dans le cas NURBS). De plus, les valeurs d'indice de rupture finales, obtenues sur la Fig. 5.11, sont égales à deux fois les valeurs obtenues sur la Fig. 5.7. Ces résultats étaient attendus et montrent que la formulation 5.14 permet de s'affranchir totalement de la condition de chargement appliquée

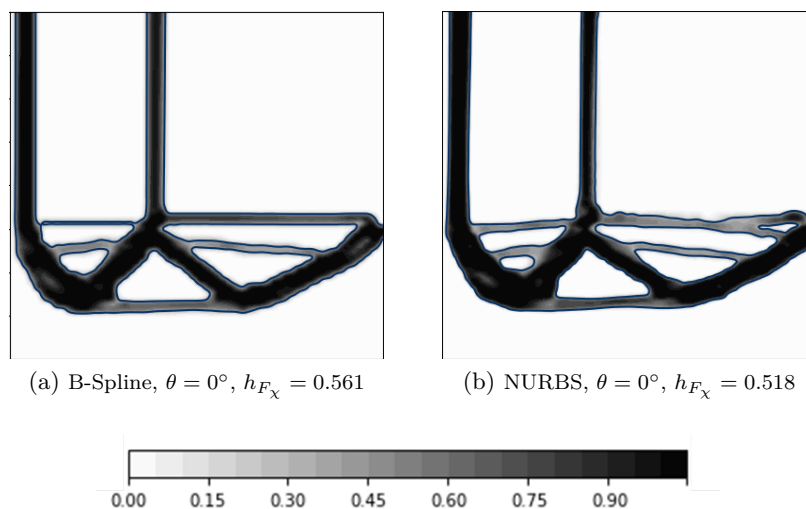


FIGURE 5.11 – Résultats B-Spline et NURBS : topologie optimale avec application du cas de chargement 3 sur le problème (5.14)

à la structure pour converger.

4. Les valeurs d'indice de rupture obtenues dans la Fig. 5.7 donnent des valeurs comprises entre 0.251 et 0.41. Ce qui veut dire que les structures pourront résister à un chargement correspondant à $P_{\text{final}} = \frac{1000}{h_{F_\chi}}$, i.e. $P_{\text{final}} = 3984 \text{ N}$ dans le meilleur des cas (cas NURBS $\theta = 0^\circ$) et $P_{\text{final}} = 2439 \text{ N}$ dans le pire des cas (cas NURBS $\theta = 90^\circ$). Les résultats obtenus en considérant le problème (5.14) sont donc cohérents par rapport à ceux obtenus avec le problème (5.13) qui avait permis d'obtenir des topologies qui résistaient à un effort de 1000 N pour une fraction volumique finale égale à 20% du volume initial.

5.3.2 Cas d'études 3D

Le cas d'étude 3D présenté dans cette section correspond au problème du "pont 3D". Comme montré dans la Fig. 5.12, la géométrie du cas d'étude 3D est définie par les dimensions suivantes : $a_1 = 150 \text{ mm}$ et $a_2 = a_3 = 30 \text{ mm}$.

Le modèle EF est composé de $N_e = 8640$ SOLID185 éléments (intégration complète, 8 nœuds, 3 degrés de liberté par nœud). La géométrie du pont 3D est encastree sur les 4 nœuds aux extrémités de la face inférieure, i.e. les nœuds définis tels que $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$, $(x_1 = x_2 = 0, x_3 = a_3)$, $(x_1 = a_1, x_2 = x_3 = 0)$ et $(x_1 = a_1, x_2 = 0, x_3 = a_3)$.

Une force $P = 1500 \text{ N}$ est appliquée sur la face supérieure de la structure du pont 3D au niveau du nœud $(x_1 = \frac{a_1}{2}, x_2 = a_2, x_3 = \frac{a_3}{2})$. Une NDR composée de $2 \times 2 \times 2$ éléments est définie au voisinage de la force appliquée. Cette NDR n'est pas considérée au cours de l'analyse d'OT car les contraintes locales proches de l'application de la force sont très élevées et ne peuvent pas diminuer au cours de l'OT (singularité numérique, liées à l'application d'une force sur un nœud du maillage). De plus, ces contraintes locales peuvent avoir un impact sur le calcul du maximum de la contrainte basée sur l'indice de rupture du problème d'optimisation et peuvent ainsi provoquer des problèmes de convergence lors du processus d'optimisation. C'est pourquoi, la valeur du champ de

pseudo-densité affecté à ces éléments et appartenant à la NDR est imposée égale à 1. Pour toutes les analyses numériques réalisées dans cette section, la direction principale d'orthotropie est alignée avec l'axe x_1 .

La géométrie de la structure, les conditions aux limites, l'orientation de l'axe principal d'orthotropie du matériau ainsi que les conditions de chargement permettent de définir deux plans de symétrie en $x_1 = \frac{a_1}{2}$ et en $x_3 = \frac{a_3}{2}$.

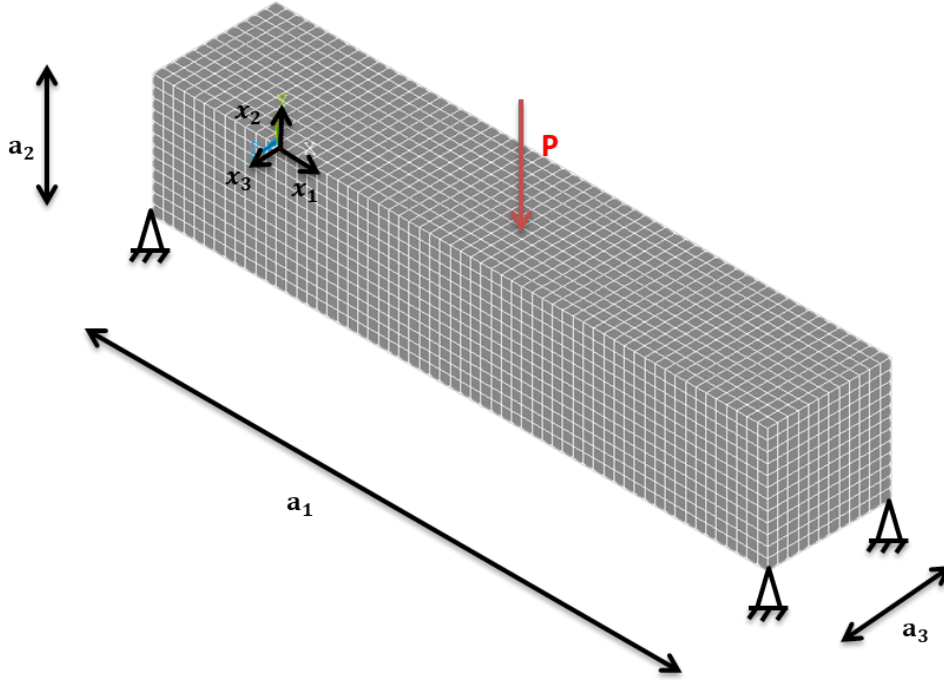


FIGURE 5.12 – Cas d'étude 3D (BK3-3D) : géométrie et maillage

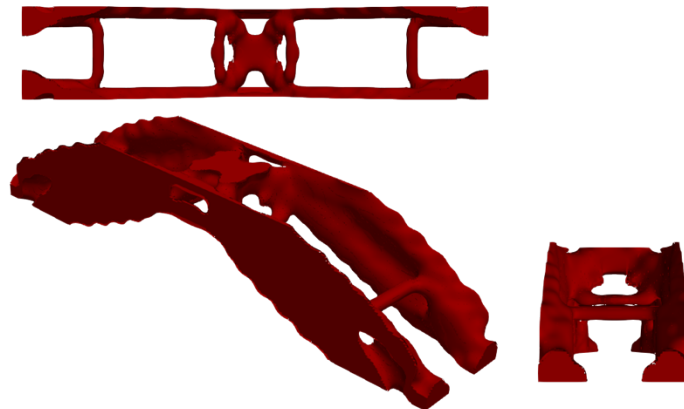
Dans cette section les deux formulations des PPNLC (5.13) et (5.14) seront étudiées et l'influence du type de critère, i.e. TH, Hoffman et TW, sur la topologie finale sera prise en compte.

Dans cette étude, les entités B-spline et NURBS utilisées pour définir le champ de pseudo-densité sont définies telles que : $p_1 = p_2 = p_3 = 2$ et $n_{CP} = 6624$.

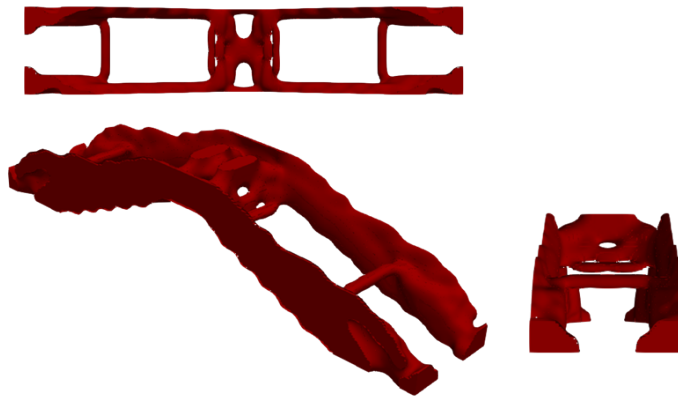
Pour chaque OT, le volume de référence est calculé selon la formule : $V_{\text{ref}} = a_1 a_2 a_3 = 135000 \text{ mm}^3$. Le point de départ du PPNLC est caractérisé par une densité uniforme égale à l'unité pour le problème (5.13) et égale à γ pour le problème (5.14). Sur ce cas d'étude, les points de départ pour chacun des problèmes d'optimisation sont faisables, il n'est donc pas nécessaire de définir une stratégie particulière pour définir la valeur du paramètre ϵ . Ainsi, la valeur du paramètre ϵ est gardée constante tout au long de l'optimisation telle que $\epsilon = 0.05$.

Les Figs. 5.13 et 5.14 présentent les topologies optimales du PPNLC (5.13), en considérant les trois critères de rupture différents pour définir l'indice de rupture, pour les cas B-spline et NURBS, respectivement. Pour chacun des problèmes d'OT résolus, la fonction contrainte basée sur l'indice de rupture est satisfaite et la solution se situe sur la frontière du domaine de faisabilité.

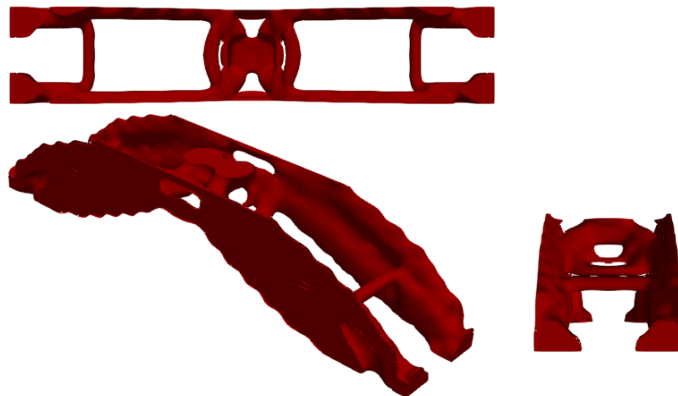
Malgré des critères de rupture différents considérés pour chacun des trois cas présentés dans les Figs. 5.13 et 5.14, les topologies finales sont fortement similaires, à entité géométrique (B-spline ou NURBS) fixée. Cette similarité entre résultats est évidente pour les solutions obtenues



(a) Hoffman, $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.103$, $C = 848 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 1500$



(b) Tsai-Hill, $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.091$, $C = 1034 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 1500$



(c) Tsai-Wu, $\frac{V}{V_{\text{ref}}} = 0.101$, $C = 976 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 2000$

FIGURE 5.13 – Résultats B-Spline : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.13) pour différents critères de rupture considérés

en considérant les critères de rupture de Hoffman et de TW qui considèrent un comportement différent du matériau en compression et en traction. Lorsque le critère de TH, qui considère un

comportement équivalent en traction et en compression, est utilisé dans la formulation de l'indice de rupture, les topologies optimales présentent des différences dans la région à proximité du point d'application de la force concentrée.

Il est à noter également que, d'une part, la valeur de la fonction objectif finale (i.e. la fraction volumique) et d'autre part, la compliance de la topologie finale (mesurée à posteriori) ont des tendances inverses. En effet, les meilleures performances obtenues en termes de fonction objectif (i.e. fraction volumique) sont atteintes en utilisant le critère de TH, qui donnent cependant les moins bonnes performances en termes de rigidité structurelle (compliance plus faible), alors que les moins bonnes performances trouvées en considérant la fonction objectif sont obtenues avec le critère de Hoffman qui fournit par ailleurs les meilleures valeurs en termes de raideur.

La Fig. 5.15 montre la valeur de l'indice de rupture dans les éléments du maillage EF à l'intérieur de la topologie optimisée présentées dans les Figs. 5.13 et 5.14. À la différence du cas d'étude 2D du domaine en L, où les valeurs d'indice de rupture, montrées dans les Figs. 5.5, 5.6 et 5.7, étaient élevées uniquement sur certaines branches topologiques de la géométrie optimisée alors qu'un grand nombre d'autres branches étaient moins sollicitées et jouaient plus un rôle vis-à-vis de la raideur de la structure. Sur la Fig. 5.15, l'ensemble des branches topologiques de la solution optimales est soumis à une valeur élevée de l'indice de rupture, i.e. l'ensemble de la structure finale est sollicitée de façon presque uniforme en termes d'état de contrainte.

Les Figs. 5.16 et 5.17 montrent les topologies optimisées suite à la résolution du cas d'étude 3D pour le PPNLC (5.14). Dans ces calculs, la direction principale d'orthotropie est telle que $\theta = 0^\circ$. Ces deux figures montrent les résultats B-Spline et NURBS pour des formulations de l'indice de rupture considérant les trois critères de rupture utilisés dans cette étude. La fraction volumique de référence est fixée à $\gamma = 0.4$. Pour l'ensemble des calculs, la contrainte sur le volume est respectée et la solution se situe à la frontière du domaine de faisabilité. À l'image des résultats obtenus en considérant le PPNLC (5.13) donnés dans les Figs. 5.13 et 5.14, les topologies sont très similaires entre les solutions obtenues grâce aux différents critères, principalement pour les critères de Hoffman et de TW. Les valeurs d'indice de rupture mesurées sur les topologies finales donnent des valeurs comprises entre 0.214 pour le cas B-Spline avec le critère de TH et 0.15 pour le résultat NURBS avec le critère de TH, ce qui veut dire que les structures optimisées pourraient résister à des efforts allant jusqu'à 7010 N pour le cas B-Spline et 10000 N pour le cas NURBS. En termes de compliance de la structure, l'ensemble des topologies optimisées proposent des valeurs équivalentes et il est difficile d'en tirer des conclusions excepté que les résultats NURBS permettent d'obtenir une meilleure raideur de la structure.

5.4 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, le problème d'OT considérant la champ des contraintes mécaniques et où les critères phénoménologiques de rupture de TH, TW et Hoffman ont été implémentés dans la méthode d'OT basée sur les hypersurfaces NURBS, sous la forme d'une fonction d'optimisation basée sur l'indice de rupture, défini dans [98].

Certains aspects de la méthode proposée peuvent être mis en avant :

- La théorie des hypersurfaces NURBS apporte au moins 2 avantages : (a) le nombre de variables d'optimisation nécessaire pour obtenir une topologie optimale correcte est réduit par rapport à un calcul d'OT classique basé sur la méthode SIMP ; (b) La propriété du support local des NURBS, définie dans le Chapitre 3, permet d'établir un lien implicite entre les éléments adjacents du modèle EF sans ajouter de fonction de filtrage supplémentaire comme c'est le

cas dans la méthode SIMP classique. Une analyse de sensibilité a été menée sur les paramètres de définition des entités NURBS (i.e. le nombre de PC et le degré des fonctions de base de l'entité géométrique). Cette analyse a permis de confirmer les règles générales trouvées dans les chapitres 3 et 4, sur le choix de ces paramètres : plus le nombre de PC est élevé (pour un degré fixé) ou plus le degré des fonctions de forme diminue (pour un nombre de PC fixé) plus la valeur de la fonction objectif sera faible, aussi bien pour les résultats B-spline que pour les résultats NURBS. De plus, le choix de ces paramètres a également un impact sur la dimension des branches topologiques présentes sur la topologie optimisée. En effet, plus le degré des fonctions de base est élevé et le nombre de PC est petit, plus le nombre d'éléments du maillage EF présent dans le support local de chaque PC sera grand.

- L'influence de la direction principale d'orthotropie du matériau sur la topologie optimale a également été étudiée. En particulier, trois directions ont été étudiées sur les cas d'études 2D. Les résultats ont mis en avant des topologies optimales très différentes suivant les différentes valeurs de l'orientation de l'axe principal d'orthotropie, car les branches topologiques ont tendance à s'orienter le long de cette direction pour garder une résistance optimale. Les meilleures performances en termes de valeur de fonction objectif (fraction volumique finale) ont été obtenues lorsque l'axe principal d'orthotropie est orienté perpendiculairement à la direction de la force appliquée.
- L'influence de l'intensité et de la direction d'application de la force sur la topologie finale a également été étudiée. Les résultats ont montré une bonne capacité de la méthode à s'adapter et à converger malgré une intensité de chargement appliquée de plus en plus élevée (jusqu'à 2000N). Cela montre la robustesse de la méthode basée sur l'indice de rupture car elle prend en compte les conditions de chargement dans la définition de la fonction.
- L'influence du critère de rupture sur la topologie optimale a également été étudié par l'intermédiaire d'un cas d'étude 3D. Celle-ci a montré des similarités entre les résultats obtenus au travers des différents critères. Cette étude a également montré que l'utilisation de tel ou tel critère nécessite également de faire un choix entre meilleures performances en termes de fonction objectif ou de raideur. En effet, le critère de Hoffman permettra d'obtenir les meilleures valeurs de raideur alors que le critère de TH permettra d'obtenir les meilleures performances en termes de fonction objectif. Le critère de TW, peut quant à lui, fournir un compromis acceptable entre une bonne raideur et de bonnes performances en termes de fonction objectif.
- Enfin, la formulation du PPNLC a également été étudiée en comparant les formulations données dans les Eqs. (5.13) et (5.14). La deuxième formulation permet d'avoir un problème dont la résolution est totalement indépendante du chargement extérieur appliqué à la structure. En effet, les topologies finales obtenues en considérant cette formulation ont donné des topologies identiques lorsque le chargement extérieur appliqué était de 1000 N ou de 2000 N , à entités géométriques équivalentes. Cependant, la résolution des PPNLC (5.13) permet d'obtenir des topologies plus performantes.

Les travaux traités dans ce chapitre sont loins d'être exhaustifs sur l'ensemble des problématiques de l'OT sous contraintes de structures anisotropes. Premièrement, cette étude s'est limitée à l'optimisation de la tenue mécanique des structures obtenues à partir d'un matériau orthotrope ayant une direction principale d'orthotropie uniforme sur le domaine et choisie au préalable par l'utilisateur. Cependant, aujourd'hui il est possible de fabriquer des composites à rigidités variables

dont la direction principale d'orthotropie et le groupe de symétrie élastique peuvent varier ponctuellement dans le domaine. Il serait alors intéressant de formuler un problème d'optimisation simultanée de la topologie et des paramètres régissant localement l'anisotropie du matériau. De cette manière il serait possible d'exploiter tout le potentiel des composites à rigidité variables issues de la fabrication additive. Deuxièmement, les contraintes technologiques du procédé, telles que les angles de surplomb ou encore le rayon de courbure de la fibre, doivent être prises en compte afin d'obtenir une solution optimisée et fabricable. De plus, ce type de propriétés auraient un impact bénéfique sur la convergence des PPnLC qui considèrent les contraintes mécaniques car elles permettraient d'éviter au cours de l'optimisation d'avoir des solutions intermédiaires aux angles vifs qui favorisent les concentrations de contraintes élevées et peuvent apporter ainsi des problèmes de convergence.

Les travaux montrés dans ce chapitre marquent la fin des études menées sur le premier axe de recherche présenté dans ce manuscrit, i.e. comment intégrer les principaux critères de tenue mécanique, pour matériaux isotropes et anisotropes, dans la méthode d'OT basée sur les hypersurfaces NURBS. Les chapitres suivants seront dédiés au développement et à l'implémentation dans cette méthode d'optimisation des analyses multi-échelle/multi-matériau dans le but d'optimiser les volumes élémentaires de structures composées par des matériaux architecturés (type structures lattices).

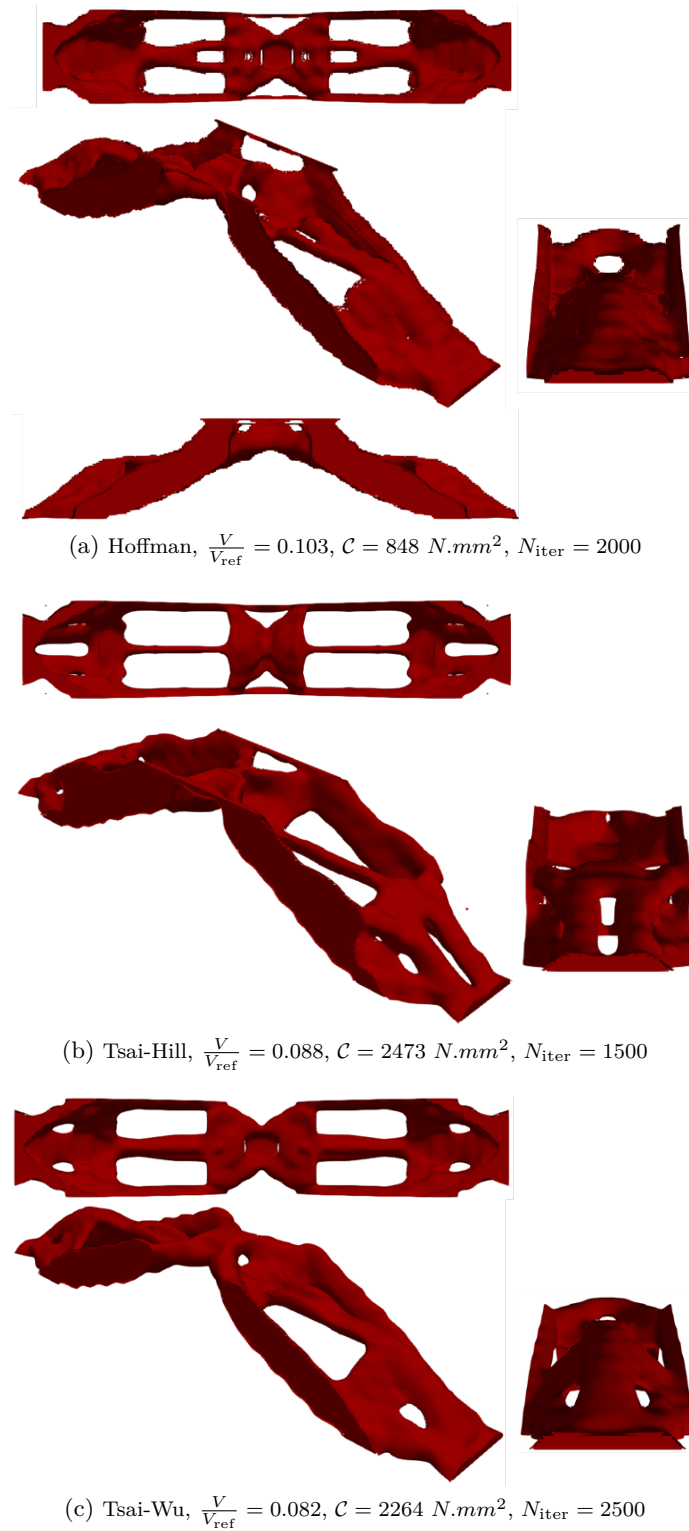


FIGURE 5.14 – Résultats NURBS : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.13) pour différents critères de rupture considérés

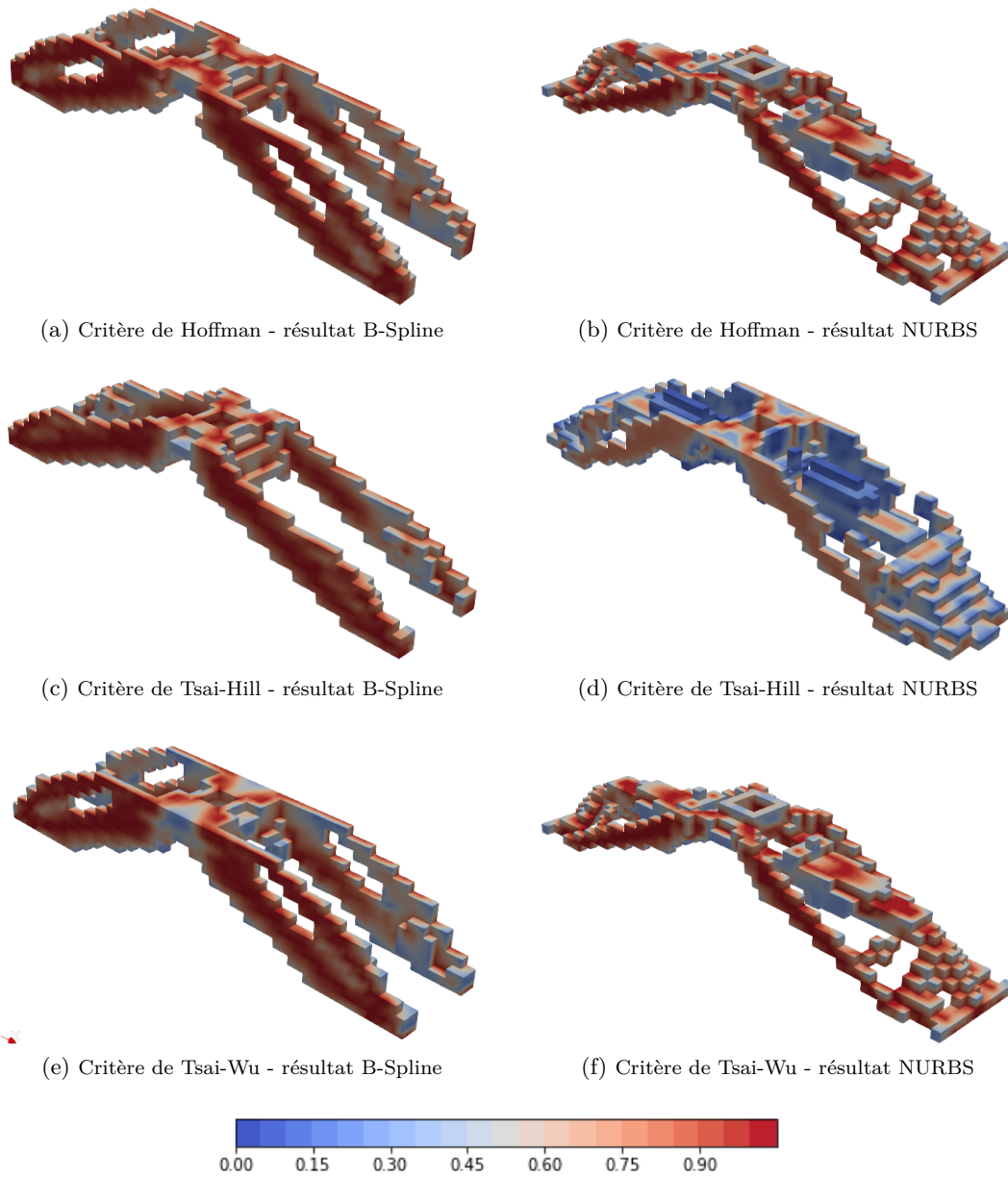
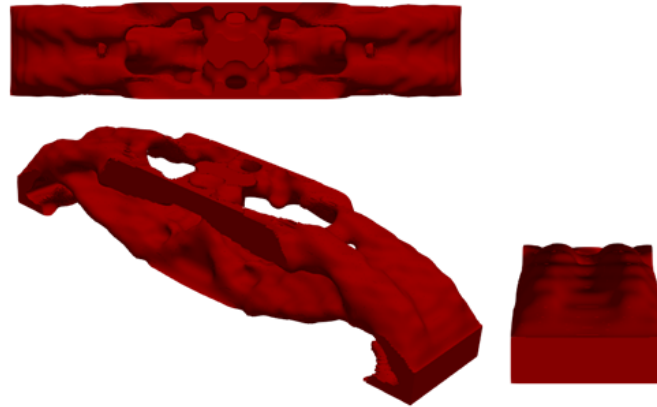
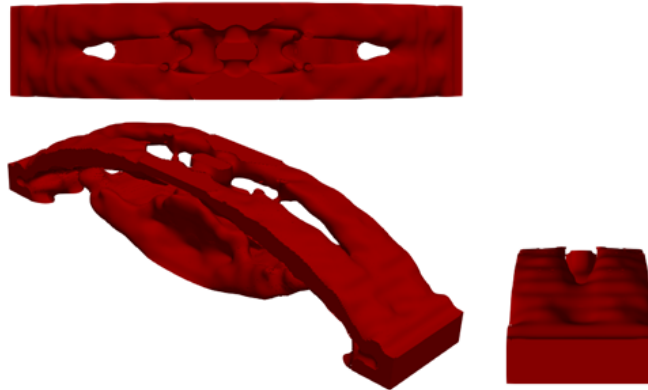


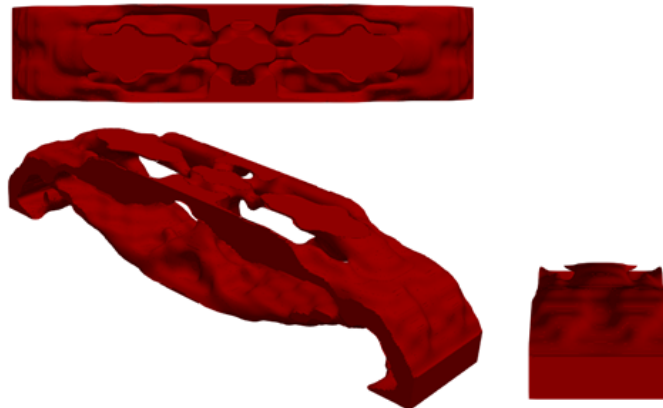
FIGURE 5.15 – Distribution spatiale de l'indice de rupture pour les topologies optimisées dans les Figs. 5.13 et 5.14



(a) Hoffman, $h_{F_\chi} = 0.201$, $C = 304 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 2750$

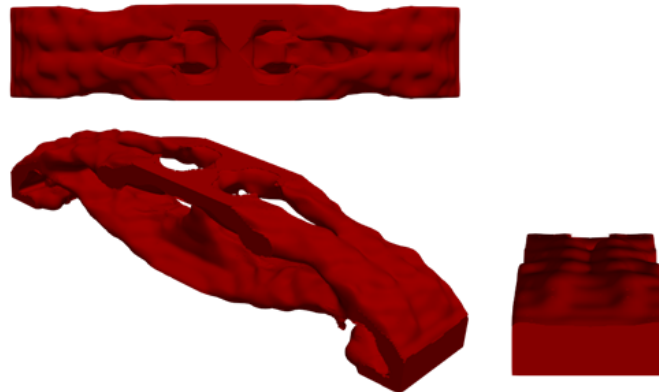


(b) Tsai-Hill, $h_{F_\chi} = 0.214$, $C = 233 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 2472$

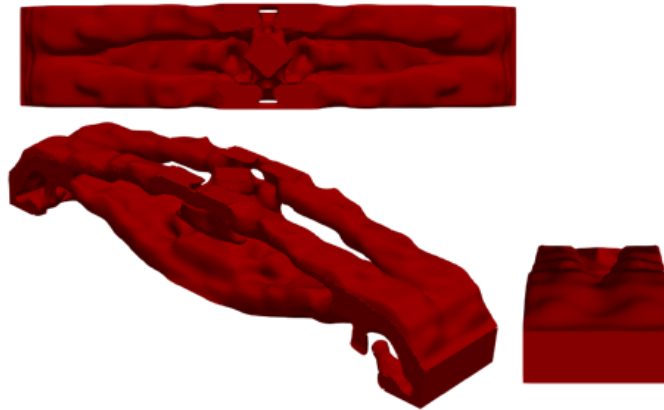


(c) Tsai-Wu, $h_{F_\chi} = 0.193$, $C = 282 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 2598$

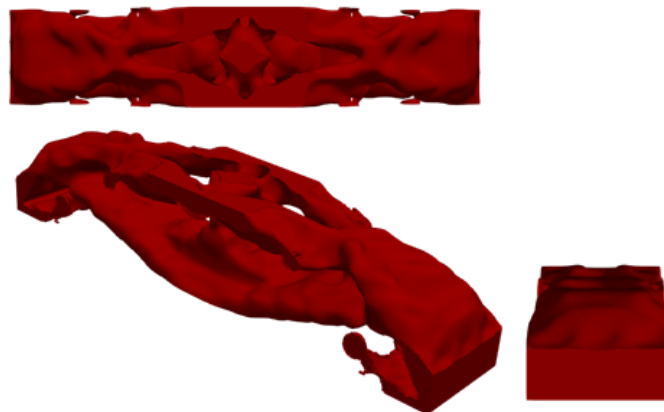
FIGURE 5.16 – Résultats B-Spline : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.14) pour différents critères de rupture considérés



(a) Hoffman, $h_{F_\chi} = 0.187$, $C = 220 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 3152$



(b) Tsai-Hill, $h_{F_\chi} = 0.150$, $C = 221 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 3187$



(c) Tsai-Wu, $h_{F_\chi} = 0.173$, $C = 234 \text{ N.mm}^2$, $N_{\text{iter}} = 3416$

FIGURE 5.17 – Résultats NURBS : topologies optimisées des solutions du PPNLC (5.14) pour différents critères de rupture considérés

Chapitre 6

Optimisation topologique multi-échelle de structures architecturées multi-matériau

6.1 Introduction

Au cours des dernières années, les structures architecturées (dont les lattices) sont devenues un sujet d'étude de plus en plus traité. En effet, de nombreux domaines s'y intéressent, à l'image de l'aérospatial, l'automobile ou encore l'industrie biomédicale, notamment grâce à la possibilité de définir les matériaux à différentes échelles. De cette manière, il est possible d'obtenir des motifs élémentaires constitués d'un ou plusieurs matériaux aux propriétés mécaniques très spécifiques, comme des rapports rigidité/poids et résistance/poids élevés, une bonne isolation thermique, une grande capacité d'absorption d'énergie, etc., qui peuvent convenir à différents domaines d'études. L'optimisation du matériau en même temps que l'optimisation de la topologie de la structure est alors possible. L'un des objectifs principaux de ce type de travaux est de pouvoir élargir les possibilités de définition des matériaux en jouant sur la topologie d'un volume élémentaire multi-matériau défini à l'échelle inférieure (qui peut être mésoscopique ou microscopique selon les longueurs caractéristiques du problème). Pendant les dernières années, les procédés de fabrication ont été en constante évolution dans le but de pouvoir créer des structures aux branches topologiques de plus en plus fines mais également de mélanger plusieurs phases de matériaux différentes au sein d'une même structure : c'est la fabrication additive multi-matériau.

Dans cette partie, les travaux présentés portent sur l'OT multi-échelle/multi-matériau de structures architecturées. En effet, l'un des objectifs de la thèse est d'implémenter dans l'algorithme SANTO la possibilité de prendre en compte le comportement anisotrope des structures fortement allégées type structure lattice multi-matériau. Des premiers travaux ont donc été réalisés en combinant l'optimisation multi-échelle développée dans [118], l'optimisation multi-matériau développée dans [125] et la méthode NURBS-based-SIMP présentée dans le chapitre 3.

La particularité des structures architecturées multi-matériau est d'être définies sur deux échelles :

1. À l'échelle inférieure (microscopique ou mésoscopique) : où un volume élémentaire représentatif (VER) est défini. Ce VER est répété dans toutes les directions de manière à créer une structure compacte à l'échelle supérieure.
2. À l'échelle supérieure (macroscopique) où la topologie globale de la structure est définie. Les propriétés du matériau à cette échelle dépendent donc de la topologie du VER définie à

l'échelle inférieure.

Dans ce chapitre, les quantités possédant un indice m feront référence à l'échelle inférieure, tandis qu'un indice M référencera les paramètres définis à l'échelle supérieure.

L'objectif de ces travaux est d'optimiser la topologie et la répartition des divers matériaux composant le VER de manière à maximiser la rigidité de la structure à l'échelle macroscopique tout en respectant une contrainte sur le volume des différentes phases matériau composant le VER.

La difficulté de ces travaux réside dans plusieurs aspects :

1. Comment intégrer l'analyse multi-échelle dans l'optimisation topologique ?
2. Comment prendre en compte l'influence des variables topologiques à l'échelle mésoscopique sur les réponses à l'échelle macroscopique ?
3. Quelle stratégie d'homogénéisation est la plus adaptée à l'algorithme NURBS-based-SIMP ?
4. Comment prendre en compte des critères physiques à différentes échelles ?
5. Est-il possible d'intégrer les interpolations multi-matériau dans la méthode d'OT multi-échelle basée sur la l'algorithme NURBS-based-SIMP ?

La contribution de cette étude se divise en différents aspects. Premièrement, le gradient de la fonction sur la compliance macroscopique par rapport aux variables d'optimisation définies à l'échelle mésoscopique est dérivé dans le cadre le plus général possible en tirant avantage des propriétés des entités NURBS mais également des caractéristiques intrinsèques à la méthode d'homogénéisation utilisée. Deuxièmement, une analyse approfondie étudiant l'impact des conditions de chargement extérieures, des fractions volumiques imposées à chaque matériau et des paramètres définissant l'entité NURBS est réalisée sur des cas d'études classiques 2D et 3D préalablement choisis. Finalement, à différence de la méthode d'OT multi-matériau proposée dans [125], la formulation proposée dans ce chapitre utilise la définition générale des hypersurfaces NURBS et ne fait pas appel à des techniques de filtrage pour régulariser l'allure des fonctions définissant les descripteurs topologiques des N_{mat} phases matériau définies à l'échelle inférieure. Plus précisément, comme détaillé dans le Chapitre 3 et comme discuté dans [16], l'approche proposée tire parti de la propriété de support local des fonctions de base des hypersurfaces NURBS pour définir un filtre implicite qui permet de régir de façon efficace (c'est-à-dire sans introduire une contrainte d'optimisation explicite) l'épaisseur minimale des branches topologiques apparaissant au cours de l'optimisation.

6.2 La méthode d'homogénéisation

L'une des étapes fondamentales des problèmes d'OT multi-échelle est la méthode d'homogénéisation qui permet de relier les deux échelles (supérieure et inférieure) entre elles. Les différentes méthodes d'homogénéisation visent à approximer le matériau hétérogène à l'échelle macroscopique, défini par la répétition du VER dans les différentes directions, par un matériau homogène équivalent anisotrope dont les propriétés dépendent de la topologie du VER et des propriétés des matériaux composant le VER. Dans la majorité des travaux, la méthode asymptotique est utilisée [102, 112, 113]. Cependant une méthode alternative est de plus en plus utilisée : la *Strain Energy-based Homogenization Method* (SEHM) [105–107]. Elle représente une bonne alternative à la méthode asymptotique grâce notamment à sa facilité d'implémentation et au coût de calcul réduit pour calculer les composants du tenseur de rigidité du matériau équivalent à l'échelle supérieure

ainsi que son gradient par rapport aux variables décrivant la topologie du VER et la répartition des phases matériau [118].

Ces travaux se focalisent uniquement sur le comportement élastique du matériau homogène anisotrope équivalent à l'échelle supérieure, soit son tenseur d'élasticité (représenté par une matrice $\mathbf{C}_M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ dans la notation de Voigt) qui est déterminé à l'aide de la SEHM. Cette méthode s'appuie sur l'hypothèse fondamentale que l'énergie de déformation du milieu hétérogène est la même que celle du matériau homogène équivalent qui "remplace" la structure architecturée multi-matériau à l'échelle supérieure.

En partant de cette hypothèse, il est alors possible de déterminer l'ensemble des composants de la matrice de rigidité (notation de Voigt) du matériau homogène équivalent. Pour cela, des conditions aux limites (CL) appropriées doivent être imposées au VER sous forme de conditions aux limites périodiques (CLP).

Cependant, pour déterminer la réponse élastique du VER à l'échelle macroscopique, trois hypothèses supplémentaires ont été ajoutées :

1. Le VER est répété "indéfiniment" dans l'ensemble des directions (dans la pratique, au moins 10 fois dans chaque direction) [172].
2. Les matériaux composant le VER ont un comportement linéaire élastique isotrope.
3. Le flambage des branches topologiques du VER est négligé.

De plus, dans ce Chapitre, uniquement un couplage faible entre les échelles, tel que discuté dans [119], est prise en compte. Afin de calculer les composantes de la matrice \mathbf{C}_M , le VER est soumis à un champ de déformation moyen, ε_{mij}^0 (notation tensorielle) appliqué en considérant les CLP suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{mi}(2a_{m1}, x_{m2}, x_{m3}) - u_{mi}(0, x_{m2}, x_{m3}) = 2a_{m1}\varepsilon_{mi1}^0, \quad (0 \leq x_{m2} \leq 2a_{m2}, 0 \leq x_{m3} \leq 2a_{m3}), \\ u_{mi}(x_{m1}, 2a_{m2}, x_{m3}) - u_{mi}(x_{m1}, 0, x_{m3}) = 2a_{m2}\varepsilon_{mi2}^0, \quad (0 \leq x_{m1} \leq 2a_{m1}, 0 \leq x_{m3} \leq 2a_{m3}), \\ u_{mi}(x_{m1}, x_{m2}, 2a_{m3}) - u_{mi}(x_{m1}, x_{m2}, 0) = 2a_{m3}\varepsilon_{mi3}^0, \quad (0 \leq x_{m1} \leq 2a_{m1}, 0 \leq x_{m2} \leq 2a_{m2}), \\ i = 1, 2, 3. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Dans les équations précédentes, $L_{mi} = 2a_{mi}$ et u_{mi} sont, respectivement, la longueur caractéristique du VER et le déplacement suivant l'axe x_{mi} . L'équation d'équilibre à l'échelle inférieure s'écrit :

$$\hat{\mathbf{K}}_m \hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{f}}_m; \quad \hat{\mathbf{u}}_m, \hat{\mathbf{f}}_m \in \mathbb{R}^{\hat{N}_{m\text{DOF}}}, \quad \hat{\mathbf{K}}_m \in \mathbb{R}^{\hat{N}_{m\text{DOF}} \times \hat{N}_{m\text{DOF}}}, \quad (6.2)$$

où $\hat{N}_{m\text{DOF}}$ est le nombre total de degrés de liberté (noté DOF dans la suite, de l'anglais *degree of freedom*) de la structure avant l'application des conditions aux limites, $\hat{\mathbf{K}}_m$ est la matrice de rigidité non-réduite du VER, $\hat{\mathbf{u}}_m$ est le vecteur non-réduit des déplacements généralisés et $\hat{\mathbf{f}}_m$ est le vecteur non-réduit des efforts nodaux généralisés. Les matrices et vecteurs donnés ci-dessus s'expriment tels que :

$$\hat{\mathbf{K}}_m := \begin{bmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_{m\text{BC}} \\ \mathbf{K}_{m\text{BC}}^T & \tilde{\mathbf{K}}_m \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}}_m := \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_m \\ \mathbf{u}_{m\text{BC}} \end{Bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{f}}_m := \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_m \\ \mathbf{r}_m \end{Bmatrix}, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{u}_m, \mathbf{f}_m \in \mathbb{R}^{N_{m\text{DOF}}}, \quad \mathbf{u}_{m\text{BC}}, \mathbf{r}_m \in \mathbb{R}^{N_{m\text{BC}}}, \quad \mathbf{K}_m \in \mathbb{R}^{N_{m\text{DOF}} \times N_{m\text{DOF}}}, \quad \mathbf{K}_{m\text{BC}} \in \mathbb{R}^{N_{m\text{DOF}} \times N_{m\text{BC}}},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_m \in \mathbb{R}^{N_{m\text{BC}} \times N_{m\text{BC}}}.$$

Dans l'Eq. (6.3), $N_{m\text{DOF}}$ est le nombre de DOF inconnus tandis que $N_{m\text{BC}}$ représente le nombre de DOF connus, c'est à dire les DOF où les déplacements généralisés sont appliqués (ainsi $\hat{N}_{m\text{DOF}} =$

$N_{m\text{DOF}} + N_{m\text{BC}}$). \mathbf{u}_m et $\mathbf{u}_{m\text{BC}}$ sont, respectivement, les vecteurs des déplacements généralisés inconnus et connus. \mathbf{f}_m est le vecteur des forces nodales extérieures généralisées et \mathbf{r}_m est le vecteur des réactions nodales généralisées (i.e. aux nœuds où les déplacements sont imposés). \mathbf{K}_m , $\mathbf{K}_{m\text{BC}}$ et $\tilde{\mathbf{K}}_m$ sont les matrices de rigidité du modèle EF du VER après l'application des CL. De plus, les CLP de l'Eq. (6.1) sont appliquées en termes de déplacements, ainsi aucune force nodale n'est appliquée sur le VER, i.e. $\mathbf{f}_m = \mathbf{0}$ et donc le problème d'équilibre de l'Eq. (6.2) est un problème de Dirichlet.

L'une des principales différences entre la SEHM basée sur les contraintes moyennes et la SEHM basée sur l'énergie de déformation réside dans la manière d'effectuer le post-traitement des résultats de l'analyse EF. En effet, pour les deux techniques, six analyses, correspondant à l'application des champs de déformations élémentaires uni-axiales, voir Eq. (6.1), sont nécessaires. Dans le cas de la SEHM basée sur les contraintes moyennes, le vecteur des contraintes du volume moyen du VER, i.e., $\boldsymbol{\sigma}_m(\varepsilon_{m\beta}^0)$, peut-être rapidement calculé et la matrice de rigidité du matériau homogène équivalent peut être rapidement déduite colonne par colonne tel que :

$$\mathbf{c}_{M\beta} = \frac{1}{V_{\text{VER}}\varepsilon_{m\beta}^0} \int_{V_{\text{VER}}} \boldsymbol{\sigma}_m(\varepsilon_{m\beta}^0) dV \approx \frac{1}{V_{\text{VER}}\varepsilon_{m\beta}^0} \sum_{e=1}^{N_{me}} \boldsymbol{\sigma}_m(\varepsilon_{m\beta}^0) V_{me}, \quad (6.4)$$

$$\varepsilon_{m\beta}^0 \neq 0, \varepsilon_{m\gamma}^0 = 0, \beta, \gamma = 1, \dots, 6, \gamma \neq \beta, \mathbf{c}_{M\beta} \in \mathbb{R}^6,$$

où $\mathbf{c}_{M\beta}$ représente la colonne β de la matrice \mathbf{C}_M . Dans l'Eq. (6.4), N_{me} représente le nombre d'éléments qui compose le modèle EF du VER, V_{me} est le volume de l'élément générique e et $V_{\text{VER}} = L_{m1}L_{m2}L_{m3}$ est le volume d'enveloppe du VER.

Dans le cas de la méthode basée sur l'énergie de déformation, le travail des forces externes et des déplacements imposés \mathcal{W}_m du VER peut-être facilement récupéré de l'analyse statique. Dans le cas plus général de CL mixtes, \mathcal{W}_m est défini comme suit :

$$\mathcal{W}_m = \mathbf{f}_m^T \mathbf{u}_m + \mathbf{r}_m^T \mathbf{u}_{m\text{BC}}. \quad (6.5)$$

Ensuite, en considérant des champs de déformations uni-axial et bi-axial dans l'Eq.(6.1) et en considérant l'hypothèse d'équivalence entre l'énergie de déformation du milieu homogène équivalent et celle du VER, les composantes de la matrice \mathbf{C}_M peuvent être calculées comme suit :

$$C_{Mkk} = \frac{\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mk}^0)}{V_{\text{RVE}}(\varepsilon_{mk}^0)^2}, \quad k = 1, \dots, 6, \quad (6.6)$$

$$C_{Mij} = \frac{\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mi}^0, \varepsilon_{mj}^0)}{2V_{\text{RVE}}\varepsilon_{mi}^0\varepsilon_{mj}^0} - C_{Mii} \frac{\varepsilon_{mi}^0}{2\varepsilon_{mj}^0} - C_{Mjj} \frac{\varepsilon_{mj}^0}{2\varepsilon_{mi}^0}, \quad i, j = 1, \dots, 6, i \neq j. \quad (6.7)$$

L'Eq. (6.6) permet de calculer les coefficients diagonaux de la matrice \mathbf{C}_M , tandis que l'Eq. (6.7) permet de calculer les coefficients hors-diagonaux. Les termes $\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mk}^0)$ et $\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mi}^0, \varepsilon_{mj}^0)$ représentent le travail des forces externes et des déplacements imposés évalué pour des champs de déformation uni-axiaux et bi-axiaux, respectivement. L'Eq. (6.6) doit être résolue avant l'Eq. (6.7). De plus, le travail du VER pour un champ de déformation bi-axial peut être obtenu directement des analyses sur des champs de déformation uni-axiaux comme suit :

$$\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mi}^0, \varepsilon_{mj}^0) = (\mathbf{f}_{mi}^T + \mathbf{f}_{mj}^T)(\mathbf{u}_{mi} + \mathbf{u}_{mj}) + (\mathbf{r}_{mi}^T + \mathbf{r}_{mj}^T)(\mathbf{u}_{m\text{BC}i} + \mathbf{u}_{m\text{BC}j}), \quad (6.8)$$

où les indices i et j se réfèrent aux analyses EF pour des champs de déformations uni-axiaux (ε_{mi}^0 et ε_{mj}^0) imposés dans les CLP.

6.3 L'optimisation topologique multi-échelle / multi-matériau dans le code SANTO

La formulation du problème est présentée dans la suite uniquement pour le cas 3D.

6.3.1 Variables de conception et descripteurs géométriques et topologiques

Considérons dans un premier temps un domaine Euclidien compact $\mathcal{D}_m \subset \mathbb{R}^3$ défini dans un repère cartésien orthogonal $O(x_{m1}, x_{m2}, x_{m3})$ à l'échelle inférieure et composé de N_{mat} phases matériau et une phase associée au "vide", comme illustré dans la Fig. 6.1 dans le cas $N_{\text{mat}} = 4$:

$$\mathcal{D}_m := \{\mathbf{x}_m^T = (x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}) \in \mathbb{R}^3 : x_{mj} \in [0, L_{mj}], j = 1, 2, 3\}, \quad (6.9)$$

avec L_{mj} la longueur caractéristique du domaine de conception du VER à l'échelle inférieure définie suivant l'axe x_{mj} .

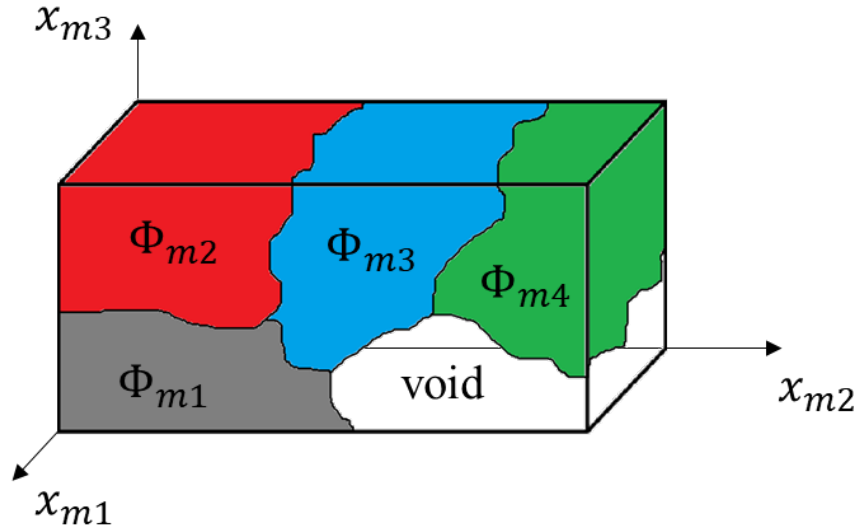


FIGURE 6.1 – Représentation schématique du domaine de définition du VER composé de $N_m = 4$ matériaux et le vide.

Dans le cadre de la méthode d'interpolation N-MMI (de l'anglais *NURBS-based multi-material interpolation*) [125], il faut distinguer entre "descripteur géométrique" et "descripteur topologique" de chaque phase matériau. Plus précisément, pour un problème de dimension d , le descripteur géométrique du j -ème matériau est représenté par une entité NURBS de dimension $d + 1$. Pour un problème d'OT 3D, une hypersurface NURBS de dimension 4 sera alors nécessaire pour représenter le descripteur géométrique de la j -ème phase matériau. Dans ce contexte, les trois premières coordonnées de l'entité NURBS sont associées aux coordonnées Cartésiennes du domaine de définition du VER, tandis que la dernière coordonnée est associée au champ géométrique (CG) de la j -ème phase matériau et qui est défini comme suit :

$$\rho_{mj}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3}) := \sum_{i_1=0}^{n_1} \sum_{i_2=0}^{n_2} \sum_{i_3=0}^{n_3} R_{i_1 i_2 i_3}^{(j)}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3}) \rho_{i_1 i_2 i_3}^{(j)}, \quad \rho_{mj} \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}. \quad (6.10)$$

Dans l'Eq. (6.10), $\rho_{i_1 i_2 i_3}^{(j)}$ est la valeur du CG au CP générique de l'entité NURBS, tandis que $R_{i_1 i_2 i_3}^{(j)}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})$ est la fonction de base rationnelle de l'Eq. (3.2) pour la phase matériau j . Dans l'Eq. (6.10), on fait l'hypothèse que les entités NURBS décrivant les CG des N_{mat} matériau composant le VER sont caractérisées par les mêmes paramètres entiers, c'est-à-dire le même nombre de PC et les mêmes degrés des polynômes de Bernstein, et les mêmes valeur des composants du vecteur des nœuds. Les coordonnées paramétriques ζ_{mi} peuvent être calculées à partir de la relation suivante :

$$\zeta_{mj} := \frac{x_{mj}}{L_{mj}}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.11)$$

Le champ topologique (CT) de la phase matériau j , noté $\Phi_{mj}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})$, est utilisé pour décrire la topologie (ou, de façon équivalente, la répartition) du matériau j à l'intérieur du domaine du VER. En pratique, le CT est défini comme une combinaison des CG associés aux diverses phases matériau :

$$\Phi_{mj}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3}) := \prod_{k=1}^j \rho_{mk}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3}) \prod_{k=j+1}^{N_{\text{mat}}} [1 - \rho_{mk}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})], \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}. \quad (6.12)$$

Il est clair que, compte tenu de l'Eq. (6.12), le CT du matériau j peut prendre des valeurs entre 0 (exclu) et 1, i.e. $\Phi_{mj} \in]0, 1]$.

Comme discuté dans [125], la formulation proposée à l'Eq. (6.12) est caractérisée par plusieurs avantages : a) chaque fonction Φ_{mj} est associée à un seul matériau, b) chaque fonction Φ_{mj} varie dans l'intervalle $[\phi_{\min}, 1]$ (avec $\phi_{\min} > 0$), c) la combinaison de plusieurs entités NURBS selon l'Eq. (6.14) garantit l'absence de chevauchement entre plusieurs matériaux, d) comme montré dans [173], le CT associé à chaque phase matériau peut être exprimé comme une entité NURBS permettant, donc, de garder toutes les propriétés intéressantes propres à ces entités.

Bien entendu, l'ensemble des propriétés a)-d) listées ci-dessus permet d'obtenir des topologies nettes (pour chaque phase matériau) qui ne nécessiteront pas, d'une part, d'opérations de post-traitement de la solution visant à "nettoyer" (ou réparer) les zones de superpositions et, d'autre part, l'introduction de contraintes supplémentaires dans la formulation du problème d'OT visant à limiter (ou éviter), pour chaque point du domaine de conception, le chevauchement entre divers matériaux. Il faut remarquer que, contrairement à l'approche présentée dans [125], le schéma d'interpolation N-MMI proposé dans ce chapitre utilise des entités NURBS générales (et non pas des entités B-spline comme dans [125]). Ceci permet d'obtenir des topologies avec des frontières lisses et régulières sans la nécessité d'introduire des termes de lissage ou des fonctions d'interpolation comme la fonction de Shepard utilisée dans [125].

Chaque CG, qui est représenté par une entité NURBS, est paramétrée par les valeurs de pseudo-densité aux PC et par les poids associés qui sont collectés dans deux vecteurs ξ_{1j} et ξ_{2j} , respectivement, définis par :

$$\begin{aligned} \xi_{1j}^T &:= (\rho_{000}^{(j)}, \dots, \rho_{n_1 n_2 n_3}^{(j)}), \quad \xi_{2j}^T := (\omega_{000}^{(j)}, \dots, \omega_{n_1 n_2 n_3}^{(j)}), \\ \xi_{1j}, \xi_{2j} &\in \mathbb{R}^{n_{\text{CP}}}, \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

par conséquent, le nombre total de variables d'optimisation est $n_{\text{var}} = 2n_{\text{CP}}N_{\text{mat}}$. Tous les autres paramètres de définition des NURBS introduits dans la Section (3.2.1), tels que les vecteurs de nœuds, les degrés des polynômes de Bernstein, etc., sont définis au début de l'optimisation (ils n'évoluent plus par la suite).

Les CG ρ_{mj} ont des rôles bien précis dans l'OT multi-matériau. Par exemple, si on considère le cas particulier où $N_{\text{mat}} = 2$, les fonctions de pénalisation $\Phi_{mj}, j = 1, 2$ s'écrivent alors :

$$\Phi_{m1} = \rho_{m1}(1 - \rho_{m2}), \quad \Phi_{m2} = \rho_{m1}\rho_{m2}. \quad (6.14)$$

Ainsi, si $\rho_{m1} = 0$ alors $\Phi_{m1} = \Phi_{m2} = 0$, aucun matériau ne participe localement à la définition des CT. En revanche, si $\rho_{m1} = 1$ et $\rho_{m2} = 0$, seulement le matériau 1 participe à la définition de la topologie localement (car $\Phi_{m2} = 0$). Vice-versa, si $\rho_{m1} = \rho_{m2} = 1$, uniquement le matériau 2 participe à la définition de la topologie localement (car $\Phi_{m1} = 0$). D'un point de vue physique, cela signifie que le CG ρ_{m1} permet de répartir les zones de matière et de vide dans le domaine, à l'image de la pseudo-densité classique du modèle NURBS-based-SIMP dans le cas mono-matériau, tandis que le CG ρ_{m2} régit le pourcentage des deux matériaux à l'intérieur des zones pleines. Dans le cadre d'une résolution du problème d'optimisation via un algorithme déterministe, la dérivation des formules analytiques des dérivées partielles des CG et CT par rapport aux variables d'optimisation est d'importance capitale. Par souci de compacité de la notation, considérons la relation existante entre l'indice linéaire τ et les indices i_j ($j = 1, 2, 3$) :

$$\tau := 1 + i_1 + i_2(n_1 + 1) + i_3(n_1 + 1)(n_2 + 1). \quad (6.15)$$

La dérivée partielle du CG du matériau j s'écrit :

$$\frac{\partial \rho_{mj}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})}{\partial \xi_{ik\tau}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq j, i = 1, 2, \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}} \\ R_{\tau}^{(j)}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3}), & \text{if } k = j, i = 1, \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}} \\ \frac{R_{\tau}^{(j)}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})}{\xi_{2j\tau}} [\xi_{1j\tau} - \rho_{mj}(\zeta_{m1}, \zeta_{m2}, \zeta_{m3})], & \\ \text{si } k = j, i = 2, \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}}. & \end{cases} \quad (6.16)$$

Par conséquent, la dérivée partielle du CT du matériau j peut être calculée en utilisant la règle de dérivation en chaîne comme suit :

$$\frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial \xi_{ik\tau}} = \sum_{s=1}^{N_{\text{mat}}} \frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial \rho_{ms}} \frac{\partial \rho_{ms}}{\partial \xi_{ik\tau}} = \frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial \rho_{mk}} \frac{\partial \rho_{mk}}{\partial \xi_{ik\tau}}, \quad i = 2, k = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \tau = 1, \dots, n_{\text{CP}}, \quad (6.17)$$

où $\frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial \rho_{mk}}$ s'écrit

$$\frac{\partial \Phi_{mj}}{\partial \rho_{mk}} = \begin{cases} \prod_{\substack{q=1 \\ q \neq k}}^j \rho_{mq} \prod_{q=j+1}^{N_{\text{mat}}} (1 - \rho_{mq}), & \text{if } k \leq j, \\ - \prod_{q=1}^j \rho_{mq} \prod_{\substack{q=j+1 \\ q \neq k}}^{N_{\text{mat}}} (1 - \rho_{mq}), & \text{if } k > j. \end{cases} \quad (6.18)$$

6.3.2 Définition des fonctions de coût et contraintes

Les problèmes d'OT multi-échelle présentés ici traitent de la minimisation de la compliance macroscopique \mathcal{C}_M soumis à N_{mat} contraintes d'inégalité sur les fractions volumiques des phases matériau composant le VER. Le lien entre les deux échelles est réalisé par le processus d'homogénéisation détaillé dans la Section (6.2). Comme discuté dans la Section (6.2), l'équation d'équilibre

du VER, définie à l'Eq. (6.2), et soumise aux CLP de l'Eq. (6.1), est un problème d'équilibre avec des CL du type de Dirichlet. À l'échelle inférieure, les CT des différentes phases matériau sont combinées pour pénaliser la matrice de raideur du modèle EF du VER comme suit :

$$\hat{\mathbf{K}} := \sum_{e=1}^{N_{me}} \sum_{j=1}^{N_{mat}} \Phi_{mje}^\alpha \hat{\mathbf{L}}_{me}^T \mathbf{K}_{mje}^0 \hat{\mathbf{L}}_{me} = \sum_{e=1}^{N_{me}} \sum_{j=1}^{N_{mat}} \hat{\mathbf{L}}_{me}^T \mathbf{K}_{mje} \hat{\mathbf{L}}_{me}, \quad (6.19)$$

$$\mathbf{K}_{mje}^0, \mathbf{K}_{mje} \in \mathbb{R}^{N_{mDOF}^e \times N_{mDOF}^e}, \hat{\mathbf{L}}_{me} \in \mathbb{R}^{N_{mDOF}^e \times \hat{N}_{mDOF}},$$

où Φ_{mje} est le CT du matériau j évalué au centroïde de l'élément générique et $\alpha > 1$ est le paramètre du schéma d'interpolation SIMP ($\alpha = 3$ dans la suite). N_{mDOF}^e est le nombre de degrés de liberté de l'élément générique du modèle EF du VER, tandis que \mathbf{K}_{mje}^0 et \mathbf{K}_{mje} sont les matrices de raideur de l'élément non-pénalisée et pénalisée, respectivement, exprimées dans le repère global du modèle EF. $\hat{\mathbf{L}}_{me}$ est la matrice de connectivité de l'élément e définie comme suit :

$$\mathbf{u}_{me} = \hat{\mathbf{L}}_{me} \hat{\mathbf{u}}_m, \quad (6.20)$$

avec $\mathbf{u}_e \in \mathbb{R}^{N_{DOF}^e}$ le vecteur des déplacements généralisés de l'élément e .

Concernant la contrainte sur le volume du VER, certaines précautions sont à prendre en compte. En effet, si une contrainte globale est utilisée, c'est-à-dire une contrainte correspondant à la somme du volume de toutes les phases matériau composant le VER, la solution optimale triviale est celle qui garderait uniquement le matériau le plus rigide et éliminerait toutes les phases matériau moins rigides. Le but de cette étude étant de déterminer la répartition optimale des différentes phases matériau en fonction des sollicitations extérieures, l'utilisation d'une fonction globale du volume n'est pas adéquate. C'est pourquoi, plusieurs fonctions contraintes seront considérées, i.e. une par phase matériau. Ainsi, le volume associé à la phase matériau j composant le VER est pénalisé comme suit :

$$V_{mj}(\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{21}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{1N_m}, \boldsymbol{\xi}_{2N_m}) := \sum_{e=1}^{N_{me}} \Phi_{mje} V_{me}, \quad (6.21)$$

avec V_{me} le volume de l'élément générique du modèle EF du VER.

De manière similaire aux Eq. (6.2) et (6.3), l'équation d'équilibre à l'échelle supérieure s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_M & \mathbf{K}_{MBC} \\ \mathbf{K}_{MBC}^T & \tilde{\mathbf{K}}_M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_M \\ \mathbf{u}_{MBC} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_M \\ \mathbf{r}_M \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_M, \mathbf{f}_M \in \mathbb{R}^{N_{MDOF}}, \mathbf{u}_{MBC}, \mathbf{r}_M \in \mathbb{R}^{N_{MBC}}, \mathbf{K}_M \in \mathbb{R}^{N_{MDOF} \times N_{MDOF}}, \mathbf{K}_{MBC} \in \mathbb{R}^{N_{MDOF} \times N_{MBC}},$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_M \in \mathbb{R}^{N_{MBC} \times N_{MBC}}, \quad (6.22)$$

dont le sens physique des diverses quantités est le même que celui défini dans la Section (6.2) mais à l'échelle supérieure. Dans ces travaux, uniquement des forces nodales extérieures sont appliquées à la structure à l'échelle macroscopique et donc $\mathbf{u}_{MBC} = 0$. Ainsi, l'équation d'équilibre est simplifiée telle que :

$$\mathbf{K}_M \mathbf{u}_M = \mathbf{f}_M. \quad (6.23)$$

Le processus d'homogénéisation implique que la compliance à l'échelle macroscopique \mathcal{C}_M est affectée par le tenseur d'élasticité \mathbf{C}_M . Plus précisément, la matrice de rigidité réduite non-singulière \mathbf{K}_M du modèle EF à l'échelle macroscopique s'écrit en fonction de \mathbf{C}_M de la manière suivante :

$$\mathbf{K}_M := \sum_{e=1}^{N_{Me}} \mathbf{L}_{Me}^T \int_{V_{Me}} \mathbf{B}_{Me}^T \mathbf{C}_M(\boldsymbol{\xi}_{11}, \boldsymbol{\xi}_{21}, \dots, \boldsymbol{\xi}_{1N_m}, \boldsymbol{\xi}_{2N_m}) \mathbf{B}_{Me} d\Omega \mathbf{L}_{Me}, \quad (6.24)$$

$$\mathbf{B}_{Me} \in \mathbb{R}^{6 \times N_{MDOF}^e}, \mathbf{L}_{Me} \in \mathbb{R}^{N_{MDOF}^e \times N_{MDOF}},$$

avec N_{Me} le nombre d'éléments constituant le modèle EF à l'échelle macroscopique tandis que N_{MDOF}^e correspond au nombre de degrés de liberté de l'élément e . \mathbf{L}_{Me} est la matrice de connectivité de l'élément e , \mathbf{B}_{Me} est la matrice composée des dérivées des fonctions de formes de l'élément e et V_{Me} est le volume de l'élément e .

Finalement, la souplesse à l'échelle macroscopique s'écrit :

$$\mathcal{C}_M = \mathbf{f}_M^T \mathbf{u}_M = \mathbf{u}_M^T \mathbf{K}_M \mathbf{u}_M. \quad (6.25)$$

De cette manière, le problème d'OT multi-échelle multi-matériau de minimisation de la compliance macroscopique soumis à une contrainte sur le volume du VER peut être formulé comme un PPNLC tel que :

$$\min_{\xi_{1,p}, \xi_{2,p}} \frac{\mathcal{C}_M}{\mathcal{C}_{Mref}}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \mathbf{K}_M \mathbf{u}_M = \mathbf{f}_M, \quad \hat{\mathbf{K}}_m \hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{f}}_m, \\ g_j := \frac{V_{mj}}{V_{mref}} - \gamma_{mj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_{mat}, \\ \xi_{1jk} \in [\rho_{min}, \rho_{max}], \quad \xi_{2jk} \in [\omega_{min}, \omega_{max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{CP}. \end{cases} \quad (6.26)$$

Dans l'Eq. (6.26), $V_{mref} = V_{VER}$ et \mathcal{C}_{Mref} sont les valeurs de référence du volume du VER et de la compliance macroscopique globale, respectivement. γ_j est la fraction volumique imposée à la phase matériau j . Il est évident que les fractions volumiques doivent respecter la condition suivante : $\sum_{j=1}^{N_{mat}} \gamma_j \leq 1$. ρ_{min}, ρ_{max} sont les bornes du champ de densité ρ_{mj} . Les fonctions Φ_{mj} étant des opérations de multiplication sur les ρ_{mj} , les bornes implicites des fonctions Φ_{mj} sont donc $[\rho_{min}^{N_{mat}}, \rho_{max}^{N_{mat}}]$. Ainsi, plus le nombre de matériaux augmente, plus la borne inférieure des fonctions d'interpolations diminue. Dans le cas où un nombre important de matériaux serait utilisé, au delà de quatre typiquement, une attention particulière doit être portée sur la définition de la borne inférieure des fonctions de pseudo-densité pour éviter certains écueils numériques. Dans ces travaux, au plus trois matériaux seront utilisés et la borne inférieure du CG ρ_{mj} est fixée à 0.001 ce qui empêche les fonctions Φ_{mj} de descendre en dessous de 1×10^{-9} . Dans le cas où un nombre plus important de matériaux serait utilisé, il est conseillé d'augmenter ρ_{min} à 0.01. De plus, dans toutes les analyses $\rho_{max} = 1.0$, $\omega_{min} = 0.5$ et $\omega_{max} = 10$ sont les bornes des poids.

La dérivation de l'expression formelle du gradient des fonctions objectif et contraintes par rapport aux variables d'optimisation ξ_{1j} et ξ_{2j} est nécessaire pour la résolution du problème (6.26) via un algorithme déterministe. Le gradient de V_j peut être facilement déduit en considérant l'Eq. (6.21) :

$$\frac{\partial V_{mj}}{\partial \xi_{ik\tau}} = \sum_{e \in \mathcal{S}_{k\tau}} V_e \frac{\partial \Phi_{mje}}{\partial \rho_{mk}} \frac{\partial \rho_{mke}}{\partial \xi_{ik\tau}}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, N_{mat}, \quad \tau = 1, \dots, n_{CP}, \quad (6.27)$$

où $\mathcal{S}_{k\tau}$ est la version discrète du support local du PC τ du CG de la phase matériau k .

Le gradient de \mathcal{C}_M , par contre, n'est pas immédiat. Pour dériver son expression analytique, la propriété du support local des NURBS ainsi que la méthode de l'adjoint sont utilisées. Considérons la proposition suivante :

Proposition 6.3.1 *Considérons un milieu anisotrope déformable soumis à des charges externes données. Si les forces volumiques sont identiquement nulles et que les déplacements imposés sont indépendants de la pseudo-densité, le gradient de la compliance macroscopique s'écrit :*

$$\frac{\partial \mathcal{C}_M}{\partial \xi_{ijk}} = - \sum_{e=1}^{N_{Me}} \sum_{q=1}^6 \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \mathcal{C}_{Mqr}}{\partial \xi_{mik}} \varepsilon_{Meq} \varepsilon_{Mer} V_{Me}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \quad k = 1, \dots, n_{\text{mCP}}, \quad (6.28)$$

où $\frac{\partial \mathcal{C}_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}}$ est défini tel que :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}} = \begin{cases} \frac{1}{V_{\text{RVE}} (\varepsilon_{mq}^0)^2} \sum_{e \in \mathcal{S}_{jk}} \alpha \frac{\partial \rho_{mje}}{\partial \xi_{ijk}} w_{mje} (\varepsilon_{mq}^0), & \text{if } q = r, \\ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{V_{\text{RVE}} \varepsilon_{mq}^0 \varepsilon_{mr}^0} \sum_{e \in \mathcal{S}_{jk}} \alpha \frac{\partial \rho_{mje}}{\partial \xi_{ijk}} w_{mje} (\varepsilon_{mq}^0, \varepsilon_{mr}^0) + \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon_{mq}^0}{\varepsilon_{mr}^0} \frac{\partial \mathcal{C}_{Mqq}}{\partial \xi_{i,pk}} - \frac{\varepsilon_{mr}^0}{\varepsilon_{mq}^0} \frac{\partial \mathcal{C}_{Mrr}}{\partial \xi_{ijk}} \right], & \text{if } q \neq r, \\ j = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \quad k = 1, \dots, n_{\text{CP}}. \end{cases} \quad (6.29)$$

Dans les Eqs. (6.28) et (6.29), ξ_{ijk} correspond à la variable de conception, i.e., pseudo-densité ($i = 1$) ou poids ($i = 2$), évalué au k -ième PC de la j -ième NURBS. La preuve de la proposition 6.3.1 et le pseudo-code de l'algorithme utilisé sont donnés en Annexe D.

Remarque 6.3.2 La quantité ε_{Meq} apparaissant dans l'Eq. (6.28) est la composant q du vecteur déformation macroscopique (notation de Voigt) de l'élément e définie telle que :

$$\varepsilon_{Me} := \mathbf{B}_{Me} \mathbf{L}_{Me} \mathbf{u}_M, \quad (6.30)$$

tandis que la quantité w_{mje} apparaissant dans l'Eq. (6.29) est définie comme suit :

$$w_{mje} := \mathbf{u}_{me}^T \left[\sum_{s=1}^{N_{\text{mat}}} \Phi_{mse}^{\alpha-1} \frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \rho_{mej}} \mathbf{K}_{mse}^0 \right] \mathbf{u}_{me}, \quad (6.31)$$

où $\mathbf{u}_{me} \in \mathbb{R}^{N_{\text{mDOF},e}}$ représente le vecteur des degrés de liberté de l'élément générique à l'échelle inférieure exprimé dans le repère global du VER.

6.4 Résultats numériques

Dans cette section, l'efficacité de la méthode NURBS-based SIMP est testée sur des cas d'études 2D et 3D pour réaliser des OT multi-échelle/multi-matériau. Les résultats montrés dans cette section sont obtenus au moyen du code SANTO, détaillé dans le Chapitre 3, dans lequel la méthode multi-échelle/multi-matériau, détaillée dans la section (6.3), a été implémentée. Comme expliqué dans le Chapitre 3, l'algorithme SANTO utilise la méthode GC-MMA, disponible dans une librairie Python, pour déterminer les solutions des PPNLC. Les calculs statiques nécessaires à la réalisation de l'homogénéisation ainsi que les calculs des valeurs physiques à l'échelle macroscopique sont réalisés par le logiciel ANSYS[®]. Les paramètres définissant le comportement de l'algorithme GC-MMA sont ceux détaillés dans le Tableau 4.1.

Les opérations permettant d'effectuer les opérations de coupe ainsi que l'affichage du CT décrivant chaque phase matériau sont réalisées sur le logiciel ParaView[®].

Pour montrer l'efficacité de la méthode, les aspects suivants seront considérés :

- L'influence des paramètres de définition des entités NURBS, i.e. le nombre de PC ainsi que le degré des fonctions de base sur la répartition optimale des matériaux au sein du VER sera étudiée (seulement pour les cas 2D). En particulier, 3 degrés et 3 nombres de PC différents seront pris en compte.
- L'influence des entités géométriques pour décrire le CG de chaque matériau, i.e. les différences entre l'utilisation d'une formulation NURBS et d'une formulation B-spline, sera étudiée.
- L'influence des fractions volumiques imposées à chaque matériau sera analysée.
- L'influence des conditions de chargement macroscopique sur les solutions optimales sera analysée.

Les bornes inférieure et supérieure des variables d'optimisation sont fixées à : $\rho_{\min} = 10^{-3}$ et $\rho_{\max} = 1$ pour les PC et $\omega_{\min} = 0.5$ et $\omega_{\max} = 10$ pour les poids des PC. De plus, les vecteurs de nœuds définis dans l'Eq. (3.7) ont été répartis uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ pour chaque cas d'étude. Pour l'ensemble des calculs de ce chapitre, trois matériaux au plus seront considérés. Les paramètres mécaniques de ces trois matériaux sont listés dans le Tableau 6.1.

TABLE 6.1 – propriétés mécaniques des matériaux

Paramètres	matériau 1 (M1)	matériau 2 (M2)	matériau 3 (M3)
Module d'Young E_m (MPa)	110000	71000	200000
Coefficient de Poisson ν_m	0.34	0.33	0.3
Densité matériau γ_m (kg/mm^3)	$4.5e^{-6}$	$2.7e^{-6}$	$7.8e^{-6}$

Enfin, des conditions de symétrie ont été imposées sur le champ de pseudo-densité qui définit le VER, dans le but d'avoir une topologie optimisée qui possède un comportement orthotrope. Ainsi, 2 plans de symétrie sont imposés dans le cadre des calculs 2D tandis que 3 plans de symétrie orthogonale seront imposés pour les calculs 3D. La présence des axes de symétrie permet donc la réduction du nombre de variables d'optimisation de sorte que :

$$n_{\text{var}} = \begin{cases} \prod_{i=1}^N \theta_i, & \text{pour les entités B-Spline,} \\ 2 \prod_{i=1}^N \theta_i, & \text{pour les entités NURBS,} \end{cases} \quad (6.32)$$

avec $N = 2$ pour les cas 2D et $N = 3$ pour les cas 3D.

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{n_i + 1}{2}, & \text{si } n_i \text{ est impair,} \\ \left\lfloor \frac{n_i + 1}{2} \right\rfloor + 1, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (6.33)$$

où $\lfloor \dots \rfloor$ est l'opérateur partie entière par défaut. Dans ce chapitre, deux cas 2D et un cas 3D seront étudiés.

6.4.1 Cas d'études 2D

Le premier cas 2D, noté BKMS1-2D, est l'étude d'une poutre encastree. La géométrie ainsi que les conditions aux limites à l'échelle macroscopique sont présentées dans la Fig. 6.2. La plaque est un rectangle de dimensions $L_M \times 0, 4L_M$, avec $L_M = 500 \text{ mm}$ dont l'épaisseur vaut $t_M = 1 \text{ mm}$. La plaque est encastree sur son extrémité $x_{M1} = 0$ et une force $F_M = 1000 \text{ N}$ est appliquée au point A ($x_{M1} = L_M; x_{M2} = 0, 2L_M$) suivant la direction $-x_{M2}$.

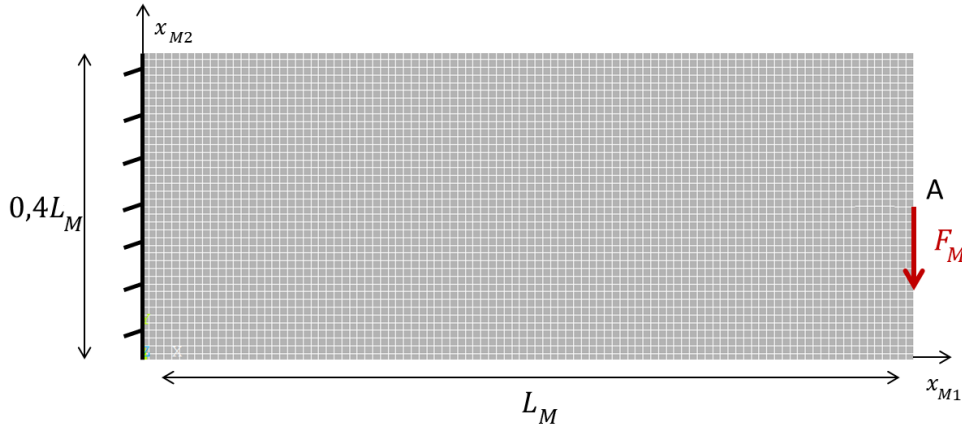


FIGURE 6.2 – Premier cas d'étude 2D (BKMS1-2D) : géométrie de la poutre encastree

La taille du VER est choisie de manière à répéter au minimum 10 fois le VER dans les directions x_{1M} et x_{2M} . Dans cet exemple, $L_{m1} = L_{m2} = 5 \text{ mm}$, ainsi le VER est répété 100 fois dans la direction x_{1M} et 40 fois dans la direction x_{2M} .

Les modèles EF aux deux échelles sont réalisés à l'aide d'éléments PLANE182 (quatre nœuds/deux degrés de liberté par nœud), sous l'hypothèse des contraintes planes. Le nombre total d'éléments composant les modèles EF aux deux échelles est donc de $N_{Me} = 4000$ et $N_{me} = 1600$.

Les variables d'optimisation sont initialisées, dans un premier temps, de manière uniforme et égale à 0.5 pour chaque matériau. Puis, 1, 4 ou 16 "trous" sont créés dans la topologie du VER. Les trous sont créés en imposant la valeur initiale de certains PC à la borne inférieure. Pour chaque trou, le nombre de PC dont la valeur est initialisée à la borne inférieure, est calculé de manière automatique dans le but de respecter les conditions sur les fractions volumiques des matériaux. Un exemple des topologies initiales utilisées pour le cas d'étude BKMS1-2D est donné dans la Fig. 6.3. Les tailles des "trous" dans la topologie initiale peut varier en fonction du nombre de PC utilisés et de la contrainte sur la fraction volumique imposée à chaque matériau.

Dans ce contexte, l'impact des fractions volumiques de chaque matériau sur la topologie finale sera étudié. Ainsi, plusieurs cas, présentés dans le Tableau 6.2 seront testés.

TABLE 6.2 – Fractions volumiques BKMS1-2D

	γ_{m1}	γ_{m2}	γ_{m3}
<i>CL1-2mat</i>	0.2	0.2	0
<i>CL2-2mat</i>	0.15	0.25	0
<i>CL3-2mat</i>	0.3	0.1	0
<i>CL4-2mat</i>	0.1	0.3	0
<i>CL5-2mat</i>	0.2	0	0.2
<i>CL1-3mat</i>	0.15	0.15	0.1

Ainsi, pour chaque cas étudié, la fraction volumique totale est $\gamma_m = \sum_{j=1}^{N_{\text{mat}}} \gamma_{mj} = 0.4$.

Le second cas 2D, noté BKMS2-2D, est l'étude d'une plaque trouée. La géométrie ainsi que les conditions aux limites à l'échelle macroscopique sont présentées dans la Fig. 6.4. La plaque est un carré de dimensions $a_{M1} = a_{M2} = 100 \text{ mm}$ avec un trou de rayon $R = \frac{a_{M1}}{3}$ et une épaisseur $t_M = 1 \text{ mm}$. Deux forces de traction linéiques (F_{M1} et F_{M2}) sont appliquées sur les arêtes AE et

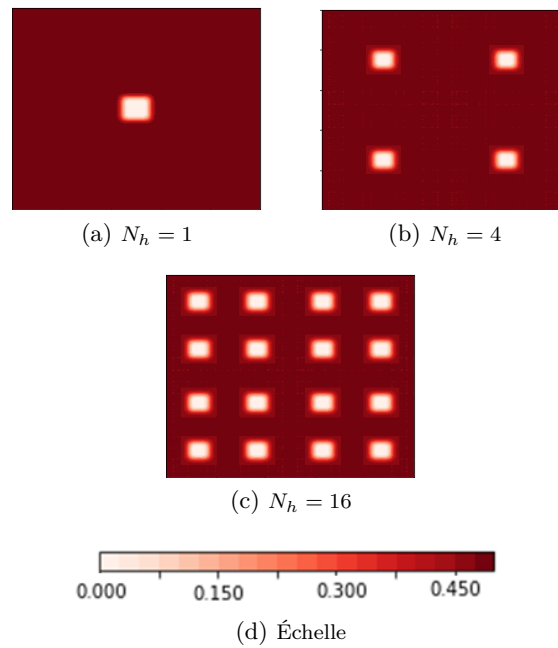


FIGURE 6.3 – Configuration initiale du CG de chaque phase matériau dans le VER - BKMS1-2D

AB. La plaque est soumise à des conditions aux limites symétriques sur les arêtes BC et ED.

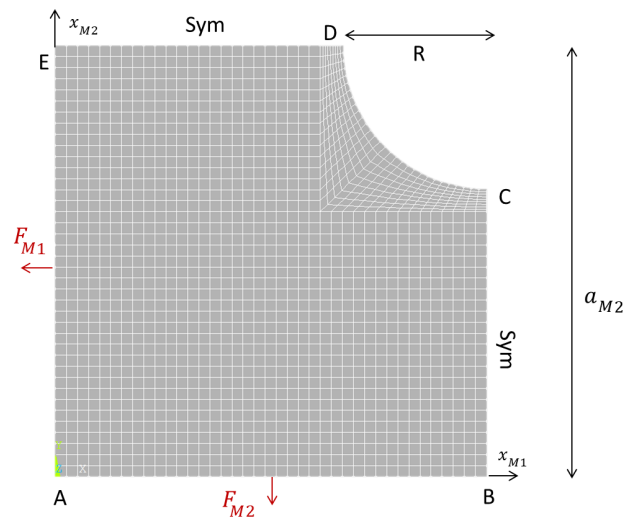


FIGURE 6.4 – Deuxième cas d'étude 2D (BKMS2-2D) : géométrie de la plaque trouée

La taille du VER est choisie de manière à répéter au minimum 10 fois le VER dans les directions x_{M1} et x_{M2} . Pour ce benchmark, $L_{m1} = L_{m2} = 5 \text{ mm}$, ainsi le VER est répété 20 fois dans les directions x_{M1} et x_{M2} .

Les modèles EF aux deux échelles sont réalisés à l'aide d'éléments PLANE182 (quatre nœuds/deux degrés de liberté par nœud), sous l'hypothèse de contraintes planes. Le nombre total d'éléments

composant les modèles EF aux deux échelles est ainsi $N_{Me} = 1566$ et $N_{me} = 1600$.

L'impact des conditions de chargement à l'échelle macroscopique sera étudié sur cet exemple. Pour cela, plusieurs calculs seront lancés en considérant des valeurs différentes pour F_{M1} et F_{M2} , comme illustrée dans le Tableau 6.3.

TABLE 6.3 – Conditions de chargement utilisées pour BKMS2-2D

	CC1	CC2	CC3
F_{M1} (N/mm)	10	0	7.07
F_{M2} (N/mm)	0	10	7.07

Pour ce cas d'étude, les solutions initiales sont définies de manière différente au premier cas d'étude. En effet, dans le but de minimiser au plus les zones grises dans la solution initiale, le champ de densité ρ_{m1} est fixé uniforme et égale à 1 tandis que les autres champ de densité $\rho_{mi}, i > 1$ sont définis uniformes et égaux à 0.5. Pour le cas 2 matériaux, les CT $\Phi_{mi}, i = 1, 2$ sont donc définis uniformes et de valeur 0.5. Afin de respecter les contraintes sur la fraction volumique du matériau, des trous sont créés dans le champ de densité ρ_{m1} . Ces trous sont pris de rayon suffisamment grand pour respecter la contraintes. Le champ ρ_{m1} définissant les zones de matière et de vide, les trous faits dans le champ ρ_{m1} se retrouvent dans les CT Φ_{mi} . Les CT Φ_{mi} des solutions initiales sont définis dans la Fig. 6.5.

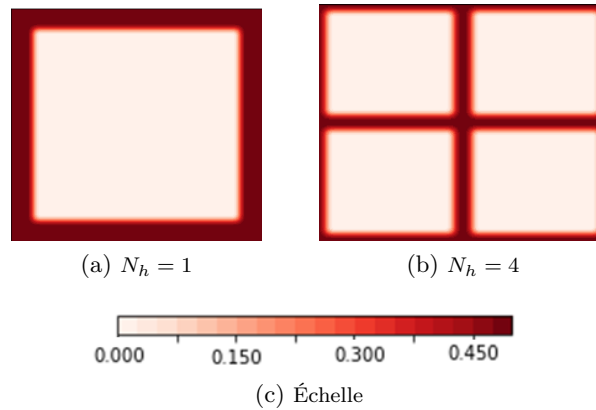


FIGURE 6.5 – Configuration initiale du CT de chaque phase matériau dans le VER - BKMS2-2D

6.4.2 BKMS1-2D : résultats

Influence des paramètres entiers et du type d'entité géométrique sur la solution optimale

Une campagne de tests a été réalisée sur BKMS1-2D dans le but de déterminer l'impact des paramètres de définition de la NURBS décrivant le CG de chaque phase matériau ainsi que la fraction volumique de chaque matériau sur la topologie finale. Pour chaque problème, le PPNLC défini dans l'Eq. (6.26) est résolu en considérant les combinaisons suivantes de degrés des fonctions de base et du nombre de PC : (a) $p_j = 2, 3, 4$ et (b) $n_{CP} = 484, 784, 1296$ pour les entités B-spline et NURBS.

Les résultats sont donnés en Fig. 6.6 pour les entités B-spline et en Fig. 6.7 pour les entités NURBS en termes de nombre d'itérations N_{iter} et de compliance macroscopique \mathcal{C}_M . Ces solutions ont été obtenues en considérant une solution initiale caractérisée par des CT initiaux composés de 4 trous et respectant la contrainte sur la fraction volumique associée à chaque phase matériau. Le problème a été résolu en considérant les matériaux M1 et M2 du Tableau 6.1 avec des fractions volumiques égales à $\gamma_{m1} = \gamma_{m2} = 0.2$, correspondant à la configuration CL1-2mat du Tableau 6.2.

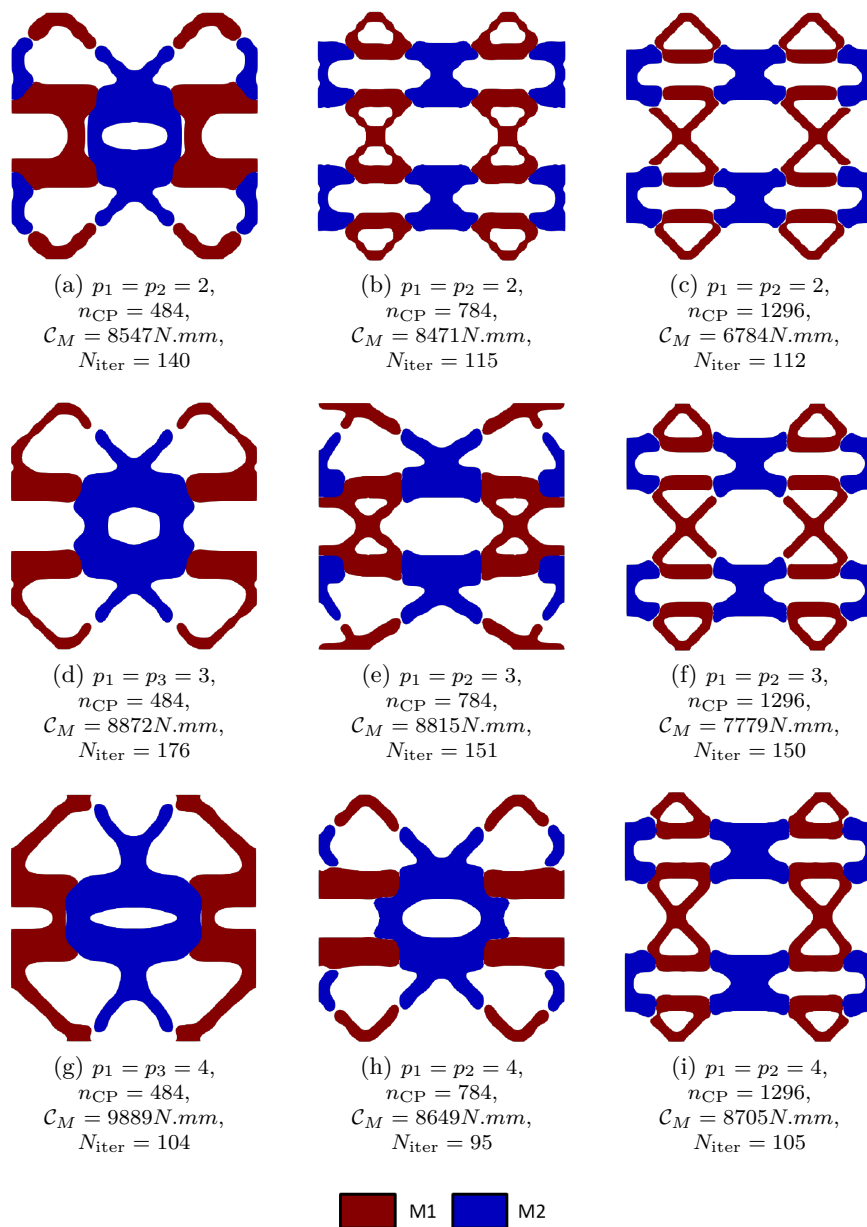


FIGURE 6.6 – Résultats B-spline - problème BKMS1-2D : sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (6.26)

Pour chaque problème présenté dans les Figs. 6.6 et 6.7, la contrainte sur le volume de chaque

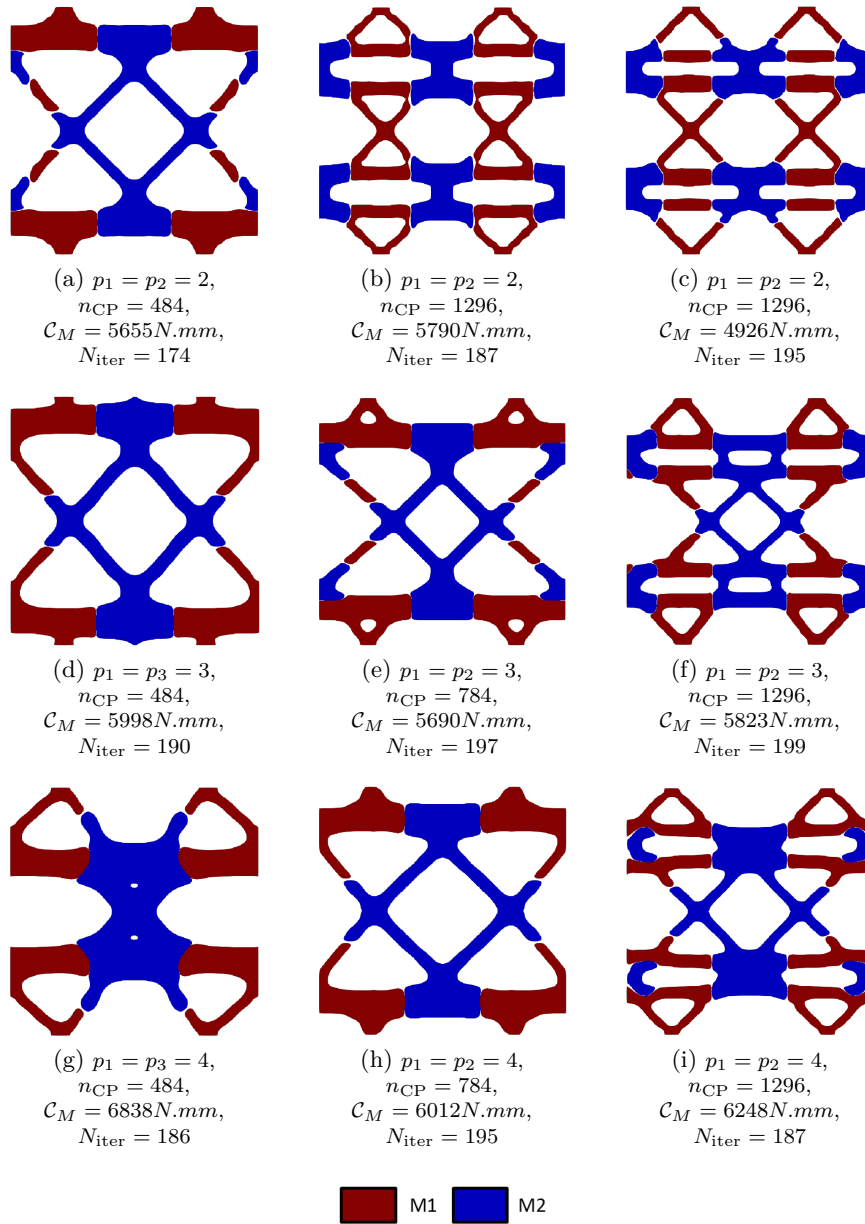


FIGURE 6.7 – Résultats NURBS : problème BKMS1-2D - sensibilité de la topologie optimale au nombre de PC et au degré des fonctions de base pour le problème (6.26)

matériau est respectée et se situe à la frontière du domaine de faisabilité. Une synthèse de l'ensemble des résultats de cette analyse de sensibilité est donnée dans la Fig. 6.8. À partir de ces résultats, certaines remarques peuvent être faites :

- Les résultats obtenus dans le cadre des analyses multi-échelle/multi-matériau 2D, ne respectent pas toujours les règles habituelles de l'impact des degrés des fonctions de base et du nombre de PC, sur la topologie finale. En effet, sur les calculs d'OT mono-échelle mono-matériau, plus le nombre de PC augmente et plus le degré des fonctions de base diminue,

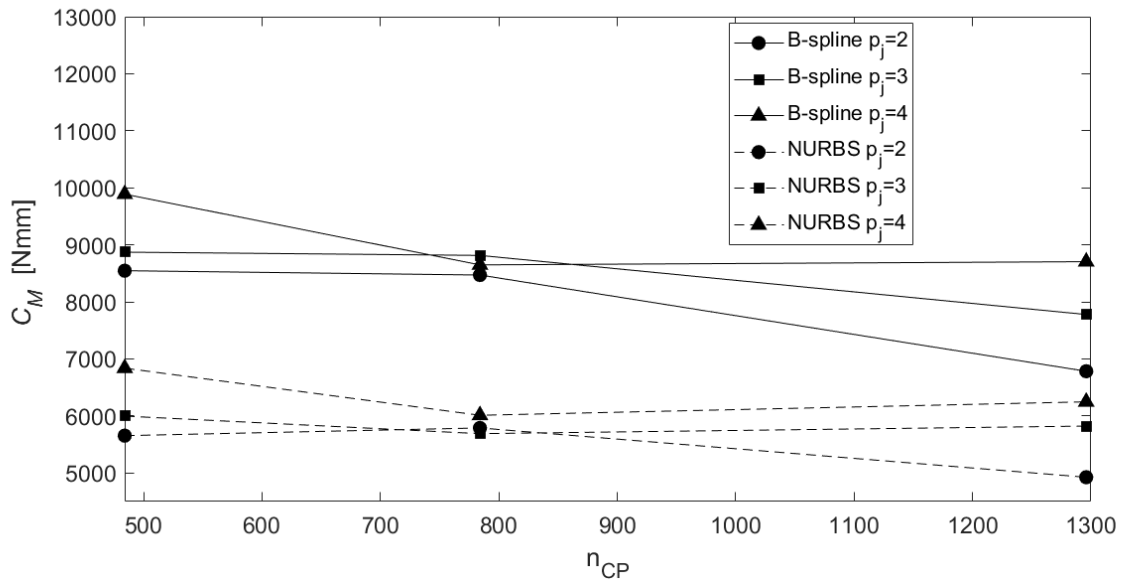


FIGURE 6.8 – Probleme BKMS1-2D : synthèse résultats

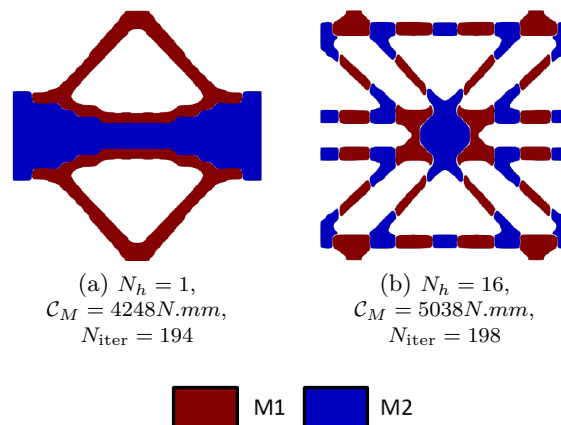


FIGURE 6.9 – Problème BKMS1-2D : influence de la configuration initiale sur la solution optimale

meilleur est le résultat en termes de fonction objectif. Dans les calculs présentés dans les Figs. 6.6 et 6.7, cette règle n'est pas respectée de manière systématique. En effet, pour les résultats B-Spline, comme montré dans les courbes de la Fig. 6.8, lorsque $n_{CP} = 784$ le pire résultat, en termes de C_M est obtenu avec $p_j = 3$ et non pas avec $p_j = 4$. Sur les courbes de tendance des résultats NURBS, pour la même valeur du nombre de PC le meilleur résultat est obtenu avec $p_j = 3$ et non pas avec $p_j = 2$. Cette divergence par rapport aux règles usuelles est liée à la forte non-convexité du problème. En effet, cette non-convexité amène l'algorithme à converger sur des minima locaux qui ne satisfont pas le comportement observé dans les chapitres précédents.

- Cette non-convexité impose une réflexion sur le choix de la répartition initiale du CG de

chaque phase matériau (et par conséquent du CT de chaque matériau) sur le domaine du VER qui a une influence considérable sur la solution optimale. Cet effet est illustré dans la Fig. 6.9 qui présente le résultat d'un calcul d'OT effectué sur BKMS1-2D, en utilisant des surfaces NURBS de degré 2 et un nombre de PC égale à 1296 pour décrire le CG de chaque phase matériau, et en partant de deux CG initiaux différents. Les deux solutions optimales illustrées dans la Fig. 6.9 ont été obtenues en considérant $N_h = 1$ trou (Fig. 6.9 a) et $N_h = 16$ trous (Fig. 6.9 b). Les résultats présentés dans la Fig. 6.9 montrent des solutions totalement différentes en termes de répartition des matériaux M1 et M2 sur le domaine du VER à cause de la solution initiale choisie. En ce qui concerne la fonction objectif, les résultats sont caractérisés par une différence de 15 % entre la valeur de la compliance macroscopique associée aux deux solutions, dont la solution optimale correspondant au cas $N_h = 1$ est caractérisée par la plus faible valeur de la fonction objectif. D'autres travaux, voir [118, 119], ont montré que lors de l'optimisation d'un PPNLC multi-échelle traitant de la minimisation de la compliance soumise à une contrainte sur le volume, le choix d'une répartition de topologie non-uniforme donne de meilleurs résultats en termes de compliance. Le choix de la répartition initiale impacte donc fortement la convergence de l'algorithme GC-MMA qui aura tendance à converger vers le minimum local (faisable) le plus proche du point de départ.

- Le nombre de PC et le degré des fonctions de base affectent la taille du support local et imposent ainsi une condition sur l'épaisseur minimale des branches topologiques. En effet, plus le degré des fonctions de base est faible et plus le nombre de PC est élevé, plus petit sera l'épaisseur des branches topologiques. On remarque ainsi dans les Figs. 6.6 et 6.7 que les résultats dont le nombre de PC est important (et le degré faible) sont composés de fines branches topologiques. Le diamètre des branches topologiques est un paramètre important à prendre en compte lors des optimisations multi-échelles car les topologies optimisées doivent tenir compte des limites techniques des procédés de FA, en particulier dans le cadre d'une OT multi-échelle/multi-matériau. Comme expliqué dans [16], un des avantages principaux dérivant de l'utilisation des hypersurfaces NURBS est lié à la propriété de support local qui établit un filtre implicite sur les CG et CT utilisés pour les diverses phases matériau. Plus précisément, en choisissant proprement le nombre de PC et les degrés des polynômes de Bernstein [16] il est possible de satisfaire la condition sur l'épaisseur minimale sans introduire une contrainte explicite dans la formulation du problème d'OT.
- Les solutions NURBS donnent des meilleurs résultats en termes de fonction objectif que les entités B-spline, pour un nombre de PC et des degrés de fonctions de base égaux.

Influence de la fraction volumique de chaque matériau et du nombre de matériaux sur la solution optimale

Un autre aspect à prendre en compte dans ces calculs est la fraction volumique imposée à chaque matériau lors de l'optimisation. En effet, comme présenté dans la section 6.3, une fonction contrainte est imposée sur le volume de chacun des matériaux. Les matériaux n'ayant pas la même rigidité, les résultats seront donc fortement modifiés en considérant des fractions volumiques imposées différentes. La Fig. 6.10 présente les résultats des calculs pour les entités B-spline et NURBS en considérant l'ensemble des fractions volumiques détaillées dans le Tableau. 6.2. Ces analyses ont été réalisées en utilisant des entités B-spline et NURBS caractérisées par des fonctions de base de degrés 2 et par un nombre de PC égal à 1296. Pour chaque calcul, la solution initiale est caractérisée par des CT initiaux composés de 4 trous et respectant la contrainte sur la fraction volumique as-

socié à chaque phase matériau. Les résultats sont donnés en termes de compliance \mathcal{C}_M et de nombre d'itérations nécessaires pour arriver à convergence.

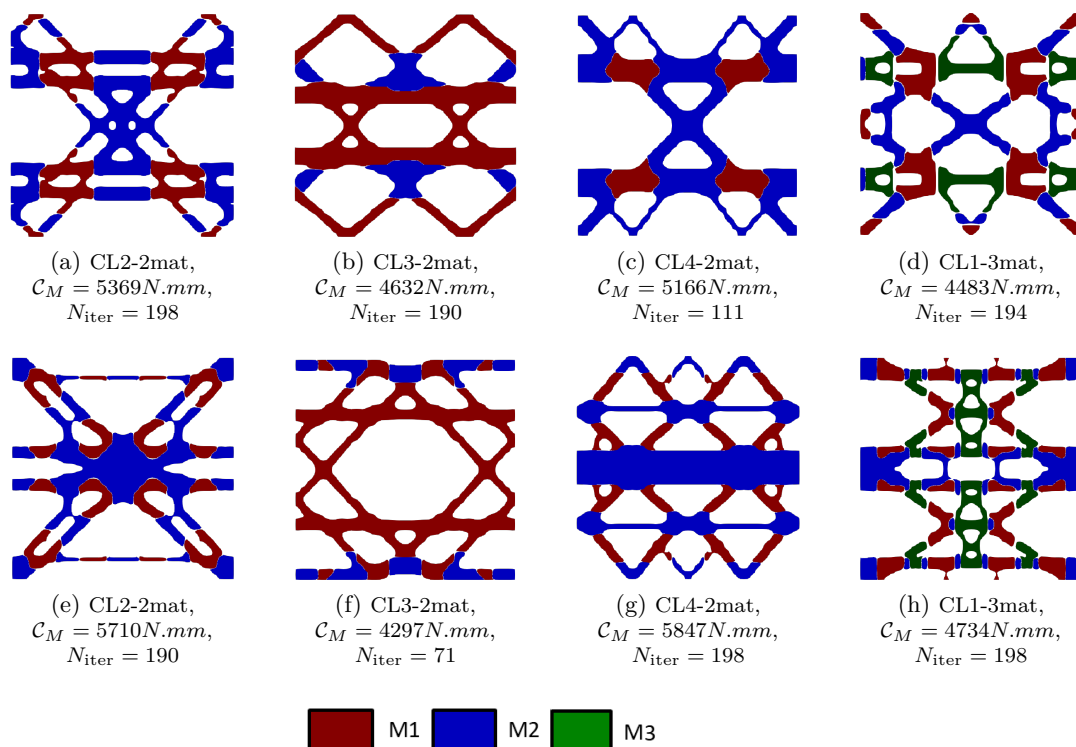


FIGURE 6.10 – BKMS1-2D - sensibilité de la solution optimale aux fractions volumiques et aux nombre de phases matériau pour le problème (6.26) pour des solutions B-spline (a) - (d) et NURBS (e) - (h).

Pour l'ensemble des résultats présentés dans la Fig. 6.10, la contrainte sur la fraction volumique de chaque phase matériau est respectée et se situe à la frontière du domaine faisable, i.e. le maximum de matière possible pour chaque matériau. A la suite des résultats présentés dans la Fig. 6.10, certaines constatations peuvent être faites :

- Comme attendu, les résultats NURBS donnent de meilleurs résultats, en termes de fonction objectif, que les résultats B-spline.
- Lorsque seulement deux matériaux sont considérés, les résultats donnent de meilleures performances, en termes de fonction objectif, lorsque la fraction volumique de M1 est plus élevée que celle de M2. En effet, le PPNLC, résolu ici, étant un problème de minimisation de la compliance, les meilleurs résultats sont obtenus lorsque le matériau le plus rigide possède la fraction volumique la plus importante. Dans le cas où une fonction contrainte sur la fraction volumique globale aurait été utilisée, i.e. une fonction contrainte qui serait composée de la somme des fractions volumiques des deux matériaux, le matériau le moins rigide disparaîtrait totalement de la solution finale pour privilégier M1 qui est le matériau le plus rigide.
- Le CNLPP peut aussi être résolu en utilisant 3 matériaux comme le montre les résultats (d) et (h) de la Fig. 6.10. Compte tenu de la valeur des fractions volumiques de chaque matériau

listées dans le Tableau 6.2, la solution optimale montre des performances proches de celle du cas CL3-2mat, malgré une fraction volumique inférieure associée aux deux phases plus rigides, i.e. les matériaux 1 et 3 dans le Tableau 6.1.

6.4.3 BKMS2-2D : résultats

L'influence des sollicitations mécaniques appliquées à l'échelle macroscopique sur la répartition optimale des phases matériau dans le VER est étudiée ici en considérant différents cas de chargement appliqués à la structure. En particulier, les combinaisons de forces détaillées dans le Tableau. 6.3 sont appliquées à la structure. L'ensemble des problèmes a été résolu en considérant des entités B-Spline et NURBS définies par un nombre de PC $n_{CP} = 35 \times 35$ et de degrés $p_1 = p_2 = 2$. La valeur de la pseudo-densité au PC a été initialisée en considérant la solution initiale avec 1 et 4 trous comme illustré dans la Fig. 6.3 Pour l'ensemble des calculs présentés dans cette section, les matériaux M1 et M3 du Tableau 6.1 ont été utilisés dont les fractions volumiques apparaissant dans l'Eq. (6.26) sont fixées à $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.2$, ce qui correspond au cas CL5-2mat du Tableau 6.2.

Les résultats sont comparés par rapport à plusieurs critères : (1) la valeur de la fonction objectif finale ; (2) le nombre d'itérations pour atteindre la convergence ; (3) les constantes élastiques du matériau homogène équivalent à l'échelle macroscopique calculées à partir de l'inverse du tenseur d'élasticité. Pour l'ensemble des résultats, la condition sur la fraction volumique de chaque matériau est respectée et se situe à la frontière du domaine finale faisable. Les résultats sont donnés dans les Figs. 6.11 et 6.12 pour le cas $N_h = 4$ et $N_h = 1$, respectivement. Le Tableau 6.4 présente les constantes élastiques du matériau homogénéisé à l'échelle macroscopique pour chaque cas étudié.

TABLE 6.4 – Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS2-2D - résultats Figure 6.11

Constantes élastiques	CC1		CC2		CC3	
	B-spline	NURBS	B-spline	NURBS	B-spline	NURBS
E_{M1} (MPa)	31410	37271	9039	15489	15172	27197
E_{M2} (MPa)	7176	13466	31906	38231	15181	27197
G_{M12} (MPa)	2107	2019	1714	1672	3026	1204
ν_{M12}	0.08	0.07	0.26	0.14	0.23	0.11

TABLE 6.5 – Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS2-2D - résultats Figure 6.12

Constantes élastiques	CC1		CC2		CC3	
	B-spline	NURBS	B-spline	NURBS	B-spline	NURBS
E_{M1} (MPa)	37546	40625	12418	15871	21120	28941
E_{M2} (MPa)	11126	11131	37373	39871	21120	28941
G_{M12} (MPa)	2341	2903	2207	2300	1492	1516
ν_{M12}	0.07	0.08	0.20	0.20	0.18	0.13

À partir des résultats présentés dans la Fig. 6.11 et dans la Tableau 6.4, plusieurs remarques peuvent être faites :

- Les conditions de chargement à l'échelle macroscopique ont une très forte influence sur la répartition optimale des matériaux dans le VER à l'échelle inférieure. En effet, comme on

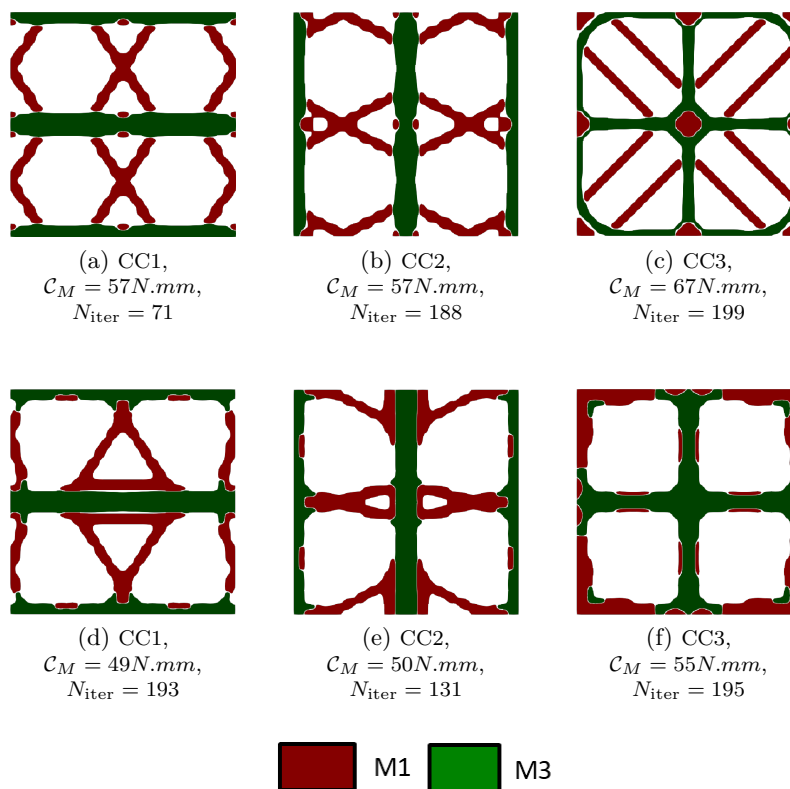


FIGURE 6.11 – BKMS2-2D : sensibilité de la topologie optimale aux sollicitations extérieures macroscopiques - initialisation avec $N_h = 4$ trous ; solutions B-spline (a) - (c) et NURBS (d) - (f)

peut le voir sur la Fig. 6.11, les topologies finales ont des formes très différentes suivant les conditions de chargement utilisées. En particulier, les topologies évoluent dans le but d'optimiser les réponses élastiques macroscopiques du matériau homogène équivalent. La matrice C_M , qui dépend des topologies optimisées, évolue de manière à trouver les propriétés élastiques qui permettent à la structure de supporter le plus efficacement possible les conditions de chargement. En effet, sur l'ensemble des résultats obtenus dans les Figs. 6.11 et 6.12, les phases matériaux se répartissent de manière à ce que les branches topologiques soient plus épaisses dans le sens d'application de l'effort et elles se composent principalement du matériau le plus rigide, i.e. le matériau 3. Le matériau le moins rigide sert, quant à lui, à relier les branches topologiques entre elles et à assurer une bonne cohésion structurelle. De plus, en considérant de plus près le Tableau 6.4, on remarque que les cas CC1 et CC2 présentent un comportement orthotrope dont l'axe d'orthotropie principal est orienté, respectivement, suivant les axes x_{M1} et x_{M2} , i.e. suivant les axes d'applications des conditions de chargement. Dans le cas CC3, i.e. lorsque $F_{M1} = F_{M2}$, la topologie finale se démarque par une symétrie du "carrée", c'est-à-dire que $E_{M1} \approx E_{M2}$ sans pour autant avoir un comportement isotrope puisque $G_{M12} \neq \frac{E_{M1}}{2(1 + \nu_{M12})}$. Ces constatations sont valables aussi bien pour les entités B-Splines que pour les entités NURBS.

- Le choix de la solution initiale est visible sur le résultat final des calculs d'OT ultra-échelle/multi-

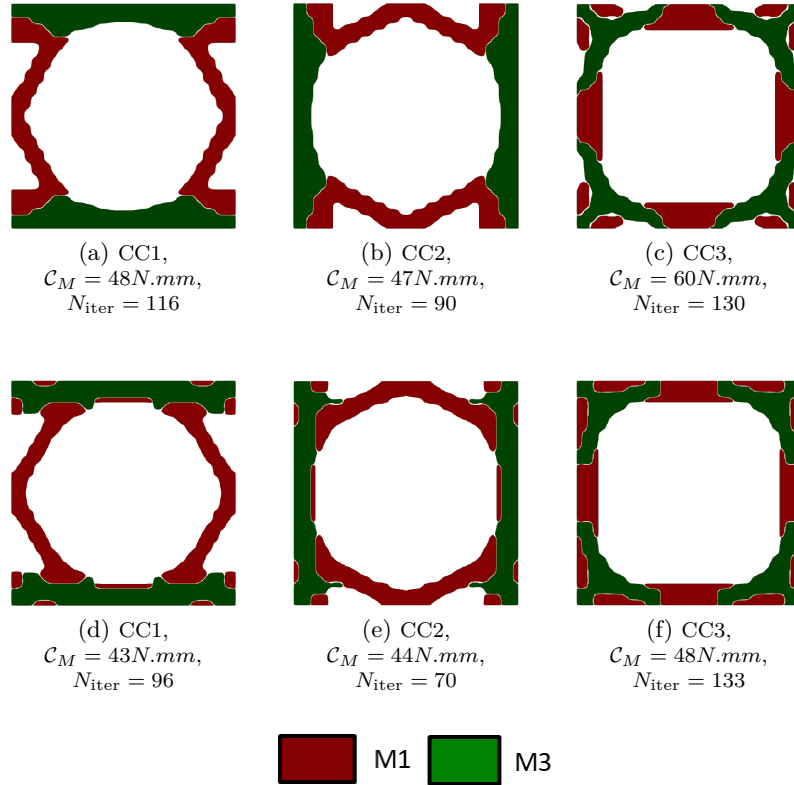


FIGURE 6.12 – BKMS2-2D : sensibilité de la topologie optimale aux sollicitations extérieures macroscopiques - initialisation avec $N_h = 1$ trou; solutions B-spline (a) - (c) et NURBS (d) - (f)

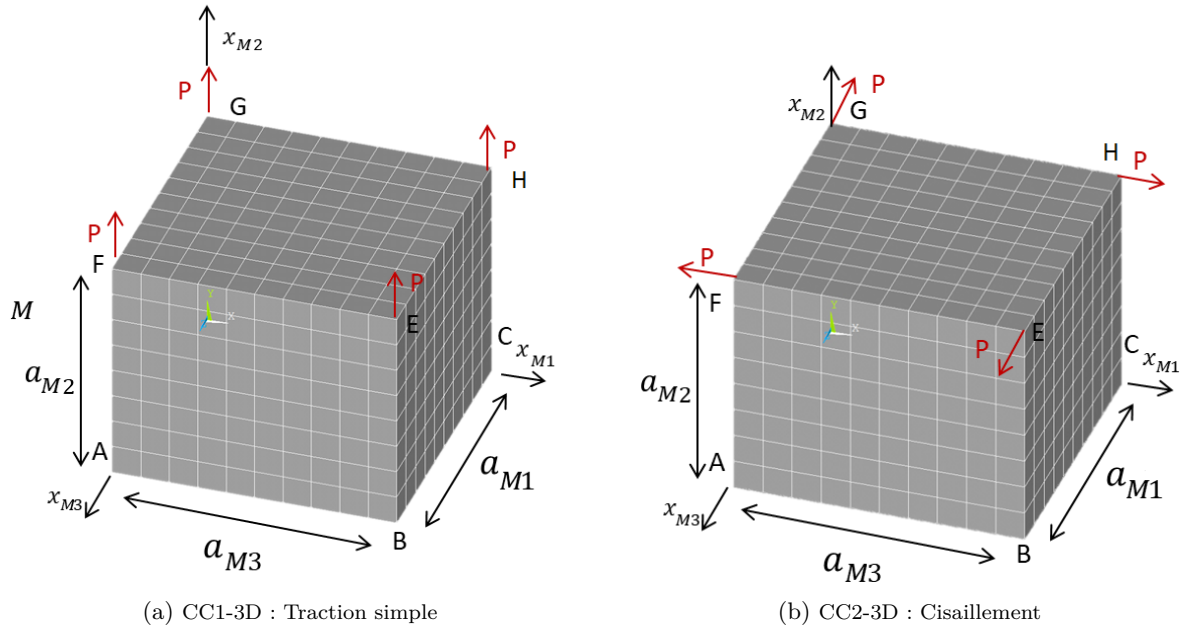
matériau. En effet, en analysant les Figs. 6.11 et 6.12, on remarque que les résultats ont des topologies similaires aux solutions initiales.

- Les résultats NURBS ont donnés des propriétés élastiques du matériau homogénéisé meilleures dans l'ensemble des directions que les résultats B-Spline. En effet, à conditions de chargement équivalentes, les modules E_{M1} , E_{M2} et G_{M12} sont systématiquement plus élevées sur le résultat NURBS que sur le résultat B-Spline. Ce constat n'est pas valable pour le coefficient de Poisson ν_{M12} qui est équivalent entre les deux modélisations.

6.4.4 Cas d'études 3D

Le troisième cas d'étude (BKMS3-3D) traite de l'OT d'une structure parallélépipédique telle que détaillée dans la Fig. 6.13.

Le parallélépipède est défini à l'échelle macroscopique tel que : $a_{M1} = a_{M3} = 100 \text{ mm}$ et $a_{M2} = 80 \text{ mm}$. La structure est maillée avec des éléments SOLID185 (8 nœuds, 3 degrés de liberté par nœud, intégration réduite), de taille 10mm pour un nombre total d'éléments : $N_{Me} = 800$. De plus, la structure est encadrée aux nœuds A, B, C et D (non visible sur la figure) correspondant aux quatre coins de la face inférieure. Comme montré sur la Fig. 6.13, le BKMS3-3D est résolu en considérant deux conditions de chargement différentes appliquées sur les nœuds E, F, G, H : (a) un chargement en traction simple ; (b) un chargement en cisaillement. La valeur de la force appliquée



(a) CC1-3D : Traction simple

(b) CC2-3D : Cisaillement

FIGURE 6.13 – BKMS3-3D : Géométrie et conditions de chargement

sur chacun des nœuds E, F, G, et H est $P = 300 \text{ N}$.

À l'échelle inférieure, le VER est défini tel que : $Lmi = 0.1 \text{ mm}$, $i = 1, 2, 3$. La taille du VER a été choisie de manière à répéter plus de 10 fois le VER dans les différentes directions à l'échelle macroscopique. Le VER a été maillé avec $N_{me} = 8000$ éléments SOLID185.

Les calculs sont réalisés avec les modèles B-Spline et NURBS en considérant $n_1 = n_2 = n_3 = 17$, soit 5832 PC et en prenant comme degré des fonctions de base $p_1 = p_2 = p_3 = 2$.

Pour les deux conditions de chargement, l'Eq. (6.26) a été résolue en considérant différentes valeurs de fractions volumiques, détaillées dans le Tab. 6.6, pour chaque matériau.

TABLE 6.6 – Fractions volumiques BKMS3-3D

	γ_1	γ_2	γ_3
<i>CL1-2mat</i>	0.2	0.2	0
<i>CL2-2mat</i>	0.3	0.1	0
<i>CL3-2mat</i>	0.1	0.3	0
<i>CL1-3mat</i>	0.15	0.15	0.1

Ainsi, pour chaque cas étudié, la fraction volumique totale est $\gamma_m = \sum_{j=1}^{N_{\text{mat}}} \gamma_{mj} = 0.4$.

Le Tableau 6.7 montre les topologies optimisées pour les cas NURBS et B-Spline lorsque la structure macroscopique est soumise à différents cas de chargement en considérant le cas avec 2 matériaux, i.e. les matériaux M1 et M2 du Tableau 6.1, avec des fractions volumiques correspondant au cas CL1-2mat du Tableau 6.6. Ces résultats ont été obtenus en considérant une solution initiale caractérisée par $N_h = 64$ trous respectant les fractions volumiques de chaque phase matériau. Les résultats sont donnés en termes de compliance macroscopique finale, \mathcal{C}_M , et en nombre d'itérations

TABLE 6.7 – BK3-3D : topologies optimisées pour différents cas de chargement

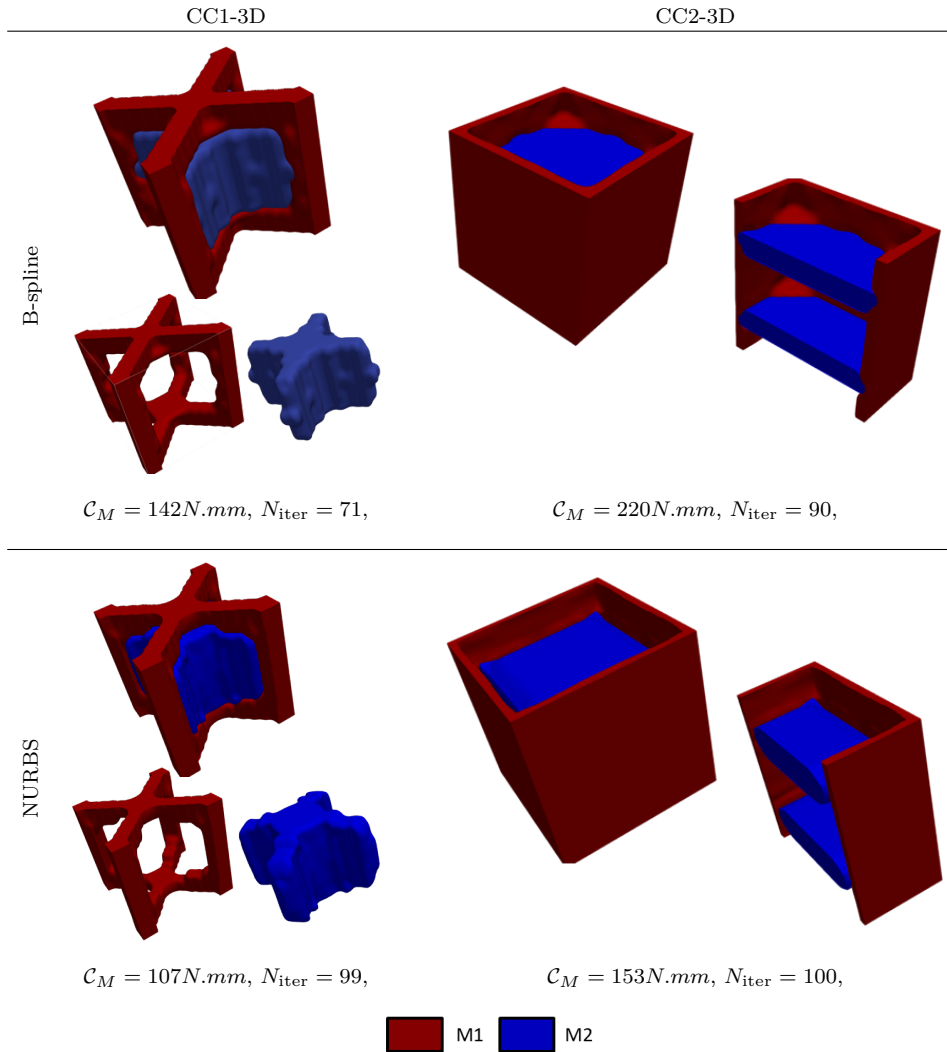
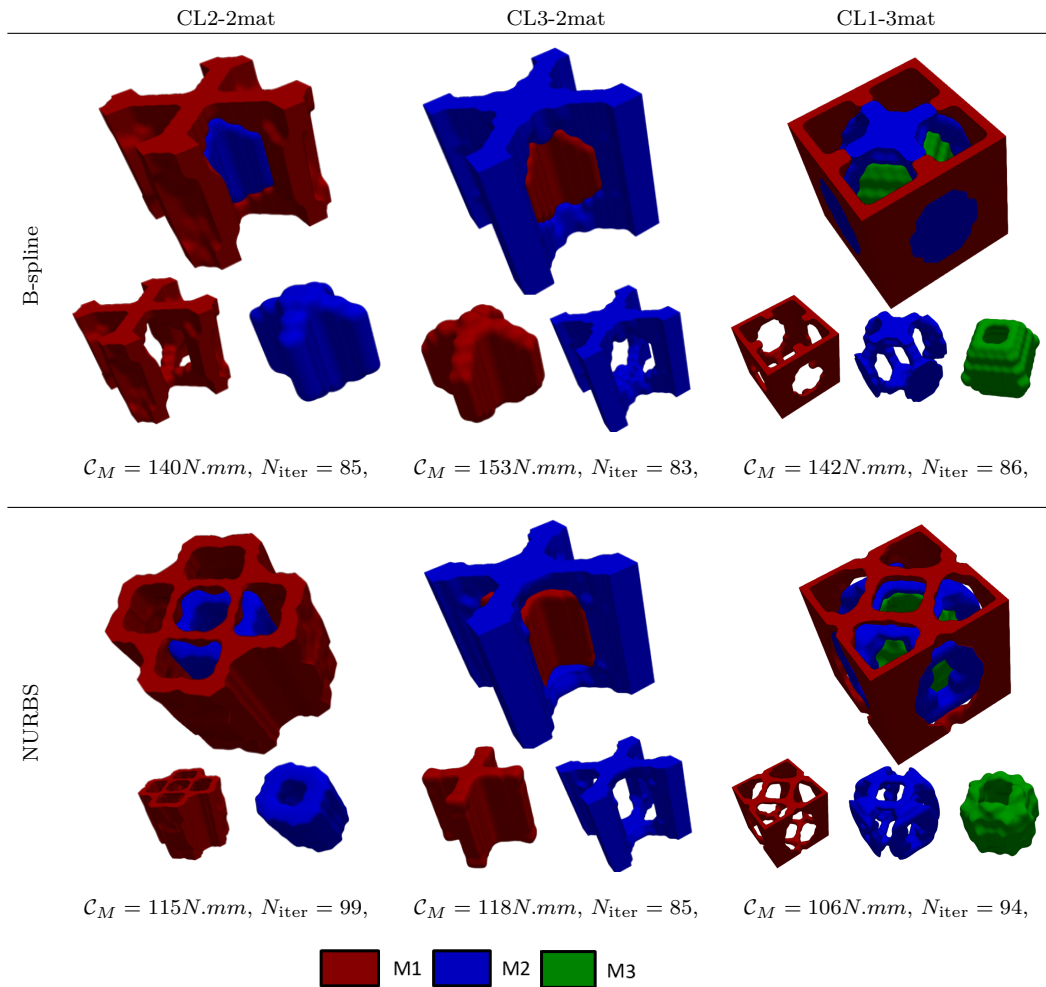


TABLE 6.8 – Synthèse propriétés mécaniques matériaux homogénéisés BKMS3-3D

Constantes élastiques	CC1-3D		CC2-3D	
	B-spline	NURBS	B-spline	NURBS
E_{M1} (MPa)	2248	2440	16241	23868
E_{M2} (MPa)	22404	28885	12014	14752
E_{M3} (MPa)	2246	2440	16240	23869
G_{M12} (MPa)	4609	6210	2470	3108
G_{M13} (MPa)	6291	8120	4284	7052
G_{M23} (MPa)	4609	6210	2470	3108
ν_{M12}	0.32	0.32	0.14	0.13
ν_{M13}	0.83	0.86	0.23	0.21
ν_{M23}	0.03	0.03	0.19	0.21

TABLE 6.9 – BK3-3D : topologies optimisées pour différentes fractions volumiques imposées aux phases matériau



pour parvenir à convergence. Le Tableau 6.8 détaille les constantes élastiques du matériau homogène équivalent à l'échelle macroscopique pour ces deux cas de chargement. De plus, le Tableau 6.9 présente les topologies optimisées en considérant différentes fractions volumiques $\gamma_i, (i = 1, 2, 3)$, lorsque la structure macroscopique est soumise à un chargement de traction, CC1-3D. Pour tous les calculs, les contraintes sur les fractions volumiques des différentes phases matériau ont été respectées et se situent sur la frontière du domaine faisable.

À la suite de ces calculs, les remarques suivantes peuvent être faites :

- Sur l'ensemble des résultats présentés dans les Tableaux 6.7 et 6.9, les résultats NURBS ont donnés de meilleurs résultats en termes de fonction objectif que les résultats B-Splines.
- Comme le montre le Tableau 6.7, les conditions de chargement à l'échelle macroscopique ont une grande influence sur la topologie optimisée du VER. En effet, dans le but de supporter efficacement les charges appliquées à l'échelle macroscopique et de minimiser \mathcal{C}_M , la topologie du VER évolue de manière à optimiser les réponses élastiques du matériau homogénéisé. En conséquence, pour le cas de chargement CC1-3D, la topologie optimisée du VER présente

un comportement macroscopique orthotrope dont la direction principale d'orthotropie correspond à la direction d'application de l'effort de traction, i.e. l'axe x_{M2} . Ainsi, les modules d'Young E_{M1} et E_{M2} , les modules de cisaillement G_{M12} et G_{M23} sont égaux. Cependant le matériau ne présente pas un comportement isotropique transverse car $G_{M13} \neq \frac{E_{M1}}{2(\nu_{M13} + 1)}$. Pour le cas de chargement CC2-3D, le tenseur d'élasticité présente un comportement orthotrope mais caractérisé par des valeurs de module d'Young E_{M1} et E_{M3} supérieures à E_{M2} , ce qui implique que la direction d'orthotropie principale n'est plus suivant la direction x_{M2} . Le module de cisaillement G_{M13} présente également une valeur plus élevée que les modules G_{M12} et G_{M23} dans le but de supporter l'effort de cisaillement appliqué à l'échelle macroscopique dans le plan orthogonal à l'axe x_{M2} : dans ce cas, la topologie optimale du VER est caractérisée par une configuration de type profil à parois minces avec le matériau plus rigide (M1) localisé sur la frontière et repartit dans un volume fermé (afin de maximiser le flux des contraintes de cisaillement et donc la raideur en torsion du VER). De plus, à l'image des constatations faites pour les résultats 2D, les modèles NURBS donnent des topologies optimisées qui permettent d'avoir de meilleures réponses élastiques du matériau homogénéisé à l'échelle macroscopique. En effet, les modules d'Young suivant les trois directions d'orthotropie et les trois modules de cisaillement sont toujours supérieurs dans le cas NURBS que B-Spline, à conditions de chargement équivalent.

6.5 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, une approche d'optimisation topologique multi-échelle/multi-matériau a été développée pour concevoir des structures architecturées composées de plusieurs phases matériau dans le cadre d'un algorithme innovant basé sur les entités NURBS. En particulier, l'approche étudiée considère des variables topologiques définies uniquement à l'échelle du VER, tandis que les réponses physiques sont considérées aussi bien à l'échelle macroscopique qu'à celle du VER. De plus, cette étude intègre les caractéristiques d'une approche multi-matériau basée sur la superposition des descripteurs topologiques définies pour chacune des phases matériau. Ainsi, l'approche proposée est basée sur une combinaison des hyper-surfaces NURBS, de la méthode EF classique, de la méthode d'homogénéisation SEHM et de la méthode d'interpolation multi-matériau N-MMI sans l'introduction de filtre pour régulariser ni les descripteurs géométriques ni ceux topologiques associées aux diverses phases.

Certains aspects de la méthode peuvent être mis en avant :

- La théorie des hypersurfaces NURBS apporte différents avantages : (a) La propriété du support local des entités NURBS crée une relation implicite entre les éléments du maillage adjacents ; (b) le nombre de variables d'optimisation ne dépend pas du nombre d'éléments utilisés dans le modèle EF. En effet, il dépend du nombre de PC utilisés pour décrire correctement l'entité NURBS et du nombre de phases matériau et est donc réduit par rapport à une approche SIMP classique.
- Le rôle des poids des PC NURBS a été identifié. Ainsi, les valeurs de fonction objectif finales en considérant un modèle NURBS sont généralement meilleures que pour les entités B-Splines (à nombre de PC et degrés des fonctions de base équivalents).
- Une analyse de sensibilité de la distribution optimale des matériaux dans le VER aux paramètres entiers des entités NURBS utilisées pour décrire les CG des phases a été réalisée.

Contrairement aux problèmes mono-échelle présentés dans les chapitres précédents, les résultats semblent satisfaire approximativement la tendance globale observée dans les travaux précédents [173].

- L'influence de la répartition de densité initiale a également été considérée. En effet, le problème multi-échelle/multi-matériau étant fortement non-convexe, différents minima locaux existent. C'est pourquoi, le choix du point de départ de l'OT doit être soigneusement choisi et il est conseillé de lancer plusieurs calculs d'optimisation en prenant des points de départ différents dans le but de trouver le minimum local permettant d'avoir la répartition des phases matériau à l'intérieur du VER présentant les meilleures propriétés en termes de tenseur d'élasticité du matériau homogène équivalent et de compliance macroscopique.
- Les conditions de chargement macroscopique affectent fortement la topologie du VER. En particulier, la topologie évolue dans le but de supporter les efforts appliqués à la structure macroscopique. Ainsi, les réponses élastiques sont meilleures dans les directions d'applications des efforts que dans les directions non sollicitées.
- L'utilisation d'une approche multi-matériau permet d'obtenir des solutions radicalement différentes en fonction des fractions volumiques imposées à chaque matériau. Bien évidemment, cette approche ne montre pas tout son intérêt sur un simple problème de minimisation de la compliance macroscopique soumis à une contrainte sur le volume global des matériaux où la solution optimale consiste à répartir le plus de matière possible en ne conservant uniquement le matériau le plus rigide. Cependant, l'approche développée a permis d'obtenir des résultats concrets en utilisant 2 à 3 matériaux dans le processus d'OT et a montré la possibilité d'utiliser cette approche en considérant des fonctions objectif et/ou contrainte ne nécessitant pas les mêmes caractéristiques matériau pour être optimal.
- Comme discuté dans [118, 119] la variante de la méthode SEHM basée sur l'énergie de déformation élastique des éléments (et non pas sur les contraintes moyennes) a permis d'obtenir de meilleures performances en termes de coût de calcul, puisque un nombre réduit de calculs est nécessaire pour parvenir à l'homogénéisation du matériau et au calcul du gradient du tenseur d'élasticité par rapport aux variables d'optimisation caractérisant le CG de chacune des phases matériau.
- La contrainte de fabrication liée à l'épaisseur minimale est correctement prise en compte, sans qu'il soit nécessaire d'introduire une contrainte d'optimisation explicite. En effet, une telle contrainte technologique est gérée en contrôlant la valeur des degrés des polynômes de Bernstein et le nombre de points de contrôle de l'entité NURBS liés au descripteur géométrique de chaque phase matériau [16].

L'ensemble des travaux montrés dans ce chapitre est loin de traiter l'ensemble des problématiques liées à l'OT multi-échelle/multi-matériau. Premièrement, la méthode peut être adaptée de manière à optimiser la topologie de la structure aux deux échelles, c'est-à-dire à la fois la topologie du VER à l'échelle mésoscopique et la topologie de la structure à l'échelle macroscopique. Pour cela, une entité NURBS doit être définie à l'échelle macroscopique dans le but de définir la topologie de la structure à cette échelle. Ainsi, la relation entre les variables d'optimisations des entités NURBS à l'échelle du VER et de l'entité définie à l'échelle macroscopique doit être soigneusement étudiée dans le but de satisfaire les conditions de la méthode d'homogénéisation. Deuxièmement, des conditions liées aux procédés d'impression des structures architecturées multi-matériau, doivent être pris en compte, telles que les angles de surplombs, les rayons de courbure.... Troisièmement, la

méthode pourrait être généralisée ultérieurement afin d'obtenir des structures architecturées multi-matériau composées de VER différents dans chaque sous-région définie au préalable à l'échelle macroscopique. Dans ce contexte, des conditions de raccordement (ou liaison) entre VER à topologie différente doivent être pertinemment formalisées et intégrées dans la méthode d'OT. De plus, la méthode d'OT multi-échelle multi-matériau devrait être adaptée et appliquée à des problèmes multi-physique où la présence de plusieurs matériaux a un réel intérêt afin de maximiser, simultanément, plusieurs propriétés de nature différente, telles que la raideur, l'amortissement, la capacité d'absorption de chocs, la conductivité thermique, la conductivité électrique, la furtivité électromagnétique, etc. Finalement une application intéressante de la méthode proposée porte sur la conception de matériaux architecturés à propriétés extrêmes : par exemple, des matériaux ayant des coefficients de Poisson négatifs, des coefficients de dilatation thermique nuls ou négatifs, etc.

Chapitre 7

Conception de métamatériaux auxétiques multi-matériau

7.1 Introduction

Les métamatériaux constituent une classe particulière de matériaux qui présente des propriétés peu communes, telles qu'une absorption sonore maximale, un coefficient de dilatation thermique nul ou négatif, une compressibilité statique maximale ou encore un coefficient de Poisson négatif. Ces propriétés particulières en font une catégorie de matériaux de plus en plus au centre des intérêts des industries de pointe tel que l'aérospatial, le militaire, le médical... Dans ce chapitre, le développement d'une méthode d'OT basée sur la méthode NURBS-based-SIMP sera détaillée pour obtenir des métamatériaux auxétiques, c'est à dire des matériaux aux coefficients de Poisson négatifs (NPR) de l'anglais *negative Poisson's ratio*. Le coefficient de Poisson d'un matériau permet de caractériser la contraction de la matière dans le plan orthogonal à l'effort appliqué. Mécaniquement parlant, cela signifie que lorsqu'un effort de traction est appliqué sur un matériau auxétique, celui-ci aura tendance à s'étendre dans le plan orthogonal à la direction de l'effort. Au contraire, si un effort de compression est appliqué sur le matériau, celui-ci se comprimera également dans le plan orthogonal, comme montré dans la Fig. 7.1.

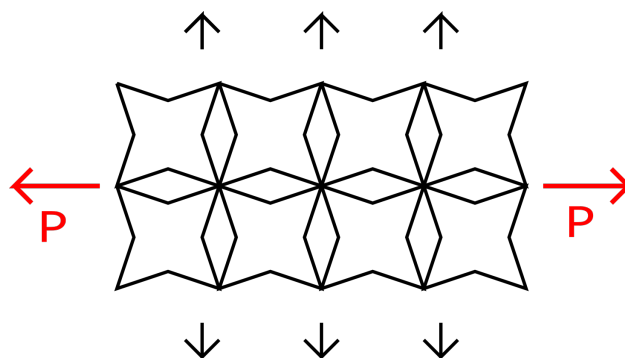


FIGURE 7.1 – Comportement d'un matériau auxétique

Pour pouvoir obtenir des matériaux auxétiques, il est nécessaire de travailler sur la définition du matériau à l'échelle inférieure. À l'image de l'optimisation multi-échelle décrite dans le chapitre précédent, les propriétés du matériau à l'échelle macroscopique seront déterminées en modifiant la topologie du VER définie à l'échelle inférieure. En particulier, les composantes du tenseur d'élasticité

\mathbf{C}_M déterminées suite à l'homogénéisation seront optimisées de manière à obtenir des coefficients de Poisson négatifs.

Dans ce chapitre, plusieurs aspects seront pris en compte :

1. Comment formuler le problème de la conception des méta-matériaux auxétiques dans le cadre de la méthode NURBS-based-SIMP ?
2. Est-il possible de concevoir des métamatériaux avec des coefficients de Poisson négatifs dont le volume élémentaire serait défini par un seul matériau ?
3. Est-il possible de généraliser l'approche au cas de métamatériaux composés par plusieurs phases matériau ?

La contribution de ce chapitre se divise en plusieurs points. Premièrement, le gradient de la fonction de coût traduisant le comportement auxétique par rapport aux variables d'optimisation sera dérivé dans le cadre de la méthode NURBS-based-SIMP et dans le contexte le plus général possible en tirant avantage des propriétés des entités NURBS, dans les cas monomatériau et multi-matériau. Deuxièmement, une analyse de sensibilité approfondie étudiant l'impact de la fraction volumique du VER et celui des coefficients intervenant dans la formulation de la fonction objectif sur la solution optimale sera réalisée.

7.2 Définition du problème d'optimisation

Comme expliqué précédemment, pour obtenir des matériaux auxétiques, il est nécessaire de définir de manière précise la topologie du VER à l'échelle inférieure pour influencer sur les caractéristiques du matériau à l'échelle macroscopique. Le lien entre les deux échelles est réalisé par la méthode d'homogénéisation basée sur l'énergie de déformation présentée au chapitre 6. Comme expliqué dans le chapitre précédent, les méthodes d'homogénéisation visent à remplacer à l'échelle macroscopique le milieu hétérogène par un matériau homogène anisotrope équivalent. En effet, la méthode d'homogénéisation permet de déterminer le tenseur d'élasticité \mathbf{C}_M définissant les propriétés élastiques du matériau à l'échelle supérieure. Dans cette étude, la SEHM détaillée dans la section 6.2 sera utilisée. Pour rappel, cette méthode se base sur le principe que l'énergie de déformation du milieu hétérogène est la même que celle du matériau homogène équivalent. Les coefficients du tenseur d'élasticité sont alors déterminés à l'aide de l'Eq. (6.4).

Les coefficients de Poisson du matériau homogénéisé peuvent être déterminés à partir de la matrice de souplesse qui est définie comme étant l'inverse du tenseur d'élasticité :

$$\mathbf{S}_M := (\mathbf{C}_M)^{-1}, \quad (7.1)$$

Pour un matériau anisotrope [174], les coefficients de Poisson peuvent être définis à partir des composantes de la matrice \mathbf{S}_M et des modules d'Young comme suit :

$$S_{Mij} := -\frac{\nu_{Mji}}{E_{Mj}}, \quad S_{Mjj} := \frac{1}{E_{Mj}}, \quad \Rightarrow \nu_{Mji} = -\frac{S_{Mij}}{S_{Mjj}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j. \quad (7.2)$$

Dans le cas le plus général il est possible de définir six coefficients de Poisson. Cependant, à cause des symétries majeures des tenseurs \mathbf{C}_M et \mathbf{S}_M , il est possible de définir les relations de réciprocité suivantes :

$$\frac{\nu_{Mji}}{E_{Mj}} = \frac{\nu_{Mij}}{E_{Mi}}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad i \neq j, \quad (7.3)$$

ainsi le nombre de coefficients de Poisson indépendants est réduit à trois.

A partir de l'Eq. (7.2) et de la relation entre les matrices \mathbf{C}_M et \mathbf{S}_M il est possible de prouver qu'une condition suffisante pour obtenir des coefficients de Poisson négatifs est :

$$C_{Mij} \leq 0, \forall i, j = 1, 2, 3, i \neq j. \quad (7.4)$$

Comme expliqué dans le Chapitre 2, il existe de nombreux travaux sur l'OT permettant d'obtenir des matériaux auxétiques. Si les techniques sont souvent diverses, elles se basent globalement sur une méthode commune : la minimisation d'une fonction de coût faisant intervenir les coefficients hors diagonales du tenseur \mathbf{C}_M . En effet, la définition de la fonction objectif permettant d'obtenir des méta-matériaux auxétiques dépend de l'objectif souhaité lors de l'optimisation. Dans le cas où des propriétés cibles du méta-matériau sont imposées, il est préférable d'utiliser la méthode développée par Vogziatis [133]. Cette méthode consiste à définir un tenseur d'élasticité cible \mathbf{C}_M^* et de minimiser la distance entre ce tenseur et le tenseur homogénéisé \mathbf{C}_M au sens des moindres carrés ; ainsi la fonction d'optimisation est définie telle que :

$$f_{\text{NPR-1}} := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d w_{ij} (C_{Mij} - C_{Mij}^*)^2, \quad (7.5)$$

où d est la dimension du problème considéré (2D ou 3D) et w_{ij} est le poids associé à la composante C_{Mij} . Cependant, cette formulation est caractérisée par deux inconvénients. Premièrement, il n'est pas garanti, à priori, que la valeur des composants cibles du tenseur d'élasticité macroscopique définies par l'utilisateur puissent correspondre à un matériau effectivement réalisable avec les descripteurs topologiques définis à l'échelle inférieure. Deuxièmement, cette formulation est souvent limitée à des tenseurs cibles présentant une symétrie élastique précise (isotropie, syngonye cubique, isotropie transverse, orthotropie, etc.) et exclue la possibilité d'analyser la convergence de l'algorithme vers une symétrie élastique optimale pour des valeurs de coefficients de Poisson données. En d'autres termes, avec cette formulation il n'est pas possible de répondre à la question suivante : quelle est la symétrie élastique optimale du tenseur d'élasticité macroscopique (correspondant à un arrangement optimal des phases matériau constituant le VER à l'échelle inférieure) permettant d'atteindre des valeurs minimales des coefficients de Poisson tout en garantissant certaines valeurs des modules de cisaillement et des modules de Young ?

Une réponse partielle à cette interrogation est donnée dans [125] dont les auteurs proposent une deuxième méthode consistant à réaliser une combinaison linéaire des termes du tenseur \mathbf{C}_M tel que :

$$f_{\text{NPR-2}} := \sum_{i,j=1, i \neq j}^d C_{Mij} - \alpha \left(\sum_{i,j=1, i=j}^d C_{Mij} \right), \quad (7.6)$$

où α est un paramètre constant permettant de réguler l'impact des coefficients diagonaux lié aux modules de Young E_i sur la fonction d'optimisation. Généralement, $\alpha \in [0.01, 0.05]$. La formulation, détaillée dans l'Eq. (7.6) apporte un avantage : elle permet de minimiser les termes hors-diagonales tout en maximisant les termes diagonaux liés au modules de Young. Cela permet ainsi d'obtenir des propriétés tel qu'un coefficient de Poisson négatif tout en assurant une bonne rigidité de la structure au moins le long des trois axes du VER. Néanmoins, en considérant cette formulation, les raideurs liées au modules de cisaillement $C_{Mii}, i = 4, 5, 6$ ne sont pas pris en compte lors du calcul d'optimisation. Ces termes s'avèrent important surtout dans les applications nécessitant l'utilisation de méta-matériaux utilisés en tant que âme d'un panneau sandwich ou pour les applications

comportant l'absorption de chocs et/ou l'amélioration de l'amortissement des vibrations sur une plage de fréquences donnée. L'Eq. (7.6) peut ainsi être ainsi généralisée en incluant ces coefficients :

$$f_{\text{NPR}} := 2 \sum_{i=1}^d \sum_{j=i+1}^d C_{Mij} - \alpha \left(\sum_{k=1}^d C_{Mkk} + \beta \sum_{k=s}^6 C_{Mkk} \right), \quad (7.7)$$

avec $d = 2$ dans un cas 2D et $d = 3$ dans un cas 3D, $s = 6$ en 2D et $s = 4$ en 3D. Dans la formule précédente, le coefficient α est utilisé comme facteur de pondération agissant sur les termes de la matrice \mathbf{C}_M liés aux modules de Young et à ceux de cisaillement. Le coefficient β peut prendre les valeurs 1 ou 0 permettant, ainsi, d'inclure ou pas les termes liés au modules de cisaillement dans la formulation de la fonction objectif. Contrairement à l'Eq. (7.5), les Eqs. (7.6) et (7.7) permettent une exploration du domaine faisable plus libre. En effet, elles ne contraignent pas l'OT à converger vers une solution définie au préalable par l'utilisateur mais permettent d'explorer le domaine de conception et ainsi trouver plusieurs minima locaux (sous condition d'utiliser différents points de départ). De plus, l'une des limites de la méthode donnée par l'Eq. (7.5) réside dans le fait que, dans un cas totalement anisotrope, les valeurs cibles des composants du tenseur \mathbf{C}_M^* définies au préalable par l'utilisateur, peuvent représenter une solution qui n'appartient pas au domaine de faisabilité thermodynamique du tenseur d'élasticité macroscopique (i.e., le tenseur doit être défini positif) [174].

La fonction objectif définie dans l'Eq. (7.7) sera considérée dans la suite dans le cadre de la méthode d'optimisation basée sur les hypersurfaces NURBS. Lorsque le VER est constitué par une seule phase matériau, il n'y a plus distinction entre descripteur géométrique et descripteur topologique (voir chapitre 6) et l'entité NURBS décrit directement la topologie du VER. Pour un méta-matériau constitué d'une seule phase matériau le problème est formulé comme suit :

$$\min_{\xi_1, \xi_2} f_{\text{NPR}}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}_m \hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{f}}_m, \\ g_c := \frac{V_m}{V_{m\text{ref}}} - \gamma_c \leq 0, \\ \xi_{1k} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}], \quad \xi_{2k} \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{\text{CP}}. \end{cases} \quad (7.8)$$

avec γ_c la fraction volumique imposée à la phase matériau, $V_{m\text{ref}} = V_{\text{VER}}$ le volume de référence du VER, ξ_{1k} et ξ_{2k} les variables d'optimisation correspondant à la valeur de la pseudo-densité aux PC et à leurs poids, respectivement. ρ_{\min}, ρ_{\max} et $\omega_{\min}, \omega_{\max}$ sont les bornes inférieure et supérieure des variables d'optimisation.

Pour le cas d'un VER constitué de plusieurs phases matériau, le CNLPP s'écrit :

$$\min_{\xi_{1,j}, \xi_{2,j}} f_{\text{NPR}}, \quad \text{s.t. :} \quad \begin{cases} \hat{\mathbf{K}}_m \hat{\mathbf{u}}_m = \hat{\mathbf{f}}_m, \\ g_j := \frac{V_{mj}}{V_{m\text{ref}}} - \gamma_{mj} \leq 0, \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \\ \xi_{1jk} \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}], \quad \xi_{2jk} \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \\ \forall k = 1, \dots, n_{\text{CP}}, \end{cases} \quad (7.9)$$

avec γ_{mj} la fraction volumique occupée par la phase matériau j .

Le calcul d'optimisation étant réalisé au moyen d'un algorithme au gradient, l'expression formelle du gradient de la fonction f_{NPR} doit être dérivée et implémentée dans l'algorithme SANTO. Considérons la proposition suivante :

Proposition 7.2.1 *Le gradient de la fonction f_{NPR} par rapport aux variables de définition des entités NURBS dans le cas d'un VER mono-matériau s'écrit :*

$$\frac{\partial f_{\text{NPR}}}{\partial \xi_{ik}} = 2 \sum_{q=1}^N \sum_{r=q+1}^N \frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ik}} - \alpha \left(\sum_{q=1}^d \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ik}} + \beta \sum_{q=s}^6 \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ik}} \right), \quad (7.10)$$

$$i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{\text{CP}}$$

et pour le cas d'un VER composé par N_{mat} matériaux il s'écrit :

$$\frac{\partial f_{\text{NPR}}}{\partial \xi_{ijk}} = 2 \sum_{q=1}^d \sum_{r=q+1}^d \frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}} - \alpha \left(\sum_{q=1}^d \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ijk}} + \beta \sum_{q=s}^6 \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ijk}} \right), \quad (7.11)$$

$$i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, N_{\text{mat}}, \quad k = 1, \dots, n_{\text{CP}}.$$

Dans les formules précédentes, $\frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ik}}$, pour le cas d'un VER constitué d'une seule phase matériau, est défini tel que :

$$\frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ik}} = \begin{cases} \frac{1}{V_{\text{RVE}} (\varepsilon_{mq}^0)^2} \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} w_{me} (\varepsilon_{mq}^0), & \text{if } q = r, \\ \frac{1}{2V_{\text{RVE}} \varepsilon_{mq}^0 \varepsilon_{mr}^0} \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} w_{me} (\varepsilon_{mq}^0, \varepsilon_{mr}^0) + \\ - \frac{\varepsilon_{mq}^0}{2\varepsilon_{mr}^0} \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ik}} - \frac{\varepsilon_{mr}^0}{2\varepsilon_{mq}^0} \frac{\partial C_{Mrr}}{\partial \xi_{ik}}, & \text{if } q \neq r, \end{cases} \quad (7.12)$$

avec w_{me} le travail des forces internes de l'élément générique composant le VER défini comme suit

$$w_{me} := \mathbf{f}_e^T \mathbf{u}_e. \quad (7.13)$$

Dans le cas d'un VER composé de plusieurs phases matériau l'expression des dérivées partielles des composantes du tenseur \mathbf{C}_M est celle donnée dans l'Eq. (6.29).

7.3 Cas d'étude

Dans ce chapitre, l'influence de plusieurs paramètres sur la topologie finale ainsi que sur les valeurs des coefficients de Poisson trouvées en sortie de calcul d'optimisation sera étudiée. Les résultats détaillés dans cette section porteront sur des analyses monomatériau et multi-matériau (2 et 3 matériaux).

Les dimensions des VER utilisés dans les cas 2D et 3D sont donnés dans la Fig. 7.2 pour (a) un cas 2D et (b) un cas 3D, avec $L_{mi} = 2a_{mi} = 10 \text{ mm}$, $i = 1, 2, 3$.

Dans le cas 2D, le modèle EF est réalisé à l'aide d'éléments PLANE182 (quatre nœuds et 2 degrés de liberté par nœud) sous l'hypothèse des contraintes planes et en considérant une épaisseur unitaire. Le nombre total d'éléments composant le modèle EF est $N_{me} = 2500$. Pour le cas 3D, le modèle EF est réalisé à l'aide d'éléments SOLID185 (huit nœuds et 3 degrés de liberté par nœud). Le nombre total d'éléments composant le modèle EF est $N_{me} = 8000$.

Dans cette section, trois matériaux sont considérés. Les propriétés des matériaux utilisés sont données dans le Tableau 7.1.

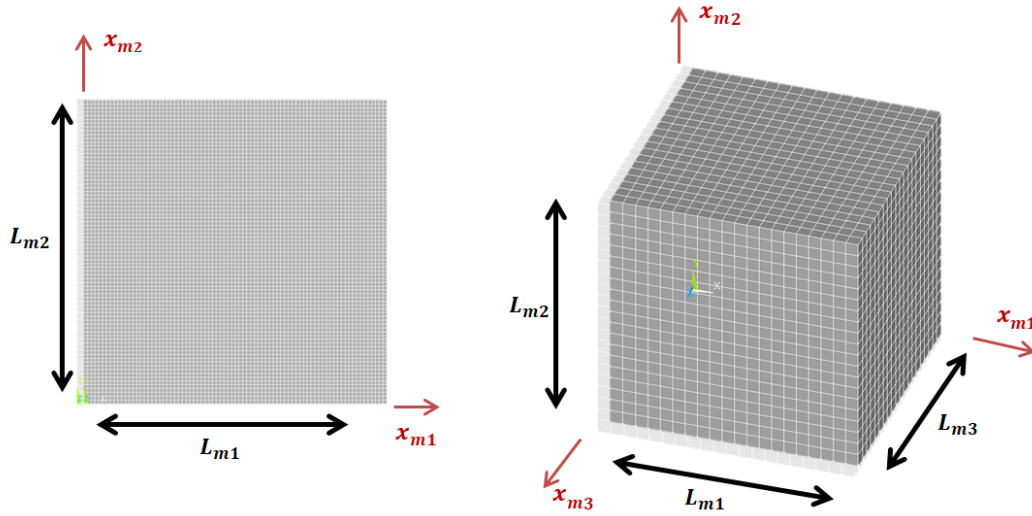


FIGURE 7.2 – Dimensions des VER pour les cas 2D et 3D

TABLE 7.1 – propriétés mécaniques des matériaux

Paramètres	M1	M2	M3
Module d'Young E_m (MPa)	10000	5000	3000
Coefficient de Poisson ν_m	0.3	0.3	0.3

Comme montré dans le chapitre 6, dans un cadre d'OT multi-échelle (et multi-matériau), la topologie initiale joue un rôle majeur sur les solutions trouvées en sortie de calcul d'OT. Ainsi, de manière à obtenir des résultats corrects en termes de valeur de fonction objectif, tout en évitant de converger vers des minima locaux peu intéressants, différentes topologies initiales seront étudiées. En particulier pour les cas 2D, trois topologies initiales différentes comprenant respectivement 1, 4 et 16 trous seront considérées. Les topologies initiales testées sont données dans le Tableau 7.2. Pour les cas 3D, uniquement une topologie initiale caractérisée par $N_h = 64$ trous sera considérée, voir Fig. 7.3.

Dans un second temps, l'influence du nombre de PC et du degré des fonctions de base définissant les entités NURBS sur la configuration optimale du VER sera étudiée.

Troisièmement, l'influence de la valeur du paramètre α apparaissant dans la définition de la fonction objectif sera analysée ainsi que les différences apportées par l'utilisation d'un coefficient β égal à zéro ou égal à l'unité, ce qui comporte l'absence ou la présence des termes liés aux modules de cisaillement dans l'Eq. (7.7).

Enfin, l'influence des éventuelles symétries sur la répartition optimale des phases matériau dans le VER sera analysée. Pour ce faire, deux cas seront considérés. Pour le premier cas des axes de symétrie orthogonale (cas 2D) ou des plans de symétrie orthogonale (cas 3D) seront imposés à $x_{mi} = a_{mi}$ ($i = 1, 2, 3$) en considérant, ainsi, un comportement orthotrope du VER. Pour le second cas, aucune symétrie ne sera imposée pendant l'optimisation afin d'obtenir un comportement complètement anisotrope du VER.

Pour l'ensemble des résultats présentés dans ce chapitre, les fractions volumiques imposées à chaque matériau sont définies de manière à obtenir une fraction volumique totale $\gamma_m = 0.4$. Ainsi, pour un calcul à deux matériaux, les fractions volumiques imposées aux deux matériaux sont

choisies telles que : $\gamma_{mj} = 0.2, j = 1, 2$. Pour les calculs considérant trois matériaux, les fractions volumiques sont définies telles que : $\gamma_{mj} = 0.15, j = 1, 2$ et $\gamma_{m3} = 0.1$.

TABLE 7.2 – Définition des topologies initiales pour le modèle 2D

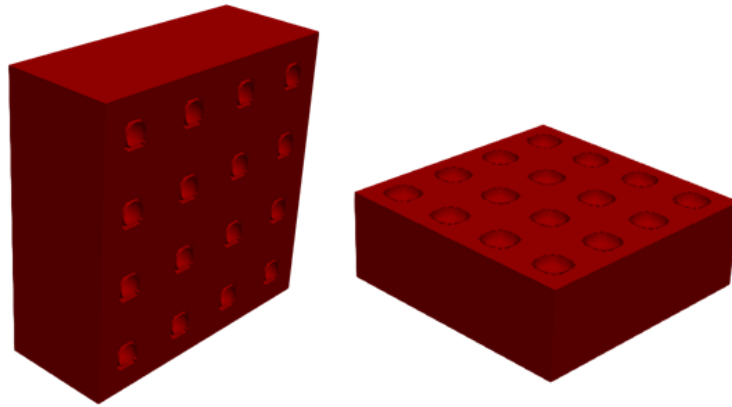
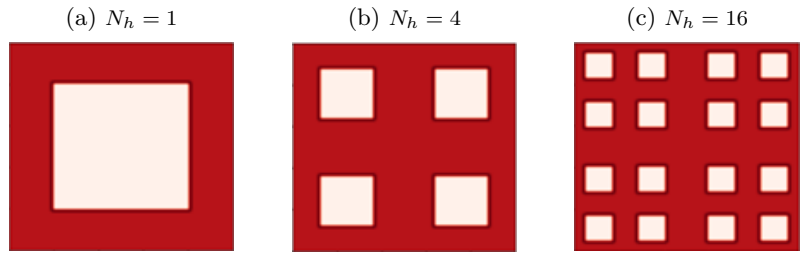


FIGURE 7.3 – Topologie initiale cas d'étude 3D

Les bornes inférieure et supérieure des variables d'optimisation sont fixées à : $\rho_{\min} = 10^{-3}$ et $\rho_{\max} = 1$ pour la pseudo-densité aux PC et $\omega_{\min} = 0.5$ et $\omega_{\max} = 10$ pour les poids. De plus, les vecteurs de nœuds définis dans l'Eq. (3.7) ont été répartis uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$ pour chaque cas d'étude. Les calculs d'optimisation de ce chapitre sont obtenus à l'aide de l'algorithme SANTO, détaillé dans le chapitre 3, dans lequel la fonction objectif de l'Eq. (7.7) a été implémentée. Comme expliqué dans le chapitre 3, l'algorithme SANTO utilise l'algorithme GC-MMA pour déterminer les solutions des PPNLC. De plus, les calculs statiques nécessaires à la réalisation de l'homogénéisation sont réalisés par le logiciel ANSYS®. Les paramètres définissant le comportement de l'algorithme GC-MMA sont détaillés dans le Tableau 4.1.

Les opérations de post-traitement des topologies optimisées sont réalisées sur le logiciel ParaView®.

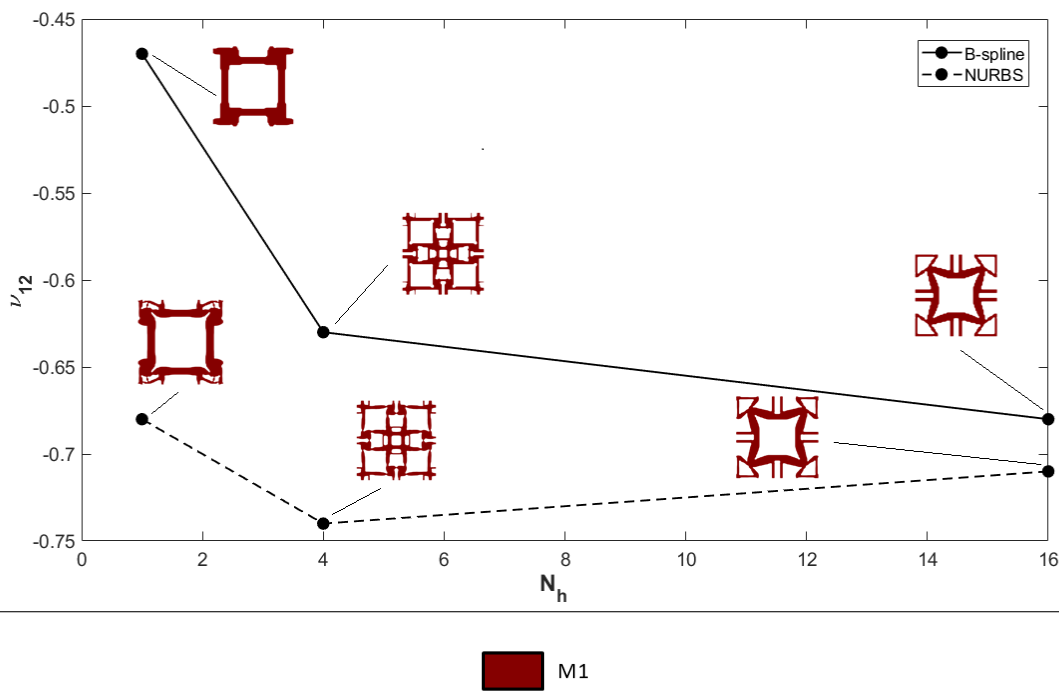
7.4 Cas d'étude 2D : résultats

Dans cette section, les résultats montrant l'impact des paramètres détaillés précédemment sont donnés. Les résultats sont donnés en termes de valeurs de la fonction objectif f_{NPR} et de valeur de coefficient de Poisson ν_{12} en sortie d'OT.

7.4.1 Influence de la topologie initiale sur la solution optimale

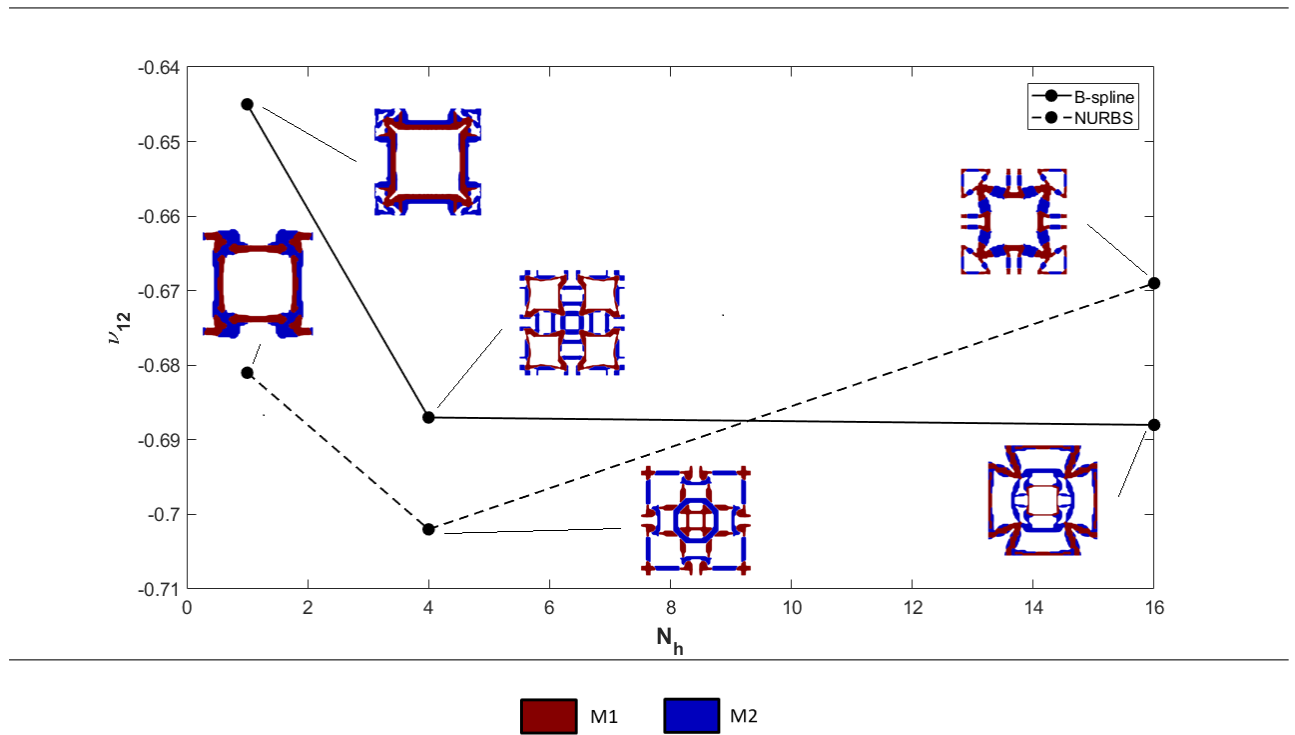
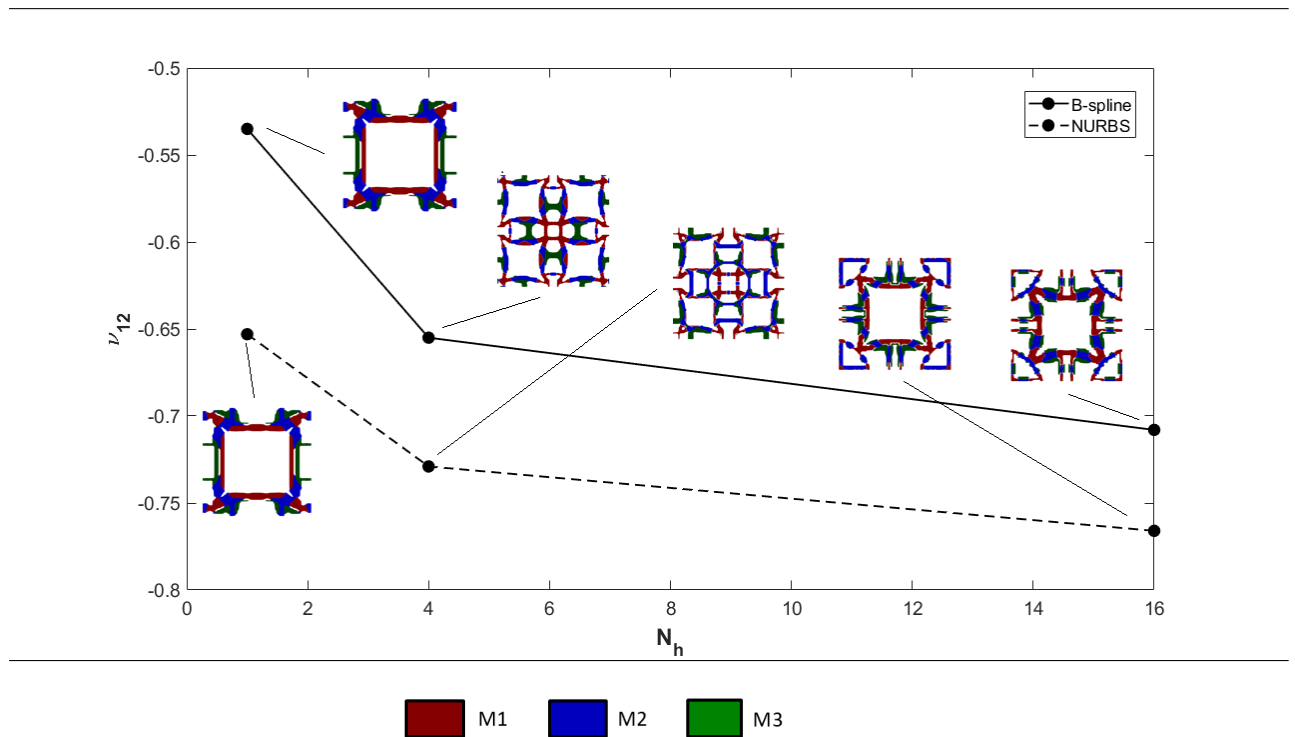
Dans un premier temps, une analyse de l'influence de la topologie initiale sur la configuration optimale du VER a été menée. Les Tableaux 7.3, 7.4 et 7.5 montrent les résultats obtenus pour les cas considérant 1, 2 et 3 matériaux respectivement. Dans ces calculs, le comportement du matériau homogène équivalent est défini orthotrope (donc deux axes de symétries ont été définis au préalable) et le coefficient C_{M66} n'est pas pris en compte dans la définition de la fonction objectif de l'Eq. (7.7) en utilisant un coefficient $\beta = 0$. La valeur du coefficient α utilisé dans ces simulations est égale à 0.03. De plus, ces résultats ont été obtenus en considérant des entités B-spline et NURBS caractérisées par le nombre de PC et les degrés suivants : $n_{CP} = 4900$ et $p_j = 2$ ($j = 1, 2$).

TABLE 7.3 – Coefficient de Poisson vs. N_h , cas mono-matériau



À partir des résultats présentés dans les Tableaux 7.3, 7.4 et 7.5, différentes remarques peuvent être faites :

1. Dans la majorité des cas, les résultats NURBS donnent des valeurs de coefficients de Poisson en sortie d'OT qui sont inférieures à celles données par les calculs B-splines (à l'exception du cas bi-matériau pour $N_h = 16$). Cela est cohérent avec les constatations faites dans les chapitres précédents.
2. Les topologies initiales en entrée d'OT se retrouvent sur les topologies finales. En effet, la topologie optimale obtenue en utilisant une topologie initiale comportant un trou central, possèdera également un trou central. Les constatations sont similaires lorsque les topologies initiales comportent 4 trous. Pour les résultats obtenus lorsque la topologie initiale comprend 16 trous, ce motif ne se retrouve pas sur la topologie finale. Cependant, elles comprennent des branches topologiques qui se situent dans les zones où les trous sont présents dans le champ de densité initial.

TABLE 7.4 – Coefficient de Poisson vs. N_h , deux phases matériauTABLE 7.5 – Coefficient de Poisson vs. N_h , trois phases matériau

3. De manière générale, plus le nombre de "trous" dans la topologie initiale augmente, plus la valeur du coefficient de Poisson trouvée à la suite du calcul d'OT sera faible. En effet, en examinant de plus près la définition de la fonction objectif (de l'Eq. (7.7)), afin de minimiser sa valeur, l'algorithme d'optimisation aura tendance à converger soit vers des solutions minimisant la valeur du coefficient C_{12} soit vers des solutions maximisant les valeurs des coefficients C_{M11} et C_{M22} , soit il convergera vers la solution offrant le meilleur compromis entre ces deux exigences contrastantes. Le second cas permettra d'obtenir des structures plus rigides aux sollicitations axiales alors que le premier cas permettra d'obtenir des valeurs de coefficients de Poisson plus faibles. Par exemple, lorsque la topologie initiale comporte un seul trou central, la topologie du VER se retrouve alors avec des branches épaisses suivant les directions x_{m1} et x_{m2} qui lui donnent une bonne raideur le long de ces axes, ce qui va ensuite entraîner l'algorithme à privilégier l'augmentation des coefficients C_{M11} et C_{M22} plutôt que la diminution du coefficient C_{M12} . Cependant, lorsque le nombre de trous augmente dans la topologie initiale, la raideur le long des axes x_{m1} et x_{m2} est moins élevée et l'algorithme aura tendance à privilégier la diminution du coefficient C_{M12} .
4. Les résultats présentés dans les Tableaux 7.3, 7.4 et 7.5 sont, globalement, équivalents en termes de valeurs des coefficients de Poisson qui varient entre -0.5 et -0.75 en fonction du nombre de trous présents dans la topologie initiale.

Pour l'ensemble des résultats présentés dans la suite de cette section, les calculs seront initialisés en considérant des champs de densité initiaux composés de 16 trous.

7.4.2 Influence des paramètres entiers des NURBS sur la topologie optimale

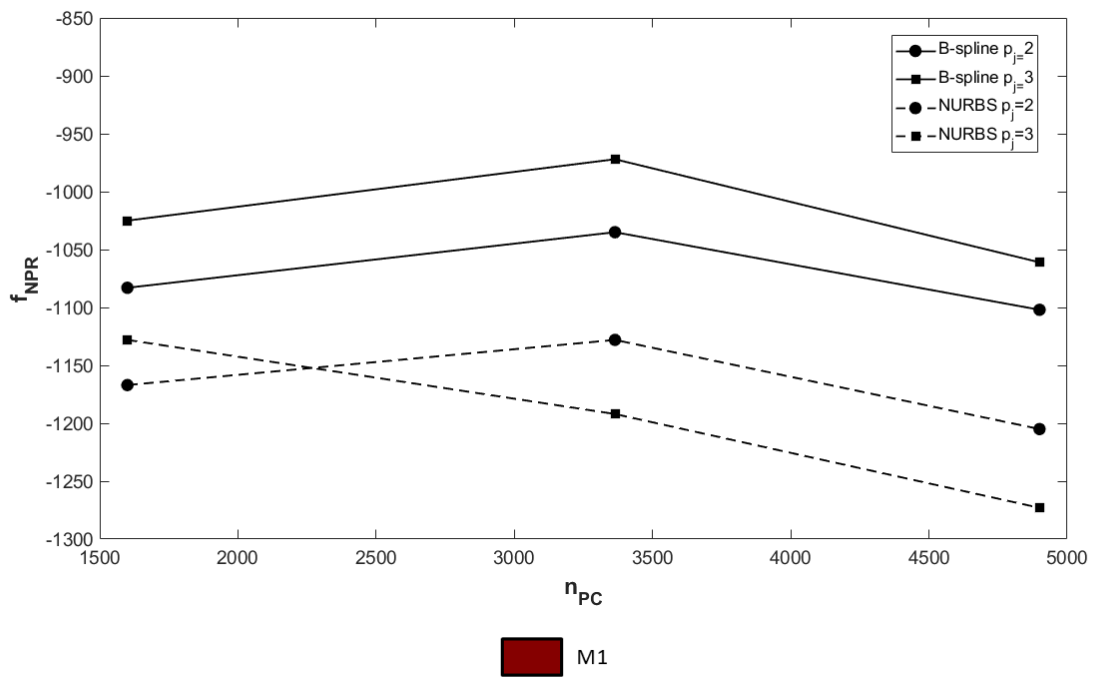
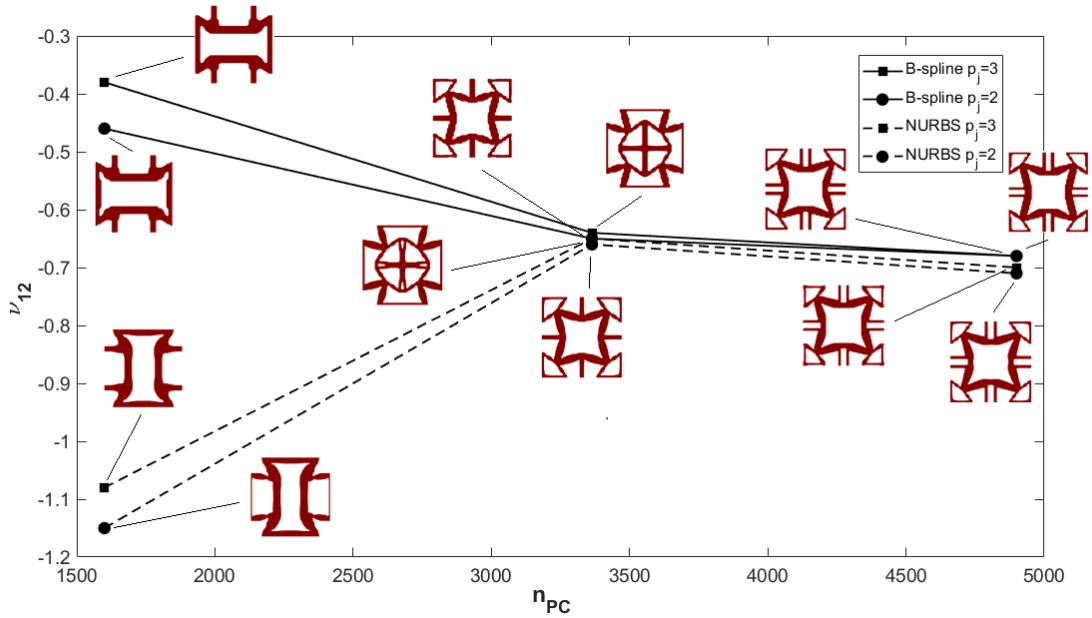
Une analyse de sensibilité étudiant l'influence des paramètres de définition des entités B-Spline et NURBS a été réalisée pour les cas mono-matériau et multi-matériau (cas bi-matériau uniquement). En particulier, deux valeurs de degrés des fonctions de base, i.e. $p_j = 2, 3$, et trois valeurs du nombre de PC, i.e. $n_{CP} = 1600, 3364, 4900$ sont considérés. Les Tableaux 7.6 et 7.7 montrent les courbes donnant l'évolution de la fonction objectif et de la valeur du coefficient de Poisson en fonction du nombre de PC, du degré des fonctions de forme et de l'entité considérée (B-Spline ou NURBS) pour les cas mono-matériau et bi-matériau, respectivement. Dans ces calculs, le comportement du matériau homogène équivalent est défini orthotrope et les coefficients α et β ont été choisis égaux à 0.03 et 0, respectivement.

À la suite de ces analyses, les constatations faites dans les chapitres précédents sur l'évolution de la fonction objectif par rapport au nombre de PC ainsi que par rapport aux degrés des fonctions de base sont retrouvées. En effet, plus le nombre de PC augmente et plus le degré diminue, meilleures seront les performances en termes de fonction objectif. Cependant, cette évolution ne se retrouve pas sur l'évolution de la valeur du coefficient de Poisson où il n'y a pas de tendance générale qui émerge. Cela est dû au fait que la fonction objectif peut diminuer soit en augmentant les valeurs des coefficients C_{M11} et C_{M22} soit en diminuant la valeur du coefficient C_{M12} qui aura pour conséquence de diminuer la valeur du coefficient de Poisson.

Dans le Tableau 7.6, les résultats NURBS montrent que pour un nombre faible de PC (1600) les valeurs des coefficients de Poisson prennent des valeurs inférieures à -1. Sur ces calculs, la topologie du VER présente des branches topologiques épaisses dans la direction x_{m2} et dont la topologie ressemble à celle des mécanismes dits souples (*compliant mechanism* en anglais) qui est caractéristique des matériaux auxétiques extrêmes (cette propriété est aussi dite super-auxétisme).

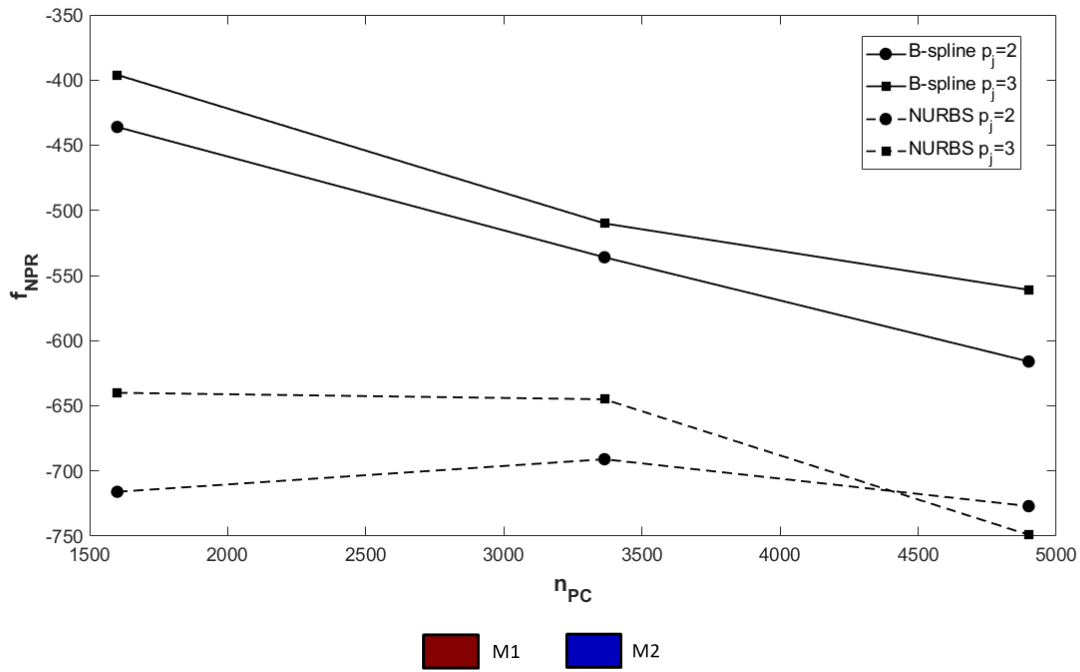
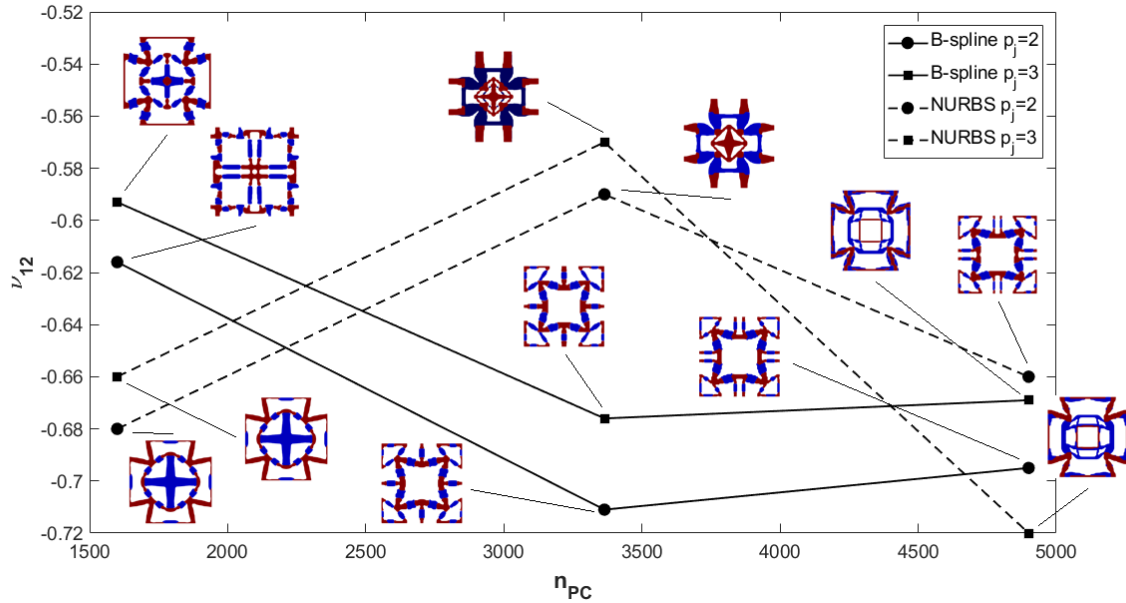
Enfin, les résultats NURBS donnent de meilleures performances en termes de fonction objectif. De plus, les topologies finales obtenues grâce à l'utilisation des entités B-spline donnent des résultats

TABLE 7.6 – Courbes d'évolution de la valeur du coefficient de Poisson et de la fonction objectif en fonction du nombre de PC et des degrés des fonctions de base - une seule phase matériau



avec des frontières qui ne sont pas totalement lisses à cause d'un phénomène de vaguelettes qui est fortement diminué avec l'utilisation des NURBS. C'est pourquoi, dans tous les autres résultats 2D présentés dans cette section, seuls les entités NURBS seront utilisées.

TABLE 7.7 – Courbes d'évolution de la valeur du coefficient de Poisson et de la fonction objectif en fonction du nombre de PC et des degrés des fonctions de base - deux phases matériau



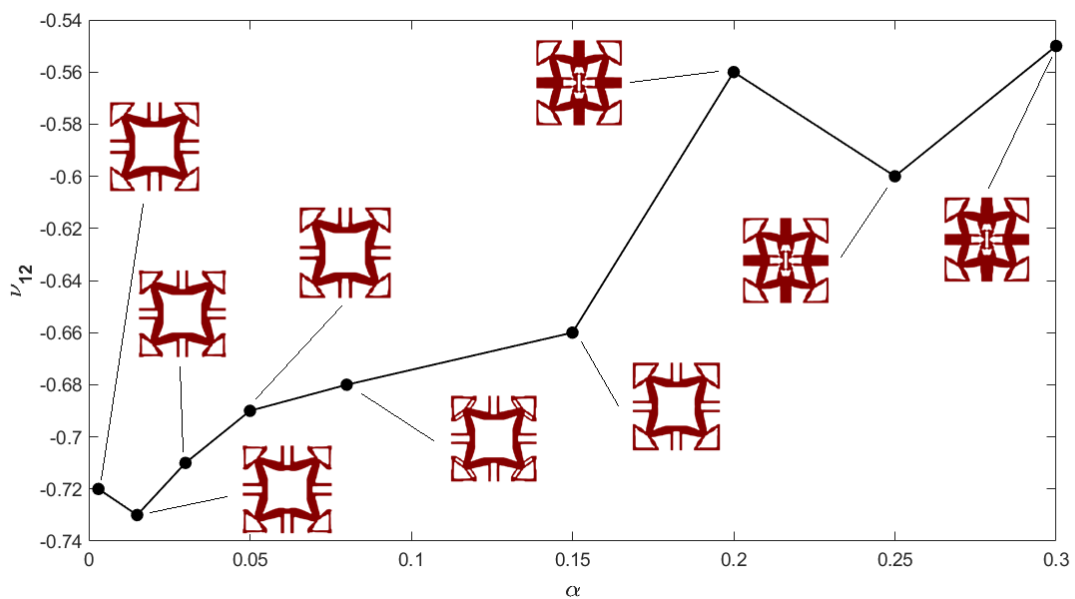
7.4.3 Influence du paramètre α sur la topologie optimale

Une campagne d'analyses numériques a été réalisée afin d'étudier l'influence du paramètre α sur la configuration optimale du VER et l'impact sur le coefficient de Poisson mais également sur les modules de Young du matériau homogène équivalent à l'échelle supérieure. Pour ces calculs, une entité NURBS caractérisée par un nombre de PC $n_{CP} = 4900$ et des degrés $p_j = 2$ a été considérée.

Le matériau homogène équivalent à l'échelle supérieure est supposé orthotrope : pour satisfaire à cette condition la répartition des phases matériau à l'intérieur du VER est symétrique par rapport aux axes $x_{mj} = a_{mj}$ ($j = 1, 2$). Le paramètre α varie dans l'intervalle $[0.003, 0.3]$. Pour ces analyses le coefficient β est nul.

Les Tableaux 7.8, 7.9 et 7.10 présentent l'évolution des courbes de la valeur du coefficient de Poisson par rapport à la valeur du paramètre α apparaissant dans la définition de la fonction objectif de l'Eq. (7.7).

TABLE 7.8 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas mono-matériau



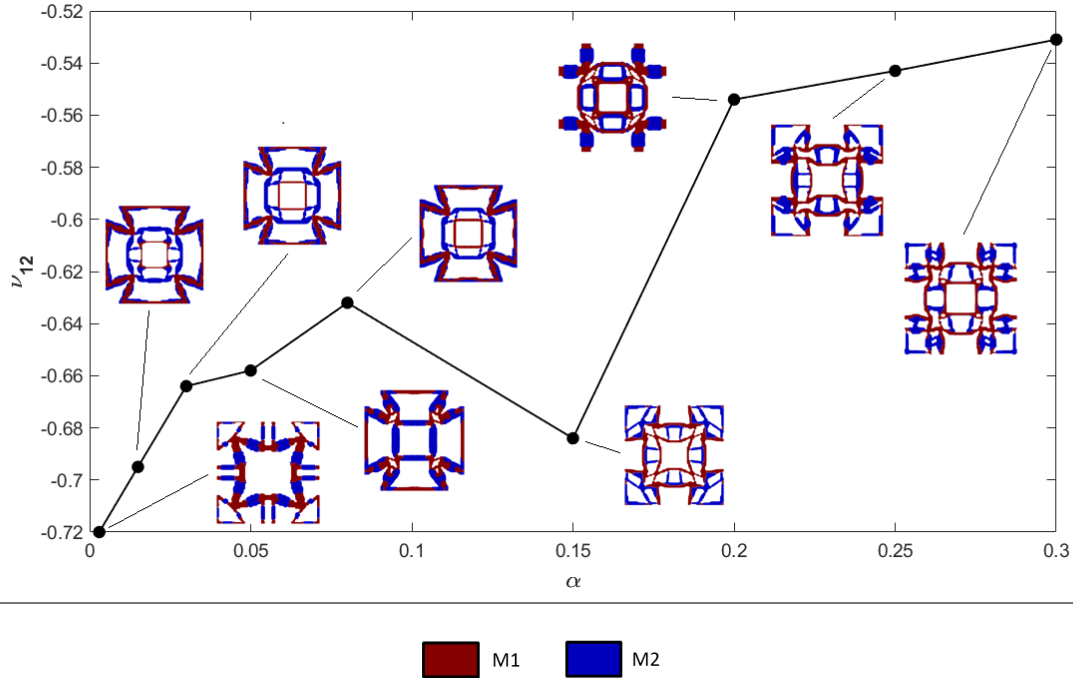
.2



À partir des résultats présentés dans les Tableaux 7.8, 7.9 et 7.10, les remarques suivantes peuvent être faites :

1. La valeur du paramètre α a une forte influence sur la valeur du coefficient de Poisson et sur la configuration optimale du VER. En effet, une tendance générale peut se retrouver sur les trois familles de résultats présentées ci-dessus : plus la valeur du paramètre α est faible, plus la valeur du coefficient de Poisson sera faible. Cette tendance était attendue car une valeur faible de α minimise l'impact des coefficients C_{M11} et C_{M22} dans le calcul de la fonction objectif pour privilégier la minimisation du coefficient C_{M12} ce qui amène à des valeurs de coefficient de Poisson plus faibles.
2. Les configurations optimales des VER des cas mono et tri-matériau sont similaires lorsque la valeur du paramètre α est faible. Cette topologie ne se retrouve pas dans le cas bi-matériau. Ceci est certainement dû à la présence d'un minimum local dans le cas d'un VER composé par deux matériaux car les coefficients de Poisson prennent des valeurs inférieures à -0.7 pour

TABLE 7.9 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas bi-matériau

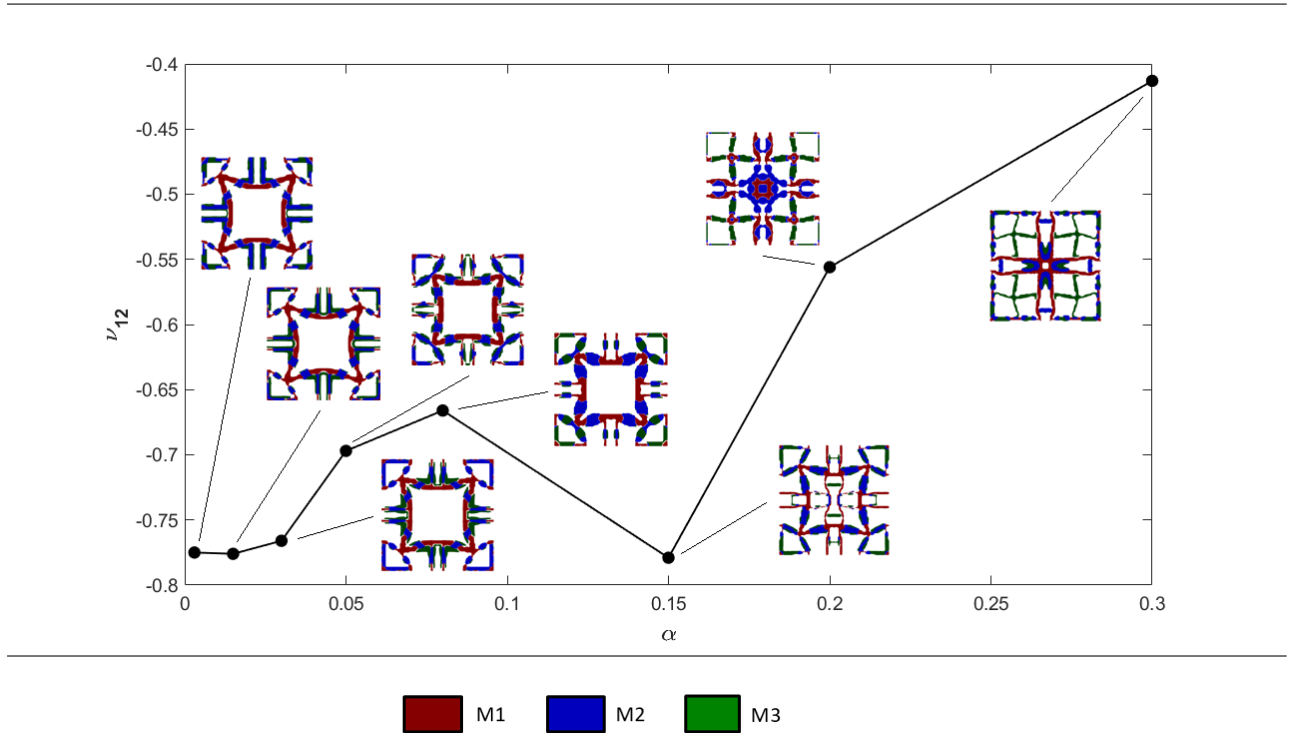


les cas mono et tri-matériau, allant même jusqu'à -0.76 pour certains calculs, alors que le coefficient de Poisson n'est pas inférieur à -0.69 pour le cas bi-matériau.

- Si les motifs des VER diffèrent suivant les cas étudiés, certaines caractéristiques se retrouvent dans la grande majorité des résultats. En effet, les topologies obtenues sur l'ensemble des cas montrent des branches topologiques plus épaisses sur la partie centrale du VER et d'autres branches plus fines sur les extrémités (configuration de type mécanisme souple). Les premières branches plus épaisses permettent d'obtenir une raideur plus élevée le long de l'axe x_{m2} . Ces caractéristiques sont une conséquence de la maximisation des coefficients C_{M11} et C_{M22} dans la définition de la fonction objectif. Ceci montre l'efficacité de la formulation de la fonction objectif qui permet d'obtenir des matériaux au comportement auxétique tout en conservant la raideur du matériau homogénéisé aux diverses sollicitations extérieures.

7.4.4 Influence des paramètres α et β et de l'anisotropie sur la topologie optimale

Une dernière campagne d'analyses numériques a été réalisée afin d'étudier l'influence du paramètre β sur la configuration optimale du VER et l'impact sur le coefficient de Poisson mais également sur les modules de Young et sur le module de cisaillement du matériau homogène équivalent à l'échelle supérieure. Pour ces calculs, une entité NURBS caractérisée par un nombre de PC $n_{CP} = 4900$ et des degrés $p_j = 2$ a été considérée. Le matériau homogène équivalent à l'échelle supérieure est totalement anisotrope : cela signifie qu'aucune symétrie n'a été imposée à la répar-

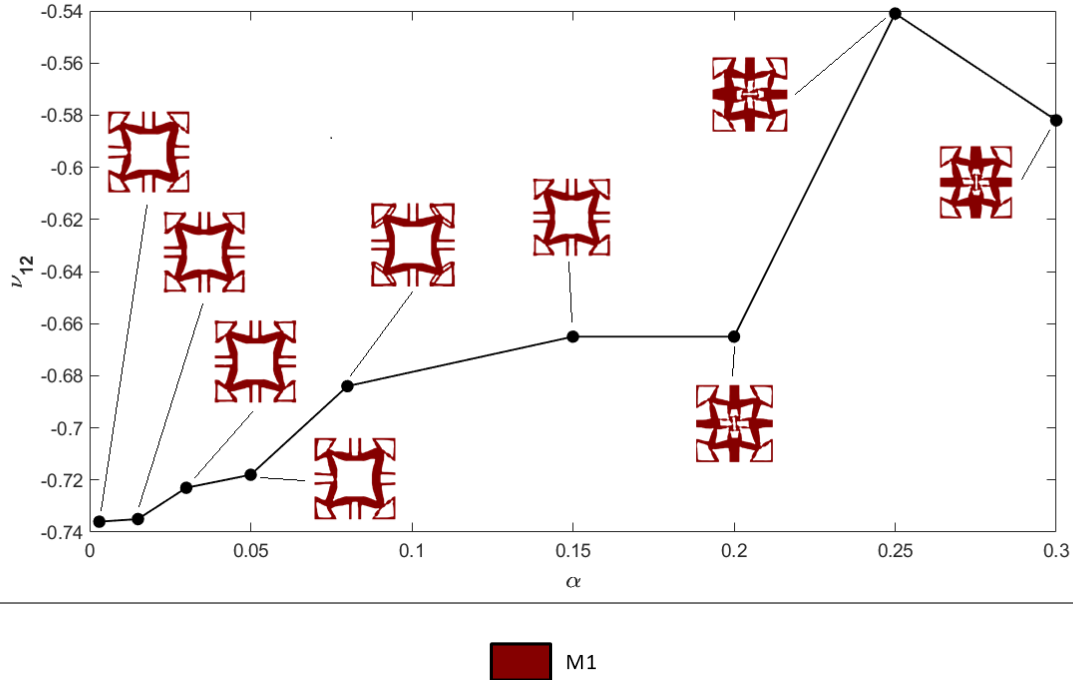
TABLE 7.10 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique orthotrope - cas tri-matériau

tition des phases matériau à l'intérieur du VER au cours du processus d'OT. Le paramètre α varie dans l'intervalle $[0.003, 0.3]$. Pour ces analyses le coefficient β vaut 1.

Les Tableaux 7.11, 7.12 et 7.13 présentent l'évolution du coefficient de Poisson par rapport à la valeur du paramètre α apparaissant dans la définition de la fonction objectif.

Lorsque le comportement du matériau à l'échelle macroscopique est anisotrope, il n'y a plus de symétrie imposée à la topologie du volume élémentaire de la structure architecturée et l'ensemble des coefficients du tenseur homogénéisé \mathbf{C}_M sont déterminés pendant le calcul d'homogénéisation. Cependant, les résultats présentés dans les Tableaux 7.11 et 7.13 convergent dans presque tous les cas vers des configurations de VER conservent des symétries. Cet aspect se traduit par des valeurs des coefficients C_{M16} et C_{M26} avec des valeurs très faibles, presque nulles, et de même signes. Toutefois, lorsque la topologie finale du VER est composée par deux matériaux et que la valeur du paramètre α est inférieure à 0.1, les symétries sont perdues dans la configuration optimale. On peut constater que parmi les cinq premières configurations optimales illustrées dans le Tableau 7.12, une seule (la quatrième) est caractérisé par un comportement monoclinique (qui présente un axe de symétrie à $x_{m2} = a_{m2}$), tandis que les autres sont totalement anisotropes. Par ailleurs, plus le nombre de matériaux définissant la topologie du VER augmente, plus le coefficient de Poisson diminue. Ainsi, en considérant une valeur de $\alpha = 0.003$, la valeur du coefficient de Poisson est de $\nu_{M12} = -0.74$ pour une configuration mono-matériau, de $\nu_{M12} = -1.3$ pour une configuration à deux matériaux et atteint des valeurs de $\nu_{M12} = -1.45$ pour une configuration à trois matériaux.

TABLE 7.11 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas mono-matériau

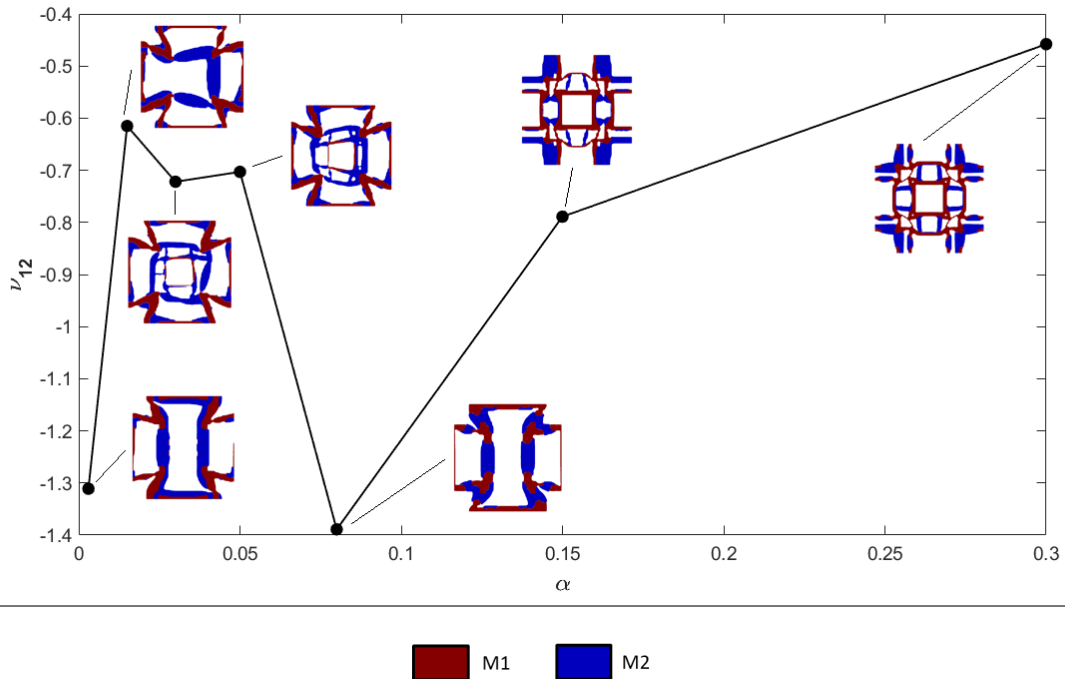


7.5 Cas d'étude 3D : résultats

Dans cette section, uniquement les résultats pour des cas mono et bi-matériau seront considérés. Les Figs. 7.4 et 7.5 montrent les résultats du PPNLC de l'Eq. (7.7) pour une valeur de α fixée égale à 0.05 et en considérant $\beta = 0, 1$. Ces résultats ont été obtenus en considérant une entité NURBS caractérisée par les paramètres suivants : $n_{CP} = 5832$ et $p_j = 2$ ($j = 1, 2, 3$). Pour chaque résultat, une vue globale du VER de la structure est donnée ainsi qu'une vue en coupe du VER par rapport au plan $x_{m1} = a_{m1}$. Dans les cas bi-matériau, les phases optimisées des deux matériaux sont également données. Le Tableau 7.14 détaille les valeurs des coefficients de Poisson des matériaux homogénéisés des solutions finales. Pour l'ensemble des résultats, la contrainte sur les fractions volumiques des phases matériaux sont respectées et se situent à la frontière du domaine de faisabilité.

À partir de ces résultats, plusieurs remarques peuvent être faites :

- Pour l'ensemble des résultats, les solutions finales sont définies par une frontière lisse et correctement définie. Dans le cas bi-matériau, cela se traduit également par une interface correctement définie entre les deux phases matériaux, comme le montre les vues en coupe des de la Fig. 7.5.
- En regardant les valeurs des propriétés élastiques des solutions mono-matériau correspondant aux cas $\beta = 0$ et $\beta = 1$, on remarque que le matériau homogénéisé équivalent, possède deux plans où le coefficient de Poisson atteint la valeur minimale, i.e. $\nu_{M21} \approx \nu_{M31} \approx -0.5$ pour $\beta = 0$ et $\nu_{M13} \approx \nu_{M23} \approx -0.5$ pour $\beta = 1$. De plus, ces plans contiennent l'axe le long duquel le module de Young a la valeur plus faible, i.e. x_{m1} pour $\beta = 0$ et x_{m3} pour $\beta = 1$.

TABLE 7.12 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas bi-matériau

- La configuration optimale du VER dans le cas bi-matériau pour $\beta = 1$ est différente des autres solutions optimisées. La topologie finale du VER présente une symétrie centrale (correspondant à une symétrie cubique) qui se retrouve dans son tenseur d'élasticité par des valeurs quasiment égales entre les termes E_{M1} , E_{M2} et E_{M3} , ainsi qu'entre les termes G_{M12} , G_{M13} et G_{M23} et enfin entre l'ensemble des coefficients de Poisson qui ont tous une valeur égale.
- Comme pour les solutions 2D, les meilleures performances en termes de minimisation du coefficient de Poisson ont été obtenues pour le cas bi-matériau dans le cas $\beta = 0$. En effet, la valeur du coefficient de Poisson lorsque le VER est composé par deux matériaux est $\nu_{M12} = -0.74$ alors qu'il ne prend pas de valeur inférieure à -0.52 dans les deux cas mono-matériaux.
- L'utilisation de la formulation de la fonction d'optimisation NPR telle que définie l'Eq. (7.7) ne se retrouve pas sur les propriétés des matériaux homogénéisés dans le cas mono-matériau. En effet, les modules de cisaillement G_{M13} et G_{M23} ont des valeurs plus élevées dans le cas $\beta = 0$ que dans le cas $\beta = 1$. Ce résultat n'était pas attendu car l'objectif de la fonction définie par l'Eq. (7.7) est de minimiser les valeurs des coefficients hors-diagonaux tout en maximisant l'ensemble des coefficients diagonaux et donc en obtenant des valeurs de modules de cisaillement maximisées. Ceci peut s'expliquer par la forte non-convexité de la fonction objectif. En effet, les valeurs de E_{M1} et G_{M12} augmentent considérablement en passant du cas $\beta = 0$ au cas $\beta = 1$ dû, probablement, à la présence d'un minimum local. Cette remarque n'est plus vraie dans le cas bi-matériau. En effet, les valeurs des modules de cisaillement sont toutes supérieures pour le matériau homogénéisé obtenu dans le cas $\beta = 1$.

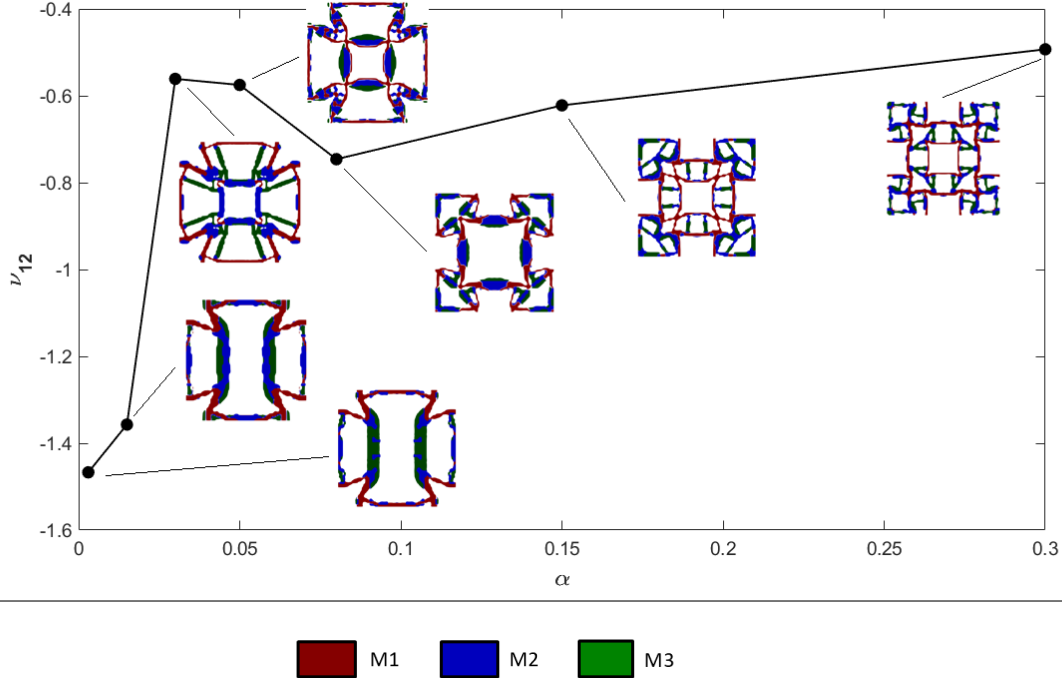
TABLE 7.13 – Coefficient de Poisson en fonction de la valeur du coefficient α en considérant un comportement macroscopique anisotrope - cas tri-matériau

TABLE 7.14 – Coefficients de Poisson finaux des résultats Figs. 7.4 et 7.5

Constantes élastiques	Cas mono-matériau		Cas bi-matériaux	
	$\beta = 0$	$\beta = 1$	$\beta = 0$	$\beta = 1$
E_{M1} (MPa)	435	743	647	358
E_{M2} (MPa)	692	635	119	351
E_{M3} (MPa)	669	380	199	354
G_{M12} (MPa)	83	137	24	61
G_{M13} (MPa)	216	70	11	59
G_{M23} (MPa)	75	73	52	57
ν_{M12}	-0.31	-0.25	-0.74	-0.32
ν_{M21}	-0.50	-0.21	-0.14	-0.31
ν_{M13}	-0.31	-0.52	-0.68	-0.32
ν_{M31}	-0.48	-0.26	-0.21	-0.31
ν_{M23}	-0.20	-0.49	-0.15	-0.31
ν_{M32}	-0.20	-0.29	-0.25	-0.32

7.6 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, la méthode proposée dans [125] a été généralisée et implémentée dans la méthode NURBS-based-SIMP dans le but d'obtenir des matériaux auxétiques. En particulier, cette méthode se couple avec la méthode d'homogénéisation SEHM, dont les détails de l'implémentation dans la méthode NURBS-based-SIMP sont donnés dans le chapitre 6, dans le but de réduire

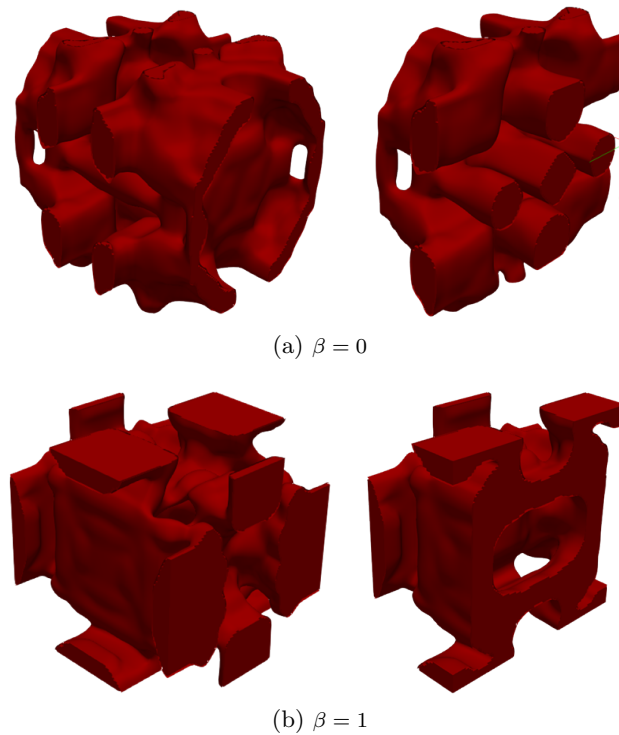


FIGURE 7.4 – Configuration optimisée du VER dans le cas mono-matériau - $\alpha = 0.05$

efficacement le nombre d'analyse pour obtenir le tenseur d'élasticité du matériau équivalent.

Certains aspects de la méthode proposée peuvent être mis en avant :

- La théorie des hypersurfaces NURBS permet d'apporter différents avantages : (a) la diminution du nombre de variables d'optimisation par rapport aux méthodes d'optimisation traditionnelles basées sur la méthode SIMP, (b) Les topologies optimisées sont définies à l'aide d'une entité géométrique ce qui permet d'obtenir des frontières clairement définies créant ainsi une interface propre entre les différentes phases matériau.
- Les problèmes d'optimisation multi-matériau/multi-échelle sont des problèmes fortement non linéaires et le choix des paramètres définis en entrée d'OT joue un rôle extrêmement important sur la convergence de l'algorithme. Ce chapitre montre l'impact de plusieurs paramètres sur la solution finale. Ainsi, le choix de la topologie initiale est fondamental. En effet, partir d'une solution initiale uniforme ne permet pas d'obtenir une solution finale correcte, c'est pourquoi un nombre de trous adéquat doit être considéré dans la topologie initiale, et ce nombre influera inévitablement la solution finale. Les résultats illustrés dans ce chapitre montrent que plus le nombre de trous à l'itération initiale est élevé, meilleures seront les performances en termes de valeur des coefficients de Poisson. Par ailleurs, le paramètre α défini dans l'Eq. (7.6) joue également un rôle important sur les valeurs de coefficients de Poisson en sortie d'OT. Ce paramètre va définir le poids accordé à l'optimisation des coefficients diagonaux du tenseur d'élasticité. Plus la valeur de ce coefficient est faible, plus l'optimisation se focalisera sur les coefficients hors diagonaux et donc plus les valeurs de coefficients de Poisson seront faibles. En

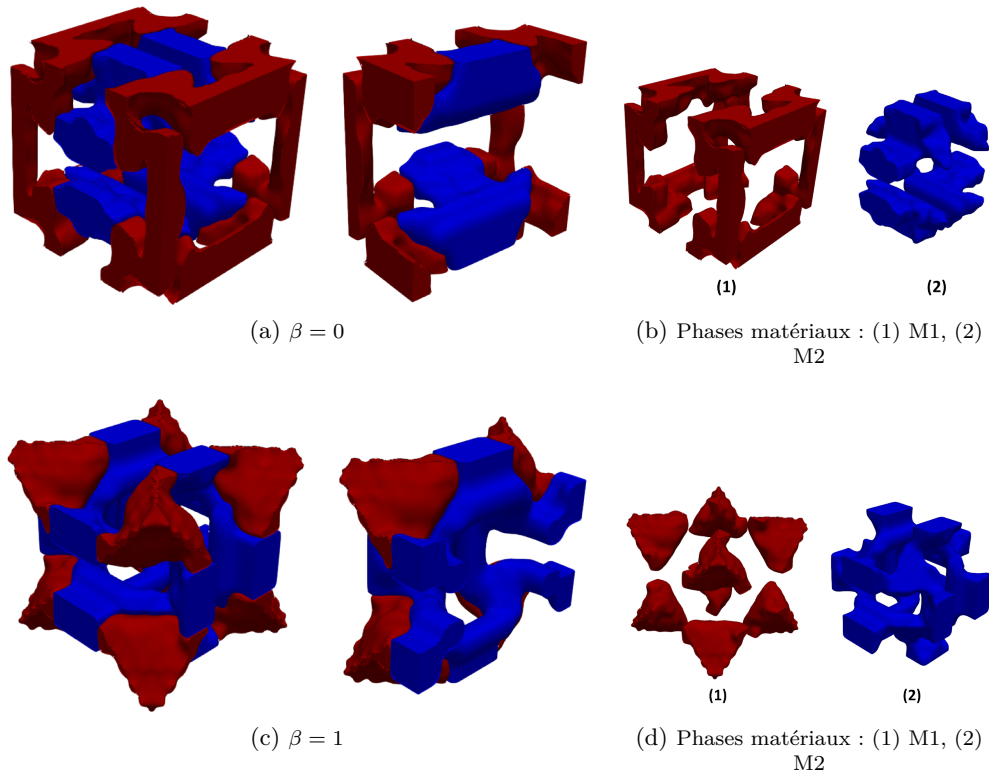


FIGURE 7.5 – Configuration optimisée du VER dans le cas bi-matériau - $\alpha = 0.05$

revanche, les coefficients diagonaux permettent de définir la raideur du matériau homogénéisé équivalent en termes de modules de Young et modules de cisaillement. Plus ces coefficients sont élevés, plus la structure sera raide. Un compromis doit donc être trouvé sur la valeur du paramètre α entre coefficients de Poisson négatifs et une bonne rigidité du matériau. Enfin, le choix des paramètres de définition des entités NURBS joue également un rôle sur la valeur de la fonction objectif en sortie d'optimisation. Plus le nombre de PC augmente et plus le degré des fonctions de base diminue, meilleures seront les résultats en termes de fonction objectif. Cependant, une valeur de fonction objectif plus faible ne signifie pas forcément une valeur de coefficient de Poisson plus faible. Les résultats présentés dans ce chapitre montrent qu'en choisissant un degré des fonctions de forme égale à 2 et en considérant un nombre de PC égale à approximativement $3/4$ du nombre d'éléments du modèle EF, permet d'obtenir de bons résultats en termes de valeur du coefficient de Poisson.

- Le comportement du matériau homogénéisé joue également un rôle important. Plus précisément, entre un comportement orthotrope et un comportement complètement anisotrope, les valeurs des coefficients de Poisson obtenues changent. En effet, un comportement totalement anisotrope permet une exploration plus libre du domaine d'optimisation et permet ainsi d'obtenir de meilleures performances en termes de valeur de coefficient de Poisson, pouvant descendre jusqu'à $\nu_{M12} = -1.45$.
- Enfin, la formulation de la fonction d'optimisation permet d'obtenir des propriétés auxétiques

différentes. En effet, la valeur du coefficient β permet de prendre en compte dans le calcul de la fonction objectif, les composantes $C_{Mii}, i = 4, ..6$. Sur les résultats détaillés dans ce chapitre, la prise en compte de ces composantes n'a pas d'impact sur les résultats mono-matériau. En revanche, elle joue un rôle majeur sur les résultats multi-matériaux, puisqu'elle permet d'obtenir des valeurs de coefficient de Poisson de -1.45 pour les cas 2D et de -0.74 pour les cas 3D.

L'ensemble des travaux détaillés dans ce chapitre est loin de traiter de l'ensemble des problématiques liées à l'OT des méta-matériaux auxétiques. En effet, les analyses présentées dans ce chapitre sont limitées à l'étude du VER à l'échelle inférieure sans étudier l'impact qu'aurait eu les diverses sollicitations extérieures appliquées à la structure à l'échelle supérieure. De plus, il serait intéressant de prendre en compte l'influence de la non-linéarité de la loi de comportement de chaque matériau sur la réponse macroscopique du VER : est-ce que le comportement auxétique de la solution optimale se conserve en présence d'un comportement non-linéaire ? Est-ce que la symétrie élastique de la solution optimale du VER déterminée sous l'hypothèse de petits déplacements et déformations se conserve lorsque ces hypothèses ne sont plus valables ?

Chapitre 8

Conclusion générale

Dans l'ensemble des chapitres de ce manuscrit, des conclusions détaillées ont été données. L'objectif de cette section est d'élargir la réflexion à des sujets plus généraux et de donner les principales perspectives qui peuvent découler de ces travaux de thèse.

8.1 Conclusion Générale

Ces travaux de thèse prennent place dans le cadre du projet OCEAN-ALM et ont pour but de développer les méthodologies et les outils de conception propres à la FA. En particulier, la méthode d'OT basée sur les hypersurfaces NURBS, proposée par G. Costa, a été reprise et étendue dans un cadre plus général, lui permettant ainsi de traiter des problèmes plus complexes tel que le contrôle de la répartition du champ des contraintes mécaniques au cours de l'optimisation ou encore la possibilité de réaliser des optimisations multi-échelle/multi-matériau.

Dans un premier temps, les travaux, présentés dans les Chapitres 4 et 5, ont permis d'implémenter dans l'algorithme *SANTO* des contraintes d'optimisation basées sur les critères de tenue mécanique des pièces pour des matériaux isotropes, puis pour des matériaux anisotropes. La principale difficulté rencontrée est le calcul des gradients des fonctions d'optimisation. En effet, l'algorithme *SANTO* permet de résoudre les PPNLC par le biais d'un algorithme au gradient et le calcul de la dérivée des fonctions d'optimisation est un point essentiel lors de la résolution. Dans ces chapitres, le calcul des gradients des fonctions basées sur les critères de tenue mécanique ont pu se faire par la résolution d'un second problème adjoint représentant la contribution "non-locale" du gradient de la fonction. Une autre difficulté réside dans le comportement propre des contraintes mécaniques qui sont soumises à trois phénomènes pouvant altérer la bonne convergence de l'algorithme d'OT : la nature locale des contraintes, leur comportement non-linéaire et le phénomène de singularité. Dans ces travaux, ces trois aspects ont pu être contournés ou résolus par l'utilisation de certaines techniques numériques. En effet, la nature locale des contraintes a pu être évitée grâce à l'utilisation d'une fonction d'agrégation qui permet d'approximer (par excès) la valeur maximale du critère de tenue calculée sur un maillage donné. Le problème est ainsi transformé en un problème ne considérant qu'une seule fonction contrainte basée sur les critères de tenue mécanique et non plus une fonction contrainte pour chaque élément du maillage EF. Ces fonctions d'agrégation font appel à un paramètre (appelé χ dans ces travaux) qui définit la précision de l'approximation, i.e. plus la valeur de χ sera élevée, plus l'approximation sera proche de la valeur réelle. Dans de nombreux problèmes étudiés, le critère de tenue mécanique n'est pas respecté à l'itération initiale et l'utilisation d'un paramètre χ de valeur élevée (pour obtenir une bonne approximation) peut créer des problèmes d'*overflow* empêchant la convergence de l'algorithme. Dans ces travaux, une

stratégie basée sur la mise à jour de ce paramètre χ au fur et à mesure des itérations a été proposée. Cette stratégie démarre l'OT avec une valeur de χ faible permettant ainsi d'éviter l'*overflow* et de surestimer la valeur réelle de la contrainte maximale du critère de rupture au sein de la structure. Cette surestimation permet dans les premières itérations d'accélérer la convergence de l'algorithme dans les zones critiques. Ensuite, la valeur du paramètre χ est augmentée par paliers jusqu'à obtenir une valeur d'approximation du maximum correcte. Le deuxième problème est le problème de non-linéarité qui peut causer une forte et brusque augmentation des contraintes sur des zones très localisées à la suite d'une légère modification de la topologie. Dans la majorité des travaux trouvés en littérature, les algorithmes utilisent des techniques de filtrage permettant de créer un lien entre chaque élément et les éléments de son voisinage. Dans le cas de la méthode NURBS-based-SIMP, de telles techniques ne sont pas nécessaires. En effet, la propriété du support local des entités NURBS crée un filtre implicite entre les éléments qui sont dans le support local de chaque PC et atténue fortement le phénomène de non-linéarité. La dernière problématique, lors de la prise en compte des critères de tenue mécanique dans l'OT, est le problème de singularité. Pour surmonter ce problème, les travaux détaillés dans ce manuscrit utilisent une méthode de relaxation couramment utilisée en littérature : la *qp*-relaxation. Cette méthode agit en modifiant la pénalisation du vecteur des contraintes et est particulièrement adaptée pour les algorithmes d'OT qui se basent sur la méthode SIMP.

Ces travaux ont montré que la méthode NURBS-based-SIMP apportait de nombreux avantages lors de la résolution d'analyses d'OT basée sur les critères de tenue mécanique. En effet, en utilisant la méthode NURBS-based-SIMP, la reconstruction de la frontière de la topologie optimisée est plus précise car elle est définie par une entité purement géométrique. De plus, l'utilisation d'une entité purement géométrique lors de la définition du champ de pseudo-densité permet d'avoir une topologie finale totalement indépendante du maillage EF et donc une topologie reconstruite très proche de la topologie obtenue par le calcul d'OT. La connaissance précise de cette frontière permet d'avoir une très faible variation entre la frontière de la géométrie optimisée et celle de la géométrie reconstruite, ce qui implique une meilleure précision dans la connaissance des contraintes mécaniques présentes dans la géométrie reconstruite que les méthodes d'optimisation traditionnelles. Le nombre de variables d'optimisation dépend du nombre de PC utilisés dans la description de l'entité NURBS et n'est plus directement égal au nombre d'éléments présents dans le maillage EF, i.e. le nombre de variables d'optimisation nécessaire pour définir une topologie optimale ainsi qu'une approximation correcte du champ des contraintes dans la solution optimisée est réduit, comparé à la méthode SIMP traditionnelle.

Par ailleurs, il a été montré, à travers les Chapitres 4 et 5, que la résolution d'un problème d'OT qui considère la répartition du champ des contraintes au sein de la structure est fortement impacté par le comportement du matériau utilisé, i.e. isotrope, orthotrope, etc. Au-delà du critère de tenue utilisé, qui diffère entre les critères de limite d'élasticité pour les matériaux isotropes (HHVM, Tresca...) ou les critères de rupture pour les matériaux anisotropes (TH, Hoffman, TW...), la formulation du PPNLC doit être correctement définie suivant le matériau utilisé. En effet, comme détaillé dans le Chapitre 4, lorsque le comportement du matériau est isotrope, la formulation d'une fonction d'optimisation directement basée sur le critère de tenue mécanique est suffisante pour obtenir de bons résultats. Cependant, lorsque le comportement du matériau est anisotrope, comme montré dans le Chapitre 5, l'utilisation d'une fonction contrainte directement basée sur le critère de rupture n'est plus efficace. En effet, les critères phénoménologiques de rupture sont fortement influencés par les conditions de chargement extérieures appliquées sur la structure. Pour être efficace, la fonction d'optimisation doit considérer le chargement extérieur dans sa formulation. Les travaux dans ce manuscrit ont utilisé la définition du *load factor* et de l'indice de rupture

associé, définie dans [99], et l'ont implémentée dans le cadre de la méthode d'optimisation basée sur les NURBS dans le but de réaliser des OT basées sur les contraintes mécaniques et dédiées aux matériaux anisotropes.

Dans un second temps, les travaux détaillés dans les Chapitres 6 et 7 ont montré l'implémentation de problèmes multi-échelle et multi-matériau dans l'algorithme d'optimisation basé sur les hypersurfaces NURBS. En particulier, deux aspects ont été étudiés : la compliance de la structure à l'échelle macroscopique et la possibilité d'obtenir un méta-matériau auxétique. Le premier aspect a permis de définir une approche considérant des variables topologiques définies à l'échelle du VER tout en optimisant la valeur de la compliance de la structure définie à l'échelle supérieure. Dans ces travaux, la topologie du VER a pu être définie à partir de deux ou trois phases matériaux. Pour faire le lien entre les échelles, la méthode d'homogénéisation SEHM a été utilisée. Cette méthode d'homogénéisation est basée sur l'énergie de déformation du VER et possède l'avantage de ne réaliser que 6 analyses statiques pour déterminer le tenseur d'élasticité du matériau homogénéisé. Ces travaux ont mis en avant une forte non-convexité du problème d'OT qui complique fortement la convergence de l'algorithme d'optimisation qui peut régulièrement être amené vers des minima locaux. C'est pourquoi, l'initialisation des variables d'optimisation est cruciale et un descripteur topologique initial non-uniforme pour chaque phase matériau composant le VER doit être privilégié. Dans ces travaux, des "trous" sont considérés dans le domaine initial (i.e. la valeur de certains PC est fixée à la valeur de la borne inférieure). Le deuxième aspect a permis d'obtenir des méta-matériaux auxétiques, i.e. dont le coefficient de Poisson est négatif. Les résultats obtenus dans le Chapitre 7 ont permis dans certains cas d'atteindre la propriété de super-auxétisme, i.e. d'obtenir des méta-matériaux ayant une valeur des coefficients de Poisson inférieure à -1 .

Lors des calculs réalisés dans l'ensemble des études détaillées dans ces travaux, le rôle des paramètres définissant les entités NURBS, i.e. le nombre de PC, les degrés des fonctions de base et le poids associés à chaque PC, a pu être mis en avant. En effet, dans les calculs présentés dans les Chapitres 4 et 5, l'impact du nombre de PC et du degré des fonctions de base respecte les règles standard définies dans les travaux précédents se basant sur la méthode NURBS-based-SIMP : plus le nombre de PC est élevé (à degré fixé) ou plus le degré des fonctions de base est faible (à nombre de PC fixé), plus la valeur de la fonction objectif sera faible, tant pour les résultats B-spline que pour les résultats NURBS. Ainsi, un bon compromis entre la précision de la solution et le temps de calcul a pu être atteint en considérant un nombre de PC correspondant à trois-quart du nombre d'éléments. En ce qui concerne les degrés des fonctions de base, dans la majorité des calculs, il est préférable d'utiliser un degré égal à 2. Le nombre de PC et le degré des fonctions de base jouent également un rôle sur la dimension minimale des branches topologiques apparaissant dans la solution optimisée. En effet, ces deux paramètres affectent la taille du support local : plus le nombre de PC est élevé et le degré des fonctions de base faible, plus petite sera la taille du support local. Cet aspect permet d'ajouter au problème d'OT une condition sur la taille minimale du diamètre des branches topologiques de la solution optimisée sans ajouter de contrainte explicite au problème d'optimisation. Cette condition peut s'avérer utile pour s'adapter aux limites techniques des procédés de fabrication additive. Ce point est particulièrement crucial dans le cadre de l'optimisation multi-échelle/multi-matériau dans laquelle, les branches topologiques de chaque phase matériau peuvent être particulièrement faibles. L'influence des poids associés aux PC a également pu être mise en avant. Sur l'ensemble des solutions détaillées dans ce manuscrit, les résultats basés sur les entités NURBS ont donné de meilleures performances en termes de fonction objectif que les résultats basés sur les entités B-splines, au prix d'un temps de calculs légèrement plus long. Dans le cadre des analyses multi-échelle/multi-matériau, l'utilisation des entités NURBS permet d'avoir une meilleure répartition entre les différentes phases matériau, éliminant totalement

les zones de densité intermédiaire, ce qui n'est pas toujours le cas avec les entités B-splines.

8.2 Perspectives de la thèse

Les résultats obtenus dans cette thèse ne touchent qu'une petite partie des problèmes liés à l'OT basée sur les hypersurfaces NURBS et un très long chemin reste encore à parcourir avant de maîtriser complètement le sujet et d'autres recherches devront encore être faites à partir de cette thèse.

En effet, le développement de ce type d'algorithmes d'optimisation est un sujet fortement étudié de nos jours, car il a vocation à être utilisé par la suite dans les bureaux d'études. Cependant, pour pouvoir être utilisés dans un bureau d'études, les algorithmes d'OT doivent permettre de prendre en compte l'ensemble des critères considérés par le secteur industriel. Les travaux présentés dans ce manuscrit ont permis de définir certaines règles, lors de l'utilisation d'une fonction d'optimisation basée sur les critères de tenue mécanique, qui pourront être ré-utilisées dans d'autres domaines de la physique, telle que des études de flambage ou encore des analyses en fatigue qui sont des problématiques couramment rencontrées dans les bureaux d'études. L'un des principaux problèmes qui sera rencontré lors de l'analyse de flambage, sera la prise en compte de la matrice de rigidité géométrique de la structure qui devra être correctement implémentée et dont le calcul du gradient par rapport aux variables d'optimisation n'est pas trivial.

Concernant l'intégration des critères de tenue dans la méthode d'OT basée sur les hypersurfaces NURBS, une perspective intéressante porte sur la formulation d'un problème d'OT robuste en prenant en compte l'incertitude sur les chargements appliqués ainsi que sur les propriétés des matériaux constitutifs utilisés. Dans ce cas, un couplage entre la théorie des hypersurfaces NURBS et les formulations / outils employés dans la statistique telles que la méthode Monte Carlo, les modèles stochastiques d'ordre réduit, etc. doit être développé.

Concernant la méthode d'optimisation multi-échelle/multi-matériau trois perspectives majeures peuvent être envisagées :

1. Une première possibilité qui consisterait à réaliser une optimisation double échelle, permettant ainsi d'optimiser à la fois la topologie du VER (composée de plusieurs phases matériaux) et la topologie de la structure à l'échelle macroscopique.
2. Une deuxième approche qui consisterait à optimiser différemment les topologies du VER suivant l'endroit où ils se trouvent dans la structure macroscopique. Une telle méthode permettrait de renforcer les zones de la structure les plus sollicitées tout en allégeant fortement les zones les moins sollicitées.
3. Une troisième perspective qui consisterait à coupler les travaux réalisés dans les Chapitres 5 et 6. C'est-à-dire, de réaliser une OT multi-matériau multi-échelle en considérant des critères de tenue adaptés à des structures lattice multi-matériau. La résolution de ce type de problème amènerait plusieurs difficultés : Quel critère de tenue serait le plus adapté pour un milieu hétérogène composé de plusieurs phases matériau ? Comment identifier la zone critique à l'échelle supérieure, l'isoler et appliquer le critère de tenue à l'échelle du VER ?

Malheureusement, peu de travaux s'intéressent aux problématiques précédentes. Des premières approches existent déjà mais sont peu efficaces et ne sont pas développées dans une méthode d'optimisation multi-matériau basée sur les hypersurfaces NURBS.

D'autres travaux plus généraux sont encore à réaliser sur le développement de la méthode NURBS-based-SIMP. En effet, si la CAO-compatibilité a été parfaitement démontrée pour les

problèmes 2D, elle n'est pas encore complètement maîtrisée pour les cas 3D. Dans ces travaux, la reconstruction des topologies 3D trouvées, se fait par l'intermédiaire d'un fichier *.vtk* qui est ensuite traité sur le logiciel Paraview. Il n'existe à première vue pas de méthode simple qui permettrait une reconstruction automatique (ou semi-automatique) en sortie d'optimisation qui donnerait des topologies CAO-compatibles. L'une des solutions serait d'approximer les surfaces extérieures de la topologie finale à l'aide d'une méthode de *fitting* adaptée. Une méthode particulièrement prometteuse a été développée dans [18] et qui consiste à venir approximer les surfaces de la topologie optimisée par plusieurs patches de surfaces NURBS correctement liées entre elles. Cependant, ce type de méthodes peut s'avérer extrêmement coûteux en temps de calcul et très difficile à mettre en place pour des cas d'études complexes (car le nombre d'entités NURBS pour approximer la topologie finale est trop élevé).

Les topologies trouvées dans le cadre d'un problème d'OT sont destinées à l'ALM et la prise en compte des contraintes liées aux différents procédés ALM reste un enjeu fondamental. Dans ce manuscrit, plusieurs références sont faites à la dimension minimale des branches topologiques mais d'autres contraintes géométriques, telles que le diamètre maximal ou encore le rayon de courbure des branches topologiques peuvent être considérées. De plus, ces deux derniers critères peuvent avoir un effet bénéfique sur la répartition des contraintes au sein de la structure. En effet, des branches topologiques plus épaisses et des angles entre les branches plus arrondis permettrait de diminuer localement les concentrations de contraintes et ainsi améliorer les performances de l'algorithme. Une autre contrainte liée à la fabrication et utilisée dans les algorithmes d'optimisation est la contrainte permettant de diminuer le matériau de support utilisé lors de la fabrication. Cependant, les nombreuses études parues sur le sujet ont montré que prendre en compte une telle fonction diminuerait fortement les performances mécaniques des solutions trouvées à l'aide de l'algorithme d'optimisation. Une nouvelle fois, un compromis acceptable serait donc à trouver entre performances et coût de calcul.

Un dernier aspect, qui n'est pas, à proprement parler, une perspective peut néanmoins être cité ici. En effet, pour vérifier (et valider) les résultats obtenus dans ce manuscrit, certaines topologies optimisées auraient pu être imprimées à l'aide d'une machine de FA dans le but de comparer les performances obtenues en sortie d'optimisation et les performances réelles de la pièce imprimée.

Annexe A

Calcul du gradient de la fonction basée sur le critère HHVM

Les détails de la démonstration de la proposition 4.3.1 sont donnés ci-dessous.

Considérons dans un premier temps l'équation suivante :

$$g_\chi = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \delta_e^\chi \right)^{\frac{1}{\chi}} - 1 + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{K}_{\text{BC}}\mathbf{u}_{\text{BC}} - \mathbf{f}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}_{\text{BC}}^T \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{\text{BC}} - \mathbf{r}), \quad (\text{A.1})$$

où les deux derniers termes du côté droit de la formule ci-dessus sont identiquement nuls car l'Eq. (3.12) est toujours vérifiée. Dans l'Eq. A.1, $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}$ et $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{N_{\text{BC}}}$ sont deux vecteurs définis arbitrairement. Dans la mesure où les forces structurelles sont identiquement nulles et où les déplacements imposés ne dépendent pas du champ de densité, les dérivées de \mathbf{f} et de \mathbf{u}_{BC} s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \xi_{ik}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{\text{BC}}}{\partial \xi_{ik}} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{\text{CP}}. \quad (\text{A.2})$$

En considérant l'équation ci-dessus, la dérivée de l'Eq. A.1 s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{ik}} &= (g_\chi + 1)^{(1-\chi)} \sum_{e=1}^{N_e} \delta_e^{\chi-1} \frac{\partial \delta_e}{\partial \xi_{ik}} + \boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{\text{BC}}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{\text{BC}} \right) + \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{\text{BC}}^T}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{\text{BC}}^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{\text{BC}} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_{ik}} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

À partir de l'Eq. 4.16, la dérivée de δ_e devient :

$$\frac{\partial \delta_e}{\partial \xi_{ik}} = 2\boldsymbol{\sigma}_e^T \mathbf{M} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{A.4})$$

où la dérivée de $\boldsymbol{\sigma}_e$ peut être retrouvée à l'aide des Eqs. 4.12 et 4.13.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \xi_{ik}} = \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \boldsymbol{\sigma}_e + \rho_e^\beta \mathbf{C}\mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \xi_{ik}}. \quad (\text{A.5})$$

En appliquant la Def. 1 et l'Eq. A.2 à l'Eq. A.5, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_e}{\partial \xi_{ik}} &= \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \boldsymbol{\sigma}_e + \rho_e^\beta \mathbf{C}\mathbf{B}_e \left[\mathfrak{R}(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_{\text{BC}}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \mathfrak{R}(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_U) \frac{\partial \mathbf{u}_{\text{BC}}}{\partial \xi_{ik}} \right] \\ &= \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \boldsymbol{\sigma}_e + \rho_e^\beta \mathbf{C}\mathbf{B}_e \mathbf{L}_e \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}}, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

où \mathbf{L}_e est défini dans l'Eq. 4.25. En injectant l'Eq. A.6 dans l'Eq. A.4 et l'Eq. (A.4) dans l'Eq. (A.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{ik}} &= (g_\chi + 1)^{(1-\chi)} \sum_{e \in \mathcal{S}_k} 2\delta_e^\chi \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\eta}^\top \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \boldsymbol{\mu}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC} \right) + \\ &+ \boldsymbol{\lambda}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{BC}^\top}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \mathbf{K}_{BC}^\top \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC} - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_{ik}} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

où $\boldsymbol{\eta}$ a été défini dans l'Eq. (4.24). Les vecteurs adjoints arbitraires $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ peuvent être choisis de sorte que les termes multipliant les fractions $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_{ik}}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_{ik}}$ présents dans l'Eq. (A.7) disparaissent : cette condition permet d'obtenir le système d'équations suivant :

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\eta}. \quad (\text{A.8})$$

L'Eq. (A.8) définit le *système adjoint*. En injectant la solution de l'Eq. A.8 dans l'Eq. A.7, on obtient :

$$\frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{ik}} = (g_\chi + 1)^{(1-\chi)} \sum_{e \in \mathcal{S}_k} 2\delta_e^\chi \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\mu}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC} \right). \quad (\text{A.9})$$

Les expressions des termes $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}}$ et $\frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}}$ peuvent être dérivées en appliquant la Def. 1 à la dérivée de l'Eq. (3.15) comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}} &= \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \hat{\mathbf{L}}_e^\top \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{L}}_e, \\ \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} &= \mathfrak{R} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}}, \mathcal{I}_{BC}, \mathcal{I}_{BC} \right) = \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e^\top, \mathcal{I}_{BC}, \emptyset \right) \mathbf{K}_e \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_{BC} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} &= \mathfrak{R} \left(\frac{\partial \hat{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}}, \mathcal{I}_{BC}, \mathcal{I}_U \right) = \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e^\top, \mathcal{I}_{BC}, \emptyset \right) \mathbf{K}_e \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_U \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En prenant en compte pour l'Eq. A.10, il est facile de vérifier que l'égalité suivante est toujours vérifiée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC} &= \\ &= \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e^\top, \mathcal{I}_{BC}, \emptyset \right) \mathbf{K}_e \left[\mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_{BC} \right) \mathbf{u} + \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e, \emptyset, \mathcal{I}_U \right) \mathbf{u}_{BC} \right] \\ &= \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \mathfrak{R} \left(\hat{\mathbf{L}}_e^\top, \mathcal{I}_{BC}, \emptyset \right) \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{L}}_e \hat{\mathbf{u}} = \sum_{e \in \mathcal{S}_k} \frac{\alpha}{\rho_e} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{L}_e^\top \mathbf{f}_e = \mathbf{f}_{ik}, \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

où \mathbf{f}_{ik} et \mathbf{L}_e ont été introduits dans les Eqs. 4.23 et 4.25, respectivement, tandis que \mathbf{f}_e est défini tel que :

$$\mathbf{f}_e := \mathbf{K}_e \hat{\mathbf{L}}_e \hat{\mathbf{u}}, \quad \mathbf{f}_e \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}^e}. \quad (\text{A.12})$$

Enfin, en injectant l'Eq. A.11 dans l'Eq. A.9, on obtient :

$$\frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{ik}} = (g_\chi + 1)^{1-\chi} \sum_{e \in \mathcal{S}_\tau} 2\delta_e^\chi \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{f}_{ik}, \quad (\text{A.13})$$

ce qui conclut la démonstration.

Il est à noter que l'évaluation du gradient du critère HHVM nécessite la résolution de deux analyses statiques, i.e. l'Eq. 3.12 et le système adjoint défini à l'Eq. A.8. C'est pourquoi, à chaque itération du processus d'optimisation, l'algorithme suivant est résolu pour mener toutes les étapes nécessaires au calcul du gradient de la fonction g_χ .

Algorithm 1 Calcul du gradient du critère HHVM.

- 1: Résoudre l'Eq. 3.12 et obtenir $\hat{\mathbf{u}}, \mathbf{f}_e, \boldsymbol{\varepsilon}_e, \forall e$.
 - 2: Calculer le terme $\boldsymbol{\sigma}_e$ des Eqs. 4.12 et 4.13.
 - 3: Evaluer $\mathbf{f}_{i\tau}$ de l'Eq. 4.23.
 - 4: Calculer $\boldsymbol{\eta}$ de l'Eq. 4.24.
 - 5: Résoudre le système adjoint (A.8) et obtenir $\boldsymbol{\mu}$.
 - 6: Déterminer $\frac{\partial g_\chi}{\partial \xi_{i\tau}}$ de l'Eq. A.13.
-

Annexe B

Définition des critères de rupture

Dans cette section, les détails des composantes des matrices \mathbf{M}^f et des vecteurs \mathbf{m}^f définissant les critères phénoménologiques de rupture pour matériaux anisotropes sont donnés. Ils sont donnés dans un premier temps dans leur forme générale par les Eqs. (B.1) et (B.2) puis leurs composantes sont détaillées dans les Tableaux. B.1 et B.2.

$$\mathbf{M}^f := \begin{bmatrix} M_{11}^f & M_{12}^f & M_{13}^f & 0 & 0 & 0 \\ M_{12}^f & M_{22}^f & M_{23}^f & 0 & 0 & 0 \\ M_{13}^f & M_{23}^f & M_{33}^f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{44}^f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{55}^f & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{66}^f \end{bmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{m}^f := \begin{Bmatrix} m_1^f \\ m_2^f \\ m_3^f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

Dans les Tableaux. B.1 et B.2, X_c , Y_c et Z_c sont les contraintes limites à la rupture en compression du matériau dans les directions x_1 , x_2 et x_3 , tandis que X_t , Y_t et Z_t sont les contraintes limites à la rupture en traction. Dans le cas du critère de TH X , Y et Z sont les cas particuliers ou les limites en traction et en compression du matériau sont équivalentes, ainsi $X_c = X_t = X$, $Y_c Y_t = Y$ et $Z_c = Z_t = Z$. Si le matériau utilisé n'a pas le même comportement en traction et en compression, les valeurs de X , Y et Z du critère de TH sont évaluées à partir de la moyenne des contraintes limites en traction et en compression.

TABLE B.1 – Composantes de la matrice M^f

Composante M^f	Critère de TH	Critère de Hoff	Critère de TW
M^f_{11}	$\frac{1}{X^2}$	$\frac{1}{X_t X_c}$	$\frac{1}{X_t X_c}$
M^f_{22}	$\frac{1}{Y^2}$	$\frac{1}{Y_t Y_c}$	$\frac{1}{Y_t Y_c}$
M^f_{33}	$\frac{1}{Z^2}$	$\frac{1}{Z_t Z_c}$	$\frac{1}{Z_t Z_c}$
M^f_{44}	$\frac{1}{S_{23}^2}$	$\frac{1}{S_{23}^2}$	$\frac{1}{S_{23}^2}$
M^f_{55}	$\frac{1}{S_{13}^2}$	$\frac{1}{S_{13}^2}$	$\frac{1}{S_{13}^2}$
M^f_{66}	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$	$\frac{1}{S_{12}^2}$
M^f_{12}	$\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \right)$	$\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} - \frac{1}{Z_t Z_c} \right)$	$\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{1}{X_t X_c Y_t Y_c}}$
M^f_{13}	$\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{X^2} - \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)$	$\frac{-1}{2} \left(\frac{1}{X_t X_c} - \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} \right)$	$\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{1}{X_t X_c Z_t Z_c}}$
M^f_{23}	$\frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} \right)$	$\frac{-1}{2} \left(\frac{-1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c} + \frac{1}{Z_t Z_c} \right)$	$\frac{-1}{2} \sqrt{\frac{1}{Y_t Y_c Z_t Z_c}}$

TABLE B.2 – Composantes du vecteur m^f

Composante M^f	Critère de TH	Critère de Hoff	Critère de TW
m^f_1	0	$\frac{X_c - X_t}{X_c X_t}$	$\frac{X_c - X_t}{X_c X_t}$
m^f_2	0	$\frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t}$	$\frac{Y_c - Y_t}{Y_c Y_t}$
m^f_3	0	$\frac{Z_c - Z_t}{Z_c Z_t}$	$\frac{Z_c - Z_t}{Z_c Z_t}$

Annexe C

Calcul du gradient de la fonction basée sur les critères phénoménologiques de rupture pour matériaux anisotropes

Les détails de la démonstration de l'Eq. (5.15) sont donnés ci-dessous.

Considérons dans un premier temps l'équation suivante :

$$h_{F\chi} = \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right)^{\frac{1}{\chi}} + \boldsymbol{\mu}^T (\mathbf{K}\mathbf{u}_0 + \mathbf{K}_{BC}\mathbf{u}_{BC0} - \mathbf{f}_0) + \boldsymbol{\phi}^T \left(\mathbf{K}_{BC}^T \mathbf{u}_0 + \tilde{\mathbf{K}}\mathbf{u}_{BC0} - \mathbf{r}_0 \right), \quad (\text{C.1})$$

où les deux derniers termes du côté droit de la formule ci-dessus sont identiquement nuls car l'Eq. (3.12) est toujours vérifiée. Dans l'Eq. (C.1), $\boldsymbol{\phi} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}$ et $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{N_{BC}}$ sont deux vecteurs définis arbitrairement. Dans la mesure où les forces structurelles sont identiquement nulles et où les déplacements imposés ne dépendent pas du champ de densité, les dérivées de \mathbf{f}_0 et de \mathbf{u}_{BC0} s'écrivent :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_0}{\partial \xi_{ik}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{BC0}}{\partial \xi_{ik}} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{CP}. \quad (\text{C.2})$$

En considérant l'équation ci-dessus, la dérivée de l'Eq. (C.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{ik}} &= \frac{\partial}{\partial \xi_{ik}} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right) + \boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_0 + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC0} \right) + \\ &+ \boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{BC}^T}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_0 + \mathbf{K}_{BC}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC0} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi_{ik}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La dérivée du premier terme de l'Eq. (C.3) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_{ik}} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right) &= \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right) \chi^{-1} - \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-(\chi+1)} \right) \frac{\partial \lambda_e}{\partial \xi_{ik}} \\ &= -h_{F\chi}^{1-\chi} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-(\chi+1)} \right) \frac{\partial \lambda_e}{\partial \xi_{ik}}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

La dérivée de λ_e peut ensuite être déduite de l'Eq. (5.8), telle que :

$$\frac{\partial \lambda_e}{\partial \xi_{ik}} = \lambda_e \left(\frac{1}{\lambda_{eN}} \frac{\partial \lambda_{eN}}{\partial \xi_{ik}} - \frac{1}{\lambda_{eD}} \frac{\partial \lambda_{eD}}{\partial \xi_{ik}} \right). \quad (\text{C.5})$$

Les dérivés de $\frac{\partial \lambda_{eN}}{\partial \xi_{ik}}$ et $\frac{\partial \lambda_{eD}}{\partial \xi_{ik}}$ sont calculées à partir de l'Eq. (5.8) , tels que :

$$\frac{\partial \lambda_{eN}}{\partial \xi_{ik}} = -\frac{\partial J_e}{\partial \xi_{ik}} + \frac{1}{\lambda_{eN} + J_e} \left(J_e \frac{\partial J_e}{\partial \xi_{ik}} + 2s_{th} \frac{\partial Q_e}{\partial \xi_{ik}} \right), \quad (\text{C.6})$$

et :

$$\frac{\partial \lambda_{eD}}{\partial \xi_{ik}} = 2 \frac{\partial Q_e}{\partial \xi_{ik}}. \quad (\text{C.7})$$

Les dérivées des termes L_e et Q_e peuvent être calculées à partir de l'Eq. (5.6) :

$$\frac{\partial J_e}{\partial \xi_{ik}} = \mathbf{m}^{\mathbf{f}^T} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{e0}}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{C.8})$$

et :

$$\frac{\partial Q_e}{\partial \xi_{ik}} = 2 \boldsymbol{\sigma}_{e0}^T \mathbf{M}^{\mathbf{f}} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{e0}}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{C.9})$$

où la dérivée de $\boldsymbol{\sigma}_{e0}$ peut être retrouvée à l'aide des Eqs. (4.12) et (4.13).

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_{e0}}{\partial \xi_{ik}} = \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} \boldsymbol{\sigma}_{e0} + \rho_e^\beta \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}}. \quad (\text{C.10})$$

En injectant l'Eq. (C.10) dans les Eqs. (C.8) et (C.9), on obtient :

$$\frac{\partial J_e}{\partial \xi_{ik}} = J_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \rho_e^\beta \mathbf{m}^{\mathbf{f}^T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{C.11})$$

et :

$$\frac{\partial Q_e}{\partial \xi_{ik}} = 2 Q_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + 2 \rho_e^\beta \boldsymbol{\sigma}_{e0}^T \mathbf{M}^{\mathbf{f}} \mathbf{C} \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}}. \quad (\text{C.12})$$

Ainsi, en injectant les Eqs. (C.11) et (C.12) dans les Eqs. (C.6) et (C.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_{eN}}{\partial \xi_{ik}} = & -J_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} - \rho_e^\beta \mathbf{m}^{\mathbf{f}^T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} + \frac{1}{\lambda_{eN} + J_e} \left[J_e^2 \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \right. \\ & \left. + J_e \rho_e^\beta \mathbf{m}^{\mathbf{f}^T} \mathbf{C} \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} + 4s_{th} \left(Q_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \rho_e^\beta \boldsymbol{\sigma}_{e0}^T \mathbf{M}^{\mathbf{f}} \mathbf{C} \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

et :

$$\frac{\partial \lambda_{eD}}{\partial \xi_{ik}} = 4 \left(Q_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \rho_e^\beta \boldsymbol{\sigma}_{e0}^T \mathbf{M}^{\mathbf{f}} \mathbf{C} \hat{\mathbf{L}}_e \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} \right). \quad (\text{C.14})$$

Il est ainsi possible d'écrire la dérivée du terme λ_e tel que :

$$\frac{\partial \lambda_e}{\partial \xi_{ik}} = \lambda_e \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \eta_{e1} + \hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} \right), \quad (\text{C.15})$$

où η_{e1} et $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}$ sont définis aux Eqs. (5.18) et (5.19).

En injectant l'Eq. (C.15) dans l'Eq. (C.4), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{ik}} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right) = -h_{F\chi}^{1-\chi} \left(\sum_{e \in S_{ijk}} \lambda_e^{-\chi} \right) \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \eta_{e1} + \boldsymbol{\eta}_{e0}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} \right). \quad (\text{C.16})$$

L'Expression (C.16) peut être simplifiée en appliquant l'opérateur \mathfrak{R} au produit $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}}$, comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}_0}{\partial \xi_{ik}} = \boldsymbol{\eta}_{e0}^T \left[\mathfrak{R} \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T, \mathcal{I}_{BC} \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \mathfrak{R} \left(\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}^T, \mathcal{I}_U \right) \frac{\partial \mathbf{u}_{BC0}}{\partial \xi_{ik}} \right] = \boldsymbol{\eta}_{e0}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{C.17})$$

car $\frac{\partial \mathbf{u}_{BC0}}{\partial \xi_{ik}} = 0$.

Ainsi, l'Eq. (C.16) devient :

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{ik}} \left(\sum_{e=1}^{N_e} \lambda_e^{-\chi} \right) = -h_{F\chi}^{1-\chi} \sum_{e \in S_{ijk}} \lambda_e^{-\chi} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \tau_{e1} + \boldsymbol{\eta}_0^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}}, \quad (\text{C.18})$$

où $\boldsymbol{\eta}_0$ est défini à l'Eq. (5.17).

En injectant ensuite l'Eq. (C.18) dans l'Eq. (C.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{ik}} = & -h_{F\chi}^{1-\chi} \sum_{e \in S_{ijk}} \lambda_e^{-\chi} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \eta_{e1} + \boldsymbol{\eta}_0^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_0 + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC0} \right) + \\ & + \boldsymbol{\phi}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{BC}^T}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_0 + \mathbf{K}_{BC}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC0} - \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \xi_{ik}} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Les termes $\boldsymbol{\mu}$ et $\boldsymbol{\phi}$ dans l'Eq. (C.19) peuvent être choisis de manière à annuler les termes multipliant la dérivée partielle $\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial \xi_{ik}}$. Cette condition est satisfaite quand :

$$\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{K}\boldsymbol{\mu} = -\boldsymbol{\eta}_0. \quad (\text{C.20})$$

En injectant l'Eq. (C.20) dans l'Eq. (C.19), on obtient :

$$\frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{ik}} = -h_{F\chi}^{1-\chi} \sum_{e \in S_{ijk}} \lambda_e^{-\chi} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{ik}} \frac{\beta}{\rho_e} \eta_{e1} + \boldsymbol{\mu}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_0 + \frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}} \mathbf{u}_{BC0} \right) \quad (\text{C.21})$$

Les expressions des termes $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \xi_{ik}}$ et $\frac{\partial \mathbf{K}_{BC}}{\partial \xi_{ik}}$ sont détaillées dans l'Annexe A et en injectant l'Eq. (A.11) dans l'Eq. (C.21), on obtient finalement :

$$\left\{ \frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{i\tau}} = - (h_{F\chi})^{1-\chi} \sum_{e \in S_{ijk}} \lambda_e^{-\chi} \eta_{e1} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\beta}{\rho_e} + \boldsymbol{\mu}^T \sum_{e \in S_{ijk}} \frac{\partial \rho_e}{\partial \xi_{i\tau}} \frac{\alpha}{\rho_e} \mathbf{L}_e^T \mathbf{f}_{e0}, \right. \quad (\text{C.22})$$

ce qui conclut la démonstration.

Il est à noter que, à l'image de l'évaluation du gradient du critère HHVM, l'évaluation du gradient sur des critères phénoménologiques de rupture pour les matériaux anisotropes nécessite également la résolution de deux analyses statiques, i.e. l'Eq. (3.12) et le système adjoint défini à l'Eq. (C.1). C'est pourquoi, à chaque itération du processus d'optimisation, l'algorithme suivant est résolu pour mener toutes les étapes nécessaires au calcul du gradient de la fonction g_χ .

Algorithm 2 Calcul du gradient du critère de rupture pour matériaux anisotropes.

- 1: Résoudre l'Eq. (3.12) et obtenir \mathbf{u}_0 , \mathbf{u}_{BC0} , \mathbf{f}_{e0} , $\boldsymbol{\varepsilon}_{e0}$, $\forall e$.
 - 2: Calculer le terme $\boldsymbol{\sigma}_{e0}$ de l'Eq. (5.5).
 - 3: Calculer les termes \mathbf{Q}_e et \mathbf{J}_e de l'Eq. (5.6).
 - 4: Calculer les termes λ_{eN} , λ_{eD} et λ_e de l'Eq. (5.8).
 - 5: Calculer η_{e1} de l'Eq. (5.18).
 - 6: Calculer $\hat{\boldsymbol{\eta}}_{e0}$ de l'Eq. (5.19) et en déduire τ_{e0} .
 - 7: Calculer $\boldsymbol{\eta}_0$ de l'Eq. (5.17).
 - 8: Résoudre le système adjoint (C.20) et obtenir $\boldsymbol{\mu}$.
 - 9: Déterminer $\frac{\partial h_{F\chi}}{\partial \xi_{i\tau}}$ de l'Eq. (C.22).
-

Annexe D

Calcul du gradient de la compliance macroscopique dans le cadre d'une optimisation mutli-échelle/multi-matériau

Les détails de la démonstration de la proposition 6.3.1 sont donnés ci-dessous.

Dans ce cas, les forces structurelles sont identiquement nulles, la dérivée du vecteur \mathbf{f}_M détaillé dans l'Eq. (6.23) est :

$$\frac{\partial \mathbf{f}_M}{\partial \xi_{ijk}} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, \dots, n_{CP}, \quad p = 1, \dots, n_{mat}, \quad (\text{D.1})$$

ce qui donne l'égalité suivante :

$$\frac{\partial (\mathbf{K}_M \mathbf{u}_M)}{\partial \xi_{ijk}} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{\partial \mathbf{u}_M}{\partial \xi_{ijk}} = -(\mathbf{K}_M)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_M}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_M. \quad (\text{D.2})$$

Par ailleurs, la compliance macroscopique s'écrit :

$$\mathcal{C}_M := \mathbf{f}_M^T \mathbf{u}_M. \quad (\text{D.3})$$

En combinant les Eqs. (D.1) et (D.2), la dérivée de \mathcal{C}_M s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{C}_M}{\partial \xi_{ijk}} = \mathbf{f}_M^T \frac{\partial \mathbf{u}_M}{\partial \xi_{ijk}} = -\mathbf{u}_M^T \frac{\partial \mathbf{K}_M}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_M. \quad (\text{D.4})$$

En injectant dans l'Eq. D.4 l'expression de \mathbf{K}_M définie dans l'Eq. (6.24) et en considérant l'expression de $\boldsymbol{\varepsilon}_{Me}$ donnée dans l'Eq. (6.30), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{C}_M}{\partial \xi_{ijk}} &= - \sum_{e=1}^{N_{Me}} \int_{V_{Me}} \boldsymbol{\varepsilon}_{Me}^T \frac{\partial \mathcal{C}_M}{\partial \xi_{ijk}} \boldsymbol{\varepsilon}_{Me} d\Omega \\ &\approx - \sum_{e=1}^{N_{Me}} \sum_{q=1}^6 \sum_{r=1}^6 \frac{\partial \mathcal{C}_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}} \varepsilon_{Meq} \varepsilon_{Mer} V_{Me}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Ces travaux se basent sur la méthode SEHM basée sur l'énergie de déformation des éléments, c'est pourquoi, la dérivée des composantes du tenseur d'élasticité macroscopique C_{qr}^M peuvent être directement calculés à partir des Eqs. (6.6) et (6.7) :

$$\frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}} = \begin{cases} \frac{1}{V_{\text{RVE}} (\varepsilon_{mq}^0)^2} \frac{\partial \mathcal{W}_m (\varepsilon_{mq}^0)}{\partial \xi_{ijk}}, & \text{si } q = r, \\ \frac{1}{2V_{\text{RVE}} \varepsilon_{mq}^0 \varepsilon_{mr}^0} \frac{\partial \mathcal{W}_m (\varepsilon_{mq}^0, \varepsilon_{mr}^0)}{\partial \xi_{ijk}} + \\ - \frac{\varepsilon_{mq}^0}{2\varepsilon_{mr}^0} \frac{\partial C_{Mqq}}{\partial \xi_{ijk}} - \frac{\varepsilon_{mr}^0}{2\varepsilon_{mq}^0} \frac{\partial C_{Mrr}}{\partial \xi_{ijk}}, & \text{si } q \neq r. \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

La seule inconnue dans l'Eq. (D.6) est la dérivée du travail des forces et déplacements appliquées à l'échelle inférieure, i.e. $\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}}$. À partir des Eqs. (6.2) et (6.3), \mathcal{W}_m peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m = & \mathbf{f}_m^T \mathbf{u}_m + \mathbf{u}_{m\text{BC}}^T \mathbf{r}_m + \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{K}_m \mathbf{u}_m + \mathbf{K}_{m\text{BC}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} - \mathbf{f}_m) + \\ & + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{K}_{m\text{BC}}^T \mathbf{u}_m + \tilde{\mathbf{K}}_m \mathbf{u}_{m\text{BC}} - \mathbf{r}_m), \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

où $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{N_{\text{DOF}}}$ et $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^{N_{\text{BC}}}$ sont deux vecteurs arbitraires. En partant de l'hypothèse que les vecteurs \mathbf{f}_m et $\mathbf{u}_{m\text{BC}}$ ne dépendent pas des variables topologiques, i.e.

$$\frac{\partial \mathbf{f}_m}{\partial \xi_{ijk}} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_{m\text{BC}}}{\partial \xi_{ijk}} = \mathbf{0}, \quad (\text{D.8})$$

la dérivée de l'Eq. (D.7) s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} = & \mathbf{f}_m^T \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \xi_{ijk}} + \mathbf{u}_{m\text{BC}}^T \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \xi_{ijk}} + \\ & + \boldsymbol{\eta}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_m}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_m + \mathbf{K}_m \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \xi_{ijk}} + \frac{\partial \mathbf{K}_{m\text{BC}}}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} \right) + \\ & + \boldsymbol{\lambda}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_{m\text{BC}}^T}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_m + \mathbf{K}_{m\text{BC}}^T \frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \xi_{ijk}} + \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_m}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} - \frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \xi_{ijk}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Dans l'Eq. (D.9), les vecteurs $\boldsymbol{\eta}$ et $\boldsymbol{\lambda}$ peuvent être choisis de manière à ce que les termes multipliant les dérivées $\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial \xi_{ijk}}$ et $\frac{\partial \mathbf{r}_m}{\partial \xi_{ijk}}$ disparaissent, i.e.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= \mathbf{u}_{m\text{BC}}, \\ \mathbf{K}_m \boldsymbol{\eta} &= -\mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{\text{BC}} \boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{f}_m - \mathbf{K}_{m\text{BC}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} = \mathbf{K}_m \mathbf{u}_m - 2\mathbf{f}_m. \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

En injectant l'Eq. (D.10) dans l'Eq. (D.9) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} = & \mathbf{u}_m^T \frac{\partial \mathbf{K}_m}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_m + 2\mathbf{u}_m^T \frac{\partial \mathbf{K}_{m\text{BC}}}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} + \mathbf{u}_{m\text{BC}}^T \frac{\partial \tilde{\mathbf{K}}_m}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} + \\ & - 2\mathbf{f}_m^T (\mathbf{K}_m)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{K}_m}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_m + \frac{\partial \mathbf{K}_{m\text{BC}}}{\partial \xi_{ijk}} \mathbf{u}_{m\text{BC}} \right). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Comme les CLP de l'Eq. (6.1) sont imposés uniquement en termes de déplacements et non en termes de forces externes appliquées au model EF du VER, i.e. $\mathbf{f}_m = \mathbf{0}$, puisque les Eqs. (6.2) et (6.3) sont toujours valident, l'Eq. (D.11) peut se simplifier telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} = \hat{\mathbf{u}}_m^T \frac{\partial \hat{\mathbf{K}}_m}{\partial \xi_{ijk}} \hat{\mathbf{u}}_m. \quad (\text{D.12})$$

En développant le terme $\hat{\mathbf{K}}_m$ tel que détaillé dans l'Eq. (6.19), l'Eq. (D.12) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} &= \sum_{e=1}^{N_{me}} \hat{\mathbf{u}}_m^T \hat{\mathbf{L}}_{me}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{me}}{\partial \xi_{ijk}} \hat{\mathbf{L}}_{me} \hat{\mathbf{u}}_m \\ &= \sum_{e=1}^{N_{me}} \hat{\mathbf{u}}_{me}^T \frac{\partial \mathbf{K}_{me}}{\partial \xi_{ijk}} \hat{\mathbf{u}}_{me}. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

En développant le terme \mathbf{K}_{me} , l'Eq. (D.13) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} &= \sum_{e=1}^{N_{me}} \hat{\mathbf{u}}_{me}^T \frac{\partial}{\partial \xi_{ijk}} \left(\sum_{s=1}^{N_{mat}} [\Phi_{mse}]^\alpha \mathbf{K}_{mse}^0 \right) \hat{\mathbf{u}}_{me} \\ &= \alpha \sum_{e=1}^{N_{me}} \hat{\mathbf{u}}_{me}^T \left(\sum_{s=1}^{N_{mat}} \frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \xi_{ijk}} [\Phi_{mse}]^{\alpha-1} \mathbf{K}_{mse}^0 \right) \hat{\mathbf{u}}_{me}. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

La dérivée $\frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \xi_{ijk}}$ peut aussi s'écrire $\frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \rho_{mej}} \frac{\partial \rho_{mej}}{\partial \xi_{ijk}}$ et en l'injectant dans l'Eq. (D.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{W}_m}{\partial \xi_{ijk}} &= \alpha \sum_{e=1}^{N_{me}} \hat{\mathbf{u}}_{me}^T \left(\sum_{s=1}^{N_{mat}} \frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \rho_{mej}} \frac{\partial \rho_{mej}}{\partial \xi_{ijk}} [\Phi_{mse}]^{\alpha-1} \mathbf{K}_{mse}^0 \right) \hat{\mathbf{u}}_{me} \\ &= \alpha \sum_{e \in \mathcal{S}_{jk}} \frac{\partial \rho_{mej}}{\partial \xi_{ijk}} w_{mje}, \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

avec :

$$w_{mje} := \mathbf{u}_{me}^T \left[\sum_{s=1}^{N_{mat}} \frac{\partial \Phi_{mse}}{\partial \rho_{mej}} (\Phi_{mse})^{\alpha-1} \mathbf{K}_{mse}^0 \right] \mathbf{u}_{me}. \quad (\text{D.16})$$

En injectant l'Eq. (D.15) dans l'Eq. (D.10), on retrouve le résultat donné dans la proposition (6.3.1), ce qui conclut la démonstration.

Le calcul du gradient de la compliance macroscopique nécessite la résolution de 7 analyses statiques : 6 analyses à l'échelle microscopique pour déterminer le tenseur d'élasticité macroscopique \mathbf{C}_M et une analyse à l'échelle macroscopique pour résoudre l'Eq. (6.23). C'est pourquoi, à chaque étape du processus d'optimisation, l'algorithme suivant est utilisé.

Algorithm 3 Calcul de la dérivée de \mathcal{C}_M .

- 1: Fixer $\varepsilon_{mr}^0 = 0, \forall r = 1, \dots, 6$
 - 2: **for** $r = 1, \dots, 6$ **do**
 - 3: Définir $\varepsilon_{mr}^0 \neq 0$
 - 4: Résoudre l'Eq. (6.2) et déterminer $\hat{\mathbf{u}}_{me}(\varepsilon_{mr}^0), \hat{\mathbf{f}}_{me}(\varepsilon_{mr}^0), w_{me}(\varepsilon_{mr}^0), \forall e = 1, \dots, N_{Me}$
 - 5: Calculer C_{Mrr} à partir de l'Eq. (6.6)
 - 6: Calculer $\frac{\partial C_{Mrr}}{\partial \xi_{ijk}}$ à partir de la première équation de l'Eq. (6.29)
 - 7: **end for**
 - 8: **for** $q = 1, \dots, 6$ **do**
 - 9: **for** $r = q, \dots, 6,$ **do**
 - 10: Calculer $\mathcal{W}_m(\varepsilon_{mq}^0, \varepsilon_{mr}^0)$ de l'Eq. (6.8)
 - 11: Calculer C_{Mqr} à partir de l'Eq. (6.7), et définir que $C_{Mrq} = C_{Mqr}$
 - 12: Calculer $\frac{\partial C_{Mqr}}{\partial \xi_{ijk}}$ à partir de la deuxième équation définie dans l'Eq. (6.29)
 - 13: **end for**
 - 14: **end for**
 - 15: Résoudre l'Eq. (6.23) et déterminer $\varepsilon_e^M, \forall e = 1, \dots, N_{Me}$
 - 16: Calculer $\frac{\partial \mathcal{C}_M}{\partial \xi_{ijk}}$ depuis l'Eq. (7.11)
-

Bibliographie

- [1] M. Bendsoe and O. Sigmund. *Topology Optimization - Theory, Methods and Applications*. Springer, 2003.
- [2] Behrooz Farshi and Ali Alinia-Ziazi. Sizing optimization of truss structures by method of centers and force formulation. *international Journal of Solids and Structures*, 47(18-19) :2508–2524, 2010.
- [3] SO Degertekin. Improved harmony search algorithms for sizing optimization of truss structures. *Computers & Structures*, 92 :229–241, 2012.
- [4] Gebrail Bekdaş, Sinan Melih Nigdeli, and Xin-She Yang. Sizing optimization of truss structures using flower pollination algorithm. *Applied Soft Computing*, 37 :322–331, 2015.
- [5] Juan Leiva. Topometry optimization : a new capability to perform element by element sizing optimization of structures. In *10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference*, page 4595, 2004.
- [6] N Gerzen, PM Clausen, and CBW Pedersen. Sizing optimization for industrial applications and best practice design process. *High Performance and Optimum Design of Structures and Materials II*, 166 : 41, 2016.
- [7] Jan Sokolowski and Jean-Paul Zolésio. Introduction to shape optimization. In *Introduction to Shape Optimization*, pages 5–12. Springer, 1992.
- [8] Raphael T Haftka and Ramana V Grandhi. Structural shape optimization—a survey. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 57(1) :91–106, 1986.
- [9] SS Bhavikatti and CV Ramakrishnan. Optimum design of fillets in flat and round tension bars. In *mechanical engineering*, volume 100, pages 112–112, 1978.
- [10] W Jefferson Stroud, Cornelia B Dexter, and Manuel Stein. Automated preliminary design of simplified wing structures to satisfy strength and flutter requirements. *Work*, 50 :7876, 1971.
- [11] Erik Steen Kristensen and Niels Flemming Madsen. On the optimum shape of fillets in plates subjected to multiple in-plane loading cases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 10 (5) :1007–1019, 1976.
- [12] Vincent Braibant, Claude Fleury, and Pierre Beckers. Shape optimal design-an approach matching cad and optimization concepts. In *Optimization in Computer Aided Design : proceedings of the IFIP WG 5.2 Working Conference on Optimization in Computer-Aided Design, Lyon, France, 24-26 October, 1983*, pages 231–269. Elsevier North Holland, 1985.
- [13] Ren-Jye Yang and Kyung K Choi. Accuracy of finite element based shape design sensitivity analysis. *Journal of Structural Mechanics*, 13(2) :223–239, 1985.
- [14] M. P. and N. Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2) :197–224, 1988.

- [15] G. Costa, M. Montemurro, and J. Pailhès. A 2D topology optimisation algorithm in NURBS framework with geometric constraints. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 14(4) : 669–696, 2018.
- [16] G. Costa, M. Montemurro, and J. Pailhès. Minimum Length Scale Control in a NURBS-based SIMP Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 354 :963–989, 2019.
- [17] Giulio Costa, Marco Montemurro, and Jérôme Pailhès. Nurbs hyper-surfaces for 3d topology optimisation problems. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019.
- [18] Giulia Bertolino. *Multi-scale Topology Optimisation in a CAD-compatible Framework*. PhD thesis, Arts et Métiers Institute of Technology, Bordeaux, France, 2022.
- [19] Daehoon Han and Howon Lee. Recent advances in multi-material additive manufacturing : methods and applications. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 28 :158–166, 2020. ISSN 2211-3398.
- [20] Oliver Cann. These are the top 10 emerging technologies of 2016. In *World Economic Forum*, 2016.
- [21] Peter W Christensen and Anders Klarbring. *An introduction to structural optimization*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2008.
- [22] Thomas A Poulsen. A new scheme for imposing a minimum length scale in topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(6) :741–760, 2003.
- [23] James K Guest. Imposing maximum length scale in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(5) :463–473, 2009.
- [24] Xiaoping Qian. Undercut and overhang angle control in topology optimization : a density gradient based integral approach. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 111(3) :247–272, 2017.
- [25] R. J. Yang and C. J. Chen. Stress-based topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 12 :98–105, 1996.
- [26] Pierre Duysinx and Martin Bendsøe. Topology optimization of continuum structures with stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43 :1453 – 1478, 12 1998.
- [27] J.T. Fancello and J.T. Pereira. Structural topology optimization considering material failure. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 1(1) :3–24, 2003.
- [28] X. Huang and Y. M. Xie. Evolutionary topology optimization of continuum structures with an additional displacement constraint. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 40(1) :409, Apr 2009. ISSN 1615-1488.
- [29] Guilian Yi and Y. Sui. Different effects of economic and structural performance indexes on model construction of structural topology optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 31 :777–788, 09 2015.
- [30] Anikó Csébfalvi. Volume minimization with displacement constraints in topology optimization of continuum structures. *International journal of optimization in civil engineering*, 6 :447–453, 2016.
- [31] Z.-D. Ma, H.-C. Cheng, and N. Kikuchi. Structural design for obtaining desired eigenfrequencies by using the topology and shape optimization method. *Computing Systems in Engineering*, 5(1) :77 – 89, 1994.
- [32] Niels L Pedersen and Anders K Nielsen. Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 25 (5-6) :436–445, 2003.

- [33] William R Spillers and Keith M MacBain. *Structural optimization*. Springer Science & Business Media, 2009.
- [34] Raphael T Haftka and Zafer Gürdal. *Elements of structural optimization*, volume 11. Springer Science & Business Media, 2012.
- [35] Uri Kirsch. *Structural optimization : fundamentals and applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [36] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Verlag, second edition, 2006.
- [37] Guang Chen, Zhi-liang Ren, Hai-zhu Sun, et al. Curve fitting in least-square method and its realization with matlab. *Ordnance industry automation*, 3 :063, 2005.
- [38] Matthew Newville, Till Stensitzki, Daniel B Allen, Michal Rawlik, Antonino Ingargiola, and Andrew Nelson. Lmfit : Non-linear least-square minimization and curve-fitting for python. *Astrophysics Source Code Library*, pages ascl-1606, 2016.
- [39] James P Ignizio and Tom M Cavalier. *Linear programming*. Prentice-Hall, Inc., 1994.
- [40] Saul I Gass. *Linear programming : methods and applications*. Courier Corporation, 2003.
- [41] Robert J Vanderbei et al. *Linear programming*, volume 3. Springer, 2015.
- [42] Paul T Boggs and Jon W Tolle. Sequential quadratic programming. *Acta numerica*, 4 :1–51, 1995.
- [43] Jorge Nocedal and Stephen J Wright. Sequential quadratic programming. *Numerical optimization*, pages 529–562, 2006.
- [44] Olvi L Mangasarian. *Nonlinear programming*. SIAM, 1994.
- [45] Roger Fletcher. *Practical methods of optimization*. John Wiley & Sons, 2013.
- [46] Fred W Glover and Gary A Kochenberger. *Handbook of metaheuristics*, volume 57. Springer Science & Business Media, 2006.
- [47] Emanuele Rizzo. *Optimization Methods Applied to the preliminary design of innovative non conventional aircraft configurations*. Emanuele Rizzo, 2009.
- [48] Nick Gould, Dominique Orban, and Philippe Toint. Numerical methods for large-scale nonlinear optimization. *Acta Numerica*, 14 :299, 2005.
- [49] Ron Aharoni, Abraham Berman, and Yair Censor. An interior points algorithm for the convex feasibility problem. *Advances in Applied Mathematics*, 4(4) :479–489, 1983.
- [50] Krister Svanberg. A class of globally convergent optimization methods based on conservative convex separable approximations. *SIAM Journal on Optimization*, 12(2) :555–573, 2002.
- [51] Krister Svanberg. Mma and gmma-two methods for nonlinear optimization. *vol*, 1 :1–15, 2007.
- [52] Zhen Luo, Liping Chen, Jingzhou Yang, Y Zhang, and K Abdel-Malek. Compliant mechanism design using multi-objective topology optimization scheme of continuum structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 30(2) :142–154, 2005.
- [53] Jia Chun Li, Wen Te Tu, Xu Dong Yang, Jian Fu, and Yong Tao Wang. Heat conduction structural topology optimization based on ramp. In *Applied mechanics and materials*, volume 52, pages 1692–1697. Trans Tech Publ, 2011.

- [54] Marco Montemurro. On the structural stiffness maximisation of anisotropic continua under inhomogeneous neumann–dirichlet boundary conditions. *Composite Structures*, 287 :115289, 2022. ISSN 0263-8223.
- [55] Martin Philip Bendsøe and Noboru Kikuchi. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 71(2) :197 – 224, 1988.
- [56] G. Allaire, F. Jouve, and A.-M. Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194(1) :363 – 393, 2004.
- [57] Grégoire Allaire and François Jouve. Minimum stress optimal design with the level set method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(11) :909 – 918, 2008.
- [58] Michael Yu Wang, Xiaoming Wang, and Dongming Guo. A level set method for structural topology optimization. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 192(1-2) :227–246, 2003.
- [59] Takayuki Yamada, Kazuhiro Izui, Shinji Nishiwaki, and Akihiro Takezawa. A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(45-48) :2876–2891, 2010.
- [60] SY Wang, Kian Meng Lim, Boo Cheong Khoo, and Michael Yu Wang. An extended level set method for shape and topology optimization. *Journal of Computational Physics*, 221(1) :395–421, 2007.
- [61] Haipeng Jia, HG Beom, Yuxin Wang, Song Lin, and Bo Liu. Evolutionary level set method for structural topology optimization. *Computers & structures*, 89(5-6) :445–454, 2011.
- [62] Nico P van Dijk, Kurt Maute, Matthijs Langelaar, and Fred Van Keulen. Level-set methods for structural topology optimization : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3) : 437–472, 2013.
- [63] Zhen Luo, Liyong Tong, Michael Yu Wang, and Shengyin Wang. Shape and topology optimization of compliant mechanisms using a parameterization level set method. *Journal of Computational Physics*, 227(1) :680–705, 2007.
- [64] MJ De Ruiter and F Van Keulen. Topology optimization using a topology description function. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6) :406–416, 2004.
- [65] Shengyin Wang and Michael Yu Wang. Radial basis functions and level set method for structural topology optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 65(12) :2060–2090, 2006.
- [66] Alexandra A Gomes and Afzal Suleman. Application of spectral level set methodology in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 31(6) :430–443, 2006.
- [67] T Belytschko, SP Xiao, and C Parimi. Topology optimization with implicit functions and regularization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(8) :1177–1196, 2003.
- [68] Stanley J Osher and Fadil Santosa. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints : I. frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, 171(1) :272–288, 2001.
- [69] NP Van Dijk, M Langelaar, and F Van Keulen. Explicit level-set-based topology optimization using an exact heaviside function and consistent sensitivity analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(1) :67–97, 2012.
- [70] Krister Svanberg. The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International journal for numerical methods in engineering*, 24(2) :359–373, 1987.

- [71] Claude Fleury and Vincent Braibant. Structural optimization : a new dual method using mixed variables. *International journal for numerical methods in engineering*, 23(3) :409–428, 1986.
- [72] XY Yang, YM Xie, GP Steven, and OM Querin. Bidirectional evolutionary method for stiffness optimization. *AIAA journal*, 37(11) :1483–1488, 1999.
- [73] Y.M. Xie and G.P. Steven. A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers and Structures*, 49(5) :885 – 896, 1993.
- [74] OM Querin, GP Steven, and YM Xie. Evolutionary structural optimisation using an additive algorithm. *Finite elements in Analysis and Design*, 34(3-4) :291–308, 2000.
- [75] Q Li, GP Steven, and YM Xie. A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22(3) :230–239, 2001.
- [76] OM Querin, V Young, GP Steven, and YM Xie. Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimisation. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 189(2) :559–573, 2000.
- [77] J.T. Pereira, E.A. Fancello, and C.S. Barcellos. Topology optimization of continuum structures with material failure constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(1) :50–66, 2004.
- [78] M. Bruggi and P. Venini. A mixed fem approach to stress-constrained topology optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 73(12) :1693–1714, 2008.
- [79] Chau Le, Julian Norato, Tyler Bruns, Christopher Ha, and Daniel Tortorelli. Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4) :605–620, 2010.
- [80] Erik Holmberg, Bo Torstenfelt, and Anders Klarbring. Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(1) :33–47, 2013.
- [81] Jong Wook Lee and Gil Ho Yoon. Stress based topology optimization of reinforcement structure under in-plane load. *Computers and Structures*, 191 :115 – 128, 2017. ISSN 0045-7949.
- [82] J. S. O. Fonseca H. M. Sant’Anna. Topology optimization of continuum two-dimensional structures under compliance and stress constraints. *Mecanica Computacional*, 2002.
- [83] Yang D, Liu H, Zhang W, and S. Li. Stress-constrained topology optimization based on maximum stress measures. *Computers and Structures*, 198 :23 – 39, 2018. ISSN 0045-7949.
- [84] Laurent Van Miegroet and Pierre Duysinx. Stress concentration minimization of 2d filets using x-fem and level set description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33 :425–438, 02 2007.
- [85] R. Picelli, S. Townsend, C. Brampton, J. Norato, and H.A. Kim. Stress-based shape and topology optimization with the level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329 :1 – 23, 2018.
- [86] James Kai A., Lee Edmund, and Martins Joaquim R. A. A. Stress-based topology optimization using an isoparametric level set method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 58 :20 – 30, 2012.
- [87] Hong Guan, Yin-Jung Chen, Yew-Chaye Loo, Yi-Min Xie, and Grant P Steven. Bridge topology optimisation with stress, displacement and frequency constraints. *Computers & Structures*, 81(3) :131 – 145, 2003. ISSN 0045-7949.
- [88] Thomas Borrvall and Joakim Petersson. Topology optimization using regularized intermediate density control. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(37) :4911 – 4928, 2001.

- [89] Xu Guo, Wei Sheng Zhang, Michael Yu Wang, and Peng Wei. Stress-related topology optimization via level set approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47) :3439 – 3452, 2011.
- [90] Wei Sheng Zhang, Xu Guo, Michael Yu Wang, and Peng Wei. Optimal topology design of continuum structures with stress concentration alleviation via level set method. *International journal for numerical methods in engineering*, 93(9) :942–959, 2013.
- [91] Alexander Verbart, Matthijs Langelaar, Nico Van Dijk, and Fred Van Keulen. Level set based topology optimization with stress constraints and consistent sensitivity analysis. In *53rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference 20th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 14th AIAA*, page 1358, 2012.
- [92] Michael Yu Wang and Li Li. Shape equilibrium constraint : a strategy for stress-constrained structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3) :335–352, 2013.
- [93] Hélio Emmendoerfer Jr and Eduardo Alberto Fancello. A level set approach for topology optimization with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(2) : 129–156, 2014.
- [94] Hélio Emmendoerfer Jr and Eduardo Alberto Fancello. Topology optimization with local stress constraint based on level set evolution via reaction–diffusion. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 305 :62–88, 2016.
- [95] Liang Xia, Li Zhang, Qi Xia, and Tielin Shi. Stress-based topology optimization using bi-directional evolutionary structural optimization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 333 :356–370, 2018.
- [96] Zhao Fan, Liang Xia, Wuxing Lai, Qi Xia, and Tielin Shi. Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(2) : 647–658, 2019.
- [97] Bin Xu, Yongsheng Han, and Lei Zhao. Bi-directional evolutionary stress-based topology optimization of material nonlinear structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(3) :1287–1305, 2021.
- [98] Albert A. Groenwold and Raphael T. Haftka. Optimization with non-homogeneous failure criteria like tsai-wu for composite laminates. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 32(3) :183–190, 2006.
- [99] Amir M. Mirzendehtdel, Behzad Rankouhi, and Krishnan Suresh. Strength-based topology optimization for anisotropic parts. *Additive Manufacturing*, 19 :104 – 113, 2018.
- [100] DC Da, XY Cui, K Long, and GY Li. Concurrent topological design of composite structures and the underlying multi-phase materials. *Computers & Structures*, 179 :1–14, 2017.
- [101] Eddie Wadbro and Bin Niu. Multiscale design for additive manufactured structures with solid coating and periodic infill pattern. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 357 :112605, 2019.
- [102] Quhao Li, Rui Xu, Ji Liu, Shutian Liu, and Song Zhang. Topology optimization design of multi-scale structures with alterable microstructural length-width ratios. *Composite Structures*, 230 :111454, 2019.
- [103] Emmanuel Tromme, Atsushi Kawamoto, and James K Guest. Topology optimization based on reduction methods with applications to multiscale design and additive manufacturing. *Frontiers of Mechanical Engineering*, 15(1) :151–165, 2020.

- [104] Weihong Zhang, Gaoming Dai, Fengwen Wang, Shiping Sun, and Hicham Bassir. Using strain energy-based prediction of effective elastic properties in topology optimization of material microstructures. *Acta Mechanica Sinica*, 23(1) :77–89, 2007.
- [105] Anita Catapano and Marco Montemurro. A multi-scale approach for the optimum design of sandwich plates with honeycomb core. part i : homogenisation of core properties. *Composite structures*, 118, 2014.
- [106] Marco Montemurro, Anita Catapano, and Dominique Doroszewski. A multi-scale approach for the simultaneous shape and material optimisation of sandwich panels with cellular core. *Composites Part B : Engineering*, 91 :458–472, 2016.
- [107] Marco Delucia, Anita Catapano, Marco Montemurro, and Jerome Pailhes. Determination of the effective thermoelastic properties of cork-based agglomerates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, 38(16) :760–776, 2019.
- [108] Ole Sigmund. Materials with prescribed constitutive parameters : An inverse homogenization problem. *International Journal of Solids and Structures*, 31(17) :2313–2329, 1994. ISSN 0020-7683.
- [109] Ole Sigmund. Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20(4) :351–368, 1995. ISSN 0167-6636.
- [110] Ever J Barbero. *Finite element analysis of composite materials*. CRC press, 2007.
- [111] Ever J Barbero. *Finite element analysis of composite materials using Abaqus™*. CRC press, 2013.
- [112] Sajad Arabnejad and Damiano Pasini. Mechanical properties of lattice materials via asymptotic homogenization and comparison with alternative homogenization methods. *International Journal of Mechanical Sciences*, 77 :249–262, 2013.
- [113] Lin Cheng, Jiayi Bai, and Albert C. To. Functionally graded lattice structure topology optimization for the design of additive manufactured components with stress constraints. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 344 :334 – 359, 2019. ISSN 0045-7825.
- [114] Dawei Li, Wenhe Liao, Ning Dai, Guoying Dong, Yunlong Tang, and Yi Min Xie. Optimal design and modeling of gyroid-based functionally graded cellular structures for additive manufacturing. *Computer-Aided Design*, 104 :87–99, 2018.
- [115] Raghavendra Sivapuram, Peter D. Dunning, and H. Alicia Kim. Simultaneous material and structural optimization by multiscale topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 54 (5) :1267–1281, 2016.
- [116] Jie Gao, Huipeng Xue, Liang Gao, and Zhen Luo. Topology optimization for auxetic metamaterials based on isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 352 :211–236, 2019.
- [117] Hao Li, Zhen Luo, Liang Gao, and Qinghua Qin. Topology optimization for concurrent design of structures with multi-patch microstructures by level sets. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 331 :536–561, 2018.
- [118] M. Montemurro, G. Bertolino, and T. Roiné. A General Multi-Scale Topology Optimisation Method for Lightweight Lattice Structures Obtained through Additive Manufacturing Technology. *Composite Structures*, 258 :113360, 2021. ISSN 0263-8223. doi : <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113360>.
- [119] Giulia Bertolino and Marco Montemurro. Two-scale topology optimisation of cellular materials under mixed boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 216 :106961, 2022. ISSN 0020-7403.

- [120] Marco Montemurro, Khalil Refai, and Anita Catapano. Thermal design of graded architected cellular materials through a cad-compatible topology optimisation method. *Composite Structures*, 280 :114862, 2022. ISSN 0263-8223.
- [121] Hao Li, Zhen Luo, Nong Zhang, Liang Gao, and Terry Brown. Integrated design of cellular composites using a level-set topology optimization method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 309 :453–475, 2016.
- [122] L Yin and GK Ananthasuresh. Topology optimization of compliant mechanisms with multiple materials using a peak function material interpolation scheme. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 23(1) :49–62, 2001.
- [123] Wenjie Zuo and Kazuhiro Saitou. Multi-material topology optimization using ordered simp interpolation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 55(2) :477–491, 2017.
- [124] Wei Sha, Mi Xiao, Liang Gao, and Yan Zhang. A new level set based multi-material topology optimization method using alternating active-phase algorithm. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 377 :113674, 2021.
- [125] Jie Gao, Zhen Luo, Mi Xiao, Liang Gao, and Peigen Li. A nurbs-based multi-material interpolation (n-mmi) for isogeometric topology optimization of structures. *Applied Mathematical Modelling*, 81 : 818–843, 2020.
- [126] Thibaut Rodriguez. *Formulation de Nouvelles Fonctionnalités dans la Méthode d’Optimisation Topologique Basée sur la Méthode SIMP et les Hypersurfaces NURBS*. PhD thesis, Arts et Métiers Institute of Technology, Bordeaux, France, 2022.
- [127] O Sigmund and S Torquato. Design of materials with extreme thermal expansion using a three-phase topology optimization method. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45(6) :1037–1067, 1997.
- [128] Oliver Giraldo-Londono and Glaucio H Paulino. Fractional topology optimization of periodic multi-material viscoelastic microstructures with tailored energy dissipation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 372 :113307, 2020.
- [129] Hesaneh Kazemi, Ashkan Vaziri, and Julián A Norato. Multi-material topology optimization of lattice structures using geometry projection. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 363 : 112895, 2020.
- [130] Haitao Liao. A single variable-based method for concurrent multiscale topology optimization with multiple materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 378 :113727, 2021.
- [131] Jaewook Lee, Tsuyoshi Nomura, and Ercan M Dede. Topology optimization of magnetic composite microstructures for electropermanent magnet. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 503 : 166596, 2020.
- [132] Shiwei Zhou and Qing Li. Computational design of multi-phase microstructural materials for extremal conductivity. *Computational Materials Science*, 43(3) :549–564, 2008.
- [133] Panagiotis Vogiatzis, Shikui Chen, Xiao Wang, Tiantian Li, and Lifeng Wang. Topology optimization of multi-material negative poisson’s ratio metamaterials using a reconciled level set method. *Computer-Aided Design*, 83 :15–32, 2017.
- [134] Huikai Zhang, Yangjun Luo, and Zhan Kang. Bi-material microstructural design of chiral auxetic metamaterials using topology optimization. *Composite Structures*, 195 :232–248, 2018.

- [135] Guodong Zhang and Kapil Khandelwal. Computational design of finite strain auxetic metamaterials via topology optimization and nonlinear homogenization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 356 :490–527, 2019.
- [136] Hongming Zong, Hongying Zhang, Yiqiang Wang, Michael Yu Wang, and Jerry Y.H. Fuh. On two-step design of microstructure with desired poisson’s ratio for am. *Materials & Design*, 159 :90–102, 2018. ISSN 0264-1275.
- [137] Erik Andreassen, Boyan S. Lazarov, and Ole Sigmund. Design of manufacturable 3d extremal elastic microstructure. *Mechanics of Materials*, 69(1) :1–10, 2014. ISSN 0167-6636.
- [138] Yiqiang Wang, Zhen Luo, Nong Zhang, and Zhan Kang. Topological shape optimization of microstructural metamaterials using a level set method. *Computational Materials Science*, 87 :178–186, 2014. ISSN 0927-0256.
- [139] F. Wang, O. Sigmund, and J.S. Jensen. Design of materials with prescribed nonlinear properties. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 69 :156–174, 2014. ISSN 0022-5096.
- [140] Xianglong Yu, Ji Zhou, Haiyi Liang, Zhengyi Jiang, and Lingling Wu. Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility : A brief review. *Progress in Materials Science*, 94 :114–173, 2018.
- [141] Grigor Nika and Andrei Constantinescu. Design of multi-layer materials using inverse homogenization and a level set method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 346 :388–409, 2019.
- [142] Fengwen Wang. Systematic design of 3d auxetic lattice materials with programmable poisson’s ratio for finite strains. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 114 :303–318, 2018. ISSN 0022-5096.
- [143] Yohann Audoux, Marco Montemurro, and Jérôme Pailhès. Non-uniform rational basis spline hyper-surfaces for metamodelling. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 364 :112918, 2020.
- [144] Yohann Audoux, Marco Montemurro, and Jérôme Pailhès. A surrogate model based on non-uniform rational b-splines hypersurfaces. *Procedia CIRP*, 70 :463–468, 2018.
- [145] Wen-Der Ueng, Jiing-Yih Lai, and Yao-Chen Tsai. Unconstrained and constrained curve fitting for reverse engineering. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 33(11-12) : 1189–1203, 2007.
- [146] Marco Montemurro and Anita Catapano. On the effective integration of manufacturability constraints within the multi-scale methodology for designing variable angle-tow laminates. *Composite Structures*, 161 :145–159, 2017.
- [147] G. Costa, M. Montemurro, and J. Pailhès. NURBS Hypersurfaces for 3D Topology Optimisation Problems. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2019 (In press).
- [148] X. Qian. Topology optimization in B-Spline space. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 265 :15 – 35, 2013.
- [149] M. Wang and X. Qian. Efficient Filtering in Topology Optimization via B-Splines. *ASME, Journal of Mechanical Design*, 137(3) :225–251, 2015.
- [150] Giulia Bertolino, Marco Montemurro, Nicolas Perry, and Franck Pourroy. An efficient hybrid optimization strategy for surface reconstruction. *Computer Graphics Forum*, 40(6) :215–241.
- [151] L. Piegl and W. Tiller. *The NURBS book*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [152] Cristian Barbarosie and Sérgio Lopes. A generalized notion of compliance. *Comptes Rendus Mécanique*, 339(10) :641–648, 2011. ISSN 1631-0721.

- [153] Wook-han Choi, Cheng-guo Huang, Jong-moon Kim, and Gyung-Jin Park. Comparison of some commercial software systems for structural optimization. In *11th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimisation, Sydney Australia*, 2015.
- [154] T. Rodriguez, M. Montemurro, P. Le Texier, and J. Pailhès. Structural Displacement Requirement in a Topology Optimization Algorithm Based on Isogeometric Entities. *Journal of Optimization Theory and Application*, 184 :250–276, 2020.
- [155] Giulio Costa and Marco Montemurro. Eigen-frequencies and harmonic responses in topology optimisation : A CAD-compatible algorithm. *Engineering Structures*, 214 :110602, 2020.
- [156] Pierre Duysinx and Ole Sigmund. New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. 09 1998.
- [157] Kangwon Lee, Kisoo Ahn, and Jeonghoon Yoo. A novel p-norm correction method for lightweight topology optimization under maximum stress constraints. *Computers and Structures*, 171 :18–30, 2016.
- [158] G. Kreisselmeier and R. Steinhauser. Systemetic control design by optimizing a vector performance index. In M.A. CUENOD, editor, *Computer Aided Design of Control Systems*, pages 113 – 117. Pergamon, 1980.
- [159] Guo Xu and Cheng Gengdong. Epsilon-continuation approach for truss topology optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 20(5) :526–533, 2004.
- [160] Matteo Bruggi. On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(2) :125–141, 2008.
- [161] J. Pailhès T. Roiné, M. Montemurro. Stress-based topology optimisation through non-uniform rational basis spline hyper-surfaces. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2021 (in press).
- [162] G. I. N. Rozvany. Difficulties in truss topology optimization with stress, local buckling and system stability constraints. *Structural optimization*, 11(3) :213–217, 1996.
- [163] G. I. N. Rozvany and T. Birker. On singular topologies in exact layout optimization. *Structural optimization*, 8(4) :228–235, 1994.
- [164] U. Kirsch. On singular topologies in optimum structural design. *Structural optimization*, 2(3) :133–142, 1990.
- [165] G. D. Cheng and X. Guo. ϵ -relaxed approach in structural topology optimization. *Structural optimization*, 13(4) :258–266, 1997.
- [166] Ronald M. Errico. What is an adjoint model? *Bulletin of the American Meteorological Society*, 78 (11) :2577–2592, 1997.
- [167] Samuel T. IJsselmuiden, Mostafa M. Abdalla, and Zafer Gürdal. Implementation of strength-based failure criteria in the lamination parameter design space. *AIAA Journal*, 46(7) :1826–1834, 2008.
- [168] Anita Catapano and Marco Montemurro. On the correlation between stiffness and strength properties of anisotropic laminates. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 26(8) :651–660, 2019.
- [169] Anita Catapano and Marco Montemurro. Strength optimisation of variable angle-tow composites through a laminate-level failure criterion. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 187, 2020.
- [170] A. Catapano M.I. Izzi and M. Montemurro. Strength and mass optimisation of variable-stiffness composites in the polar parameters space. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 64, 2021.

- [171] Thibaut Roiné and Marco Montemurro. Formulation of failure criteria for anisotropic materials a topology optimisation method based on nurbs hyper-surfaces. *Engineering with Computers*, 2022 (under review).
- [172] M.M. Ameen, R.H.J. Peerlings, and M.G.D. Geers. A quantitative assessment of the scale separation limits of classical and higher-order asymptotic homogenization. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 71 :89–100, 2018.
- [173] J. Pailhès P. Le Texier M. Montemurro, T. Rodriguez. On multi-material topology optimisation problems under inhomogeneous neumann-dirichlet boundary conditions. *Finite Elements in Analysis and Design*, 2022 (under review).
- [174] Paolo Vannucci. *General Anisotropic Elasticity*, pages 19–73. Springer Singapore, Singapore, 2018.

Liste des publications issues de cette thèse

Articles publiés

- T. Roiné, M. Montemurro, J. Pailhès. Stress-Based Topology Optimisation through Non-Uniform Rational Basis Spline Hyper-Surfaces. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, v. 29 (23), pp. 3387-3407, 2022. URL : <https://doi.org/10.1080/15376494.2021.1896822>.
- M. Montemurro, G. Bertolino, T. Roiné. A General Multi-Scale Topology Optimisation Method for Lightweight Lattice Structures Obtained through Additive Manufacturing Technology. *Composite Structures*, v. 258, art. num. 113360, 2021. URL : <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113360>.
- M. Montemurro, T. Roiné, J. Pailhès. Multi-scale design of multi-material lattice structures through a CAD-compatible topology optimisation algorithm. *Engineering Structures*, 2022 (Accepted)

Article en cours de rédaction

- M. Montemurro, T. Roiné. On the formulation of failure criteria for anisotropic materials in a CAD-compatible topology optimisation method, *Computers & Structures*, 2022.
- T. Roiné, M. Montemurro. A general method for the optimal design of auxetic multi-material lattice structures. *Engineering with Computers*, 2022.

Conférences internationales

- T. Roiné, G. Bertolino, M. Montemurro, J. Pailhès. Topology optimisation of the lattice representative volume element by using a NURBS-based SIMP algorithm. 14th World Congress on Computational Mechanics (WCCM) - ECCOMAS Congress 2020, Paris, France, 19-24 July, 2020, URL : <https://www.wccm-eccomas2020.org/frontal/docs/WCCM-XIV-ECCOMAS-2020.pdf>.
- T. Roiné, G. Costa, M. Montemurro, J. Pailhès. Formulation of failure criteria for anisotropic parts into the NURBS-based-SIMP algorithm. 2nd International Conference on Simulation for Additive Manufacturing - ECCOMAS Thematic Conference, Pavia, Italy, 11-13 September, 2019, URL : <http://congress.cimne.com/sim-am2019/frontal/doc/EbookSim-AM2019.pdf>

- T. Roiné, M. Montemurro, G. Costa, J. Pailhès. Integration of failure criteria for anisotropic materials into a NURBS-based-SIMP Topology Optimisation algorithm. 8th International Conference on Mechanics and Materials in Design, Bologna, Italy, 4-6 September, 2019. URL : https://www.m2d2019.com/wp-content/uploads/2019/09/M2D2019_Proceedings.pdf

Intégration des critères de tenue mécanique et de dimensionnement de structures lattices multi-matériau dans la méthode d'optimisation topologique basée sur les entités NURBS

Résumé

Les travaux détaillés dans ce manuscrit de thèse ont pour but de présenter une méthode d'optimisation topologique basée sur les hyper-surfaces NURBS qui est en mesure d'intégrer deux typologies de critères. Une première famille de critères qui permettrait de contrôler la répartition des contraintes mécaniques au sein de la structure afin d'éviter les zones de forte concentration de contraintes. En particulier, deux types de critères de tenue ont été étudiés. Une première formulation, dédiée aux matériaux isotropes, a permis de définir une fonction d'optimisation basée sur le critère de Huber-Henky-Von-Mises et une deuxième formulation, dédiée aux matériaux anisotropes, a permis d'intégrer les critères de rupture de Tsai-Hill, Hoffman et Tsai-WU dans la méthode d'optimisation en utilisant la notion de *failure load*. La deuxième topologie de critères concerne l'optimisation multi-échelle de structures lattices dont le volume élémentaire est composé de plusieurs phases matériau. Pour déterminer les propriétés du matériau homogène équivalent défini à l'échelle supérieure, la méthode d'homogénéisation basée sur l'énergie de déformation a été utilisée. La méthode d'optimisation multi-échelle/multi-matériau de structures lattices ainsi développée a été appliquée à deux problèmes différentes: a) un problème de maximisation de la raideur à l'échelle macroscopique de la structure en considérant des contraintes sur les fractions volumique des matériaux composant le volume élémentaire de la structure lattice et b) un problème de conception d'un méta-matériau multi-phase auxétique.

Mots clés : Optimisation topologique, hyper-surface NURBS, critère de plasticité et de rupture, indice de rupture, optimisation multi-échelle/multi-matériau, homogénéisation, matériaux auxétiques.

Summary

This manuscript presents a generalisation of the NURBS-density-based topology optimisation method developed at the I2M laboratory in Bordeaux. Particularly, two new features have been integrated in the NURBS-density-based method. Firstly, a new formulation of failure criteria, for both isotropic and anisotropic materials, based on the notion of failure load (and of the associated failure index) is proposed. In this way, the optimised topology does not depend upon the applied loads. Secondly, the NURBS-density-based method has been extended to the multi-scale optimisation problems of multi-material lattice structures. In this context, the scale transition is performed through the strain energy-based homogenisation method of periodic media. Design criteria are formulated at both lower scale (i.e., the scale of the representative volume element of the lattice structure) and upper scale. Two different problems are considered to validate the effectiveness of the proposed numerical framework: a) the minimisation of the macroscopic compliance subject to volume constraints on the material phases composing the lattice structure; b) the design of multi-material auxetic lattice structures.

Keywords: Topology optimisation, NURBS hyper-surface, failure criteria, failure index, multiscale/multi-material optimisation, homogenisation, auxetic materials