Analyse et modélisation du comportement mécanique d'un composite renforcé de fibres de carbone, soumis à des chargements complexes

François Rasselet

▶ **To cite this version:**

François Rasselet. Analyse et modélisation du comportement mécanique d'un composite renforcé de fibres de carbone, soumis à des chargements complexes. Science des matériaux [cond-mat.mtrl-sci]. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. NNT : 2018PSLEM078 . tel-04049889

HAL Id: tel-04049889

https://pastel.hal.science/tel-04049889

Submitted on 29 Mar 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Analyse et modélisation du comportement d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone, soumis à des chargements complexes

Ecole doctorale n°432

SCIENCES DES METIERS DE L'INGENIEUR

Spécialité MECANIQUE

COMPOSITION DU JURY :

Mme. TOUCHARD Fabienne
Institut Pprime, Rapporteur

M. IENNY Patrick
Ecole des Mines d'Ales, Rapporteur

M. BERNASCONI Andréa
Politecnico Milano, Examinateur

M. SAINTIER Nicolas
ENSAM Bordeaux, Président du jury

M. RENARD Jacques
Ecole des Mines de Paris, Examinateur

M. JOANNES Sébastien
Ecole des Mines de Paris, Examinateur

Soutenue par **François RASSELET**
Le 14 septembre 2018

Dirigée par **Jacques RENARD**
et **Sébastien JOANNES**

Confidentiel jusqu'au 22 mars 2023

MINES ParisTech PSL RESEARCH UNIVERSITY PARIS

« Il était un point fixe dans un tourbillon de variables, un corps immobile en parfait équilibre, au travers duquel le monde se précipitait et disparaissait. »

Paul Auster, La musique du hasard, 1980

A France, mes parents, ma sœur, mes frères et Adeline.

Remerciements

L’existence même de cette page est la preuve qu’une thèse, bien qu’elle n’ait qu’un seul auteur, est le fruit d’un travail en collaboration avec de nombreuses personnes. Ces quelques lignes ont l’objectif délicat de les remercier. Délicat, car il n’est pas impossible que certaines soient « oubliées », mais je suis sûr que celles-ci m’excuserons. En partant dans l’idée de faire court, je crains malheureusement de devoir prendre encore quelques pages pour remplir cet objectif.

J’adresse tout d’abord mes remerciements aux membres du jury pour m’avoir fait l’honneur d’évaluer mon travail. C’est une véritable chance d’avoir pu échanger durant quelques heures avec vous et m’enrichir de votre expertise. Je remercie particulièrement M. Saintier, pour avoir présidé ce jury, Me. Touchard et M. Ienny pour avoir lu et digéré les quelques pages de ce manuscrit en tant que rapporteurs et enfin, M. Bernasconi pour avoir accepté d’examiner mon travail.

Je remercie Jacques Renard, pour m’avoir proposé cette thèse à la suite de mon mastère spécialisé. Je suis particulièrement reconnaissant de la confiance qu’il m’a accordée et l’autonomie qu’il m’a laissée, créant ainsi une grande motivation afin de prouver que les voies suivies pouvaient être pertinentes.

Je tiens ensuite à remercier Sébastien Joannes, sans qui ces travaux n’auraient pas ce degré d’aboutissement. Son encadrement sans faille, avec toujours un coup d’avance a été d’une grande richesse. En plus d’une vision scientifique perspicace, sa patience et son optimisme ont su me relancer dans les périodes de creux inhérentes à la préparation d’une thèse. Le meilleur exemple, qui restera dans ma mémoire, reste le fou-rire que nous avons eu lorsqu’il a découvert qu’un certain nombre de coquilles s’étaient glissées dans mes scripts…

Mes remerciement vont ensuite à mon encadrante industrielle : Me Emilie Roche, qui a su faire l’interface parfois complexe entre le monde académique et industriel. Je suis très reconnaissant de son courage à me relire et me corriger, particulièrement en début de thèse, et moins par la suite (je l’espère), car j’ai pu apprendre de sa rigueur et prendre du recul sur ces travaux. Je tiens également à remercier Sébastien Pautard, pour ses encouragements et le plaisir qu’il a pris à me déstabiliser lors de présentations, ce fut également très formateur.

Un grand merci à Lucien Laiarinandrasana, qui a non seulement été mon premier rapporteur (non-officiel), mais également toujours été disponible pour partager sa vision, m’enseigner les subtilités des critères de plasticité compliqués et partager du bon rhum. Le tout, bien entendu, dans cet ordre.

J’ai eu la chance de faire cette thèse au sein du Centre des Matériaux, dans lequel j’ai en réalité passé la majeure partie de mes années d’études. C’est donc avec un grand plaisir que je remercie l’ensemble des scientifiques permanents et des étudiants, qui contribuent à faire de ce laboratoire un endroit d’échanges scientifiques et humains toujours passionnants, grâce à leur disponibilité et leur aide. J’espère avoir l’occasion d’y retourner pour mener de futurs projets de recherche.

Parmi ces personnes, c’est avec une certaine émotion que je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à Yves Favry, qui n’a malheureusement pas pu être de ce monde pour voir, encore, à quel point il était important dans nos travaux de recherche. Je me souviens d’heures passées dans son bureau à coller des jauges sur mes éprouvettes, sous son regard d’expert bienveillant. Dans la continuité, mes remerciements vont également à Jean-Christophe Tesseidre, indispensable aussi à nos travaux. C’est une grande chance que d’avoir pu bénéficier de son expérience et de son savoir-faire expérimental.

Je remercie également *tonton*-Djamel, pour son aide sur Zset et la philosophie qui l'accompagne : « *l'erreur se situe souvent entre le clavier et la chaise* ». C'est grâce à sa maitrise du code (et de vi !) que les modèles présentés ont pu être utilisés. Enfin, les cours d'histoire et de culture qu'il m'a dispensé ont rendu très agréables nos pauses sur la terrasse. C'est sans oublier son collègue Kais, pour l'aide qu'il m'a apportée sur l'écriture de la matrice Jacobienne.

J'adresse également mes remerciements à Henry Proudhon, pour sa confiance à tester « *Bulky* » et son aide pendant les 96 heures au synchrotron. C'est sans oublier le duo formé avec Andrew, devant lequel on se sent petit, non seulement dans la taille mais dans les capacités…

Mes quelques années au CdM ont été marquées par le passage des anciens étudiants : Judith, Georges, Adrien, Quentin, Damien et Manue. Je dois un remerciement spécial à Pierre-Emmanuel, qui m'a supporté, entendu râler plus d'une fois, et qui a dû subir mes diverses humeurs, tout en restant à l'écoute et toujours prêt à m'apprendre les rudiments de Python. Merci également à Clément et Guillaume, les deux copains de comptoir !

S'en suivent les étudiants qu'il est plus difficile de remercier en quelques lignes…Quentin, pour ces 5 ans au CdM, ces centaines de pauses et les très bons moments (et soirées) passés. Thibaut, mon acolyte pousseur de fonte avec qui c'est toujours la reprise : merci pour ton Haut Potentiel, pour ton soutien et ta sensibilité, à toi et ceux qui résident dans ta tête. Merci Hayat, pour tes merveilleux gâteaux et nos discussions lorsqu'il ne restait plus que nous. Nathan, merci de me faire croire que le quotidien peut être un long fleuve tranquille, sauf quand tu enlèves tes baskets. PAP, bien entendu, merci d'avoir contribué à mon début de carrière, pour ton initiation au golf qui m'a contaminé, et pour avoir toujours su mettre tes vents à disposition de qui veut en profiter. Fabien, complice discret mais efficace, merci pour ton soutien, je suis heureux de continuer à te croiser de l'autre côté, lorsque tu réponds au téléphone. Et Nicolas, qui m'a ouvert les portes des rayons-X dans lequel je retournerai volontiers et du crossfit, moins volontiers. Merci aussi pour nos échanges fleuris…

J'arrive à regret au terme de ces remerciements, en finissant par les personnes qui comptent le plus. Merci France, pour ton indéfectible soutien, ta patience et ton amour qui m'ont donné la force d'aller au bout de cette thèse malgré les épreuves. Je remercie également mes parents, Julie, Maxime, David, Lucile, Eva-Lou et ma famille en général, tous bienveillants et qui ont su m'encourager sans comprendre ce que je faisais au labo : c'est aussi pour vous que j'ai été au bout. Merci à mes amis, le noyau dur, d'avoir toujours su me faire redescendre sur Terre et d'avoir supporté mon absence durant ces quelques années. J'ai l'inspiration pour écrire plus longuement sur chacun de vous mais je préfère maintenant en terminer avec cette thèse pour vivre avec vous ces beaux moments qui nous attendent.

François RASSELET

Etude et modélisation d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone soumis à des chargements complexes

TABLE DES MATIERES GENERALE

Introduction générale 7

1.1. Contexte et enjeux de l'étude 12

1.2. Généralités sur les matériaux composites 14

1.2.1. Composites à matrice organique : CMO 15

1.2.2. Composites renforcés en fibres courtes : CRFC 19

1.2.3. Le moulage par injection des CRFC 22

1.3. Spécificités du matériau étudié 24

1.3.1. Matrice PolyEtherImide 24

1.3.2. Fibres courtes de carbone 25

1.4. Démarche de modélisation multi-échelle retenue pour l'étude 26

1.4.1. Définition des échelles caractéristiques des CRFC 26

1.4.2. Sollicitations conventionnelles et complexes 27

1.5. Structure du manuscrit 27

1.6. Bibliographie 30

Partie 1 : Echelle microscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone 35

2. Analyse et modélisation du comportement de la matrice PEI 40

2.1. Caractérisation expérimentale 40

2.1.1. Approche scientifique 41

2.1.2. Essais à faible taux de triaxialité 42

2.1.3. Essais à taux de triaxialité élevés 42

2.2. Modèles de comportement sensibles à la pression hydrostatique 45

2.2.1. Principaux modèles 45

2.2.2. Présentation du modèle retenu 45

2.2.3. Intégration explicite du modèle de comportement 51

2.3. Identification de la loi de comportement de la matrice PEI 52

2.3.1. Procédure d'identification itérative 52

2.3.2. Identification des paramètres pour trois formulations du critère 53

2.3.3. Récapitulatif de la loi de comportement identifiée 59

3. Détermination d'un comportement des fibres de carbone 64

3.1. Identification du comportement réversible linéaire du composite 65

3.1.1. Essais mécaniques sur le composite 65

3.1.2. Identification de la matrice de rigidité du composite 67

3.2. Identification inverse d'un comportement des fibres de carbone 68

3.2.1. Hypothèses de modélisation des fibres de carbone 69

3.2.2. Modèles d'homogénéisation par méthode inverse sous Digimat-MF 70
3.2.3. Identification de paramètres comportementaux des fibres 72
3.2.4. Identification des paramètres d'influence sur le comportement du composite . 74

Conclusions de la partie 76

Résumé graphique de la partie 77

Bibliographie 78

Partie 2 : Echelle mésoscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone 85

4. Etude de la microstructure 90
4.1. Généralités sur les variabilités de la microstructure 90
4.1.1. Fraction volumique de fibres 90
4.1.2. Orientation des fibres dans la matrice 92
4.1.3. Géométrie des fibres courtes dans le matériau 95
4.1.4. Confinement matriciel : la proximité des fibres dans la microstructure 97
4.2. La tomographie aux rayons X 100
4.2.1. Principes fondamentaux 100
4.2.2. Tomographie en contraste de phase 102
4.2.3. Analyse d'image, segmentation et labélisation des fibres de carbone 103
4.2.4. Traitement des données segmentées et labélisées 106
4.3. Caractérisation expérimentale de la microstructure 107
4.3.1. Détermination de la fraction volumique 108
4.3.2. Traitement des données brutes avec la corrélation de cylindres 110
4.3.3. Détermination de l'orientation des fibres 113
4.3.4. Détermination de la longueur des fibres 114
4.3.5. Une mesure du confinement matriciel : la fraction volumique locale 115
4.4. Synthèse de la caractérisation de la microstructure 118

5. Définition d'une cellule élémentaire statistiquement représentative : CESR 122
5.1. Approche scientifique 122
5.1.1. Chaine de génération des cellules 123
5.1.2. Hypothèses de modélisation 123
5.1.3. Génération des cellules sous Digimat-FE 124
5.1.4. Maillage des cellules sous Abaqus-CAE 126
5.2. Calcul des propriétés effectives des cellules sous Z-set 127
5.2.1. Définition des conditions aux limites pour les maillages non-coïncidents 127
5.2.2. Calcul des matrices de rigidité des cellules 128
5.3. Détermination des indicateurs de choix de la CESR 129
5.3.1. Indicateur du niveau d'isotropie transverse des cellules 129
5.3.2. Indicateur de la performance des cellules 130
5.4. Détermination d'une CESR du comportement effectif global 132
5.4.1. Etude de l'indicateur d'isotropie transverse des cellules 133
5.4.2. Etude de l'indicateur de performance des cellules 137
5.4.3. Choix d'une potentielle CESR 139

5.5. Etude de la proximité des fibres dans les cellules 140
5.5.1. Définition de l'indicateur local 141
5.5.2. Influence de la morphologie des cellules sur leur comportement global 143
5.6. Intégration du confinement matriciel réel dans le choix de la CESR 146
5.6.1. Démarche numérique et reconstruction de cellules spécifiques 146
5.6.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov 148
5.6.3. Définition de cellules intégrant la microstructure réelle 149
5.6.4. Indicateur local et distribution de fraction volumique locale 150

Conclusions de la partie 151

Résumé graphique de la partie 152

Bibliographie 153

Partie 3 : Echelle macroscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone 161

6. Généralités sur l'homogénéisation des composites renforcés en fibres courtes 166
6.1. Homogénéisation des matériaux hétérogènes 167
6.2. Approche à bornes variationnelles 169
6.2.1. Bornes de Voigt et Reuss 169
6.2.2. Bornes d'Hashin-Shtrikman 170
6.3. Approches estimatives 170
6.3.1. Problème d'Eshelby 170
6.3.2. Modèle d'Eshelby en solution diluée 172
6.3.3. Modèle de Mori-Tanaka 173
6.3.4. Modèle de Lielens 174
6.3.5. Modèle auto-cohérent 175
6.3.6. Extension à l'estimation du comportement non-linéaire 176
6.4. Approches numériques 176
6.4.1. Méthodes d'analyse par champs de transformation 177
6.4.2. Méthodes d'analyse par champs de transformation non-uniformes 177
6.4.3. Méthodes par transformation de Fourier 178
6.5. Synthèse des méthodes d'homogénéisation 178
6.6. Intégration de l'orientation des fibres 179
6.6.1. Homogénéisation en deux étapes conventionnelle 179
6.6.2. Retour sur les tenseurs d'orientation 180

7. Homogénéisation du PEI renforcé en fibres courtes de carbone 184
7.1. Démarche de modélisation 184
7.1.1. Principe du modèle à double-motif 186
7.1.2. Modèle de Mori-Tanaka incrémental 188
7.1.3. Modèle auto-cohérent incrémental 189
7.2. Homogénéisation du comportement unidirectionnel du composite 190
7.2.1. Comportement irréversible de la CESR 191
7.2.2. Calibration du modèle à double-motif 191
7.2.3. Comparaison du modèle sous sollicitations complexes 197

7.2.4. Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif 199
7.3. Homogénéisation du comportement macroscopique réversible 206
7.3.1. Intégration de l'orientation des fibres courtes 208
7.3.2. Intégration de la distribution de longueur des fibres courtes 212
7.4. Homogénéisation du comportement macroscopique irréversible 214
7.4.1. Traction irréversible pour des angles intermédiaires 214
7.4.2. Traction sur éprouvette axisymétrique entaillée 216

Conclusions de la partie 222

Résumé graphique de la partie 223

Bibliographie 224

Conclusions et perspectives 231

Rappel du contexte et des enjeux de l'étude 233

Conclusions par échelles 233

Perspectives 236

Bibliographie 240

Annexes 243

Annexe A 245

Ecriture du modèle de comportement de la matrice PEI 245

Calcul de la matrice Jacobienne 247

Validation de l'implémentation du modèle de comportement de la matrice PEI 252

Expression numérique de la matrice de rigidité identifiée 255

Annexe B 256

Expressions du tenseur d'Eshelby en milieu isotrope et isotrope transverse 256

Annexe C 262

Calibration complète du modèle à double-motif 262

Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif 269

Bibliographie 275

INTRODUCTION GENERALE

L'allègement des structures est un enjeu majeur de l'industrie aéronautique, ce qui justifie l'emploi des matériaux composites. Depuis peu, la réduction des coûts est également devenue un paramètre à intégrer dans leur utilisation. Grâce à leur faible masse, leurs propriétés spécifiques et leur coût de fabrication réduit, les composites à matrice thermoplastique renforcés en fibres courtes peuvent répondre à ce nouvel objectif. Cependant, leur microstructure est complexe et est directement responsable de leur comportement mécanique macroscopique. Afin de dimensionner au mieux les pièces aéronautiques, notamment soumises à des chargements complexes et des environnements spécifiques, leur étude peut impliquer une approche multi-échelle. Une telle approche a pour but de prédire le comportement macroscopique d'un matériau à l'aide de ces variabilités locales.

L'objectif de ces travaux de thèse est d'étudier et de modéliser le comportement d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone soumis à des sollicitations complexes. Trois échelles d'étude sont considérées : l'échelle microscopique (les constituants), l'échelle mésoscopique (la microstructure) et l'échelle macroscopique (le matériau massif). La démarche vise à plonger au cœur du matériau et d'en caractériser, dans un premier temps, ses constituants séparément. L'assemblage de ses constituants au sein du composite : la microstructure, est ensuite observée, décrite et modélisée par ses variabilités propres. Le passage à l'échelle macroscopique, celle du composite à l'état massif, est ensuite réalisé grâce à un modèle de calcul à champs moyens. Chaque échelle du matériau est décrite, mesurée et modélisée afin de prédire le comportement du composite macroscopique servant à la conception de pièces aéronautiques.

TABLE DES MATIERES

1.1. Contexte et enjeux de l'étude 12
1.2. Généralités sur les matériaux composites 14
1.2.1. Composites à matrice organique : CMO 15
1.2.2. Composites renforcés en fibres courtes : CRFC 19
1.2.3. Le moulage par injection des CRFC 22
1.3. Spécificités du matériau étudié 24
1.3.1. Matrice PolyEtherImide 24
1.3.2. Fibres courtes de carbone 25
1.4. Démarche de modélisation multi-échelle retenue pour l'étude 26
1.4.1. Définition des échelles caractéristiques des CRFC 26
1.4.2. Sollicitations conventionnelles et complexes 27
1.5. Structure du manuscrit 27
1.6. Bibliographie 30

CHAPITRE 1 : INTRODUCTION GENERALE

1.1. Contexte et enjeux de l'étude

Dans l'aéronautique, l'allègement des structures est longtemps resté au cœur des actions de recherche. L'augmentation du prix du baril de pétrole depuis le début des années 1970, a poussé les constructeurs à développer de nouveaux avions plus légers, donc moins consommateurs de carburant. De plus, le programme de recherche environnemental Clean-Sky traduit la volonté des Etats de réduire les émissions de CO_2 et de NOx (oxydes d'azote) des avions. Ce programme constitue un véritable défi, car il faut en parallèle conserver ou améliorer les performances des aéronefs, afin de faire face à la concurrence.

Le principal levier identifié afin de répondre à ces enjeux est l'intégration de matériaux innovants, tels que les matériaux composites, dans les structures aéronautiques. Ils constituent la majeure partie des travaux de recherche menés dans le domaine de l'allègement des structures afin de suppléer aux matériaux métalliques. Les exemples les plus concrets sont l'A380 d'Airbus, qui contient environ 25% en masse de matériaux composites [*LesEchos.fr*, 2015], soit un gain de 10 à 15 tonnes par rapport à un avion civil de même type, et le 787 de Boeing, qui contient 50% de matériaux composites [*Industrie & Technologies*, 2013], permettant notamment l'utilisation de 20% de carburant en moins par rapport à un avion de même génération. La *figure 1* illustre l'évolution de l'utilisation des composites dans la conception des aéronefs depuis les années 70.

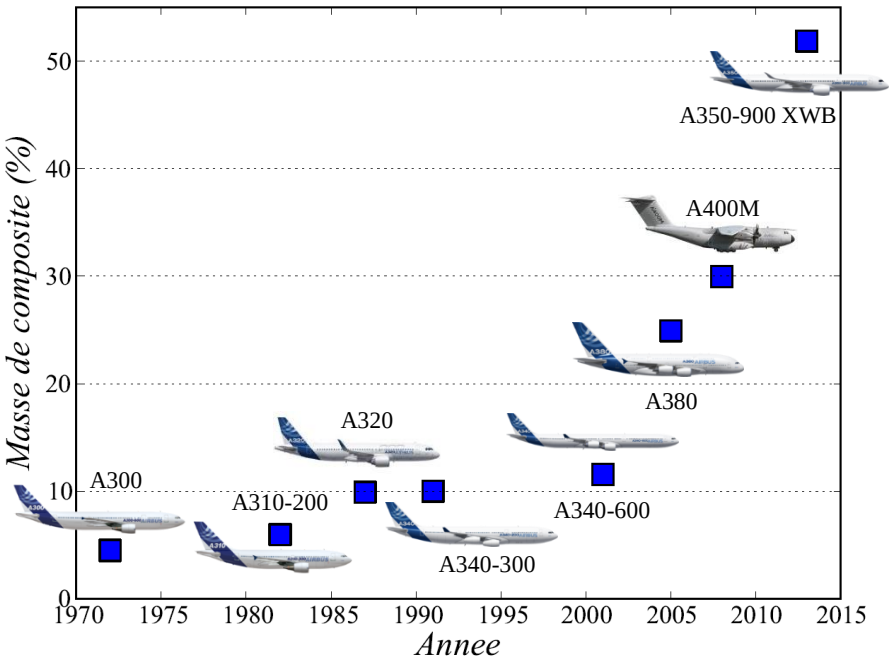


Figure 1 : Evolution du pourcentage massique de composites utilisés dans la conception des avions Airbus [Pora, 2001]

La compétitivité entre les différents acteurs de l'aéronautique a également modifié la démarche d'intégration des composites sur les avions : le prix des matériaux est devenu une donnée d'entrée primordiale. Pour les constructeurs, l'équation à résoudre doit non seulement prendre en compte la masse mais également les performances, l'impact écologique et les coûts des matériaux utilisés. Ces derniers étant quantifiés sur l'ensemble du cycle du matériau : des matières premières jusqu'à son recyclage, en passant par son transport et sa mise en forme.

Les matériaux composites s'inscrivent dans un programme de développement plus large, qui nécessite souvent de repenser la géométrie, la conception et les connaissances des pièces fabriquées. Et ce, même si il faut repenser les structures aéronautiques conventionnelles. De par leur mise en forme et leurs constituants, les composites offrent des possibilités infinies. Il existe donc de nombreuses solutions pour répondre aux mêmes enjeux. Les meilleurs exemples sont les aubes des moteurs *Leap*, constituées d'un composite tissé 3D apportant plus de légèreté et une résistance aux chocs supérieure aux anciennes aubes [*Safran Aircraft Engines*, 2015], et les aubes du moteur *Trent XWB*, constituées d'un composite carbone-titane, réduisant également la masse et améliorant leur résistance [*Rolls Royce*, 2016]. Ces technologies, présentées sur la *figure 2*, sont le fruit d'approches technologiques différentes, qui parviennent néanmoins à répondre aux exigences environnementales et économiques tout en améliorant leurs performances vis-à-vis de modèles antérieurs.

(A) *(B)*

Figure 2 : Turbines et aubes aéronautiques de nouvelle génération : (A) de Safran [Aerospace Technology, 2015] et (B) de Rolls Royce [Composites Today, 2014]

Afin d'exploiter le potentiel des matériaux composites tout en dimensionnant les structures de façon économique, il est indispensable d'améliorer la compréhension de ces matériaux. Qu'il s'agisse de leurs constituants (renforts et matrice), de leur procédé de fabrication, de leur comportement global ou de leur fonction finale, cette compréhension ne peut être acquise que par des études approfondies et variées : expérimentales et numériques.

1.2. Généralités sur les matériaux composites

Pour présenter les matériaux composites, il convient d'en donner une définition simple : ce sont des matériaux hétérogènes, dont les propriétés des constituants se complètent. Les matériaux composites sont composés d'une phase liante (la matrice), dans laquelle sont placés des renforts. Le composite ainsi obtenu est finalement une combinaison des propriétés mécaniques de la matrice et des renforts. Le schéma de la *figure 3* propose une représentation de ce concept dans un cas de sollicitation en traction dans la direction des renforts.

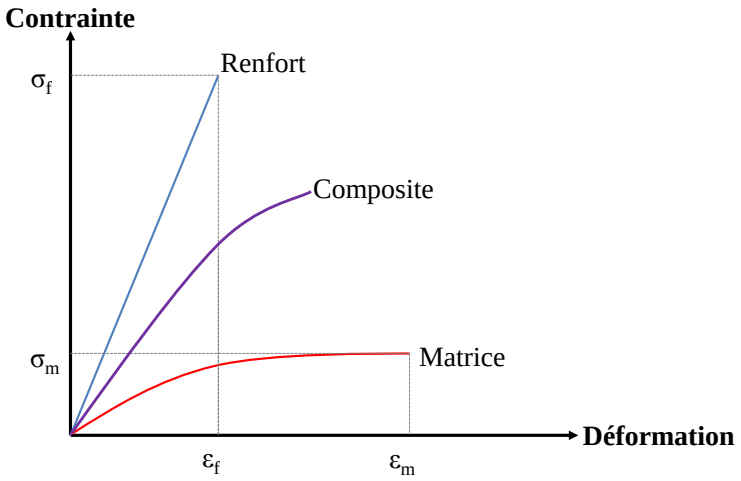


Figure 3 : Représentation schématique du rapport de comportement macroscopique entre les constituants et le composite en traction dans le sens des renforts

Il existe ainsi une infinité de matériaux composites et leurs propriétés sont tout autant diverses. Historiquement, c'est au cours de la seconde guerre mondiale que l'industrie aéronautique intègre pour la première fois les composites sur l'avion britannique *Spitfire* [*Glancey*, 2014]. Depuis, leur utilisation n'a cessé d'augmenter et s'est étendue à de nombreux domaines : sport et loisir, automobile, produits médicaux…

Les composites peuvent être classés en trois grandes catégories selon leur type de matrice : métallique (CMM), céramique (CMC) et organique (CMO) [*Hull & Clyne*, 1996]. Le diagramme présenté sur la *figure 4* illustre le classement de quelques exemples de ces trois catégories selon les enjeux de cette étude : performances mécaniques, coût et masse. En termes de propriétés mécaniques, les CMM se positionnent devant les CMC et les CMO, mais ils sont également moins légers et plus coûteux.

Pour les applications aéronautiques, la température d'utilisation des matériaux composites permet également de les distinguer. Les CMC sont généralement utilisés pour des températures allant jusqu'à 1500°C. Les CMM sont quant à eux utilisés jusqu'à 500°C et les CMO jusqu'à 180°C. Ces matériaux composites sont respectivement présentés en rouge, vert et bleu sur la *figure 4*. Le matériau de l'étude (CMO) est mis en évidence en jaune.

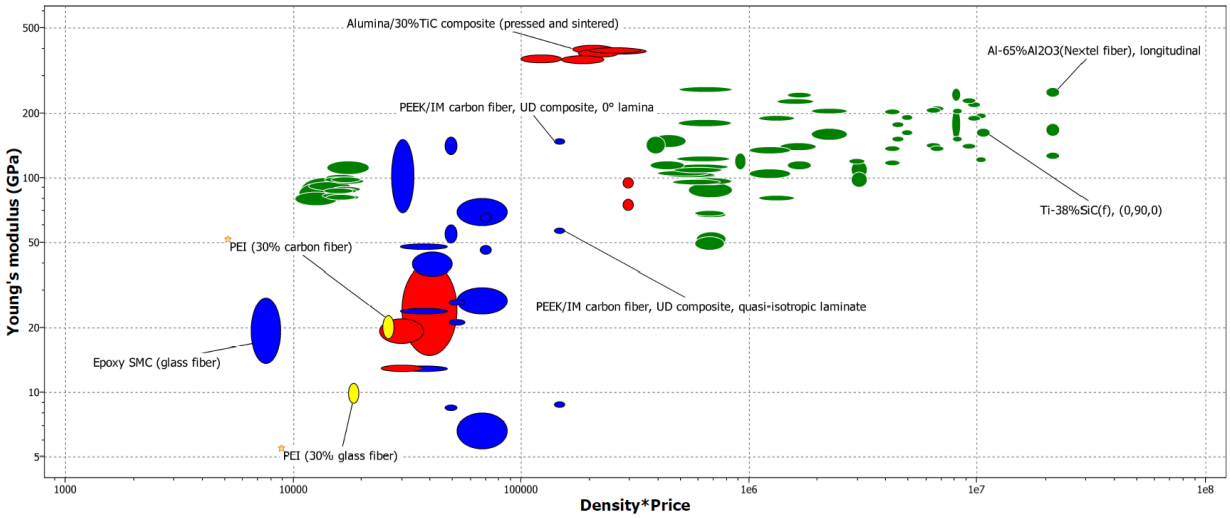


Figure 4 : Représentation d'Ashby [Ashby, 2011] des principaux composites. Tracé de leur module élastique en fonction du produit de leur densité par leur prix

Le coût des matériaux considérés dans le diagramme n'est basé que sur les matières premières. La transformation et la mise en forme de pièces structurelles complexes est également un critère de sélection des composites. Ces aspects sont non seulement liés au coût, mais également à la faisabilité industrielle liée la fabrication des pièces.

Un matériau composite est finalement un matériau *« à la carte »*, qui est choisi et conçu en fonction du besoin, des spécificités techniques, de la conjoncture économique et des enjeux industriels. Le composite étudié est composé d'une matrice organique.

1.2.1. Composites à matrice organique : CMO

Depuis la fabrication de la boule de billard en 1870 [*Everton*, 1986], l'avancée de la plasturgie a permis la mise en œuvre de CMO à matrices polymères toujours plus variés et innovants. Les renforts qu'ils intègrent le sont tout autant selon leur type et leur forme. A la fin des années 40, c'est l'industrie navale qui a été une des premières à intégrer les CMO [*Grabovac & Turley*, 1993], leur utilisation s'étant largement étendue à de nombreux domaines par la suite. Les CMO constituent aujourd'hui la catégorie de composites les plus utilisés, grâce à leur faible masse et à leur coût relativement peu élevé.

Le principal avantage des CMO est leur facilité de mise en œuvre et leur coût, ce qui en fait des matériaux industrialisables à grande échelle et flexibles en termes de géométrie. Ces avantages indéniables sur les autres types de composites impliquent néanmoins un paradoxe : la conception d'une pièce en CMO ne nécessite pas d'en comprendre le comportement ou les phénomènes physiques en jeu lorsqu'elle est sollicitée. Du point de vue de la recherche, étudier une pièce CMO correspond à prendre en compte de nombreux aspects du matériau, imposant leurs propres problématiques, parmi lesquelles on retrouve généralement :

- Les constituants : quelles sont leurs propriétés physiques, comment sont-ils fabriqués, comment interagissent-ils entre eux au sein du matériau final, leur

comportement macroscopique est-il le même que leur comportement *in-situ*, c'est-à-dire lorsqu'il est en interaction avec d'autres constituants, …

- Le procédé de mise en œuvre : quel type de procédé est utilisé, quelle est son influence sur la microstructure du matériau final, …

- Le matériau composite : quel est son comportement et sous quelles sollicitations, quel est son niveau d'anisotropie, comment le prendre en compte, comment le modéliser et par quelle méthode, …

- La pièce de structure : quelle est sa géométrie, pour quel environnement et pour quelles sollicitations est-elle prévue, …

Il est possible de considérer deux types de CMO : ceux dits à grande diffusion, qui constituent des pièces du quotidien, faiblement sollicitées et les CMO à hautes performances, que l'on retrouve notamment dans l'aéronautique. Un aperçu de leur positionnement mécanique et économique est proposé sur la *figure 5*. Sur cette figure, les CMO sont différenciés par couleur selon leur type de matrice : en bleu clair (PolyEthylène), en bleu foncé (PolyPropylène), en orange (PolyEthylène Téréphtalate), en vert clair (PolyAmide), en vert kaki (PolyCarbonate), vert foncé (PolyEther Ketone Ketone), marron (PolyEtherEther Ketone) et jaune, le matériau de l'étude (PolyEtherImide).

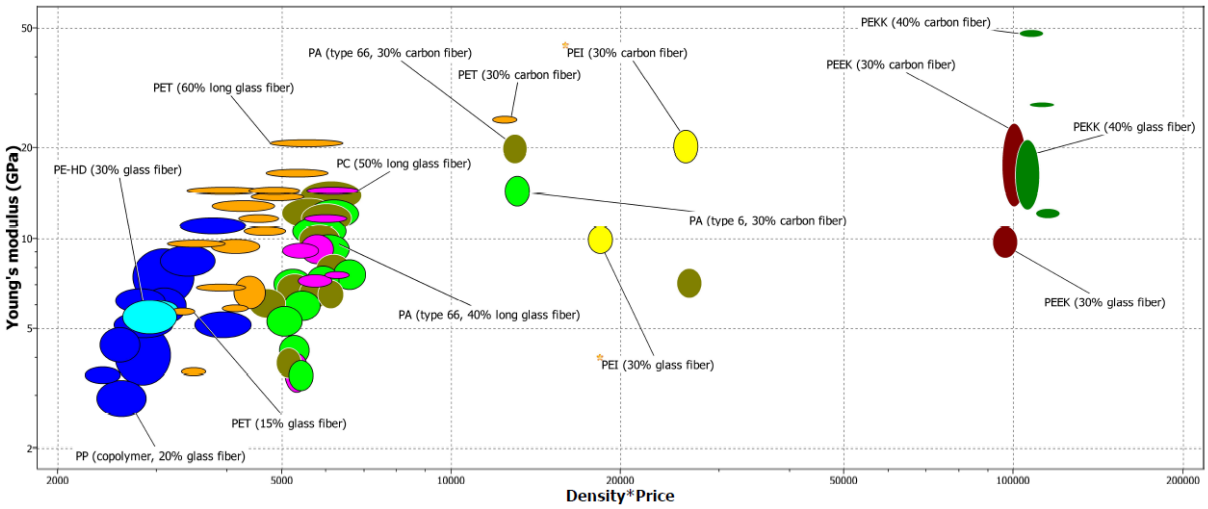
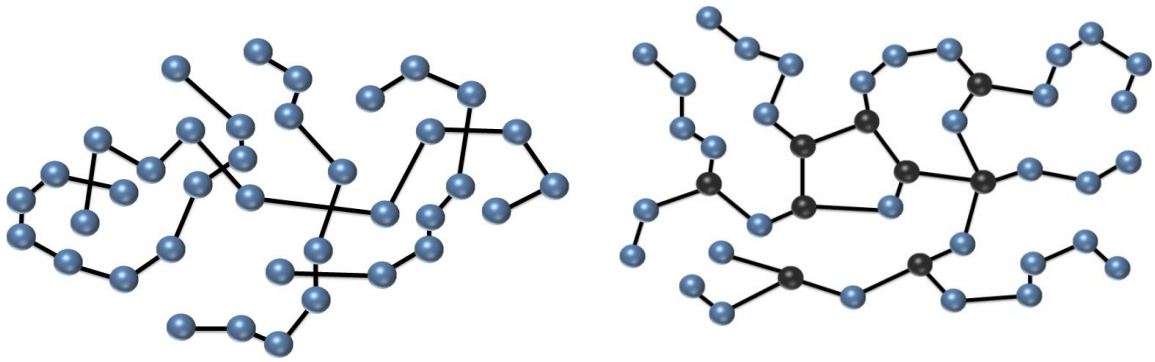


Figure 5 : Représentation d'Ashby [Ashby, 2011] des principaux composites à matrice organique. Tracé de leur module d'élasticité en fonction du produit de leur densité par leur prix

Deux natures de polymères sont habituellement utilisées pour constituer la matrice des CMO : les thermoplastiques et les thermodurcissables. D'un point de vue chimique, un polymère est une macromolécule constituée de chaines de plusieurs monomères assemblées à la suite d'une réaction de polymérisation. La différence entre un thermoplastique et un thermodurcissable réside dans la structure de leurs chaines et dans la nature de leurs liaisons, qui leur confèrent des propriétés thermomécaniques différentes. La représentation de l'arrangement des monomères dans les deux types de polymère est proposée sur la *figure 6*.



Thermoplastique *Thermodurcissable*

Figure 6 : Arrangement des monomères dans un thermoplastique et un thermodurcissable. Les sphères noires représentent les liaisons fortes et les bleues représentent les liaisons faibles

Les chaines qui constituent les polymères thermodurcissables sont réticulées et liées entre elles par des liaisons fortes (covalentes, représentées par les sphères noires sur la *figure 6*). Elles forment un réseau tridimensionnel insoluble et infusible. Les thermoplastiques sont constitués de chaines linéaires liées entre elles par des liaisons faibles (hydrogène et Van der Waals, représentées par les sphères bleues sur la *figure 6*). L'étymologie du mot « thermoplastique » nous renseigne quant à ses principales caractéristiques : il peut être ramolli, voire fondu, sous l'effet de la chaleur. Il peut également être dissout par des solvants tels que l'acide sulfurique par exemple. Les thermoplastiques se distinguent par leur taux de cristallinité. Celui-ci est fonction de l'arrangement des chaines macromoléculaires qui les compose. Dans le cas de chaines aléatoirement organisées, le taux de cristallinité du matériau est quasiment nul, celui-ci est alors considéré amorphe. C'est le cas du polyméthacrylate de méthyle (PMMA) [*Sane et al.*, 2001], couramment utilisé dans les applications grand public : enseignes publicitaires, prothèses dentaires, ameublement ou accessoires du quotidien.

Plus les chaines macromoléculaires vont être organisées dans le matériau, plus son taux de cristallinité va augmenter : on parle alors de matériaux polymères semi-cristallins. Un exemple courant de polymère semi-cristallin est le polyéthylène (PE), dont le taux de cristallinité peut atteindre 80% [*Akaishi et al.*, 1980]. Ses principales utilisations sont les emballages alimentaires, flacons de produits domestiques, bouteilles et gaines de câbles.

Afin de comprendre la différence de comportement mécanique entre un polymère amorphe et un semi-cristallin, il est nécessaire d'introduire les notions d'états transitoires dépendants de la température ou de la vitesse de sollicitation, présentés sur la *figure 7*.

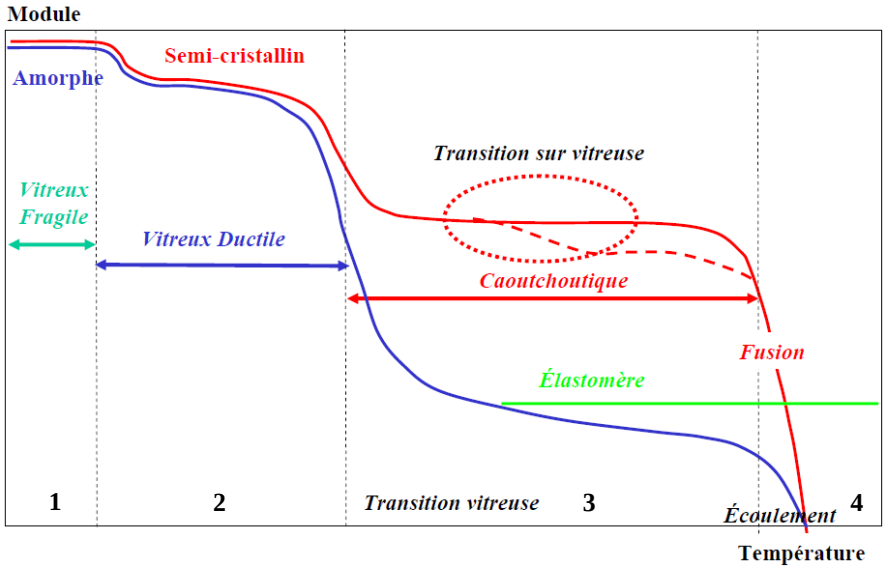


Figure 7 : Etats transitoires du comportement des polymères solides [Billon, 2007]

La température influence directement le mouvement des chaines moléculaires au sein d'un polymère. Bien que les domaines soient spécifiques à chaque polymère, quatre états transitoires particuliers sont généralement considérés [*Lemaitre et al.*, 2009] :

1 - Etat vitreux : caractérisé dans une plage de faible température, le polymère est à l'état solide et relativement dur et fragile. A titre d'exemple, le PMMA est vitreux à température ambiante.

2 - Etat de transition : l'élévation de la température induit la déformation des chaines macromoléculaires, une dégradation de leurs liaisons et un assouplissement des phases amorphes. Cet état est l'origine de profondes modifications dans la structure cristalline du matériau qui devient alors ductile jusqu'à sa transition vitreuse. La transition vitreuse est le passage de l'état solide à l'état caoutchoutique.

3 - Etat caoutchoutique : La déformation des chaines macromoléculaire augmente avec la rupture de leurs liaisons, le matériau devient caoutchouteux.

4 - Etat fluide : Il n'existe plus de liaisons entre les chaines macromoléculaires, le matériau est à l'état de fluide visqueux. Les principes régissant son comportement sont alors ceux de la mécanique des fluides.

Les travaux de thèse de Noëlle Billon [*Billon*, 1987] rappellent qu'un polymère semi-cristallin peut être utilisé au-delà de sa transition vitreuse. Celui-ci garde une stabilité, représentée par le plateau caoutchoutique, qui lui confère un module d'élasticité relativement constant et maintenu par ses phases amorphes. A contrario, un polymère amorphe ne peut pas être utilisé au-delà de sa transition vitreuse, car cet état implique l'assouplissement de ses chaines macromoléculaires.

Les CMO peuvent être différenciés selon la géométrie des renforts qu'ils contiennent : fibres continues unidirectionnelles, tissées, fibres courtes… Le matériau étudié dans ces travaux de thèse est un composite renforcé en fibres courtes.

1.2.2. Composites renforcés en fibres courtes : CRFC

Utilisés dans l'industrie à partir des années 60, les CRFC offrent une importante alternative aux composites renforcés en fibres continues en termes d'industrialisation. Bien que leurs propriétés mécaniques ne soient généralement pas aussi élevés que ces derniers, les CRFC ont l'avantage d'avoir une mise en œuvre plus adaptée à des grandes et moyennes séries, moins onéreuse que dans le cas des fibres continues, et d'accéder à des géométries finales variées. Ce constat permet l'industrialisation de masse de pièces complexes de CRFC.

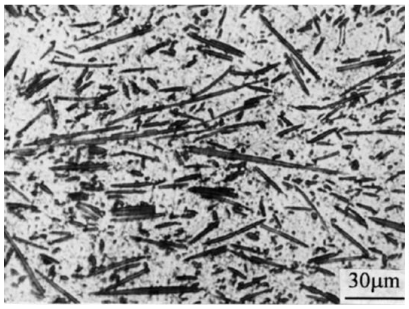
Quels que soient leurs constituants et leurs méthodes de fabrication, le développement des CRFC est poussé par la demande industrielle. Leurs domaines d'application sont nombreux. Les marchés « historiques » sont l'aéronautique et l'automobile. Mais on retrouve également les CRFC dans l'équipement sportif, la construction civile, le milieu médical et même dans l'horlogerie...[*Morgan*, 2005] Les CRFC se positionnent généralement dans le segment des composites à haute performance. Quelques exemples d'application de composites renforcés en fibres courtes de carbone sont présentés sur la *figure 8*.

Pièce de structure aéronautique TenCate
[TenCate, 2017]

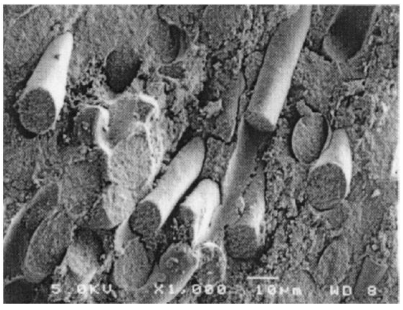
Pièce de support de calandre BASF et Magna sur Ford Shelby GT350
[BASF, 2016]

Figure 8 : Exemples d'utilisation industrielle de pièces composites renforcées en fibres courtes de carbone

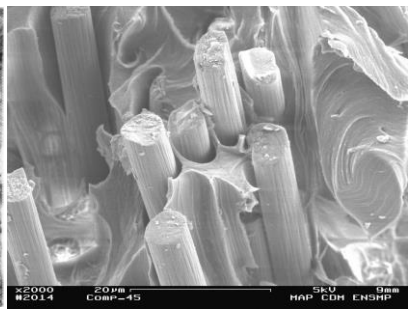
Comme la majorité des matériaux composites, il existe une infinité de CRFC, selon le type de matrice et de fibres qui les constituent. La *figure 9* en présente quelques-uns par des clichés au MEB. Depuis leur création, les CRFC se positionnent rapidement comme une famille de matériaux à la demande et s'adaptant à de nombreuses applications. Ils ouvrent également un vaste champ de recherches scientifiques dont certaines problématiques sont analogues aux autres matériaux (microstructure, comportement mécanique, etc.) et d'autres plus spécifiques aux CRFC (orientation des fibres dans la microstructure, phénomènes de rupture et d'endommagement, etc.).



Alliage d'aluminium renforcé en fibres courtes d'alumine (Al-203)
[Kang et al., 2002]



Carbure de silicium renforcé en fibres courtes de Si-Zr-C-O
[Suemasu et al., 2001]



PolyEtherImide renforcé en fibres courtes de carbone (matériau étudié)

Figure 9 : Images MEB composites renforcés en fibres courtes de différents types

L'utilisation de polymères thermoplastiques en tant que matrice amène un avantage supplémentaire aux CRFC : leur masse. Dans un contexte industriel nécessitant un contrôle des coûts de production, un allègement des structures et la possibilité de réaliser des pièces à géométries complexes, les CRFC sont particulièrement pertinents. La majorité des CRFC étaient initialement conçus avec des matrices thermodurcissables (TD), grâce à leur meilleure tenue mécanique aux hautes températures. Depuis le début des années 2000, les matrices thermoplastiques (TP) font cependant l'objet de la majorité des développements dans le domaine des CRFC, et ce, notamment grâce à leur bonne recyclabilité : un des enjeux industriels majeurs de ce début de siècle.

Bien que les fibres de verres soient les premières fibres utilisées, il existe aujourd'hui une grande diversité de fibres de renforts. Parmi les plus courantes on peut citer les fibres de carbone, d'aramide, de lin et d'alumine. Le choix des fibres va dépendre de l'application industrielle du composite et du meilleur compromis entre le coût matériau (matières premières, stockage, méthode de fabrication, …) et ses propriétés mécaniques.

Les principales fibres courtes utilisées comme renforts des matériaux composites se distinguent surtout par leurs propriétés mécaniques intrinsèques différentes, pouvant être retrouvées dans les références suivantes [*De & White*, 1996], [*Fu et al.*, 2009], [*Cytec Thornel*, 2012]. Les fibres de verre et de carbone restent cependant utilisées dans la majorité des CRFC.

Les fibres de carbone et les fibres de verre ont une haute résistance aux attaques chimiques, une bonne tolérance à la chaleur et une faible dilatation thermique. Les fibres de verre sont généralement trois fois moins chères que les fibres de carbone. Du fait de leur forte rigidité, les fibres de carbone sont moins flexibles que les fibres de verre. Par conséquent, les fibres de carbone supportent moins bien le choc. Le choix entre ces types de fibres est en réalité généralement fait selon les besoins et moyens industriels sur les critères suivants : prix, masse, rigidité et contrainte à rupture.

Les fibres de carbone sont intégrées dans les CRFC depuis les années 70, cependant leur utilisation reste limitée et très spécifique jusqu'à la fin du 20ème siècle. Au début du 21ème siècle, l'utilisation industrielle des composites fait exploser la demande en fibres de carbone [*Kraus & Kühnel*, 2014]. Ainsi, de nombreuses industries, notamment aéronautique, placent les CRFC au cœur de leurs études et de leurs applications. Grâce à leur comportement mécanique bien supérieur aux fibres de verre, les fibres de carbone qui renforcent les matrices TP améliorent donc considérablement le comportement mécanique des CRFC et étend ainsi leurs domaines d'application.

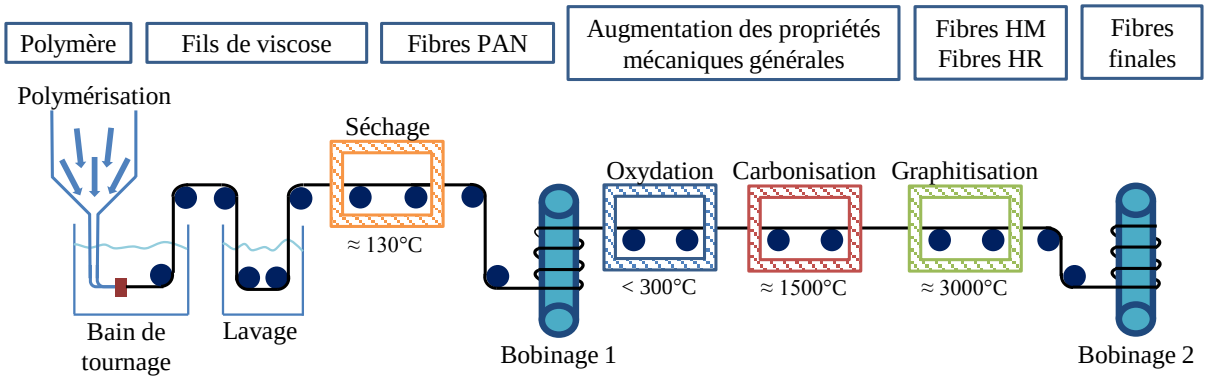


Figure 10 : Etapes générales du procédé de fabrication des fibres de carbone à précurseur PAN

La majorité des fibres de carbone sont fabriquées avec un précurseur polyacrylonitrile (PAN). Bien que leur procédé de mise en œuvre puisse varier d'un fabricant à l'autre, ce paragraphe et la *figure 10* présentent les étapes conventionnelles de leur fabrication. Les fils de PAN utilisés pour la fabrication des fibres de carbone sont issus d'une réaction de polymérisation de l'acrylonitrile en poudre et d'un autre polymère, comme le méthyl acrylate ou le méthyl méthacrylate. La réaction de polymérisation se fait en solution, qui peut être aqueuse ou non suivant le fabricant [*Park & Heo*, 2015]. Le polymère obtenu est extrudé au travers d'une filière contenant un bain de tournage (« spin bath »). Ce bain contient généralement plusieurs espèces chimiques (solvants et non-solvants) qui permettent de coaguler le polymère, de lui conférer une structure physique, des propriétés mécaniques et de le mettre sous forme de fils par le biais de la filière [*Morgan*, 2005]. Le fil obtenu est lavé, séché puis étiré une première fois et disposé sous la forme d'une bobine.

La fabrication des fibres de carbone à partir de fils de PAN se déroule ensuite sous atmosphère inerte, en trois grandes étapes [*Newcomb*, 2016] :

- L'oxydation à tension de fil constante, généralement en dessous de 300°C, pendant quelques heures. Cette étape induit une modification profonde des propriétés élastiques de la fibre et son changement d'aspect général. Elle peut s'apparenter à la réticulation d'un thermodurcissable.

- La carbonisation : le PAN issu de l'oxydation, est carbonisé à des températures allant jusqu'à 1500°C pendant quelques minutes. Cette étape engendre également une modification des propriétés intrinsèques de la fibre (mécanique, thermique et électrique), dont l'augmentation est proportionnelle à la température de carbonisation.

- La graphitisation est l'étape qui différencie les fibres haut module (HM) des fibres haute résistance (HR). A ce stade, la fibre a atteint un équilibre entre rigidité et résistance à rupture (fibre HR). Elle est ensuite chauffée entre 2000°C et 3000°C, ce qui, à l'image d'une trempe, la rend plus cassante. Ce dernier traitement thermique est réalisé sous atmosphère protectrice et permet d'éliminer les réactifs présents lors des étapes précédentes pour conserver uniquement le carbone. La fibre issue de ce processus est une fibre de haut module.

Les fibres de carbone ainsi fabriquées sont utilisées comme renforts de matériaux polymères grâce à diverses méthodes, qui sont généralement fonction de la pièce à fabriquer. Le matériau étudié est constitué de fibres courtes de carbone.

1.2.3. Le moulage par injection des CRFC

Parmi les procédés de mise en forme des composites renforcés en fibres courtes, le moulage par injection est le plus répandu. Ce procédé a été mis au point par John Wesley Hyatt au milieu du 19ème siècle pour la fabrication de boules de billard par injection de celluloïd dans un moule [*Everton*, 1986]. Les avantages de ce procédé n'ont pratiquement pas changé depuis deux siècles : il permet une production massive d'objets géométriquement complexes. C'est cependant un siècle plus tard, en 1946, que James Hendry conçoit la première machine de moulage par injection à vis de plastification [*Hashmi*, 2016], proche des machines couramment utilisées dans l'industrie plasturgique d'aujourd'hui. En plus des avantages déjà évoqués, le moulage par injection est un procédé de mise en forme répétable qui ne génère que très peu de chutes de matériau et dont les pièces sont peu retouchées. Les possibilités de ce procédé de fabrication sont d'autant plus vastes qu'il permet l'injection, à faible coûts, de renforts noyés dans une matrice en fusion dans une large gamme de polymères thermodurcissables et thermoplastiques.

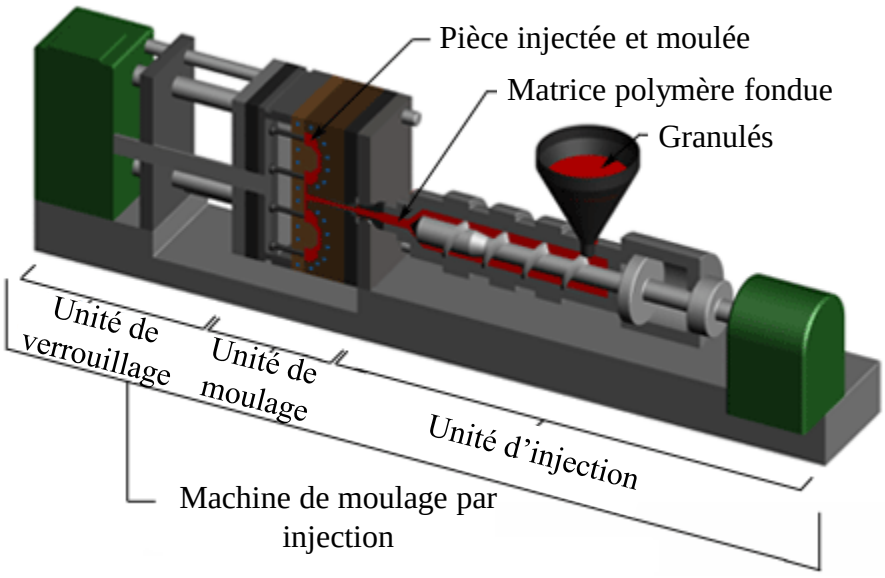


Figure 11 : Schéma du d'une presse à injecter

Le principe du moulage par injection est présenté sur la *figure 11*. Le procédé est divisé en trois unités principales : l'injection, le moulage et le verrouillage. La matière plastique est placée sous forme de granulés contenant les renforts dans l'unité d'injection via une trémie. Elle est chauffée et pressurisée afin d'être fondue. La vis de plastification permet l'injection rapide du polymère et de ses renforts dans le moule. L'unité de moulage contient le moule de la pièce à injecter et est au préalable verrouillée mécaniquement par l'unité de verrouillage qui maintient la pression jusqu'à la fin du processus d'injection.

Les fibres étant injectées dans une direction préférentielle dans le moule, elles se désorientent au cours de l'écoulement du polymère et sous l'effet de phénomènes d'origines multiples (cisaillement et écoulement élongationnel), générant ainsi une microstructure complexe. Trois zones sont généralement considérées dans les CRFC : deux zones de peau et une zone de cœur, dont un aperçu est proposé par la *figure 12*, à partir du matériau de l'étude. L'orientation spécifique des fibres est déterminée par trois types d'interactions [*Megally*, 2005] : les interactions entres les fibres et les parois du moule, les interactions des fibres entre-elles et les interactions hydrodynamiques. Ces trois types d'interactions sont directement liés aux constituants et aux paramètres du procédé d'injection : vitesse d'injection, épaisseur de la pièce à injecter, température du moule, fraction volumique de fibres, rhéologie du matériau. Ces paramètres influencent eux-mêmes deux types d'écoulement qui orientent les fibres de manière préférentielle : le cisaillement simple et l'écoulement élongationnel [*Redjeb*, 2007].

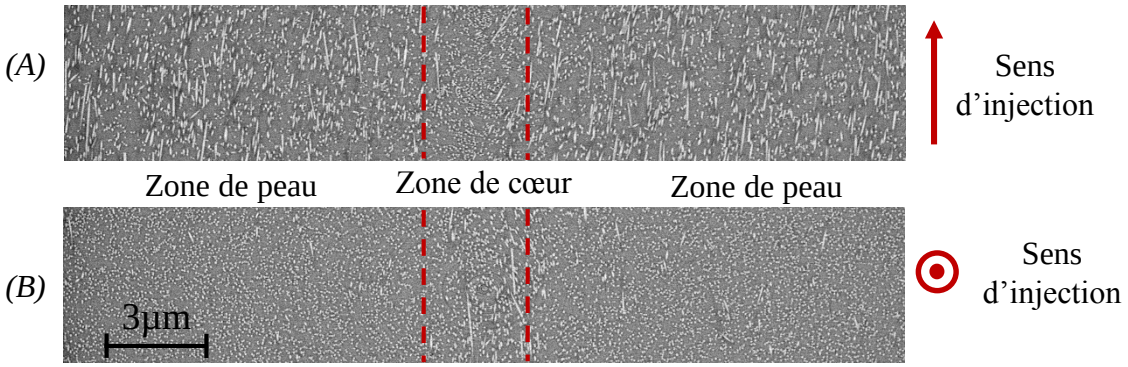


Figure 12 : Image en tomographie aux rayons-X de la microstructure. (A) Prise de vue perpendiculaire au sens d'injection, (B) Prise de vue dans la direction d'injection

Les études menées sur les CRFC s'accordent toutes sur le fait que l'orientation des fibres influence directement les propriétés mécaniques du composite, on peut notamment citer les travaux de thèse de Bay [*Bay*, 1991], Gupta [*Gupta & Wang*, 1993], Fu [*Fu & Lauke*, 1996] et plus récemment ceux de Bakir [*Bakir & Hashem*, 2013]. L'orientation des fibres va finalement donner le niveau d'anisotropie du comportement d'une pièce de structure, la détermination de l'orientation des fibres est donc essentielle afin de pouvoir modéliser le comportement d'un tel matériau.

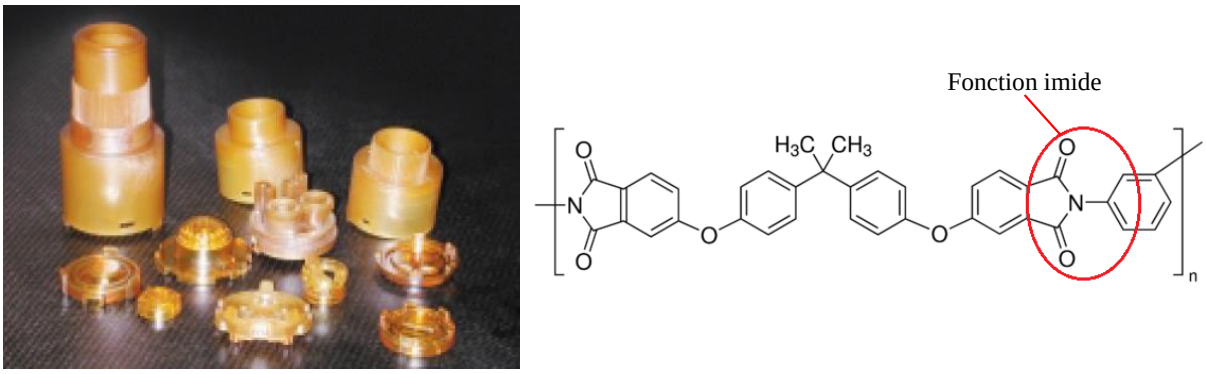
Selon le type de matrice et de renfort, il existe une large gamme de matériaux composites renforcés en fibres courtes. Leurs spécificités dépendent bien entendu de la nature et des propriétés de leurs constituants.

1.3. Spécificités du matériau étudié

Le matériau composite étudié dans ces travaux de thèse est fabriqué en moulage par injection. La matrice PEI est renforcée par 19% en masse de fibres courtes de carbone, dont le grade n'est pas communiqué.

1.3.1. Matrice PolyEtherImide

Le PEI est un polymère amorphe de la famille des polyimides. Il a été intégré au début des années 80 dans les applications industrielles par General Electric Plastics. Il est aujourd'hui largement utilisé dans les industries aéronautiques, automobiles, électroniques et chimiques. Le PEI est un thermoplastique à hautes performances thermomécaniques. Au-delà de ses propriétés thermomécaniques, son utilisation à grande échelle est également justifiée par sa facilité de mise en œuvre et sa souplesse d'usinage comme l'illustre la *figure 13 (A)*. La biocompatibilité du PEI en fait également un polymère très utilisé dans l'ingénierie médicale [*Brady et al.*, 2014].



(A) *(B)*

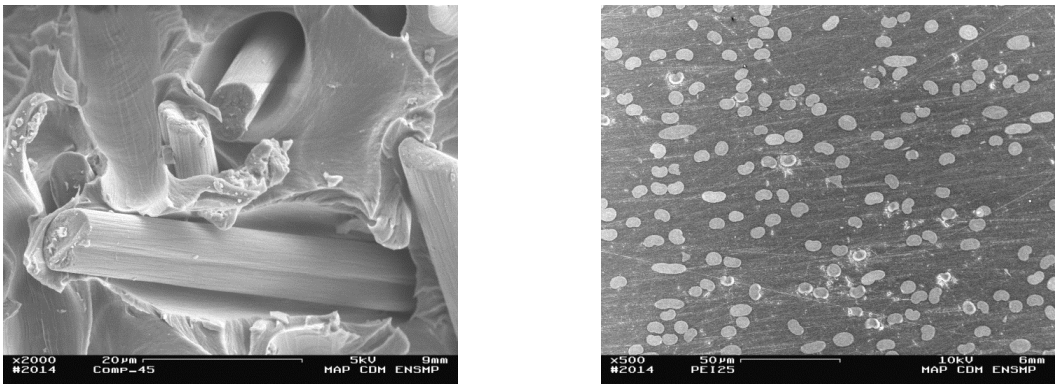
Figure 13 : Pièces industrielles usinées en PolyEtherImide (A) [General Electric Plastics, 2003] et représentation de la structure moléculaire du PEI (B)

La présence d'une fonction imide dans sa structure moléculaire (entourée en rouge sur la *figure 13, (B)*) augmente la température de transition vitreuse du polymère, lui conférant une importante thermostabilité en limitant l'assouplissement des chaines macromoléculaires lorsqu'il est chauffé. Grâce à une température de transition vitreuse autour de 210°C, sa plage de température d'utilisation varie de -50 à 170°C environ [*Duratron*, 2011]. Il conserve donc ses propriétés mécaniques dans cette plage de température.

La présence de nombreuses liaisons éther (-C-O-C-) apporte une souplesse aux chaines macromoléculaires, ce qui a pour conséquence de rendre le PEI peu visqueux en dessous de sa température de transition vitreuse. Cependant, c'est l'effet de la pression hydrostatique qui est responsable de changements locaux ayant un impact majeur sur le comportement d'un polymère amorphe tel que le PEI. En effet, celle-ci réduit la mobilité des molécules [*Quinson et al.*, 1997] et augmente sa température de transition vitreuse [*Bianchi*, 1971]. La pression hydrostatique étant définie comme la trace du tenseur des contraintes, elle traduit donc la modification de comportement du polymère à l'échelle macroscopique [*Nobile et al.*, 1990], [*Dallemagne*, 2003]. Son influence est d'autant plus importante lorsque la matrice est confinée par un matériau beaucoup plus rigide, comme les fibres de carbone.

1.3.2. Fibres courtes de carbone

La particularité des fibres de carbone qui renforcent la matrice du composite étudié réside dans la géométrie de leur section en forme de haricot (« Kidney-Bean Shape », abrévié ici KBS). Les travaux de Huang [*Huang*, 2009] démontrent qu'à une température de bain de tournage de 50°C et au-delà, la section des fibres est circulaire ou tend fortement à l'être. Plus cette température baisse, plus la section de la fibre prend une forme de haricot (autour de 10°C). La température du bain est directement responsable de la nature et du taux de coagulation du polymère en solution. Pour des températures élevées (au moins 50°C), la coagulation du polymère est faite par un volume égal de solvants et non-solvants dans le bain. Plus la température du bain décroit, plus l'effet des solvants est prépondérant sur celui des non-solvants, ce qui engendre la forme spécifique en haricot [*Knudsen*, 1963]. Il est donc supposé que la coagulation du polymère dont sont issues les fibres du composite de l'étude est faite à faible température.



(A) *(B)*

Figure 14 : Faciès de rupture en microscopie électronique à balayage du PEI renforcé par des fibres de carbone courtes, dont la section droite est en forme de haricot

Les fibres contenues dans le matériau de l'étude sont montrées sur des images de facies de rupture au MEB sur la *figure 14*, à partir d'essais de compression sur le composite à 45° par rapport au sens d'injection des fibres *(A)* et sur un plan coupé du matériau *(B)*.

Par rapport à une section droite circulaire, une géométrie KBS améliore l'interface fibre-matrice à l'échelle mésoscopique selon les travaux de Xu [*Xu et al.*, 2008]. Ces travaux montrent qu'une telle amélioration est surtout identifiée lors de l'endommagement de l'interface : la surface concave par rapport à la matrice est plus résistante aux contraintes locales que la surface convexe. Xu montre que cette différence est expliquée par une énergie de surface libre supérieure pour des fibres en forme de « haricot ». Elle n'intervient donc réellement que lors de l'endommagement local de la microstructure et de la rupture du composite. Par conséquent, l'hypothèse d'une section droite circulaire est prise afin de mener les travaux de modélisation. Cette simplification permet la modélisation pragmatique des fibres, tant en champs moyens qu'avec la méthode des éléments finis.

1.4. Démarche de modélisation multi-échelle retenue pour l'étude

Quelle que soit son application, une pièce mécanique doit être capable de supporter les sollicitations auxquelles elle est soumise, sans que celles-ci ne compromettent son intégrité physique. Le dimensionnement de pièces de structures industrielles implique donc une connaissance accrue du matériau avec lequel elles sont réalisées. Dans le cadre de CRFC, cette connaissance passe par une compréhension multi-échelle du matériau : de ses constituants jusqu'à sa forme finale.

1.4.1. Définition des échelles caractéristiques des CRFC

La définition des échelles d'un CRFC n'est pas figée et ne fait pas consensus dans le domaine scientifique. Dans cette étude, trois échelles sont considérées : microscopique, mésoscopique et macroscopique. Le parti pris est de considérer que la compréhension et l'étude de chaque échelle est un axe d'amélioration de sa modélisation. Une première illustration de ces échelles est présentée par la *figure 15*.

Figure 15 : Représentation des échelles caractéristiques considérées dans l'étude

L'échelle microscopique concerne les constituants du composite : la matrice PEI et les fibres courtes de carbone, dont les dimensions peuvent aller jusqu'à quelques centaines de micromètres. Il s'agit de mesurer et/ou d'identifier le comportement de chaque constituant, en tenant compte de leurs spécificités intrinsèques. Le comportement des constituants est identifié séparément afin de pouvoir être modélisé par éléments finis ou en champs moyens.

La seconde échelle est l'échelle mésoscopique et concerne la microstructure du composite étudié. Ses dimensions sont de l'ordre du millimètre. A cette échelle, il s'agit de mesurer l'impact du moulage par injection sur la morphologie de la microstructure, en définissant notamment ses variabilités. Le comportement des constituants assemblés est modélisé en champs moyens, calibré à partir des éléments finis.

La dernière échelle est macroscopique et concerne le matériau final avec lequel sont réalisées des pièces structurelles aéronautiques. Ses dimensions sont de l'ordre du centimètre. Cette échelle est à la fois une mise en commun des études aux échelles inférieures et une étude à part entière sur le comportement global du composite, tant en termes de caractérisation mécanique que de simulation numérique. Le changement d'échelle est effectué grâce à la modélisation en champs moyens.

1.4.2. Sollicitations conventionnelles et complexes

En fonctionnement, une pièce aéronautique est soumise à une large variété de sollicitations, dites conventionnelles ou complexes. Afin d'analyser et de modéliser le comportement d'un CRFC soumis à de telles sollicitations, celles-ci doivent tout d'abord être définies.

La différence entre une sollicitation conventionnelle et une sollicitation complexe n'est pas triviale. En effet, elle peut dépendre de son type, de sa vitesse, ou de l'échelle à laquelle elle est considérée. La définition proposée dans ces travaux de thèse est basée sur l'étude du taux de triaxialité macroscopique, défini comme le rapport de la pression hydrostatique sur la contrainte équivalente de von-Mises. Lorsque ce taux est compris entre *0* et *0,33* [*Bao & Wierzbicki*, 2004], la sollicitation est considérée conventionnelle. Au-delà de cette valeur (ou pour une valeur négative), la sollicitation est considérée complexe. Un fort taux de triaxialité peut être obtenu de deux façons : soit le moyen d'essai permet d'appliquer une sollicitation multiaxiale macroscopique (traction-torsion ou traction biaxiale, par exemple), soit la géométrie de l'éprouvette est spécifique et permet de créer une concentration de contrainte élevée, augmentant ainsi le taux de triaxialité. La première méthode nécessite par conséquent la réalisation d'essais mécaniques sur des machines complexes et coûteuses qui ne sont pas toujours disponibles dans le milieu industriel.

D'un point de vue industriel, la seconde méthode est généralement celle retenue. L'exemple le plus simple est celui de traction uniaxiale : lorsqu'une telle sollicitation est menée sur une éprouvette dont les dimensions sont normées, le taux de triaxialité est alors de *0,33* au cœur de l'éprouvette. A l'inverse, lorsqu'elle est menée sur des éprouvettes axisymétriques entaillées, le taux de triaxialité est d'au moins *0,4* et peut être voisin de *1*. La philosophie de l'étude est basée sur une notion d'échelle de complexité : si la complexité du comportement d'un matériau anisotrope peut être caractérisée et modélisée localement, alors elle sera prise en compte dans un calcul sous sollicitations macroscopiques complexe. En revanche, la caractérisation et la modélisation d'une sollicitation macroscopique complexe, ne rend pas compte de l'hétérogénéité locale du comportement du matériau, menant à son comportement macroscopique.

1.5. Structure du manuscrit

Ce manuscrit se compose de trois parties relatives aux différentes échelles du matériau. Dans l'ordre logique, la démarche proposée débute à l'échelle des constituants et s'achemine vers la pièce de structure. Le but de l'étude est de plonger au cœur du matériau afin d'en comprendre les spécificités et de remonter jusqu'à la structure en proposant un modèle de comportement pouvant s'adapter à tout matériau composite renforcé en fibres courtes et au milieu industriel.

Bien que les résultats obtenus à chaque échelle soient directement *injectés* dans l'échelle suivante, chaque partie se veut indépendante. Elles contiennent chacune une démarche scientifique spécifique, constituée d'un plan, d'une bibliographie, d'un développement et de conclusions individuelles. Le choix d'une telle structure de manuscrit est motivé par la volonté de séparer les sujets, faisant parfois appel à des notions et techniques variées et généralement caractéristiques de chaque échelle : le lien se veut donc direct entre la théorie, les techniques expérimentales et la

modélisation. Cette thèse est donc *composite*, puisqu'elle est le fruit de la contribution de chaque partie, chaque échelle, s'imbriquant les unes aux autres afin de proposer une démarche multi-échelle complète.

La première partie se consacre aux constituants du matériau de l'étude. Le comportement de la matrice est identifié grâce à des essais conventionnels et complexes, qui lui permettent d'exprimer sa sensibilité à la pression hydrostatique, et par conséquent son comportement sous sollicitations multiaxiales. Dans cette démarche, son comportement élastoplastique est modélisé à l'aide d'un critère de Drucker-Prager généralisé, pour lequel une méthode d'intégration (*θ-méthode*) est implémentée spécifiquement dans le code de calcul par éléments finis Z-set [*Transvalor SA*, 2015]. Ne disposant pas de fibres seules, le comportement linéaire de celle-ci est identifié par méthode inverse grâce aux essais mécaniques sur la matrice et sur le composite, à l'aide d'une méthode de calcul en champs moyens déjà existante sous Digimat-MF [*E-Xstream*, 2014]. La pertinence de cette identification est validée lors de la mise en place de la démarche d'homogénéisation proposée dans la dernière partie.

La seconde partie est dédiée à l'étude de la microstructure. Après un état de l'art de ses variabilités spécifiques, elle est étudiée grâce à des observations en microtomographie par contraste de phase. Cette technique, permettant une bonne distinction entre les fibres et la matrice, donne accès à la mesure de l'orientation tridimensionnelle des fibres et la dispersion de leurs longueurs. Une méthode de traitement des données par corrélation de cylindres est mise en place à ces fins. Pour faire suite à la première partie du manuscrit sur le comportement de la matrice, une mesure du confinement matriciel est proposée en étudiant la distribution de fraction volumique locale de fibres dans la microstructure. Le second chapitre de cette partie pose les premières étapes de la modélisation du matériau composite. Il traite de la génération d'une cellule élémentaire statistiquement représentative (CESR) du matériau unidirectionnel par éléments finis. Cette cellule est déterminée via la définition et l'application d'indicateurs du comportement global et de sa morphologie.

La troisième partie du manuscrit se consacre au changement d'échelle nécessaire à la modélisation d'un CRFC. Elle propose une démarche d'homogénéisation en deux étapes par le calcul en champs moyens, alimentée par les éléments finis (CESR). Après un rappel des principaux modèles micromécaniques et de l'intérêt d'une démarche en deux étapes pour les CRFC, une procédure est développée afin de réaliser le changement d'échelle numérique. Un système composé par un double-motif de Mori-Tanaka (direct et inverse) est d'abord homogénéisé à l'aide d'un modèle auto-cohérent. Cette première brique de la démarche, appelée « pseudo-grain », est calibrée grâce à la CESR et constitue le comportement effectif du composite unidirectionnel. A l'aide des données mesurées dans la seconde partie du manuscrit, un macro-système est ensuite constitué de plusieurs pseudo-grains, dont l'orientation et le facteur de forme est unique. Cet ensemble de briques élémentaires est enfin homogénéisé via un modèle de Voigt et constitue le comportement effectif du matériau de l'étude. La pertinence de cette démarche d'homogénéisation est ensuite étudiée afin de prédire le comportement du composite sollicité en traction à différents angles. Enfin, elle est utilisée afin de prédire le comportement macroscopique et plus local d'un essai générant un fort taux de triaxialité local.

La dernière partie du manuscrit reprend l'ensemble des conclusions de chacune des échelles du matériau, de manière à les assembler et à les mettre en perspectives les unes par rapport aux autres. Une section finale propose des perspectives générales pour

chacune des échelles et permet également d'introduire les travaux complémentaires menés n'ayant pas été intégrés aux parties techniques du manuscrit dans un souci de logique de la démarche.

Enfin, des résumés graphiques sont proposés à la fin de chaque partie. Ils visent à synthétiser de manière visuelle les travaux effectués, les résultats obtenus et leurs interactions dans et entre les différentes parties du manuscrit.

Les annexes du manuscrit sont destinées à le compléter mais n'ont pas été intégrées au corps technique de celui-ci afin de fluidifier sa lecture. Elles sont divisées selon l'ordre des parties. Dans l'annexe A, relative à la partie sur l'étude des constituants, le calcul complet de la matrice tangente du modèle élasto-viscoplastique de Drucker-Prager généralisé est explicité. L'annexe B, consacrée à l'homogénéisation du comportement du composite, donne les expressions du tenseur d'Eshelby dans le cas de milieux isotropes et isotropes transverses. Enfin, l'annexe C complète la calibration du modèle d'homogénéisation développé dans la dernière partie du manuscrit.

Dans l'ensemble du manuscrit, le comportement élastique du polymère (ou du composite) est appelé réversible linéaire. Il s'agit du domaine dans lequel la contrainte est proportionnelle à la déformation appliquée au matériau et ne génère aucune déformation permanente. Le comportement irréversible est comparable au comportement plastique des métaux, et concerne le domaine de comportement non-linéaire du matériau, dans lequel une déformation résiduelle permanente est générée après sollicitation. Le terme «*irréversibilité* » vise cependant à intégrer la dilatation « plastique » présente dans les polymères.

1.6. Bibliographie

Aerospace Technology, (2015), SKF to supply bearings for CFM LEAP turbofan engines.

Akaishi, T., Miyasaka, K., Ishikawa, K., Shirakawa, H., & Ikeda, S., (1980), Crystallinity of bulk polyacetylene, *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*, 18: 745–750.

Ashby, M. F., (2011), Materials Selection : The Basics, in: *Materials Selection in Mechanical Design*, Elsevier.(cité p.15 et p.16)

Bakir, B., & Hashem, H., (2013), Effect of fiber orientation for fiber glass reinforced composite material on mechanical properties.pdf, *International Journal of Mining, Metallurgy & Mechanical Engineering (IJMMME)*, 1: 341–345.

Bao, Y., & Wierzbicki, T., (2004), On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46: 81–98.

BASF, (2016), 3 New Ways Advanced Composite Materials Are Light Weighting Today's Cars.

Bay, R. S., (1991), *Fiber orientation in injection molded composites : A comparison of theory and experiment*, University of Illinois at Urbana-Champaign.

Bianchi, U., (1971), Pressure dependence of glass transition temperature in polymers, *Rheologica Acta*, 10: 213–213.

Billon, N., (1987), *Modélisation des cinétiques globales de cristallisation des polymères. Application aux procédés de mise en forme*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Billon, N., (2007), *Comportement mécanique des polymères*, Centre de Mise en Forme des Matériaux.

Brady, M. A., Vaze, R., Amin, H. D., Overby, D. R., & Ethier, C. R., (2014), The design and development of a high-throughput magneto-mechanostimulation device for cartilage tissue engineering, *Tissue Engineering Part C: Methods*, 20: 149–159.

Composites Today, (2014), Rolls Royce Tests Composite Fan Systems for New Engine Designs.

Cytec Thornel, (2012), T-300 Carbon Fiber, Polyacrylonitrile - Fiche matériau.

Dallemagne, G., (2003), *Fluides Hydrauliques*, Ed. Techniques Ingénieur.

De, S. K., & White, J. R., (1996), *Short fibre-polymer composites*, Woodhead Publishing, 246 pp.

Duratron, (2011), Duratron PEI U1000 - Fiche matériau.

Everton, C., (1986), *History of Snooker and Billiards*, Haywards Heath: TBS The Book Service Ltd. (cité p.15 et p.22)

E-Xstream, (2014), *Digimat 5.1.2 User Manual*, E-Xstream.

Fu, S.-Y., & Lauke, B., (1996), Effects of fiber length and fiber orientation distributions on the tensile strength of short-fiber-reinforced polymers, *Composites Science and Technology*, 56: 1179–1190.

Fu, S.-Y., Lauke, B., & Mai, Y.-W., (2009), *Science and Engineering of Short Fibre Reinforced Polymer Composites*, Elsevier.

General Electric Plastics, (2003), *GE Engineering Thermoplastics ULTEM PEI Resin, Product Guide*.

Glancey, J., (2014), *Spitfire: The Illustrated Biography*, Atlantic Books Ltd.

Grabovac, I., & Turley, D. M., (1993), *Present and future of composite materials for marine applications - Proceedings of the ninth International Conference on Composite Materials (ICCM-9)*, Woodhead Publishing Limited.

Gupta, M., & Wang, K. K., (1993), Fiber orientation and mechanical properties of short-fiber-reinforced injection-molded composites: Simulated and experimental results, *Polymer Composites*, 14: 367–382.

Hashmi, S., (2016), *Comprehensive Materials Finishing*, Elsevier.

Huang, X., (2009), Fabrication and Properties of Carbon Fibers, *Materials*, 2: 2369–2403.

Hull, D., & Clyne, T. W., (1996), *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge University Press.

Industrie & Technologies, (2013), L'A350 XWB, premier Airbus avec plus de 50 % de composites.

Kang, G.-Z., Yang, C., & Zhang, J., (2002), Tensile properties of randomly oriented short d-Al2O3 fiber reinforced aluminum alloy composites. I. microstructure characteristics, fracture mechanisms and strength prediction, *Composites. Part A, Applied Science and Manufacturing*, 33: 647–656.

Knudsen, J. P., (1963), The influence of coagulation variables on the structure and physical properties of an acrylic fiber, *Textile Research Journal*, 33: 13–20.

Kraus, T., & Kühnel, M., (2014), Global carbon fibre market remains on upward trend, *Elsevier Ltd*.

Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A., & Desmorat, R., (2009), *Mécanique des matériaux solides - 3ème édition*, Dunod.

LesEchos.fr, (2015), La fibre de carbone, un matériau stratégique pour Airbus et Boeing.

Megally, A., (2005), July 13, *Étude et modélisation de l'orientation de fibres dans des thermoplastiques renforcés*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, pp. 217.

Morgan, P., (2005), *Carbon Fibers and Their Composites*, CRC Press. (cité p.19 et p.21)

Newcomb, B. A., (2016), Processing, structure, and properties of carbon fibers, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 91: 262–282.

Nobile, M. R., Acierno, D., Incarnato, L., & Nicolais, L., (1990), The rheological behavior of a polyetherimide and of its blends with a thermotropic copolyester, *Journal of Rheology*, 34: 1181–1197.

Park, S.-J., & Heo, G.-Y., (2015), Precursors and manufacturing of carbon fibers, in: S.-J. Park, *Carbon Fibers* (Vol. 210), Dordrecht: Springer Netherlands.

Pora, J., (2001), Composite materials in the airbus A380-from history to future, Presented at the International Committee on Composite Materials ICCM - 13.

Quinson, R., Perez, J., Rink, M., & Pavan, A., (1997), Yield criteria for amorphous glassy polymers, *Journal of Materials Science*, 32: 1371–1379.

Redjeb, A., (2007), *Simulation numérique de l'orientation de fibres en injection de thermoplastique renforcé*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Rolls Royce, (2016), The Trent XWB.

Safran Aircraft Engines, (2015), LEAP : le saut technologique.

Sane, S. B., Cagin, T., Knauss, W. G., & Goddard III, W. A., (2001), Molecular dynamics to compute the bulk response of amorphous PMMA, *Journal of Computer-Aided Materials Design*, 8: 87–106.

Suemasu, H., Kondo, A., Itatani, K., & Nozue, A., (2001), A probabilistic approach to the toughening mechanism in short-fiber-reinforced ceramic-matrix composites, *Composites Science and Technology*, 61: 281–288.

TenCate, (2017), Composite and carbon fiber materials and processes - TenCate Advanced Composites.

Transvalor SA, (2015), Z-set (Version 8.6), Evry: Transvalor SA.

Xu, Z., Li, J., Wu, X., Huang, Y., Chen, L., & Zhang, G., (2008), Effect of kidney-type and circular cross sections on carbon fiber surface and composite interface, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 39: 301–307.

Partie 1

Echelle microscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone

L'étude des constituants d'un matériau renforcé en fibres courtes de carbone constitue une étape essentielle dans sa modélisation. Dans cette partie du manuscrit, l'échelle microscopique est ainsi définie par les deux constituants du matériau : la matrice et les fibres. A cette échelle, l'analyse vise à caractériser indépendamment le comportement de ces constituants, tout en considérant leurs interactions respectives. Cette influence réciproque est ici définie par la pression hydrostatique causée par la présence des fibres dans le voisinage de la matrice. La pression hydrostatique, indicateur du confinement matriciel, modifie le comportement de la matrice, et donc celui du composite. Sa prise en compte est indispensable en vue de la modélisation des deux constituants ensemble à l'échelle supérieure. Les fibres courtes qui constituent le matériau de l'étude sont inconnues et ne sont pas disponibles individuellement. Les objectifs de cette partie sont alors les suivants : Comment prendre en compte la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique ? Comment choisir et valider un modèle qui prenne en compte cette grandeur physique ? Comment identifier le comportement des fibres de carbone ? L'approche retenue met en synergie la caractérisation expérimentale et la simulation numérique afin d'atteindre ces objectifs.

Le premier chapitre de cette partie traite de la caractérisation mécanique du comportement matriciel sous sollicitations conventionnelles et complexes qui permettent l'identification d'un modèle de comportement sensible à la pression hydrostatique. Le second chapitre présente l'identification des paramètres des fibres par une méthode inverse en champs moyens alimentée par les essais expérimentaux sur la matrice et le composite et la littérature.

TABLE DES MATIERES

2. Analyse et modélisation du comportement de la matrice PolyEtherImide 40
2.1. Caractérisation expérimentale 40
2.1.1. Approche scientifique 40
2.1.2. Essais à faible taux de triaxialité 41
2.1.3. Essais à taux de triaxialité élevé 42
2.2. Modèles de comportement sensibles à la pression hydrostatique 45
2.2.1. Principaux modèles 45
2.2.2. Présentation du modèle retenu 47
2.2.3. Intégration explicite du modèle de comportement 51
2.3. Identification de la loi de comportement de la matrice PEI 52
2.3.1. Procédure d'identification itérative 52
2.3.2. Identification des paramètres pour trois formulations du critère 53
2.3.3. Récapitulatif de la loi de comportement identifiée 59

3. Détermination d'un comportement des fibres de carbone 64
3.1. Identification du comportement réversible linéaire du composite 65
3.1.1. Essais mécaniques sur le composite 65
3.1.2. Identification de la matrice de rigidité du composite 67
3.2. Identification inverse d'un comportement des fibres de carbone 68
3.2.1. Hypothèses de modélisation des fibres de carbone 69
3.2.2. Modèles d'homogénéisation par méthode inverse sous Digimat-MF 70
3.2.3. Identification de paramètres comportementaux des fibres 72
3.2.4. Identification des paramètres d'influence sur le comportement du composite 74

Conclusions de la partie 76

Résumé graphique de la partie 77

Bibliographie 78

CHAPITRE 2 : ANALYSE ET MODELISATION DU COMPORTEMENT DE LA MATRICE POLYETHERIMIDE

2. Analyse et modélisation du comportement de la matrice PolyEtherImide

La matrice PEI, premier des constituants du composite étudié dans ces travaux de thèse, est analysée de manière expérimentale et numérique. L'étude de la littérature montre que la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique gouverne son comportement réversible linéaire et irréversible tant à l'état brut que *in-situ* (dans le composite). Par conséquent, des essais mécaniques conventionnels et complexes sont menés sur le PEI afin d'en caractériser le comportement réversible linéaire et d'observer son comportement irréversible. Un critère d'entrée dans le domaine irréversible est ensuite choisi parmi les principaux critères permettant de prendre en compte la sensibilité d'un matériau à la pression hydrostatique. Les essais mécaniques permettent enfin d'identifier les paramètres de la loi de comportement choisie.

2.1. Caractérisation expérimentale

L'identification du comportement de la matrice est réalisée à partir d'essais conventionnels, dits « à faible taux de triaxialité » et sur des essais complexes à plus fort taux de triaxialité. Ces essais permettent tout d'abord d'identifier le comportement réversible linéaire de la matrice. Ils sont ensuite utilisés afin de mettre en évidence la sensibilité de la matrice aux sollicitations complexes et constituent une base de données permettant d'identifier les paramètres d'un critère d'irréversibilité prenant en compte l'influence de la pression hydrostatique sur le comportement de la matrice.

2.1.1. Approche scientifique

L'approche proposée est de considérer que le comportement de la matrice à l'état massif est le même que son comportement *in-situ*. C'est-à-dire que le comportement matriciel identifié expérimentalement et numériquement est équivalent dans le composite. Bien que cette hypothèse soit généralement adoptée dans la modélisation multi-échelle d'un composite, différentes études insistent sur l'importance de considérer le comportement matriciel *in-situ* spécifique, et ce, depuis plusieurs dizaines d'années [*Sun & Chen*, 1991], [*Gates et al.*, 1994]. Pour y parvenir, la nanoindentation reste la méthode la plus porteuse [*Oliver & Pharr*, 1992], [*VanLandingham et al.*, 1999], [*Gregory & Spearing*, 2005]. La méthode récemment proposée [*Hardiman et al.*, 2015] suggère la mesure du module d'élasticité de la matrice dans des zones à confinements variables générées par la présence des fibres grâce à des essais d'indentation et leur simulation par éléments finis. Le module de la matrice *in-situ* identifié semble être 19% supérieur au module de la matrice massive. Cette modification du comportement massif de la matrice dépend du procédé de fabrication du matériau [*Huang*, 2001]. L'approche de Hardiman permet cependant d'accéder au seul module d'élasticité de la matrice, son coefficient de Poisson étant considéré égal à celui de la matrice massive. La mise en œuvre de cette technique étant conséquente et impliquant finalement d'autres hypothèses de modélisation, elle n'a pas été retenue dans ces travaux.

Bien qu'étudiée depuis les années 30 sur des matériaux métalliques [*Birch*, 1938], et largement approfondie par la suite dans les travaux de Bridgman dans un contexte général [*Bridgman*, 1949], l'influence de la sensibilité à la pression hydrostatique des polymères et des matériaux composites sur leur comportement est étudiée depuis le début des années 70 [*Pugh et al.*, 1971]. La pression hydrostatique a un impact de premier ordre sur les matériaux polymères et composites, tant dans leur comportement réversible linéaire qu'irréversible [*Pinho et al.*, 2012]. Cette grandeur physique influence le seuil du comportement irréversible de ces matériaux.

La prise en compte de la sensibilité de la matrice PEI à la pression hydrostatique est un point central de ces travaux de thèse. Elle motive le choix d'un critère d'irréversibilité prenant en compte cette grandeur ainsi que les essais mécaniques qui permettent l'identification de ses paramètres. Du point de vue de la mécanique des milieux continus, le tenseur des contraintes se décompose en une partie sphérique et une partie à trace nulle [*Lemaitre et al.*, 2009]. En d'autres termes, une partie due à la pression hydrostatique et une partie due au cisaillement, n'entrainant pas de variation de volume. L'intérêt de traiter la partie hydrostatique permet donc de s'intéresser *de manière phénoménologique* à l'endommagement de la matrice. L'objectif est ici de conditionner le modèle de comportement de la matrice à un voisinage de fibres largement plus rigides, afin de prédire au mieux le comportement du composite. Prendre en compte la pression hydrostatique permet, par extension, d'évoquer les notions de triaxialité et de confinement matriciel qui sont abordées dans la seconde et la troisième partie du manuscrit.

Un modèle de comportement sensible à la pression hydrostatique est choisi et implémenté pour un schéma d'intégration implicite dans un logiciel de calcul par éléments finis. Deux types d'essais mécaniques en traction sont conduits sur la matrice PEI : un essai à faible taux de triaxialité ($\tau \approx 0{,}33$) et des essais à plus forts taux de triaxialité, dit complexes ($\tau > 0{,}33$). Une sollicitation en cisaillement donnant un taux de triaxialité nul. Ces essais constituent une base de données expérimentale permettant d'identifier les paramètres du modèle.

2.1.2. Essais à faible taux de triaxialité

L'essai à faible taux de triaxialité est défini ici comme impliquant un faible état de contrainte multiaxial sur le matériau au cours du chargement. Des essais de traction uniaxiale, qui induisent par définition un taux de triaxialité autour de *0,33*, sont conduits à température ambiante et dans le régime quasi-statique ($10^{-4}\,s^{-1}$) suivant la norme EN ISO 527 [*Afnor*, 2012] sur une machine Instron 5982. Les cinq essais menés sont pilotés en vitesse de déformation, la charge est mesurée à l'aide d'une cellule de 100 kN, des jauges de déformation Kyowa (KFG-10-120-C1-11) et un extensomètre à lames permettent respectivement de mesurer l'allongement de l'éprouvette et sa striction dans la zone utile. Les courbes de contrainte-déformation de ces essais sont tracées sur la *figure 1-1*.

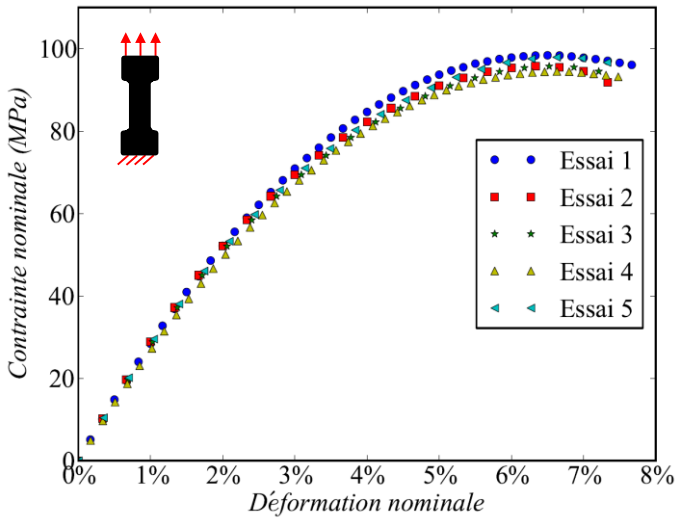


Figure 1-1: Courbes de contrainte-déformation des essais de traction EN NF ISO 527 sur la matrice PEI

Le coefficient de Poisson est mesuré à 0,40 ± 0,03. Le module d'Young apparent et la limite du domaine réversible linéaire sont déterminés par régression linéaire des courbes

obtenues grâce aux jauges de déformation, jusqu'à l'atteinte d'un coefficient de détermination de 0,99. Le module d'Young moyen de ces essais est estimé à 2910 ± 80 MPa. Pour la valeur de R^2 retenue, le seuil de réversibilité R_0 du comportement de la matrice est calculé à 30 ± 2 MPa. Cette valeur est confirmée par deux essais de fluage, réalisés en suivant la norme NF EN ISO 178 et instrumentés dans les mêmes conditions que ceux de traction, pour des contraintes de fluages à 20 MPa et 40 MPa. Les deux courbes de déformation en fonction du temps issues de ces essais sont présentées sur la *figure 1-2*.

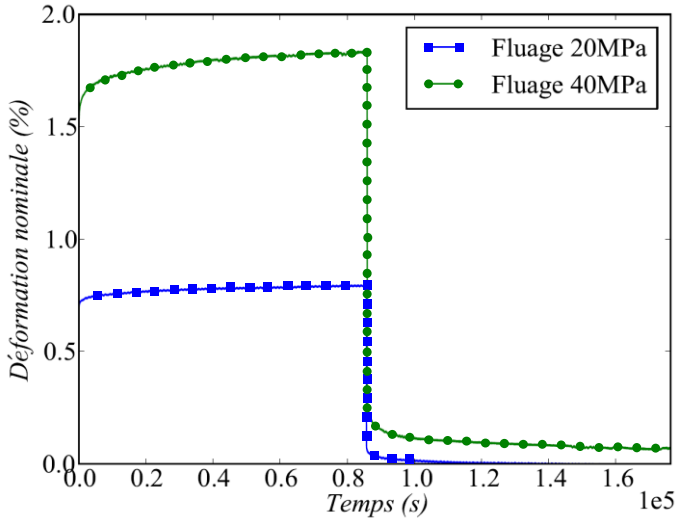


Figure 1-2 : Courbes de fluage pour des contraintes de 20 MPa et 40 MPa sur la matrice PEI

Les courbes de fluage de la *figure 1-2* montrent que le seuil de réversibilité de la matrice se situe entre 20 et 40 MPa : la déformation semble être permanente lorsque la contrainte de fluage de 40 MPa est relâchée.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (1.1)$$

Le polymère étant considérée comme isotrope, le module de cisaillement en traction s'exprime par la relation *(1.1)* et sa valeur déduite est de 1039 ± 107 MPa

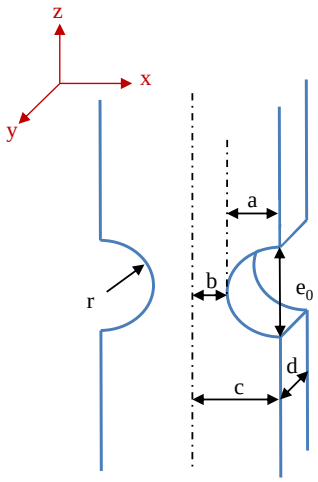
2.1.3. Essais à taux de triaxialité élevé

Comme défini dans l'introduction générale du manuscrit, les essais complexes génèrent un état de contrainte multiaxial local sur le matériau en cours de chargement, soit une triaxialité supérieure à *0,3*. Cet état local particulier peut être induit par la présence d'entailles sur les éprouvettes de traction [*Hancock & Mackenzie*, 1976]. Ce type d'éprouvettes est particulièrement utilisé pour l'étude de l'influence de la triaxialité en fond d'entaille et pour la calibration de modèles de rupture sur les métaux, comme le proposent les travaux de Bao [*Bao & Wierzbicki*, 2004], [*Bao*, 2005].

Dans le domaine des polymères, elles ont non-seulement la même utilité, mais elles permettent également de mettre en exergue des phénomènes micromécaniques primordiaux tant sur leur comportement que sur leur rupture. En effet, les travaux menés par Tiejun [*Tiejun et al.*, 2002] traitent de l'influence de la triaxialité sur la déformation et la rupture de polymères amorphes (polycarbonate - PC et acrylonitrile butadiène styrène - ABS). Dans les travaux de Lafarge [*Lafarge*, 2004], deux modes de rupture sont pris en compte dans un modèle et sont identifiés à partir d'essais à différents taux de triaxialité sur du polyfluorure de vinylidène. De

faibles taux de triaxialité induisent un déchirement ductile et des taux élevés induisent une rupture fragile. Les travaux de Castagnet [*Castagnet & Deburck*, 2007] proposent quant à eux une étude de l'influence de la microstructure et de la triaxialité macroscopique sur la nucléation et la croissance des cavités dans un polymère semi-cristallin. L'ensemble de ces travaux, qui ne constituent qu'une partie des études sur l'influence de la triaxialité sur le comportement de polymères, mènent tous à conclure sur l'importance de sa prise en compte dans la modélisation.

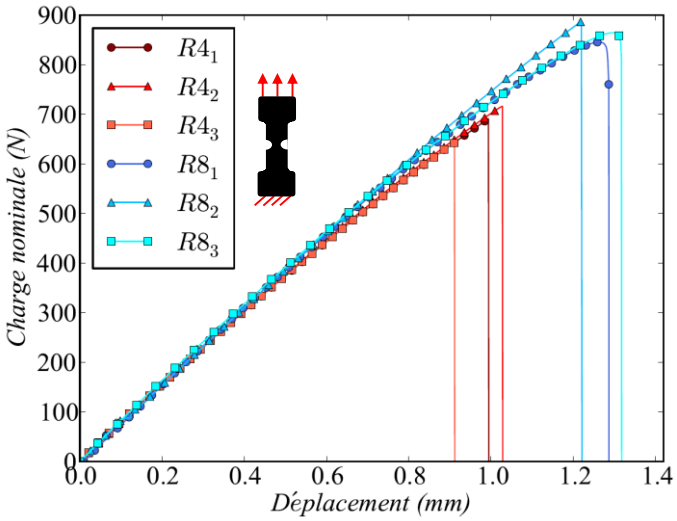
La majorité des travaux menés sur l'étude de la triaxialité utilisent cependant des éprouvettes axisymétriques entaillées. La matrice massive étudiée dans ces travaux de thèse étant sous la forme d'une plaque de 2,6 millimètres d'épaisseur, les essais de traction ont été réalisés avec des éprouvettes entaillées plates, suivant la norme EN NF ISO 527 et inspirées des travaux de Devilliers [*Devilliers*, 2011]. Deux rayons d'entailles ont été usinées au centre de la zone utile des éprouvettes de traction, cette taille est définie par le rayon de fond d'entaille *r*. Deux rayons ont été considérés : r = 0,4 et r = 0,8 millimètres. Pour simplifier, les éprouvettes sont respectivement nommées R_4 et R_8. Leur géométrie est schématisée sur la *figure 1-3*.

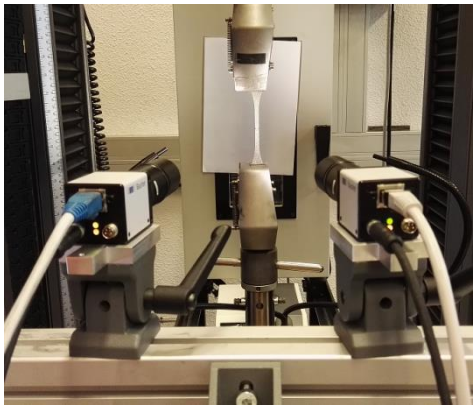


Paramètre (mm)	R4	R8
a	1,5	
b	1,5	
c	3	
d	2,6	
r	0,4	0,8
e_0	0,8	1,6

Figure 1-3 : Schéma et dimensions des éprouvettes de traction entaillées plates utilisées

Un maximum de paramètres géométriques sont égaux entre les deux types d'éprouvettes (*a, b, c, d*). La section à cœur, appelée ligament, est ainsi constante quelle que soit l'éprouvette. Les essais à taux de triaxialité élevés sont menés dans les mêmes conditions que les essais à faible taux de triaxialité. Un mouchetis est réalisé sur les éprouvettes afin de mesurer les déplacements macroscopiques grâce à la stéréo-corrélation d'images numériques (SDIC : Stereo Digital Image Correlation). Seuls les déplacements surfaciques sont étudiés, les déplacements dans l'épaisseur de l'éprouvette sont uniquement utilisés afin de contrôler l'axe de la sollicitation en traction. Trois essais sont menés pour chaque géométrie d'éprouvette. Les courbes de charge-déplacement macroscopique de l'ensemble des essais sont tracées sur la *figure 1-4 (A)*. La *figure 1-4 (B)* montre une photo du dispositif des essais avec l'éprouvette R_8.





(A) (B)

Figure 1-4 : Courbes de charge-déplacement des trois essais de traction répétés pour deux géométries de rayon de fond d'entaille (A) et photo du montage de l'essai (B)

Dans le cas de l'éprouvette R_8, la charge à rupture est en moyenne 26% supérieure à R_4, et 30% supérieure pour le déplacement à rupture. Le rayon de fond d'entaille étant supérieur dans le cas R_8, il génère un taux de triaxialité maximal inférieur à celui généré dans le cas R_4. Le comportement irréversible de la matrice polymère est donc lié à la taille de l'entaille, comme a pu le montrer Devilliers dans ses travaux de thèse [*Devilliers*, 2011].

L'ouverture de l'entaille est calculée par la différence entre la taille initiale de l'entaille (e_0) et la taille au temps $t+1$ (e). Sa mesure au cours des essais, en fonction de la charge macroscopique, corrobore ces observations : elle augmente avec la taille du rayon (*figure 1-5*).

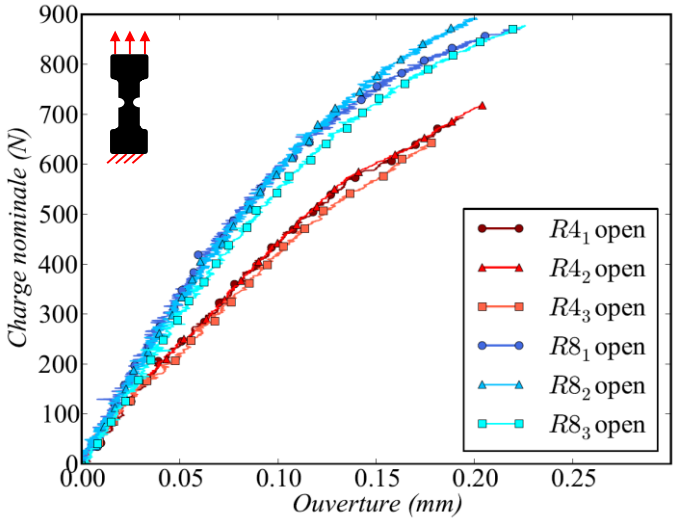


Figure 1-5 : Courbes d'ouverture des entailles en fonction de la charge macroscopique des trois essais de traction pour deux géométries de rayon de fond d'entaille

La principale différence entre ces essais réside dans la pente des courbes : l'entaille de l'éprouvette R_8 s'ouvre plus rapidement que celle de R_4 pour une même charge macroscopique appliquée. L'ensemble de ces observations sont utilisées dans la partie suivante afin de déterminer les paramètres du modèle de comportement.

2.2. Modèles de comportement sensibles à la pression hydrostatique

Le modèle de comportement de la matrice doit permettre de décrire sa réaction à des sollicitations mécaniques complexes. Dans ce contexte, il s'agit de traduire l'influence de phénomènes physiques sur sa déformation. Leur choix peut être motivé par leur observation, leur mesure, ou de manière phénoménologique. La mécanique des milieux continus permet de conceptualiser ces phénomènes physiques de manière mathématique, tout en respectant la loi de conservation de masse et les lois fondamentales de la dynamique.

Ce chapitre s'attache à modéliser les trois domaines qui caractérisent le comportement de la matrice avant sa rupture. Dans ces travaux de thèse, le potentiel endommagement de la matrice au cours de la sollicitation est considéré de manière phénoménologique dans le modèle. Les trois domaines du comportement de la matrice sont les suivants :

- Comportement réversible linéaire : quelle que soit la sollicitation, la déformation de la matrice est réversible. Il s'agit de la matrice de rigidité déterminée expérimentalement à partir des essais mécaniques à faible taux de triaxialité du chapitre précédent.

- Seuil d'irréversibilité : état de contrainte limite au-delà de laquelle les déformations de la matrice sont permanentes. Cette valeur est intrinsèque à la matrice polymère. La prise en compte de la pression hydrostatique modifie, au travers d'un critère d'irréversibilité, l'atteinte de cette limite.

- Comportement irréversible : réponse en déformation de la matrice selon le niveau de contrainte et le type de sollicitation. Les déformations sont irréversibles dans ce régime. Cette partie du comportement est définie par le type d'écoulement irréversible.

2.2.1. Principaux modèles

Dans le domaine réversible linéaire du comportement d'un polymère, les grandeurs E et ν traduisent la sensibilité à la pression hydrostatique. Dans le domaine irréversible, elle est généralement prise en compte par son critère d'irréversibilité. Les trois principaux modèles de comportement prenant en compte cette variable interne sont les modèles de Mohr-Coulomb [*Coulomb*, 1776], [*Mohr*, 1914], de Gurson [*Gurson*, 1977] et de Drucker-Prager [*Drucker & Prager*, 1952]. Dans ce qui suit, ces trois modèles sont présentés avec leur fonction de charge. On rappelle que la fonction de charge, également appelée fonction de seuil ou surface de charge, correspond au seuil de contrainte à partir duquel la déformation du matériau modélisé est irréversible [*Lemaitre et al.*, 2009].

Le modèle de Mohr-Coulomb est une extension du critère de Tresca [*Tresca*, 1864] qui tient compte du cisaillement maximal du matériau. Ce modèle fait également intervenir la contrainte moyenne, définie comme étant le centre du cercle de Mohr correspondant au cisaillement maximal [*Besson et al.*, 2001]. Sa fonction de seuil est définie par l'expression *(1.2)*, où σ_I et σ_{III} sont les contraintes principales telles que ($\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$), C et ϕ sont deux constantes intrinsèques au matériau et sont respectivement la force de cohésion et l'angle de frottement. Ce modèle est principalement utilisé pour la modélisation de la plasticité de matériaux fragiles tels que les sols ou les roches [*Jaeger et al.*, 1979], [*Zhao*, 2000].

$$f(\bar{\sigma}) = \sigma_I - \sigma_{III} + (\sigma_I + \sigma_{III}) \sin\phi - 2C\cos\phi \qquad (1.2)$$

Le modèle de Gurson est basé sur la prise en compte de porosités dans la matrice. Le comportement matriciel étant modélisée par un critère de von-Mises (insensible à la pression hydrostatique), la modification irréversible du volume, due à la présence de porosités, génère une pression hydrostatique à l'échelle macroscopique du matériau [*Jeong & Pan*, 1995].

Un modèle spécifique de Gurson est utilisé pour la modélisation de polymères dans de nombreuses études au Centre des Matériaux : Lafarge, sur le PVDF [*Lafarge*, 2004], Boisot, sur le PA11 [*Boisot*, 2009], Dumoulin, sur le PA12 [*Dumoulin*, 2014] et Cayzac, sur le PA6 [*Cayzac*, 2014]. Ces auteurs utilisent le modèle Gurson-Tvergaard-Needleman (GTN) [*Tvergaard*, 1982], [*Tvergaard & Needleman*, 1984], modifié par Besson [*Besson & Guillemer-Neel*, 2003]. Cette version est un modèle d'endommagement car il intègre le taux de porosité comme variable d'état interne, et donc, la prise en compte de la coalescence des porosités dans le matériau. La fonction de charge du modèle est donnée par l'expression *(1.3)*.

$$f(\bar{\sigma}) = \frac{\bar{\sigma}^2{}_{eq}}{\bar{\sigma}^2{}_0} + 2q_1 f^* \cosh\left(\frac{3}{2} q_2 \frac{\bar{\sigma}_m}{\bar{\sigma}_*}\right) - \left(1 + q_1 f^{*2}\right) = 0 \qquad (1.3)$$

Où f^* est la fonction intégrant l'accélération de la croissance de la porosité. Celle-ci est déterminée par le rapport de la fraction volumique de vide au début de la coalescence et à l'apparition d'une fissure. Les termes q_1 et q_2 rendent compte des interactions entre les cavités.

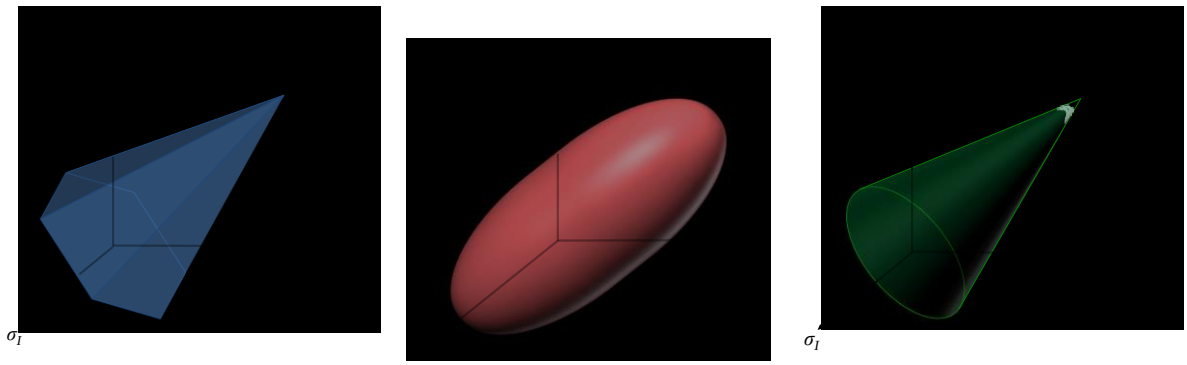
Le modèle de Drucker-Prager est une extension du critère de von-Mises par la combinaison linéaire du premier invariant I_1 (ou contrainte hydrostatique) et du second invariant du tenseur des contraintes J_2. Sa formulation linéaire est donnée par l'expression *(1.4)*.

$$f(\bar{\sigma}) = J_2(\bar{\sigma}) - \beta R_0 + (\beta - 1) I_1(\bar{\sigma}) \qquad (1.4)$$

β est un facteur dépendant du matériau et renvoie à un critère de von-Mises lorsque $\beta=1$. La contrainte hydrostatique (I_1) n'est autre que la trace du tenseur des contraintes ($Tr(\bar{\bar{\sigma}})$) et J_2 est défini par l'expression *(1.5)*. Où σ_I, σ_{II} et σ_{III} sont les contraintes principales associées au déviateur s_{ij} et σ_{eq}, la contrainte équivalente de von-Mises.

$$J_2 = \left(\left(\frac{1}{2}\right)\left((\sigma_I - \sigma_{II})^2 + (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2\right)\right)^{1/2}$$
$$J_2 = \left(\left(\frac{3}{2}\right) s_{ij} s_{ji}\right)^{1/2} = |\sigma_{eq}| \qquad (1.5)$$

De même que le critère de Mohr-Coulomb, le critère de Drucker-Prager est utilisé pour les sols et les roches [*Salari & al.*, 2004], et plus généralement pour modéliser les matériaux dont le comportement est sensible à la pression hydrostatique, tel que certains alliages [*Lubliner & Auricchio*, 1996], les matériaux polymères [*Ghorbel*, 2008], les matériaux composites ciment verre [*Yu et al.*, 2007], les adhésifs [*Dean et al.*, 2004] et les matériaux composites à matrice polymère [*Yang et al.*, 2012], [*De Sousa Junior et al.*, 2017]. La représentation dans l'espace des contraintes principales (*figure 1-6*) amène un aperçu général des trois critères d'irréversibilité cités ci-dessus.



Modèle de Mohr-Coulomb *Modèle de Gurson* *Modèle de Drucker-Prager linéaire*

Figure 1-6 : Représentation des modèles de Mohr-Coulomb, Gurson et Drucker-Prager dans l'espace des contraintes principales

La surface de plasticité du modèle de Drucker-Prager est relativement proche de celle de Mohr-Coulomb. Cette dernière est cependant représentée par une pyramide à base hexagonale alors que celle de Drucker-Prager est un cône. D'un point de vue numérique, la régularité du cône rend le modèle de Drucker-Prager plus adapté aux calculs par éléments finis [*Lemaitre et al.*, 2009]. En effet, les arrêtes de la surface du modèle de Mohr-Coulomb peuvent générer des instabilités numériques [*Vyas et al.*, 2011]. Le modèle de Gurson est le seul des trois modèles qui présente une surface fermée, lui permettant ainsi de prédire le comportement irréversible du matériau en compression. Bien qu'il soit pertinent de l'utiliser pour la modélisation de matériaux polymères, le modèle de Gurson est surtout considéré comme un modèle d'endommagement. De plus, l'utilisation d'un tel modèle suppose une campagne d'essais expérimentaux et d'observations riches (MEB ou tomographie aux rayons X) afin d'identifier ses 8 paramètres [*Hamon*, 2010]. L'identification de ces paramètres devant être couplée à la mise en œuvre de simulations numériques avancées [*Springmann & Kuna*, 2005].

Les travaux présentés dans ce manuscrit traitent de l'étude et la modélisation d'un matériau composite sans aborder directement son endommagement. De ce fait, le modèle de Drucker-Prager a été choisi pour modéliser la matrice et est présenté dans le paragraphe suivant. De plus, ce modèle semble mieux adapté à une utilisation industrielle du fait du type d'essai nécessitant son identification et du nombre de paramètres qu'il contient.

2.2.2. Présentation du modèle retenu

L'objectif d'un modèle de comportement est de relier la déformation imposée à un matériau continu à la contrainte qui lui est appliquée. La déformation totale $\bar{\varepsilon}$, constituée par la somme *(1.6)* des variables d'état tensorielles $\bar{\varepsilon}_{el}$ et $\bar{\varepsilon}_{ir}$, qui décrivent respectivement la déformation élastique et la déformation irréversible.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{el} + \bar{\varepsilon}_{ir} \qquad (1.6)$$

Le tenseur des déformations élastiques, est relié au tenseur des contraintes par la matrice de rigidité $[C_0]$ grâce à la loi de Hooke *(1.7)* (en notation matricielle et *(1.8)* en notation tensorielle, pour rappel).

$$\{\sigma\} = [C_0]\{\varepsilon_{el}\} \qquad (1.7)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}}_0 : \bar{\varepsilon}_{el} \qquad (1.8)$$

La formulation du critère de Drucker-Prager retenue pour la modélisation du comportement irréversible de la matrice PEI est celle développée dans les travaux de Joannès [*Joannès*, 2007]. Sa fonction de charge *f* est donnée par l'expression *(1.9)*.

$$f(\bar{\sigma}) = {J_2}^{a}(\bar{\sigma}) - \beta {R_0}^{a} + (\beta - 1) I_1(\bar{\sigma}) {R_0}^{a-1} \qquad (1.9)$$

La fonction *f* est une généralisation du critère proposé par Drucker et Prager [*Drucker & Prager*, 1952]. Elle a l'avantage de pouvoir prendre la forme d'un critère de von-Mises (pour $a = 1$ et $\beta = 1$), d'un Drucker-Prager linéaire (pour $a = 1$ et $\beta > 1$) ou d'une forme de degrés *a*. L'intérêt de cette formulation réside dans sa capacité à pouvoir augmenter la sensibilité du comportement du matériau à la pression hydrostatique, ce qui lui permet de s'adapter à un large panel de comportement matériau. A l'aide de l'expression de la fonction de charge *(1.9)* et de la valeur du seuil d'irréversibilité R_0, identifié au paragraphe 2.1.2, la forme du critère peut être soit représentée dans le plan des invariants ($I_1 = f(J_2)$), soit dans l'espace des contraintes principales. Dans le second cas, l'axe de l'invariant I_1 correspond à la trissectrice des axes des contraintes principales σ_I, σ_{II}, σ_{III}.

Afin de mettre en évidence les différences de comportement de ces critères, le critère de von-Mises (VM) (ne prenant pas en compte la pression hydrostatique), un critère de Drucker-Prager linéaire (DPL) et généralisé sous la forme quadratique (DPG2) sont tracés sur la *figure 1-7* à partir de la formulation généralisée pour les couples de paramètres respectifs : ($a = 1$; $\beta = 1$), (a = 1 ; $\beta = 2$) et ($a = 2$; $\beta = 2$).

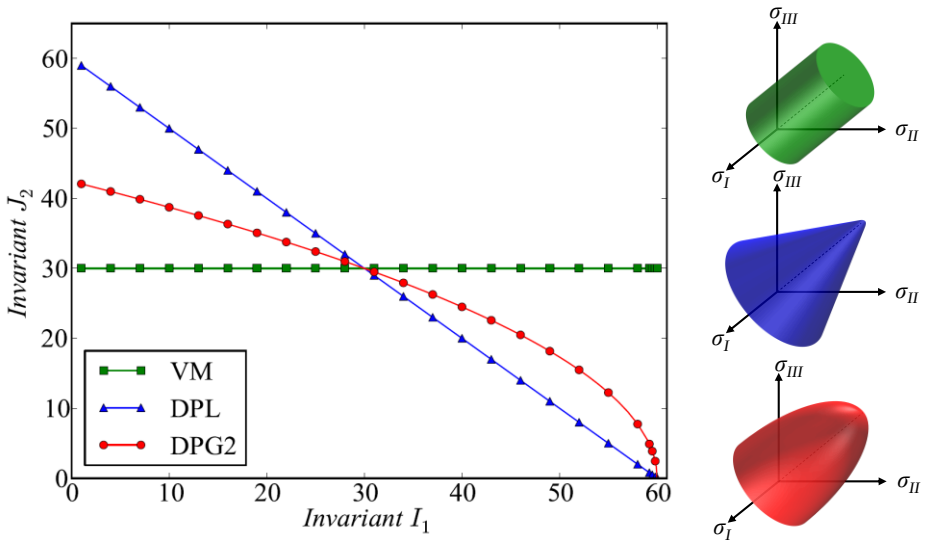


Figure 1-7 : Représentation des critères de von-Mises (VM), Drucker-Prager linéaire (DPL) et Drucker Prager généralisé (forme quadratique DPG2) dans le repère des invariants et dans l'espace des contraintes principales

Les *figure 1-8* et *figure 1-9* montrent respectivement l'influence des paramètres *a* et β grâce à la représentation du critère dans le repère des invariants. En fixant les valeurs de I_1, J_2 est établie suivant *(1.10)*.

$$J_2 = \left(\beta R_0 - (\beta - 1) I_1 {R_0}^{a-1}\right)^{\frac{1}{a}} \qquad (1.10)$$

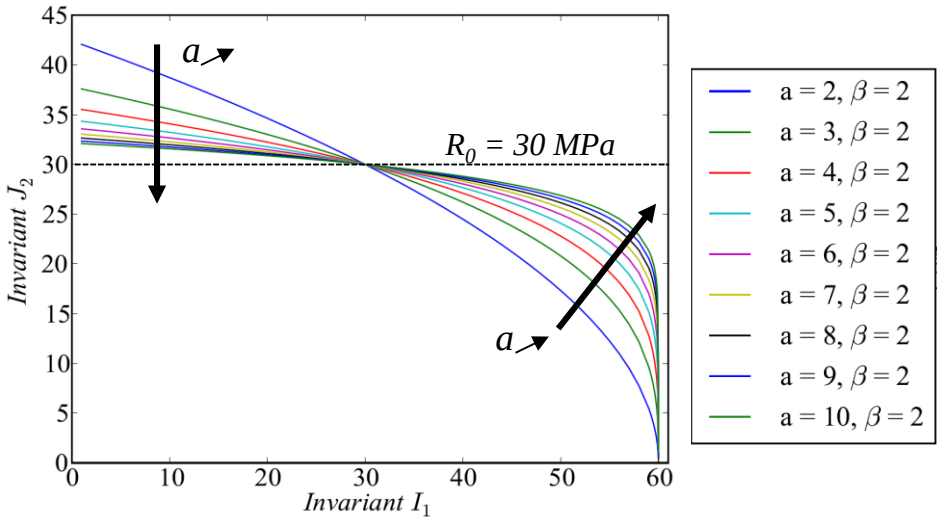


Figure 1-8 : Représentation du critère de Drucker-Prager généralisé dans le repère des invariants I_1 et J_2 suivant différentes valeurs de a

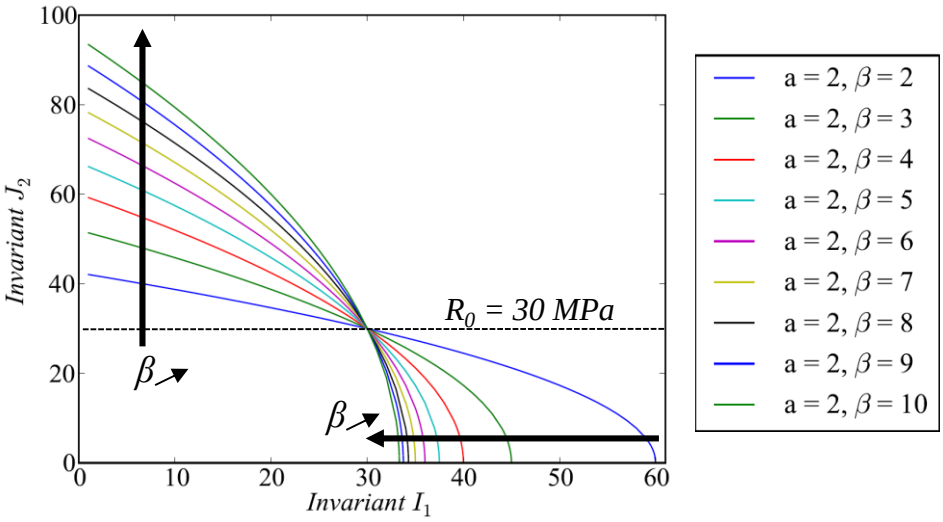


Figure 1-9 : Représentation du critère de Drucker-Prager généralisé dans le repère des invariants I_1 et J_2 suivant différentes valeurs de β

L'augmentation du paramètre *a* fait diminuer le seuil d'irréversibilité du comportement. Celui-ci tend alors vers une valeur minimale et équivalente à celle d'un critère de von-Mises, elle-même égale au seuil mesurable expérimentalement (R_0). La pression hydrostatique étant constante, l'accroissement de *a* tend à rendre l'ensemble du comportement sensible à une valeur unique de I_1, quelle que soit la valeur de la contrainte équivalente. L'augmentation du paramètre *β* fait augmenter le seuil d'irréversibilité du comportement sans limite apparente. Cependant, la valeur de la pression hydrostatique n'est plus constante et diminue pour tendre vers le seuil d'irréversibilité (R_0). Les seuils et valeurs limites représentés sur les *figure 1-8* et *figure 1-9* sont indépendants des autres paramètres du modèle de comportement du matériau modélisé (domaine réversible linéaire et constantes d'écoulement irréversible).

Lorsque R_0 est atteint, le comportement irréversible peut être modélisé à l'aide d'un écoulement plastique isotrope [*Taylor & Quinney*, 1931], et/ou d'un écoulement plastique cinématique [*Prager*, 1955]. Une représentation de la forme de la fonction de charge pour ces deux écoulements est proposée sur la *figure 1-10*.

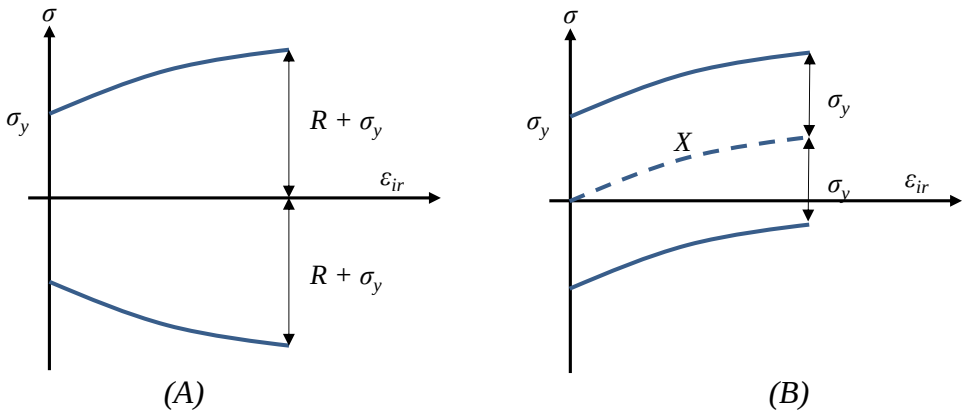


Figure 1-10 : Représentation de la forme de la fonction de charge pour un écoulement irréversible isotrope (A) et cinématique (B) [Besson et al., 2001]

L'écoulement isotrope décrit l'expansion du domaine de réversibilité tout en conservant une symétrie centrée sur l'origine. La dimension du domaine d'élasticité, intervient dans *f* en tant que variable d'écoulement irréversible scalaire. Son évolution s'exprime en fonction de la déformation irréversible cumulée *p*. L'écoulement irréversible cinématique décrit quant à lui la position du domaine de réversibilité par la variable tensorielle *X*, fonction de l'état de la déformation irréversible. Son évolution est exprimée par α¸ la déformation généralisée.

Dans ces travaux de thèse, l'identification des paramètres de la loi de comportement de la matrice étant faite sur des essais à chargements monotones croissants, seul l'écoulement irréversible isotrope est activé dans le modèle. La fonction de charge du comportement s'écrit alors *(1.11)*.

$$f(\bar{\sigma}, R) = f(\bar{\sigma}) - R(p) \qquad (1.11)$$

Où *R(p)* est la loi d'écoulement, fonction de R_0 et de *p*, exprimé par la relation *(1.12)*, dans laquelle *H*, *Q* et *b* sont les paramètres de l'écoulement irréversible isotrope. Ces paramètres définissent donc la forme de la surface de charge lorsque que le seuil d'irréversibilité a été atteint.

$$R(p) = R_0 + H\,p + Q\,[1 - e^{-bp}] \qquad (1.12)$$

Enfin, le comportement viscoplastique du polymère est modélisé grâce à la généralisation du modèle de Norton [*Norton*, 1929], avec les coefficients matériau *N* et *K* et $\bar{n}$ est la direction de l'écoulement. La vitesse de déformation irréversible est alors exprimée par la relation *(1.13)*.

$$\dot{\bar{\varepsilon}}_{ir} = \left(\frac{f}{K}\right)^N \bar{n} \qquad (1.13)$$

Les travaux de Johnson [*Johnson & Scott*, 1981] évoquent la difficulté de simuler le comportement de matériaux parfaitement plastiques dans une modélisation par éléments finis,

du fait de la discontinuité des déplacement dans ce type de matériau. Or, la dépendance du comportement matriciel à la vitesse de sollicitation n'est pas investiguée dans ces travaux. Par conséquent, elle n'est activée qu'afin de contourner la difficulté de calcul par éléments finis.

2.2.3. Intégration explicite du modèle de comportement

Un incrément, formulé en déplacement, est homogène à une déformation ε. A chaque variation de cette déformation, notée $\Delta\varepsilon$, correspond la variable associée en contrainte σ et son incrément en contrainte $\Delta\sigma$. Les méthodes d'intégration permettent de résoudre les équations différentielles qui relient ε à σ et évaluent l'évolution des variables internes du modèle entre chaque incrément. Il existe deux types de méthode d'intégration : explicite ou implicite. Les premiers calculs menés à l'aide d'une intégration explicite de type Runge-Kutta [*Press et al.*, 2007] ont montré des difficultés de convergence de la solution dans le domaine non linéaire. La méthode implicite de type point milieu généralisé, dite *θ-méthode* [*Besson et al.*, 2001] a été implémentée avec le support de l'équipe Simulation des Matériaux et des Structures (S.I.M.S) du Centre des Matériaux. L'implémentation est réalisée sous Z-front, le préprocesseur du code de calcul Z-set [*Transvalor SA*, 2015] co-développé par l'Onera et le Centre des Matériaux de L'Ecole des Mines de Paris et spécialisé dans la simulation du comportement non-linéaire des matériaux.

Afin de résoudre les équations différentielles du comportement à chaque incrément, une méthode explicite utilise la solution de l'incrément courant pour déterminer celle du suivant. Bien que ce type d'intégration soit généralement précise et stable, elle devient imprécise lorsque l'incrément de temps global est trop important [*Besson et al.*, 2001]. Un schéma d'intégration implicite utilise la solution de l'incrément précédent afin de déterminer la solution de l'incrément courant. La *θ-méthode* permet le passage continu d'une intégration explicite à une intégration implicite [*Bonnet*, 2005]. Elle nécessite cependant le traitement d'un système d'équations non-linéaires, résolu à l'aide d'une méthode de Newton. Une telle méthode fait appel au calcul de la matrice Jacobienne, définie comme la matrice des dérivées partielles de la loi de comportement.

Dans le cadre de la loi de comportement utilisée, la matrice Jacobienne est donnée par l'expression *(2.15)*, dans laquelle les termes $\bar{R}^e$, $\bar{\bar{R}}^{irr}$ et $\bar{R}^\alpha$ sont respectivement les résidus élastique, irréversible et de la déformation généralisée.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \\ \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{irr}}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{\bar{R}}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \\ \frac{\partial \bar{R}^\alpha}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{R}^\alpha}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{R}^\alpha}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \end{bmatrix} \qquad (1.14)$$

Un rappel des variables d'état internes et des variables d'état duales du modèle est placé dans *l'annexe A* du manuscrit. Dans cette même annexe, le lecteur pourra trouver le calcul des dérivées partielles qui constituent les termes de la matrice Jacobienne.

2.3. Identification de la loi de comportement de la matrice PEI

Le modèle de comportement élasto-viscoplastique avec un critère de Drucker-Prager généralisé est choisi pour la modélisation du comportement du PEI. Après vérification de l'implémentation du critère (également dans *l'annexe A*), les différents essais mécaniques réalisés sur la matrice sont simulés avec la méthode des éléments finis sous Z-set. Une méthode d'identification itérative est utilisée et a pour objectif d'identifier les paramètres de la loi de comportement permettant de reproduire le comportement expérimental de la matrice.

2.3.1. Procédure d'identification itérative

Les essais mécaniques de traction à faible et fort taux de triaxialité menés sur la matrice PEI sont utilisés afin de déterminer les paramètres a et β du modèle et ceux de l'écoulement irréversible isotrope Q et b (le seuil du comportement irréversible R_0 étant déjà identifié au paragraphe 2.1.2). La démarche d'identification des paramètres de la loi de comportement est schématisée par la *figure 1-11* et se décompose en huit étapes :

1. Calcul de la matrice de rigidité $[C_0]$ du polymère à partir des essais à faible taux de triaxialité. Le PEI étant considéré comme isotrope, sa matrice de rigidité $[C_0]$ est calculée en inversant sa matrice de souplesse. Sa matrice de souplesse est calculée à partir des constantes élastiques E et v identifiées dans le paragraphe 2.1.2 et à l'aide des expression classiques pour les matériaux isotropes [*Berthelot*, 2005]. L'expression numérique de $[C_0]$ est donnée dans *l'annexe A*.
2. Constitution d'un jeu de paramètres arbitraires pour le modèle : a, β, Q et b. Utilisation du seuil du comportement irréversible R_0.
3. Simulation de l'essai à faible taux de triaxialité en traction. Calcul sur un élément de maillage, homogène équivalent à une sollicitation en traction conventionnelle.
4. Simulation des essais à fort taux de triaxialité en traction. Calcul sur deux maillages géométriquement semblables aux éprouvettes de traction à fort taux de triaxialité. Les maillages des éprouvettes de traction entaillée (R_4 et R_8) sont réalisés sous Zset et sont optimisés pour le calcul non-linéaire : les plans de symétrie des éprouvettes permettent de modéliser seulement un huitième de leur géométrie avec un raffinement des éléments autour des zones d'entailles. L'éprouvette R_4 contient 4192 éléments quadratiques (pour 59283 degrés de liberté) et R_8 en contient 6000 (pour 82743 degrés de liberté). Le volume des éléments varie entre $6{,}8.10^{-3}$ mm^3 et $1{,}5.10^{-3}$ mm^3.
5. Comparaison des résultats numériques et expérimentaux : courbes contrainte-déformation pour les essais à faible taux de triaxialité, charge-déplacement macroscopique et charge-ouverture d'entaille pour les essais à fort taux de triaxialité.
6. Si les courbes numériques sont similaires aux courbes expérimentales, les champs de déformation locaux expérimentaux sont comparés aux champs de déformation issus de la simulation par éléments finis.
7. Si les champs de déformation surfaciques locaux expérimentaux correspondent aux champs de déformation issus de la simulation numérique, la loi de comportement de la matrice est identifiée. Les paramètres issus de cette simulation sont retenus.
8. Si les courbes ou les champs de déformation locaux expérimentaux ne sont pas similaires à la simulation numérique, les paramètres de la loi sont modifiés et les étapes 3, 4, 5 et 6 sont réitérées. Un algorithme d'optimisation développé par Levenberg [*Levenberg*, 1944] et publié par Marquardt [*Marquardt*, 1963] est utilisé afin d'automatiser ces modifications et de relancer les calculs jusqu'à minimiser l'écart entre la solution numérique et expérimentale.

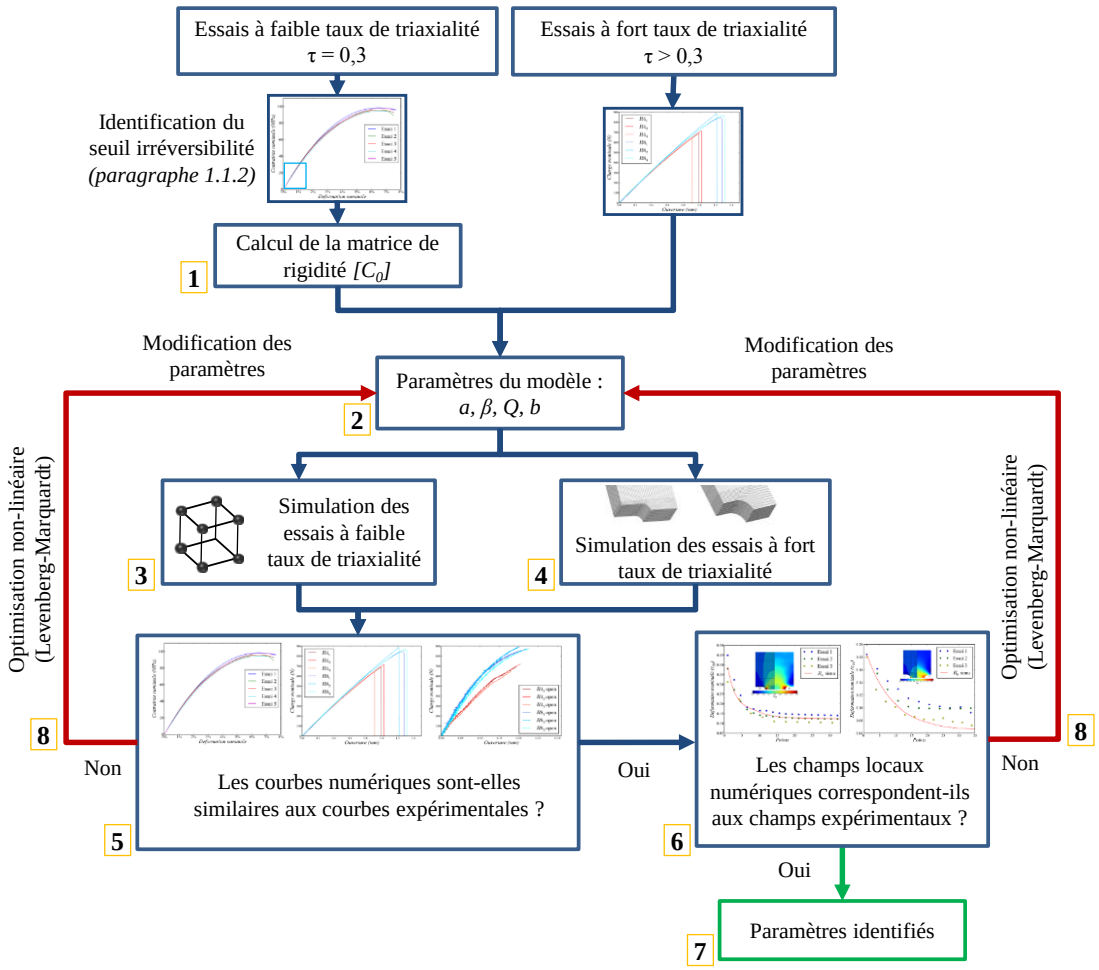


Figure 1-11 : Procédure récursive d'identification des paramètres du modèle par recouvrement des courbes expérimentales et numériques

2.3.2. Identification des paramètres pour trois formulations du critère

La principale difficulté de l'identification des paramètres du modèle réside dans le compromis à trouver pour concorder avec l'ensemble des données expérimentales disponibles. Les calculs sur le VER ne prennent que quelques secondes, mais ceux menés sur les maillages R_4 et R_8 prennent environ une heure (45 minutes avec la *θ-méthode*) avec une station de calcul contenant 4 cœurs Intel Xeon CPU E5-1607 v2 à 2,67 GHz et 24 Go de mémoire vive. Pour l'ensemble des comparaisons entre la simulation numérique et les essais expérimentaux présentées, le critère d'arrêt des courbes numérique observé est basé sur la valeur moyenne du déplacement expérimental à la charge maximale (ou la déformation expérimentale à la contrainte maximale pour les courbes macroscopiques).

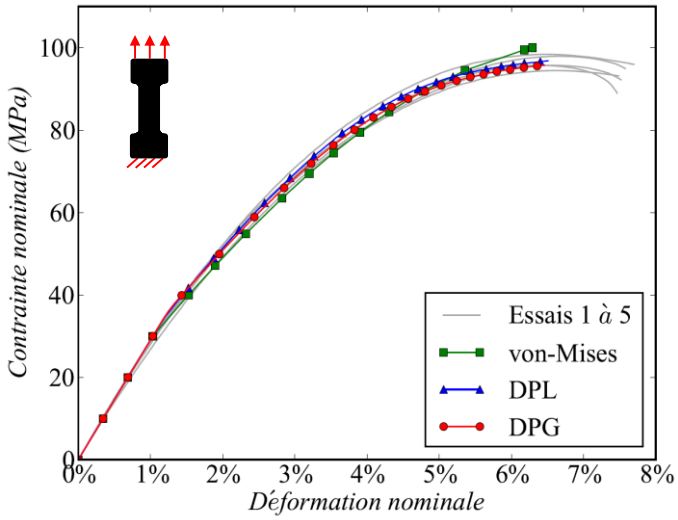
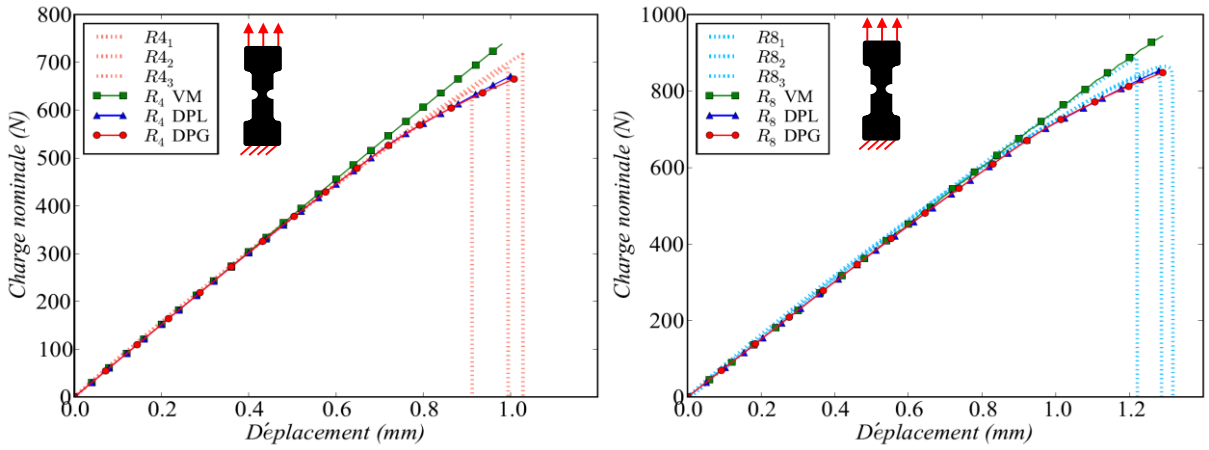


Figure 1-12 : Courbes de contrainte-déformation issues de la simulation numérique du comportement de la matrice comparée aux essais expérimentaux à faible taux de triaxialité.

Sur la *figure 1-12*, le comportement macroscopique du PEI en traction est correctement reproduit pour trois couples a et β du modèle, qui correspondent respectivement au critère de von-Mises ($a = 1$ et $\beta = 1$), Drucker-Prager linéaire ($a = 1$ et $\beta = 6$) et Drucker-Prager généralisé ($a = 2$ et $\beta = 4$). La valeur des pentes est identique dans les trois cas et correspond à celle identifiée expérimentalement au paragraphe *2.1.2*, soit 2910 MPa. Le niveau de contrainte maximal moyen des courbes expérimentales est de 96,46 MPa, pour une déformation moyenne expérimentale de 6,53%. A ce niveau de déformation, les écarts relatifs en contrainte sont respectivement de 3,71%, 0,43% et 1,20% pour les formulations de von-Mises, Drucker-Prager linéaire et Drucker-Prager généralisé. La prise en compte de la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique ne semble pas pertinente pour des essais à faible taux de triaxialité : l'influence de la pression hydrostatique sur ces essais est négligeable.

La *figure 1-13* présente la simulation numérique des courbes de charge-déplacement macroscopiques des essais à fort taux de triaxialité sur les éprouvettes R_4 et R_8, pour les trois jeux de paramètres identifiés. Le *tableau 1-1* montre les différences numériques quantifiées entre les essais et la simulation numérique.



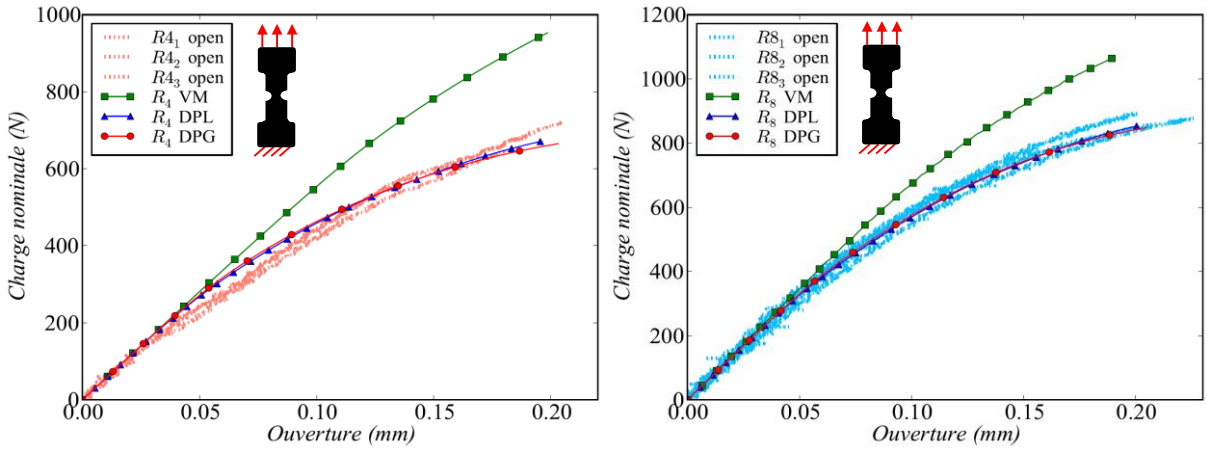
(A) *(B)*

Figure 1-13 : Comparaison des courbes de comportement macroscopique expérimentales des modèles de von-Mises (VM), Drucker-Prager linéaire (DPL) et généralisé (DPG) sur les éprouvettes R_4 (A) et R_8 (B)

	Courbe	Pente (MPa)	Ecart relatif	F_{max} (N)	Ecart relatif	Déplacement à F_{max} (mm)	Ecart relatif
R_4	Expérimental moyen	778,67		683,31		0,98	
	VM	759,51	2,46 %	635,82	6,95 %	0,84	14,08 %
	DPL	758,74	2,56 %	670,83	1,83 %	1,00	2,29 %
	DPG	745,99	4,20 %	665,08	2,67 %	1,01	3,11 %
R_8	Expérimental moyen	787,80		866,04		1,26	
	VM	754,01	4,29 %	944,00	9,00 %	1,29	2,46 %
	DPL	754,86	4,18 %	853,05	1,50 %	1,28	1,66 %
	DPG	754,92	4,17 %	848,19	2,06 %	1,29	2,46 %

Tableau 1-1 : Comparaison des données expérimentales et numériques de charge-déplacement des essais de traction à fort taux de triaxialité sur les éprouvettes R_4 et R_8

La simulation numérique des essais à fort taux de triaxialité avec les trois formulations du critère donne des résultats proches des données expérimentales pour les deux types d'éprouvettes. Néanmoins, la formulation en von-Mises est moins proche dans le cas de l'éprouvette *R_4*, mais reste dans la dispersion expérimentale pour l'éprouvette *R_8*. Les deux formulations en Drucker-Prager n'ont que peu de différence. L'étude de ces données macroscopique ne montre pas de différence fondamentale entre les trois formulations. En étudiant les courbes de charge-ouverture d'entailles de ces mêmes essais, tracées sur la *figure 1-14* et dont les données numériques sont présentées dans le *tableau 1-2*, l'intérêt des formulations en Drucker-Prager se justifient vis-à-vis de von-Mises.



(A) *(B)*

Figure 1-14 : Comparaison des courbes d'ouverture d'entaille expérimentales et des modèles de von-Mises (VM), Drucker-Prager linéaire (DPL) et généralisé (DPG) sur les éprouvettes R_4 (A) et R_8 (B)

	Courbe	F_{max} (N)	Ecart relatif	Ouverture à F_{max} (mm)	Ecart relatif
R_4	Expérimental moyen	686,36		0,193	
	VM	952,76	45,16 %	0,198	2,95 %
	DPL	670,83	2,20 %	0,195	1,37 %
	DPG	665,08	1,33 %	0,203	5,32 %
R_8	Expérimental moyen	879,97		0,217	
	VM	1064,00	12,64 %	0,189	20,91 %
	DPL	853,05	7,54 %	0,200	3,06 %
	DPG	848,19	5,43 %	0,205	3,61 %

Tableau 1-2 : Comparaison des données expérimentales et numériques de charge-ouverture d'entaille des essais de traction à fort taux de triaxialité sur les éprouvettes R_4 et R_8

La formulation en von-Mises montre d'importants écarts en charge lorsque l'ouverture d'entaille moyenne expérimentale est atteinte. L'ouverture d'entaille traduit donc la sensibilité du modèle à la pression hydrostatique qu'un critère de von-Mises ne prend pas en compte. Cette formulation est écartée dans le reste de la démarche d'identification du comportement de la matrice PEI.

Pour les formulations DPL et DPG, l'ouverture plus rapide de l'entaille dans le cas de l'éprouvette R_8 est reproduite. Bien que la formulation DPG semble globalement prédire le comportement expérimental avec plus de précision, le choix avec la formulation DPL reste discutable à ce stade de la démarche. La corrélation d'image numérique utilisée pour instrumenter les essais à fort taux de triaxialité donne accès aux déplacements surfaciques locaux de la matrice lors de la sollicitation. Grâce à ces mesures, la déformation locale sur les éprouvettes est calculée et peut être comparée aux résultats de la simulation par éléments finis pour les éprouvettes R_4 et R_8.

Pour différencier les deux types de formulation du critère de Drucker-Prager, les simulations sont post-traitées à l'échelle locale. Pour cela, les champs de déformation dans le sens de la sollicitation en traction, ε_{22} numériques (DPG et DPL) et expérimentaux sont comparés. Pour l'éprouvette R_4, la *figure 1-15* montre la comparaison qualitative des champs et la *figure 1-16* montre la comparaison quantitative des champs, où les valeurs de ε_{22} sont relevées dans le ligament. Pour l'éprouvette R_8 ces comparaisons sont respectivement présentées par la *figure 1-17* et la *figure 1-18*. Les champs de déformation étant très proches sur les trois essais de chaque éprouvette, un seul est présenté dans ces figures.

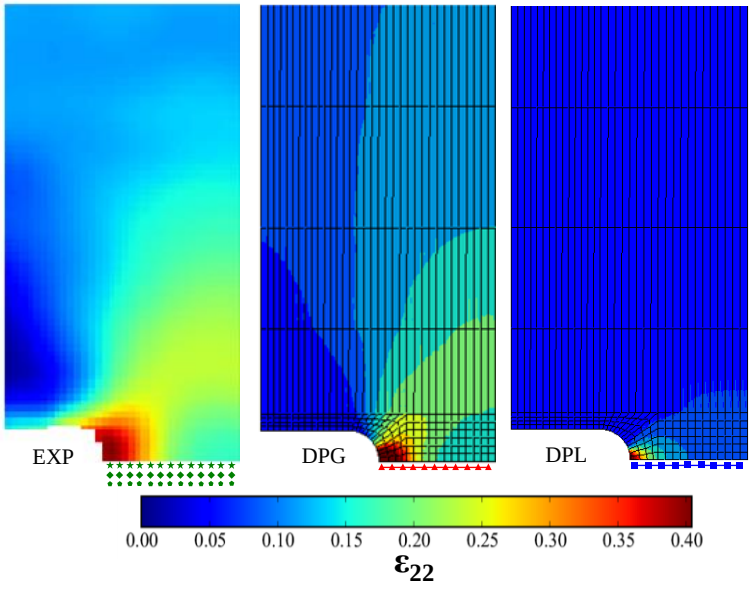


Figure 1-15 : Comparaison qualitative du champ de déformation ε_{22} des modèles DPG, DPL par rapport au champ de déformation expérimental de l'éprouvette R_4

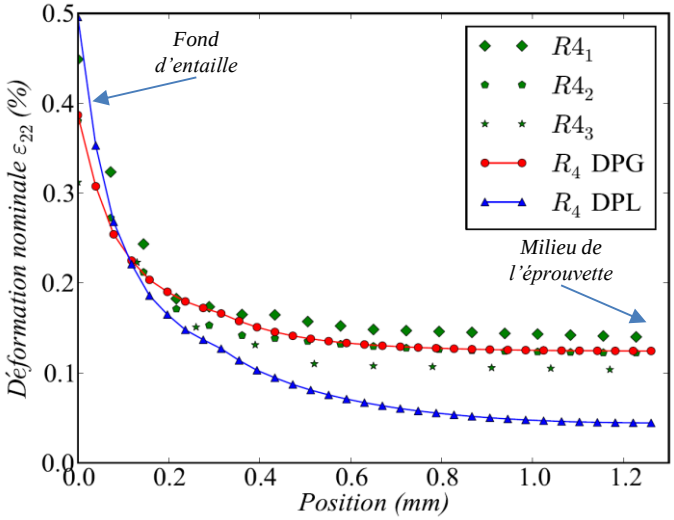


Figure 1-16 : Comparaison quantitative du champ de déformation ε_{22} des modèles DPG, DPL par rapport au champ de déformation expérimental de l'éprouvette R_4

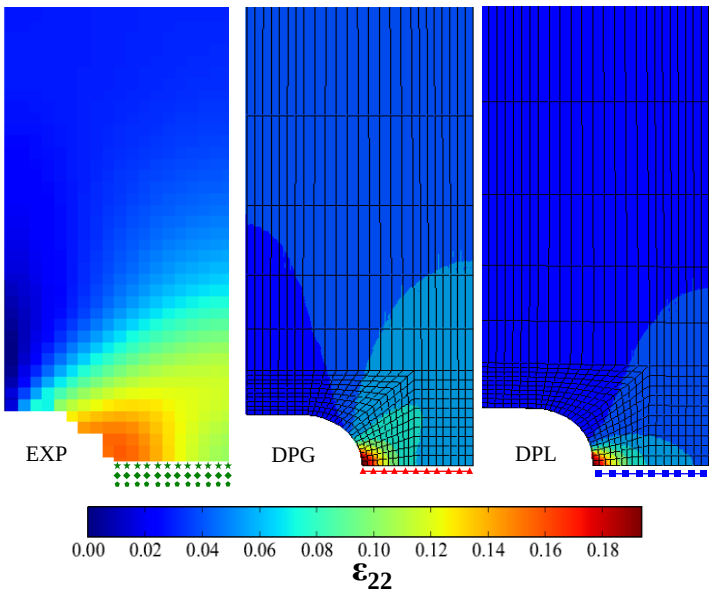


Figure 1-17 : Comparaison qualitative du champ de déformation ε_{22} des modèles DPG, DPL par rapport au champ de déformation expérimental de l'éprouvette R_8

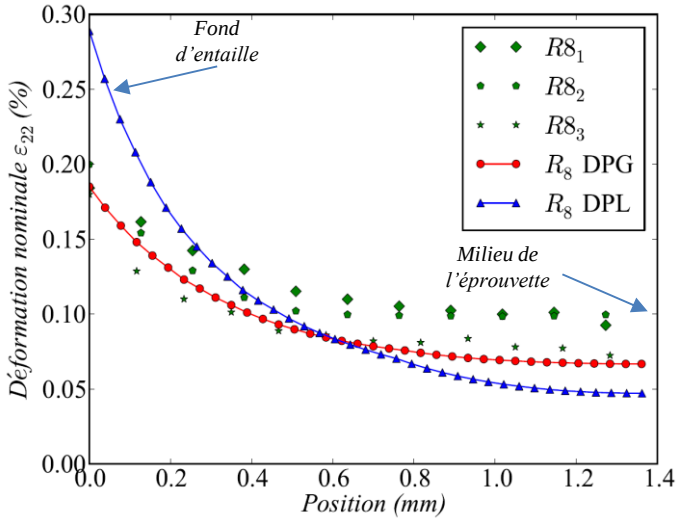


Figure 1-18 : Comparaison quantitative du champ de déformation ε_{22} des modèles DPG, DPL par rapport au champ de déformation expérimental de l'éprouvette R_8

L'essai R_4 génère un niveau de déformation local important, dû à la taille réduite du rayon de fond d'entaille. Dans ce cas, l'amplitude de déformation du modèle DPG est très proche de celle mesurée (0,26 % contre 0,25 % en moyenne sur les trois essais), alors que le modèle DPL présente une amplitude plus élevée (0,45 %). En effet, la déformation en fond d'entaille est surestimée, plus concentrée en bord d'entaille et atténuée plus rapidement avec ce modèle. Le modèle DPG présente également un champ hétérogène mais plus réparti sur l'éprouvette. Pour cette formulation, les valeurs de la déformation en fond d'entaille et au milieu de l'éprouvette sont proches des valeurs expérimentales (respectivement 0,39 % et 0,26 %, pour 0,38 % et 0,12 % en moyenne sur les trois essais). Les valeurs de la formulation DPL sont très éloignées de ces valeurs (respectivement 0,46 % et 0,05 %).

L'essai R_8 génère un niveau de déformation locale moins important que dans le cas R_4. Pour cet essai, l'amplitude de déformation de la formulation généralisée est plus proche de la moyenne expérimentale que la formulation linéaire, qui surrestime la déformation (DPG : 0,12 %, DPL : 0,24 % pour une moyenne expérimentale de 0,10 %). Avec le modèle linéaire, la déformation locale en fond d'entaille est également surestimée, alors que le modèle généralisé est très proche de la valeur expérimentale (DPG : 0,19 %, DPL : 0,29 % pour une moyenne expérimentale de 0,19 %). Le modèle DPL montre également un champ de déformation plus concentré en bord d'entaille. Au milieu de l'éprouvette la déformation expérimentale moyenne est également mieux reproduite par le modèle DPG : le modèle linéaire sousestime cette valeur (DPG : 0,07 %, DPL : 0,05 % pour une moyenne expérimentale de 0,09 %). Le modèle généralisé témoigne donc d'un champ de déformation local plus étendu pour cet essai et proche de la simulation au centre de l'éprouvette. Au regard des résultats de cette démarche, la formulation de Drucker-Prager généralisée est retenue pour modéliser le comportement de la matrice PEI.

2.3.3. Récapitulatif de la loi de comportement identifiée

La simulation numérique de l'essai de traction sur les deux types d'éprouvettes permet finalement d'observer la complexité du champ de pression hydrostatique généré en surface par la présence des entailles *figure 1-19*.

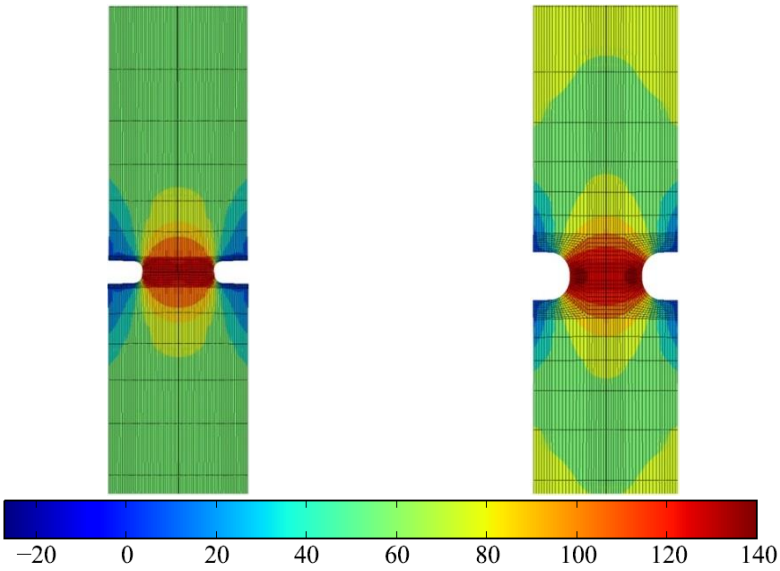


Figure 1-19 : Niveau de pression hydrostatique local en surface dans les éprouvettes de sollicitation complexe en traction uniaxiale sur les éprouvettes entaillées R_4 (A) et R_8 (B)

La pression hydrostatique locale de l'éprouvette R_4 atteint un niveau maximal moins élevé que l'éprouvette R_8 (respectivement 118 MPa et 136 MPa). Le champ sur R_4 est néanmoins plus homogène et concentré au cœur de l'éprouvette. La pression hydrostatique sur R_4 atteint une valeur minimale négative plus importante que R_8 (respectivement -27 MPa et -20 MPa). Elle est également répartie sur une zone plus importante autour de l'entaille. Pour ces deux géométries, la triaxialité initiale au cœur de l'éprouvette est respectivement de 0,47 pour *R8* et 0,58 pour *R4*. Ces valeurs, déterminées à l'aide du calcul par éléments finis, prouvent que les deux géométries testées permettent une sollicitation complexe de la matrice PEI.

A ce stade de l'étude, les comportements réversible linéaire et irréversible de la matrice sont identifiés et sa sensibilité à la pression hydrostatique est prise en compte. La surface de réversibilité du modèle identifié est tracée dans l'espace des contraintes principales sur la *figure 1-20*. Le seuil du domaine réversible linéaire R_0 est de *30 MPa* et les paramètres optimisés de l'écoulement irréversible isotrope sont respectivement $Q=62\ MPa$ et $b=140\ MPa$.

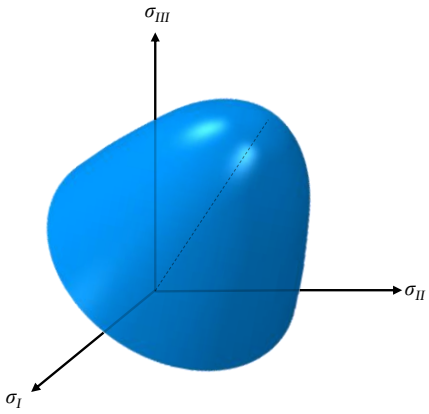


Figure 1-20 : Représentation du domaine de réversibilité de la loi de comportement identifiée de la matrice dans l'espace des contraintes principales pour a = 2 et β = 4

Le comportement du premier des deux constituants du matériau composite est identifié. La suite de la démarche consiste maintenant à identifier celui de l'autre constituant : les fibres courtes de carbone.

CHAPITRE 3 : DETERMINATION D'UN COMPORTEMENT DES FIBRES DE CARBONE

3. Détermination d'un comportement des fibres de carbone

Le type de fibres de carbone qui renforcent le composite de cette étude n'est pas connu. Une évaluation de leur comportement doit cependant être effectuée afin de pouvoir modéliser une pièce de structure réalisée avec ce composite. De plus, aucun échantillon de ces fibres n'est disponible afin de conduire des essais mécaniques permettant la mesure de leur comportement. Par conséquent, une méthode d'identification numérique inverse par champs moyens est choisie afin d'en donner une estimation.

Dans ces travaux, le comportement des fibres de carbone est considéré comme étant isotrope transverse et élastique linéaire. A partir de cette hypothèse de modélisation, une estimation du comportement des fibres est faite par méthode inverse, ou « reverse engineering » [*Despringre*, 2015]. Pour cela, une campagne d'essais mécaniques est réalisée sur des éprouvettes du matériau composite étudié. Ces essais sont ensuite simulés avec Digimat-MF [*E-Xstream*, 2014] pour vérifier l'identification des paramètres matériau. Une opération d'homogénéisation inverse permet de remonter aux paramètres du modèle de comportement retenu pour les fibres, à partir du comportement de la matrice identifié au chapitre précédent. Cette identification est réalisée de manière itérative, en modifiant les paramètres de la loi de comportement des fibres jusqu'à convergence des comportements linéaires expérimentaux et numériques du composite.

La première étape de la démarche consiste à identifier la matrice de rigidité du composite à l'aide d'essais de traction et de flexion dans le sens d'injection des fibres et dans la direction transverse. La seconde étape est la constitution d'une base de données du comportement des fibres à l'aide de la bibliographie, permettant d'en encadrer les valeurs. Des hypothèses de modélisation, propres à l'homogénéisation numérique du comportement de matériaux composites renforcés de fibres courtes, sont ensuite prises afin de mener des simulations multiéchelles de ces essais. La dernière étape de la méthode consiste enfin à identifier, de manière itérative, un potentiel comportement des fibres permettant de reproduire celui du composite testé. La démarche est menée à l'aide des modules Digimat-MF et Digimat-MX de la suite logicielle Digimat [*E-Xstream*, 2014]. Les étapes qui constituent cette démarche sont récapitulées par la *figure 1-21*.

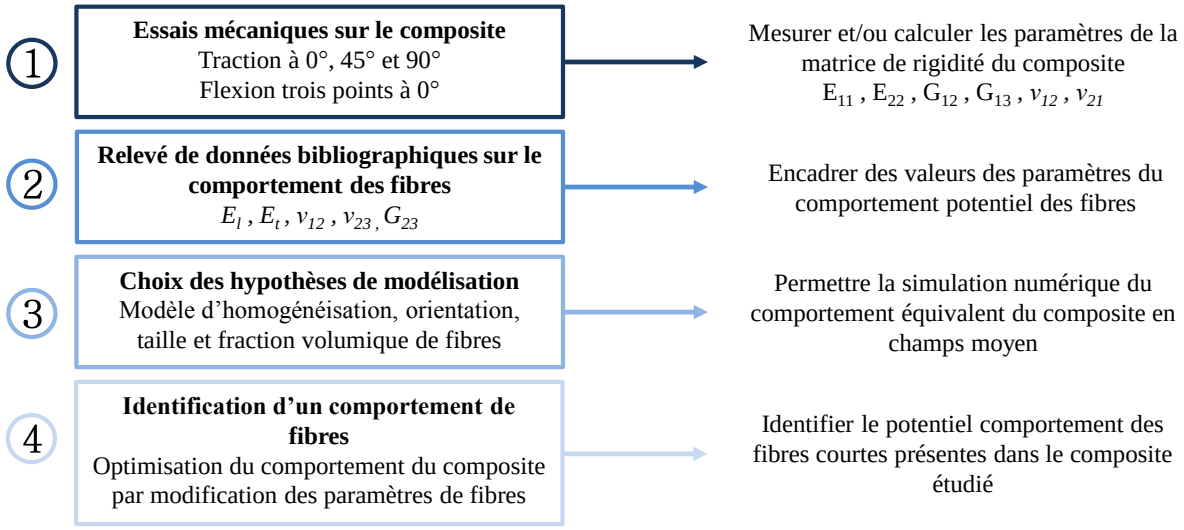


Figure 1-21 : Synthèse des étapes de la démarche d'identification d'un comportement de fibres par méthode inverse en champs moyens

3.1. Identification du comportement réversible linéaire du composite

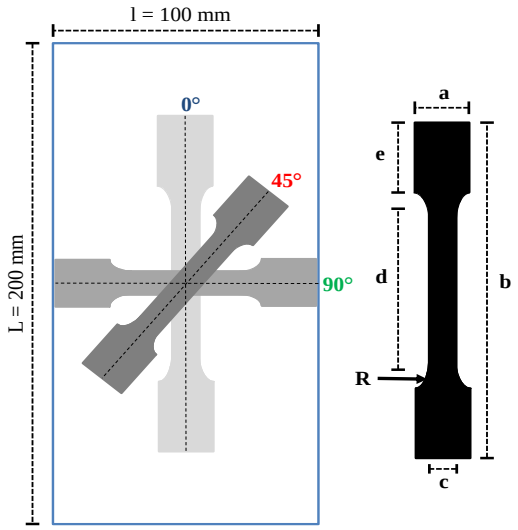
Afin d'utiliser la méthode inverse, la première donnée à obtenir est le comportement réversible linéaire du composite. Pour ce faire, des essais de traction et de flexion trois points sont réalisés pour trois orientations par rapport au sens d'injection des fibres. A partir de ces essais, la matrice de rigidité expérimentale du composite est identifiée. Elle sera ensuite comparée à celle issue de la simulation en champs moyens avec la loi de comportement homogénéisée à partir des lois de comportement de la matrice et des fibres. Le *tableau 1-3* donne les essais mécaniques permettant l'identification des paramètres de la matrice de rigidité du composite.

Paramètre	Essais
E_{11}	*Traction 0°*
E_{22}	*Traction 90°*
G_{12}	*Traction 0°, Traction 45°, Traction 90°*
G_{13}	*Flexion 0°*
ν_{12}	*Traction 0°*
ν_{21}	*Traction 90°*

Tableau 1-3 : Essais mécaniques menés pour l'identification expérimentale des paramètres de la matrice de rigidité du composite

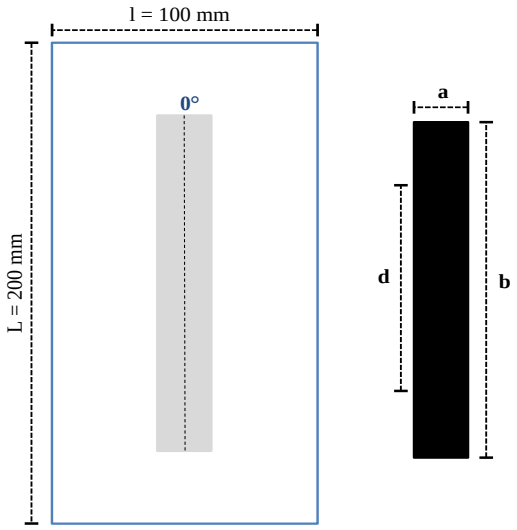
3.1.1. Essais mécaniques sur le composite

Les essais de traction sont réalisés à température ambiante et pilotés en déformation dans un régime d'asservissement machine quasi-statique ($10^{-4}\ s^{-1}$). Les éprouvettes sont prélevées au centre d'une plaque du matériau de l'étude, où l'orientation des fibres est supposée être la plus homogène [*Gruber & Wartzack*, 2013], donc indépendante de la géométrie de la plaque injectée. Pour chaque angle de 0°, 45° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres, cinq éprouvettes ont été prélevées. Différentes plaques ont été utilisées afin d'assurer la représentativité des résultats d'essais. Les dimensions utiles des plaques de matériau mesurant 10 x 5 cm, seules les éprouvettes à 0° respectent la norme ASTM D638 [*ASTM International*, 2008]. Les dimensions des éprouvettes à 45° et à 90° sont des homothéties de cette géométrie. La *figure 1-22* et la *figure 1-23* présentent les dimensions des trois types d'éprouvettes de traction et de flexion trois points ainsi que les zones de prélèvement dans les plaques du matériau.



Dimensions (mm)	0°	45°	90°
a	20	13,3	13,3
b	150	100	100
c	10	6,7	6,7
d	60	40	40
e	20	20	20
R	60°	60°	60°

Figure 1-22 : Dimensions des éprouvettes de traction à 0°, 45° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres et illustration de leur prélèvement dans les plaques de matériau



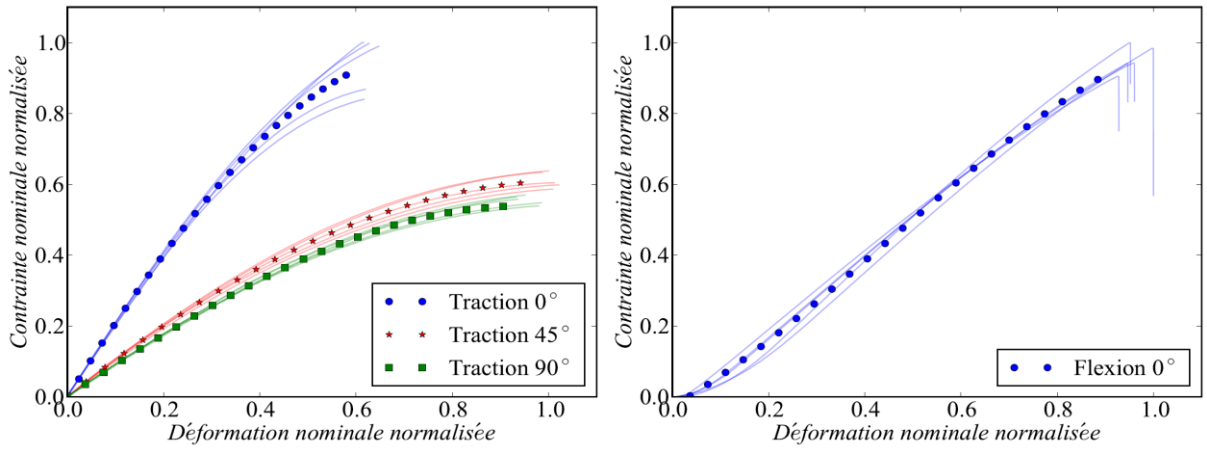
Dimensions (mm)	0°
a	25
b	140
d	64

Figure 1-23 : Dimensions des éprouvettes de flexion à 0° par rapport au sens d'injection des fibres et illustration de leur prélèvement dans les plaques de matériau

Les essais de flexion trois points sont réalisés dans les mêmes conditions expérimentales que les essais de traction. Ces essais suivent la norme EN ISO 14130 [*Afnor*, 1997]. Pour la configuration en flexion trois points, seules les éprouvettes à 0° par rapport au sens d'injection des fibres sont testées, afin de compléter l'identification des paramètres de la matrice de raideur du composite.

3.1.2. Identification de la matrice de rigidité du composite

Les essais mécaniques sont réalisés sur une machine électromécanique Instron 5982. L'instrumentation utilisée pour tracer les courbes de contrainte-déformation sont une cellule de charge de 100 kN. Pour les essais de traction, des jauges de déformation Kyowa (KFG-10-120-C1-11) sont utilisées. Seul un extensomètre vidéo a été utilisé pour les essais de flexion trois points. Les courbes d'essais de traction et de flexion trois points et leurs courbes moyennes sont présentées respectivement sur la *figure 1-24 (A)* et *(B)*. Les données numériques relatives au comportement du composite étant confidentielles, les courbes de la *figure 1-24* sont normalisées.



(A) *(B)*

Figure 1-24 : Courbes de contrainte-déformation normalisées, (A) : des essais de traction uniaxiale normée ASTM D638, (B) : des essais de flexion trois points normée EN ISO 14130

Les essais mécaniques menés sur le composite donnent accès à certaines constantes de son comportement réversible linéaire : les modules de réversibilité E_{11} et E_{22}, les coefficients de Poisson ν_{12}, ν_{21} et les modules de cisaillement G_{12}, et G_{13}. La limite de réversibilité du comportement en traction est identifiée pour des valeurs du coefficient de détermination R^2 au moins égales à 0,99.

Les essais de cisaillement plan (traction à 45°) permettent le calcul du module de cisaillement G_{12} grâce à la mesure du module E_{45}. Ce module correspond à la pente de la partie linéaire de la courbe de contrainte-déformation. Sa valeur moyenne pour les cinq essais est présentée dans le *tableau 1-4*. Le calcul de G_{12} est donné par l'expression *(1.15)*.

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{4}{E_{45}} - \frac{1}{E_{11}} - \frac{1}{E_{22}} + 2\frac{\nu_{12}}{E_{11}} \qquad (1.15)$$

Le module de flexion longitudinal E_F est calculé avec l'expression *(1.16)*, à l'aide des essais de flexion trois points menés dans le sens des fibres. L'identification des valeurs de F_E et f_E, qui sont respectivement la force et la flèche du domaine réversible linéaire du composite en flexion, est également faite pour des valeurs du coefficient de détermination R^2 au moins égales à 0,99 sur les courbes expérimentales.

$$E_F = \frac{F_E d^3}{10 a h^3 f_E} \qquad (1.16)$$

Avec :

- F_E : la charge maximale linéaire en flexion (N)
- *d : la distance entre appuis (mm)*
- *a : la largeur de l'éprouvette (mm)*
- *h : l'épaisseur de l'éprouvette (mm)*
- *f : la flèche correspondante à FE*

Grâce à l'expression de E_F, le module de cisaillement G_{13} peut être calculé à l'aide de l'expression le reliant à la flèche *(1.17)* et *(1.18)*. Ces expressions sont issues du cours de D. Rouby [*Rouby*, 2005].

$$f_E = \frac{F_E d^3}{4E_F a h^3}\left(1 - \frac{12E_F}{10G_{13}}\left(\frac{h}{d}\right)^2\right) \qquad (1.17)$$

$$\frac{1}{G_{13}} = \frac{10ah}{3F_E d}\left(f_E - \frac{F_E d^3}{4E_F a h^3}\right) \qquad (1.18)$$

L'ensemble des constantes normalisées de la matrice de rigidité du composite, mesurées et calculées grâce aux essais expérimentaux, sont récapitulées dans le *tableau 1-4*.

Paramètre	Valeur normalisée	Ecart-type	Méthode
E_{11} **(GPa)**	1,00	0,26	Essai
E_{22} **(GPa)**	0,59	0,13	Essai
G_{12} **(GPa)**	0,17	0,21	Calcul
G_{13} **(GPa)**	0,11	0,19	Calcul
ν_{12}	1,00	0,03	Essai
ν_{21}	0,43	0,02	Essai

Tableau 1-4 : Récapitulatif des constantes de réversibilité normalisées mesurées et calculées grâce aux essais de traction et de flexion sur le composite

3.2. Identification inverse d'un comportement des fibres de carbone

Les fibres de carbone qui constituent le CRFC étudié n'étant pas identifiées, des hypothèses quant à leur comportement, leur géométrie et leur répartition doivent être prises afin d'en identifier une loi de comportement par méthode inverse. Dans le même but, des hypothèses de modélisation en champs moyens doivent également être considérées.

Concernant les paramètres de leur loi de comportement, des données sur les fibres de carbone sont relevées dans la littérature. Ces données permettent un encadrement du potentiel comportement des fibres qui reste physiquement cohérent. Elles réduisent également le nombre de calculs nécessaires à la convergence des comportements numériques et expérimentaux du composite. Le procédé d'identification inverse d'un potentiel comportement des fibres de carbone est réalisé à l'aide de Digimat-MF [*E-Xstream*, 2014].

3.2.1. Hypothèses de modélisation des fibres de carbone

Des données bibliographiques sont utilisées afin de réduire l'amplitude des valeurs possibles des paramètres d'un comportement des fibres. Les données présentées dans le *tableau 1-5* sont soit issues de travaux de mesure, soit également issues de fiches matériau [*Cytec Thornel*, 2012], [*Toray California*, 2002] (les paramètres E_l et E_t sont respectivement les modules d'élasticité des fibres dans le sens longitudinal et transverse).

Source	E_l (GPa)	E_t (GPa)	ν_{12}^f	ν_{23}^f	G_{23}^f (GPa)
[*Ishikawa et al.*, 1977]	228	20,6	0,30	0,42	6,7
[*Daggumati et al.*, 2010]	231	24	0,26	0,39	10,7
[*Mounier et al.*, 2012]	230	16	0,31	*Non mesuré*	
[*Naito et al.*, 2009]	221	*Non mesuré*			

Tableau 1-5 : Données bibliographiques des paramètres de la matrice de raideur des fibres de carbone

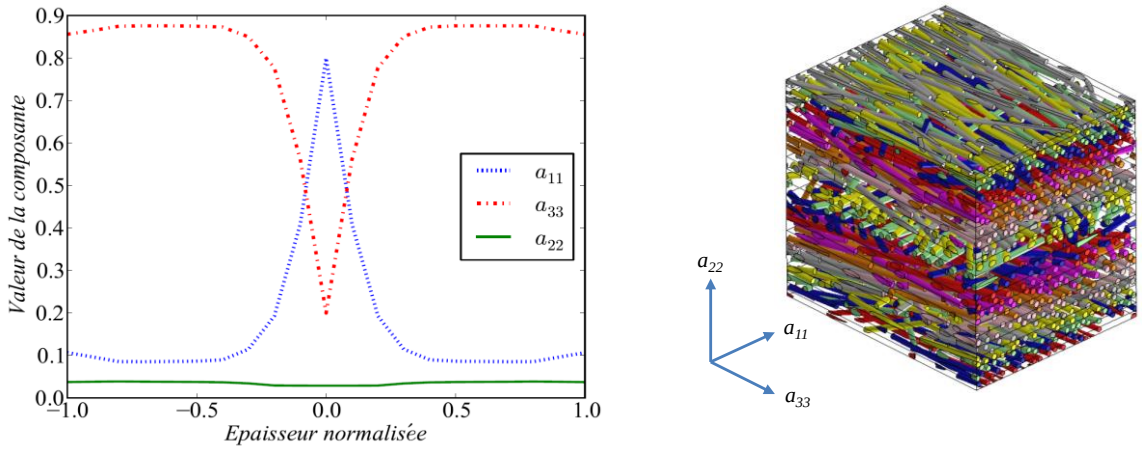
D'autre part, le comportement des fibres est considéré comme étant linéaire élastique et isotrope transverse, comme dans de nombreuses études sur les fibres de carbone [*Christensen*, 1994], [*Botelho et al.*, 2006], [*Wan & Takahashi*, 2016].

Bien que la section droite particulière des fibres de carbone soit déjà discutée dans l'introduction générale de ce manuscrit (*chapitre 1, paragraphe 1.3*), l'hypothèse d'une section droite circulaire est prise afin de mener les travaux de modélisation. En effet, ce choix est généralement considéré dans les études sur les fibres : il est plus réaliste et pragmatique pour la génération de maillages par éléments finis et pour le calcul en champs moyens. L'interface fibre-matrice intervenant dans l'endommagement et la rupture d'un composite renforcé en fibres courtes à l'échelle locale [*Takaku & Arridge*, 1973], est considérée parfaite. Des études industrielles de Safran Composites ont montré que la longueur moyenne des fibres dans le matériau est de 150 micromètres. Cette donnée est vérifiée grâce à l'analyse de la microstructure (*partie 2, chapitre 4, paragraphe 4.3.1*) réalisée plus tard dans l'avancement de la thèse. Ne disposant pas d'une distribution de longueurs de fibres, c'est cette longueur moyenne qui est considérée pour l'ensemble des fibres dans le cadre de l'identification inverse d'un comportement des fibres. Pour les mêmes raisons, le diamètre des fibres est supposé constant et égal à 7 micromètres. Le facteur de forme (ou *Aspect Ratio, AR*) des fibres est défini comme étant le rapport de leur longueur sur leur diamètre. Il est donc également supposé constant et est environ égal à 21. Enfin, une fraction volumique de 19% est considérée. Cette valeur est également vérifiée dans la partie suivante du manuscrit (*partie 2, chapitre 4, paragraphe 4.3.4*).

L'étude de la microstructure du composite, présentée dans la troisième partie de ce manuscrit a été menée après l'identification du comportement des fibres. Les tenseurs d'orientation[1] utilisés comme données d'entrée pour la méthode inverse sont issus d'une simulation du procédé d'injection sous Moldflow menée par Safran Composites. Les composantes a_{11}, a_{22} et a_{33} sont tracés sur la *figure 1-25 (A)* pour une épaisseur du matériau normalisée de *-1* à *1*. Ces calculs sont réalisés à l'aide d'une méthode en champs moyens, une

[1] *Les tenseurs d'orientation sont définis et plus largement discutés dans la troisième partie du manuscrit (chapitre 6, paragraphe 6.6.2)*

illustration tridimensionnelle de l'orientation des fibres est néanmoins proposée pour un élément de volume sur la *figure 1-25 (B).*



(A) *(B)*

Figure 1-25 : Tracé des composantes principales du tenseur d'orientation utilisé pour l'identification du comportement des fibres par méthode inverse sous Digimat-MF (A) et représentation du tenseur d'orientation dans l'espace (B)

3.2.2. Modèles d'homogénéisation par méthode inverse sous Digimat-MF

Les modèles disponibles pour l'application de la méthode inverse sur Digimat-MF sont le modèle de Mori-Tanaka [*Mori & Tanaka*, 1973] et le modèle Double-Inclusion [*Hori & Nemat-Nasser*, 1993]. Ces deux modèles micromécaniques sont couramment utilisés dans le cadre de l'homogénéisation du comportement de composites renforcés en fibres courtes. Dans cette section, on propose un rappel de la théorie relative à ces deux modèles ainsi que leur limitation.

Le modèle de Mori-Tanaka est une approximation du problème de l'inclusion d'Eshelby [*Eshelby*, 1957]. Il a fait l'objet de nombreuses études depuis sa formulation en 1973. Il a notamment été adapté aux matériaux composites unidirectionnels [*Wakashima et al.*, 1974], aux matériaux multiphasés [*Taya & Chou*, 1981], reformulé par Benveniste [*Benveniste*, 1987] et adapté également aux renforts isotropes transverses [*Weng et al.*, 1990]. Avec ce modèle, le tenseur de localisation des déformations de Mori-Tanaka (A^{MT}) est calculé avec l'expression *(1.19)*, où A^{Esh} et V_f sont respectivement le tenseur de localisation d'Eshelby et la fraction volumique de fibres. Le tenseur de localisation décrit la répartition des contraintes et des déformations appliquées au matériau homogène entre chaque phase[2].

$$A^{MT} = A^{Esh} : \left[\left(1 - V_f\right)I + V_f A^E\right]^{-1} \qquad (1.19)$$

Le modèle Double-Inclusion est le second modèle d'homogénéisation disponible sous Digimat-MF. La version implémentée dans le logiciel est celle de Lielens [*Lielens et al.*, 1998], qui considère à la fois le motif de Mori-Tanaka et son inverse. Le premier considère une inclusion placée dans un milieu continu et le motif inverse considère cette fois que les fibres deviennent le milieu continu et la matrice devient l'inclusion ellipsoïdale. Dans ce modèle, les

[2] *Une étude plus complète des modèles micromécaniques et des tenseurs de localisation font l'objet d'un paragraphe dans la troisième partie du manuscrit (partie 3, chapitre 6).*

deux motifs (*MT* et MT^{-1}) sont additionnés afin de calculer le tenseur de localisation des déformations homogène *(1.20)*.

$$A^L = \left[\left(1 - f(v_i)\right)(A^{MT})^{-1} + f(v_i)(A^{MT-1})^{-1}\right]^{-1} \qquad (1.20)$$

A^{MT} et A^{MT-1} sont les tenseurs des déformations du modèle de Mori-Tanaka et de son modèle inverse, correspondant respectivement aux bornes inférieur et supérieur d'Hashin-Shtrikman [*Hashin & Shtrikman*, 1963], et $f(v_1)$ est une fonction de la fraction volumique de fibres v_1, telle que *(1.21)* :

$$f(v_1) = \frac{(v_1 - {v_1}^2)}{2} \qquad (1.21)$$

Le modèle Double-Inclusion montre de bonnes corrélations avec les données expérimentales pour les CRFC [*Pierard*, 2006], [*Moussaddy*, 2013]. Il est par conséquent le modèle retenu afin d'identifier un comportement linéaire élastique des fibres. Cependant, les fibres n'étant pas parfaitement alignées dans le matériau, leur orientation est prise en compte en procédant à une méthode d'homogénéisation en deux étapes [*Lielens*, 1999]. Cette procédure a été développée et améliorée par l'Université Catholique de Louvain d'après les travaux de Lielens [*Doghri & Ouaar*, 2003], [*Pierard et al.*, 2004], [*Doghri & Friebel*, 2005].

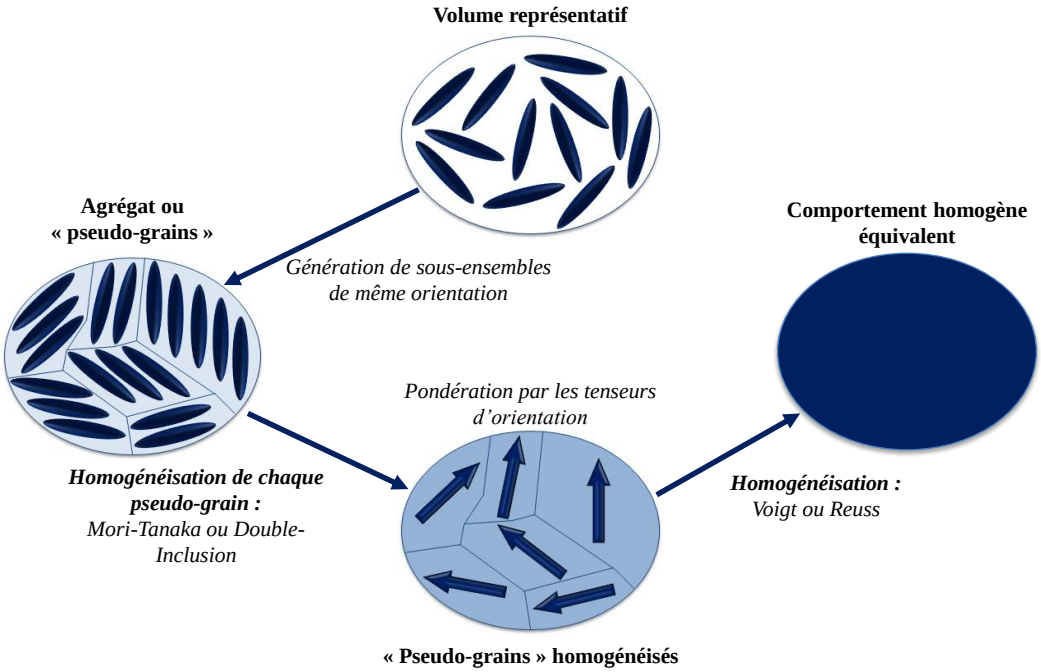


Figure 1-26 : Procédure d'homogénéisation en deux étapes pour des matériaux renforcés en fibres orientées aléatoirement

La procédure d'homogénéisation en deux étapes est illustrée par la *figure 1-26*. Elle consiste à décomposer un élément de volume du matériau, dans lequel les fibres sont orientées aléatoirement en « pseudo-grains ». Dans ces pseudo-grains, les fibres sont parfaitement alignées suivant une direction. La première étape consiste à homogénéiser chaque pseudo-grain à l'aide d'un modèle adéquat (Mori-Tanaka ou Double-Inclusion sous Digimat-MF). En prenant l'hypothèse que chaque pseudo-grain subit la même déformation, le modèle de Voigt

[*Voigt*, 1889][3] permet le calcul du comportement effectif équivalent de l'ensemble des pseudo-grains grâce à une seconde étape d'homogénéisation.

3.2.3. Identification de paramètres comportementaux des fibres

L'identification des paramètres d'un comportement de fibres est faite à partir des données de la littérature, du comportement réversible linéaire de la matrice et du comportement réversible linéaire du composite déterminé grâce aux essais de traction et de flexion trois points. Les comportements réversibles linéaires des constituants sont entrés sous Digimat-MF afin de générer un composite homogène équivalent à celui étudié. Des essais de traction sur le composite sont simulés et les paramètres des fibres sont modifiés de manière itérative jusqu'au recouvrement des pentes des courbes expérimentales et numériques (les essais de flexion trois points n'étant pas simulables sous Digimat-MF). Le logigramme de la démarche est présenté sur la *figure 1-27*.

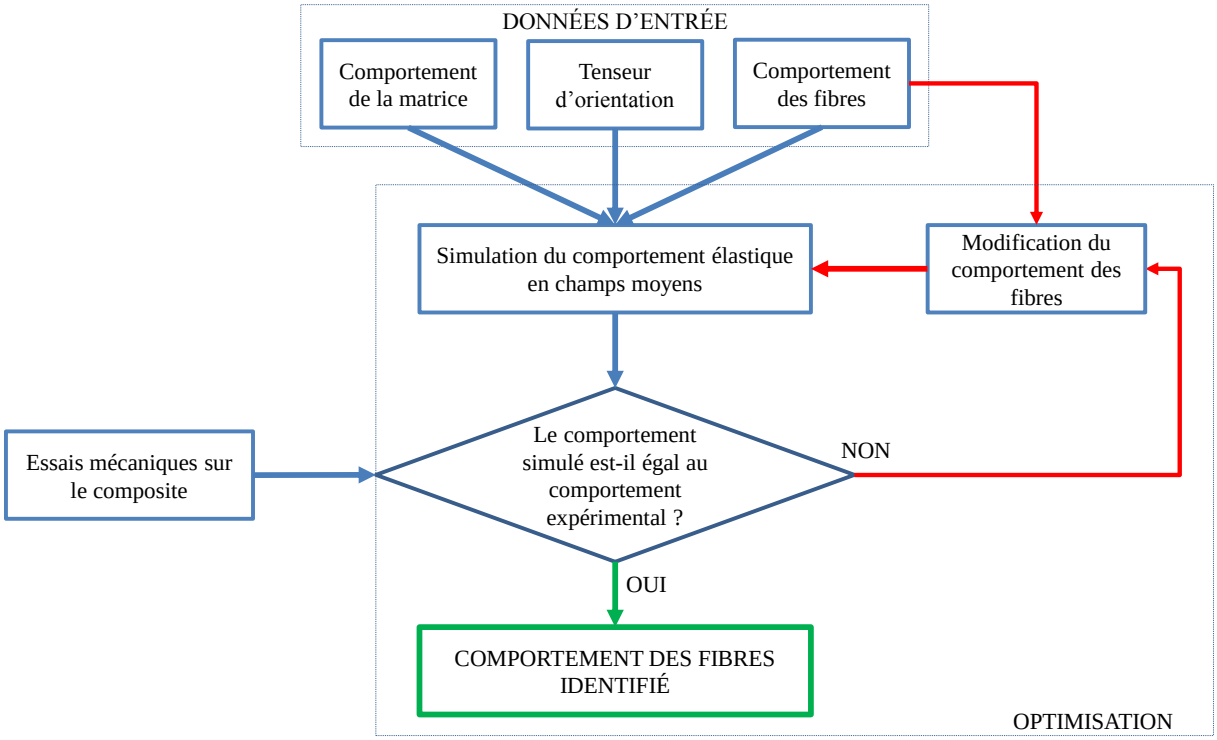


Figure 1-27 : Logigramme du procédé de détermination du comportement des fibres par méthode inverse

Pour chaque résultat de simulation, les constantes numériques sont comparées aux valeurs expérimentales du *tableau 1-4*. La comparaison des courbes numériques et expérimentales sont présentées sur la *figure 1-28* pour les essais de traction.

[3] *Le modèle à bornes de Voigt est présenté dans la troisième partie du manuscrit, dans le cadre des modèles micromécaniques pour l'homogénéisation des matériaux hétérogènes.*

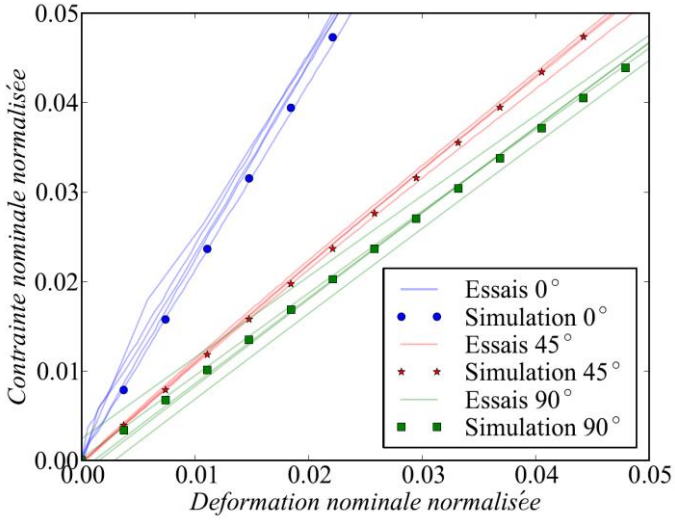


Figure 1-28 : Comparaison des pentes du comportement réversible linéaire du composite expérimentales et numériques en traction, issues de l'identification inverse du comportement des fibres en champs moyens

Au même titre que pour l'identification des paramètres du modèle de la matrice, vue au paragraphe *2.3.2*, celle des fibres consiste à trouver le meilleur compromis pour corréler les courbes numériques aux courbes expérimentales. Les résultats obtenus à l'issue de la procédure d'identification des paramètres de fibres sont néanmoins proches des essais (*tableau 1-6*).

Paramètre	Valeur expérimentale normalisée	Valeur numérique	Ecart relatif
E_{11} (GPa)	1,00	1,04	4,00 %
E_{22} (GPa)	0,42	0,40	4,76 %
G_{12} (GPa)	0,17	0,16	2,38 %
G_{13} (GPa)	0,11	0,10	2,38 %
ν_{12}	1,00	1,02	2,00 %
ν_{21}	0,43	0,39	4,00 %

Tableau 1-6 : Comparaison des valeurs expérimentales et numériques des paramètres réversibles linéaires du composite, issus de l'identification inverse du comportement des fibres en champs moyens

Les paramètres d'un comportement linéaire élastique des fibres identifié par la méthode d'optimisation disponible sous Digimat-MX [*E-Xstream*, 2014] sont comparés aux valeurs moyennes relevées dans la bibliographie dans le *tableau 1-7*.

Paramètre	Valeur bibliographique moyenne	Ecart-type	Valeur numérique	Ecart relatif
E_l (GPa)	227,50	4,51	220,00	3,30%
E_t (GPa)	20,20	4,01	22,00	8,91%
G_{12}^f (GPa)	8,70	2,83	9,00	3,45%
ν_{12}^f	0,29	0,03	0,30	3,70%
ν_{23}^f	0,41	0,02	0,42	3,45%

Tableau 1-7 : Comparaison des valeurs moyennes de la bibliographie et du résultat numérique des paramètres du comportement linéaire élastique des fibres par méthode inverse en champs moyens

Les valeurs des paramètres identifiés sont globalement proches des données moyennes relevées dans la bibliographie. Le module longitudinal identifié numériquement correspond néanmoins à la borne inférieure des données bibliographiques.

3.2.4. Identification des paramètres d'influence sur le comportement du composite

Les calculs menés pour déterminer un comportement des fibres permettent d'étudier l'influence des paramètres d'entrée du calcul sur les paramètres de sortie pour le modèle Double-Inclusion. Le facteur de forme des fibres (*AR*) étant une donnée hypothétique et non directement mesurée dans ces travaux de thèse, elle est intégrée à l'étude de sensibilité. L'influence de la fraction volumique de fibres (V_f) a également été étudiée, même si sa valeur mesurée est proche de celle donnée par le fournisseur. Le *tableau 1-8* récapitule les paramètres de l'étude de sensibilité.

Paramètres d'entrée (paramètres fibre)	Paramètres de sortie (paramètres composite)
E_l, E_t, G_{23}^f, ν_{12}^f, ν_{23}^f, AR, V_f	E_{11}, E_{22}, G_{12}, G_{23}, ν_{12}, ν_{21}

Tableau 1-8 : Rappel des paramètres d'entrée et de sortie des calculs d'homogénéisation en champs moyens et utilisés dans l'étude de sensibilité

Afin d'identifier quels sont les paramètres du comportement des fibres les plus influents sur celui du composite, une variation est appliquée de manière indépendante sur chaque paramètre des fibres. Les calculs sont menés avec la même méthode en champs moyens et on étudie l'influence de cette variation sur les paramètres de sortie du comportement du composite. La variation est fixée à 10%, afin de conserver une cohérence à la fois vis-à-vis des données bibliographiques, mais également de celles identifiées.

Pour comparer l'influence des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie, les équations polynomiales reliant la variation relative de chaque paramètre d'entrée aux variations relatives de chaque paramètre de sortie sont identifiées. La *figure 1-29* représente l'influence des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie, dont les variations sont toujours exprimées en écarts relatifs. Pour des raisons de visibilité, les modules de réversibilité et de cisaillement sont tracés sur le graphique *(A)* et le graphique *(B)* est un zoom permettant d'observer l'influence sur les coefficients de Poisson.

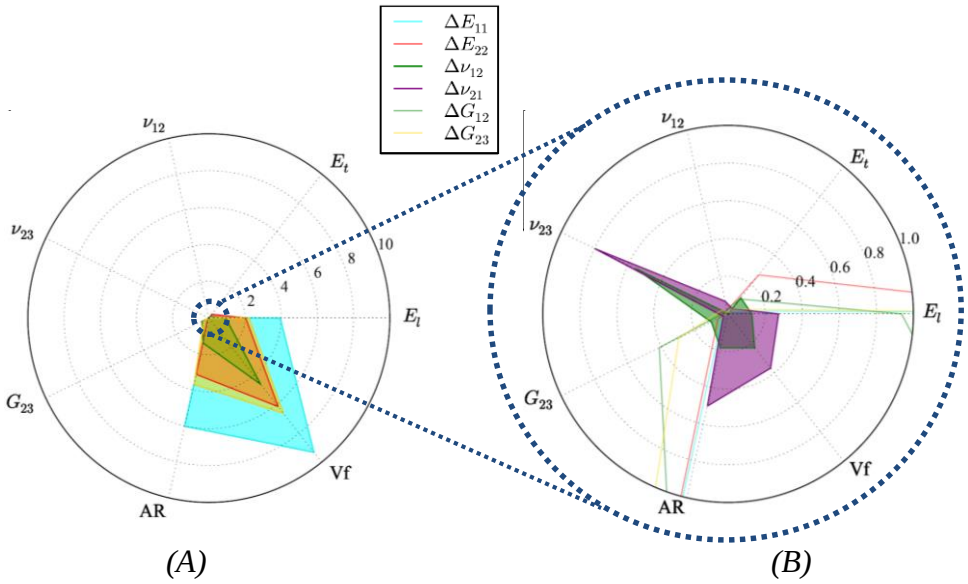


Figure 1-29 : Pourcentage d'écart relatif entre la variation des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie : (A) pour les modules de réversibilité et de cisaillement et (B) pour les coefficients de Poisson

Les résultats de cette analyse permettent de classer les paramètres d'entrée selon deux niveaux d'influence sur les paramètres de sortie et, par conséquent, sur le comportement général du composite. Pour une variation relative de 10%, les paramètres d'influence de premier ordre modifient de plusieurs pourcents l'ensemble des paramètres de sortie. Les paramètres d'entrée de second ordre ne modifient qu'une partie des paramètres de sortie de moins de 1%.

La première conclusion de ces résultats montre que le paramètre ayant le plus d'influence sur le comportement du composite est la fraction volumique (9%). Le second est le facteur de forme des fibres (6%) et le troisième est le module de réversibilité longitudinal des fibres (4%). Sur les modules de Poisson du composite (v_{12} et v_{21}), le paramètre d'influence de second ordre est le coefficient de Poisson v_{23} (0,8%) et se positionne avant la fraction volumique et le facteur de forme des fibres.

Les conclusions générales cette étude montrent qu'il est important de connaitre avec précision la fraction volumique de fibre dans le composite afin de pouvoir simuler un comportement homogène équivalent du composite avec suffisamment de confiance dans les résultats numériques. L'écart entre les résultats de la méthode de modélisation proposée et le comportement réel du composite ne sera, dans ce cas, pas à imputer à la quantité de fibres dans la microstructure. Dans un second temps, une mesure précise des dimensions des fibres permettra également de minimiser la différence entre le comportement simulé et réel. Enfin, même si son influence est de premier ordre, l'écart causé par le module longitudinal des fibres n'est que de 4% sur le comportement global du composite. Par conséquent, la valeur retenue (220 GPa) étant inférieure à la moyenne des valeurs issue de la littérature, n'aura que peu d'influence sur le comportement du composite simulé en champs moyens.

Conclusions de la partie

L'étude de l'échelle microscopique du matériau composite implique la détermination du comportement individuel de ses constituants : la matrice et les fibres courtes. Divers essais mécaniques sont menés, tant sur la matrice seule que sur le composite. Des techniques numériques sont développées afin d'identifier les paramètres des comportements de chaque constituants du composite étudié.

La sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique est un point central de cette partie du manuscrit et mène à identifier un modèle de comportement irréversible tenant compte de cette grandeur physique. Un modèle de Drucker-Prager généralisé est choisi et justifié pour modéliser le comportement de la matrice et une méthode d'intégration implicite, la *θ-méthode*, est implémentée dans le code de calcul par éléments finies Z-set afin d'améliorer la précision des résultats. Les paramètres du modèle sont identifiés grâce à des essais de traction conventionnels et des essais dits « complexes », qui induisent une variation de la pression hydrostatique par la présence d'une entaille. Le modèle permet de reproduire à la fois le comportement macroscopique de la matrice et l'ouverture de ces entailles. Le comportement identifié de la matrice est utilisé dans toute la démarche de modélisation du matériau composite étudié : dans la partie suivante, qui vise notamment à identifier un volume élémentaire représentatif et dans la dernière partie du manuscrit qui traite de l'homogénéisation du comportement du composite.

Un comportement des fibres est identifié par une méthode inverse, à partir des résultats numériques en champs moyens sur le composite, avec le modèle Double-Inclusion. Ne disposant pas des fibres seules, les essais mécaniques menés sur la matrice (pour le premier chapitre) et de nouveaux essais menés sur le composite permettent l'identification des paramètres des fibres, considérées isotropes transverses. Les valeurs de ces paramètres sont cohérents avec les données de la littérature et permettent de reproduire le comportement réversible linéaire du composite sollicité en traction suivant trois angles : 0°, 45° et 90°.

L'étude de l'influence des paramètres d'entrée sur les paramètres de sortie de la modélisation en champs moyens met en évidence l'importance de la mesure de la fraction volumique de fibres au sein du composite et sur leur géométrie dans la microstructure, afin de limiter l'écart entre les comportements simulé et réel du composite. Ces travaux de mesures sont un des objectifs de la seconde partie du manuscrit traitant de la microstructure.

L'étude de la microstructure doit d'une part permettre la validation de certains paramètres utilisés dans cette partie : fraction volumique, géométrie et orientation des fibres. D'autre part, la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique identifiée dans cette partie doit directement être mise en lien avec une mesure de son confinement au sein du matériau composite.

Un résumé graphique des travaux réalisés à l'échelle des microscopique est proposé dans la section suivante.

Résumé graphique de la partie

PARTIE 1 : Echelle microscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone

*Deux constituants dont le comportement est à déterminer et qui **agissent** l'un sur l'autre*

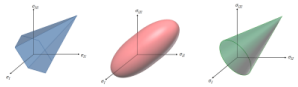
Matrice

Fibres

Chapitre 2 : Analyse et modélisation du comportement de la matrice PEI

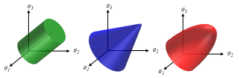
Quels sont les modèles de comportement sensibles à la pression hydrostatique ?

Principaux modèles sensibles à la pression hydrostatique



Quel modèle de comportement ?

Drucker-Prager Généralisé



Quels travaux ?

Implémentation en implicite

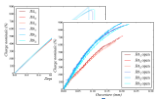
$$J = \frac{\partial R^Z}{\partial \Delta Z} = 1 - \Delta F \left[\frac{\partial F}{\partial \Delta Z}\right]^{t+\theta\Delta t}$$

Modèle de comportement sensible à la pression hydrostatique (explicite & implicite)

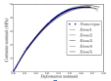
Essais mécaniques sur la matrice PEI

Quel type d'essai ?

Essais complexes

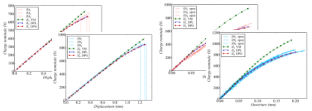


Essais conventionnels

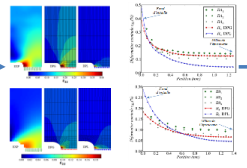


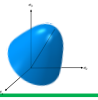
Comment identifier les paramètres ?

Optimisation numérique de trois formulations



Choix et justification de la forme du critère





Comportement irréversible sensible à la pression hydrostatique de la matrice

Chapitre 3 : Détermination du comportement des fibres de carbone

Méthode inverse en champs moyens (Digimat-MF)

Comment caractériser les fibres sans en avoir ?

Quelles données d'entrée ?

Comportement réversible de la matrice

Traction

Paramètres mesurés : E_m, ν_m

Données sur les fibres

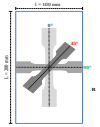
Bibliographie

Isotrope transverse E_l, E_t, ν_{12}, ν_{23}, G_{23} Facteur de forme Orientation

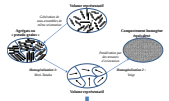
Comportement réversible du composite

Traction / Flexion 0°/45°/90°

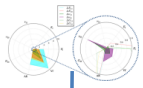
Paramètres mesurés : E_{11}, E_{22}, ν_{12}, ν_{23}, G_{23}



Optimisation numérique (homogénéisation en 2 étapes) Double-Inclusion et Voigt

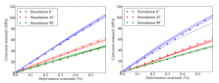


Etude de l'influence des paramètres de fibres sur ceux du composite



Paramètres d'influence à mesurer en priorité dans la microstructure

Atteinte des paramètres mesurés



Comment identifier les paramètres ?

Comportement réversible des fibres courtes

Quels résultats ?

Bibliographie

Afnor, (1997), EN ISO 14130 : Fibre reinforced plastic composites: Determination of apparent interlaminar shear strength by short beam-method.

Afnor, (2012), EN ISO 527 : Détermination des propriétés en traction des plastiques et composites.

ASTM International, (2008), D638-03 : Standard test method for tensile properties of plastics.

Bao, Y., (2005), Dependence of ductile crack formation in tensile tests on stress triaxiality, stress and strain ratios, *Engineering Fracture Mechanics*, 72: 505–522.

Bao, Y., & Wierzbicki, T., (2004), On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences*, 46: 81–98.

Benveniste, Y., (1987), A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mechanics of Materials*, 6: 147–157.

Berthelot, J.-M., (2005), *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures* (4e édition), Paris; Londres: Tec & Doc Lavoisier.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., & Forest, S., (2001), *Mécanique non linéaire des matériaux*, Paris: Hermes Science Publications. (cité p.45, p.50, p.51-1 et p.51-2)

Besson, J., & Guillemer-Neel, C., (2003), An extension of the Green and Gurson models to kinematic hardening, *Mechanics of Materials*, 35: 1–18.

Birch, F., (1938), The effect of pressure upon the elastic parameters of isotropic solids, according to Murnaghan's theory of finite strain, *Journal of Applied Physics*, 9: 279–288.

Boisot, G., (2009), *Mécanismes et modélisation mécanique de la déformation, de l'endommagement et de la rupture du PolyAmide 11 pur et renforcé choc*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Bonnet, B., (2005), April 26, *Comportement au choc de matériaux composites pour applications automobiles*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Botelho, E. C., Silva, R. A., Pardini, L. C., & Rezende, M. C., (2006), A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures, *Materials Research*, 9: 247–256.

Bridgman, P. W., (1949), *The physics of high pressure*, G. Bell.

Castagnet, S., & Deburck, Y., (2007), Relative influence of microstructure and macroscopic triaxiality on cavitation damage in a semi-crystalline polymer, *Materials Science & Engineering. A, Structural Materials : Properties, Microstructure and Processing*, 448: 56–66.

Cayzac, H.-A., (2014), *Analyses expérimentale et numérique de l'endommagement matriciel d'un matériau composite : Cas d'un pultrudé thermoplastique renforcé de fibres de verre*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Christensen, R. M., (1994), Properties of carbon fibers, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42: 681–695.

Coulomb, C. A., (1776), *Essai sur une application des règles de maximis & minimis à quelques problèmes de statique, relatifs à l'architecture*, Paris: De l'Imprimerie Royale.

Cytec Thornel, (2012), T-300 Carbon Fiber, Polyacrylonitrile - Fiche matériaux.

Daggumati, S., De Baere, I., Van Paepegem, W., Degrieck, J., Xu, J., Lomov, S. V., & Verpoest, I., (2010), Local damage in a 5-harness satin weave composite under static tension: Part I – Experimental analysis, *Composites Science and Technology*, 70: 1926–1933.

De Sousa Junior, R. R., Gouveia, J. R., Ito, N. M., & Dos Santos, D. J., (2017), Failure prediction of hybrid composite using Arcan's device and Drucker-Prager model, *Polymer Testing*, 58: 256–261.

Dean, G., Crocker, L., Read, B., & Wright, L., (2004), Prediction of deformation and failure of rubber-toughened adhesive joints, *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 24: 295–306.

Despringre, N., (2015), *Analyse et modélisation des mécanismes d'endommagement et de déformation en fatigue multiaxiale de matériaux composites : polyamide renforcé par des fibres courtes*, Thèse de doctorat, Ecole nationale supérieure d'arts et métiers - ENSAM.

Devilliers, C., (2011), December 15, *Dégradation chimique du PE et influence sur le comportement, l'endommagement et la rupture en fluage : application à la durabilité des canalisations sous pression*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris. (cité p.43 et p.44)

Doghri, I., & Friebel, C., (2005), Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response, *Mechanics of Materials*, 37: 45–68.

Doghri, I., & Ouaar, A., (2003), Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures, *International Journal of Solids and Structures*, 40: 1681–1712.

Drucker, D. C., & Prager, W., (1952), *Soil Mechanics and Plastic Analysis Or Limit Design*, Division of Applied Mathematics, Brown University. (cité p.45 et p.48)

Dumoulin, E., (2014), January 23, *Fabrication additive de pièces en polymères thermoplastiques hautes performances et en polyamide 12 par le procédé de frittage sélectif par laser*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Eshelby, J. D., (1957), The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241: 376–396.

E-Xstream, (2014), *Digimat 5.1.2 User Manual*, E-Xstream. (cité p.64-1, p.64-2, p.68 et p.73)

Gates, T., Chen, J.-L., & Sun, C., (1994), Micromechanical Characterization of Nonlinear Behavior of Advanced Polymer Matrix Composites, in: R. Deo & C. Saff (eds.), *Composite Materials: Testing and Design: Twelfth Volume*, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International.

Ghorbel, E., (2008), A viscoplastic constitutive model for polymeric materials, *International Journal of Plasticity*, 24: 2032–2058.

Gregory, J., & Spearing, S., (2005), Nanoindentation of neat and polymers in polymer-matrix composites, *Composites Science and Technology*, 65: 595–607.

Gruber, G., & Wartzack, S., (2013), Three-point bending analyses of short fiber reonforced thermoplastics : A comparisaion between simulation and test results, *SASTech - Technical Journal*, Volume 12.

Gurson, A. L., (1977), Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99: 2.

Hamon, F., (2010), May, *Modélisation du comportement mécanique en fissuration d'alliages aéronautiques*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechique.

Hancock, J. W., & Mackenzie, A. C., (1976), On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24: 147–160.

Hardiman, M., Vaughan, T. J., & McCarthy, C. T., (2015), Fibrous composite matrix characterisation using nanoindentation: The effect of fibre constraint and the evolution from bulk to in-situ matrix properties, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 68: 296–303.

Hashin, Z., & Shtrikman, S., (1963), A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11: 127–140.

Hori, M., & Nemat-Nasser, S., (1993), Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites. Mechanics of Materials, Vol. 14, p. 189-206.

Huang, Z.-M., (2001), Simulation of the mechanical properties of fibrous composites by the bridging micromechanics model, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 32: 143–172.

Ishikawa, T., Koyama, K., & Kobayashi, S., (1977), Elastic moduli of carbon-epoxy composites and carbon fibers, *Journal of Composite Materials*, 11: 332–344.

Jaeger, J., Cook, N. G., & Zimmerman, R., (1979), *Fundamentals of rock mechanics* (4th ed.), Malden, MA: Wiley-Blackwell.

Jeong, H.-Y., & Pan, J., (1995), A macroscopic constitutive law for porous solids with pressure-sensitive matrices and its implications to plastic flow localization, *International Journal of Solids and Structures*, 32: 3669–3691.

Joannès, S., (2007), *Caractérisation mécanique et outil d'aide au dimensionnement des collages structuraux*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Johnson, C., & Scott, R., (1981), A Finite Element Method for Problems in Perfect Plasticity Using Discontinuous Trial Functions, in: W. Wunderlich, E. Stein, & K.-J. Bathe (eds.), *Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.

Lafarge, M., (2004), *Modélisation couplée comportement-endommagement et critères de rupture dans le domaine de la transition du PVDF*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. (cité p.43 et p.46)

Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A., & Desmorat, R., (2009), *Mécanique des matériaux solides - 3ème édition*, Dunod. (cité p.41, p.45 et p.47)

Levenberg, (1944), A method for the solution of certain problems in least squares, *Quart. Applied Math.*, 2: 164–168.

Lielens, G., (1999), *Micro-macro modeling of structured materials*, Thèse de doctorat, UCL - Université Catholique de Louvain.

Lielens, G., Pirotte, P., Couniot, A., Dupret, F., & Keunings, R., (1998), Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 29: 63–70.

Lubliner, J., & Auricchio, F., (1996), Generalized plasticity and shape-memory alloys, *International Journal of Solids and Structures*, 33: 991–1003.

Marquardt, D. W., (1963), An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters, *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 11: 431–441.

Mohr, O., (1914), *Abhandlungen aus dem Gebiete der technischen Mechanik*, Berlin: W. Ernst & Sohn.

Mori, T., & Tanaka, K., (1973), Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, 21: 571–574.

Mounier, D., Poilâne, C., Bûcher, C., & Picart, P., (2012), Evaluation of transverse elastic properties of fibers used in composite materials by laser resonant ultrasound spectroscopy, in: S. F. d'Acoustique (ed.), *Acoustics 2012*, Nantes, France.

Moussaddy, H., (2013), April, *A new definition of the representative volume element in numerical homogenization problems and its application to the performance evaluation of analytical homogenization models*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal.

Naito, K., Tanaka, Y., Yang, J.-M., & Kagawa, Y., (2009), Flexural Properties of PAN-and Pitch-Based Carbon Fibers, *Journal of the American Ceramic Society*, 92: 186–192.

Norton, F. H., (1929), *The creep of steel at high temperatures* (1st ed.), New York: McGraw-Hill book company, inc.

Oliver, W. C., & Pharr, G. M., (1992), An improved technique for determining hardness and elastic modulus using load and displacement sensing indentation experiments, *Journal of Materials Research*, 7: 1564–1583.

Pierard, O., (2006), *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity : modeling and computation/*, UCL - Université Catholique de Louvain.

Pierard, O., Friebel, C., & Doghri, I., (2004), Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: a general framework and its validation, *Composites Science and Technology*, 64: 1587–1603.

Pinho, S., Darvizeh, R., Robinson, P., Schuecker, C., & Camanho, P., (2012), Material and structural response of polymer-matrix fibre-reinforced composites, *Journal of Composite Materials*, 46: 2313–2341.

Prager, W., (1955), The theory of plasticity: A survey of recent achievements, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1847-1982 (Vols 1-196)*, 169: 41–57.

Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., & Flannery, B. P., (2007), *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing* (3rd ed.), Cambridge: Cambridge University Press.

Pugh, H. L. D., Chandler, E. F., Holliday, L., & Mann, J., (1971), The effect of hydrostatic pressure on the tensile properties of plastics, *Polymer Engineering & Science*, 11: 463–473.

Rouby, D., (2005), Chapitre 6 : Propriétés mécaniques des composites dans la pratique des essais, in: *Cours : Introduction aux matériaux composites*, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon.

Salari, M. R., Saeb, S., Willam, K. J., Patchet, S. J., & Carrasco, R. C., (2004), A coupled elastoplastic damage model for geomaterials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193: 2625–2643.

Springmann, M., & Kuna, M., (2005), Identification of material parameters of the Gurson–Tvergaard–Needleman model by combined experimental and numerical techniques, *Computational Materials Science*, 32: 544–552.

Sun, C. T., & Chen, J. L., (1991), A micromechanical model for plastic behavior of fibrous composites, *Composites Science and Technology*, 40: 115–129.

Takaku, A., & Arridge, R. G. C., (1973), The effect of interfacial radial and shear stress on fibre pull-out in composite materials, *Journal of Physics D: Applied Physics*, 6: 2038–2047.

Taya, M., & Chou, T.-W., (1981), On two kinds of ellipsoidal inhomogeneities in an infinite elastic body: An application to a hybrid composite, *International Journal of Solids and Structures*, 17: 553–563.

Taylor, G. I., & Quinney, H., (1931), The plastic distortion of metals, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character*, 230: 323–362.

Tiejun, W., Kishimoto, K., & Notomi, M., (2002), Effect of triaxial stress constraint on the deformation and fracture of polymers, *Acta Mechanica Sinica*, 18: 480–493.

Toray California, (2002), Torayca T300 datasheet.

Transvalor SA, (2015), Z-set (Version 8.6), Evry: Transvalor SA.

Tresca, H.-É., (1864), *Mémoire sur l'écoulement des corps solides soumis à de fortes pressions*, Gauthier-Villars.

Tvergaard, V., (1982), On localization in ductile materials containing spherical voids, *International Journal of Fracture*, 18: 237–252.

Tvergaard, V., & Needleman, A., (1984), Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, *Acta Metallurgica*, 32: 157–169.

VanLandingham, M. R., Dagastine, R. R., Eduljee, R. F., McCullough, R. L., & Gillespie, J. W., (1999), Characterization of nanoscale property variations in polymer composite systems: 1. Experimental results, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 30: 75–83.

Voigt, W., (1889), Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper, *Annalen Der Physik*, 274: 573–587.

Vyas, G. M., Pinho, S. T., & Robinson, P., (2011), Constitutive modelling of fibre-reinforced composites with unidirectional plies using a plasticity-based approach, *Composites Science and Technology*, 71: 1068–1074.

Wakashima, K., Otsuka, M., & Umekawa, S., (1974), Thermal expansions of heterogeneous solids containing aligned ellipsoidal inclusions, *Journal of Composite Materials*, 8: 391–404.

Wan, Y., & Takahashi, J., (2016), Tensile properties and aspect ratio simulation of transversely isotropic discontinuous carbon fiber reinforced thermoplastics, *Composites Science and Technology*, 137: 167–176.

Weng, G. J., Taya, M., & Abé, H. (Eds.), (1990), *Micromechanics and Inhomogeneity*, New York, NY: Springer New York.

Yang, L., Yan, Y., Liu, Y., & Ran, Z., (2012), Microscopic failure mechanisms of fiber-reinforced polymer composites under transverse tension and compression, *Composites Science and Technology*, 72: 1818–1825.

Yu, T., Teng, J. G., Wong, Y. L., & Dong, S. L., (2007), Assessment of drucker-prager type plasticity models for predicting the behaviour of FRP-confined concrete.

Zhao, J., (2000), Applicability of Mohr-Coulomb and Hoek-Brown strength criteria to dynamic strength of brittle rock materials, *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 37: 1115–1121.

Partie 2

Echelle mésoscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone

A des fins de modélisation, l'étude d'un matériau renforcé en fibres courtes de carbone passe par une compréhension approfondie de sa microstructure. Dans cette partie du manuscrit, la microstructure est considérée comme étant l'échelle mésoscopique. Elle correspond à l'ensemble des fibres disposées dans la matrice. Son analyse vise à étudier les conséquences du moulage par injection sur l'hétérogénéité de la microstructure. Ses variabilités étant à l'origine du comportement global du matériau, leur prise en compte dans sa modélisation est indispensable. L'étude de la microstructure soulève donc plusieurs questions centrales de ces travaux : Quelles sont ces variabilités ? Comment les déterminer ? Comment prédire le comportement du matériau sans représenter l'ensemble de sa microstructure ? Ces enjeux sont indéniablement liés à la puissance de calcul disponible aujourd'hui : un calcul de structure intégrant une microstructure complexe, elle-même définie par une multitude de fibres de formes, d'orientations et de positions spécifiques, ne peut pas être réalisé uniquement à partir de méthodes à champs complets. Il s'agit donc de trouver le meilleur compromis entre précision et coût machine.

Les variabilités de la microstructure sont définies et mesurées dans le premier chapitre de cette partie. Le second chapitre traite de la définition d'un VER qui intègre une partie des variabilités mesurées. Ce VER, renforcé par des fibres unidirectionnelles, constitue le premier pas vers la modélisation du comportement du matériau à l'échelle macroscopique.

TABLE DES MATIERES

4. Etude de la microstructure 90
4.1. Généralités sur les variabilités de la microstructure 90
4.1.1. Fraction volumique de fibres 90
4.1.2. Orientation des fibres dans la matrice 92
4.1.3. Géométrie des fibres courtes dans le matériau 95
4.1.4. Confinement matriciel : la proximité des fibres dans la microstructure 97
4.2. La tomographie aux rayons X 100
4.2.1. Principes fondamentaux 100
4.2.2. Tomographie en contraste de phase 102
4.2.3. Analyse d'image, segmentation et labélisation des fibres de carbone 103
4.2.4. Traitement des données segmentées et labélisées 106
4.3. Caractérisation expérimentale de la microstructure 107
4.3.1. Détermination de la fraction volumique 108
4.3.2. Traitement des données brutes avec la corrélation de cylindres 110
4.3.3. Détermination de l'orientation des fibres 113
4.3.4. Détermination de la longueur des fibres 114
4.3.5. Une mesure du confinement matriciel : la fraction volumique locale 115
4.4. Synthèse de la caractérisation de la microstructure 118

5. Définition d'une cellule élémentaire statistiquement représentative : CESR 122
5.1. Approche scientifique 122
5.1.1. Chaine de génération des cellules 123
5.1.2. Hypothèses de modélisation 123
5.1.3. Génération des cellules sous Digimat-FE 124
5.1.4. Maillage des cellules sous Abaqus-CAE 126
5.2. Calcul des propriétés effectives des cellules sous Z-set 127
5.2.1. Définition des conditions aux limites pour les maillages non-coïncidents 127
5.2.2. Calcul des matrices de rigidité des cellules 128
5.3. Détermination des indicateurs de choix de la CESR 129
5.3.1. Indicateur du niveau d'isotropie transverse des cellules 129
5.3.2. Indicateur de la performance des cellules 130
5.4. Détermination d'une CESR du comportement effectif global 132
5.4.1. Etude de l'indicateur d'isotropie transverse des cellules 133
5.4.2. Etude de l'indicateur de performance des cellules 137
5.4.3. Choix d'une potentielle CESR 139
5.5. Etude de la proximité des fibres dans les cellules 140
5.5.1. Définition de l'indicateur local 141
5.5.2. Influence de la morphologie des cellules sur leur comportement global 143
5.6. Intégration du confinement matriciel réel dans le choix de la CESR 146
5.6.1. Démarche numérique et reconstruction de cellules spécifiques 146
5.6.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov 148
5.6.3. Définition de cellules intégrant la microstructure réelle 148
5.6.4. Indicateur local et distribution de fraction volumique locale 150

Conclusions de la partie 151

Résumé graphique de la partie 152

Bibliographie 153

CHAPITRE 4 : ETUDE DE LA MICROSTRUCTURE

4. Etude de la microstructure

Ce chapitre vise à évaluer les variabilités de la microstructure identifiées dans la première partie du manuscrit. Les premières variabilités sont celles ayant une influence de premier ordre sur le comportement du composite : la géométrie (facteur de forme) et la fraction volumique des fibres. D'autres variabilités non étudiées dans la première partie sont également analysées dans cette partie : l'orientation et la proximité des fibres dans la matrice. Dans une première section, chacune de ces variabilités est définie. Les deux sections suivantes sont axées sur leur mesure, selon le type de technique mise en œuvre : analyse surfacique ou tridimensionnelle. La caractérisation de la microstructure est ainsi réalisée à l'aide de la tomographie aux rayons X en contraste de phase et par des méthodes plus conventionnelles. Les données mesurées dans ce chapitre alimentent ensuite la génération et le choix d'un volume élémentaire représentatif particulier, déterminé dans le chapitre suivant.

4.1. Généralités sur les variabilités de la microstructure

Etudier la morphologie de la microstructure revient à étudier la disposition, l'orientation et la géométrie des fibres au sein de la matrice. De nombreuses études ont montré que ces variabilités ont une influence directe sur le comportement global d'un CRFC : [*Fu & Lauke*, 1996], [*Thomason & Vlug*, 1996], [*Rezaei et al.*, 2009]. Ces études montrent d'une part, que l'accroissement de la longueur moyenne des fibres au sein de la microstructure augmente la résistance mécanique des CRFC. D'autre part, le gradient d'orientation des fibres dans l'épaisseur du matériau, induit par le moulage par injection, génère une anisotropie du comportement du matériau. Celle-ci est directement liée aux orientations préférentielles des fibres dans la microstructure. Le moulage par injection est abordé dans l'introduction générale de ce manuscrit (*chapitre 1, paragraphe 1.2.3*). Le voisinage des fibres, de géométries et d'orientations particulières est responsable d'un enfermement spécifique de la matrice dans le matériau : le confinement matriciel. Celui-ci peut être à l'origine de l'apparition de porosités locales induites par une valeur élevée de la pression hydrostatique locale [*Arif*, 2014]. Il est donc indispensable de quantifier ces variabilités et de les prendre en compte afin de modéliser le comportement d'un CRFC.

4.1.1. Fraction volumique de fibres

A l'échelle mésoscopique, la fraction volumique de fibres est une variabilité globale. Elle peut s'obtenir en décomposant la matrice d'un échantillon de matériau ou par analyse d'image surfacique. La décomposition peut se faire de manière chimique, par digestion acide [*Green*, 1991] (suivant la norme ASTM D3171), ou de manière thermique, par pyrolyse [*Beyler & Hirschler*, 1995].

Le but des techniques de décomposition de la matrice est d'obtenir une masse sèche de fibres seules. La fraction massique de fibres peut alors être mesurée en comparant la masse de l'échantillon et la masse de fibres obtenues. La fraction volumique de fibres V_f dans un échantillon est alors calculée avec l'expression *(2)*.

$$V_f = \frac{\rho_f \rho_m P_f}{\rho_f [\rho_f - (\rho_f - \rho_m) P_f]} \qquad (2.1)$$

Avec ρ_f la masse volumique des fibres, ρ_m la masse volumique de la matrice et P_f la fraction massique de fibres

Dans le cadre de la digestion acide, la masse de fibres est obtenue après dissolution du polymère dans un bain d'acide sulfurique bouillant pendant plusieurs heures. Le mat de fibres ainsi obtenu est rincé à l'eau et séché avant sa pesée. En pyrolyse, des échantillons du matériau sont prélevés et placés dans des creusets d'alumine. Des fibres de carbone sèches sont placées en guise de référence dans d'autres creusets. Les creusets sont ensuite pesés et disposés dans une enceinte sous air à 600°C. A intervalles de temps réguliers, deux creusets sont prélevés : un contenant le matériau et le second contenant les fibres sèches. Ces creusets sont placés sous cloche protectrice et pesés après refroidissement total. On mesure la perte de masse dans le creuset contenant le composite, correspondant à la quantité de matrice pyrolysée. Le creuset contenant les fibres de carbone sert de contrôle de la dégradation des fibres de carbone au cours du temps. Lorsque la masse de celui-ci est considérablement réduite, la pyrolyse des fibres débute. A ce stade, la procédure de pyrolyse doit prendre fin : les fibres de carbone dans le composite risquent d'être également pyrolysées. La masse du creuset de composite à cet instant constitue alors la masse de fibres restante après pyrolyse. C'est cette masse qui entre dans le calcul de la fraction volumique par l'équation *(2)*.

La mesure de la fraction volumique peut également se faire par analyse d'image surfacique de la microstructure. Cette méthode nécessite une préparation minutieuse de la surface des échantillons à analyser en microscopie optique ou électronique : il s'agit d'une étape importante, afin de pouvoir segmenter et analyser les fibres. Bien que la fraction volumique soit, par définition, une donnée tridimensionnelle, sa détermination par analyse d'image 2D est valable à partir du moment où l'échelle de l'image est largement supérieure à celle de l'objet mesuré [*Wolfenden et al.*, 1991]. Le rapport entre la surface totale des objets détectés et celle de l'image est dans ce cas équivalente à la fraction volumique des particules dans le matériau [*Guild & Summerscales*, 1993]. Une cartographie du matériau de plusieurs millimètres carrés peut ainsi être utilisée pour mesurer la fraction volumique. Les images peuvent provenir de la microscopie optique ou électronique à balayage. Lors de l'analyse numérique de ces images, la valeur du seuil de détection d'un objet (un niveau de gris spécifique) influence directement la fraction volumique de fibres détectée dans l'image. Il convient donc de déterminer ce seuil de manière à avoir un écart minime avec la fraction volumique réelle au sein du matériau.

La méthode proposée afin déterminer ce seuil consiste à coupler l'imagerie à plusieurs échelles. Une cartographie (ou une série d'images) est réalisée en microscopie optique et un unique cliché MEB est pris sur une des zones visibles dans la série d'images en microscopie optique. La haute résolution du cliché au MEB permet de segmenter plus précisément les fibres de la matrice. Suite à cette segmentation, la fraction volumique de fibre de l'image MEB peut être calculée et constitue la valeur de référence. La même zone est repérée sur une des images de microscopie optique et est isolée. La valeur du seuil de niveau de gris permettant la détection des fibres sur cette image est déterminée de manière à obtenir la même fraction volumique de fibres que sur l'image de référence (MEB). Une fois déterminée, cette valeur est appliquée à l'ensemble des images de microscopie optique et la fraction volumique de fibres globale dans la microstructure peut alors être calculée par le rapport entre la surface de l'image et celle des fibres (en pixels-carrés).

4.1.2. Orientation des fibres dans la matrice

L'orientation des fibres dans la matrice est une variabilité pouvant être donnée de façon unitaire (pour chaque fibre) ou globale, à l'aide de descripteurs mathématiques (distributions, moyennes,…).

L'orientation d'une fibre rectiligne dans un repère tridimensionnel *(1,2,3)* est définie par les coordonnées cartésiennes d'un vecteur unitaire $\vec{p}$, liées aux angles d'Euler θ et ϕ [*Advani & Tucker III*, 1987]. L'angle θ, ou « angle d'inclinaison » varie entre 0° et 90° et l'angle ϕ, ou « angle azimutal », varie entre 0° et 360°. Ainsi, la demi-sphère représentée par l'ensemble des combinaisons de valeurs possibles de θ et ϕ décrit toutes les orientations d'une fibre dans l'espace. Les composantes du vecteur unitaire sont définies par le système d'équations *(2.2)* et sont représentées dans la *figure 3* :

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin\theta \,.\cos\phi \\ p_2 &= \sin\theta.\sin\phi \\ p_3 &= \cos\theta \end{aligned} \qquad (2.2)$$

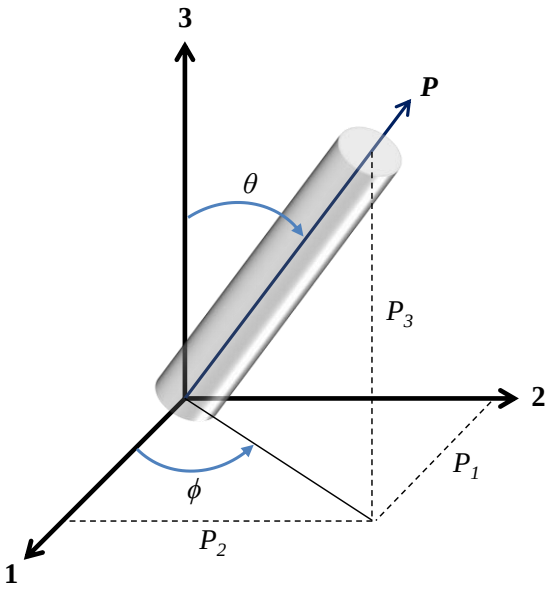


Figure 2-1 : Orientation du vecteur unitaire de la fibre

Le troisième angle d'Euler n'est pas représenté car il n'est pas pertinent dans le cas d'une fibre cylindrique de section droite circulaire : la rotation autour de l'axe d'une fibre ne modifie pas son orientation dans l'espace. Une fibre est « parfaitement orientée » (suivant l'axe *3*) lorsque seule sa composante P_3 n'est pas nulle ou que l'angle θ est nul.

Dans une microstructure contenant des millions de fibres courtes, il est courant de faire appel à des objets mathématiques qui permettent de décrire l'orientation moyenne des fibres dans un volume donné : les tenseurs d'orientation. Sous un formalisme général, un tenseur d'orientation est défini par l'expression *(2.15)*.

$$a_n = \int_p \prod_{i=1}^{n} p_n \times \psi(p) dp \qquad (2.3)$$

Où *n* est l'ordre du tenseur et $\psi(p)$ est la fonction de distribution d'orientation (probabilité de trouver une fibre orientée selon *p* à *dp* près).

Initiés par les travaux de Hand [*Hand*, 1962] puis généralisés dans l'étude des matériaux composites renforcés en fibres courtes par Advani et Tucker [*Advani & Tucker III*, 1987], les tenseurs d'orientation sont des objets compacts et pratiques: ils sont homogènes aux tenseurs utilisés dans les modèles de comportement mécanique. Plus leur ordre est élevé, plus ils contiennent d'informations sur l'orientation moyenne des fibres dans un volume de la microstructure étudiée. L'expression des termes d'un tenseur du second ordre est donnée par le système d'équations *(2.4)*.

$$\begin{cases} a_{11} = \langle sin^2\,\theta\,.\,cos^2\,\phi \rangle \\ a_{22} = \langle sin^2\,\theta\,.\,sin^2\,\phi \rangle \\ a_{33} = \langle cos^2\,\theta \rangle \\ a_{12} = a_{21} = \langle sin^2\,\theta\,.\,cos\,\phi\,.\,sin\,\phi \rangle \\ a_{13} = a_{31} = \langle sin\,\theta\,.\,cos\,\theta\,.\,cos\,\phi \rangle \\ a_{23} = a_{32} = \langle sin\,\theta.\,cos\,\theta.\,sin\,\phi \rangle \end{cases} \qquad (2.4)$$

Afin de passer à l'ordre supérieur, des équations de fermeture sont utilisées et font partie des grands axes de recherche sur les matériaux injectés. De nombreuses expressions ont été proposées et sont décrites dans la thèse de Redjeb [*Redjeb*, 2007]. Ces équations peuvent permettre de prédire convenablement le comportement du matériau dans les directions d'injection et transverse [*Dray et al.*, 2007], mais rares sont les études qui valident leur pertinence pour prédire le comportement du matériau sollicité selon d'autres directions. Les tenseurs d'orientation ne donnent qu'une moyenne de l'orientation des fibres dans une zone donnée du matériau. Bien que cette hypothèse soit utile pour simplifier la modélisation, il en résulte une perte d'information sur la distribution des orientations dans la zone considérée et par conséquent sur le comportement global du matériau. Les tenseurs d'orientation sont abordés dans le cadre de l'homogénéisation d'un CRFC dans la troisième partie du manuscrit (*chapitre 6, paragraphe 6.6.2*)

Les premiers travaux de mesure et de détermination de l'orientation des fibres ont été publiés par Fakirov [*Fakirov & Fakirova*, 1985]. Les auteurs proposent le prélèvement d'échantillons perpendiculaires à la direction d'injection afin de déterminer l'orientation des fibres grâce à l'analyse d'image. Dans le cas de fibres cylindriques de section droite circulaire, l'orientation est calculée à partir de l'étude des dimensions des ellipses obtenues. Cependant, l'application d'une telle méthode dans le cadre de composites renforcés en fibres continues, donc fortement alignées, a mis en évidence la présence d'une erreur systématique dans l'analyse des ellipses [*Yurgartis*, 1987].

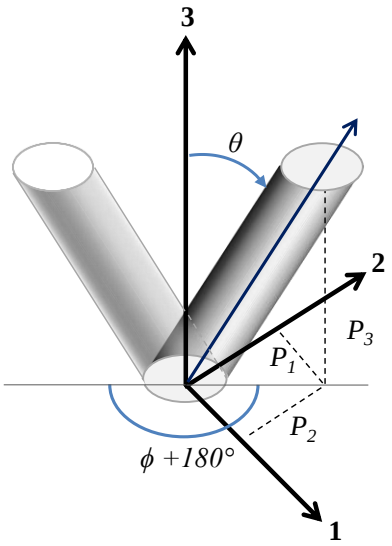


Figure 2-2 : Ambiguïté dans la détermination de l'orientation d'une fibre dans l'espace

Cette erreur est liée à l'ambiguïté de la mesure de l'angle θ. Pour une fibre orientée à θ et $\theta+180°$, la forme de l'ellipse à analyser est la même (*figure 2-2*). De plus, si la section droite d'une fibre n'est pas circulaire, lorsque celle-ci est orientée suivant une faible valeur de θ, les méthodes de détection ne permettent pas de rendre compte de son orientation réelle. La différentiation entre un cercle imparfait et une ellipse de faible rapport de forme est alors difficile. Le calcul des composantes a_{13} et a_{23} est, par conséquent, mathématiquement impossible. Afin d'obtenir une majorité d'ellipses et de limiter cette erreur de mesure, Yurgartis propose de prélever les échantillons à observer selon un angle α prédéterminé. Les formes à analyser ne sont donc plus circulaires mais majoritairement elliptiques. Il est alors possible de corriger les angles θ et ϕ à partir des mesures θ^m et ϕ^m, grâce au système *(2.5) :*

$$\theta = cos^{-1}(sin\theta^m \, sin\,\varphi^m \, sin\,\alpha + cos\,\theta^m \, cos\,\alpha)$$

$$\varphi = tan^{-1}\left(\frac{sin\,\theta^m \, cos\,\varphi^m}{sin\,\theta^m \, sin\,\varphi^m \, cos\,\alpha \, cos\,\theta^m \, sin\,\alpha}\right) \qquad (2.5)$$

La coupe suivant un angle α ne doit être ni orthogonale à la direction d'injection, ni à la direction transverse (soit, respectivement, les axes 3 et 2). Les travaux de thèse de Bensahkoun [*Dray Bensahkoun*, 2006] et de Crevel [*Crevel*, 2014] s'accordent sur le fait que α est optimal, pour une mesure plus fiable de l'orientation des fibres, à 45° par rapport au plan d'injection (3,1). D'autres auteurs, tel que Bay [*Bay & Tucker*, 1992] utilisent la stéréologie, prenant en compte les distributions des aires, volumes et longueurs de fibres afin d'appliquer une correction statistique de l'orientation. Enfin, les travaux d'Eberhardt en microscopie confocale laser, proposent l'association d'un sectionnement optique des plans du matériau à l'analyse d'image afin de reconstruire la distribution de l'orientation des fibres en 3D [*Eberhardt & Clarke*, 2001].

Afin de supprimer cette ambigüité, des auteurs ont proposé une méthode à double section qui consiste à étudier le même échantillon sur deux surfaces parallèles proches. La section droite de la fibre peut alors être reconstituée afin de corriger la valeur de θ [*Zak et al.*, 2001]. Une autre méthode, pseudo-tridimensionnelle, est proposée par Cayzac [*Cayzac*, 2014] et consiste à appliquer un double seuillage de niveau de gris sur une image surfacique de la microstructure. Cette méthode reprend le principe de la méthode des surfaces parallèles mais permet d'évaluer la section droite de la fibre grâce à une seule image.

Les méthodes présentées dans cette section traduisent la difficulté à déterminer l'orientation précise des fibres dans la microstructure. Ces difficultés géométriques sont liées à l'analyse surfacique de la microstructure et seules les méthodes qui introduisent une mesure pseudo-tridimensionnelle semblent limiter les erreurs de mesure. Il faut enfin noter que dans les méthodes décrites, la géométrie des fibres a une importance non négligeable quant à la technique utilisée afin de déterminer leur orientation. Afin de contourner ces difficultés, une méthode d'analyse tridimensionnelle, grâce à la tomographie aux rayons-X est choisie pour déterminer l'orientation des fibres.

4.1.3. Géométrie des fibres courtes dans le matériau

Dans ce paragraphe, la géométrie des fibres est définie par la section et la longueur des fibres. Au même titre que l'orientation des fibres, ces grandeurs peuvent être données pour chaque fibre ou exprimées par des distributions ou moyennes.

Dans un composite renforcé en fibres continues, la géométrie des fibres n'est pas le premier facteur influant sur le comportement mécanique [*Gusev et al.*, 2000]. Elle a cependant un impact plus important dans le cas d'un matériau renforcé en fibres courtes [*Fu et Lauke*, 1996], [*Hine et al.*, 2002], [*Lin et al.*, 2008]. Le diamètre et la distribution de longueur des fibres peuvent être obtenus par différentes techniques conventionnelles.

Le diamètre de fibres cylindrique de section droite circulaire peut être déterminé par analyse d'images 2D de la microstructure, et ce, quel que soit l'angle d'observation α. Comme pour l'orientation des fibres, la section de chaque fibre de l'image est une ellipse particulière dont les dimensions sont à déterminer. Le diamètre d'une fibre dans ce cas correspond systématiquement à la taille du plus petit axe de l'ellipse. Les deux méthodes principalement utilisées pour la détection et la segmentation d'ellipses dans une image sont la transformée de Hough [*McLaughlin*, 1998] et le calcul des moments du second ordre d'une forme pixélisée [*Ahn et al.*, 2001].

Comme évoqué au paragraphe *1.3.2* de l'introduction générale, les fibres de carbone qui renforcent le matériau de l'étude et présentée dans la seconde partie de ce manuscrit, ont une particularité géométrique : il s'agit de leur section droite en forme de haricot (« Kidney-Bean Shape », abrévié ici KBS), générée lors de leur fabrication. L'observation d'un faciès de rupture du matériau en compression montre néanmoins que cette particularité géométrique n'est pas systématique *figure 2-3*.

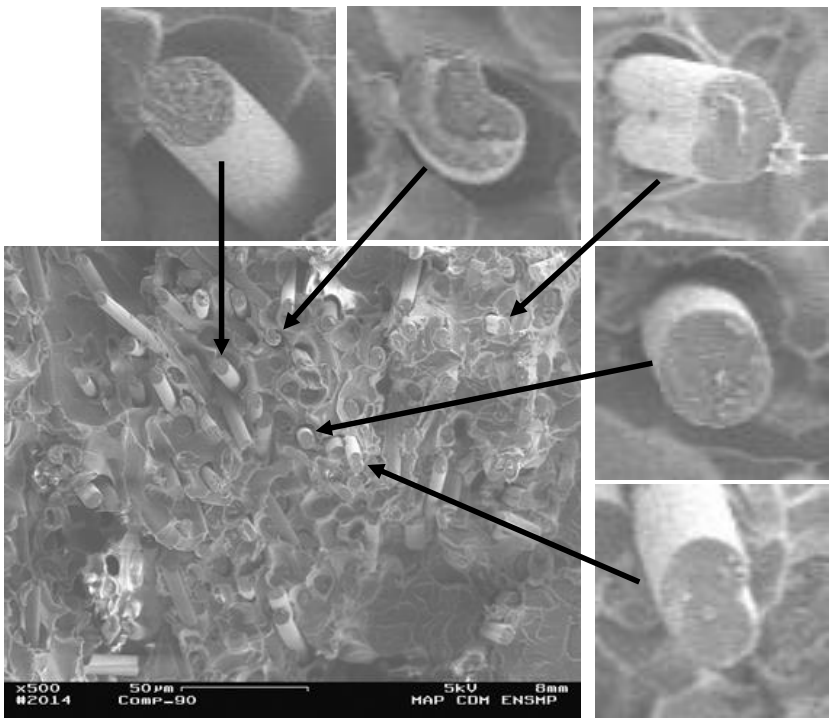


Figure 2-3 : Observation de l'hétérogénéité de la section droite des fibres présentes dans le matériau étudié sur un faciès de rupture du composite en compression

La section droite de la fibre n'est pas circulaire mais il est néanmoins possible de trouver la section équivalente la plus proche d'une forme arbitraire, en se basant notamment sur les travaux de Mulchrone [*Mulchrone & Choudhury*, 2004]. L'évaluation de la moyenne pondérée de l'intensité des pixels de l'image permet de calculer la covariance de la section. La covariance permet ainsi de déterminer les dimensions de l'ellipse de surface équivalente à celle de la section analysée [*Ming-Kuei Hu*, 1962]. Par la même méthode, il est également possible de déterminer le cercle inscrit de la forme, de périmètre et de surface connus grâce à sa segmentation [*Xing et al.*, 2005]. Ces deux techniques sont illustrées sur une section de fibre KBS sur la *figure 2-4*.

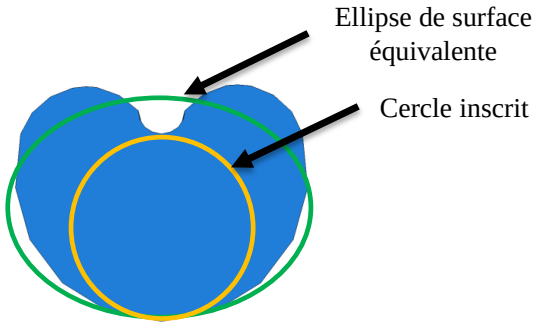


Figure 2-4 : Techniques de segmentation d'une forme arbitraire appliquée à une section de fibre KBS pour une ellipse de surface équivalente et un cercle inscrit.

Ces deux techniques de segmentation surfaciques ne suffisent cependant pas à évaluer les dimensions de la section droite d'une fibre KBS. Faisant écho au paragraphe précédent (*4.1.2*), la section droite dépend à la fois du plan d'observation et de l'orientation de la fibre étudiée. Comme le montre la *figure 2-5*, sur laquelle une géométrie KBS a été numériquement

reproduite, la forme de la section d'une fibre de carbone présente dans le matériau, coupée par un plan d'orientation spécifique est unique. L'orientation d'une fibre étant définie dans l'espace par la combinaison des angles θ et ϕ, il existe donc une infinité de sections différentes.

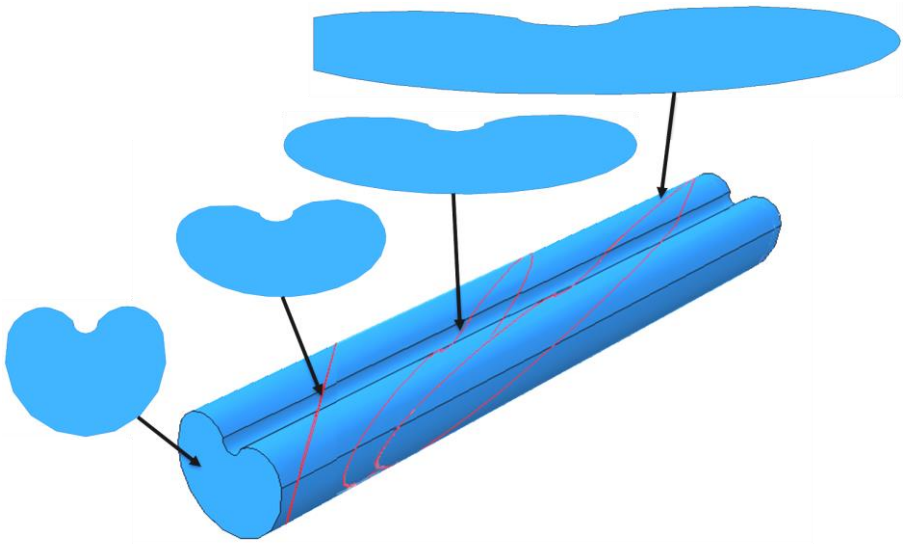


Figure 2-5 : Représentation de la section KBS d'une fibre coupée suivant différents plans de coupe

L'ellipse équivalente décrivant la section droite de la fibre ne peut donc être déterminée qu'à la suite d'un double seuillage, d'une procédure d'observation de surfaces parallèles (décrites au paragraphe *4.1.2*) ou de façon tridimensionnelle.

La longueur des fibres peut être mesurée à la suite d'un procédé de digestion acide ou de pyrolyse de la matrice (*paragraphe 4.1.1*). Après séchage, les fibres sont prélevées, tamisées et placées sur une lame de verre, un carreau blanc ou sur un adhésif afin d'être observées en microscopie optique [*Kurtz*, 2011]. La longueur de chaque fibre est ainsi déterminée par analyse d'image [*Gupta et al.*, 1989]. Cette méthode implique le choix d'un compromis entre la taille des images, permettant la mesure d'une quantité représentative de fibres, et leur résolution, permettant la mesure automatique de la longueur des fibres. Les nombreux travaux de Fu [*Fu et al.*, 1999], [*Fu et al.*, 2000], [*Fu et al.*, 2001] ont permis d'affiner cette mesure en proposant notamment une correction des tailles mesurées en 2D. En effet, la distribution de longueurs mesurée doit prendre en compte les fibres incomplètes sur les images et les potentiels chevauchements lors du positionnement des fibres sur la lame avant observation [*Fu et al.*, 2002].

4.1.4. Confinement matriciel : la proximité des fibres dans la microstructure

La fraction volumique, l'orientation et la géométrie des fibres dans la microstructure conduisent à définir une dernière variabilité : le confinement matriciel. Défini à l'échelle mésoscopique, le confinement matriciel consiste à étudier la proximité des fibres dans la microstructure.

Le confinement matriciel peut se traduire par la capacité de la matrice à se déformer dans un espace restreint. Un fort taux de confinement matriciel traduit un enfermement de celle-ci [*Cayzac*, 2014], la contraignant à suivre la déformation des renforts, comme dans le cas du collage structural. Pour une résine thermoplastique amorphe telle que le PEI, renforcée en fibres courtes de carbone, dont la rigidité est 80 fois supérieure à celle de la matrice, cette notion est

essentielle : la distribution spatiale hétérogène et le mouvement des fibres vont confiner la matrice de façon tout autant hétérogène.

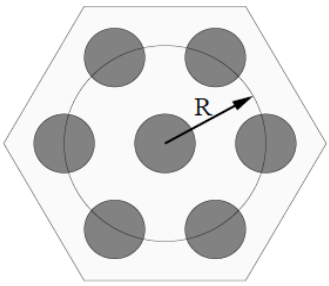
Physiquement, le confinement matriciel s'exprime par la pression hydrostatique subie par la matrice, ou « pression de confinement » [*Weaver & Williams*, 1975]. Elle influence directement le comportement local de la matrice et le comportement global du composite [*Partridge & Ward-Close*, 1993], jusqu'à celui à rupture [*Dyer*, 2004]. Cette pression hydrostatique permet de calculer un taux de triaxialité des contraintes, défini comme étant le rapport de la pression hydrostatique sur la contrainte effective de von-Mises. Le taux de triaxialité est utilisé depuis les années 60 [*Rice & Tracey*, 1969] pour étudier la rupture ductile des métaux, causée par les porosités qui, génèrent un état de contrainte multiaxial au sein du matériau [*Hancock & Mackenzie*, 1976]. Par analogie, dans un matériau composite à matrice céramique, l'étude de l'évolution du taux de triaxialité traduit l'effet de la proximité des particules de carbure de silicium au sein de la microstructure sur le comportement global du matériau [*Christman et al.*, 1989]. Appliquée aux polymères, elle mène à l'étude de l'influence de la forme des porosités présentes sur la triaxialité des contraintes dans un matériau élastoplastique et permet finalement l'identification des mécanismes de rupture menant à la ruine du matériau [*Danas & Ponte Castañeda*, 2012], [*Laiarinandrasana et al.*, 2016], [*Poulet et al.*, 2016].

Or la pression hydrostatique, ou le taux de triaxialité, ne sont pas des paramètres intrinsèques au matériau : ils sont générés par les interactions entre les fibres au sein de la microstructure, ces interactions étant définies par la distribution spatiale des fibres, leur comportement et leur orientation. Une fois leur comportement (déterminé dans la *partie 2*) et leur orientation identifiés, il s'agit donc de mesurer leur distribution spatiale, c'est-à-dire leur position relative au sein de la microstructure.

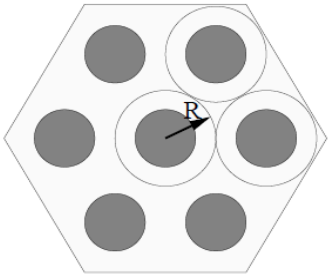
L'étude de la fonction de distribution du plus proche voisin d'une particule semble être la meilleure façon d'étudier les interactions de particules dans un système complexe [*Torquato et al.*, 1990]. Considérée sur une zone spécifique ou sur l'ensemble de la microstructure, la distribution des valeurs de ces distances entre les particules, qui sont ici des fibres, donne généralement le niveau de proximité des fibres dans la microstructure, et par conséquent, l'enfermement de la matrice. Cependant, même dans le plan et en prenant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, la définition de cette distance entre fibre n'est pas triviale. Pour illustrer ce propos, les différentes formulations du « Shear lag model » synthétisées dans l'article de Tucker III [*Tucker III & Liang*, 1999] peuvent être évoquées. Ce modèle fait intervenir un terme *H*, qui permet le calcul de la contrainte de cisaillement à la surface de la fibre. Le terme *H* dépend du rayon des fibres et du rayon *R* du cylindre matriciel entourant chaque fibre.

Or les travaux divergent sur la définition de *R :*

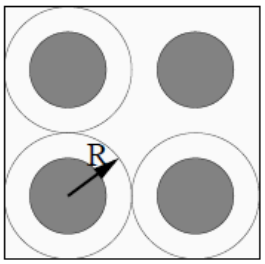
- Cox [*Cox*, 1952], à l'origine du modèle, propose de définir *R* comme étant la distance au centre d'une fibre par rapport au centre des premières fibres voisines.



- Hashin [*Hashin & Rosen*, 1964], propose une définition de R comme étant la demie-distance aux premières fibres voisines dans un arrangement hexagonal.



- Robinson [*Robinson & Robinson*, 1994], propose une définition de R comme étant la demie-distance aux premières fibres voisines dans un arrangement carré.



La valeur de *R* dans ces travaux est une constante et donne des prédictions différentes du comportement élastique selon la définition choisie, ce qui illustre la difficulté à définir la distance entre les fibres dans le plan.

Dans le cas de composites renforcés en fibres unidirectionnelles, Cayzac [*Cayzac*, 2014] propose la définition du taux d'élancement relié au confinement matriciel par la distance inter-fibres et leur diamètre. Ces travaux, inspirés de ceux de Christensen [*Christensen*, 1979], sont basés sur l'évaluation de la distance au centre de masse de chaque voisin d'une fibre circulaire et continue. Les renforts étant des fibres continues, une étude surfacique de la microstructure est suffisante pour déterminer le confinement matriciel avec la méthode du taux d'élancement.

La mesure du confinement matriciel est encore rarement étudiée dans la littérature sur les CRFC. Comme vu dans les paragraphes *4.1.2* et *4.1.3*, leur microstructure est un système composé de fibres d'orientations et de longueurs différentes. De ce fait, l'extension des méthodes évoquées précédemment devient particulièrement complexe dans le cadre d'une mesure bidimensionnelle : ces mesures devraient être prises de manière systématique par polissages successifs de la surface d'un échantillon. Une telle technique, bien que possible, semble d'emblée fastidieuse afin d'assurer le même plan d'observation après chaque polissage. De plus, les mêmes fibres doivent être identifiées d'une couche à l'autre. L'utilisation de méthodes d'observations tridimensionnelles semble finalement être plus indiquée afin de définir le confinement matriciel.

4.2. La tomographie aux rayons X

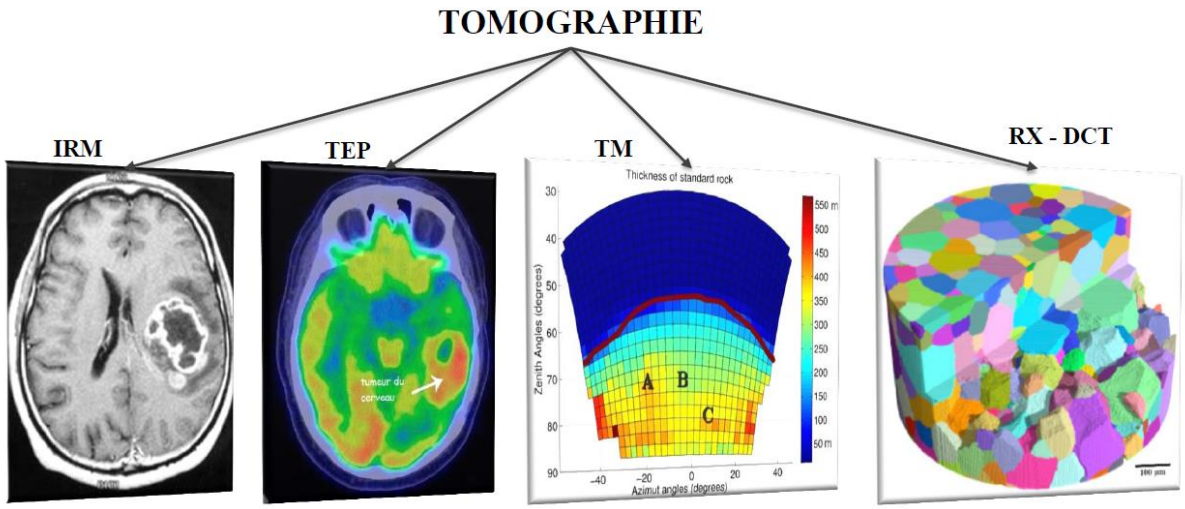
La principale technique d'observation des fibres dans l'espace est la tomographie aux rayons X (RX). Toutefois, cette méthode est aujourd'hui moins répandue dans l'étude des composites chargés en fibres de carbone car elle nécessite l'utilisation du contraste de phase, disponible uniquement dans des synchrotrons de troisième génération tels que l'ESRF (Grenoble) ou SOLEIL (Saclay). En effet, le contraste de phase permet de mieux distinguer des objets dont la densité électronique est proche, tels que les fibres de carbone et la matrice PEI.

Contrairement aux méthodes d'observation 2D et de mesure conventionnelles, la tomographie aux rayons X présente une relative simplicité quant à la préparation des échantillons à analyser. En revanche, la difficulté de la tomographie réside dans le stockage et le traitement des données. En effet, chaque scan représente plusieurs Giga octets qu'il faut pouvoir stocker, mais surtout charger dans la mémoire vive de l'ordinateur pour effectuer le traitement des images. Le traitement à appliquer à l'image consomme également des ressources informatiques, ce qui peut alors être limité par le matériel disponible. Cette limitation se traduit soit par une incapacité à travailler sur les données, soit par un temps d'analyse informatique long. La seconde difficulté de l'analyse d'images de tomographie, plus particulièrement en contraste de phase, réside dans le choix des outils de segmentation (séparation des phases : matrice, fibres, vide) et de labellisation (identification unique de chaque objet) des données. Ce n'est qu'une fois labellisées que les fibres peuvent être analysées et leur orientation déterminée. Une telle étude peut finalement apporter une richesse d'information sur la complexité de la microstructure, à partir d'une seule et même manipulation expérimentale.

Dans cette section du manuscrit, les principes fondamentaux de la tomographie aux rayons X sont présentés. L'application de cette technique d'observation au matériau de l'étude implique la définition du contraste de phase et de la méthode de traitement de données acquises sur le composite. Ces données sont issues d'une campagne d'essais sur éprouvettes axisymétriques, réalisée sur la ligne PSICHE du synchrotron SOLEIL. La ligne PSICHE (Pression Structure Imagerie par Contraste à Haute Energie) du synchrotron SOLEIL est une ligne de lumière dédiée à la diffraction de rayons X sous conditions extrêmes (en pression et température) et pour la tomographie par contraste d'absorption à haute énergie (20 à 50 KeV). Cette ligne dispose de la technologie d'imagerie RX par contraste de phase depuis janvier 2016. Elle est dotée d'une platine de rotation et d'un espace suffisant entre le faisceau et le récepteur permettant la prise de clichés *ex-situ* et l'adaptation d'instrumentations *in-situ* pour l'étude de matériaux métalliques, polymères ou composites [*King et al.*, 2015].

4.2.1. Principes fondamentaux

La tomographie est un ensemble de techniques de contrôle non destructif de systèmes complexes donnant accès à leur représentation tridimensionnelle. Elle est principalement utilisée en médecine depuis les années 70 [*Hounsfield*, 1973], notamment grâce à l'imagerie d'émission (IRM : Imagerie par Résonnance Magnétique) et l'imagerie de transmission (TEP : Tomographie par Emission de Positons), qui utilise notamment les rayonnements d'un traceur faiblement radioactif injecté dans le patient [*Brownell et al.*, 1969]. La tomographie est également utilisée pour l'étude de systèmes géologiques [*Lesparre et al.*, 2012], grâce à la TM (Tomographie Muonique) qui utilise la mesure du flux de muons cosmiques pour déterminer la densité du système étudié [*Alvarez et al.*, 1970]. Enfin, la tomographie permet l'étude de systèmes de tailles inférieures (de l'ordre du micromètre, voire du nanomètre) tels que les matériaux (Tomographie aux Rayons X : RX et Tomographie en Contraste de Diffraction : DCT), ces techniques sont illustrées sur la *figure 2-6.*



[ARTC, 2017] *[CNRS, 2010]* *[Ludwig et al., 2011]*

Figure 2-6 : La tomographie : un ensemble de techniques non destructives

En science des matériaux, l'imagerie RX consiste à faire traverser un flux de photons X au travers d'un échantillon. Ces photons X, dont la taille peut varier entre 10^{-2} et 10 nanomètres, sont ensuite récupérés sur un détecteur. Ils sont comptés et leur intensité, résultante de leur passage au travers du matériau, est mesurée. Une image 2D, non exploitable en l'état est ainsi générée : c'est une projection radiographique de l'échantillon. En tomographie, un scan est un ensemble de radiographies générées à *N* incréments angulaires de l'échantillon qui a été mis en rotation grâce à une platine. Le principe de la tomographie RX est illustré sur la *figure 2-7*.

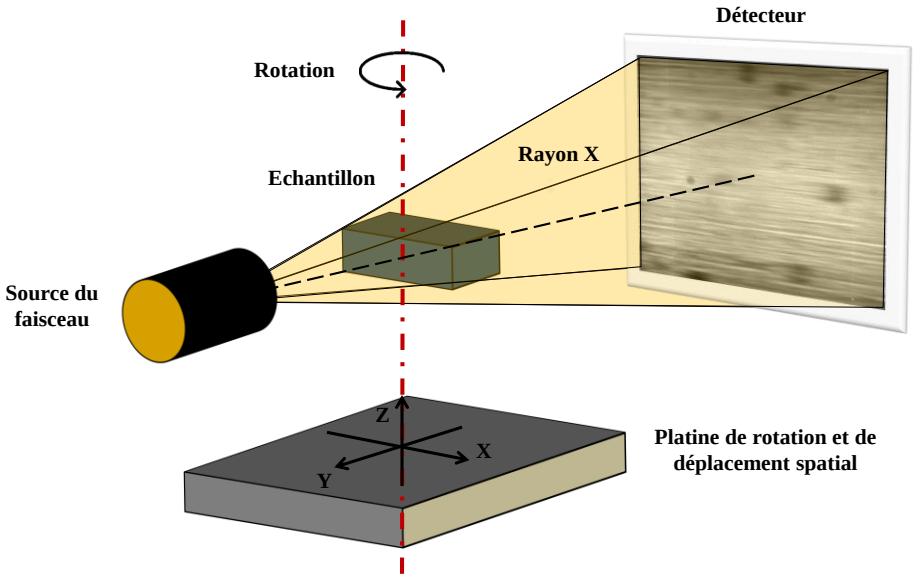


Figure 2-7 : Principe de la tomographie RX pour l'étude des matériaux

L'étape suivante consiste à reconstituer l'image du matériau à partir des projections 2D via un algorithme de reconstruction. Généralement, il s'agit de faire la rétroprojection des images 2D prises au cours du scan de l'échantillon. Ce processus est illustré dans la *figure 2-8*, à partir d'une image de test d'algorithmes de reconstruction (le fantôme de Shepp-Logan, [*Shepp & Logan*, 1974]).

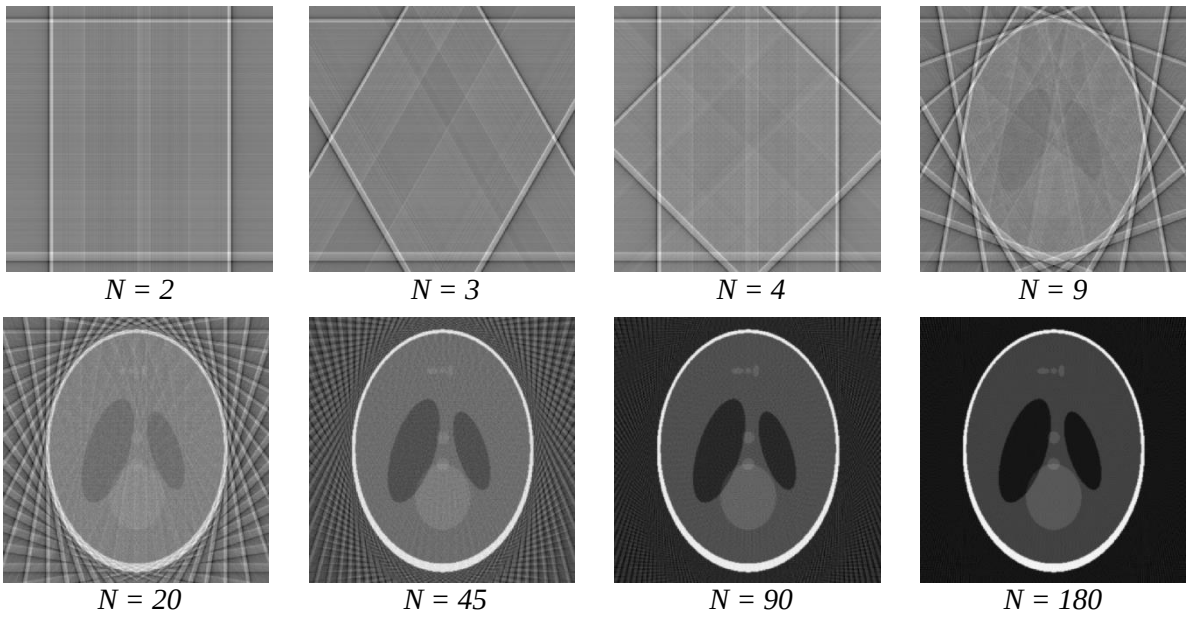


Figure 2-8 : Illustration du processus de rétroprojection de N radiographies en tomographie RX

L'image reconstruite peut ainsi être utilisée pour étudier le matériau. A cette étape, le scan reconstruit est un empilement d'images 2D encodées en 32 bits, c'est-à-dire qu'il contient 2^{32} nuances de gris et pèse 32 Giga octets. Afin de rendre ce scan plus facilement exploitable, un « recadrage » des images est effectué. Cette étape consiste à observer la distribution de niveaux de gris dans l'image et de la ré-encoder en ne considérant que les valeurs majoritairement présentes. La taille de l'image peut alors être divisée par 4, *à minima*, tout en conservant les mêmes quantités et qualité d'informations.

4.2.2. Tomographie en contraste de phase

La tomographie RX en contraste de phase est issue de l'étude des interférences des ondes cohérentes traversant un solide [*Bonse & Hart*, 2004]. Son principe, formalisé pour l'étude des matériaux au début des années 90 [*Rudolph et al.*, 1990], est basé sur le changement de direction de photons traversant un milieu constitué de matériaux dont le coefficient d'atténuation linéaire est proche et faible. Ce phénomène n'est observable que si le faisceau de rayons X est hautement cohérent, c'est-à-dire qu'il est sensible à une variation locale du milieu qu'il traverse. Cette variation locale va générer des interférences lorsque les photons traversent les interfaces entre les matériaux du milieu [*Paganin*, 2006], [*Mayo et al.*, 2012] et ainsi améliorer leur contraste sur les scans obtenus *(figure 2-9)*.

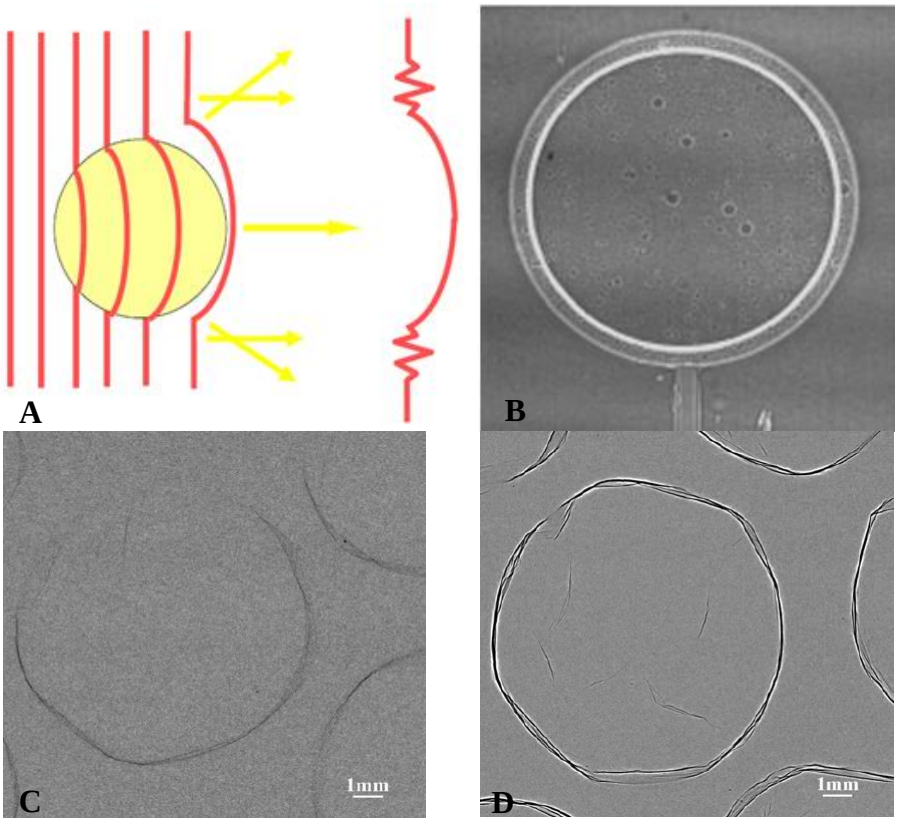


Figure 2-9 : (A) : Principe du contraste de phase : interférences causées par le changement de direction des photons. (B) : Projection du schéma sur l'étude d'un matériau [Kaulich et al., 2006]. (C & D) : Illustration du contraste de phase sur une bulle de nylon en tomographie par absorption (C) et en contraste de phase (D)

La tomographie en contraste de phase est utilisée depuis les années 90 pour l'étude des matériaux composites [*Davis et al.*, 1995]. Les nouvelles générations de synchrotrons ont permis d'étendre ces études à la caractérisation tridimensionnelle de leur microstructure et de leur endommagement de façon qualitative [*Cloetens et al.*, 1997], [*Cosmi et al.*, 2011]. L'utilisation du contraste de phase implique l'utilisation d'un algorithme de reconstruction des phases spécifique, développé par Paganin [*Paganin*, 2006] et disponible sur la ligne PSICHE du synchrotron SOLEIL.

4.2.3. Analyse d'image, segmentation et labélisation des fibres de carbone

La tomographie RX est relativement répandue pour l'étude statique de matériaux composites chargés en fibres de verre [*Young*, 2009]. Elle est également une des méthodes permettant l'observation des mécanismes d'endommagement au sein du matériau, notamment lors de sollicitations *in-situ* en fatigue [*Rolland et al.*, 2016]. L'université de Southampton propose de nombreux travaux sur l'étude des micromécanismes d'endommagement dans les matériaux composites renforcés en fibres de carbone continues [*Scott et al.*, 2011], [*Garcea et al.*, 2015], [*Borstnar et al.*, 2015]. Ces travaux montrent la capacité de la tomographie *ex-situ* ou *in-situ* à accéder à des données quantitatives sur l'endommagement de ces matériaux. Cependant, l'étude de matériaux renforcés en fibres courtes de carbone est moins répandue du fait des faibles dimensions des fibres (par rapport aux fibres de verre) et de la nécessité d'utiliser des lignes de lumière synchrotron en contraste de phase, les coefficients d'atténuation des fibres et de la matrice devenant trop proches.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, un compromis a dû être trouvé entre le volume observable, devant contenir la majorité de l'épaisseur du matériau (3 millimètres), la puissance du faisceau (3keV) et la résolution des images. L'optimum s'est avéré être un volume (2,8 x 2,8 x 2,8) millimètres, pour une résolution de 1,3 micromètres par pixel (respectivement 1,3 x 1,3 x 1,3 micromètres par voxels). La surface de la section droite d'une fibre contient ainsi environ 5 pixels. Or, en considérant à la fois le gradient de niveau de gris dû au contraste de phase et la résolution des images, il est difficile de segmenter avec précision les fibres lorsqu'elles sont amassées en utilisant un seuillage simple en niveaux de gris, comme le montre la *figure 2-10*.

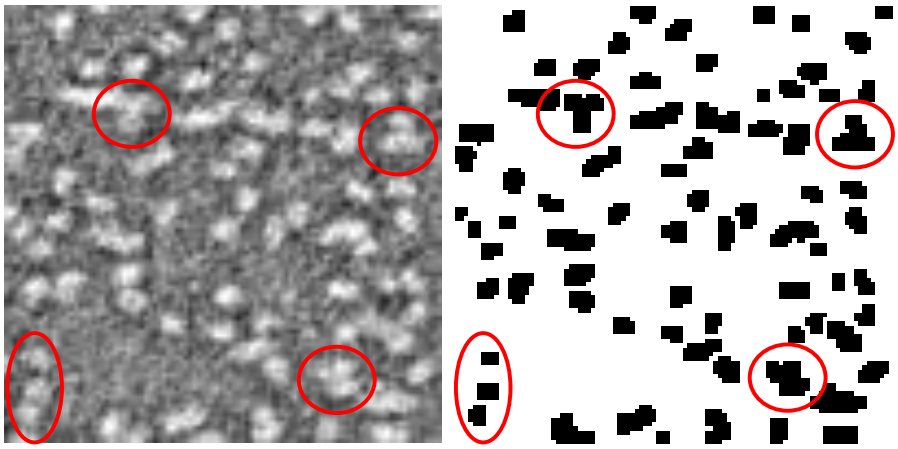


Image originale *Image seuillée*

Figure 2-10 : Segmentation des fibres par un seuillage de niveau de gris simple

L'observation de l'histogramme de répartition des niveaux de gris (*figure 2-11*) met en évidence que la distribution des valeurs n'est pas discrète : il n'existe pas de seuil parfait permettant une segmentation suffisante afin de distinguer chaque fibre.

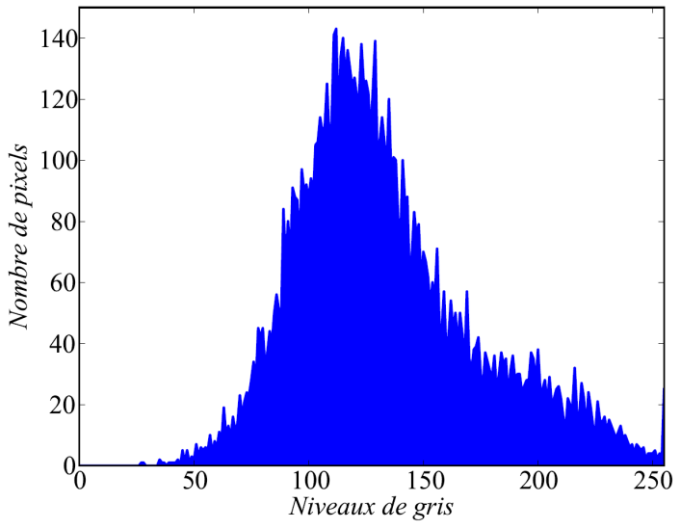


Figure 2-11 : Histogramme de distribution des niveaux de gris dans une image de tomographie RX en contraste de phase

Ces observations sont le résultat d'un gradient de niveaux de gris aux interfaces du matériau provoqué par le contraste de phase. Ce gradient est présent à chaque transition de phases du matériau : entre les fibres et la matrice et entre la matrice et le vide. La *figure 2-12* montre ce gradient à différentes interfaces entre le matériau et le vide. Une telle particularité limite l'utilisation d'outils conventionnels d'analyse d'image basés uniquement sur le seuillage du niveau de gris afin de segmenter les fibres, la matrice, l'endommagement et le vide.

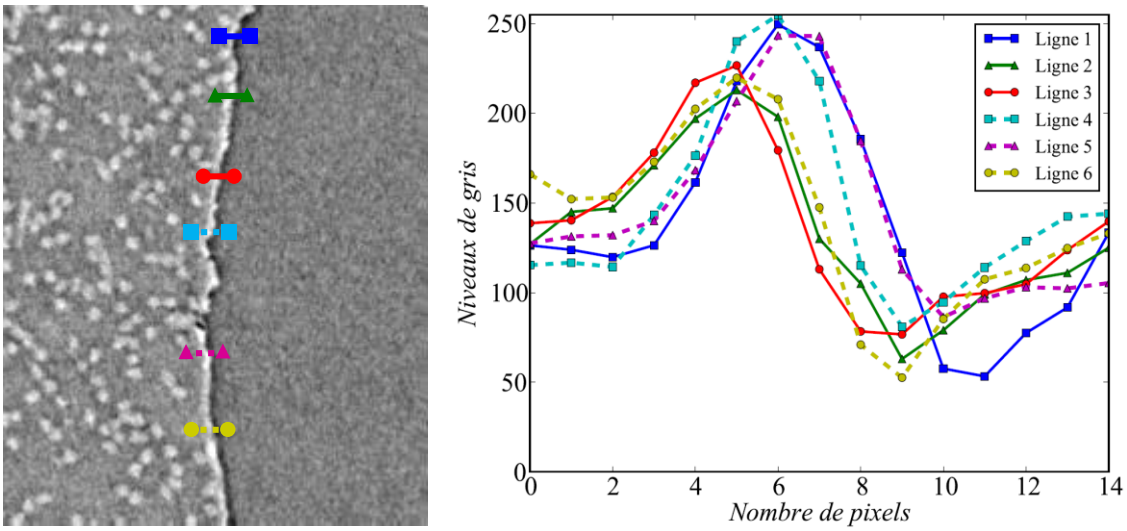


Figure 2-12 : Niveaux de gris à l'interface des matériaux en contraste de phase. Exemple de gradients à l'interface matériau-vide.

Cette observation implique le choix d'une méthode de segmentation spécifique des fibres, permettant de détecter un maximum de fibres dans le volume et d'en déterminer les variabilités. En dehors du seuillage simple, une méthode a été développée en biomécanique [*Cowin et Doty*, 2006] et appliquée aux matériaux composites dans diverses études [*Bernasconi et al.*, 2008], [*Rasheva et al.*, 2010], [*Bernasconi et al.*, 2012], [*Bourmaud et al.*, 2013]. L'approche proposée dans ces travaux est basée sur l'analyse de l'anisotropie locale des fibres dans l'image, étudiée à l'aide de la longueur moyenne d'interception (Mean Intercept Length, MIL). Ce paramètre est défini comme la distance moyenne entre deux phases dans une direction donnée. Une telle méthode permet d'accéder à un état d'orientation moyen des fibres, mais ne fournit pas d'information sur l'orientation de chaque fibre au sein du matériau.

La méthode utilisée pour segmenter des fibres a été initiée par le laboratoire de biologie moléculaire de Cambridge grâce aux travaux de Roseman [*Roseman*, 2000], puis développée et implémentée par le Zuse Institute de Berlin (ZIB) dans le module Xfiber d'Avizo 9 [*Rigort et al.*, 2012], [*Weber et al.*, 2012]. Elle fait appel à un algorithme de corrélation d'un cylindre dans l'espace des données. Une fois les dimensions du cylindre paramétrées (*figure 2-13*), il est positionné dans l'espace et orienté de manière à faire correspondre son centre de masse et sa densité à ceux de l'objet analysé. La seconde étape du processus de traitement de l'image est la corrélation de lignes centrales des cylindres segmentés, ce qui correspond au squelette des fibres. Ces segments sont ensuite labélisés et dilatés suivant le diamètre équivalent d'une fibre. Le volume segmenté et labélisé peut être étudié et les données relatives à chaque fibre peuvent être déterminées.

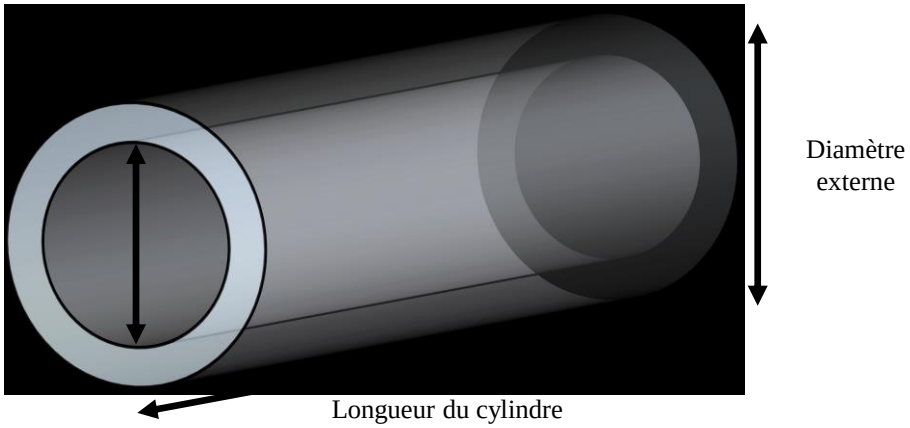


Figure 2-13 : Cylindre de dimensions paramétrables dans Xfiber

Le diamètre externe, tel qu'il est considéré dans Xfiber, est le diamètre réel de la fibre issu d'une éventuelle mesure préalable. Le diamètre maximal est une donnée de souplesse de la détection : elle permet d'admettre une variation du diamètre réel d'une fibre. L'utilisation de cette méthode implique que les fibres soient considérées comme cylindriques. Cette hypothèse a été prise dans le cadre de ces travaux de thèse afin de simplifier à la fois la segmentation des fibres et leur modélisation.

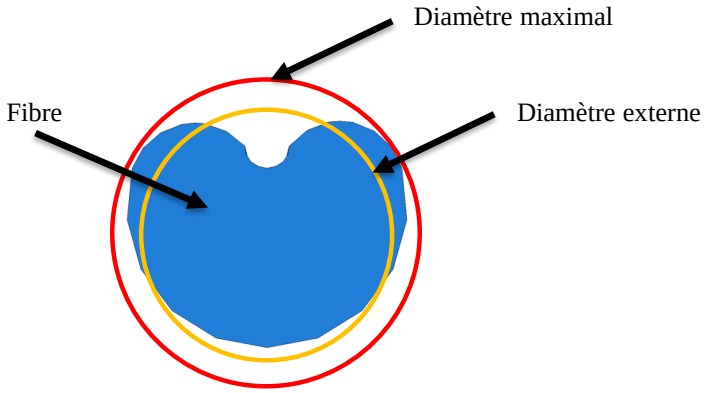


Figure 2-14 : Diamètre équivalent de la section droite d'une fibre KBS avec la méthode de corrélation de cylindres

Les diamètres de détection externe et maximal sont respectivement fixés à 5 et 6 pixels (soit environ 6,5 et 7,8 micromètres). Grâce à cette méthode, les fibres dont la section droite est comprise entre ces valeurs sont détectées et segmentées.

4.2.4. Traitement des données segmentées et labélisées

Le traitement des données avec Xfiber donne accès aux segments centraux qui définissent l'ensemble des objets détectés : les fibres. Ces résultats sont récupérés dans trois tableaux différents « segments », « nœuds » et « points », qui contiennent entre autres :

- **Segments :** noms des segments, nom des points qui les définissent, nom des nœuds qui constituent leurs extrémités, indicateur de tortuosité
- **Nœuds :** noms des nœuds et leurs coordonnées dans l'espace
- **Points :** noms des points et leurs coordonnées dans l'espace

Le tableau « points » n'est pas utile dans notre cas : les cylindres recherchés sont strictement droits. Seuls les tableaux « segments » et « nœuds » sont utilisés pour traiter les

données relatives aux fibres grâce aux nœuds des extrémités de chaque fibre (*a* et *b*) et de leurs coordonnées dans l'espace. A partir de ces informations, il est possible de déterminer la longueur (*L*), les composantes du vecteur principal $\vec{P}$ (P_1, P_2 et P_3) et l'orientation de chaque fibre (θ et ϕ). Ces données ont été traitées à l'aide d'un script python dont les étapes sont récapitulées sur la *figure 2-15*. Les grandeurs homogènes à des longueurs sont directement converties en micromètres avec le terme de résolution *R* (*R* = 1,3 micromètres/pixel), ce qui correspond à l'échelle de l'image.

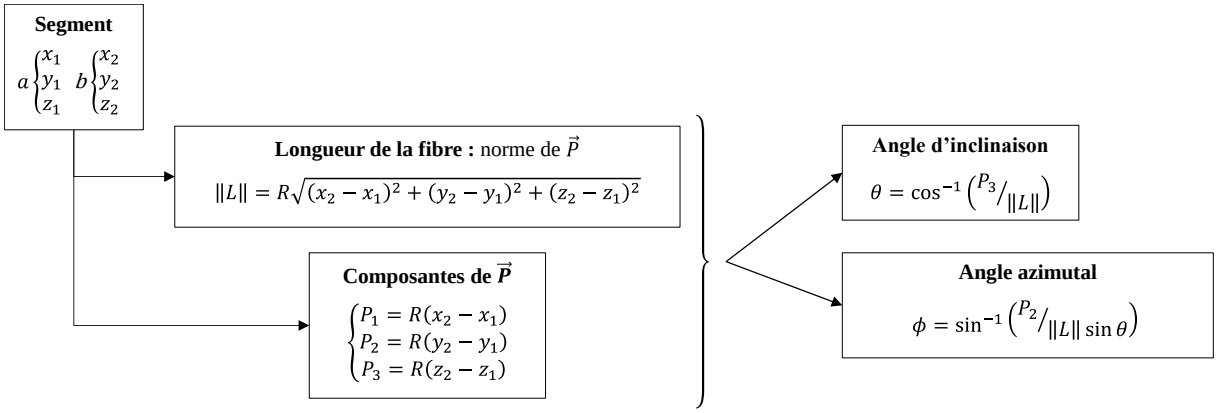


Figure 2-15 : Calcul des paramètres des fibres pour chaque segment issu du traitement des images de tomographie

4.3. Caractérisation expérimentale de la microstructure

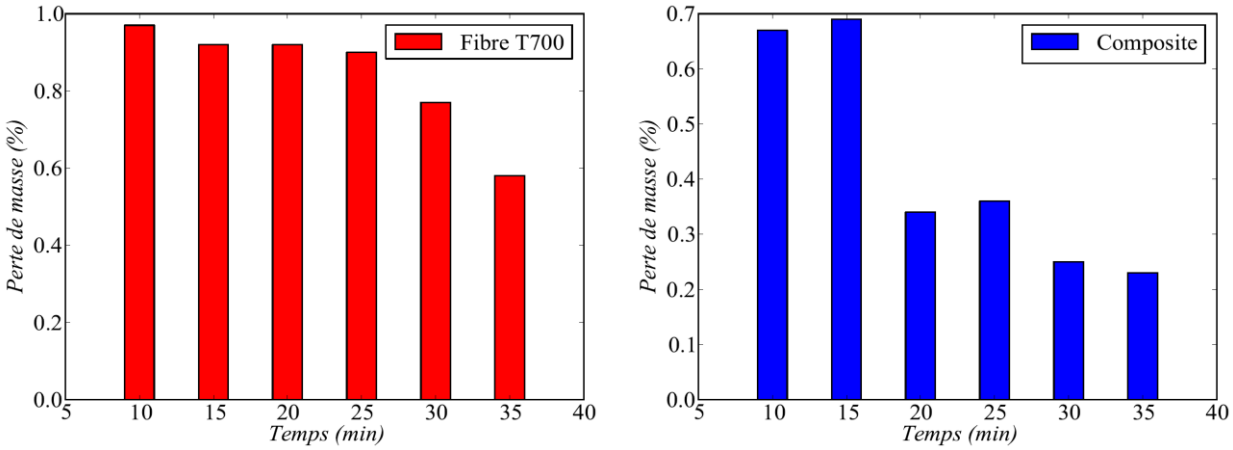
L'ensemble des variabilités définies dans les paragraphes précédents a été mesuré. Bien que la majorité des résultats présentés dans ce chapitre soit issus d'une caractérisation tridimensionnelle, à l'aide de la tomographie en contraste de phase, des techniques de mesure 2D ont été utilisées pour compléter ces mesures. En effet, dans les données de tomographie RX, le diamètre des fibres est estimé par méthode inverse grâce à la fraction volumique de fibres mesurée en 2D et par pyrolyse. Le *tableau 2-1* récapitule les techniques utilisées pour les cinq types de variabilités étudiées.

Variabilité	Technique utilisée
Fraction volumique	Mesure surfacique : pyrolyse et analyse d'image
Longueur des fibres	TRX en contraste de phase
Diamètre des fibres	Méthode inverse avec TRX en contraste de phase
Orientation des fibres	TRX en contraste de phase
Confinement matriciel	TRX en contraste de phase

Tableau 2-1 : Méthodes de caractérisation des variabilités de la microstructure utilisées

4.3.1. Détermination de la fraction volumique

Deux méthodes sont utilisées afin de déterminer la fraction volumique de fibres dans le matériau. La fraction volumique est d'abord déterminée à l'aide d'un procédé de pyrolyse de la matrice présenté dans le paragraphe *(4.1.1)*. Le contrôle de la dégradation des fibres par pyrolyse est effectué sur des fibres de carbone T700. Six échantillons de composite et de fibres sont préparés et placés dans une étuve. Après dix minutes, deux échantillons sont ôtés de l'étuve et placés sous cloche protectrice. Cette étape est répétée ensuite toutes les cinq minutes jusqu'à un temps total de trente-cinq minutes. Les creusets sont pesés après refroidissement total et la fraction de perte de masse est calculée. Pour le composite et les fibres T700, ces résultats sont illustrés sur la *figure 2-16*.



(A) *(B)*

Figure 2-16 : Perte de masse des échantillons de fibres de carbone T700 (A) et de composite (B) au cours du temps lors de la procédure de pyrolyse à 600°C

Entre quinze et vingt minutes, aucune perte de masse notable n'est à considérer pour l'échantillon de fibres. En revanche, une importante perte de masse de l'échantillon de composite semble suggérer la carbonisation de la matrice. Entre vingt-cinq et trente-cinq minutes, d'importantes pertes de masse successives semblent à la fois montrer une dégradation des fibres et du composite. Un point médian à trente minutes est considéré pour calculer la fraction volumique de fibres. Afin de donner une précision sur cette mesure, une nouvelle campagne de pyrolyse est lancée sur quatre nouveaux échantillons de composite. Grâce à l'expression *(2)*, la fraction volumique de fibres restante est calculée à 19,44 % avec un écart-type de 0,98%.

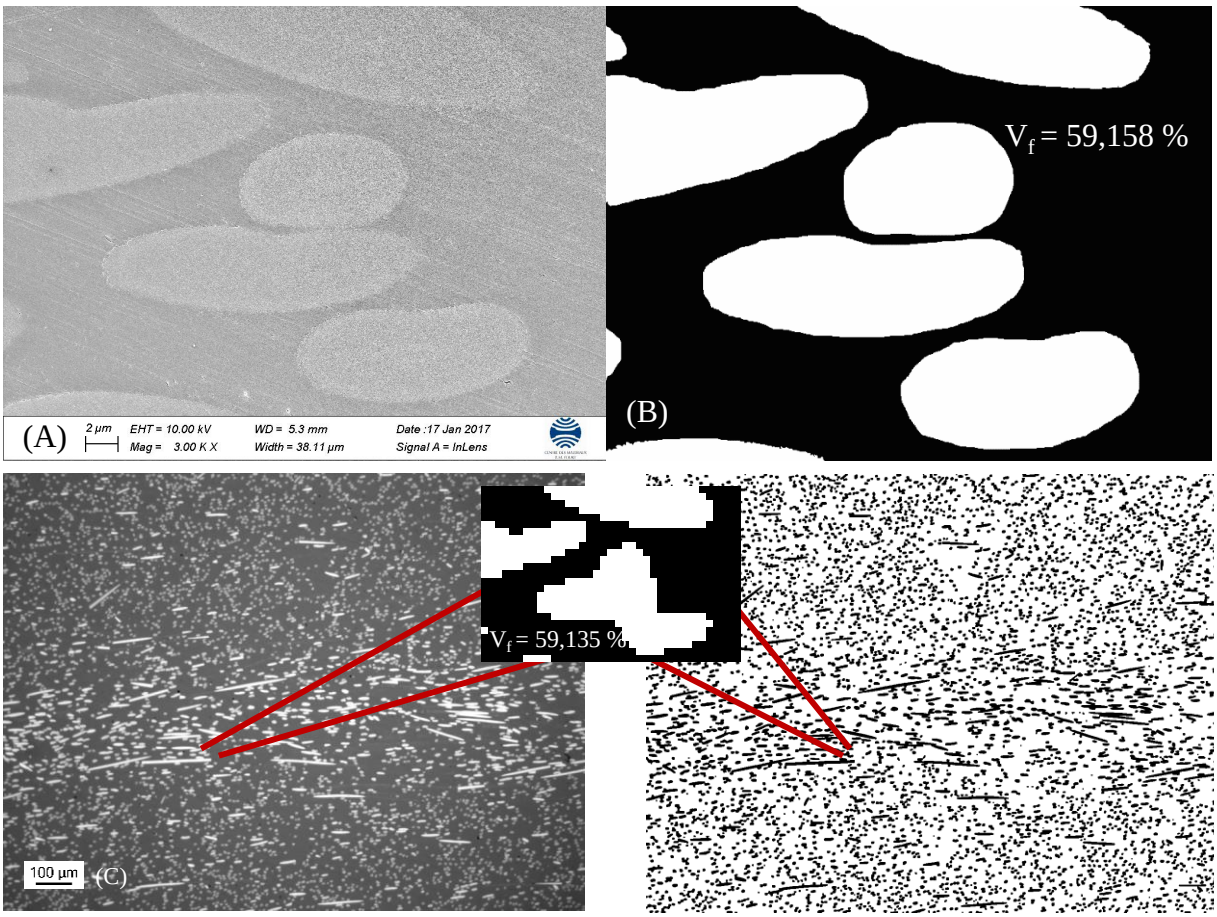


Figure 2-17 : (A) Image MEB d'une zone spécifique au MEB
(B) Image MEB segmentée sous Avizo
(C) Microscopie optique de la même zone, (D) après seuillage en niveaux de gris

La fraction volumique de fibres est également mesurée à partir de la méthode optique présentée dans le paragraphe *(4.1.1)*. Quinze clichés sont pris au microscope optique, parmi lesquels une zone spécifique est identifiée et prise au MEB. Les images sont traitées à l'aide du logiciel ImageJ. L'image MEB est utilisée afin de déterminer le seuil de détection des fibres à appliquer sur les images en microscopie optique. La comparaison entre l'image MEB et la zone de l'image correspondante en microscopie optique est montrée sur la *figure 2-17*. Afin d'atteindre une valeur de fraction volumique de fibres proche de celle de l'image MEB (V_f = 59,158 %), le seuil de détection des fibres à appliquer sur les images en microscopie optique est de 172. Cela signifie que l'ensemble des pixels dont la valeur en niveau de gris est comprise entre 172 et 255 sont conservés, les autres prennent la valeur 0 (blanc). Après application de ce seuil, la distribution de la fraction volumique de fibre est calculée à partir des quinze images et est tracé sur la *figure 2-18*.

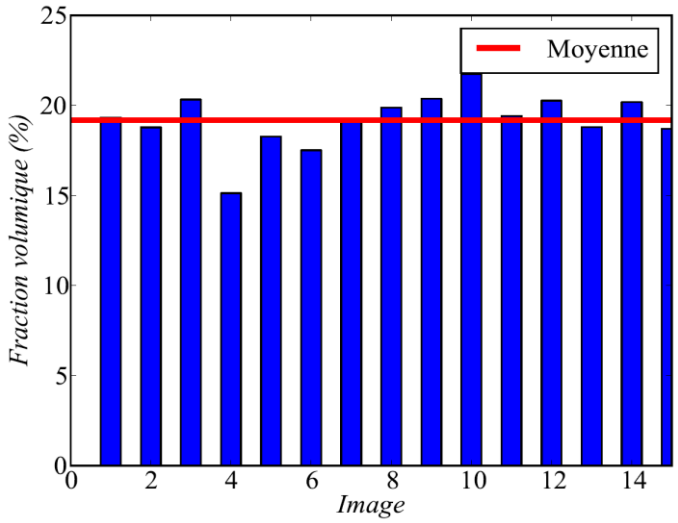


Figure 2-18 : Distribution de la fraction volumique de fibres calculée à partir d'images en microscopie optique et seuillées par comparaison avec une image MEB

Du fait de la haute résolution des images MEB, la segmentation des fibres sur les clichés en microscopie optique ne peut atteindre la même précision qu'au MEB. En effet, l'écart de résolution entre ces deux types d'images est de l'ordre de 20 : un pixel en microscopie optique est décrit par 20 pixels au MEB.

La fraction volumique moyenne calculée grâce à cette méthode est de 19,18% avec un écart type de 1,52%. Les deux méthodes appliquées semblent converger vers une valeur de 19% en volume de fibres (soit environ 25% en masse). Cette valeur correspond à la donnée matériau indiquée par le fabriquant (confidentiel).

4.3.2. Traitement des données brutes avec la corrélation de cylindres

Afin de déterminer les paramètres de détection optimale des fibres avec le module Xfiber d'Avizo, une étude de convergence est menée sur un volume de données réduit (100 x 100 x 100 pixels). Les paramètres de détection doivent à la fois permettre d'approcher la fraction volumique mesurée en pyrolyse et par analyse d'image surfacique (19%), interdire l'interpénétration des fibres et ne considérer que très peu de tortuosité des fibres.

Le calcul de la fraction volumique de fibres à partir des données de tomographie dépend de la valeur du rayon de dilatation des squelettes de fibres détectés. Le volume de chaque fibre peut être déterminé à partir de l'expression du volume d'un cylindre et de la longueur du segment correspondant. Cela permet finalement le calcul de la fraction volumique de fibres dans le matériau $V_f{}^{tomo}$ *(2.6)*.

$$V_f{}^{tomo} = \frac{\sum_1^n V_n}{V_T} = \frac{\sum_1^n \pi r^2 \|L_n\|}{2\pi R_{tomo} h} \qquad (2.6)$$

Avec :

- V_n , L_n : respectivement le volume et la longueur de la fibre n
- V_T : le volume total analysé (cylindre de rayon R_{tomo} et de hauteur h)

L'influence du diamètre de dilatation sur la fraction volumique globale de fibres est tracée sur la *figure 2-19*. Au-delà d'un diamètre de 7,1 micromètres, les fibres ne peuvent plus être dilatées sans être interpénétrées. Pour cette valeur, la fraction volumique de fibres calculée dans la microstructure est de 18,08%.

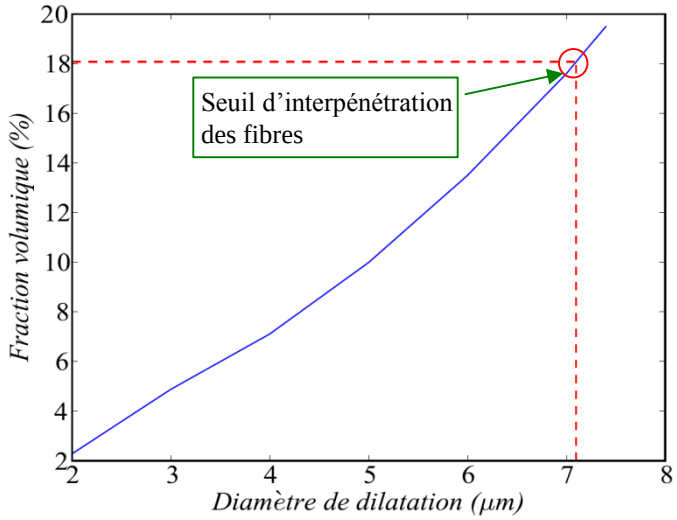


Figure 2-19 : Influence de la valeur de dilatation des squelettes de fibres sur la fraction volumique de fibres

En comparant les fractions volumiques mesurées par pyrolyse et analyse d'image (paragraphe *4.3.1*) à celle de l'étude de convergence, environ 5% des fibres ne semblent pas être détectées dans le matériau. Cette erreur peut être due à la résolution des images, meilleur compromis trouvé pour observer la majorité de l'épaisseur du matériau. D'autre part, il est probable que les fibres « KBS », dont la section droite n'est pas comprise entre le diamètre externe et le diamètre maximal fixés pour la détection ne soient pas détectées. Le rendu tridimensionnel du volume étudié afin de déterminer les paramètres de détection est présenté sur la *figure 2-20*.

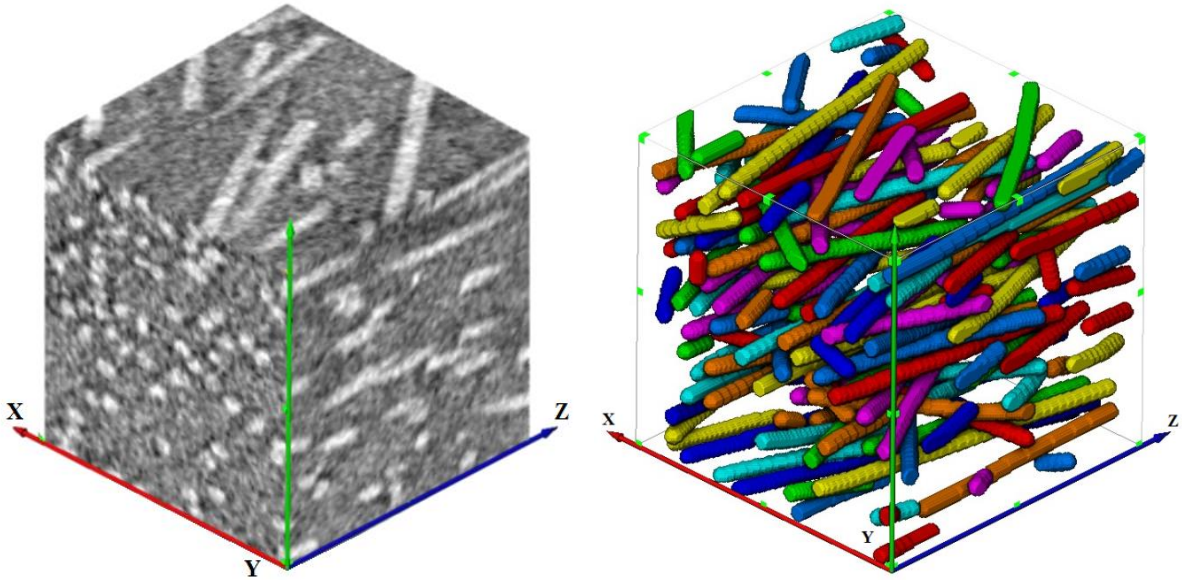


Image originale *Image labélisée*

Figure 2-20 : Rendu volumique des fibres détectées au sein du volume d'étude. Comparaison avec le volume original (à gauche)

L'extension Xfiber d'Avizo nécessite un processeur graphique (GPU) utilisant des drivers Cuda (Nvidia). La station de calcul utilisée pour réaliser les analyses contient 4 cœurs Intel Xeon CPU E5-1607 v2 à 3 GHz et 32 Go de mémoire vive. Le temps d'analyse pour ce volume est de 15 minutes. Les résultats obtenus à l'issue de ce traitement sont sous forme de matrice 3D dont les dimensions sont égales à celle du volume initial. Chaque élément de cette matrice, défini par ses coordonnées dans l'espace, représente un voxel du volume initial. Chaque voxel a une valeur spécifique qui correspond à celle du label segmenté. Un voxel de valeur nulle est un élément de matrice et chaque valeur supérieure représente une fibre spécifique. Les couleurs des fibres de la *figure 2-20* illustrent ce propos.

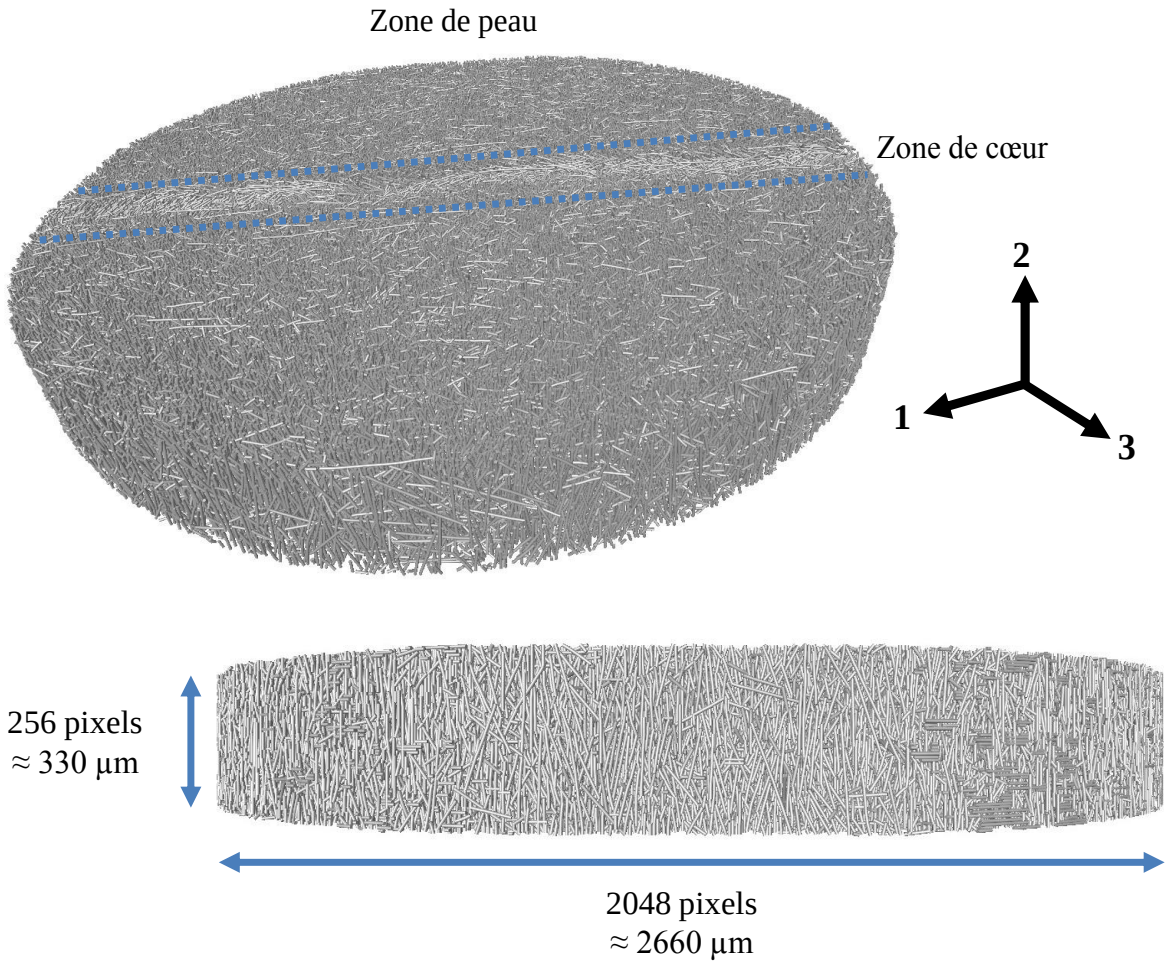


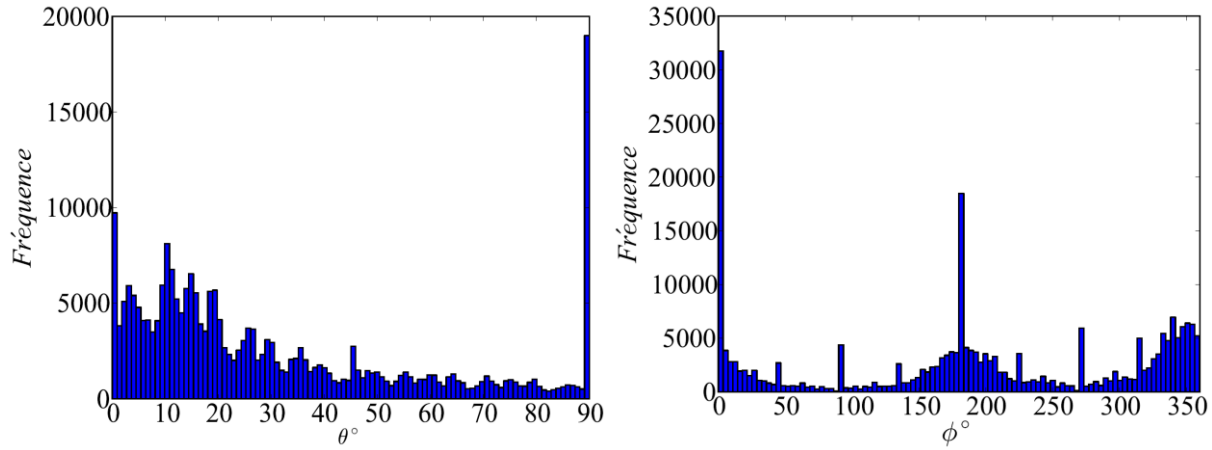
Figure 2-21 : Rendu 3D d'un des volumes traités avec Xfiber

A l'aide des paramètres de détection déterminés sur le volume réduit, la segmentation par corrélation de cylindres est menée sur deux volumes de 2048 x 2048 x 256 pixels, ce qui équivaut à un cylindre de 2,8 millimètres de diamètre sur 0,7 millimètres de hauteur. Ce volume intègre 90% de l'épaisseur du matériau, ce qui permet de considérer le gradient d'orientation des fibres. De plus, la majorité des fibres est obtenue (environ 243000 fibres). La combinaison de ces deux volumes est considérée comme représentative des variabilités locales du matériau. Le rendu tridimensionnel de l'un des deux volumes segmentés est présenté sur la *figure 2-21*. Pour chaque volume, le temps nécessaire à la segmentation des fibres est de 24 heures. La longueur et les coordonnées des extrémités des segments centraux de chaque cylindre détecté sont obtenues. Un programme Python est développé afin de calculer, à partir des données générées par Xfiber, les angles d'Euler caractéristiques de l'orientation d'une fibre (ϕ et θ), la longueur des fibres, les composantes p_1, p_2 et p_3 du vecteur $\vec{P}$ et les composantes du tenseur d'orientation.

L'erreur commise sur la détection des fibres n'est pas préjudiciable aux variabilités mesurées grâce à la tomographie RX. Les orientations et les longueurs étant obtenues pour environ 243000 fibres, les distributions et données statistiques de ces variabilités ne seraient que très peu modifiées par une variation de 5% de fibres supplémentaires.

4.3.3. Détermination de l'orientation des fibres

L'étude des histogrammes des distributions des angles θ et ϕ (tracés respectivement sur la *figure 2-22 (A)* et *(B)*), permettent de quantifier les orientations préférentielles des fibres au sein de la microstructure. Les pics à 90° sur θ et ϕ montrent qu'environ 20000 fibres sont parfaitement orientées suivant l'axe 2, soit 8% du nombre total de fibres. Lorsqu'on considère une orientation suivant l'axe 2 à 10° près, environ 25000 fibres sont concernées, soit quasiment 10% des fibres.



(A) *(B)*

Figure 2-22 : Distributions des valeurs des angles θ (A) et ϕ (B) pour 243000 fibres

La distribution des valeurs de l'angle θ permet d'évaluer directement l'orientation préférentielle des fibres suivant l'axe 3 : environ 10000 fibres sont parfaitement orientées suivant cet axe et plus de 66000 fibres ont une valeur de θ inférieure ou égale à 10°, soit environ 27% des fibres. La distribution des valeurs de ϕ donne une indication sur le second axe préférentiel des fibres. Sur cet histogramme le premier mode (pour 0° et 360° à 10° près), correspond aux 27% de fibres orientées selon l'axe préférentiel. Le second mode, autour de 180°, montre qu'environ 37000 fibres (soit 15%) sont orientées dans l'axe 1. Les axes 3 et 1 correspondent au plan d'injection et sont respectivement la direction principale et sa direction transverse, ces résultats confirment l'orientation préférentielle des fibres observée dans les travaux sur les CRFC [*Bay & Tucker*, 1992], [*Megally*, 2005].

Bien que les tenseurs d'orientation ne donnent qu'un état d'orientation moyen dans un volume donné de la microstructure, l'étude des composantes principales d'a_{ij} permet de confirmer les orientations préférentielles des fibres selon le sens d'injection a_{11}, le sens transverse a_{33} et la direction normale au plan d'injection a_{22}. Le tenseur est calculé et normalisé par rapport à l'épaisseur du matériau selon les conventions de représentation des tenseurs d'orientation : les composantes principales du tenseur d'orientation des fibres sont données entre -1 à 1. Ces composantes sont présentées sur la *figure 2-23*.

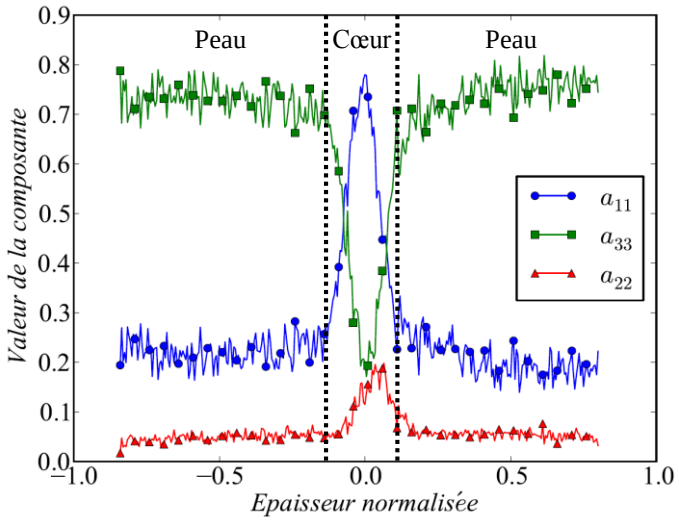


Figure 2-23 : Tracé des composantes a_{11}, a_{22} et a_{33} du tenseur d'orientation d'ordre 2 a_{ij}, mesurée à partir du traitement des images de tomographie RX en contraste de phase

La *figure 2-23* montre clairement l'effet cœur-peau lié au moulage par injection des fibres et évoqué dans l'introduction générale du manuscrit (*chapitre 1, paragraphe 1.2.3*). Les bords du matériau n'ayant pas pu être compris dans l'observation en tomographie RX en contraste de phase, le gradient d'orientation généralement observable sur la peau de ce type de matériau n'est pas mesuré. Les études bibliographiques menées sur les CRFC montrent cependant une faible influence de ce gradient [*Megally*, 2005].

4.3.4. Détermination de la longueur des fibres

En calculant la norme des vecteurs unitaires des fibres par la relation reportée sur la *figure 2-15*, les longueurs des 243000 segments détectés grâce à l'analyse des volumes de tomographie sont calculées. La distribution de ces longueurs de fibres est présentée sur la *figure 2-24*.

La répartition de longueurs des fibres mesurées dans le matériau a pour moyenne 154 micromètres et pour valeur médiane 111 micromètres. La distribution de longueurs est particulièrement étendue : près de 2% des fibres sont inférieures à 50 micromètres et la moitié sont supérieures à 100 micromètres. Cette répartition hétérogène pourrait s'expliquer par la rupture éventuelle des fibres lors du processus d'injection, comme c'est le cas pour les fibres de verre [*Gupta et al.*, 1989].

Selon la chronologie des travaux présentés, l'étude de la microstructure par la tomographie est intervenue après l'identification inverse du comportement des fibres et les travaux sur le volume représentatif élémentaire présentés dans le chapitre suivant (*chapitre 5*). Néanmoins, la longueur moyenne de fibres choisie dans ces deux parties est proche de la valeur moyenne mesurée ici (150 micromètres). Ce point est discuté dans les perspectives de ce manuscrit car il peut constituer un élément de recadrage du modèle développé dans la suite de ces travaux de thèse.

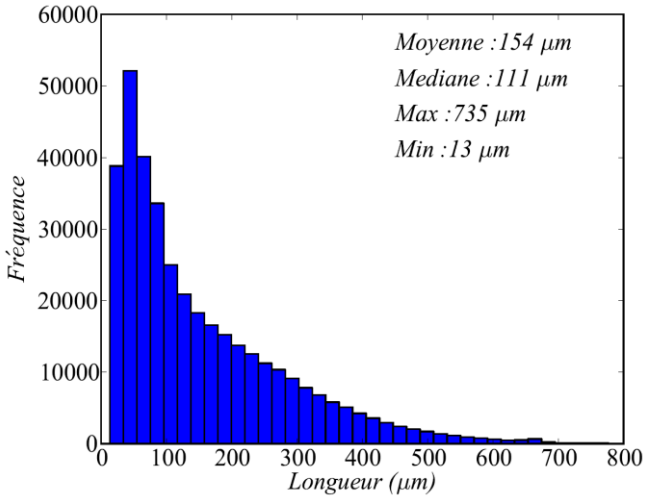


Figure 2-24 : Distribution de longueurs des fibres dans les volumes étudiés en tomographie par contraste de phase

4.3.5. Une mesure du confinement matriciel : la fraction volumique locale

La méthode proposée est basée sur le calcul du rapport entre un volume local de fibres et celui de la matrice dans une cellule d'observation tridimensionnelle. Cette méthode s'applique sur un volume de données de tomographie labélisées à l'aide d'un programme Python. Un cube, faisant office de cellule d'observation est défini afin de parcourir la microstructure dans l'espace. Pour chaque position relative de ce cube, si celui-ci détecte la présence de matrice et d'au moins deux fibres différentes (donc au moins trois labels différents), le rapport entre le volume de fibres et le volume total du cube est calculé. Cette valeur se rapporte à une fraction volumique locale. Elle est notée Λ. Dans le cadre de ces travaux, l'hypothèse faite est que la fraction volumique locale donne une indication du confinement matriciel à chaque position du cube. Cet outil de mesure du confinement matriciel est illustré par la *figure 2-25*.

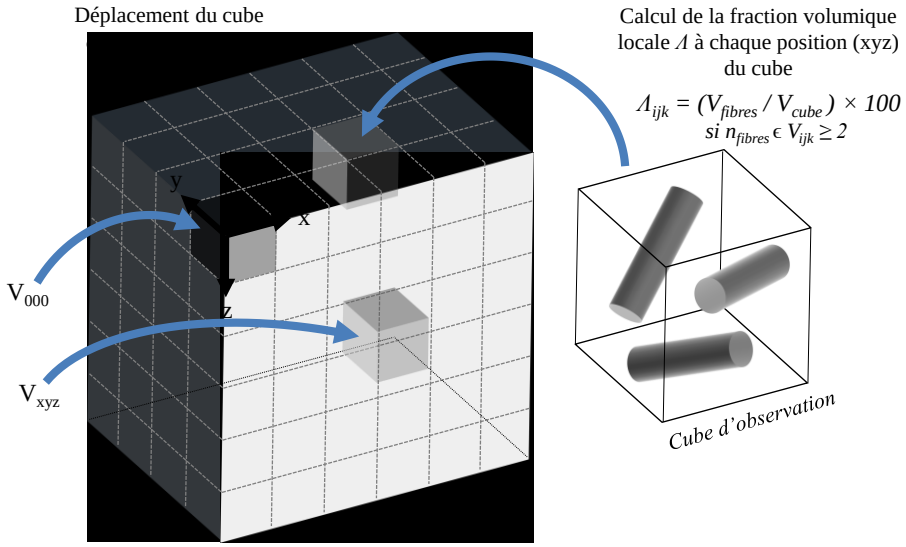
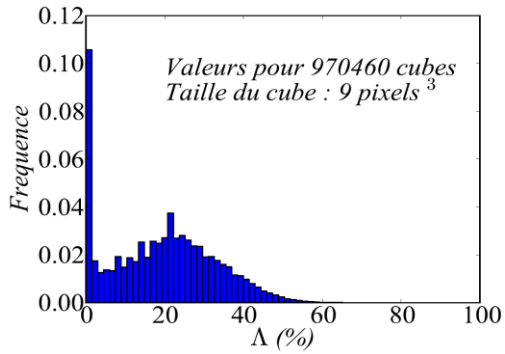
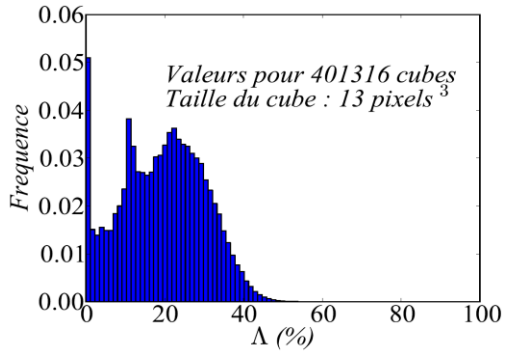


Figure 2-25 : Méthode de détermination du confinement matriciel par caractérisation tridimensionnelle dans les données de tomographie

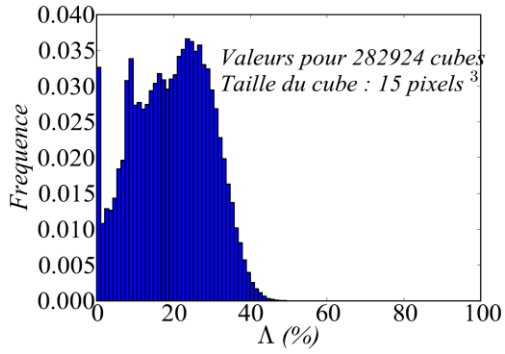
Un cube d'observation d'un voxel, renvoie une valeur binaire : matrice ou fibre. A l'inverse, plus la taille du cube d'observation est importante, plus la valeur tend vers la fraction volumique de fibre globale dans le composite. Dans une première approche de cette méthode, il s'agit de choisir une taille de cube révélatrice de la fraction volumique locale. Le but est donc de choisir un compromis entre le nombre de valeurs nulles renvoyées et une taille de cube qui ne traduise pas uniquement la fraction volumique totale de fibres. Ce choix ne peut donc être entériné qu'à partir des données de la microstructure étudiée.



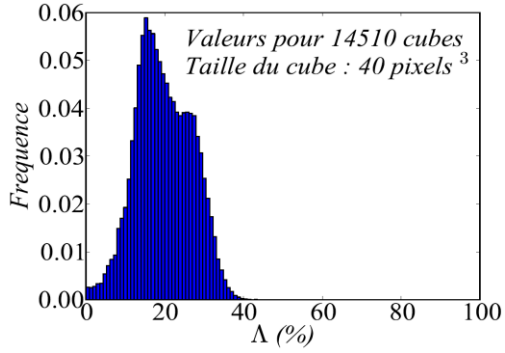
Jusqu'à un cube de neuf pixels de côté, la distribution de fraction volumique locale ne montre qu'un pic caractéristique à 0% : la majorité des cubes d'observation ne comporte pas de fibres.



Autour de treize pixels de côtés, la fraction volumique locale présente des pics caractéristiques. La distribution de valeurs nulles est diminuée de moitié par rapport à un cube d'observation de neuf pixels de côtés. Une taille de cube autour de cette valeur semble correspondre au compromis recherché pour mener l'étude de la fraction volumique locale de fibres dans la microstructure.



Pour une valeur de quinze pixels de côté, le pic de la fraction volumique globale apparait sur l'histogramme. Bien que celui-ci ne soit pas unique, il signifie qu'à partir de cette taille de cube, la fraction volumique locale calculée tend vers la fraction volumique globale de fibres



A partir de quarante pixels de côté, seul le pic de la fraction volumique globale apparait sur l'histogramme. Les cubes d'observation ne présentent alors plus de valeur de fraction volumique locale

Figure 2-26 : Distribution de la fraction volumique locale Λ dans la microstructure par la méthode du cube d'observation selon différentes tailles de cube

La première étape de la méthode consiste à déterminer une taille de cube cohérente pour la mesure de la fraction volumique locale. La méthode est donc appliquée pour plusieurs tailles de cubes d'observation. La représentation des histogrammes de fréquences de fraction volumique locales doit permettre de déterminer une taille de cube cohérente. Les résultats doivent montrer un compromis entre une minimisation des valeurs nulles et l'apparition du pic définissant la fraction volumique globale mesurée (18,08 %) sur l'histogramme de fréquences. Les résultats sont présentés pour différentes tailles de cubes sur la *figure 2-26*. Notons qu'afin d'observer les différents pics de fraction volumique, l'échelle de cette figure n'est pas constante sur chaque histogramme.

Sachant que le pic de la fraction volumique globale est identifiable à partir d'un cube de quinze pixels de côtés, la taille du cube choisie pour décrire la distribution de fraction volumique globale doit être située en deçà de cette valeur. Un compromis est finalement retenu pour un cube de douze pixels de côtés. La *figure 2-27* montre la distribution de Λ pour un cube de douze pixels de côté. Le contenu du cube d'observation est également présenté pour quelques valeurs particulières de cette distribution.

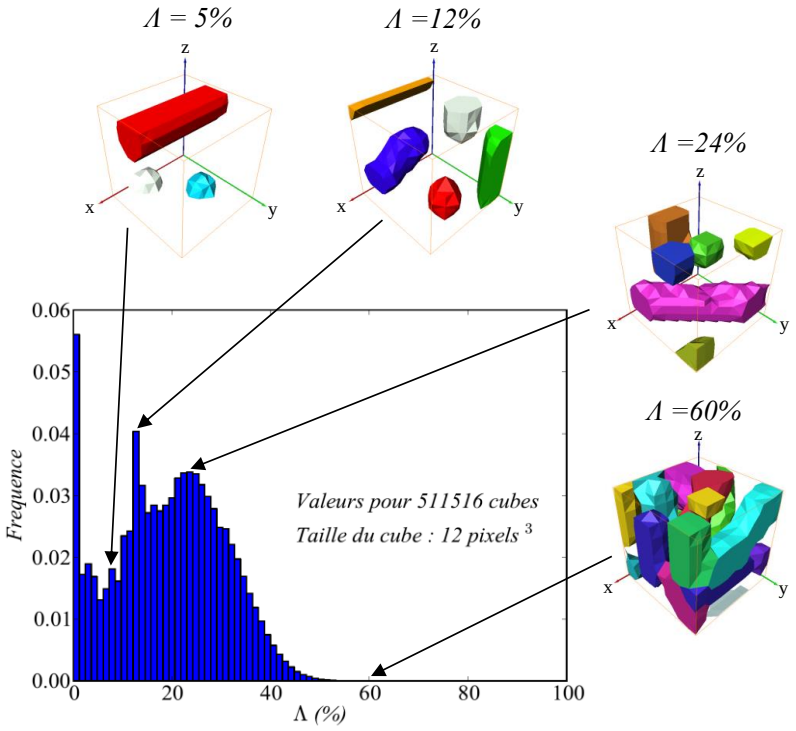


Figure 2-27 : Histogramme de la distribution de confinement matriciel dans la microstructure

L'influence de la position de renforts cylindriques et de leur proximité dans la microstructure est peu étudiée de manière tridimensionnelle. Cependant les travaux menés en 2D sur l'effet de la position de renforts circulaires démontrent la pertinence d'une répartition aléatoire des fibres dans le plan vis-à-vis de modèles idéaux : carré ou hexagonal sur les propriétés élastiques du matériau [*Gusev et al.*, 2000]. Les clusters de fibres, représentés par des valeurs élevées de Λ, sont responsables du comportement global de la microstructure [*Segurado et al.*, 2003]. Par conséquent, il est impératif de les prendre en compte dans la démarche de modélisation du comportement macroscopique, initiée au chapitre suivant (*chapitre 5*).

La répartition du confinement matriciel dans la microstructure est déterminée quelle que soit l'orientation des fibres dans le matériau. Il peut être intéressant de comparer cette distribution et l'orientation des fibres. Le tracé de la composante a_{33} du tenseur d'orientation des fibres présenté dans le paragraphe 4.3.3 et de la valeur moyenne de l'ensemble des valeurs de Λ projetée suivant $\vec{y}$ est montré sur la *figure 2-28*.

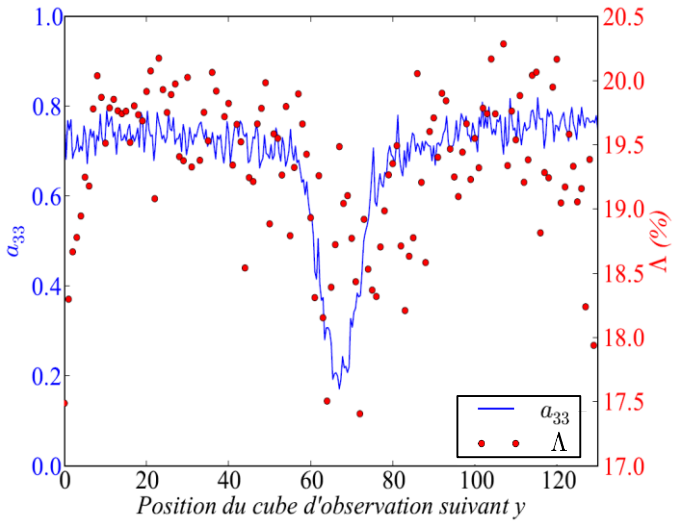


Figure 2-28 : Influence de l'orientation des fibres sur le confinement matriciel. Comparaison entre la composante a_{33} du tenseur d'orientation et de la moyenne de Λ projetée suivant $\vec{y}$

Des travaux menés sur les clusters d'orientation dans la microstructure [*Ranganathan & Advani*, 1990] supposent que des interactions fibre-fibre ont lieu lors du procédé de moulage par injection. La présence d'une fibre dans le voisinage va influencer l'orientation de la fibre considérée lors de la solidification du polymère. Par conséquent, les fibres proches vont former des clusters d'orientation. Ces observations semblent se confirmer au regard de la *figure 2-28* : les fibres ayant pu s'orienter à 90° par rapport au sens d'injection font état d'une fraction volumique locale inférieure à celles orientées dans le sens d'injection. La fraction volumique locale de fibre Λ montre ainsi que les fibres à 90° sont globalement moins proches les unes des autres dans la microstructure.

4.4. Synthèse de la caractérisation de la microstructure

Qu'elles soient surfaciques ou tridimensionnelles, les méthodes de caractérisation des variabilités de la microstructure apportent une aide à la compréhension de la complexité du matériau. Les deux types d'approches font appel à des connaissances expérimentales et numériques différentes dont il résulte néanmoins un fort tronc commun lié à l'analyse d'images et au traitement de leurs données.

A l'exception de l'analyse d'images 2D permettant la mesure de la fraction volumique et de l'orientation des fibres, une approche surfacique requiert généralement une étude par type de variabilité. Avec une telle approche, aucune information complète de la proximité des fibres ne peut alors pas être obtenue. C'est sur ce point que la tomographie a un avantage considérable : une seule technique permet d'accéder à toutes les données de la microstructure et des méthodes de mesure de la proximité des fibres peuvent être mises au point. Les variabilités mesurées dans ce chapitre sont récapitulées sur la *figure 2-29*. La méthode utilisée pour leur détermination est également rappelée sur cette figure.

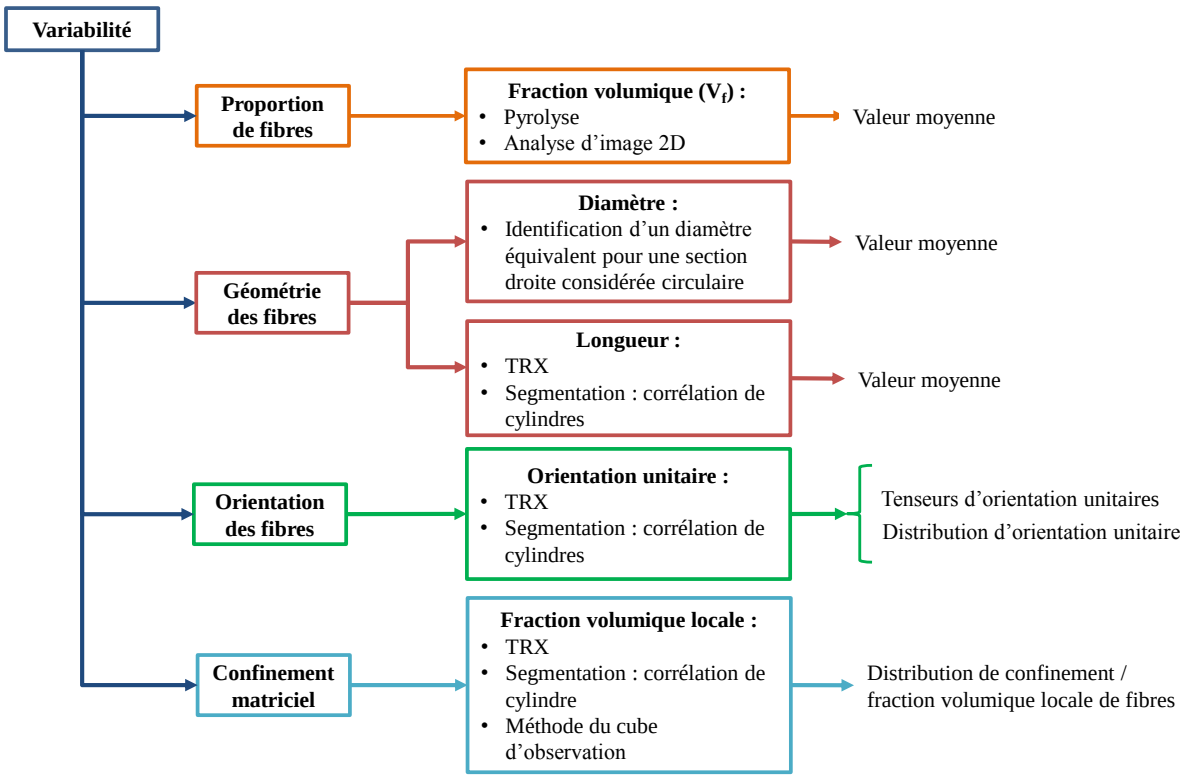


Figure 2-29 : Récapitulatif des variabilités de la microstructure mesurées par diverses méthodes

Un des avantages de la caractérisation surfacique est son coût. Le prélèvement, la préparation et l'observation des échantillons nécessite un matériel courant dans un laboratoire de recherche en matériaux. A contrario, l'accès à un synchrotron est plus difficile et coûteux. Il faut de plus noter que dans le cadre de l'acceptation d'un *proposal* (donnant accès à du temps de faisceau), l'utilisation du faisceau n'est pas facturée mais le délai d'accès peut aller de 6 mois à un an et une publication associée aux mesures est exigée. Le traitement des données de tomographie requiert une importante capacité de stockage informatique, l'accès aux outils d'analyse d'image et une station de calcul suffisamment performante pour traiter les données. Le coût machine peut s'avérer élevé.

La longueur moyenne de fibre et leur proximité dans la matrice mesurées dans ce chapitre sont les données d'entrée des travaux présentés dans le chapitre suivant : la génération et la définition d'un volume élémentaire représentatif spécifique de la microstructure. L'orientation des fibres est intégrée dans le modèle d'homogénéisation traité dans la dernière partie de ce manuscrit (*partie 3, chapitre 7, paragraphe 7.3.1*).

CHAPITRE 5 : DEFINITION D'UNE CELLULE STATISTIQUEMENT REPRESENTATIVE : CESR

5. Définition d'une cellule élémentaire statistiquement représentative : CESR

La modélisation d'une pièce de structure constituée d'un matériau composite renforcée en fibres courtes de carbone ne peut se faire directement par des méthodes à champs complets, tels que les éléments finis [*Ghering*, 2013]. En effet, la puissance de calcul disponible aujourd'hui n'est pas en mesure de simuler le comportement d'une pièce intégrant des millions de fibres. Pour pallier ce problème, la notion de volume élémentaire représentatif (VER) est généralement utilisée pour déterminer le comportement élastique linéaire d'un composite, comme dans les travaux de Gitman [*Gitman et al.*, 2007] ou ceux de Michaud [*Michaud & Mortensen*, 2001]. Le VER permet ainsi le calcul de structure grâce à un comportement homogène équivalent et la prise en compte de son temps de calcul doit par conséquent être déterminante pour son choix.

La première étape de modélisation de la microstructure consiste donc à déterminer une Cellule Elémentaire Statistiquement Représentative (CESR) du comportement homogène équivalent au composite. Il s'agit d'un Volume Elémentaire Représentatif (VER) spécifique de la microstructure. Une composante statistique est intégrée à la détermination de la CESR, pour tenir compte de la nature aléatoire de la microstructure réelle. Deux types d'indicateurs sont utilisés pour identifier cette CESR : des indicateurs globaux et locaux. Les indicateurs globaux permettent de classer les cellules générées suivant leur comportement mécanique réversible linéaire et leur isotropie transverse. L'indicateur local autorise quant à lui l'étude de la morphologie de chaque cellule par rapport à leur comportement global. Cette comparaison permet ainsi de générer les potentielles CESR de façon plus systématique.

La géométrie des fibres mesurée dans le chapitre précédent est directement intégrée à la génération des cellules. La majeure partie des travaux de ce chapitre a été publiée [*Rasselet et al.*, 2016], mais est poursuivie afin d'intégrer le confinement matriciel mesuré sur la microstructure réelle au choix d'une CESR. Le confinement réel est comparé de façon statistique à celui des cellules afin d'intégrer la fraction volumique locale dans le choix de la CESR finale. La CESR issue des travaux de ce chapitre est représentative du comportement réversible linéaire effectif de la microstructure et de sa morphologie. Par défaut, l'adhérence des fibres de carbone à une matrice polymère est faible. Elle est néanmoins généralement améliorée par des traitements de surface physiques ou chimiques. Une des hypothèses de modélisation dans ces travaux de thèse est de considérer parfaite l'interface fibre-matrice, comme dans les travaux de Cayzac [*Cayzac*, 2014] et Poulet [*Poulet*, 2017].

5.1. Approche scientifique

Parmi les méthodes à champs complets disponibles, le calcul par éléments finis est celle retenue pour ce chapitre. Elle a l'avantage d'autoriser une bonne maîtrise des paramètres microstructuraux : taille de la cellule, fraction volumique et taille des fibres. L'objectif de cette procédure est d'étudier l'influence des paramètres de modélisation sur la matrice de rigidité associée aux cellules, afin de déterminer les cellules représentatives du comportement réversible linéaire du composite unidirectionnel.

Le concept de VER a été introduit dans les travaux de Hill [*Hill*, 1963] puis a été affiné dans de nombreux travaux [*Gusev*, 1997], [*Ostoja-Starzewski*, 2006] et plus récemment dans la thèse de Moussaddy [*Moussaddy*, 2013]. Cependant, les travaux de Kanit [*Kanit et al.*, 2003] discutent la notion de VER dans le cas de matériaux composites renforcés par des inclusions aléatoires : il n'existe pas de motif répétable au sein du matériau réel. Un VER doit plutôt être considéré *« comme un volume élémentaire dont le comportement est le même que celui du*

matériau massif ». De ce fait, une composante statistique est introduite pour la génération d'un grand nombre de cellules numériques afin de déterminer ce VER. Dans la suite de ce chapitre, ce volume spécifique est appelé « Cellule Elémentaire Statistiquement Représentative » (CESR).

5.1.1. Chaine de génération des cellules

Trois logiciels de calcul sont utilisés pour générer, mailler et calculer le comportement réversible linéaire de cellules 3D. La *figure 2-30* récapitule la chaine de calcul adoptée. La contribution de chaque logiciel est rappelée ainsi que l'étape dans laquelle ils interviennent.

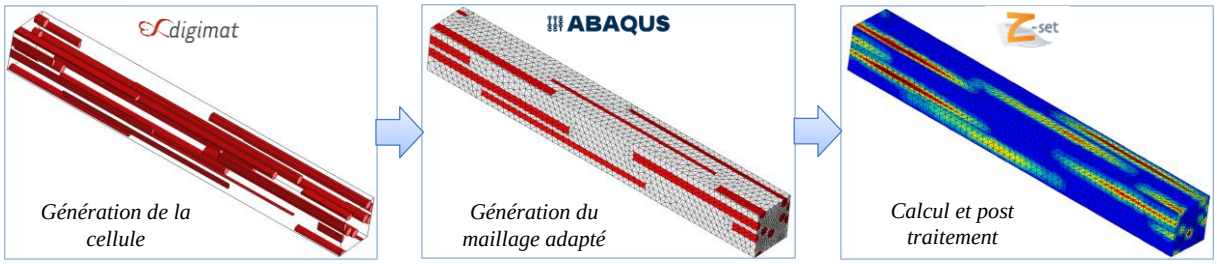


Figure 2-30 : Récapitulatif de la chaîne de génération et de calcul des cellules

5.1.2. Hypothèses de modélisation

Plusieurs hypothèses sont considérées dans ce chapitre. Une hypothèse forte est faite sur la modélisation de cellules périodiques. D'après Forest [*Forest*, 2006], la périodicité engendre une convergence plus rapide des résultats par rapport aux méthodes KUBC (Kinematic Uniform Boundary Conditions) et SUBC (Static Uniform Boundary Conditions), conditions aux limites homogènes aux contours respectivement en déformations ou en contraintes, introduites par Hazanov [*Hazanov & Huet*, 1994]. Par conséquent, la représentativité du comportement de la cellule augmente avec son volume. Le matériau réel étant une structure complexe ne contenant pas de motifs géométriques répétables, il nécessite une approche statistique afin d'être décrit. Une telle approche a été menée afin de déterminer les propriétés géométriques de la CESR.

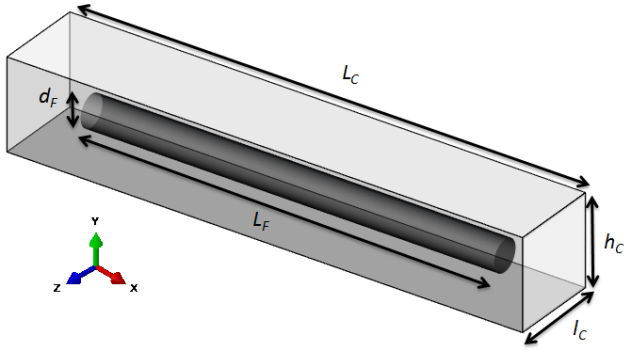


Figure 2-31 : Espace de génération des cellules et des fibres

L'espace de travail est un repère cartésien d'axes $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, dans lequel la longueur des fibres L_f suit l'axe $\vec{x}$. Le diamètre et le rayon des fibres sont notés respectivement d_f et r_f. Les cellules sont des parallélépipèdes dont la longueur L_C suit également l'axe $\vec{x}$ et la largeur l_C, d'axe $\vec{z}$, est égale à la hauteur h_C, d'axe $\vec{y}$ (*figure 2-31*). Comme précisé dans le chapitre

précédent, les fibres sont considérées comme cylindriques et leur rapport de forme $\left(\frac{L_f}{d_f} = \frac{150}{7}\right)$ est constant et environ égal à 21. La valeur de ce facteur de forme est issue d'études préliminaires sur le matériau et est cohérente avec la littérature [*De & White*, 1996], [*Ratner et al.*, 2012].

Afin de déterminer la CESR du comportement réversible linéaire d'un composite renforcé en fibres courtes unidirectionnelles, un arbre de génération des cellules a été défini au préalable. Cet arbre inclus des variations paramétriques qui permettent par la suite de réaliser des études de sensibilité à ces paramètres. L'arbre de génération appliqué est présenté dans la figure ci-dessous *(figure 2-32)*.

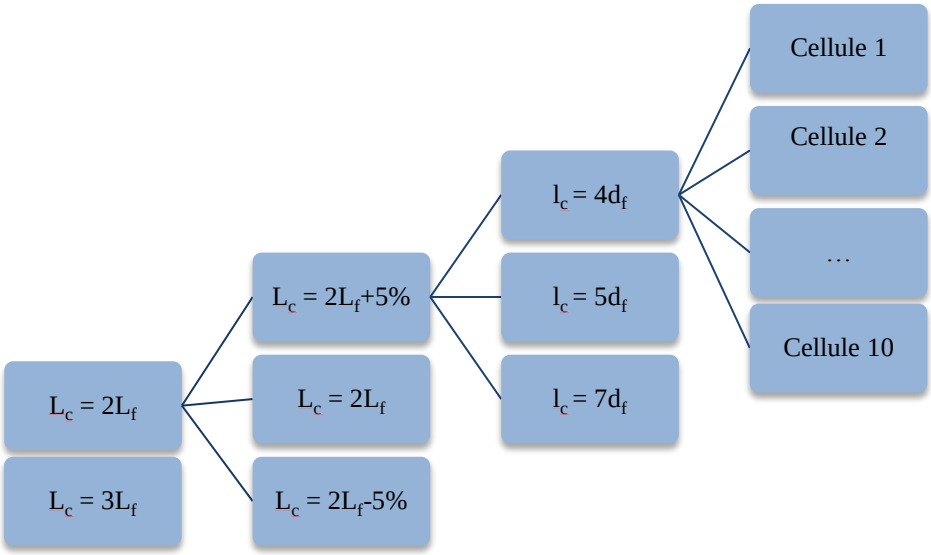


Figure 2-32 : Arbre de génération des cellules numériques

Les variables de génération sont les dimensions des cellules, elles-mêmes fonction des dimensions d'une fibre. Les longueurs choisies à -5% empêchent deux fibres de se succéder dans leur longueur (axe $\vec{x}$). A l'inverse, les longueurs à +5% permettent à deux fibres de se succéder dans leur longueur avec une distance maximale de 5% de 2 ou 3 L_f, suivant $\vec{x}$.

Le chapitre précédent donne une fraction volumique globale de fibres d'environ 19% (en pyrolyse et analyse d'image 2D). L'ensemble des cellules a été généré autour de cette valeur, entre 19,05% et 19,27%, selon la géométrie de la cellule. L'aspect statistique nécessaire à l'identification de la CESR est amené par un compromis entre le nombre de réalisation (10) et les différentes géométries des cellules (18). Dans la suite de cette section, une « classe de cellule » représente une géométrie de cellule donnée et ses dix réalisations.

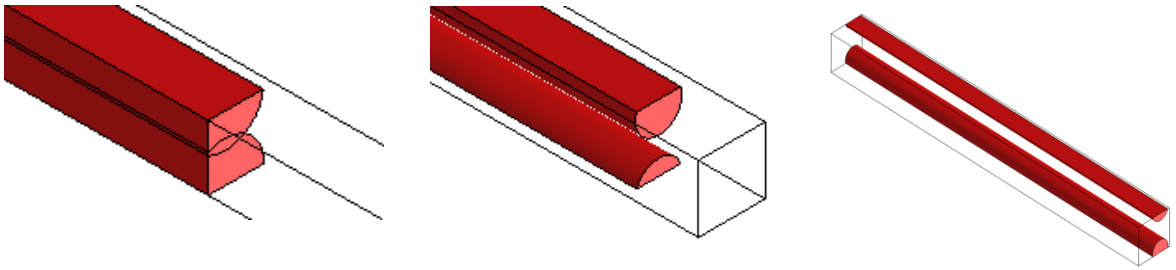
5.1.3. Génération des cellules sous Digimat-FE

La génération des cellules est réalisée à l'aide du module Digimat-FE, de la suite logicielle Digimat (5.1.2) [*E-Xstream*, 2014]. Ce module permet la création de cellules périodiques avec un positionnement aléatoire des fibres dans un volume défini par l'utilisateur. La génération des cellules est réalisée à l'aide d'un algorithme probabiliste de Monte Carlo [*Rubinstein & Kroese*, 2008]. Celui-ci permet la compréhension d'un système par la simulation d'un échantillonnage aléatoire. Il est utilisé dans de nombreux domaines nécessitant des études

quantitatives de systèmes. Les travaux de Descamps [*Descamps et al.*, 2015] utilisent notamment cet algorithme pour l'arrangement de la microstructure de matériaux conducteurs.

Afin d'obtenir une CESR, les dimensions des cellules doivent obéir à certaines règles géométriques (pour une fraction volumique de fibres constante). Ces règles permettent de limiter au maximum la génération de cellules particulières dont le comportement ne peut pas être représentatif du composite, à savoir :

- Si $l_c < d_f$ et $L_c < L_f$: les fibres vont être interpénétrées dans la cellule (*figure 2-33 (A)).*
- Pour tout L_c, si $l_c < 2d_f$: une zone de matrice seule peut être générée dans la cellule (*figure 2-33 (B)).*
- Pour tout l_c, si $L_c \leq L_f$: au moins une fibre prenant toute la longueur de la cellule va être générée (*figure 2-33 (C))*



(A) *(B)* *(C)*

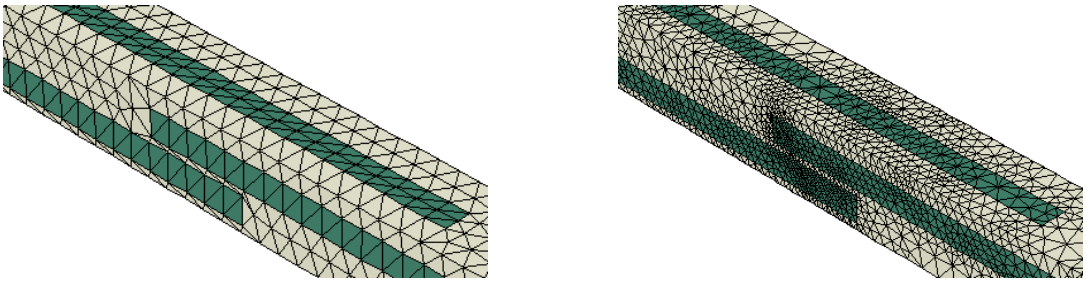
Figure 2-33 : Exemple d'interpénétration de deux fibres dans un volume (A), exemple d'une cellule avec une zone entière de matrice (B) et exemple d'une cellule à fibres continues (C)

La première règle est une règle logique : les fibres ne peuvent s'interpénétrer au sein de la microstructure. La violation de la seconde règle fait apparaitre une zone entière de matrice seule, ce qui induit une baisse considérable de la raideur de la cellule et n'est pas représentatif de la réalité. Malgré cette règle, la génération aléatoire de la position des fibres peut engendrer des zones de matrice entière dans la cellule. De ce fait, la géométrie de chaque cellule doit être contrôlée avant son maillage. Seules les cellules ne présentant pas ce type de défaut sont retenues pour l'étude. Enfin, la dernière règle correspond à la différence entre un composite renforcé en fibres courtes et un composite à fibres continues : les fibres ne doivent pas être de même longueur que la cellule, comme dans les travaux de Blassiau [*Blassiau*, 2005].

De légères dispersions de fraction volumique sont observées, du fait de l'algorithme de positionnement aléatoire des fibres dans le volume. La dispersion de fraction volumique est spécifique à la géométrie de la cellule qui est fixée par l'utilisateur. Sur l'ensemble des cellules, la fraction volumique moyenne est de 19,16% avec un écart type de 0,11%, ce qui ne perturbe pas les résultats de l'étude. Pour chaque cellule générée sous Digimat-FE, un fichier contenant la position du centre des fibres dans le volume est créé.

5.1.4. Maillage des cellules sous Abaqus-CAE

Afin de générer un maillage adaptatif sur chaque cellule, un script Python est développé pour faire appel à cette fonctionnalité disponible sous Abaqus (6.14.1) [*Simulia - Dassault Systems*, 2014]. Le maillage adaptatif sous Abaqus utilise une description Euler-Lagrange Arbitraire (ALE), notamment présentée dans les travaux de Joyot [*Joyot et al.*, 1993]. Cette méthode est utilisée pour raffiner la taille des éléments du maillage dans les zones d'interfaces fibres-matrice et entre les fibres relativement proches (*figure 2-34*).



(A) *(B)*

Figure 2-34 : Cellule Abaqus sans maillage adaptatif (A) et avec maillage adaptatif (B)

Le processus d'adaptativité du maillage sous Abaqus permet une meilleure précision des résultats de calcul [*Mariayyah*, 2007]. Il est basé sur la correction d'un maillage grossier existant en un maillage plus fin. Les éléments très distordus sont alors remplacés par plusieurs éléments plus petits. Les éléments de maillage choisis sont des tétraèdres. Malgré la performance et la praticité du maillage adaptatif, il en résulte que chaque « maillage adapté » induit un maillage non-coïncident des faces de la cellule, c'est à dire une position et un nombre de nœuds différents sur les faces opposées de la cellule.

Lorsque le volume d'une instance à mailler représente 5% du volume d'une fibre, les éléments qui le composent peuvent être très distordus, ce qui provoque des erreurs de maillage et l'impossibilité « d'adapter » le maillage. Ces fibres ont donc été négligées avant de lancer la procédure d'adaptativité. Néanmoins, pour éviter la suppression successive de fibres ne pouvant être maillées, les dimensions des fibres sont légèrement augmentées d'une valeur ξ lors de la génération des cellules sous Digimat-FE (*figure 2-35*).

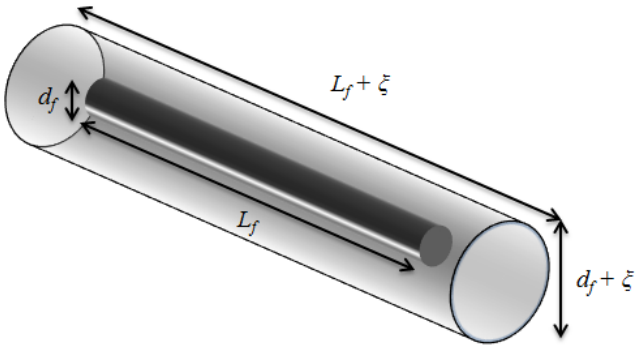


Figure 2-35 : Illustration de l'augmentation des dimensions d'une fibre lors de la génération des cellules

La fraction volumique *Vf'* associée à la hausse des dimensions des fibres est calculée avec la formule *(2.7)*. Les nouvelles dimensions de fibres et, par conséquent, de fraction volumique sont utilisées pour la génération des cellules.

$$V_f' = V_f + \frac{\pi}{4V_t}\left[L_f\left(2d_f\delta_d + {\delta_d}^2\right) + \delta_L\left(d_f + {\delta_d}^2\right)\right] \qquad (2.7)$$

Avec :

- V_t, le volume total d'une cellule
- $\delta_d = d_f + \xi$, la variation appliquée au diamètre de la fibre
- $\delta_L = d_L + \xi$, la variation appliquée à la longueur de la fibre

C'est lors de la reconstruction de la géométrie sous Abaqus que les tailles réelles des fibres sont rétablies via le script Python. La fraction volumique V_f d'environ 19% est donc rétablie dans la cellule et la proximité des fibres est alors réduite grâce à la modification des dimensions des fibres. Le maillage adaptatif peut alors être réalisé sans difficultés sous Abaqus.

5.2. Calcul des propriétés effectives des cellules sous Z-set

Le choix du logiciel Z-set pour calculer les propriétés effectives des cellules est, d'une part, motivée par la possibilité d'appliquer des conditions aux limites périodiques spécifiques dans le cas des maillages non-coïncidents générés par Abaqus. D'autre part, Z-set permet d'appliquer facilement un champ de contrainte (ou de déformation) sur une microstructure périodique. Enfin, ce choix est aussi motivé par la richesse des modèles matériaux existants dans Z-set et sa souplesse pour l'implémentation de nouveaux modèles pour des calculs non-linéaires.

5.2.1. Définition des conditions aux limites pour les maillages non-coïncidents

Les « MPC4 » (Multi-Points Constraints) sont des conditions aux limites particulières permettant le contrôle d'une face de la cellule (nset « esclave ») via la face opposée (bset « maître »), et ce, pour l'ensemble des couples de faces opposées. La *figure 2-36* illustre le principe de ces conditions aux limites. Le déplacement des nœuds des faces ainsi contrôlées sera rigoureusement le même que les nœuds de la face maître.

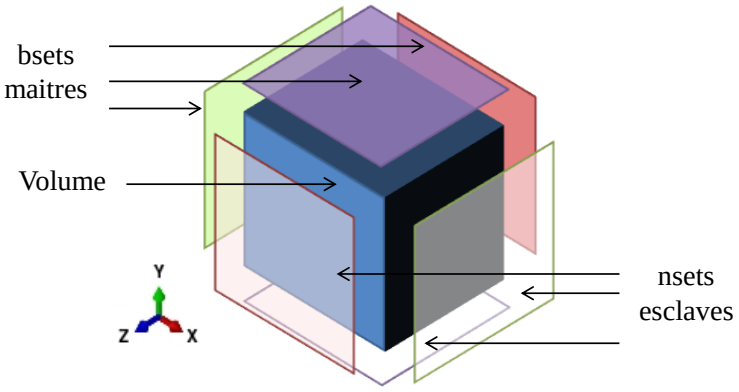


Figure 2-36 : Conditions aux limites périodiques spécifiques pour le contrôle de maillages non-coïncidents

Les conditions aux limites par contrôle de faces induisent cependant des perturbations des champs de contraintes sur les bords des cellules. Ces effets de bord sont générés par les

conditions cinématiques imposées par les MPC4 et ne se propagent en moyenne que sur 4 éléments. Il est donc possible de négliger ces perturbations sur les champs locaux à partir du moment où le maillage est suffisamment fin.

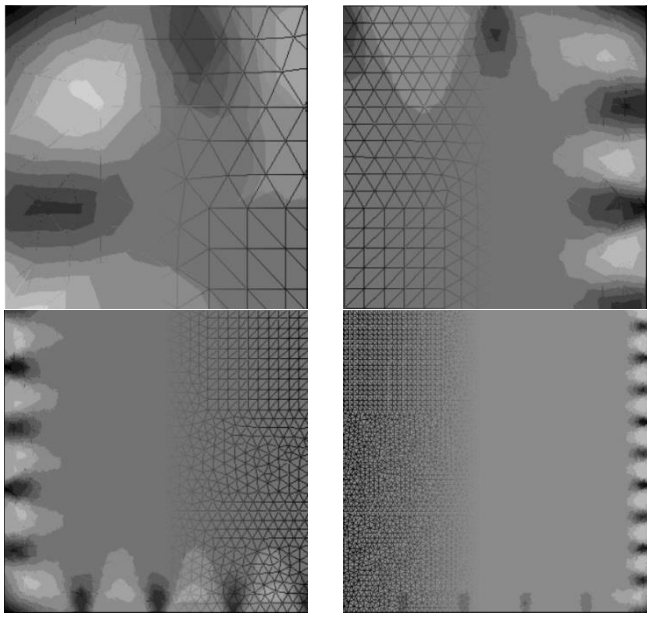


Figure 2-37 : Evolution des effets de bords en fonction de la finesse du maillage à iso-échelle

Ces phénomènes peuvent se vérifier en observant l'influence des perturbations sur la rigidité d'une cellule 2D homogène en fonction du raffinement du maillage à iso-échelle (*figure 2-37)*. Les calculs réalisés montrent que les perturbations générées par le contrôle des faces ont finalement peu d'influence sur le comportement global d'une cellule. Dans le cas de travaux sur des paramètres locaux et pour un grand nombre de valeurs, ces perturbations ont également peu d'influence si les distributions des valeurs sont étudiées.

5.2.2. Calcul des matrices de rigidité des cellules

Le choix de cellules statistiquement représentatives s'effectue sur leur comportement élastique linéaire global. En définissant $\underline{\underline{\Sigma}}$ et $\underline{\underline{E}}$, respectivement, les tenseurs macroscopiques des contraintes et des déformations, la relation d'élasticité linéaire de Hooke [*Hooke*, 1678] permet le calcul des matrices de rigidité et de souplesse homogénéisées, respectivement, $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}$, grâce aux relations *(2.8)* et *(2.9)*. Ces matrices sont des tenseurs symétriques d'ordre 4, dont la notation de Voigt fait état de 21 composantes [*Berthelot*, 2005].

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{E}} \qquad (2.8)$$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\Sigma}} \qquad (2.9)$$

Les travaux de Dirrenberger [*Dirrenberger*, 2012] rappellent qu'il est possible de déterminer chacune des composantes des matrices de rigidité (ou de souplesse) d'une microstructure périodique en imposant des déformations nulles dans 5 des 6 directions de sollicitation possibles. Ceci engendre des relations linéaires entre la contrainte et la déformation. Par exemple, pour : ε_{11} = 1 et 0 pour les 5 autres composantes du tenseur des déformations, les composantes du tenseur des contraintes sont données par les expressions suivantes *(2.10)* :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11} &= C_{11} \\ \Sigma_{22} &= C_{12} \\ \Sigma_{33} &= C_{13} \\ \Sigma_{12} &= C_{14} \\ \Sigma_{23} &= C_{15} \\ \Sigma_{31} &= C_{16} \end{aligned} \qquad (2.10)$$

Pour chaque cellule, six calculs doivent être réalisés afin de déterminer leur matrice de rigidité homogène. Ces calculs sont communément appelés « problèmes élémentaires ».

5.3. Détermination des indicateurs de choix de la CESR

Pour identifier la cellule élémentaire statistiquement représentative (CESR), deux types d'indicateurs de performances globales sont utilisés. Le premier indicateur permet l'évaluation des performances en termes de rigidité de chaque cellule, tandis que le second renseigne sur le niveau d'isotropie transverse du comportement des cellules. Une convention de notation est adoptée afin de clarifier l'écriture des composantes, paramètres et indicateurs évoqués dans ce qui suit. L'indice *c* fait référence à une cellule donnée, la lettre *P* fait référence à une composante de la matrice de rigidité.

5.3.1. Indicateur du niveau d'isotropie transverse des cellules

Le premier indicateur de choix de la CESR repose sur le comportement isotrope transverse des cellules générées. Les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson des fibres et de la matrice sont fixés grâce aux valeurs déterminées dans la première partie du manuscrit (*chapitres 2 et 3*). Les fibres sont considérées comme cylindriques et isotropes transverse. Les fibres étant générées de façon unidirectionnelle, les cellules doivent donc avoir elles-mêmes un comportement isotrope transverse [*Hori*, 1998]. Les conditions d'isotropie transverse sont rappelées via les égalités entre 5 couples de composantes de la matrice de raideur de la cellule : $E_{22} = E_{33}$, $\nu_{12} = \nu_{13}$, $\nu_{21} = \nu_{31}$, $\nu_{23} = \nu_{32}$, $G_{12} = G_{31}$ et $G_{23} = E_{22}/2(1+\nu_{23})$.

L'écart ${E_{Pc}}^{IT}$ entre chaque valeur qui constituent les 5 couples de composantes *P* d'isotropie transverse d'une cellule *c* est d'abord déterminé avec la formule *(2.11)*.

$${E_{Pc}}^{IT} = 1 - \left| \frac{P_P - P_{P+1}}{P_P + P_{P+1}} \right|_c \qquad (2.11)$$

L'indice *P+1* représente la composante égale à celle considérée dans le cas de l'isotropie transverse. Le *tableau 2-2* rappelle les égalités entre les composantes avec cette notation.

Composante P	Composante P+1
E_{22}	E_{33}
ν_{12}	ν_{13}
ν_{21}	ν_{31}
G_{12}	G_{31}
G_{23th}	G_{23ef}

Tableau 2-2 : Egalité des composantes de la matrice de rigidité dans le cas de l'isotropie transverse

G_{23th} est la valeur de G_{23} théorique, calculée grâce à la relation d'isotropie des modules de cisaillement rappelée en début de paragraphe. Cette valeur est comparée à la valeur effective du module de cisaillement dans le plan *23* : G_{23ef}. La valeur de l'écart relatif ${E_{Pc}}^{IT}$ ainsi obtenue varie entre 0 et 1, où 1 signifie que les deux composantes P_P et P_{P+1} sont égales. Le produit des ${E_{Pc}}^{IT}$ est ensuite calculé pour chaque cellule *c (2.12)*.

$$IT_c = \prod_{k=1}^{5} \left({E_{Pc}}^{IT}\right) \qquad (2.12)$$

Dans ce chapitre, l'indicateur noté IT_c traduit l'isotropie transverse du comportement de la cellule considérée. Cet indicateur varie de 0 à 1, où 1 signifie qu'une cellule est parfaitement isotrope transverse. L'isotropie transverse globale IT_G *(2.13)*, est finalement calculée par rapport aux valeurs IT_c de l'ensemble des cellules générées.

$$IT_G = \frac{IT_c - IT_{c_{min}}}{IT_{c_{max}} - IT_{c_{min}}} \qquad (2.13)$$

Cet indicateur global permet le classement de l'ensemble des cellules générées selon leur comportement isotrope transverse. Il est important de remarquer que IT_G est défini de manière relative à partir du degré d'isotropie transverse minimal et maximal de l'ensemble des cellules. Par conséquent, il ne traduit en aucun cas un pourcentage d'erreur par rapport à un comportement isotrope transverse parfait.

5.3.2. Indicateur de la performance des cellules

Les travaux de Kanit [*Kanit et al.*, 2003] et ceux de Hollister [*Hollister & Kikuchi*, 1992] montrent que le comportement à convergence est atteint plus rapidement dans le cas d'une cellule périodique, lorsque son volume augmente. Le tracé de la composante moyenne E_{11} et de l'écart-type associé par rapport au volume de chaque classe de cellule (*figure 2-38*) confirme l'hypothèse de convergence des résultats en fonction de la taille des cellules : l'écart-type des classes de cellules de plus grand volume (à partir de 0,7 mm^3) est plus faible que celui des cellules de volume plus restreint.

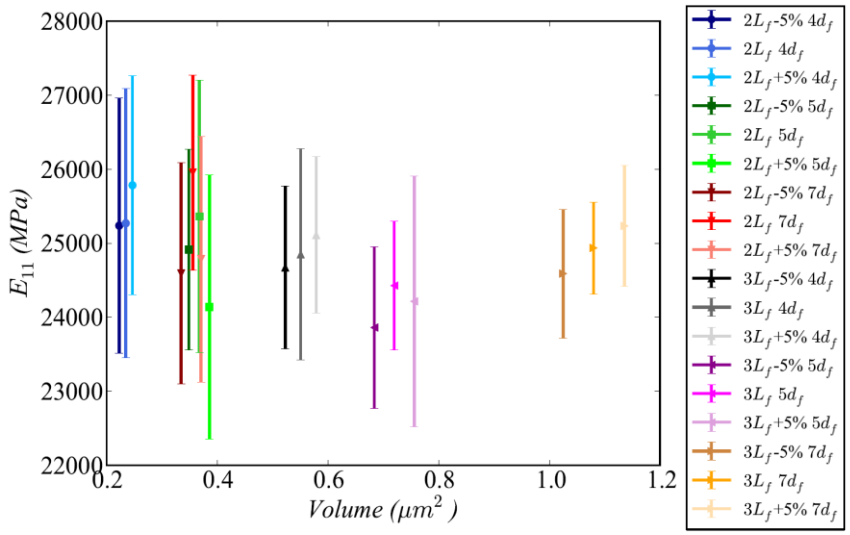


Figure 2-38 : Tracé du module E_{11} moyen et de son écart-type pour chaque classe de cellule en fonction de son volume

Ainsi, l'indicateur proposé dans cette section a pour but de définir la rigidité d'une cellule dont le comportement est représentatif de celui de la microstructure, à partir de la rigidité des plus grosses cellules de l'étude. Pour ce faire, le volume de toutes les cellules a été normalisé de 0 à 1. Le volume 1 correspond à celui des cellules de longueur $3L_f$+5% et de largeur $7d_f$, qui constituent la classe de cellules les plus grandes. Chaque composante P de la matrice de rigidité d'une cellule c est pondérée par rapport à son volume normalisé $V^N{}_c$. En calculant le rapport de la somme de l'ensemble de ces données par la somme des volumes normalisés, la valeur à convergence VC_{Pc} *(2.14)* est ainsi obtenue pour chacune des douze composantes de la matrice de rigidité.

$$VC_{Pc} = \frac{\sum_{c=1}^{180}(P_c \times V^N{}_c)}{\sum_{c=1}^{180} V^N{}_c} \qquad (2.14)$$

Les douze valeurs de VC_{Pc} sont donc les valeurs des composantes de la matrice de rigidité du comportement vers lequel tendent les plus grosses cellules. Ces valeurs sont celles que doivent avoir les composantes d'une cellule représentative du comportement du composite unidirectionnel renforcé en fibres courtes. L'écart relatif ER_{Pc} de chaque composante de la matrice de rigidité de chaque cellule est ensuite calculé avec la formule *(2.15)* Cet écart relatif permet de situer les performances du comportement élastique de la cellule considérée, par rapport au comportement vers lequel tendent les plus grosses cellules. Ce comportement est appelé « comportement à convergence ».

$$ER_{Pc} = 1 - \left|\frac{P_c - VC_{Pc}}{VC_{Pc}}\right| \qquad (2.15)$$

Une valeur d'erreur cumulée globale EC_c est ensuite calculée, pour chaque cellule, grâce aux écarts relatifs des douze composantes de la matrice de rigidité *(2.16)*.

$$EC_c = \sum_{p=1}^{12} ER_{Pc}{}^2 \qquad (2.16)$$

Finalement, l'écart relatif global EC_G du comportement d'une cellule par rapport au comportement à convergence *(2.17)* est déterminé en considérant les valeurs minimales et maximales de l'erreur cumulée de l'ensemble des cellules. Cette étape est une normalisation de l'erreur cumulée globale EC_G de 0 à 1, permettant la comparaison des performances de la rigidité de toutes les cellules entre elles.

$$EC_G = \frac{EC_c - EC_{c_{min}}}{EC_{c_{max}} - EC_{c_{min}}} \qquad (2.17)$$

L'écart relatif global (EC_G) est ainsi un indicateur global de la performance de la rigidité d'une cellule et permet le classement des cellules générées selon leur proximité avec le comportement à convergence.

La combinaison des deux indicateurs globaux permet finalement un classement général des cellules les plus isotropes transverses et dont le comportement est le plus proche des valeurs à convergence, aux cellules les moins isotropes transverses dont le comportement est le plus éloigné des valeurs à convergence. Les travaux étant motivés par la détermination de la plus petite cellule représentative possible, la dernière étape du choix de la CESR doit être axée sur son volume. En effet, plus la CESR sera petite, plus il sera aisé de réaliser des calculs complexes et/ou non-linéaires sur ces dernières. Ce choix est donc fait en fonction du classement généré par les indicateurs globaux utilisés et le volume de la cellule.

5.4. Détermination d'une CESR du comportement effectif global

Les résultats présentés dans cette section sont obtenus à partir des 180 cellules générées, sur lesquelles les six problèmes élémentaires sont appliqués afin d'obtenir leur matrice de rigidité. Le temps moyen d'un calcul et son écart-type est tracé par rapport au volume de chaque classe de cellule (*figure 2-39*). Ces données démontrent l'intérêt de définir un VER dans le cas d'un matériau composite renforcé en fibres courtes : les coûts de calcul peuvent s'avérer prohibitifs dans le cas de calculs d'une microstructure complète, plus volumineuse et plus complexe en termes d'orientations des fibres.

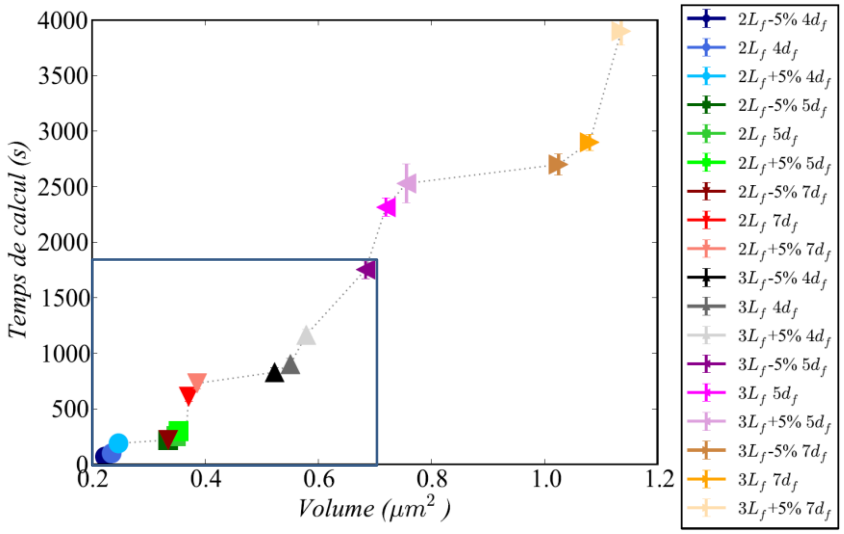


Figure 2-39 : Tracé des temps de calculs moyens et de leurs écarts-types par rapport au volume de chaque classe de cellule. Le cadre rappelle les cellules ayant des temps de calcul inférieurs à trente minutes

Des calculs non-linéaires font l'objet de travaux ultérieurs (*partie 3, chapitre 7, paragraphe 7.2.1*). De ce fait, le temps de calcul est un indicateur déterminant dans le choix de la CESR. En effet, celui-ci peut considérablement augmenter dans le cas de calculs non-linéaires [*Christensen & Bastien*, 2015]. L'augmentation du temps de calcul dans ce cas est dépendante du modèle de comportement matériau utilisé, des hypothèses de modélisation, du nombre de pas de calcul et de la précision souhaitée : il devient donc impossible de prévoir le temps d'un calcul non-linéaire. Le choix est fait de retenir une CESR avec un temps de calcul moyen d'environ trente minutes (soit les cellules comprises dans le cadre inférieur gauche de la *figure 2-39*. La taille maximale de la CESR doit être inférieure à $L_c = 3L_f$ et $h_c = l_c = 5d_f$).

Les indicateurs IT_G et EC_G sont appliqués aux matrices de rigidité de l'ensemble des classes de cellules. Dans un premier temps, la réponse moyenne de chaque classe est tracée par rapport aux indicateurs de performance globaux (*figure 2-40*).

La démarche adoptée pour cette étude met en lumière cinq classes particulièrement bien positionnées par rapport aux indicateurs ($3L_f$*-5%* de largeur $5d_f$, $3L_f$*+5%* de largeur $4d_f$, $3L_f$ de largeur $4d_f$, $3L_f$*-5%* de largeur *4df* et $2L_f$*+5%* de largeur $7d_f$). L'étape suivante consiste à étudier la réponse de chaque classe en fonction de son volume et de l'indicateur d'isotropie transverse.

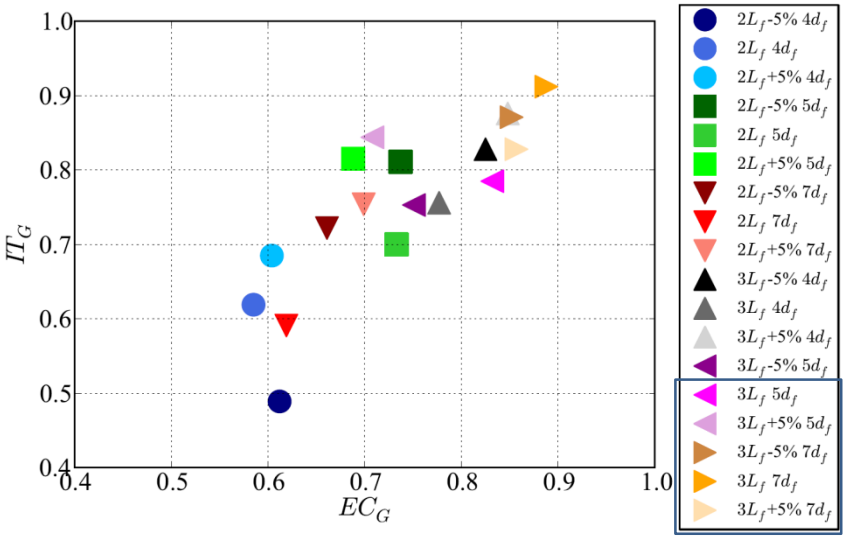


Figure 2-40 : Tracé des indicateur IT_G et EC_G moyens pour chaque classe de cellules. Le cadre rappelle les cellules ayant des temps de calcul prohibitifs.

5.4.1. Etude de l'indicateur d'isotropie transverse des cellules

L'indicateur d'isotropie transverse IT_G est défini à partir des valeurs minimales et maximales du degré d'isotropie transverse de l'ensemble des cellules. Il convient donc dans un premier temps d'observer l'écart $E_{Pc}{}^{IT}$ pour chaque couple de composantes d'isotropie transverse des deux extremums de l'IT_G afin de situer l'échelle de l'IT_G. Ces données sont présentées dans le *tableau 2-3* pour les deux cellules dont la valeur de l'IT_G est maximale et minimale (respectivement la cellule 9 de la classe $3L_f$*+5%* de largeur $5d_f$ et la cellule 6 de la classe $2L_f$ de largeur $5d_f$).

Classe	$3L_f$, $5d_f$	$3L_f$+5%, $5d_f$
Cellule	**6**	**9**
$E_{22} = E_{33}$	2,50%	0,02%
$\nu_{12} = \nu_{13}$	4,70%	0,21%
$\nu_{21} = \nu_{31}$	2,20%	0,23%
$\nu_{23} = \nu_{32}$	2,50%	0,02%
$G_{12} = G_{31}$	0,12%	0,02%
$G_{23cal} = G_{23ef}$	2,52%	0,13%
IT_G	0,00	1,00

Tableau 2-3 : Ecart E_{Pc}^{IT} entre les composantes d'isotropie transverse en fonction de l'IT_G maximal et minimal

L'IT_G de ces cellules montre que l'erreur relative maximale de la cellule la moins isotrope transverse ne dépasse pas 5%. L'indicateur IT_G étant de nature qualitative, la cellule la moins isotrope transverse n'est cependant pas nécessairement complètement anisotrope. Les résultats présentés dans le *tableau 2-3* traduisent le fait que l'IT_G permet bien de classer les cellules entre elles vis-à-vis de leur comportement isotrope transverse.

Les valeurs de l'IT_G sont présentées sous forme de tableaux dont les cases sont colorées en fonction de la valeur d'IT_G. Plus l'IT_G est élevé, plus les cases sont foncées. Les *tableau 2-4*, *tableau 2-5* et *tableau 2-6* présentent respectivement les valeurs d'IT_G minimales, moyennes et maximales, selon les longueurs et les largeurs de cellules. Les résultats d'IT_G montrent que les classes de largeur $7d_f$ se positionnent en moyenne mieux que les autres classes. A l'inverse, l'augmentation de l'indicateur ne semble pas corrélée à la longueur de cellule.

Longueurs	Largeurs		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,16	0,40	0,52
$2L_f$	0,05	0,40	0,57
$2L_f$+5%	0,24	0,50	0,58
$3L_f$-5%	0,57	0,58	0,60
$3L_f$	0,60	0,55	0,83
$3L_f$+5%	0,00	0,74	0,71

Tableau 2-4 : Minimas de l'indicateur IT_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Longueurs	Largeurs		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,49	0,70	0,75
$2L_f$	0,62	0,72	0,79
$2L_f$+5%	0,69	0,75	0,84
$3L_f$-5%	0,81	0,83	0,87
$3L_f$	0,81	0,76	0,91
$3L_f$+5%	0,59	0,88	0,83

Tableau 2-5 : Moyennes de l'indicateur IT_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Longueurs	Largeurs		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,82	0,98	0,96
$2L_f$	1,00	0,91	0,99
$2L_f$+5%	0,89	0,95	1,00
$3L_f$-5%	0,95	0,96	0,97
$3L_f$	0,95	0,92	0,99
$3L_f$+5%	0,94	0,98	0,99

Tableau 2-6 : Maximas de de l'indicateur IT_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Le tracé des valeurs moyennes d'IT_G par classe de cellules et de leurs écarts-types permet de mieux visualiser le positionnement des cellules par rapport à leur volume (*figure 2-41*).

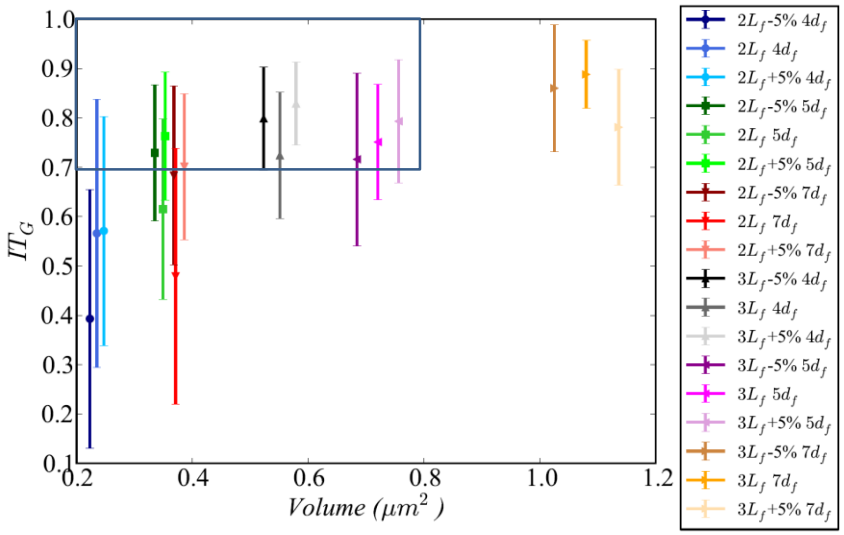


Figure 2-41 : Tracé de l'indicateur IT_G avec écarts-types pour chaque classe de cellules

Il est décidé arbitrairement que les cellules dont l'IT_G est inférieur à 0,7 ne sont pas retenues pour la suite de l'étude. En effet, en dessous de cette valeur, l'écart $E_{Pc}{}^{IT}$ entre les composantes des couples d'isotropie transverse dépasse 2%. Ce choix a donc pour but de conserver uniquement les cellules très proches de l'isotropie transverse parfaite. En ajoutant à cela le temps de calcul inférieur à trente minutes fixé au préalable, les cellules retenues à ce stade de la démarche sont celles comprises dans le cadre de la *figure 2-41*, et sont détaillées dans le *tableau 2-7*.

Longueur	Largeur	Cellules
$2L_f$	$4d_f$	1, 4, 7
$2L_f$+5%	$4d_f$	1, 5, 6, 7, 9, 10
$3L_f$-5%	$4d_f$	1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$3L_f$+5%	$4d_f$	2, 3, 10
$2L_f$-5%	$5d_f$	1, 2, 4, 6, 8
$3L_f$	$4d_f$	1, 2, 3, 5, 7, 9, 10
$3L_f$	$5d_f$	2, 3, 5, 7, 8, 9
$2L_f$+5%	$5d_f$	1, 2, 3, 5, 7
$3L_f$-5%	$5d_f$	1, 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10
$3L_f$	$5d_f$	1, 3, 4, 5, 7, 10

Tableau 2-7 : Cellules retenues après application des critères sur l'IT_G et sur le temps de calcul

L'application de l'indicateur EC_G nécessite de définir quelles sont les valeurs des composantes de la matrice de rigidité vers lesquelles tendent les plus grosses cellules. Grâce à la méthode présentée précédemment, ces valeurs ont été déterminées et sont reportées dans le *tableau 2-8*.

Module	*Valeur (GPa)*	*Coefficient de Poisson*	*Valeur*	*Module de cisaillement*	*Valeur (GPa)*
E_{11}	24,470	$\nu_{12} = \nu_{13}$	0,394	G_{12}	1,028
E_{22}	4,481	$\nu_{23} = \nu_{32}$	0,567	G_{23}	1,420
E_{33}	4,482	$\nu_{31} = \nu_{21}$	0,072	G_{31}	1,029

Tableau 2-8 : Valeurs des paramètres de la matrice de raideur à convergence

Comme pour l'IT_G, il convient dans un premier temps d'observer l'écart relatif ER_{Pc} entre les composantes de la matrice de rigidité d'une cellule dont l'EC_G est égal à 1 et celle dont l'EC_G est nul, afin d'interpréter la signification des variations de l'indicateur EC_G. Ces données sont présentées dans le *tableau 2-9* pour les deux cellules dont la valeur de l'EC_G est maximale et minimale (respectivement la cellule 6 de la classe $2L_f$+5% de largeur $3d_f$ et la cellule 8 de la classe $3L_f$-5% de largeur $3d_f$).

Classe	$2L_f$+5%, $5d_f$	$3L_f$-5%, $5d_f$
Cellule	**6**	**8**
Paramètre	**ER_{pc}**	
E_{11}	18,34%	0,42%
E_{22}	2,49%	1,04%
E_{33}	1,04%	0,62%
ν_{12}	4,39%	0,31%
ν_{23}	1,75%	0,29%
ν_{31}	15,86%	0,05%
ν_{21}	19,67%	0,87%
ν_{32}	3,14%	0,70%
ν_{13}	6,10%	0,70%
G_{12}	0,05%	0,09%
G_{23}	0,17%	0,65%
G_{31}	0,39%	0,10%
EC_G	0,00	1,00

Tableau 2-9 : Ecart relatif ER_{Pc} entre les composantes de la matrice de rigidité à convergence en fonction de l' EC_G maximal et minimal

Les résultats présentés dans le *tableau 2-9* montrent que l'indicateur EC_G est plus quantitatif que l'IT_G car il traduit d'avantage l'écart entre les composantes de la matrice de rigidité à convergence. Au regard de ces résultats et des résultats présentés dans le *tableau 2-3*, un écart d'EC_G a plus d'impact qu'un écart d'IT_G sur le comportement d'une cellule. Par conséquent, la valeur de l'indicateur EC_G d'une cellule sera privilégiée pour le choix de la CESR.

5.4.2. Etude de l'indicateur de performance des cellules

Les valeurs de l'indicateur de convergence EC_G sont analysées en fonction de la longueur et de la largeur des cellules (*tableau 2-10*, *tableau 2-11*, *tableau 2-12*). Les hypothèses de convergence induites par le volume des cellules périodiques se retrouvent dans ces résultats : plus le volume de la cellule est important, plus son comportement élastique converge et plus l'écart-type entre les valeurs d'une même classe diminue.

Longueurs	**Largeurs**		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,39	0,45	0,44
$2L_f$	0,31	0,51	0,62
$2L_f$+5%	0,35	0,00	0,49
$3L_f$-5%	0,27	0,44	0,77
$3L_f$	0,56	0,50	0,78
$3L_f$+5%	0,42	0,66	0,76

Tableau 2-10 : Minimas de l'indicateur EC_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Longueurs	Largeurs		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,61	0,73	0,75
$2L_f$	0,58	0,66	0,83
$2L_f$+5%	0,60	0,70	0,71
$3L_f$-5%	0,74	0,82	0,85
$3L_f$	0,69	0,78	0,89
$3L_f$+5%	0,62	0,85	0,86

Tableau 2-11 : Moyennes de l'indicateur EC_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Longueurs	Largeurs		
	$4d_f$	$5d_f$	$7d_f$
$2L_f$-5%	0,85	0,94	0,92
$2L_f$	0,73	0,89	0,96
$2L_f$+5%	0,80	0,91	0,91
$3L_f$-5%	0,95	1,00	0,94
$3L_f$	0,97	0,97	0,98
$3L_f$+5%	0,79	0,95	0,98

Tableau 2-12 : Maximas de l'indicateur EC_G selon les largeurs et longueurs de cellules

Les moyennes d'EC_G par classe de cellules avec leurs écarts-types sont tracées par rapport au volume de chaque classe de cellule sur la *figure 2-42*.

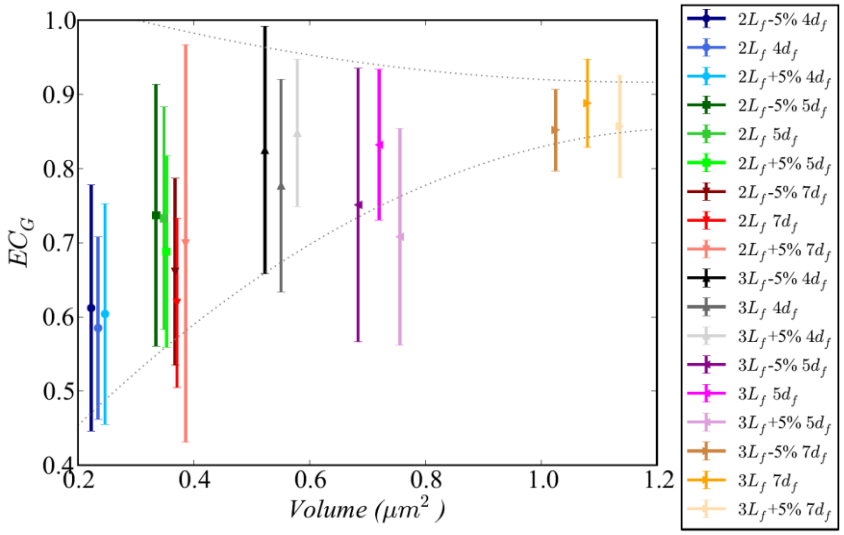


Figure 2-42 : Tracé de l'indicateur EC_G avec écarts-types pour chaque classe de cellules

De la même manière que pour l'indicateur d'isotropie transverse, il est nécessaire de définir une valeur minimale d'EC_G en dessous de laquelle les cellules ne sont pas retenues dans le choix de la CESR. Les résultats permettent de définir qu'en dessous d'une valeur d'EC_G de 0,9, l'écart relatif ER_{Pc} d'une des composantes de la matrice de rigidité de la cellule dépasse 2%. Pour la détermination d'une CESR, une telle valeur assure un comportement de cellule très

proche des valeurs à convergence. En croisant les cellules retenues grâce aux indicateurs EC_G, IT_G et leur temps de calcul, seules dix cellules peuvent être choisies comme potentielles CESR du comportement du matériau renforcé en fibres unidirectionnelles. Ces cellules sont données dans le *tableau 2-13*.

Longueur	Largeur	Cellules
$3L_f$-5%	$4d_f$	8
$2L_f$-5%	$5d_f$	6
$3L_f$	$4d_f$	3
$2L_f$+5%	$5d_f$	2
$3L_f$-5%	$5d_f$	2, 7, 8, 10
$3L_f$	$5d_f$	1, 3

Tableau 2-13 : Cellules retenues après application des indicateurs de performances globales IT_G et EC_G

5.4.3. Choix d'une potentielle CESR

Afin de retenir une cellule parmi les dix restantes, un dernier choix peut être fait sur celle ayant le meilleur compromis entre les indicateurs globaux EC_G et IT_G. Le tracé des cellules restantes par rapport à leur valeur d'EC_G et d'IT_G (*figure 2-43*) montre que les cellules 7 et 8 de la classe $3L_f$-5% de largeur $5d_f$ sont les mieux positionnées. Cependant, l'indicateur EC_G étant le plus quantitatif des deux indicateurs, la cellule 8 est par conséquent une potentielle CESR avec une valeur égale à 1.

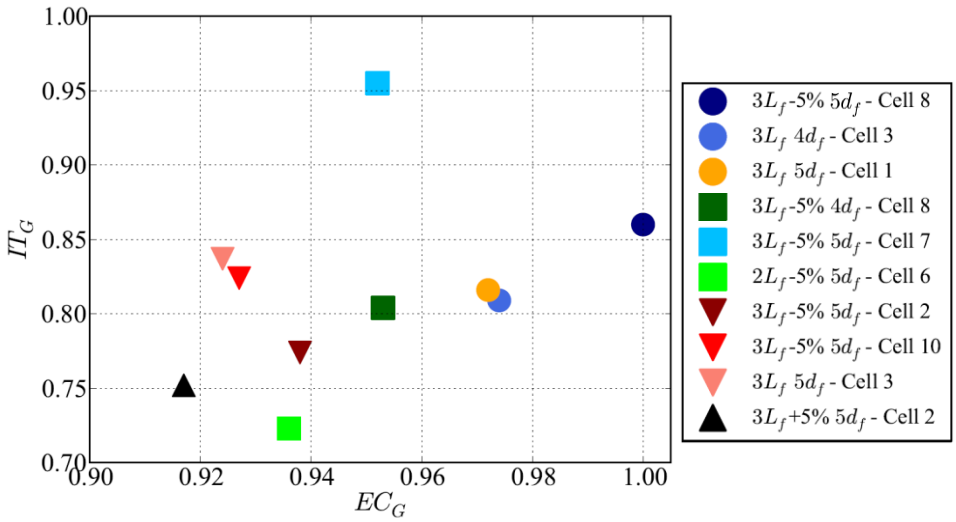


Figure 2-43 : Tracé des dix cellules restantes par rapport aux indicateurs EC_G et IT_G

En termes de symétrie de comportement, le *tableau 2-14* montre que la cellule 8 est pratiquement isotrope transverse.

Composante	E_{Pc}^{IT}
$E_{22} = E_{33}$	0,21%
$v_{12} = v_{13}$	0,20%
$v_{21} = v_{31}$	0,41%
$v_{23} = v_{32}$	0,21%
$G_{12} = G_{31}$	0,09%
$G_{23cal} = G_{23ef}$	1,37%
IT_G	0,860

Tableau 2-14 : Ecart E_{Pc}^{IT} entre les composantes d'isotropie transverse de la cellule 8

L'étude de la composante ER_{Pc} de l'indicateur EC_G, met en évidence les écarts relatifs des paramètres de la matrice de rigidité de la cellule par rapport à ceux du comportement à convergence (*figure 2-44*). Ces valeurs sont quasiment nulles, ce qui démontre les performances de la cellule. Les écarts les plus importants sont respectivement observés sur les composantes E_{22}, v_{12} et v_{13}. A ce stade, la cellule 8 peut être considérée comme une potentielle CESR.

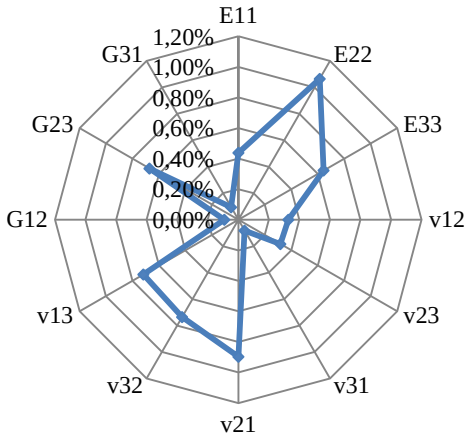


Figure 2-44 : Ecart relatif des paramètres de la matrice de rigidité de la cellule 8 par rapport à ceux du comportement à convergence

5.5. Etude de la proximité des fibres dans les cellules

En étudiant les performances du comportement réversible linéaire global dans une classe de cellules donnée, il apparait que pour une cellule de mêmes dimensions, dont les composants (matrice et fibres) sont présents dans les mêmes proportions et ont les mêmes comportements, les variations de EC_G sont substantielles. Ces résultats sont observables sur la *figure 2-42*, et plus spécifiquement dans la classe de cellules contenant la cellule 8 ($3L_f$-*5%* de largeur $5d_f$), sont présentées dans le *tableau 2-15*.

Cellule	EC_G
1	0,871
2	0,938
3	0,832
4	0,442
5	0,739
6	0,691
7	0,952
8	1,000
9	0,901
10	0,927

Tableau 2-15 : Distribution des valeurs d'EC_G dans une classe de cellules de dimensions identiques

La différence entre ces cellules réside uniquement dans la position des fibres les unes vis-à-vis des autres. Il faut ainsi comprendre quelle est l'influence de la position des fibres dans un volume donné, sur son comportement réversible linéaire global. Dans cette section, une démarche est proposée pour atteindre cet objectif via la définition d'un descripteur local de la microstructure.

5.5.1. Définition de l'indicateur local

L'indicateur local présenté dans cette section constitue une seconde méthode de détermination du confinement matriciel d'une microstructure tridimensionnelle. Elle n'est cependant pas comparable à la méthode du cube d'observation développée dans le chapitre précédent (*4.3.5*).

La démarche proposée ici s'inspire directement des travaux de Christensen [*Christensen*, 1979] et Jean [*Jean*, 2009] sur des cellules périodiques 2D. Comme les fibres dans les cellules sont unidirectionnelles, l'extension de ces méthodes en trois dimensions est possible de manière simple en ajoutant la troisième composante spatiale ($\vec{x}$) au calcul de la proximité des fibres. Chaque cellule 3D est discrétisée en tranches 2D coupées suivant $\vec{x}$. Les tranches sont définies dans le plan $(\vec{y}, \vec{z})$ (*figure 2-45*). Les coordonnées de chaque tranche sont conditionnées par le début et la fin d'une fibre. Ainsi, des tranches d'épaisseur connue e_T, dans lesquelles la proportion et la position des fibres ne varie pas, sont obtenues et peuvent être approximées à des surfaces 2D.

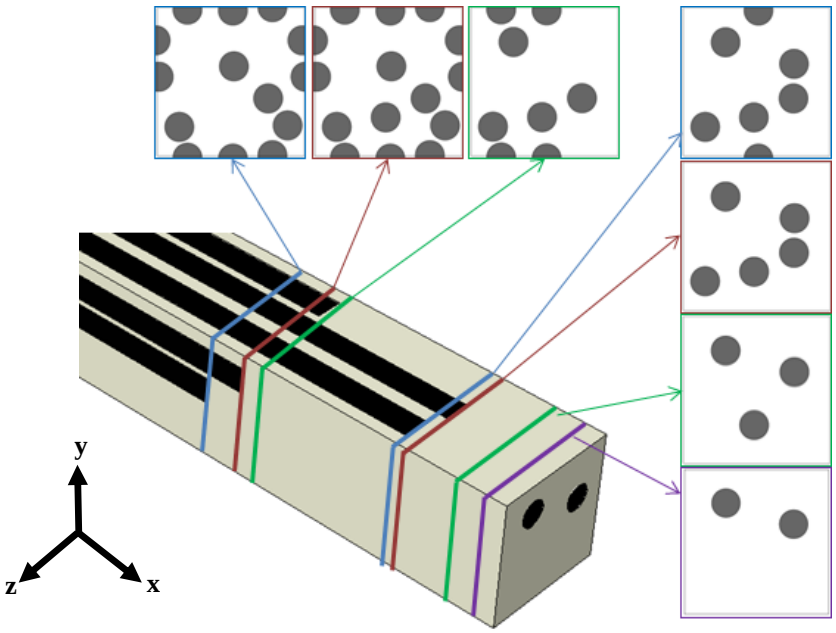


Figure 2-45 : Exemple de discrétisation d'une cellule 3D en tranches 2D.

En prenant en compte la périodicité de la microstructure 2D, comme dans les travaux de Ghossein et Lévesque [*Ghossein & Lévesque*, 2012], il est alors possible de déterminer la plus petite distance au premier voisin, D_T, dans la tranche considérée *(figure 2-46)*.

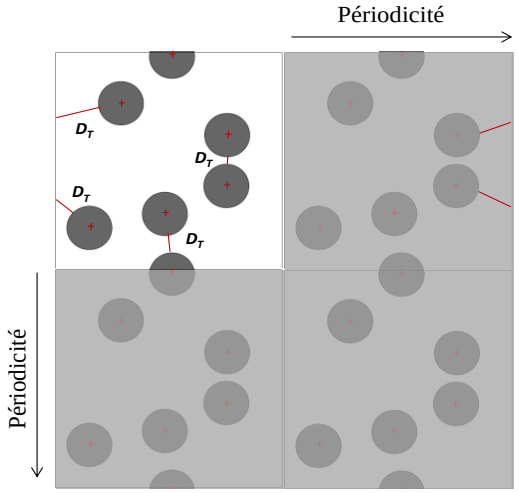


Figure 2-46 : Calcul de la plus petite distance au plus proche voisin des fibres dans une tranche 2D

Ainsi, le produit de D_T par e_T traduit la surface de confinement matriciel maximal d'une tranche 2D suivant $\vec{x}$. La proportion d'une tranche 2D dans l'ensemble de la cellule la contenant se définit par le rapport du volume Vol_T de la tranche par celui de la cellule Vol_C. Un indicateur de confinement matriciel de la surface, α_T, peut ainsi être défini par la relation *(2.18)* et traduit la proportion de confinement matriciel maximal d'une tranche par rapport à la cellule entière.

$$\alpha_T = \frac{D_T \times e_T}{\left({Vol_T}/{Vol_C}\right)} \qquad (2.18)$$

En calculant la somme des valeurs de α_T dans la cellule 3D *(2.19)*, α_c est finalement obtenu : il est considéré comme le niveau de confinement matriciel moyen d'une cellule. Ce confinement matriciel moyen est plus représentatif de la proximité globale des fibres dans la cellule que le confinement maximal d'une cellule. En effet, ce dernier serait pertinent uniquement pour considérer le confinement matriciel local sur une fibre [*Comin et al.*, 2014]. Il convient de noter que l'indicateur local α_c ne peut se comparer qu'à différentes réalisations d'une même classe de cellules.

$$\alpha_c = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{Ti} \qquad (2.19)$$

Avec $n = 2i_c + 1$, le nombre total de tranches dans une cellule.

5.5.2. Influence de la morphologie des cellules sur leur comportement global

Le niveau de confinement matriciel moyen d'une cellule permet de mettre en relation le comportement global et la position des fibres dans la cellule. Cette relation est observée sur un échantillon de 50 nouvelles cellules générées aléatoirement suivant la méthode présentée dans le paragraphe *5.1*. Les cellules ainsi générées sont de la taille de la classe de la cellule 8 : $3L_f$-*5%* de longueur pour $5d_f$ de largeur et de hauteur (soit 427 x 35 x 35 micromètres). L'indicateur de comportement global EC_G et microstructural αc sont calculés pour les 50 cellules et son comparés sur la *figure 2-47*.

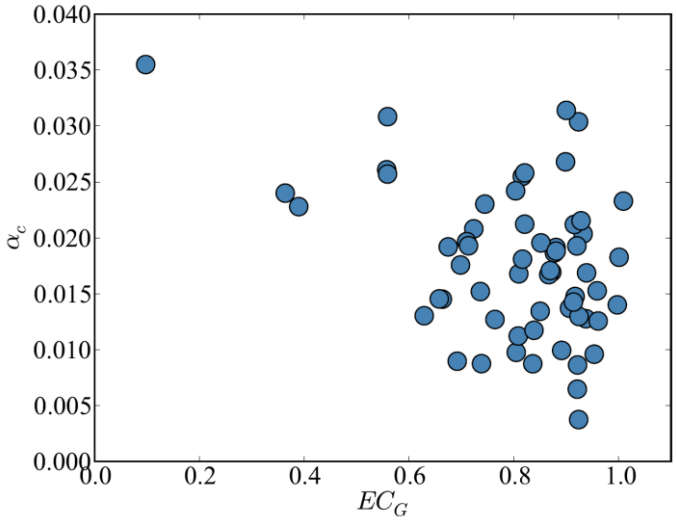


Figure 2-47 : Comparaison du comportement global EC_G et du niveau maximal de confinement matriciel pour 50 nouvelles cellules 3D

La *figure 2-47* semble montrer que l'indicateur local α_c évolue de manière inverse par rapport à l'indicateur EC_G. En effet, plus la raideur d'une cellule s'éloigne du comportement à convergence, plus α_c augmente. Il semble donc que plus le confinement matriciel est faible dans la cellule, plus le comportement de celle-ci se rapproche de celui à convergence.

Afin d'illustrer ces observations, la fraction volumique locale des cellules présentant les deux couples de valeurs extrêmes (α_c = 3,8.10^{-3}, EC_G = 0,92 et α_c = 3,6.10^{-2}, EC_G = 0,09) de la *figure 2-47* peut être étudiée. Pour une fraction volumique de fibre fixée à 19%, la fluctuation de fraction volumique locale autour de cette valeur ne peut être une donnée pertinente que si le volume observé peut contenir au moins 19% de fibres. Le volume d'observation doit donc être 100/19 ≈ 5,26 fois supérieur au volume d'une fibre. Le cas idéal doit dans ce cas montrer que la fraction volumique locale doit tendre vers la valeur fixée à 19%. La *figure 2-48* illustre la variation de fraction volumique locale pour les deux valeurs extrêmes de α_c.

La *figure 2-48* montre que pour une fraction volumique moyenne égale pour les deux cellules, l'écart-type est trois fois supérieur dans la seconde cellule. Par conséquent, la cellule ayant le plus fort niveau de confinement matriciel admet une microstructure hétérogène, c'est-à-dire qu'elle contient des clusters de fibres et des zones de faibles fractions volumiques.

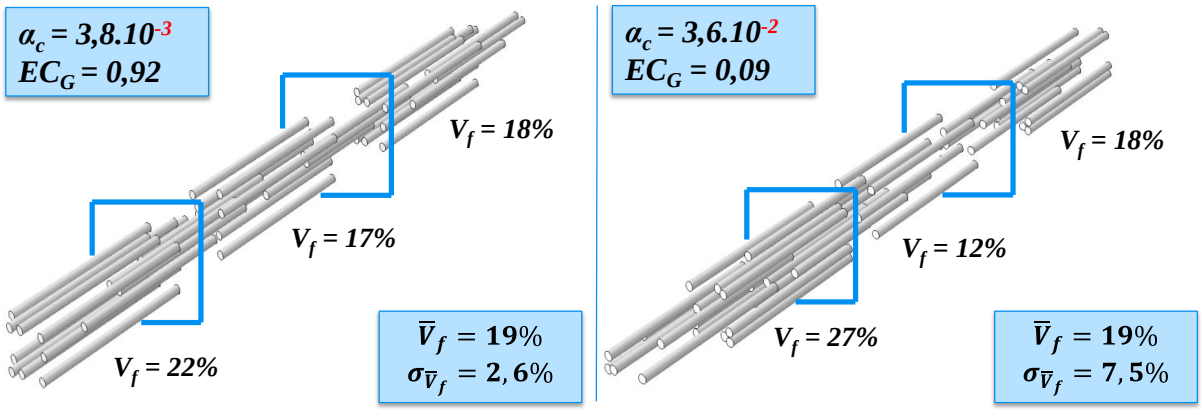


Figure 2-48 : Etude de la fraction volumique locale de fibres pour deux valeurs extrêmes de α_c

Afin de valider l'approche vue dans le paragraphe précédent, 50 nouvelles cellules de même volume sont encore générées. Pour ces nouvelles cellules, seul l'indicateur microstructural α_c est calculé. Sur les résultats obtenus, les dix cellules ayant les plus faibles valeurs de α_c sont conservées. Ce choix implique une présélection des cellules 3D suivant leur niveau de confinement matriciel maximal. Pour ces dix cellules, l'indicateur global EC_G est calculé. Ces nouveaux résultats sont ajoutés à ceux issus de la *figure 2-47* et tracés sur la *figure 2-49*.

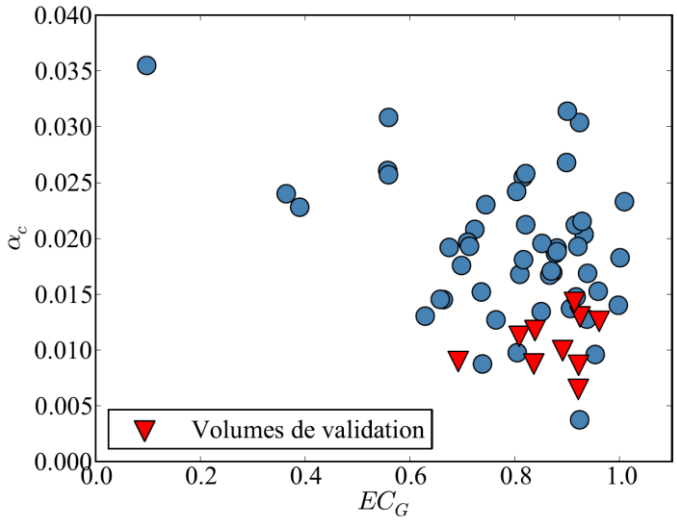


Figure 2-49 : Comparaison du comportement global EC_G et du niveau maximal de confinement matriciel pour 10 cellules 3D présélectionnées.

La *figure 2-49* montre ainsi que la présélection des cellules selon leur confinement matriciel permet la génération de cellules dont le comportement est globalement plus proche des valeurs des paramètres de rigidité à convergence, comme cela est détaillé dans le *tableau 2-16.*

Cellule	α_c	EC_G
1	$6{,}46.10^{-3}$	0,92
2	$8{,}64.10^{-3}$	0,92
3	$8{,}74.10^{-3}$	0,83
4	$8{,}97.10^{-3}$	0,69
5	$9{,}94.10^{-3}$	0,89
6	$11{,}22.10^{-3}$	0,80
7	$11{,}74.10^{-3}$	0,83
8	$12{,}57.10^{-3}$	0,96
9	$12{,}97.10^{-3}$	0,92
10	$14{,}26.10^{-3}$	0,91

Tableau 2-16 : Distribution des valeurs d'EC_G et de α_c pour dix cellules présélectionnées suivant leur niveau de confinement matriciel

En suivant la démarche établie dans le paragraphe précédent, l'étude des fractions volumiques locales des deux valeurs extrêmes de α_c pour les cellules présélectionnées est présentée dans la *figure 2-50*.

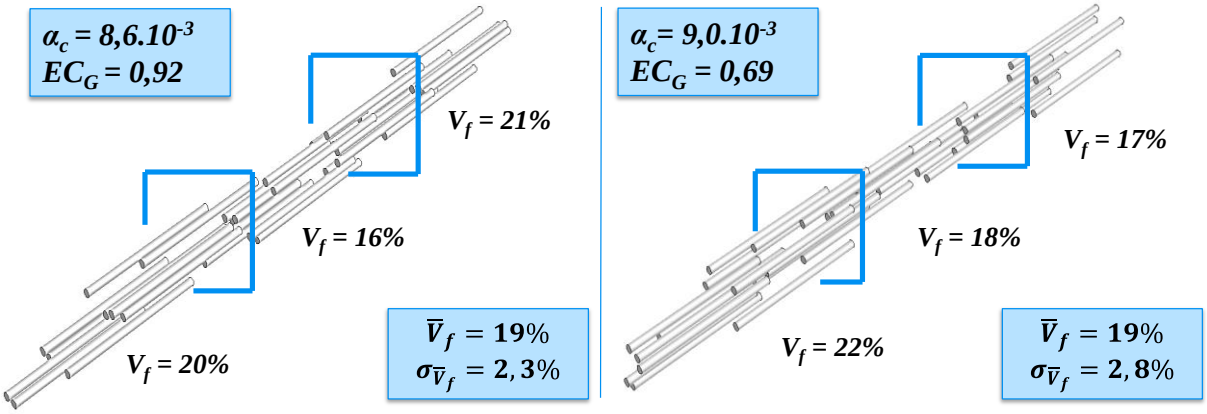


Figure 2-50 : Etude de la fraction volumique locale de fibres pour deux valeurs proches de α_c, dans le cas de cellules présélectionnées selon leur confinement matriciel

La *figure 2-50* montre que pour deux valeurs proches de α_c, l'écart relatif entre les fractions volumiques locales des cellules est proche. Cette plus faible dispersion traduit donc une meilleure homogénéité de la répartition des fibres au sein des cellules. Les clusters de fibres et les zones de faibles fractions volumiques sont par conséquent limités grâce au choix d'une faible valeur d'α_c. L'indicateur local présenté dans cette section peut ainsi être utilisé pour générer de potentielles CESR en étudiant uniquement la proximité des fibres dans les cellules.

5.6. Intégration du confinement matriciel réel dans le choix de la CESR

La méthode du cube d'observation développée au paragraphe *(4.3.5)*, peut être appliquée sur les cellules numériques générées dans ce chapitre du manuscrit. L'objectif est ici d'identifier une cellule dont la distribution de fraction volumique locale est comparable à celle de la microstructure réelle. L'unique CESR ainsi identifiée intègre finalement un comportement et une morphologie statistiquement représentative de la microstructure. Ce paragraphe présente le remaillage et la méthode statistique permettant d'intégrer le confinement matriciel, considéré comme une variabilité de la microstructure à prendre en compte dans la modélisation.

5.6.1. Démarche numérique et reconstruction de cellules spécifiques

Afin de comparer la microstructure réelle à celle des cellules, celles-ci sont d'abord maillées en voxels de manière à avoir une résolution similaire à celle des données de tomographie. Pour ce faire, une partie des cellules générées est présentée sur la *figure 2-49*. Ces cellules ont toutes un comportement proche de celui à convergence ($EC_G \geq 0{,}9$). La population étudiée est composée de 21 cellules et est présentée sur la *figure 2-51*.

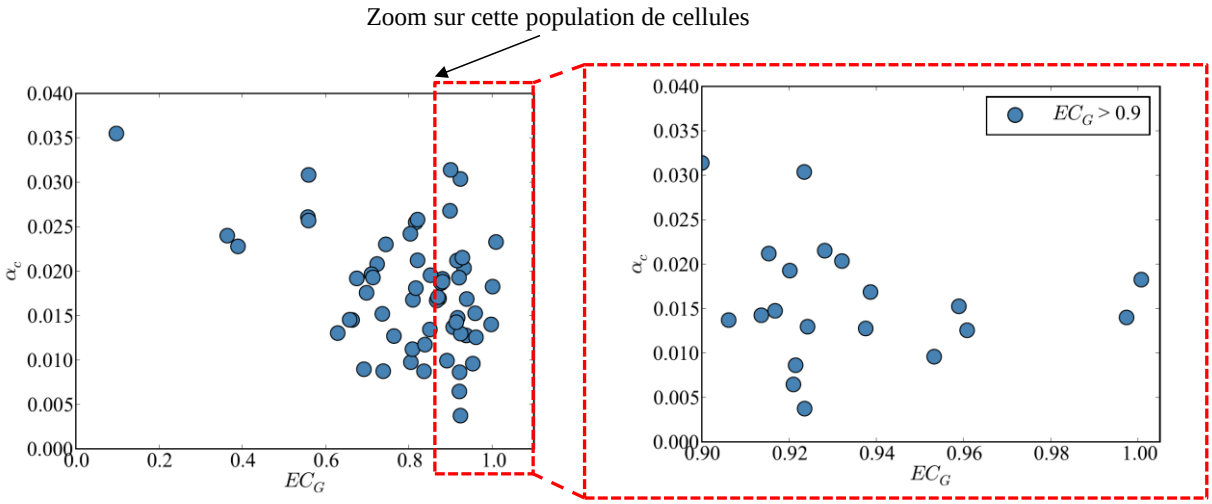
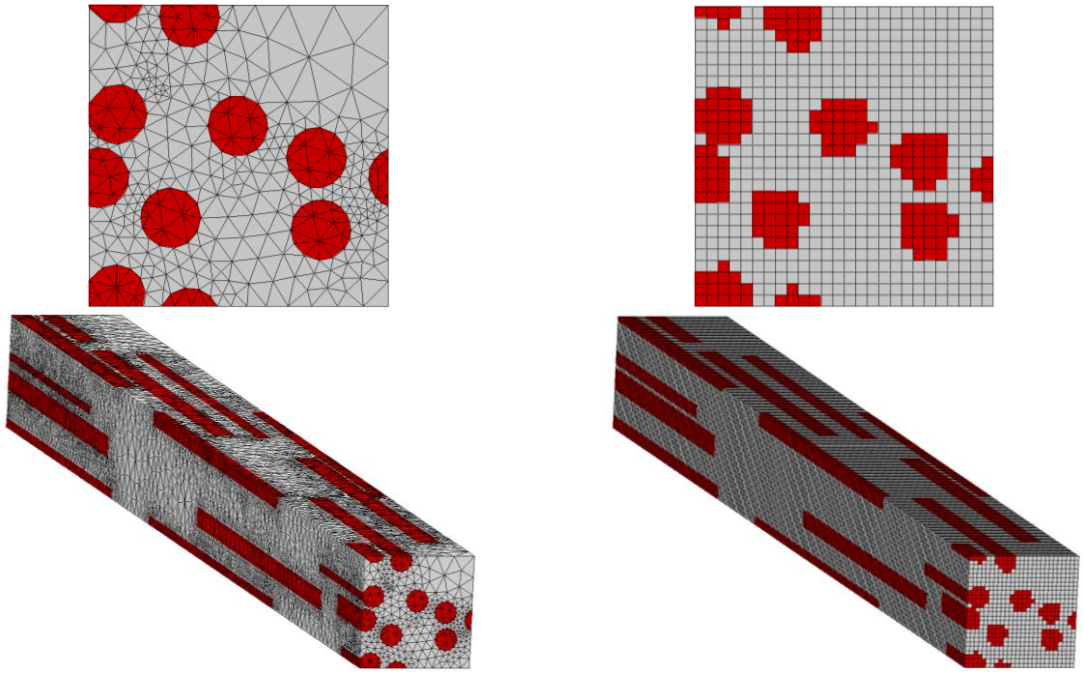


Figure 2-51 : Population de cellules dont l'EC_G est au moins égal à 0,9

Ces 21 cellules sont reconstruites avec la version 2016 de Digimat [*E-Xstream*, 2016], qui permet de générer et d'enregistrer un maillage voxélisé des cellules. En fixant la même taille de voxels que dans les données de tomographie, des cellules dont la résolution est la même que celle de la microstructure sont obtenues. Pour une cellule de 427 x 35 x 35 micromètres, un maillage de 328 x 26 x 26 voxels est obtenu. La forme des fibres est nécessairement dégradée par cette opération de maillage (*figure 2-52*), mais elle correspond à la forme de fibre observable dans la microstructure réelle.



(A) *(B)*

Figure 2-52 : Différence entre une cellule avec un maillage adapté à la géométrie (A) et un maillage avec des éléments cubiques de taille constante (voxels) (B)

La génération de tels maillages sur les 21 cellules permet ainsi d'appliquer la méthode du cube d'observation et de comparer les distributions de fractions volumiques locales à celles de la microstructure réelle. Cette comparaison se fait à l'aide du test statistique de Kolmogorov-Smirnov.

5.6.2. Le test de Kolmogorov-Smirnov

La taille des cellules est très inférieure à celle des données de tomographie. Leur représentation sous forme d'histogramme ne permet donc pas de comparer leur distribution de fraction volumique locale. Néanmoins, un outil de comparaison statistique est choisi afin de pouvoir quantifier les écarts entre leur distribution : le test de Kolmogorov-Smirnov (KS).

Ce test d'hypothèses a été initié par les travaux de Kolmogorov [*Kolmogoroff*, 1933][4] et par ceux de Smirnov [*Smirnov*, 1948] et est aujourd'hui largement utilisé dans de nombreux domaines scientifiques. Il permet de tester si un échantillon suit une loi connue ou si deux échantillons suivent une loi similaire [*Stephens*, 1974]. Dans le cas où deux échantillons *A* et *B* sont comparés, ce test de validité d'hypothèses est appliqué afin de statuer sur l'équivalence des distributions des deux échantillons. Les deux hypothèses H_0 et H_1, respectivement *l'hypothèse nulle* et *l'hypothèse alternative*, sont définies par les expressions *(2.20)* en fonction de F_A et F_B, les fonctions de répartition observées de la fraction volumique locale dans la microstructure (distribution de *A*) et dans une cellule donnée (distribution de *B*).

$$\begin{array}{ll} H_0 : F_A = F_B & H_0 : \textit{la distribution de A est égale à celle de B} \\ H_1 : F_A \neq F_B & H_1 : \textit{la distribution de B est différente de celle de A} \end{array} \qquad (2.20)$$

Deux risques associés à ces hypothèses peuvent également être définis : γ et ζ. Ces paramètres sont respectivement appelés risque de première espèce et risque de seconde espèce. En termes statistiques, ces paramètres sont les seuils de significativité du résultat du test, ils traduisent les concepts suivants :

- γ : probabilité de rejeter à tort l'hypothèse nulle
- ζ : probabilité de retenir à tort l'hypothèse nulle

L'utilisation d'une *« valeur-p »*, définie après le test KS par Gibbons [*Gibbons & Pratt*, 1975], permet de simplifier l'utilisation du test en ne considérant que γ, tel que :

- *Si* $p \leq \gamma$: l'hypothèse H_0 est rejetée en faveur de H_1
- *Si* $p > \gamma$: l'hypothèse H_1 est rejetée en faveur de H_0

Par conséquent, en fixant une valeur de γ, la *« valeur-p »* peut être traduite comme la mesure de plausibilité de *l'hypothèse nulle* (H_0) : plus elle est élevée, moins l'hypothèse nulle peut être contredite. Appliqué aux travaux, le principe de ce test équivaut à étudier la différence en tout point entre la fonction de répartition des valeurs de fraction volumiques locales de la microstructure (*A*) et celle de chaque cellules (*B*).

5.6.3. Définition de cellules intégrant la microstructure réelle

La méthode du cube d'observation est appliquée aux 21 cellules retenues et remaillées par des voxels. Pour une taille de cube identique à celle utilisée sur les données de tomographie (12

[4] *Le nom « Kolmogorov » est une translittération de « Kolmogoroff », il s'agit donc du même auteur*

pixels de côté), une distribution des valeurs de confinement matriciel pour chaque cellule est ainsi obtenue. Ces distributions sont comparées à celle de la microstructure à l'aide du test KS implémenté dans la librairie « scipy.stats » de Python, sous le nom de « ks_2samp ». Cet outil renvoie directement la *« valeur-p »*.

Dans cette démarche, la probabilité que la morphologie d'une cellule soit comparable à celle de la microstructure réelle doit être élevée. Ainsi, *l'hypothèse nulle* est acceptée avec une haute significativité statistique. En choisissant une valeur par défaut de $\gamma=0,95$, sept cellules sont susceptibles de vérifier *l'hypothèse nulle*. Pour une de ces cellules (numérotée 22), la *« valeur-p »* est égale à 0,9567. Cette valeur traduit par conséquent que *l'hypothèse nulle* ne peut pas être rejetée, avec une probabilité de 95,67 %. La *figure 2-52* montre le tracé de la fonction de répartition pour la cellule 22 et pour une cellule dont la *« valeur-p »* est égale à 0,4234.

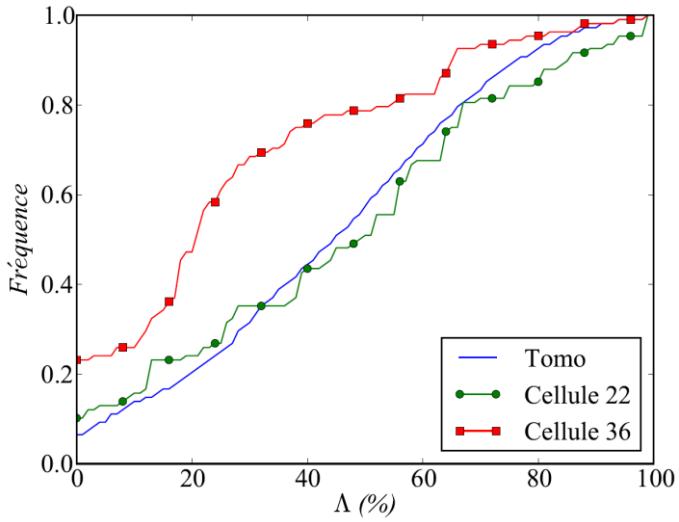


Figure 2-53 : Comparaison des fonctions de répartitions de la fraction volumique locale de fibres des cellules 22 et 36 et des données de tomographie

La fonction de répartition de la cellule 22 est proche de celle de la microstructure réelle. Par conséquent, cette cellule est identifiée comme étant la CESR du comportement homogène équivalent de la microstructure, dans laquelle les fibres sont unidirectionnelles, et intégrant une morphologie statistiquement comparable à celle de la microstructure réelle. Les écarts relatifs des paramètres de la matrice de rigidité de la cellule 22 par rapport à ceux du comportement à convergence sont tracés sur la *figure 2-54*.

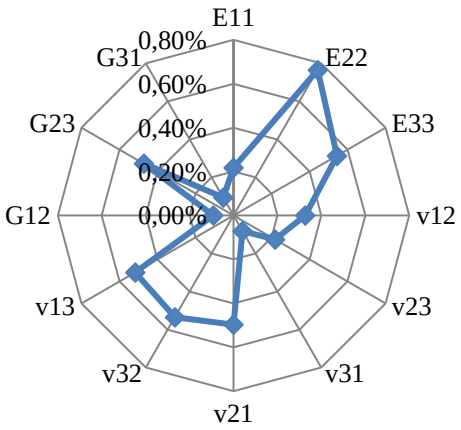


Figure 2-54 : Ecart relatif des paramètres de la matrice de rigidité de la cellule 22 par rapport à ceux du comportement à convergence

5.6.4. Indicateur local et distribution de fraction volumique locale

En pondérant maintenant la taille des 21 les cellules de la *figure 2-51* par rapport à leur *valeur-p* calculée par le test KS, une relation entre l'indicateur local et la probabilité que la cellule soit tirée de la même distribution de fractions volumiques locale que les données de tomographie est observée (*figure 2-55*).

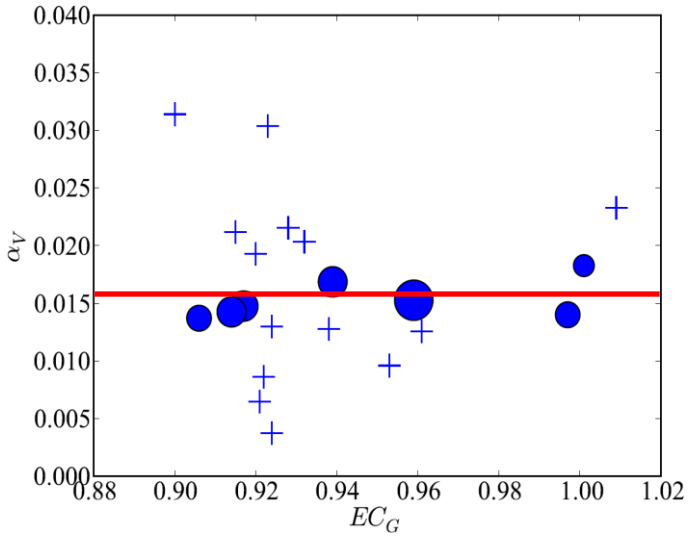


Figure 2-55 : Pondération de la taille des cellules selon leur valeur-p après le test de Kologorov-Smirnov

Ces résultats montrent que si l'indicateur local α_c d'une cellule est proche d'une valeur de $1{,}53.10^{-2}$ (ces cellules sont représentées par des cercles dont la taille est proportionnelle à la proximité avec cette valeur), la probabilité pour que la distribution de fraction volumique locale de la cellule soit tirée de celle de la microstructure réelle augmente. Grâce à cette observation et à la relation entre α_c et EC_G montrée dans le paragraphe 5.5.2, il est alors possible de générer de potentielles CESR du matériau qui soient à la fois représentatives du comportement linéaire des constituants et de la morphologie de la microstructure réelle. Ces potentielles CESR sont finalement uniquement générées à partir de leur niveau de confinement matriciel, sans calculs par éléments finis supplémentaires.

Conclusions de la partie

L'étude de l'échelle mésoscopique du matériau apporte une compréhension fine de l'hétérogénéité de la microstructure induite par le moulage par injection. Les variabilités qui constituent cet état complexe de la microstructure sont identifiées comme étant : la fraction volumique globale, l'orientation, la géométrie et la proximité des fibres. Un ensemble de techniques expérimentales a été mise en œuvre afin de mesurer et de déterminer ces variabilités.

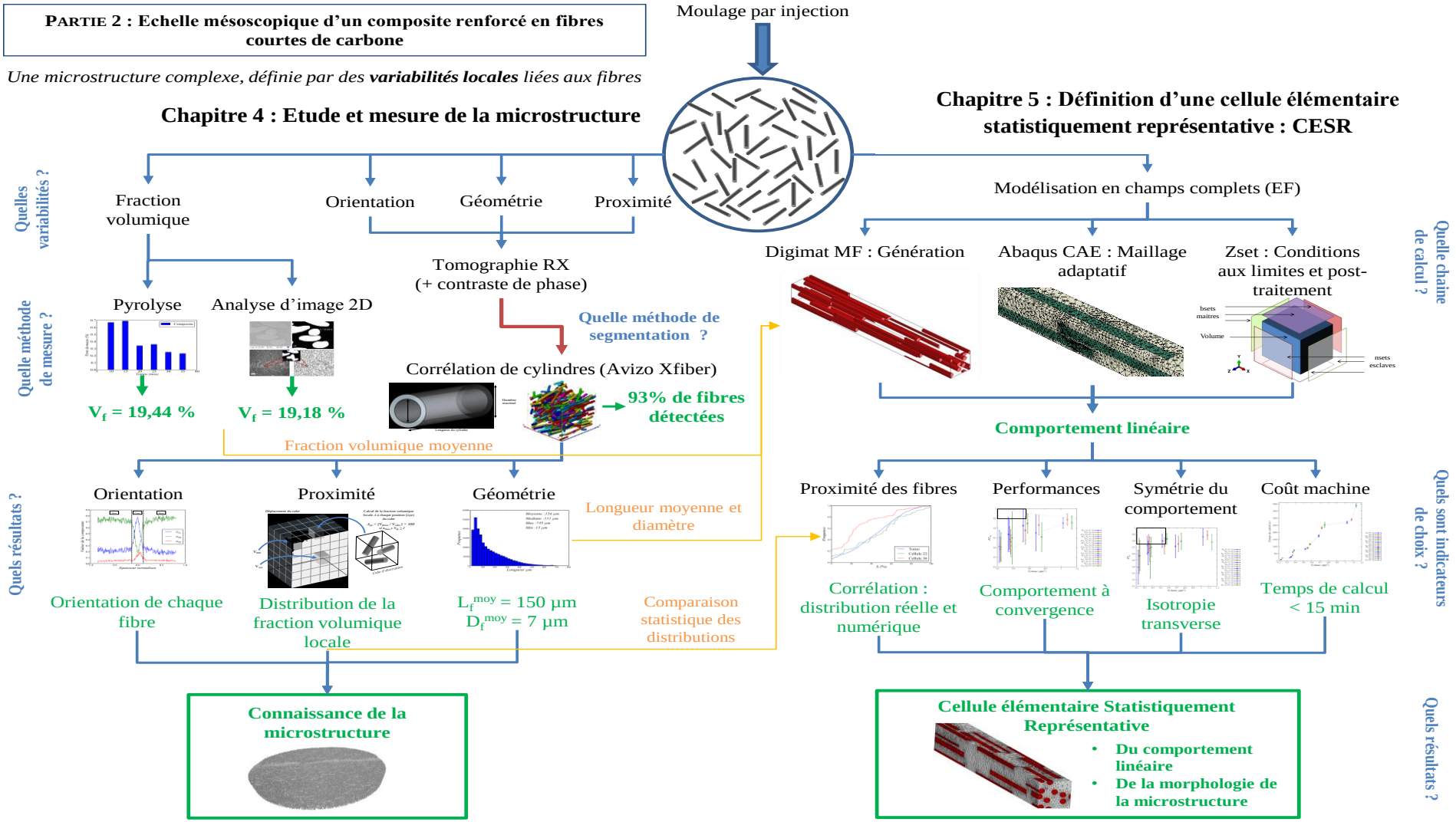
La résolution des images, la taille et la morphologie des fibres de carbone rendent complexe la segmentation en tomographie aux rayons-X en contraste de phase par des méthodes conventionnelles. Une méthode de segmentation par corrélation de cylindres est utilisée et permet la détection de 93% des fibres de la microstructure. Ce seuil de détection est suffisant afin de quantifier l'orientation et la distribution de longueurs des fibres dans le matériau. La fraction volumique globale de fibres est mesurée en pyrolyse et analyse d'images 2D.

Dans une démarche de modélisation en champs moyens, quasiment obligatoire pour ce type de matériau, une procédure de détermination d'une CESR est établie et est alimentée par les variabilités de la microstructure. Au travers de ces travaux, deux indicateurs du comportement global des cellules sont définis et permettent de déterminer des cellules ayant un comportement réversible linéaire unidirectionnel représentatif de la microstructure. Un indicateur local est ensuite défini afin de proposer une méthode de génération de potentielles CESR de manière plus systématique et évitant le recours aux calculs par éléments finis.

La proximité des fibres dans la matrice, assimilée au confinement matriciel, est déterminée grâce à une méthode originale permettant d'étudier la distribution de la fraction volumique locale de fibres au sein de la microstructure. Via une voxelisation des cellules, la méthode est également appliquée aux CESR du comportement mécanique. La comparaison des distributions de fractions volumiques locales dans la microstructure réelle et dans les cellules via un test statistique, permet finalement d'identifier une CESR à la fois représentative du comportement mécanique unidirectionnel réversible de la microstructure et de sa morphologie. Dans l'objectif de remonter au comportement unidirectionnel macroscopique du composite, la CESR peut donc être utilisée afin d'identifier les paramètres d'un modèle de comportement en champs moyen. L'intégration de l'orientation des fibres sera appliquée directement sur ce modèle. Ces travaux font l'objet de la partie suivante, traitant de l'échelle macroscopique du composite.

Un résumé graphique des travaux réalisés à cette échelle est proposé à la page suivante.

Résumé graphique de la partie



Bibliographie

Advani, S. G., & Tucker III, C. L., (1987), The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites, *Journal of Rheology*, 31: 751–784. (cité p.92 et p.93)

Ahn, S. J., Rauh, W., & Warnecke, H.-J., (2001), Least-squares orthogonal distances fitting of circle, sphere, ellipse, hyperbola, and parabola, *Pattern Recognition*, 34: 2283–2303.

Alvarez, L. W., Anderson, J. A., Bedwei, F. E., Burkhard, J., Fakhry, A., Girgis, A., Goneid, A., Hassan, F., Iverson, D., Lynch, G., Miligy, Z., Moussa, A. H., Sharkawi, M., & Yazolino, L., (1970), Search for hidden chambers in the pyramids, *Science*, 167: 832–839.

Arif, M. F., (2014), *Mécanismes d'endommagement du polyamide-66 renforcé par des fibres de verre courtes, soumis à un chargement monotone et en fatigue : Influence de l'humidité relative et de la microstructure induite par le moulage par injection*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

ARTC, (2017), ARTC : Association pour la recherche sur les tumeurs cérébrales.

Bay, R. S., & Tucker, C. L., (1992), Stereological measurement and error estimates for three-dimensional fiber orientation, *Polymer Engineering & Science*, 32: 240–253. (cité p.94 et p.113)

Bernasconi, A., Cosmi, F., & Dreossi, D., (2008), Local anisotropy analysis of injection moulded fibre reinforced polymer composites, *Composites Science and Technology*, 68: 2574–2581.

Bernasconi, A., Cosmi, F., & Hine, P. J., (2012), Analysis of fibre orientation distribution in short fibre reinforced polymers: A comparison between optical and tomographic methods, *Composites Science and Technology*, 72: 2002–2008.

Berthelot, J.-M., (2005), *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures* (4e édition), Paris; Londres: Tec & Doc Lavoisier.

Beyler, C. L., & Hirschler, M. M., (1995), *SFPE handbook of fire protection engineering* (2nd ed.), Boston: National Fire Protection Association ; Society of Fire Protection Engineers.

Blassiau, S., (2005), *Modélisation des phénomènes microstructuraux au sein d'un composite unidirectionnel carbone/epoxy et prédiction de durée de vie : contrôle et qualification de réservoirs bobinés*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Bonse, U., & Hart, M., (2004), An X-ray interferometer, *Applied Physics Letters*.

Borstnar, G., Mavrogordato, M. N., Helfen, L., Sinclair, I., & Spearing, S. M., (2015), Interlaminar fracture micro-mechanisms in toughened carbon fibre reinforced plastics investigated via synchrotron radiation computed tomography and laminography, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 71: 176–183.

Bourmaud, A., Ausias, G., Lebrun, G., Tachon, M.-L., & Baley, C., (2013), Observation of the structure of a composite polypropylene/flax and damage mechanisms under stress, *Industrial Crops and Products*, 43: 225–236.

Brownell, G. L., Burnham, C. A., Wilensky, S., Aronow, S., Kazemi, H., & Strieder, D., (1969), New developments in positron scintigraphy and the application of cyclotron-produced positron emitters, *Medical Radioisotope Scintigraphy*, 1: 163–176.

Cayzac, H.-A., (2014), *Analyses expérimentale et numérique de l'endommagement matriciel d'un matériau composite: Cas d'un pultrudé thermoplastique renforcé de fibres de verre*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 184 pp. (cité p.95, p.97, p.99 et p.122)

Christensen, J., & Bastien, C., (2015), *Nonlinear Optimization of Vehicle Safety Structures: Modeling of Structures Subjected to Large Deformations*, Butterworth-Heinemann.

Christensen, R. M., (1979), *Mechanics of composite materials, Wiley & Sons, 357 pp.* (Vol. 18). (cité p.99 et p.142)

Christman, T., Needleman, A., & Suresh, S., (1989), An experimental and numerical study of deformation in metal-ceramic composites, *Acta Metallurgica*, 37: 3029–3050.

Cloetens, P., Pateyron-Salomé, M., Buffière, J. Y., Peix, G., Baruchel, J., Peyrin, F., & Schlenker, M., (1997), Observation of microstructure and damage in materials by phase sensitive radiography and tomography, *Journal of Applied Physics*, 81: 5878–5886.

CNRS, (2010), Projet Diaphane : radiographier les volcans avec les rayons cosmiques.

Comin, C. H., Santos, J. R., Corradini, D., Morrison, W., Curme, C., Rosene, D. L., Gabrielli, A., da F. Costa, L., & Stanley, H. E., (2014), Statistical physics approach to quantifying differences in myelinated nerve fibers, *Scientific Reports*, 4.

Cosmi, F., Bernasconi, A., & Sodini, N., (2011), Phase contrast micro-tomography and morphological analysis of a short carbon fibre reinforced polyamide, *Composites Science and Technology*, 71: 23–30.

Cowin, S. C., & Doty, S. B., (2006), *Tissue Mechanics*, Springer Science & Business Media.

Cox, H. L., (1952), The elasticity and strength of paper and other fibrous materials, *British Journal of Applied Physics*, 3: 72–79.

Crevel, J., (2014), *Étude et modélisation du comportement et de l'endommagement d'un composite injecté à matrice PEEK renforcée de fibres courtes de carbone*, ISAE - SUPAERO - Institu Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.

Danas, K., & Ponte Castañeda, P., (2012), Influence of the Lode parameter and the stress triaxiality on the failure of elasto-plastic porous materials, *International Journal of Solids and Structures*, 49: 1325–1342.

Davis, T. J., Gao, D., Gureyev, T. E., Stevenson, A. W., & Wilkins, S. W., (1995), Phase-contrast imaging of weakly absorbing materials using hard X-rays, *Nature*, 373: 595–598.

De, S. K., & White, J. R. (Eds.), (1996), *Short fibre-polymer composites* (1st ed.), Cambridge: Woodhead.

Descamps, P., Van Wassenhove, G., Teixeira, S., & Beaucarne, G., (2015), Using a Monte-Carlo model to identify best filler arrangement in thermally conductive materials, *Microelectronics Journal*, 46: 1179–1184.

Dirrenberger, J., (2012), *Propriétés effectives de matériaux architecturés*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Dray Bensahkoun, D., (2006), *Prédiction des propriétés thermo-élastiques d'un composite injecté et chargé de fibres courtes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers.

Dray, D., Gilormini, P., & Regnier, G., (2007), Comparison of several closure approximations for evaluating the thermoelastic properties of an injection molded short-fiber composite, *Composites Science and Technology*, 67: 1601–1610.

Dyer, S., (2004), Effect of fiber position and orientation on fracture load of fiber-reinforced composite, *Dental Materials*, 20: 947–955.

Eberhardt, C., & Clarke, A., (2001), Fibre-orientation measurements in short-glass-fibre composites. Part I: automated, high-angular-resolution measurement by confocal microscopy, *Composites Science and Technology*, 61: 1389–1400.

E-Xstream, (2014), Digimat 5.1.2 User Manual (Version 5.1.2).

E-Xstream, (2016), Digimat 2016 User Manual (Version 2016).

Fakirov, S., & Fakirova, C., (1985), Direct determination of the orientation of short glass fibers in an injection-molded poly(ethylene terephthalate) system, *Polymer Composites*, 6: 41–46.

Forest, S., (2006), *Milieux continus généralisés et matériaux hétérogènes*, Paris: Presses de l'Ecole des Mines.

Fu, S. ., Lauke, B., Mäder, E., Hu, X., & Yue, C. ., (1999), Fracture resistance of short-glass-fiber-reinforced and short-carbon-fiber-reinforced polypropylene under Charpy impact load and its dependence on processing, *Journal of Materials Processing Technology*, 89–90: 501–507.

Fu, S.-Y., & Lauke, B., (1996), Effects of fiber length and fiber orientation distributions on the tensile strength of short-fiber-reinforced polymers, *Composites Science and Technology*, 56: 1179–1190. (cité p.90 et p.95)

Fu, S.-Y., Lauke, B., Mäder, E., Yue, C.-Y., & Hu, X., (2000), Tensile properties of short-glass-fiber- and short-carbon-fiber-reinforced polypropylene composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 31: 1117–1125.

Fu, S.-Y., Mai, Y.-W., Ching, E. C.-Y., & Li, R. K. ., (2002), Correction of the measurement of fiber length of short fiber reinforced thermoplastics, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 33: 1549–1555.

Fu, S.-Y., Yue, C.-Y., Hu, X., & Mai, Y.-W., (2001), Characterization of fiber length distribution of short-fiber reinforced thermoplastics, *Journal of Materials Science Letters*, 20: 31–33.

Garcea, S. C., Sinclair, I., & Spearing, S. M., (2015), In situ synchrotron tomographic evaluation of the effect of toughening strategies on fatigue micromechanisms in carbon fibre reinforced polymers, *Composites Science and Technology*, 109: 32–39.

Ghering, F., (2013), *Etude du comportement mécanique et de l'endommagement de composites thermoplastiques renforcés de fibres courtes de chanvre - Approche experimentale et modélisation*, Thèse de doctorat, Université de Lorraine.

Ghossein, E., & Lévesque, M., (2012), A fully automated numerical tool for a comprehensive validation of homogenization models and its application to spherical particles reinforced composites, *International Journal of Solids and Structures*, 49: 1387–1398.

Gibbons, J. D., & Pratt, J. W., (1975), P-values: Interpretation and Methodology, *The American Statistician*, 29: 20–25.

Gitman, I. M., Askes, H., & Sluys, L. J., (2007), Representative volume: Existence and size determination, *Engineering Fracture Mechanics*, 74: 2518–2534.

Green, P., (1991), Fibre volume fraction determination of carbon-epoxy composites using an acid digestion bomb, *Journal of Materials Science Letters*, 10: 1162–1164.

Guild, F. J., & Summerscales, J., (1993), Microstructural image analysis applied to fibre composite materials: a review, *Composites*, 24: 383–393.

Gupta, V. B., Mittal, R. K., Sharma, P. K., Mennig, G., & Wolters, J., (1989), Some studies on glass fiber-reinforced polypropylene. Part I: Reduction in fiber length during processing, *Polymer Composites*, 10: 8–15. (cité p.97 et p.114)

Gusev, A. A., (1997), Representative volume element size for elastic composites: A numerical study, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45: 1449–1459.

Gusev, A. A., Hine, P. J., & Ward, I. M., (2000), Fiber packing and elastic properties of a transversely random unidirectional glass/epoxy composite, *Composites Science and Technology*, 60: 535–541. (cité p.95 et p.117)

Hancock, J. W., & Mackenzie, A. C., (1976), On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24: 147–160.

Hand, G. L., (1962), A theory of anisotropic fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 13: 33.

Hashin, Z., & Rosen, B. W., (1964), The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials, *Journal of Applied Mechanics*, 31: 223.

Hazanov, S., & Huet, C., (1994), Order relationships for boundary conditions effect in heterogeneous bodies smaller than the representative volume, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 42: 1995–2011.

Hill, R., (1963), Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11: 357–372.

Hine, P. J., Rudolf Lusti, H., & Gusev, A. A., (2002), Numerical simulation of the effects of volume fraction, aspect ratio and fibre length distribution on the elastic and thermoelastic properties of short fibre composites, *Composites Science and Technology*, 62: 1445–1453.

Hollister, S. J., & Kikuchi, N., (1992), A comparison of homogenization and standard mechanics analyses for periodic porous composites, *Computational Mechanics*, 10: 73–95.

Hooke, R., (1678), *Lectures de potentia restitutiva, or of spring explaining the power of springing bodies*, John Martyn.

Hori, S. N.-N., (1998), *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*, (2nd ed.), North Holland.

Hounsfield, G. N., (1973), Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. Description of system, *The British Journal of Radiology*, 46: 1016–1022.

Jean, A., (2009), *Etude d'un élastomère chargé de la nanostucture au macro-comportement*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Joyot, P., Rakotomalala, R., & Touratier, M., (1993), Modélisation de l'usinage formulée en Euler-Lagrange arbitraire, *Journal de Physique IV Colloque*, 3: 1141–1144.

Kanit, T., Forest, S., Galliet, I., Mounoury, V., & Jeulin, D., (2003), Determination of the size of the representative volume element for random composites: statistical and numerical approach. International Journal of Solids and Structures, Vol 40, p. 3647-3679. (cité p.123 et p.131)

Kaulich, B., Kiskinov, M., Mancin, L., Menk, R. H., Rigon, L., Tuniz, C., Tromba, G., Wilkins, S. W., & Zanini, F., (2006), Trieste - Melbourne cooperation in advanced imaging with synchrotron radiation, *Bollettino Della Comunità Scientifica in Australasia*.

King, A., Guignot, N., Zerbino, P., Desjardins, K., Perillat, J.-P., Legodec, Y., Delzon, S., Gelebart, L., Lenoir, N., Bornert, M., & Itie, J. P., (2015), Psiché : A synchrotron tomography beamline at Soleil designed for Material Science.

Kolmogoroff, A., (1933), Sulla Determinazione empirica di una legge di distribuzione, *Giornale Dell'Istituto Italiano Degli Attuari*, 4: 83–91.

Kurtz, S. M., (2011), *PEEK Biomaterials Handbook*, William Andrew.

Laiarinandrasana, L., Klinkova, O., Nguyen, F., Proudhon, H., Morgeneyer, T. F., & Ludwig, W., (2016), Three dimensional quantification of anisotropic void evolution in deformed semi-crystalline polyamide 6, *International Journal of Plasticity*, 83: 19–36.

Lesparre, N., Gibert, D., Marteau, J., Komorowski, J.-C., Nicollin, F., & Coutant, O., (2012), Density muon radiography of La Soufrière of Guadeloupe volcano: comparison with geological, electrical resistivity and gravity data: Density muon radiography of La Soufrière, Guadeloupe, *Geophysical Journal International*, 190: 1008–1019.

Lin, T., Jia, D., He, P., Wang, M., & Liang, D., (2008), Effects of fiber length on mechanical properties and fracture behavior of short carbon fiber reinforced geopolymer matrix composites, *Materials Science and Engineering: A*, 497: 181–185.

Ludwig, W., King, A., Herbig, M., Reischig, P., Marrow, T. J., Babout, L., Proudhon, H., Lauridsen, E. M., & Buffière, J.-Y., (2011), La microstructure 3D des matériaux polycristallins vue sous la lumière synchrotron, *L'Actualité Chimique*, 62–67.

Mariayyah, R., (2007), *Experimental and numerical studies on ductile regime machining of silicon carbide and silicon nitride*, Thèse de doctorat, University of North Carolina.

Mayo, S. C., Stevenson, A. W., & Wilkins, S. W., (2012), In-Line Phase-Contrast X-ray Imaging and Tomography for Materials Science, *Materials*, 5: 937–965.

McLaughlin, R. A., (1998), Randomized Hough Transform: Improved ellipse detection with comparison, *Pattern Recognition Letters*, 19: 299–305.

Megally, A., (2005), *Etude et modélisation de l'orientation de fibres dans des thermoplastiques renforcés*, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. (cité p.113 et p.114)

Michaud, V., & Mortensen, A., (2001), Infiltration processing of fibre reinforced composites: governing phenomena, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 32: 981–996.

Ming-Kuei Hu, (1962), Visual pattern recognition by moment invariants, *IEEE Transactions on Information Theory*, 8: 179–187.

Moussaddy, H., (2013), April, *A new definition of the representative volume element in numerical homogenization problems and its application to the performance evaluation of analytical homogenization models*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal.

Mulchrone, K. F., & Choudhury, K. R., (2004), Fitting an ellipse to an arbitrary shape: implications for strain analysis, *Journal of Structural Geology*, 26: 143–153.

Ostoja-Starzewski, M., (2006), Material spatial randomness: From statistical to representative volume element, *Probabilistic Engineering Mechanics*, 21: 112–132.

Paganin, D., (2006), *Coherent X-Ray Optics*, Oxford Series on Synchrotron Radiation 6. (cité p.102 et p.103)

Partridge, P. G., & Ward-Close, C. M., (1993), Processing of advanced continuous fibre composites: Current practice and potential developments, *International Materials Reviews*, 38: 1–24.

Poulet, P.-A., (2017), *Effet de la variabilité microstructurale sur le comportement d'un composite UD verre/PA11 : de la caractérisation expérimentale à la modélisation multi-échelle.*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Poulet, P.-A., Hochstetter, G., King, A., Proudhon, H., Joannès, S., & Laiarinandrasana, L., (2016), Observations by in-situ X-ray synchrotron computed tomography of the microstructural evolution of semi-crystalline Polyamide 11 during deformation, *Polymer Testing*, 56: 245–260.

Ranganathan, S., & Advani, S. G., (1990), Characterization of orientation clustering in short-fiber composites, *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 28: 2651–2672.

Rasheva, Z., Zhang, G., & Burkhart, T., (2010), A correlation between the tribological and mechanical properties of short carbon fibers reinforced PEEK materials with different fiber orientations, *Tribology International*, 43: 1430–1437.

Rasselet, F., Joannès, S., Renard, J., Roche, E., & Pautard, S., (2016), Modélisation et définition d'une cellule élémentaire statistiquement représentative. Application à un composite renforcé en fibres courtes unidirectionnelles, *Revue Des Composites et Des Matériaux Avancés*, 26: 231–264.

Ratner, B. D., Hoffman, A. S., Schoen, F. J., & Lemons, J. E., (2012), *Biomaterials Science, Third Edition: An Introduction to Materials in Medicine* (3 edition), Saint Louis: Academic Press.

Redjeb, A., (2007), *Simulation numérique de l'orientation de fibres en injection de thermoplastique renforcé*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Rezaei, F., Yunus, R., & Ibrahim, N. A., (2009), Effect of fiber length on thermomechanical properties of short carbon fiber reinforced polypropylene composites, *Materials & Design*, 30: 260–263.

Rice, J. R., & Tracey, D. M., (1969), On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17: 201–217.

Rigort, A., Günther, D., Hegerl, R., Baum, D., Weber, B., Prohaska, S., Medalia, O., Baumeister, W., & Hege, H.-C., (2012), Automated segmentation of electron tomograms for a quantitative description of actin filament networks, *Journal of Structural Biology*, 177: 135–144.

Robinson, I. M., & Robinson, J. M., (1994), The influence of fibre aspect ratio on the deformation of discontinuous fibre-reinforced composites, *Journal of Materials Science*, 29: 4663–4677.

Rolland, H., Saintier, N., & Robert, G., (2016), Damage mechanisms in short glass fibre reinforced thermoplastic during in situ microtomography tensile tests, *Composites Part B: Engineering*, 90: 365–377.

Roseman, A. M., (2000), Docking structures of domains into maps from cryo-electron microscopy using local correlation, *Acta Crystallographica. Section D, Biological Crystallography*, 56: 1332–1340.

Rubinstein, R. Y., & Kroese, D. P., (2008), *Simulation and the Monte Carlo method* (2nd ed.), Hoboken, NJ: Wiley.

Rudolph, D., Schmahl, G., & Niemann, B., (1990), Amplitude and phase contrast in X-ray microscopy, in: *Modern Microscopies*, Springer.

Scott, A. E., Mavrogordato, M., Wright, P., Sinclair, I., & Spearing, S. M., (2011), In situ fibre fracture measurement in carbon–epoxy laminates using high resolution computed tomography, *Composites Science and Technology*, 71: 1471–1477.

Segurado, J., González, C., & LLorca, J., (2003), A numerical investigation of the effect of particle clustering on the mechanical properties of composites, *Acta Materialia*, 51: 2355–2369.

Shepp, L. A., & Logan, B. F., (1974), The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 21: 21–43.

Simulia - Dassault Systems, (2014), Abaqus 6.14.1 User Manual (Version 6.14.1).

Smirnov, N., (1948), Table for estimating the goodness of fit of empirical distributions, *The Annals of Mathematical Statistics*, 19: 279–281.

Stephens, M. A., (1974), EDF Statistics for Goodness of Fit and Some Comparisons, *Journal of the American Statistical Association*, 69: 730.

Thomason, J. L., & Vlug, M. A., (1996), Influence of fibre length and concentration on the properties of glass fibre-reinforced polypropylene: 1. Tensile and flexural modulus, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 27: 477–484.

Torquato, S., Lu, B., & Rubinstein, J., (1990), Nearest-neighbour distribution function for systems on interacting particles, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 23: L103–L107.

Tucker III, C. L., & Liang, E., (1999), Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: review and evaluation, *Composites Science and Technology*, 59: 655–671.

Weaver, C. W., & Williams, J. G., (1975), Deformation of a carbon-epoxy composite under hydrostatic pressure, *Journal of Materials Science*, 10: 1323–1333.

Weber, B., Greenan, G., Prohaska, S., Baum, D., Hege, H.-C., Müller-Reichert, T., Hyman, A. A., & Verbavatz, J.-M., (2012), Automated tracing of microtubules in electron tomograms of plastic embedded samples of Caenorhabditis elegans embryos, *Journal of Structural Biology*, 178: 129–138.

Wolfenden, A., Shi, D., & Winslow, D., (1991), Accuracy of a volume fraction measurement using areal image analysis, *Journal of Testing and Evaluation*, 19: 210.

Xing, J., Bravo, C., Jancsók, P. T., Ramon, H., & De Baerdemaeker, J., (2005), Detecting Bruises on ‘Golden Delicious’ apples using hyperspectral imaging with multiple wavebands, *Biosystems Engineering*, 90: 27–36.

Young, S., (2009), *High Resolution X-ray Tomography of Fiber Reinforced Polymeric Composites*, Thèse de doctorat, University of Tennessee, Knoxville.

Yurgartis, S. W., (1987), Measurement of small angle fiber misalignments in continuous fiber composites, *Composites Science and Technology*, 30: 279–293.

Zak, G., Park, C. B., & Benhabib, B., (2001), Estimation of Three-Dimensional Fibre-Orientation Distribution in Short-Fibre Composites by a Two-Section Method, *Journal of Composite Materials*, 35: 316–339.

Partie 3

Echelle macroscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone

Le comportement d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone peut être modélisé grâce à l'homogénéisation en champs moyens. Dans cette partie du manuscrit, une procédure d'homogénéisation en deux étapes est proposée afin de le simuler à ses échelles caractéristiques. L'homogénéisation du comportement du composite unidirectionnel, qui constitue la première brique de la démarche, est alimentée par le comportement des constituants et de la cellule élémentaire statistiquement représentative. La seconde étape, permettant le changement d'échelle et l'homogénéisation du composite à l'échelle macroscopique, est une pondération de la brique unitaire selon les orientations et distributions réelles des fibres mesurées en tomographie RX. Le but du modèle est de prendre en compte un maximum de données mesurées, tout en conservant la performance d'une procédure d'homogénéisation en deux étapes déjà existante. L'originalité de la démarche proposée réside à la fois dans la première étape d'homogénéisation et dans l'intégration des variabilités microstructurales réelles. Son objectif final est de pouvoir calibrer une méthode existante afin d'améliorer sa pertinence pour une utilisation industrielle.

La procédure est utilisée pour simuler le comportement du composite soumis à des sollicitations conventionnelles, en traction uniaxiale selon différents angles, et plus complexes, avec la simulation d'un essai de traction sur éprouvette axisymétrique entaillée réalisée in-situ en tomographie RX.

TABLE DES MATIERES

6. Généralités sur l'homogénéisation des composites renforcés en fibres courtes 165
6.1. Homogénéisation des matériaux hétérogènes 166
6.2. Approche à bornes variationnelles 168
6.2.1. Bornes de Voigt et Reuss 168
6.2.2. Bornes d'Hashin-Shtrikman 169
6.3. Approches estimatives 169
6.3.1. Problème d'Eshelby 169
6.3.2. Modèle d'Eshelby en solution diluée 171
6.3.3. Modèle de Mori-Tanaka 172
6.3.4. Modèle de Lielens 173
6.3.5. Modèle auto-cohérent 174
6.3.6. Extension à l'estimation du comportement non-linéaire 175
6.4. Approches numériques 175
6.4.1. Méthodes d'analyse par champs de transformation 176
6.4.2. Méthodes d'analyse par champs de transformation non-uniformes 176
6.4.3. Méthodes par transformation de Fourier 177
6.5. Synthèse des méthodes d'homogénéisation 177
6.6. Intégration de l'orientation des fibres 178
6.6.1. Homogénéisation en deux étapes conventionnelle 178
6.6.2. Retour sur les tenseurs d'orientation 179

7. Homogénéisation du PEI renforcé en fibres courtes de carbone 183
7.1. Démarche de modélisation 183
7.1.1. Principe du modèle à double-motif 185
7.1.2. Modèle de Mori-Tanaka incrémental 187
7.1.3. Modèle auto-cohérent incrémental 188
7.2. Homogénéisation du comportement unidirectionnel du composite 189
7.2.1. Comportement irréversible de la CESR 190
7.2.2. Calibration du modèle à double-motif 190
7.2.3. Comparaison du modèle sous sollicitations complexes 196
7.2.4. Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif 198
7.3. Homogénéisation du comportement macroscopique réversible linéaire 205
7.3.1. Intégration de l'orientation des fibres courtes 207
7.3.2. Intégration de la distribution de longueur des fibres courtes 211
7.4. Homogénéisation du comportement macroscopique irréversible 213
7.4.1. Traction irréversible pour des angles intermédiaires 213
7.4.2. Traction sur éprouvette axisymétrique entaillée 215

Conclusions de la partie 221

Résumé graphique de la partie 222

Bibliographie 223

CHAPITRE 6 : GENERALITES SUR L'HOMOGENEISATION DES COMPOSITES RENFORCES EN FIBRES COURTES

6. Généralités sur l'homogénéisation des composites renforcés en fibres courtes CRFC

Comme évoqué dans la *partie 2*, la modélisation du comportement d'un CRFC, intégrant les variabilités de la microstructure, ne peut être faite uniquement avec des méthodes en champs complets pour le calcul de structure. En effet, la microstructure du matériau étant composée de millions de fibres, la puissance de calcul nécessaire pour modéliser ces fibres et simuler le comportement macroscopique par des méthodes en champs complets n'est pas disponible aujourd'hui. Parmi les méthodes existantes, l'homogénéisation en champs moyens est généralement préférée pour le compromis qu'elle offre en termes de temps de calcul et d'intégration de variabilités.

Les techniques d'homogénéisation en champs moyens ont pour vocation de réaliser des calculs de structure en intégrant les échelles descriptives du matériau. Trois échelles sont considérées dans ces travaux de thèse. Deux étapes d'homogénéisation sont donc utilisées afin d'obtenir un comportement macroscopique homogène équivalent au matériau de l'étude. Cette démarche est illustrée de manière générale par la *figure 3-1*.

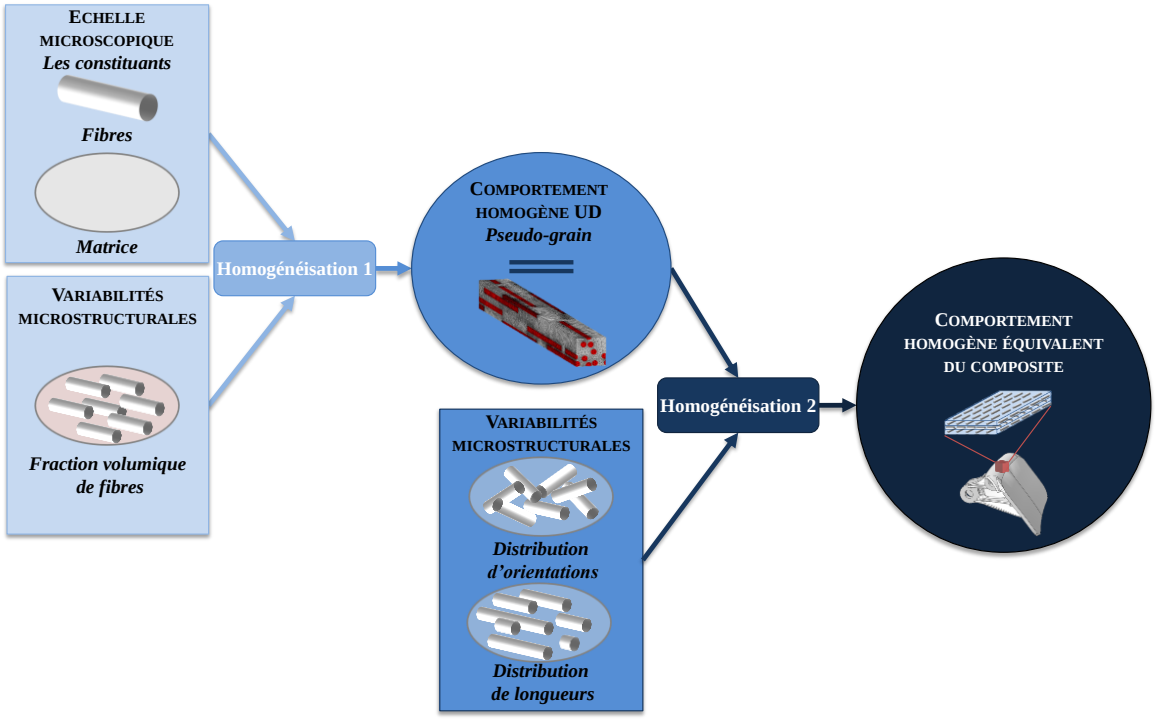


Figure 3-1 : Schéma général de la procédure d'homogénéisation prenant en compte les trois échelles descriptives d'un CRFC

La transition d'échelle initiale s'effectue entre les constituants et la morphologie de la microstructure, respectivement définies et traitées dans les *parties 1* et *2* du manuscrit. Un premier modèle d'homogénéisation va permettre la définition d'un matériau homogène équivalent constitué de matrice et d'inclusions unidirectionnelles. Cette brique élémentaire de la démarche est appelée « pseudo-grain ». Un système de pseudo-grains dont les orientations et les facteurs de formes sont uniques est ensuite constitué afin de représenter l'hétérogénéité de la microstructure. La seconde étape de la méthode en champs moyen consiste à homogénéiser cet agrégat de pseudo-grains orientés en un dernier matériau homogène équivalent.

Cette procédure est proche de celle utilisée pour la détermination du comportement des fibres (*partie 2, chapitre 3, paragraphe 3.1*), mais s'inscrit cette fois dans un contexte plus large pour l'homogénéisation du comportement du composite. Le matériau de l'étude est hétérogène et sa modélisation en champs moyens s'inscrit dans la théorie des matériaux standards généralisés, sous l'hypothèse des petites perturbations où la température et les effets de vitesse sont négligés.

6.1. Homogénéisation des matériaux hétérogènes

Le comportement homogénéisé d'un matériau hétérogène correspond à celui d'un VER (Volume Elémentaire Représentatif) [*Suquet*, 1985]. Sa détermination est présentée dans la seconde partie du manuscrit (*chapitre 5*). Afin de considérer le matériau comme un milieu continu, chaque échelle doit être clairement identifiée et séparable. La taille du VER (L_{VER}) doit donc être largement supérieure aux dimensions caractéristiques des constituants qui le composent : les fibres et la matrice (L_{Const}). Ce qui est le cas dans ces travaux puisque les dimensions de la CESR sont au moins trois fois supérieures à celles des fibres. De la même manière, l'échelle macroscopique, ou de la structure, doit être définie comme ayant une taille (L_{Struc}) largement supérieure à celle du VER [*Besson et al.*, 2001]. La *figure 3-2* illustre ce propos.

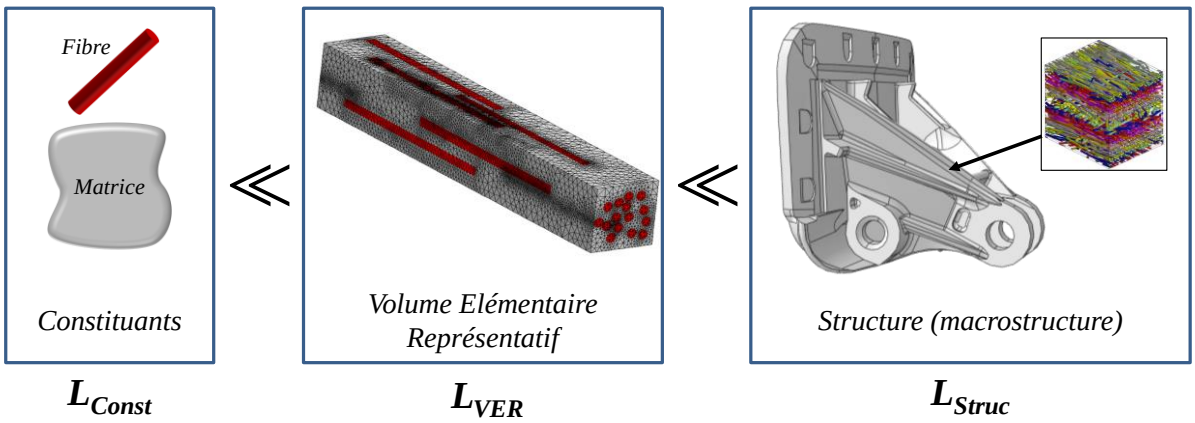


Figure 3-2 : Taille des échelles caractéristiques en homogénéisation

La procédure d'homogénéisation est généralement composée de trois étapes :

- La représentation : définition du VER, constitué de matrice et d'inclusion(s) dont la géométrie et le comportement sont connus.

- La localisation : calcul de *A* et *B*, les tenseurs de localisation des déformations et des contraintes. Ils permettent le passage de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique et décrivent la répartition des contraintes et des déformations appliquées au matériau homogène entre chaque phase.

- L'homogénéisation : calcul du matériau homogène équivalent au VER grâce aux tenseurs de localisation *A* et *B*.

En considérant un VER hétérogène de volume *V*, composé par les phases *p* de volume V_p (où $\sum_{p=1}^{n} V_p = V$), sa contrainte et sa déformation en un point *x*, respectivement $\sigma(x)$ et $\varepsilon(x)$, sont non-uniformes. Il est dans ce cas difficile de résoudre le problème élastique. De ce fait, les moyennes spatiales de $\sigma(x)$ et $\varepsilon(x)$ permettent de définir $\bar{\sigma}$ et $\bar{\varepsilon}$, respectivement la contrainte et la déformation macroscopique dans *V*, grâce à la relation *(3)*.

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{V}\int_V \varepsilon(x)\,.\,dx \quad et \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{V}\int_V \sigma(x)\,.\,dx \qquad \forall\, x \in V \tag{3.1}$$

De la même manière, la contrainte et la déformation moyenne sur chaque phase peut être exprimée en fonction de $\sigma(x)$ et $\varepsilon(x)$ *(3.2)*.

$$\bar{\varepsilon}_p = \frac{1}{V_p}\int_{V_p} \varepsilon(x)\,.\,dx \quad et \quad \bar{\sigma}_p = \frac{1}{V_p}\int_{V_p} \sigma(x)\,.\,dx \qquad \forall\, x \in V_p \tag{3.2}$$

La contrainte et la déformation moyenne dans V peuvent aussi être exprimées grâce à la relation des volumes des phases dans V donnée par l'équation précédente, ce qui donne les expressions *(3.3)* et *(3.4)*.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sum_{p=1}^{n} V_p \bar{\sigma}_p}{V} = \sum_p^n \nu_p \bar{\sigma}_p \tag{3.3}$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sum_{p=1}^{n} V_p \bar{\varepsilon}_p}{V} = \sum_p^n \nu_p \bar{\varepsilon}_p \tag{3.4}$$

Où v_p correspond à la fraction volumique de la phase p.

Les tenseurs de localisation, qui relient les champs moyens des phases aux champs moyens du volume de façon linéaire, sont introduits par Hill [*Hill*, 1963]. Ces tenseurs assurent la transition d'échelles dans le VER et sont exprimés par les expressions *(3.5)* en déformation et en contrainte.

$$\bar{\varepsilon}_p = A_p : \bar{\varepsilon} \quad et \quad \bar{\sigma}_p = B_p : \bar{\sigma} \tag{3.5}$$

La moyenne des tenseurs A et B sur les phases, pondérés par la fraction volumique des phases, est égale au tenseur identité I d'ordre 4. Les tenseurs A et B sont égaux au rapport de la déformation moyenne sur x par la déformation moyenne du VER, et respectivement en contrainte. En élasticité, la loi de Hooke relie la contrainte moyenne à la déformation moyenne via le tenseur de rigidité C du matériau et inversement via son tenseur de souplesse S *(3.6)*.

$$\bar{\sigma} = C : \bar{\varepsilon} \;\; et \;\; \bar{\varepsilon} = S : \bar{\sigma} \tag{3.6}$$

En combinant les expressions *(3.2), (3.3) et (3.4)*, les contraintes et déformations moyennes dans V peuvent être également exprimées en fonction de C et S *(3.7)*.

$$\bar{\sigma} = \sum_{p=1}^{n} \left(C_p : \bar{\varepsilon}_p\right) \tag{3.7}$$

$$\bar{\varepsilon} = \sum_{p=1}^{n} \left(S_p : \bar{\sigma}_p\right) \tag{3.8}$$

Où C_p et S_p sont les tenseurs de rigidité et de souplesse des phases du matériau hétérogène. En distinguant maintenant la phase matricielle m et celle des inclusions i et en utilisant les expressions, *(3.6), (3.7)* et *(3.8)*, on en déduit les expressions des tenseurs de rigidités effectives $\bar{C}$ et de souplesses effectives $\bar{S}$ du VER, respectivement *(3.9)* et *(3.10)*.

$$\bar{C} = C_m + \sum_{i=1}^{n} \nu_i (C_i - C_m) A_i = \langle C_p : A_p \rangle \tag{3.9}$$

$$\bar{S} = S_m + \sum_{i=1}^{n} v_i (S_i - S_m) A_i = \langle S_p : B_p \rangle \qquad (3.10)$$

Où les chevrons « <.> » expriment la moyenne sur toutes les phases *p* du VER, à condition qu'il s'agisse de renforts identiques en termes de comportement et de géométrie. A ce stade, l'étape d'homogénéisation du comportement du VER est terminée. Les modèles micromécaniques de la littérature donnent différentes estimations des tenseurs de localisation d'ordre 4, *A* et *B*. En d'autres termes, ils permettent le calcul de la répartition des déformations (ou des contraintes) entre les phases du matériau composite. Les principaux modèles micromécaniques sont présentés dans les paragraphes suivants.

Afin de déterminer la réponse effective d'un matériau hétérogène, il existe trois types d'approches formalisées notamment par Chaboche [*Chaboche et al.*, 2001] : les approches « à bornes variationnelles », les approches estimatives et les approches numériques.

Ces trois types d'approches sont présentées dans les paragraphes suivants dans le cadre de la modélisation du comportement effectif d'un composite unidirectionnel à deux phases. Chaque modèle est présenté avec ses particularités et ses limitations. Pour l'ensemble des modèles, les constituants ont un comportement isotrope réversible linéaire, les renforts sont identiques en termes de géométrie et de comportement et sont axisymétriques. La majorité des modèles présentés dans cette section font l'objet d'un article de synthèse par Tucker III [*Tucker III & Liang*, 1999].

Pour de plus amples détails sur l'homogénéisation, le lecteur pourra se référer à deux revues complètes sur l'homogénéisation des matériaux hétérogènes : celle de Böhm [*Böhm*, 2017] et celle de Fritzen [*Fritzen*, 2012].

6.2. Approche à bornes variationnelles

Les approches dites « à bornes variationnelles » sont constituées de solutions exactes et donnent un encadrement du comportement effectif du composite. Les principaux modèles qui constituent ces approches sont les bornes de Voigt et Reuss et celles de Hashin-Shtrikman.

6.2.1. Bornes de Voigt et Reuss

Les bornes de Voigt et Reuss donnent les estimations les plus simples des tenseurs de localisation et sont complémentaires en déformation et en contrainte. En rhéologie, ces modèles sont représentés par des lois de mélange respectivement en parallèle (Voigt) et en série (Reuss). Voigt [*Voigt*, 1889] propose une approche en déformation uniforme, ce qui suppose que la déformation est la même dans la matrice et les renforts. Cette approche revient finalement à considérer que le tenseur de localisation en déformation *A* est égal au tenseur identité (*A* = *I*). De la même manière, Reuss [*Reuss*, 1929], propose une approche en contrainte uniforme, impliquant que le tenseur de localisation en contrainte *B* est égal au tenseur identité (*B* = *I*). Les expressions du tenseur de rigidité du composite *(3.9)* et du tenseur de souplesse *(3.10)* deviennent respectivement les expressions *(3.11)* et *(3.12)*.

$$C^{Voigt} = C_m + \sum_{i=1}^{n} v_i (C_i - C_m) \quad pour\ A^{Voigt} = I \qquad (3.11)$$

$$S^{Reuss} = S_m + \sum_{i=1}^{n} v_i (S_i - S_m) \quad pour\ A^{Reuss} = I \qquad (3.12)$$

Les bornes de Voigt et Reuss constituent respectivement des bornes supérieures et inférieures du comportement du matériau composite. Par conséquent, ce comportement effectif se situe toujours entre ces bornes. Cependant, plus le contraste entre les constituants est élevé, plus l'amplitude des bornes est grande. Dans une procédure d'homogénéisation en deux étapes, ces bornes restent néanmoins pertinentes pour prédire le comportement d'un composite [*Pierard et al.*, 2004].

6.2.2. Bornes d'Hashin-Shtrikman

Les bornes proposées par Hashin et Shtrikman [*Hashin & Shtrikman*, 1963], sont plus resserrées que les bornes précédentes. Elles consistent à introduire un matériau linéaire homogène isotrope de rigidité C^0. En supposant dans un premier cas que ce milieu est plus souple que les inclusions, le tenseur de localisation des déformations A^{HSinf} est donné par l'expression *(3.13)* et constitue la borne inférieure. A l'inverse, le tenseur de localisation des déformations A^{HSsup} dans le cas où le milieu est considéré plus rigide que les inclusions, constitue la borne supérieure et est donné par l'expression *(3.14)*.

$$A^{HSinf} = [I + E_m S_m (C_i - C_m)]^{-1} \qquad (3.13)$$

$$A^{HSsup} = [I + E_i S_i (C_m - C_i)] \qquad (3.14)$$

Les résultats d'Hashin et Shtrikman ont fait l'objet de travaux postérieurs qui ont permis d'étendre le calcul des bornes pour des matériaux anisotropes [*Walpole*, 1966a], [*Walpole*, 1966b], de même que pour des fibres de longueur infinie alignées et orientées dans l'espace [*Walpole*, 1969]. L'application aux CRFC a été proposée par d'autres auteurs [*Wu & McCullough*, 1977] et [*Willis*, 1977]. D'après ces travaux, Weng a finalement développé l'estimation des tenseurs de localisation pour des ellipsoïdes alignées [*Weng*, 1992].

6.3. Approches estimatives

Les approches estimatives sont semi-analytiques et donnent une évaluation du comportement effectif du composite, se situant généralement entre les bornes variationnelles. Les modèles micromécaniques qui constituent ces approches sont issues du problème d'Eshelby.

6.3.1. Problème d'Eshelby

Le modèle d'Eshelby [*Eshelby*, 1957] en solution diluée est à l'origine de la majorité des modèles micromécaniques développés par la suite. La base du problème est de considérer un système hétérogène soumis à une déformation macroscopique infinie $\bar{\varepsilon}$ (de manière duale, subissant une contrainte $\bar{\sigma}$). Celui-ci est composé d'une inclusion ellipsoïdale d'élasticité C^i plongée dans une matrice homogène infinie d'élasticité C^m. En isolant l'inclusion, on suppose qu'elle subit une déformation libre de contrainte ε^L ($\sigma^L=0$). Les états de contrainte et de déformation, dans l'inclusion sont uniformes, soit respectivement : $\sigma^i = \langle \sigma^i \rangle$ et $\varepsilon^i = \langle \varepsilon^i \rangle$. En replaçant l'inclusion dans le système, un champ de déformation spécifique ε^S est alors généré par et dans les deux phases du volume ($\varepsilon^i = \varepsilon^S$) . Il s'agit de l'accommodation des déformations entre la matrice et l'inclusion. Ce champ est relié à ε^L par le tenseur d'Eshelby T^{Esh} grâce à l'expression *(3.15)*.

$$\varepsilon^S = T^{Esh} : \varepsilon^L \qquad (3.15)$$

Afin de déterminer la contrainte σ^i dans l'inclusion, Eshelby propose de décomposer le système de base en deux sous-problèmes. Dans le premier, l'inclusion est d'élasticité égale à celle de la matrice ($C_i = C_m$) et est uniquement soumise à une déformation libre ε^T (les champs macroscopiques sont nuls sur l'inclusion). Dans le second sous-problème, la nature de l'inclusion est considérée différente de celle de la matrice ($C^i \neq C^m$) et subit la sollicitation infinie $\bar{\varepsilon}$. Une illustration du problème est proposée par la *figure 3-3*.

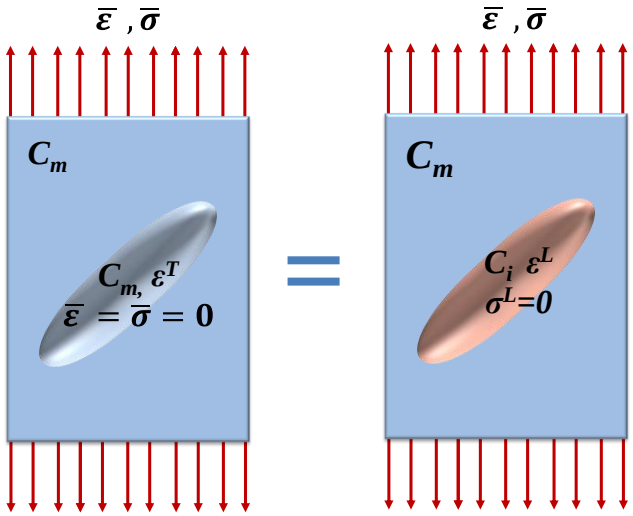


Figure 3-3 : Illustration du problème d'Eshelby en solution diluée

Les travaux d'Eshelby montrent que dans l'inclusion équivalente, les champs de contrainte et de déformation de l'inclusion (respectivement σ_i et ε^S) sont uniformes si la sollicitation macroscopique et la déformation libre ε^L sont elles-mêmes uniformes. Ce qui mène à l'expression *(3.16)*.

$$\sigma_i = C_i : (\varepsilon^S - \varepsilon^L) = C_m : (\varepsilon^S - \varepsilon^T) \qquad (3.16)$$

En appliquant la relation du tenseur d'Eshelby *(3.15)*, reliant cette fois la déformation spécifique ε^S à la déformation de l'inclusion homogène équivalente ($\varepsilon^S = T^{Esh} : \varepsilon^T$) dans l'expression précédente *(3.16)*, la contrainte dans l'inclusion homogène peut s'exprimer comme suit *(3.17)*.

$$\sigma_i = C_i : (T^{Esh} : \varepsilon^T - \varepsilon^L) = C_m : (T^{Esh} - I) : \varepsilon^T \qquad (3.17)$$

La déformation libre ε^L étant connue, l'expression *(3.17)* peut être réarrangée afin de déterminer le champ de déformation dans l'inclusion homogène *(3.18)*.

$$\varepsilon^T = [(C_i - C_m)T^{Esh} + C_m]^{-1} C_i : \varepsilon^L \qquad (3.18)$$

La contrainte dans l'inclusion peut ainsi être réécrite en fonction de l'expression précédente, ce qui donne l'équation *(3.19)*.

$$\sigma_i = C_m : (T^{Esh} - I) : [(C_i - C_m)T^{Esh} + C_m]^{-1} C_i : \varepsilon^L \qquad (3.19)$$

6.3.2. Modèle d'Eshelby en solution diluée

A partir du problème posé par Eshelby, un modèle estimatif est constitué et fait intervenir les tenseurs de localisation, qui décrivent la répartition d'une perturbation macroscopiques dans les phases.

En introduisant le champ de déformation infini $\bar{\varepsilon}$ au système contenant l'inclusion hétérogène, le champ de contrainte σ_i dans l'inclusion est donné par l'expression *(3.20)*.

$$\sigma_i = C_i : (\bar{\varepsilon} + \varepsilon^S) = C_m : (\bar{\varepsilon} + \varepsilon^S - \varepsilon^L) \qquad (3.20)$$

Les déformations sur la fibre se décomposent de manière uniforme, tel que $\bar{\varepsilon}^i = \bar{\varepsilon} + \varepsilon^S$, l'expression *(3.15)* permet de déduire la relation entre la déformation infinie appliquée et la déformation de l'inclusion par l'expression *(3.21)*.

$$\bar{\varepsilon} = [I + T^{Esh} : S_m(C_i - C_m)]\varepsilon^S \qquad (3.21)$$

Les tenseurs de localisation des déformations et de contrainte pour le problème d'Eshelby (ou «en solution diluée ») sont alors définis par les expressions *(3.22)* et *(3.23)*.

$$A^{Esh} = [I + T^{Esh} : S_m(C_i - C_m)]^{-1} \qquad (3.22)$$

$$B^{Esh} = [I + C_m : (I - T^{Esh})(S_i - S_m)]^{-1} \qquad (3.23)$$

Où A^{Esh} et B^{Esh} sont les tenseurs de localisation de la méthode d'Eshelby en solution diluée. Grâce à l'expression *(3.22)*, il est également possible de calculer le tenseur des rigidités effectives du système au sens d'Eshelby *(3.24)*.

$$C^{eff} = C_m + \sum_{i=1}^{n} \nu_i \,.\, (C_i - C_m) : A^{Esh} \qquad (3.24)$$

Cette méthode s'applique uniquement dans le cas d'inclusions placées séparément dans un milieu matriciel infini, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune interaction entre les inclusions. C'est essentiellement sur ce point que les modèles s'inspirant d'Eshelby ont été développés [*Tucker III & Liang*, 1999].

Le tenseur d'Eshelby se calcule à partir des fonctions de Green [*Mura*, 1991]. Leurs expressions sont explicites dans le seul cas d'une matrice isotrope[5]. Pour des milieux anisotropes, il doit être calculé à partir de la relation *(3.25)* et de la matrice de rigidité du milieu matriciel C_{pqmn}.

$$T^{Esh}{}_{ijkl} = \frac{1}{8\pi} C_{pqmn}\left(\bar{G}_{ipjq} + \bar{G}_{jpiq}\right) \qquad (3.25)$$

[5] *Les expressions du tenseur d'Eshelby en milieu isotrope et isotrope transverse sont placées dans l'annexe B du manuscrit.*

6.3.3. Modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka [*Mori & Tanaka*, 1973] a déjà été évoqué dans la première partie du manuscrit lors de la détermination du comportement des fibres par méthode inverse sous Digimat-MF [*E-Xstream*, 2014] (*chapitre 3, paragraphe 3.2.2*). Une illustration du modèle est proposée sur la *figure 3-4*.

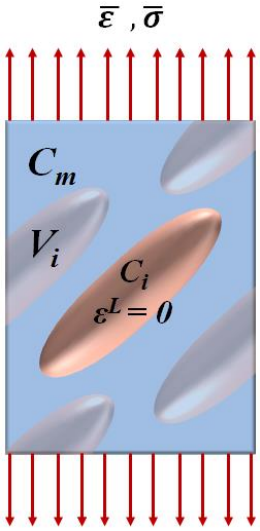


Figure 3-4 : Illustration du modèle de Mori-Tanaka

Le modèle de Mori-Tanaka, qui s'appuie sur le modèle d'Eshelby en solution diluée, a fait l'objet de plusieurs études ultérieures. De par sa clarté, c'est notamment la formulation de Benveniste [*Benveniste*, 1987] qui est généralement retenue dans les travaux actuels sur l'homogénéisation de matériaux composites [*Moussaddy et al.*, 2011], [*Crevel*, 2014]. Le principe du modèle est de considérer que lorsqu'une quantité importante d'inclusions est présente dans un matériau composite, la déformation moyenne de l'inclusion s'exprime de façon linéaire en fonction du tenseur de localisation d'Eshelby et de la déformation moyenne dans la matrice *(3.26)*.

$$\varepsilon_i = A^{Esh} : \varepsilon_m \qquad (3.26)$$

Le tenseur de localisation des déformations de Mori-Tanaka (A^{MT}) est calculé avec l'expression *(3.27)*[6].

$$A^{MT} = \{v_m I + v_i [I + A^{Esh} S_m (C_i - C_m)]^{-1}\}^{-1} \qquad (3.27)$$

Le modèle de Mori-Tanaka constitue la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman. Le principe du modèle considère finalement le matériau composite en solution non-diluée, ce qui permet d'admettre une fraction volumique de fibres plus importante, et de l'appliquer pour l'homogénéisation d'une plus grande variété de matériaux. Il reste cependant limité à une fraction volumique de fibres autour de 20% en volume.

[6] *L'expression (3.27) donne uniquement le tenseur de localisation du modèle de Mori-Tanaka. Ce modèle est décrit de façon approfondie dans le paragraphe 7.1.2*

6.3.4. Modèle de Lielens

Le modèle de Lielens [*Lielens et al.*, 1998], également appelé « Interpolative Double inclusion model » [*Pierard et al.*, 2004], repose sur le motif de Mori-Tanaka et son motif inverse. Une illustration du modèle est proposée sur la *figure 3-5*.

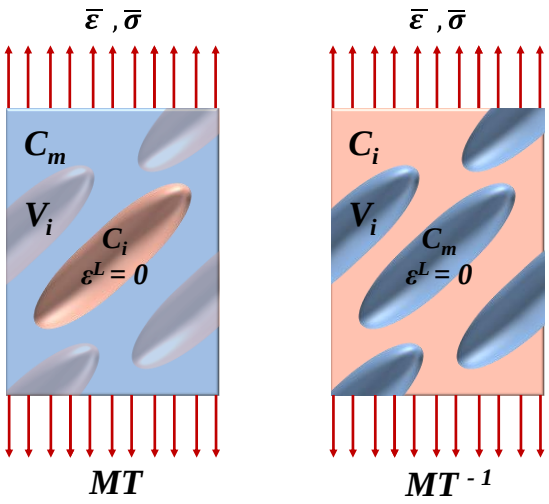


Figure 3-5 : Illustration du modèle de Lielens

Le premier considère une inclusion (fibre) placée dans un milieu continu (matrice) et dont le tenseur de localisation donne la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman. Le motif inverse, considère cette fois que les fibres deviennent le milieu continu et la matrice devient l'inclusion ellipsoïdale, le tenseur de localisation de ce système correspond à la borne supérieure d'Hashin-Shtrikman. Le tenseur de localisation des déformations du modèle de Lielens A^L est exprimé par l'expression *(3.28)*.

$$A^L = \left[\left(1 - f(v_i)\right)\left(A^{HSinf}\right)^{-1} + f(v_i)(A^{HSsup})^{-1}\right]^{-1} \qquad (3.28)$$

Où Lielens propose la fonction empirique $f(v_i)$ *(3.29)* de manière simple et donnant de bons résultats dans le cadre de ses travaux (où v_i correspond à la fraction volumique d'inclusions).

$$f(v_i) = \frac{(v_i - {v_i}^2)}{2} \qquad (3.29)$$

Avec ce modèle, une interpolation entre les bornes supérieures et inférieures d'Hashin-Shtrikman est obtenue grâce à la pondération par la fonction $f(v_i)$. Comme vu dans la seconde partie du manuscrit, ce modèle est généralement utilisé dans une procédure d'homogénéisation en deux étapes pour les CRFC [*Pierard*, 2006], [*Moussaddy*, 2013]. De plus, il conduit à de bonnes corrélations vis-à-vis des données expérimentales pour des fractions volumiques de fibre élevées [*Friebel et al.*, 2006] et différents types d'inclusions [*Hori & Nemat-Nasser*, 1993].

6.3.5. Modèle auto-cohérent

Le modèle auto-cohérent est également issu des travaux d'Eshelby. Développé à l'origine pour l'homogénéisation de polycristaux, il est adapté aux matériaux composites par Hill [*Hill*, 1965a] pour des inclusions sphériques et par Chou [*Chou et al.*, 1980] pour des inclusions ellipsoïdales. Une illustration du modèle est proposée sur la *figure 3-6*.

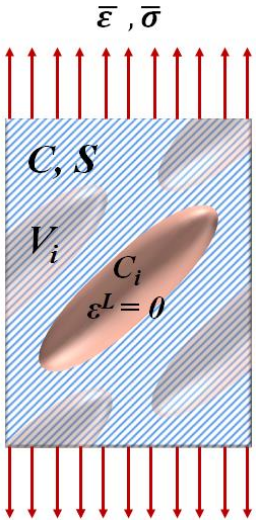


Figure 3-6 : Illustration du modèle auto-cohérent

Le principe du modèle auto-cohérent est de placer une inclusion ellipsoïdale, élastique et isotrope transverse dans un milieu continu homogène et infini ayant les propriétés mécaniques du milieu effectif (*C* et *S*). Le tenseur de localisation des déformations se calcule à partir de la relation *(3.22)* et conduit à l'expression *(3.30)*[7].

$$A^{AC} = [I + A^{Esh} : S(C_i - S)]^{-1} \qquad (3.30)$$

Le milieu matriciel, équivalent au comportement du composite, n'étant pas connu, le modèle auto-cohérent consiste à l'identifier via une procédure itérative remplaçant successivement *C* et *S* jusqu'à convergence du comportement. Le tenseur d'Eshelby d'un milieu anisotrope est donc recalculé à chaque itération. Le coût machine est plus important que pour les autres modèles, mais permet de prendre en compte (de manière *phénoménologique)* les interactions entre les inclusions. Il est néanmoins à noter qu'il existe un seuil de percolation au-delà duquel l'augmentation de la fraction volumique d'inclusions n'a plus d'influence sur le comportement du matériau effectif [*Christensen*, 1990]. Ce seuil reste difficile à évaluer car il résulte d'un couplage entre la fraction volumique d'inclusions et du contraste entre les phases.

[7] *L'expression (3.30) donne uniquement le tenseur de localisation du modèle auto-cohérent. Ce modèle est décrit de façon plus approfondie dans le paragraphe 7.1.3*

6.3.6. Extension à l'estimation du comportement non-linéaire

De même que pour le comportement élastique, les travaux de modélisation du comportement irréversible en champs moyens ont été initiés pour les métaux, par les travaux de Sachs [*Sachs*, 1929] et Taylor [*Taylor*, 1938]. Bien qu'à l'origine, ces travaux ne satisfassent pas les conditions d'équilibre ou de bornes des polycristaux, ils constituent néanmoins le point de départ vers des modèles s'inscrivant dans la théorie de la plasticité. Ce n'est qu'au début des années 50 que Bishop et Hill [*Bishop & Hill*, 1951] proposent de généraliser la plasticité d'un polycristal par l'estimation de sa fonction de charge sous sollicitations quelconques. Ce sont les travaux d'Eshelby qui motivent par la suite les travaux d'homogénéisation du comportement irréversible des matériaux composites.

L'extension des modèles semi-analytiques est basée sur la linéarisation incrémentale d'un problème en plasticité. Cela signifie qu'à chaque incrément, le comportement local du matériau non-linéaire est considéré linéaire. Cette notion de « milieu linéaire de comparaison », définie plus tard par Ponte Castañeda [*Castañeda*, 1991], permet ainsi l'utilisation des modèles d'homogénéisation linéaires pour résoudre le problème. Les propriétés linéaires sont alors obtenues par une méthode de linéarisation : tangente, sécante, affine ou du second ordre.

La méthode sécante est introduite par Berveiller et Zaoui [*Berveiller & Zaoui*, 1978] sur l'extension d'un modèle auto-cohérent en plasticité. Suquet [*Suquet*, 1995], propose une méthode sécante, basée sur le second moment du champ de contrainte sur chaque phase. Cette approche, sensiblement similaire à la méthode variationnelle de Ponte Castañeda [*Castañeda*, 1992], présente une bonne estimation du comportement dans le cas de chargement monotones et uniaxiaux.

La méthode tangente, ou incrémentale, est issue des travaux de Kröner [*Kröner*, 1958] et de Budiansky [*Budiansky & Wu*, 1962] et est introduite par Hill [*Hill*, 1965b] à partir du modèle auto-cohérent. Cette méthode consiste à linéariser les lois constitutives locales de chaque phase et de les exprimer sous une forme incrémentale (en vitesse de déformation ou de contrainte). L'avantage de cette méthode est de prendre en compte l'historique de déformation des phases. Elle permet de plus, de simuler le comportement du matériau sous sollicitations non-proportionnelles.

La méthode affine est établie dans les travaux de thèse de Masson [*Masson*, 1998]. Faisant suite à l'approche incrémentale, cette méthode intègre également l'histoire de chargement par la considération d'un terme de déformation libre. La linéarisation s'effectue en deux étapes : par la méthode tangente et autour des champs mécaniques moyens par phase. Cette méthode se positionne mieux qu'une approche sécante afin d'explorer l'hérédité du comportement dans le cas de l'élastoplasticité [*Masson et al.*, 2000].

6.4. Approches numériques

Les approches numériques sont notamment constituées par des méthodes en champs complets (éléments finis, FE^2 [*Feyel*, 2003]), des « méthodes hybrides » [*Fritzen*, 2012] et des méthodes par transformées de Fourier. La méthode des éléments finis ayant déjà été utilisée dans la seconde partie de ces travaux de thèse (*chapitre 5*), les autres méthodes numériques sont succinctement évoquées dans ce paragraphe.

Les méthodes d'analyses par champs de transformation (TFA, pour Transformation Field Analysis et NTFA, pour Non-uniform Transformation Field Analysis) sont issues des travaux de Dvorak [*Dvorak*, 1992] et permettent de considérer des comportement de matériaux dérivant de deux potentiels. Elles sont appelées « méthodes hybrides » car elles peuvent être résolues par les méthodes semi-analytiques ou la méthode des éléments finis. Dans le cadre des méthodes en champs de transformation, les matériaux sont standards généralisés : leur comportement non-linéaire est défini par des lois d'évolution et des variables internes, qui comportent, dans ces techniques de modélisation, un nombre infini de variables internes locales. L'objectif de ces méthodes est de réduire le nombre de variables aux seuls champs de déformations irréversibles [*Dvorak & Benveniste*, 1992].

6.4.1. Méthodes d'analyse par champs de transformation

En TFA, chaque phase du matériau hétérogène est divisée en sous-domaine dans lequel les champs de déformations sont considérés homogènes. Grâce au principe de superposition, le champ de contrainte local est déterminé en résolvant un problème linéaire à partir du champ de déformation libre connu. Cette opération est répétée à chaque incrément de temps afin de définir le comportement effectif du matériau composite. L'inconvénient d'une telle méthode réside dans les interactions générées par les champs de contrainte et de déformation entre les sous-domaines. Ces interactions mènent à un couplage des variables irréversibles dans les sous-domaines. Cet inconvénient conduit généralement à surestimer le comportement effectif du matériau [*Dvorak et al.*, 1994]. Afin de corriger le comportement effectif, une approche est proposée dans les travaux de Pottier [*Pottier*, 1998] et ceux de Chaboche [*Chaboche et al.*, 2001]. Elle consiste à utiliser un tenseur de rigidité « asymptotique tangent » afin de modifier la règle de localisation élastique totale avec des valeurs corrigées de la déformation libre locale [*Chaboche et al.*, 2005]. Bien que pertinente, la correction proposée par Pottier et Chaboche engendre un système non-symétrique : la déformation irréversible macroscopique varie selon que le problème soit résolu en contrainte ou en déformation [*Largenton*, 2012].

6.4.2. Méthodes d'analyse par champs de transformation non-uniformes

La méthode NTFA, a été développée par Michel [*Michel et al.*, 2000] puis modifiée par Michel et Suquet [*Michel & Suquet*, 2003]. Le but de la NTFA est le même que la méthode TFA : il s'agit de réduire le nombre de variables internes du système. Les fonctions de forme de la méthode NTFA décrivent les variations des champs de déformation irréversibles locaux. Ces champs non uniformes sont appelés modes anélastiques. Les modes sont déterminés par différents chargements élémentaires dans l'espace des contraintes macroscopiques. Quatre hypothèses permettent de simplifier la NTFA : les modes sont orthogonaux et normalisés, leurs supports sont entièrement contenus dans une seule phase du matériau et correspondent à des champs tensoriels à trace nulle dans le cas de matériaux incompressibles [*Roussette*, 2005]. Dans le cadre de l'homogénéisation de combustibles MOX, les travaux de thèse de Largenton [*Largenton*, 2012] montrent que la NTFA est une démarche fiable donnant accès aux champs locaux, moyens par phases et macroscopiques. Elle présente également l'avantage général des méthodes en champs moyens : son coût de calcul reste plus faible que les méthodes en champs complets.

6.4.3. Méthodes par transformation de Fourier

La méthode d'homogénéisation basée sur la transformation de Fourier rapide (FFT) a été proposée par Moulinec et Suquet [*Moulinec & Suquet*, 1994]. Le principe de la méthode consiste à évaluer le comportement local et macroscopique d'une microstructure complexe à partir d'images réelles discrétisées sur une grille régulière. Cette méthode a notamment été développée pour contourner les difficultés liées à la méthode des éléments finis : la taille de l'image considérée et son maillage. La FFT donne accès aux propriétés effectives d'un matériau hétérogène et est appliquée sur différents types de comportements : la thermoélasticité [*Vinogradov & Milton*, 2008], l'élasto-viscoplasticité [*Mercier et al.*, 2012] ou encore sous l'hypothèse des grandes déformations [*Lahellec et al.*, 2003]. Bien que la FFT soit établie comme étant une méthode d'homogénéisation pertinente, elle présente certains inconvénients. En effet, elle devient difficile à mettre en œuvre dans le cas d'un milieu hétérogène infiniment contrasté [*Willot et al.*, 2013]. De plus, des effets de bords peuvent perturber le comportement estimé en FFT [*Schneider et al.*, 2017].

6.5. Synthèse des méthodes d'homogénéisation

L'ensemble des méthodes et modèles d'homogénéisation évoquées dans ce chapitre sont synthétisés dans ce paragraphe. Ils sont classés sur la *figure 3-7* selon leur coût de calcul (temps) et leur précision. Les nuages *(1)*, *(2)* et *(3)* représentent respectivement les trois types d'approches présentées : variationnelles, estimatives et numériques. Sur la *figure 3-7*, les méthodes FE (et FE^2) sont séparées des méthodes en champs de transformation et en transformations de Fourier.

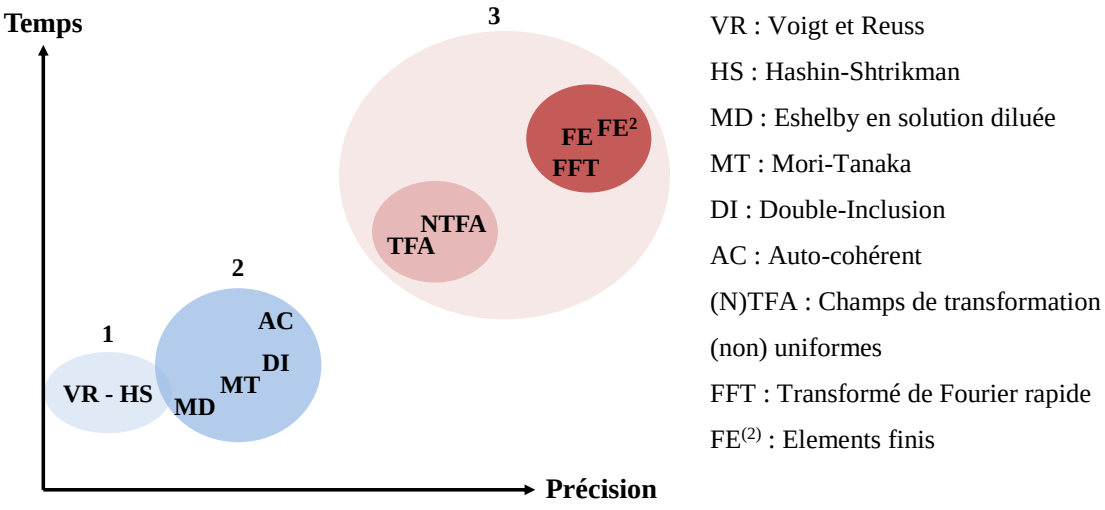


Figure 3-7 : Schéma du positionnement des méthodes d'homogénéisation évoquées en termes de ratio temps/précision

Pour le calcul de structure, le principal inconvénient des méthodes numériques en champs complets a été évoqué (capacité de calcul requises trop importante pour modéliser l'hétérogénéité de la microstructure). Bien que pertinentes, les méthodes en champs de transformation posent un problème pour la prise en compte des variabilités de la microstructure. En effet, la démarche nécessite la définition d'une base de réduction contenant les modes à identifier (les calculs à mener). Ce point constitue déjà une difficulté de la méthode en général [*Fritzen et al.*, 2015]. Or, celle-ci est d'autant plus importante qu'il existe de variabilités à prendre en compte. Le temps de calcul d'une telle démarche n'est alors pas compatible avec l'objectif de ces travaux de modélisation.

Afin de proposer une démarche industriellement viable, permettant de modéliser le comportement effectif du composite ou de calibrer la démarche existante, tout en prenant en compte les variabilités de la microstructure, les travaux s'orientent sur un couplage des approches variationnelles et estimatives. Grâce à leurs faibles coûts de calcul, ces modèles sont alimentées par des données microstructurales mesurées. Ainsi, la démarche proposée permet d'augmenter la précision des approches estimatives et se rapprocher des méthodes numériques, tout en contrôlant le coût numérique de la démarche.

6.6. Intégration de l'orientation des fibres

L'orientation des fibres, déjà mesurée dans la seconde partie du manuscrit (*chapitre 4, paragraphe 4.3.3*), intervient dans le comportement macroscopique d'un CRFC [*Fu & Lauke*, 1996]. L'influence de l'orientation des fibres sur le comportement macroscopique d'un CRFC est abordée d'un point de vue expérimental dans la première partie du manuscrit (*chapitre 3*) et discutée vis-à-vis de la littérature dans la seconde partie (*chapitre 4, paragraphe 4.1.2*).

L'intégration de l'orientation des fibres dans une procédure de modélisation a été proposée par Tsai [*Tsai & Pagano*, 1968] via la théorie des stratifiés. D'autres auteurs ont proposé l'utilisation de fonctions d'orientation bidimensionnelles [*Wu & McCullough*, 1977]. L'intégration de l'orientation tridimensionnelle des fibres a été étudiée par divers auteurs [*Christensen*, 1979], [*Chou & Nomura*, 1981] en proposant une rigidité effective d'un CRFC calculée par la moyenne des rigidités selon différentes orientations. Ce n'est qu'à partir des travaux d'Advani et Tucker [*Advani & Tucker III*, 1987] que l'orientation d'une fibre est formellement définie dans l'espace grâce aux angles d'Euler ϕ et θ (le troisième n'est pas pertinent dans le cas d'une fibre cylindrique de section droite circulaire : la rotation autour de l'axe d'une fibre ne modifie pas son orientation dans l'espace) et la notion de tenseur d'orientation, introduite par Hand [*Hand*, 1962] est utilisée afin de caractériser l'état d'orientation moyen des fibres dans une portion volumique du matériau. D'une manière générale, l'intégration de l'orientation dans une procédure d'homogénéisation consiste à pondérer un des tenseurs du comportement mécanique effectif (rigidité, souplesse ou tenseur d'Eshelby) par un tenseur d'orientation.

6.6.1. Homogénéisation en deux étapes existante

Dans le cadre de l'homogénéisation de CRFC, l'intégration de l'orientation se fait grâce à une procédure en deux étapes, utilisant les modèles micromécaniques présentés dans la section *6.3*. La procédure d'homogénéisation en deux étapes, proposée initialement par Camacho [*Camacho & al.*, 1990] reste la méthode la plus répandue pour déterminer le comportement effectif de matériaux dont les hétérogénéités sont orientées dans l'espace [*Lielens*, 1999], [*Doghri & Ouaar*, 2003], [*Pierard et al.*, 2004], [*Doghri & Friebel*, 2005], [*Tian et al.*, 2016]. Cette procédure est présentée et utilisée dans la première partie du manuscrit (*chapitre 3*) afin de déterminer le comportement des fibres par méthode inverse, grâce au logiciel Digimat-MF [*E-Xstream*, 2014]. Le schéma de principe de l'homogénéisation en deux étapes est représenté par la *figure 3-8*.

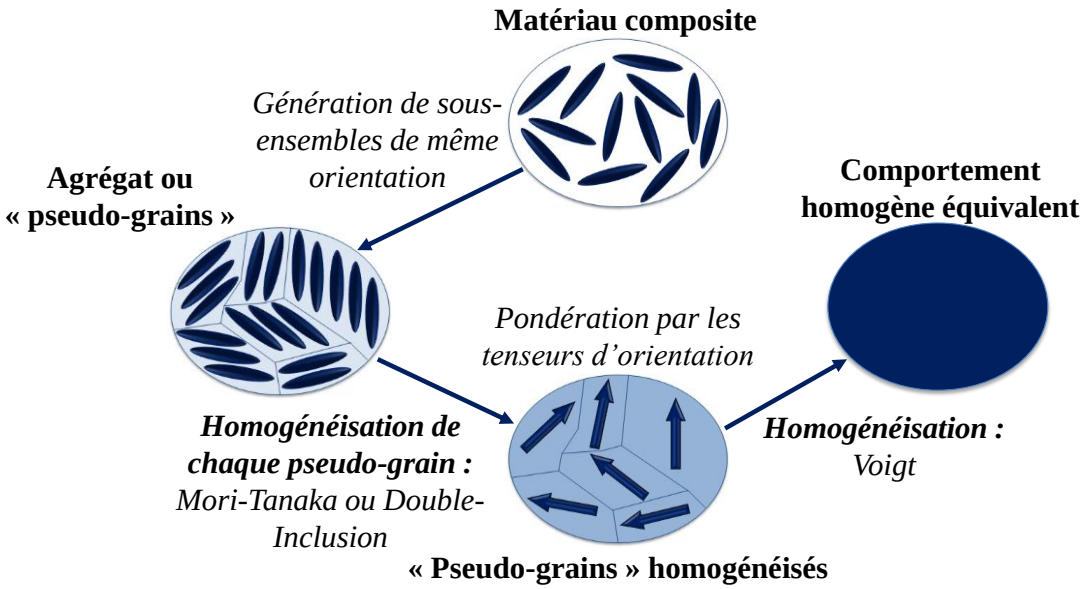


Figure 3-8 : Procédure d'homogénéisation en deux étapes conventionnelles pour les matériaux renforcés en fibres courtes orientées suivant une distribution donnée

Dans l'ensemble des travaux cités ci-avant, les modèles de Mori-Tanaka ou Double-Inclusion (Lielens) sont utilisés afin d'homogénéiser le comportement unidirectionnel de chaque pseudo-grain. Un modèle de Voigt (déformation uniforme), permet l'homogénéisation de l'ensemble des pseudo-grains afin de donner le comportement macroscopique du matériau hétérogène. Les pseudo-grains sont donc assemblés en parallèle [*Lielens & al.*, 1998].

6.6.2. Retour sur les tenseurs d'orientation

Les tenseurs d'orientation ont été abordés de manière succincte dans la seconde partie de ce manuscrit (*chapitre 3, paragraphe 3.1.2*). Leur forme tensorielle rend leur utilisation pratique dans le cadre de la mécanique puisqu'ils sont de la même nature mathématique que les tenseurs de comportement, et peuvent ainsi les pondérer suivant l'état d'orientation. S'ils ne peuvent pas être mesurés, ils sont généralement donnés au second ordre par les logiciels de simulation. Des équations de fermeture sont utilisées pour les exprimer à l'ordre quatre et permettre d'estimer la rigidité ou la souplesse du milieu effectif. Les différentes équations de fermeture proposées dans la littérature sont discutées dans ce paragraphe.

a_{ij} et a_{ijkl} sont respectivement les tenseurs d'ordre deux et quatre, définis par les expressions *(3.31)* et *(3.32)*.

$$a_{ij} = \int_p p_i p_j \psi(p) dp \qquad (3.31)$$

$$a_{ijkl} = \int_p p_i p_j p_k p_l \psi(p) dp \qquad (3.32)$$

Où $\psi(p)$ est la fonction de distribution d'orientation (probabilité de trouver une fibre orientée selon p à dp près).

La fermeture linéaire, proposée par Hand [*Hand*, 1962], considérée exacte pour des distributions isotropes d'orientation de fibres est donnée par l'expression *(3.33)*. Où δ_{ij} est le symbole de Kronecker utilisé dans l'expression du tenseur de rigidité d'un matériau isotrope transverse [*Advani & Tucker III*, 1987].

$$a_{ijkl}{}^{L} = -\frac{1}{35}\left(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right) + \frac{1}{7}\left(a_{ij}\delta_{kl} + a_{ik}\delta_{jl} + a_{il}\delta_{jk} + a_{kl}\delta_{ij} + a_{jl}\delta_{ik} + a_{jk}\delta_{il}\right) \quad (3.33)$$

La fermeture quadratique, proposée par Doi [*Doi*, 1981], donne de bonnes prédictions du comportement effectif dans le cas de fibres majoritairement alignées et s'exprime selon *(3.34)*.

$$a_{ijkl}{}^{Q} = a_{ij}a_{kl} \quad (3.34)$$

La fermeture hybride, proposée par Advani & Tucker [*Advani & Tucker III*, 1987] est une combinaison linéaire des deux premières équations et s'exprime comme suit *(3.35)*.

$$a_{ijkl}{}^{H} = (1-f)a_{ijkl}{}^{L} + f\,a_{ijkl}{}^{Q} \quad (3.35)$$

Où f est un scalaire compris entre 0 et 1. Si f=1, on a $a_{ijkl}{}^{H}=a_{ijkl}{}^{Q}$. Dans le cadre de ses travaux de thèse, Advani [*Advani*, 1987] propose différentes expression afin de définir f. Dans le cadre de ses travaux, celle donnant les meilleures approximations fait intervenir I_3, le troisième invariant de a_{ijkl}. Elle est exprimée par la relation *(3.36)*.

$$f = 1 - 27I_3 \quad (3.36)$$

L'invariant I_3 est calculé à partir de l'expression *(3.37)*.

$$I_3 = \frac{1}{6}\left(a_{ii}a_{jj}a_{kk} + a_{ij}a_{jk}a_{ki} - 3a_{ij}a_{ji}a_{kk}\right) \quad (3.37)$$

La fermeture orthotrope, proposée par Cintra et Tucker [*Cintra & Tucker*, 1995] et reprise par [*Chung & Kwon*, 2001] est donnée par l'expression *(3.38)*.

$$a_{ijkl}{}^{O} = C_{i1} + C_{i2}a_1 + C_{i3}{a_1}^2 + C_{i4}a_2 + C_{i5}{a_2}^2 + C_{i6}a_1a_2 \quad (3.38)$$

Où C est une matrice 3x6 dont les coefficients sont définis en supposant des orientations spécifiques (unidirectionnelles, aléatoires 2D ou 3D) ou via une procédure d'identification [*Dray et al.*, 2007].

Bien que ces équations de fermeture soient les plus répandues dans la littérature, d'autres auteurs ont proposé d'améliorer le comportement effectif en les modifiant [*Han & Im*, 1999], [*Doghri & Tinel*, 2006]. Dans ses travaux, Tucker suppose que le quatrième ordre du tenseur d'orientation est suffisant pour d'écrire l'état d'orientation. Cependant, les travaux menés par Jack à l'université de Columbia (Missouri) montrent que dans certains cas, l'ordre six mène à une prédiction plus fine du comportement que les tenseurs d'ordre quatre [*Jack*, 2006].

Le choix d'une équation de fermeture est non seulement dépendant du procédé de fabrication (induisant l'orientation particulière des fibres), mais également des hypothèses de modélisation du comportement mécanique. Dans sa thèse, Dray soulève le fait que seule l'équation linéaire est invariante lorsque les indices *i*, *j*, *k* et *l* sont permutés, c'est-à-dire que ses composantes sont indépendantes. Dans les mêmes travaux, il est cependant remarqué que cette équation ne convient pas dans le cadre de la thermomécanique. De plus, selon les travaux de [*Munganga et al.*, 2000] seule la fermeture orthotrope respecte le second principe de la thermodynamique.

Bien que l'utilisation des tenseurs d'orientation soit courante dans la modélisation de composites renforcés en fibres courtes, les travaux cités dans ce paragraphe montrent que les équations de fermeture ne font pas consensus dans le domaine. De plus, les tenseurs d'orientation donnent une moyenne de l'orientation des fibres dans un volume donné du matériau. En conséquence, la démarche d'homogénéisation proposée permet de s'affranchir des tenseurs d'orientation en utilisant directement l'orientation réelle mesurée en tomographie RX. Dans un second temps et en perspective de ces travaux de thèse, cette mesure peut permettre de déterminer l'équation de fermeture adaptée à l'estimation du comportement du composite étudié.

CHAPITRE 7 : HOMOGENEISATION DU PEI 25% EN FIBRES DE CARBONE

7. Homogénéisation du PEI renforcé en fibres courtes de carbone

L'objectif de ce chapitre est d'homogénéiser le comportement du PEI renforcé par 19% en volume de fibres de carbone. La démarche consiste à réunir l'ensemble des travaux menés dans les deux premières parties du manuscrit : le comportement des constituants, l'orientation réelle des fibres dans la microstructure et la cellule statistiquement représentative. Les généralités sur les modèles micromécaniques en champs moyens présentées dans le chapitre précédent permettent le choix de modèles pertinents pour mener une démarche d'homogénéisation en deux étapes. La démarche d'homogénéisation menée sous Zset est présentée dans une première section. Elle est ensuite appliquée à la modélisation du comportement effectif du composite aux échelles mésoscopique et macroscopique.

7.1. Démarche de modélisation

L'homogénéisation du comportement effectif d'un composite renforcé en fibres courtes, dont l'orientation et le facteur de forme sont connus, est généralement menée avec le comportement des constituants massifs, identifiés séparément [*Müller et al.*, 2015]. Cependant, le procédé de fabrication du composite et les interactions entre les constituants peuvent modifier leur comportement et avoir un impact important sur le comportement irréversible du composite [*Gates et al.*, 1994], [*Forest et al.*, 2000], [*Gregory & Spearing*, 2005]. L'homogénéisation du comportement effectif du composite peut donc être menée à partir du comportement *in-situ* des constituants. La première hypothèse de la démarche est de considérer un comportement de fibres réversible linéaire. Concernant la matrice, deux approches sont possibles.

La première approche consiste à identifier *numériquement* le comportement *in-situ* de la matrice. Deux méthodes sont possibles : soit modifier son comportement par méthode inverse jusqu'à convergence des courbes numériques et expérimentales du composite [*Selmi et al.*, 2011], soit modifier la répartition des déformations dans la matrice. Ce correctif est appliqué à la matrice tangente du comportement effectif, calculée pour l'évaluation du tenseur d'Eshelby [*Doghri & Ouaar*, 2003], évaluation abordée plus précisément dans le paragraphe *7.1.2*. Cette seconde méthode est justifiée par la capacité des modèles en champs moyens à ne considérer qu'un état de plasticité binaire (le comportement effectif est irréversible ou non), alors que les champs complets montrent une plasticité hétérogène.

La seconde approche est celle adoptée dans ces travaux : aucun correctif numérique n'est utilisé pour corréler le comportement expérimental. Le comportement de la matrice, sensible à la pression hydrostatique et identifié au second chapitre de ce manuscrit est choisi pour rendre compte de l'effet de la présence des fibres dans son voisinage. Le comportement massif de la matrice est donc le même que son comportement *in-situ*. De plus, les variabilités locales mesurées sont intégrées directement à la démarche, dans le but de proposer une méthode alternative permettant un enrichissement local du comportement, via l'apport de plus de physique. Afin d'y parvenir, la procédure en deux étapes décrite au paragraphe *6.6.1* (et illustrée par la *figure 3-8*) est modifiée à différentes échelles.

A l'échelle microscopique, le comportement des constituants identifié de façon unitaire est intégré directement à la procédure afin de constituer des pseudo-grains. Ces pseudo-grains unidirectionnels sont homogénéisés à l'aide d'un modèle à double-motif présenté dans le paragraphe suivant. Bien qu'il se base sur une approche similaire, ce modèle est différent du modèle de Lielens et donne un accès aux champs de contraintes dans les phases des deux motifs. Les proportions du système à double-motif sont identifiées grâce au comportement global et aux distributions locales de la CESR. A l'échelle mésoscopique, l'orientation réelle des fibres remplace l'utilisation de tenseurs d'orientation et la distribution de longueur des fibres est prise

en compte. L'intégration de ces variabilités a pour objectif de proposer une démarche complète, qui pourra par la suite être réduite afin de ne considérer qu'un nombre réduit de paramètres. Le matériau composite est discrétisé en plis numériques. Dans chacun de ces plis, les pseudo-grains sont constitués par un nombre de fibres spécifiques, d'orientation et de longueur connue. Le changement d'échelle donnant l'accès au comportement macroscopique, c'est-à-dire l'homogénéisation des pseudo-grains numériques orientés, est réalisé à l'aide d'un modèle de Voigt à *n-phases*. Cet assemblage en parallèle des pseudo-grains est finalement la seule étape similaire à l'approche conventionnelle en deux étapes.

Grâce à de nouveaux essais de traction à différents angles sur le composite, la pertinence de la procédure d'homogénéisation conventionnelle en deux étapes est montrée dans le domaine réversible linéaire. Le modèle d'homogénéisation multi-échelle proposé, intégrant l'orientation et les longueurs réelles des fibres, est ensuite comparé à cette solution numérique existante. Les mêmes essais mécaniques sur le composite permettent la comparaison du modèle dans le domaine irréversible pour les angles testés. Enfin, un essai réalisé en tomographie RX *in-situ* sur une éprouvette axisymétrique entaillée est modélisé et permet de conclure quant à la capacité du modèle à prédire à la fois le comportement global et local du composite sollicité de manière complexe. L'ensemble de la démarche d'homogénéisation multi-échelle proposée est présenté sur la *figure 3-9*

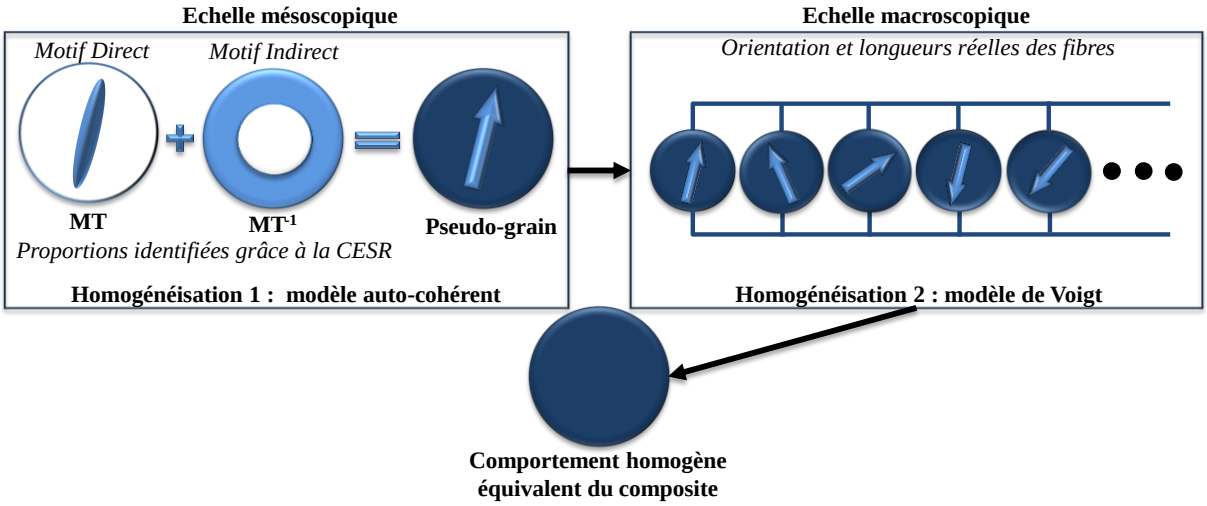


Figure 3-9 : Etapes de la procédure d'homogénéisation multi-échelle en deux étapes développée

Après avoir présenté le principe du modèle à double-motif, la procédure d'homogénéisation multi-échelle sous Zset nécessite quatre étapes (dans l'ordre d'utilisation de la méthode) : implémenter un modèle de Mori-Tanaka incrémental, un modèle auto-cohérent à deux phases, développer la méthode de prise en compte de l'orientation réelle des fibres et implémenter un modèle de Voigt à *n-phases*. Ce dernier modèle n'est pas repris dans ce chapitre car sa formulation au paragraphe est suffisamment explicite (*6.2.1*).

7.1.1. Principe du modèle à double-motif

La procédure en deux étapes modifiée intègre un modèle Double-Inclusion qui n'est pas celui proposé par Lielens. Afin de ne pas créer de confusion, ce modèle est appelé ici *modèle à double-motif*. Il est inspiré des travaux de Joannès et d'Hervé-Luanco en diffusion sur des motifs morphologiques représentatifs (« *Morphological Representative Patterns* ») [*Hervé-Luanco & Joannès*, 2016], [*Joannès & Hervé-Luanco*, 2016] et est étudié ici en mécanique pour deux motifs. Le motif direct est celui de Mori-Tanaka classique, c'est-à-dire que la fibre est entourée de matrice, et correspond à la borne inférieure d'Hashin-Shtrikman. Le motif inverse correspond au motif de Mori-Tanaka dans lequel les phases sont permutées, c'est-à-dire que les fibres entourent, ou confinent, la matrice. Ce motif correspond à la borne supérieure de Hashin-Shtrikman. Ce système à double-motif concerne l'homogénéisation de l'échelle microscopique du matériau : celle des constituants.

Le comportement équivalent de ce système à double-motif est déterminé par homogénéisation à l'aide d'un modèle auto-cohérent, dans lequel les motifs sont les phases du modèle. Ce premier bloc d'homogénéisation à l'échelle mésoscopique donne le comportement homogène équivalent d'un pseudo-grain, dans lequel les inclusions sont unidirectionnelles. Une illustration de cette approche est proposée par la *figure 3-10*.

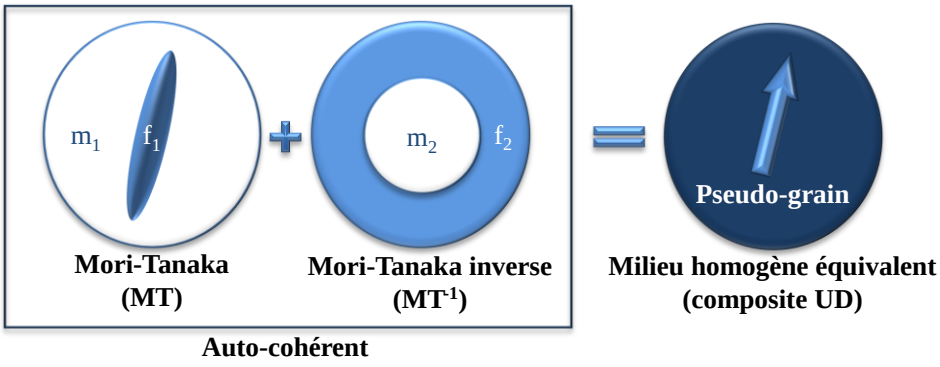


Figure 3-10 : Etapes de la démarche d'homogénéisation du comportement unidirectionnel de l'échelle mésoscopique du composite

Les proportions des deux motifs sont respectivement *MT* et MT^{-1} et leur somme est égale à *1*. Dans ces deux motifs, les fractions de fibres sont respectivement nommées f_1 et f_2 et celles de la matrice sont nommées m_1 et m_2. La fraction de fibre V_f se calcule grâce à l'expression *(3.39)*.

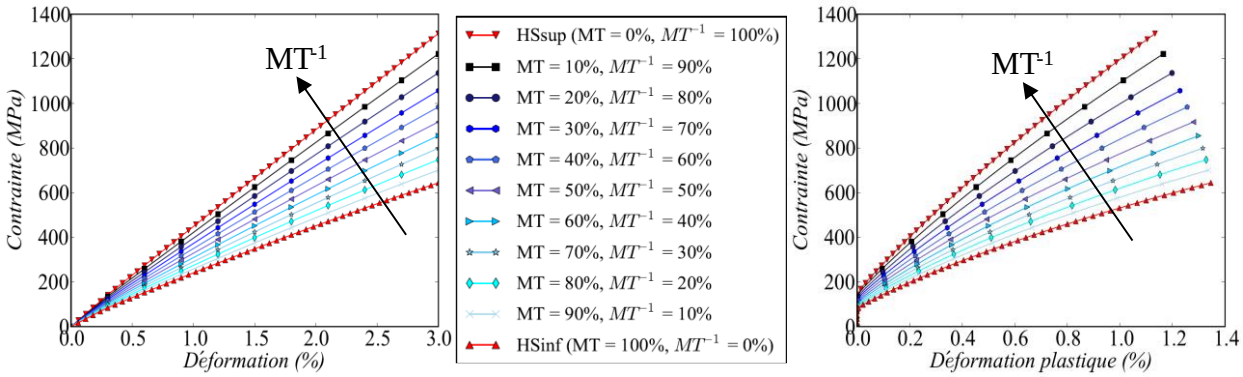
$$V_f = MT \times f_1 + MT^{-1} \times f_2 \qquad (3.39)$$

La fraction de fibre étant généralement connue, en fixant la proportion du motif direct (*MT*) et sa fraction de fibre f_1, l'expression de f_2 est donnée par *(3.40)*.

$$f_2 = \frac{V_f - MT f_1}{1 - MT}, avec\ MT = 1 - MT^{-1}, \forall\, V_f > MT \times f_1 \qquad (3.40)$$

L'influence de ces paramètres est montrée sur la *figure 3-11* et la *figure 3-12*. La *figure 3-11* montre le tracé des courbes de contrainte-déformation dans le sens des fibres *(A)* et de la contrainte-déformation plastique cumulée *(B)*, pour une variation de MT de 10% à 90% (et MT^{-1} respectivement de 90% à 10%), V_f, m_1, m_2, f_1 et f_2 étant constants.

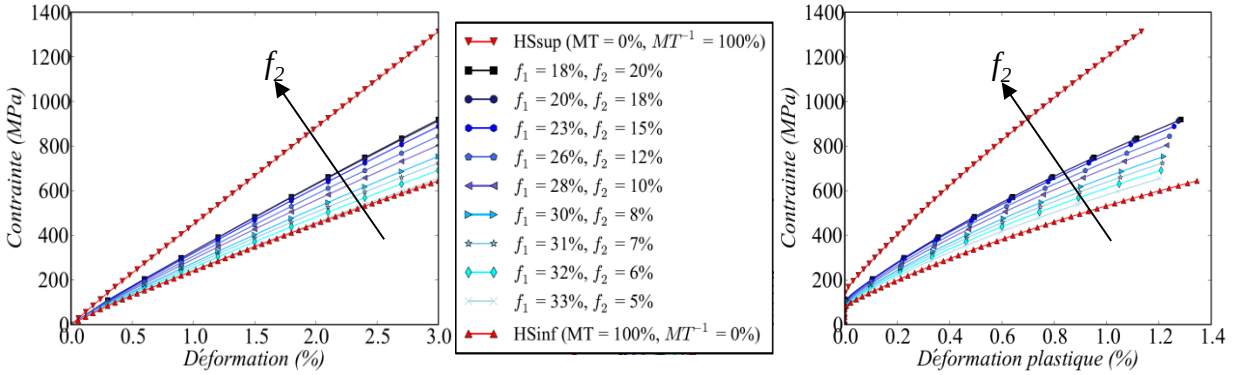
La partie *(B)* de la figure traduit la déformation plastique moyenne dans la matrice des deux motifs, qui n'est pas explicite sur la figure *(A)*.



(A) *(B)*

Figure 3-11 : Influence de la proportion des motifs MT et MT^{-1} sur le comportement homogène équivalent du modèle à double-motif : (A) sur les courbes de contrainte-déformation globale et (B) sur la valeur de la déformation plastique cumulée par rapport à la contrainte globale

De la même manière, en fixant *MT* et MT^{-1} à 50%, la proportion de fibres dans les deux motifs peut être modifiée en respectant la fraction volumique globale. La *figure 3-12* montre également les courbes de contrainte-déformation dans le sens des fibres *(A)* et de contrainte-déformation plastique cumulée *(B)*, pour des variations arbitraires de la fraction volumique de fibres dans le motif direct f_1 de 33% à 18% et de la fraction volumique de fibres dans le motif inverse f_2 de 5% à 20%.



(A) *(B)*

Figure 3-12 : Influence des proportions des constituants sur le comportement homogène équivalent du modèle à double-motif : (A) sur les courbes de contrainte-déformation globale et (B) sur la valeur de la déformation plastique cumulée par rapport à la contrainte globale

Un des avantages de l'approche est de permettre la simulation réversible linéaire et irréversible dans une large gamme de comportement, encadrée par les bornes d'Hashin-Shtrikman. Les figures précédentes montrent bien que le motif inverse est plus rigide que le motif direct. Par analogie avec le modèle de Lielens, la modification des proportions des motifs revient à modifier la fonction heuristique proposée dans la définition du modèle [*Lielens*, 1999]. Cependant, la modification des proportions de leurs phases est possible grâce au double-motif et ajoute ainsi des degrés de liberté supplémentaires au comportement simulé.

Le second intérêt de ce double motif est de prendre en compte l'influence de la proximité des inclusions dans le comportement homogène équivalent du matériau [*Joannès & Hervé-Luanco*, 2016]. L'objectif est d'homogénéiser le comportement de la CESR dont la morphologie est statistiquement représentative de celle de la microstructure. Il s'agit donc d'identifier quelles sont les proportions des deux motifs et de leurs phases respectives permettant de reproduire son comportement réversible linéaire et irréversible global.

Le dernier avantage de cette approche est de donner accès à l'état de contrainte dans les phases de chacun des motifs. L'identification des proportions des motifs peut alors être faite par comparaison avec la distribution de la pression hydrostatique ou de la triaxialité de la CESR. Le comportement homogène équivalent obtenu est alors celui d'un pseudo-grain du composite, dans lequel les fibres n'ont qu'une seule orientation et dont la morphologie est représentative de celle de la microstructure.

7.1.2. Modèle de Mori-Tanaka incrémental

Le modèle à double-motif utilisé pour l'homogénéisation de l'échelle mésoscopique est basé sur le motif de Mori-Tanaka et son inverse. Sous Zset, il s'agit donc d'implémenter un modèle de Mori-Tanaka incrémental non-linéaire à deux phases. Le modèle implémenté est identique à celui développé dans l'article de Doghri [*Doghri & Ouaar*, 2003]. Le choix de ce modèle est motivé par l'utilisation du modèle à double motif et par l'extension de cette approche à la mécanique. Avant de présenter son implémentation, il est nécessaire d'écrire le modèle de manière complète. Pour un modèle d'homogénéisation à deux phases, la déformation macroscopique $\bar{\varepsilon}$ est la somme du produit de leur fraction volumique par leur déformation moyenne ($\bar{\varepsilon_i}$ et $\bar{\varepsilon_m}$ respectivement). A partir de l'équation *(3.4)*, on peut écrire l'expression *(3.41)* pour deux phases.

$$\bar{\varepsilon} = \nu_i \bar{\varepsilon_i} \times \nu_m \bar{\varepsilon_m} \qquad (3.41)$$

A partir de l'expression générale des tenseurs de localisation *(3.5)*, la déformation moyenne de chaque phase est reliée à la déformation globale grâce au tenseur de localisation des phases *(3.42)*.

$$\bar{\varepsilon_i} = A_i : \bar{\varepsilon} \qquad \bar{\varepsilon_m} = A_m : \bar{\varepsilon} \qquad (3.42)$$

Les relations *(3.41)* et *(3.42)* doivent vérifier que la somme du produit des tenseurs de localisation par la fraction volumique des phases soit égale au tenseur identité *I (3.43)*.

$$\nu_i A_i + \nu_m A_m = I \qquad (3.43)$$

En reprenant finalement l'expression du tenseur de localisation de Mori-Tanaka *(3.27)*, le tenseur de localisation des déformations dans la matrice s'écrit alors *(3.44)*.

$$A_m = \{\nu_m I + \nu_i [I + T^{Esh} S_m (C_i - C_m)]^{-1}\}^{-1} \qquad (3.44)$$

D'un point de vue numérique, en appliquant une déformation linéaire macroscopique à un VER en champs moyens, le tenseur de localisation des contraintes et déformations dans la matrice et l'inclusion est calculé à l'aide de l'expression du tenseur de localisation d'Eshelby *(3.22)*. La répartition de la déformation macroscopique dans les phases est alors connue. La même procédure de calcul est adoptée en termes d'incréments pour le calcul dans le domaine non-linaire. Le choix d'utiliser une méthode incrémentale dans ces travaux de thèse est motivé par le meilleur compromis entre une relative simplicité d'implémentation et sa capacité à prendre en compte des chargements non-proportionnels [*Hill*, 1965b] (*6.3.6*).

Même si la majorité des modèles micromécaniques incrémentaux à champs moyens permettent de reproduire le comportement linéaire d'un composite, ce n'est plus le cas dans le domaine non-linéaire. D'un point de vue numérique, un calcul à champs moyens est réalisé sur un point d'intégration. Les tenseurs de localisation permettent de répartir la déformation dans chaque phase, c'est-à-dire de pondérer le comportement du point d'intégration suivant ceux des deux constituants. En champs moyens, la déformation étant toujours supposée homogène par phase, le comportement de la matrice est donc soit réversible linéaire, soit irréversible. Or, dans un cas plus physique, tel que peut le traduire la méthode des éléments finis, la plasticité de la matrice est hétérogène dans un volume donné puisque le milieu est continu. Ce constat, mis en évidence par Suquet [*Suquet*, 1995], explique que la réponse en champs moyens est généralement plus rigide que celle issue des éléments finis. La littérature montre que de meilleurs résultats sont obtenus lorsque le tenseur d'Eshelby S^{Esh} est calculé avec la partie isotrope de la matrice tangente [*Doghri & Ouaar*, 2003], [*Chaboche et al.*, 2005]. Le calcul du tenseur d'Eshelby *(3.25)* est alors explicite mais nécessite une « isotropisation » de la matrice tangente. Dans le cas d'une inclusion ellipsoïdale, le tenseur d'Eshelby ne dépend que du facteur de forme de l'inclusion et du coefficient de Poisson « tangent » ν_t, calculé avec l'expression *(3.45)*.

$$\nu_t = \frac{3\kappa_t - 2\mu_t}{2(3\kappa_t + \mu_t)} \qquad (3.45)$$

Où κ_t et μ_t sont respectivement les modules de compressibilité et de cisaillement tangents de la matrice. La matrice tangente isotrope ainsi obtenue et le facteur de forme des fibres dans le motif considéré sont utilisés pour calculer le tenseur d'Eshelby et la déformation macroscopique. Afin d'homogénéiser le comportement irréversible, la démarche est adoptée à chaque incrément de temps. Le tenseur d'Eshelby, le tenseur de localisation et le comportement macroscopique sont évalués pour une valeur de α suivant une loi de point milieu (α=1/2) à l'incrément suivant ($t_{n+\alpha}$) *(3.46)*.

$$t_{n+\alpha} = (1-\alpha)t_n + \alpha t_{n+1}, \alpha \in [0,1] \qquad (3.46)$$

Après l'évaluation du tenseur de localisation des déformations *(3.44)*, la compatibilité de la déformation moyenne dans chacune des phases est vérifiée par le calcul d'un résidu R_p *(3.47)*, où l'indice *p* représente la phase, soit respectivement la matrice ou la fibre.

$$R_p = A_p : \left[\nu_p A_p + \left(1-\nu_p\right)I\right]^{-1} : \Delta\bar{\varepsilon} - \varepsilon_i \qquad (3.47)$$

En fixant une valeur de tolérance ($Tol = 10^{-8}$ dans le modèle développé), le calcul converge lorsque $Tol \geq R_p$ et l'incrément de contrainte macroscopique peut être relié à la déformation macroscopique.

7.1.3. Modèle auto-cohérent incrémental

Le modèle auto-cohérent permet l'homogénéisation des deux motifs de Mori-Tanaka. Les différences fondamentales avec un modèle Double-Inclusion (au sens de Lielens), résident dans deux points : l'absence d'une fonction heuristique pondérant les deux motifs (voir équation *(3.28)*) et dans le calcul d'un tenseur de localisation des déformations spécifique à chaque motif. Les deux motifs sont homogénéisés à l'aide d'un modèle auto-cohérent, qui les considère comme deux phases distinctes. Les expressions utilisées dans l'implémentation du modèle sont présentées dans ce paragraphe.

Dans le domaine élastique d'un matériau hétérogène à deux phases, le modèle auto-cohérent fait intervenir un milieu de référence, noté en indice « *0* », dans lequel l'inclusion et la matrice sont plongées. L'auto-cohérence du système s'établit comme suit *(3.48)* :

$$v_i(C_i - C_0)A^{Esh(i,0)} + v_m(C_m - C_0)A^{Esh(m,0)} = 0 \qquad (3.48)$$

A l'aide de l'expression *(3.9)* la rigidité effective du modèle auto-cohérent C^{AC} est donnée par la relation *(3.49)* en identifiant le milieu de référence par le matériau effectif.

$$\begin{aligned} C^{AC^*} &= C_m + v_i[C_i - C_m]A^{Esh^{i*}} \\ &= C_m + v_i[C_i - C_m]\left[I + T^{Esh(i*)}S^*\left(C_i - C^{AC^*}\right)\right]^{-1} \end{aligned} \qquad (3.49)$$

Où $A^{Esh^{i*}}$ correspond au tenseur de localisation d'Eshelby dans le cas où l'inclusion est plongée dans le milieu effectif à la place de la matrice. Ce qui équivaut à considérer la rigidité de la matrice comme étant celle d'une partie du milieu effectif (C_m devient C^*), ainsi A^{Esh^i} devient $A^{Esh^{i*}}(C^*, S^*)$ et le tenseur d'Eshelby $T^{Esh(i*)}$ doit être identifié par rapport au milieu effectif partiel. La particularité du modèle auto-cohérent est donc de nécessiter une méthode itérative afin de résoudre l'expression *(3.49)* et d'évaluer la rigidité du matériau composite C^{AC}. L'expression à résoudre est alors donné par l'équation *(3.50)*.

$$C^{AC}{}_{n+1} = C_m + v_i[C_i - C_m]\left[I + T^{Esh(n)}S^n(C_i - C^n)\right]^{-1} \qquad (3.50)$$

Où le tenseur d'Eshelby $T^{Esh(n)}$ décrit la réponse d'une inclusion plongée dans la $n^{ème}$ itération du milieu effectif et doit être calculé à chaque itération. Une fois la rigidité du système évalué, le tenseur de localisation A^{AC} *(3.30)* et le comportement effectif du composite peuvent être calculés. L'extension du modèle au domaine irréversible est réalisée de manière incrémentale, de façon identique au modèle de Mori-Tanaka.

7.2. Homogénéisation du comportement unidirectionnel du composite

L'homogénéisation du comportement unidirectionnel du composite consiste à identifier les proportions des motifs du modèle à double-motif et celles de leurs phases respectives afin de reproduire le comportement global de la CESR. Les distributions de déformation plastique et de triaxialité dans la matrice sont également étudiées afin de montrer la capacité du modèle à *capter* des paramètres plus locaux, et ainsi, de se différencier des modèles existants. Dans un premier temps, les calculs sont menés dans le domaine réversible linéaire du comportement de la CESR sous sollicitations conventionnelles de traction. Le modèle est calibré afin de correspondre à ce comportement. La pertinence de cette calibration est montrée ensuite en comparant le comportement macroscopique de la CESR sous sollicitations biaxiales en traction. Enfin, l'avantage de l'utilisation d'un modèle à *motifs morphologiques représentatifs* est démontré sur l'étude d'une autre cellule dont la morphologie de la microstructure varie de celle de la CESR.

Le système à double-motif identifié dans les sections suivantes montre une capacité à reproduire le comportement macroscopique de manière aussi prédictive qu'un modèle de Lielens. C'est à l'échelle locale que l'intérêt du modèle est démontré : il est capable de corréler le taux de triaxialité des contraintes médian d'une cellule modélisée par éléments finis. Ce qui prouve sa capacité à prendre en compte la complexité locale et globale de sollicitations.

7.2.1. Comportement irréversible de la CESR

Le comportement irréversible de la CESR, soit celui du composite lorsque les fibres sont orientées dans une direction unique, est simulé à l'aide du logiciel Zset et utilise la méthode des éléments finis. Les calculs sont menés de la même manière que dans le cinquième chapitre (*5.2.1*) : les conditions aux limites périodiques pour les maillages non-coïncidents sont conservées et les sollicitations sont pilotées en déformation. Le comportement irréversible de la matrice PEI, identifié au *chapitre 2* à l'aide d'un modèle de Drucker-Prager généralisé s'ajoute au comportement réversible linéaire initial utilisé pour la détermination de la CESR. Le comportement des fibres reste identique.

La cellule testée est la CESR (cellule 22) issue du *chapitre 5*, dont le comportement homogène équivalent représente statistiquement celui du composite unidirectionnel et dont la morphologie est proche de la microstructure réelle. Quatre cas de sollicitations conventionnelles en traction sont simulés : dans les axes longitudinal et transverse (respectivement *11* et *22*, soit parallèle à l'axe de la fibre et perpendiculaire) et en cisaillement dans le plan *12* et hors plan, *23*. Trois cas de sollicitations biaxiales en traction sont également simulées : selon les axes *11-22*, *22-33* et *12-23*.

7.2.2. Calibration du modèle à double-motif

Au travers de comparaisons entre des grandeurs globales et locales, la calibration du modèle vise à montrer l'intérêt du modèle à double motif vis-à-vis d'un modèle d'homogénéisation existant et éprouvé. Le comportement du matériau effectif simulé avec le modèle à double-motif doit d'abord être proche de celui de la CESR. Il s'agit d'identifier quels sont les paramètres de cette première brique de la procédure d'homogénéisation générale présentée dans ces travaux. La philosophie de cette démarche est d'apporter une alternative à un modèle existant, plus riche en données mesurées et plus précise en termes de comportement local. De ce fait, le modèle de Lielens a également été implémenté sous Z-set afin de situer le modèle à double-motif vis-à-vis de celui-ci en termes de comportements global et local.

L'objectif est donc de déterminer MT et MT^{-1}, les paramètres qui correspondent respectivement aux proportions du motif direct et du motif inverse de Mori-Tanaka, ainsi que les proportions de matrice et de fibres qu'ils contiennent (respectivement m_1, f_1 pour le motif direct et m_2, f_2 pour le motif inverse), en respectant une fraction volumique globale V_f de fibres à 19% et un facteur de forme de *21* (valeur considérée dans l'ensemble des travaux).

Dans un premier temps, la détermination des paramètres est faite sur le comportement macroscopique effectif, grâce aux courbes de contrainte-déformation moyennes de la CESR et de celles du double-motif. Dans un second temps, le comportement de la matrice est étudié de manière plus locale en comparant la distribution de la déformation plastique cumulée dans la CESR et dans chacun des deux motifs. La déformation plastique dans la CESR étant représentée sous la forme d'un histogramme de distribution des valeurs aux points d'intégrations du maillage, pondérées par le volume de l'élément auxquelles ces points appartiennent. De cette manière le poids « réel » de chaque valeur est considéré.

L'unique valeur obtenue en champs moyens est comparée à la médiane de la distribution dans la CESR. Le choix de comparer ces valeurs à la médiane réside dans le fait que, statistiquement, une valeur médiane représente le centre d'une distribution de données, la séparant ainsi en deux groupes de même fréquence. Les champs moyens doivent ainsi être capables de se placer sur cette médiane afin de *capter* de façon symétrique l'ensemble des valeurs possibles.

Enfin, la complexité de la sollicitation à l'échelle locale est étudiée en comparant la distribution du taux de triaxialité des contraintes dans la matrice de la CESR et sa valeur dans les deux motifs au cours de la sollicitation macroscopique. Le choix de l'étude des distributions de variables locales, telles que la déformation plastique et la triaxialité, est préféré à l'étude de valeurs moyennes globales afin de considérer de manière statistique leurs variabilités au sein du calcul par éléments finis. L'objectif est ici d'étudier la position des valeurs uniques de ces grandeurs obtenues avec les motifs du modèle d'homogénéisation. Les deux types de comparaisons locales visent à calibrer le modèle sur les deux parties du tenseur des contraintes : la plasticité, due au cisaillement et triaxialité, due à la déformation volumique.

Les trois comparaisons sont réalisées en optimisant les paramètres, jusqu'à la détermination d'un jeu de paramètres donnant les meilleurs résultats. Les paramètres déterminés sont consignés dans le *tableau 3-1*. Il est difficile de donner un réel sens physique, donc mesurable, aux fractions volumiques de fibres fixées dans les deux motifs. Il s'agit de paramètres d'un modèle à champs moyens qui a pour but de représenter de manière phénoménologique le comportement effectif d'une microstructure. Il est cependant à noter que ces valeurs pourraient être comparées à celles des modes identifiés lors de l'étude de la fraction volumique locale de la microstructure réelle (*chapitre 4, paragraphe 4.3.5*). En effet, les fractions de matrice seule (70% et 94%) peuvent être assimilées au mode principal de la distribution dont la valeur est nulle. Par analogie, la valeur de 5,5% de fibre dans le motif inverse (f_1), où les fibres confinent la matrice, peut être représentée par le pic à 5%. La quantité de fibres dans le motif direct, où les fibres sont confinées par la matrice (f_2) est de 30%, et peut être assimilée au pic de fraction volumique locale autour de 24%.

Paramètre	**Motif direct**		**Motif inverse**	
Proportion	55%	*(MT)*	45%	*(MT^{-1})*
Fraction volumique de fibre	30%	*(f_1)*	5,5%	*(f_2)*
Fraction volumique de matrice	70%	*(m_1)*	94,5%	*(m_2)*

Tableau 3-1 : Valeurs des paramètres du modèle donnant la meilleure corrélation entre la simulation numérique par éléments finis et le modèle à double-motif

Afin de calculer les écarts entre les modèles suivant le type de sollicitation, des valeurs d'études sont choisies à $^1/_6$, $^2/_6$, $^1/_2$, et au dernier incrément de la sollicitation. Ces comparaisons sont également faites pour une sollicitation en traction dans le sens transverse (soit l'axe *22*), dans la direction de cisaillement plan *12* (où *11* est l'axe des fibres et *22* un axe transverse) et dans la direction de cisaillement transverse *23* (où *22* et *33* sont les deux axes transversaux de la fibre). L'ensemble des variables comparées sont montrées pour la sollicitation en traction longitudinale. Pour les autres cas de sollicitation, seules les courbes de contrainte-déformation sont tracées, les distributions de la déformation plastique et du taux de triaxialité sont placées dans *l'annexe C*. Une synthèse de l'ensemble des résultats est proposée à la fin de cette section.

La comparaison entre le comportement macroscopique effectif moyen de la CESR et celui du modèle à double-motif est présentée par les courbes de contrainte-déformation dans l'axe des fibres (longitudinal, soit l'axe *11*) *figure 3-13 (A)*, et l'étude des distributions de la déformation plastique pour différentes valeurs en contrainte sont présentées sur la *figure 3-13 (B)*. Pour la même sollicitation, la comparaison de la distribution du taux de triaxialité de la matrice des modèles en champs moyens et dans la cellule en champs complets est présentée sur la *figure 3-14*.

Dans le sens des fibres, le modèle est capable de reproduire globalement le comportement effectif du matériau équivalent (*figure 3-13 (A)*). L'écart entre les éléments finis (FEM) et le modèle à double-motif (MF) est d'environ 9% à 3% de déformation totale moyenne, contre 4% pour le modèle de Lielens. Le comportement des fibres est exactement le même pour les deux méthodes de calcul puisqu'il est considéré réversible linéaire. Le comportement irréversible de la matrice n'est que partiellement représenté par les champs moyens. La différence entre les méthodes de modélisation en champs moyens et en champs complets vis-à-vis de la plasticité, abordée dans le paragraphe *7.1.2*, explique les écarts observables sur le seuil de plasticité de la matrice : l'hétérogénéité de plasticité ne peut pas être totalement prise en compte par les méthodes en champs moyens.

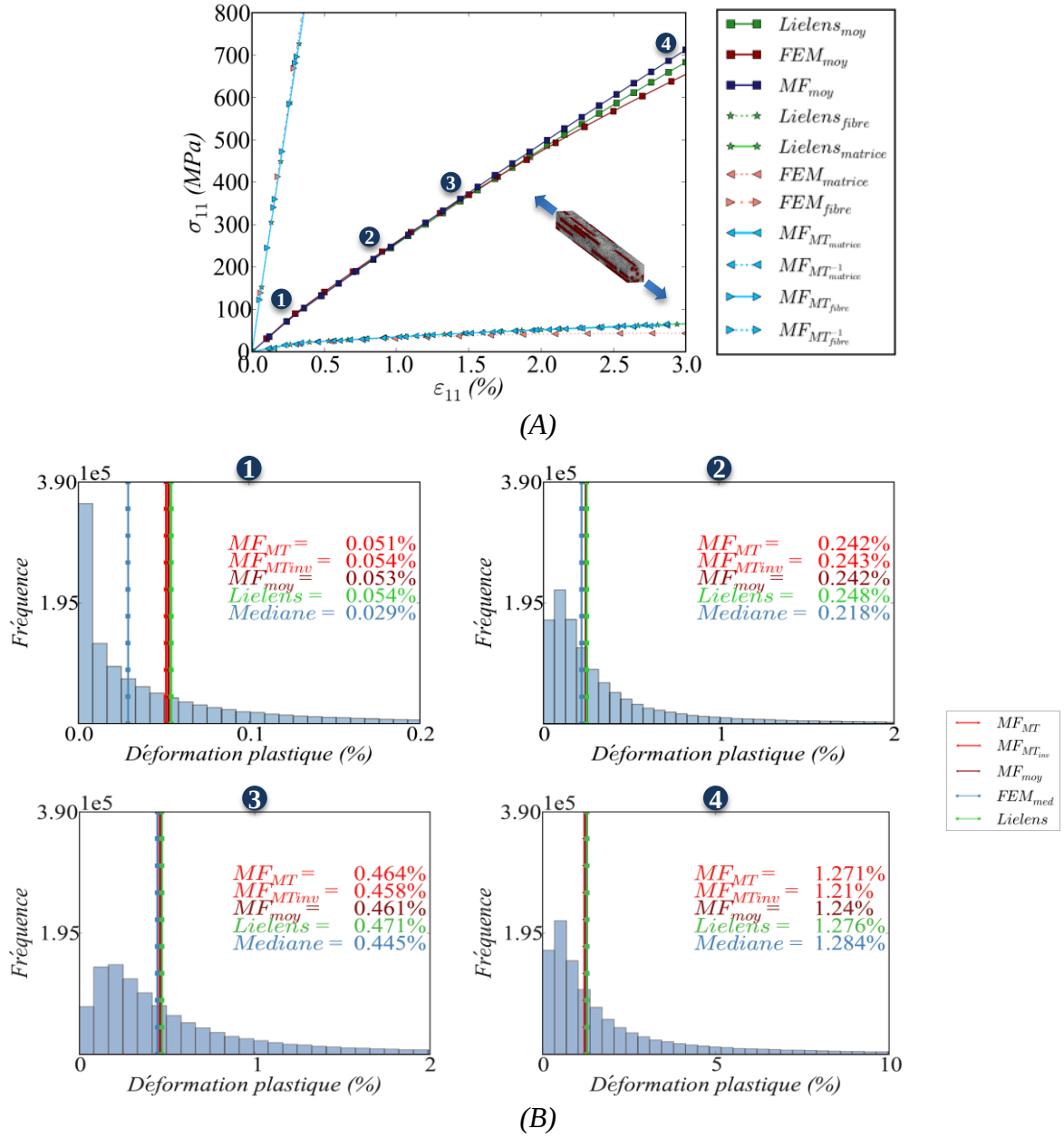
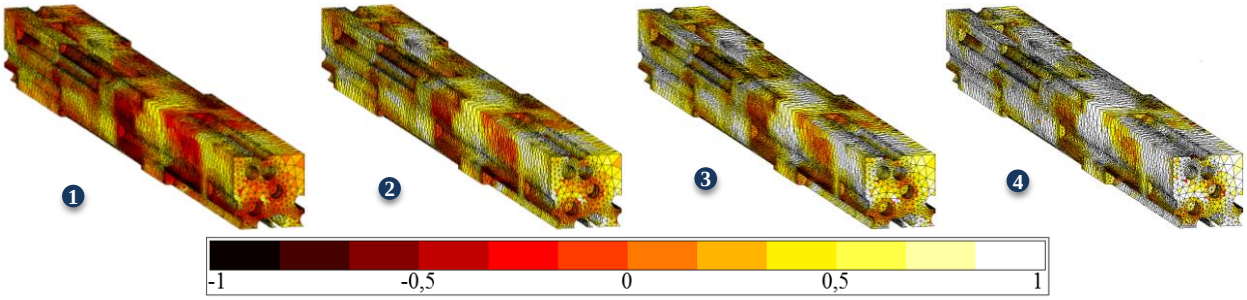


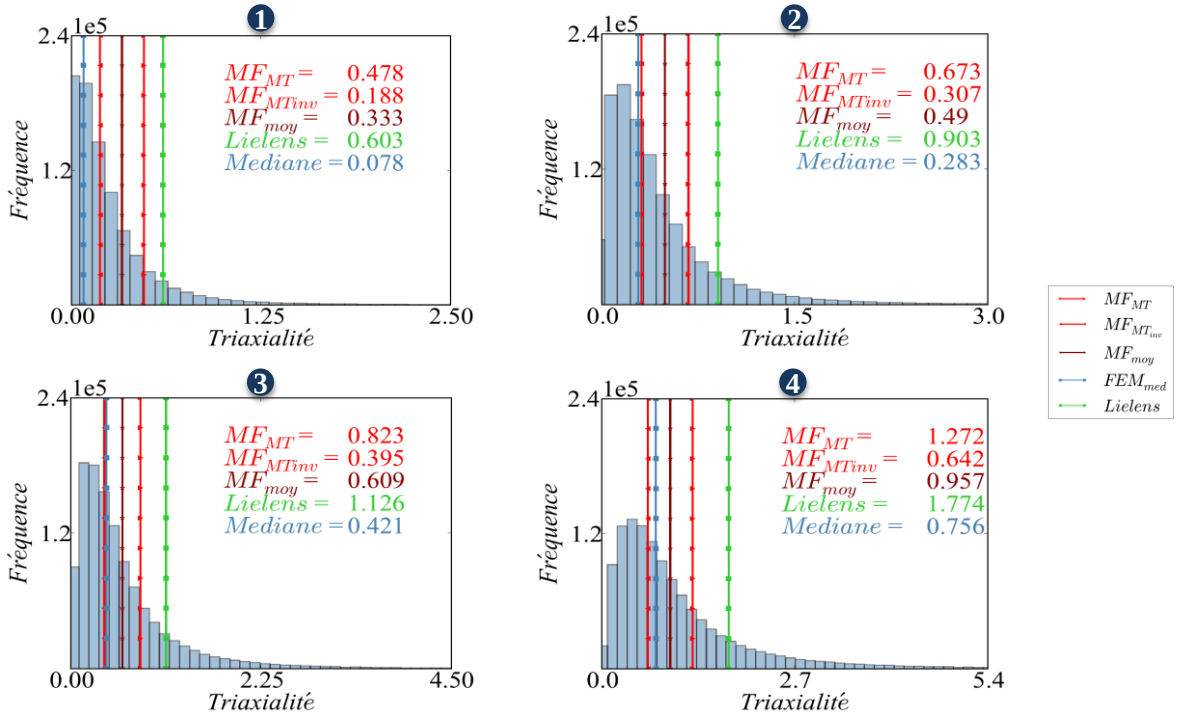
Figure 3-13 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens dans le sens des fibres (11) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

L'étude de la distribution de la déformation plastique dans la matrice montre que quel que soit le modèle d'homogénéisation utilisé, la déformation plastique médiane est légèrement surestimée au cours de l'essai (*figure 3-13 (B)*). Au niveau de déformation maximal simulé, l'écart avec les éléments finis est plus favorable au modèle de Lielens mais reste acceptable avec le modèle MF (*figure 3-13 (B) point 4)*. Dans ce cas de sollicitation, le modèle MF semble donc capter la majorité de la déformation plastique de la matrice lors de la sollicitation.

En traction longitudinale, le taux de triaxialité dans la CESR est présenté sur la *figure 3-14 (A)*. Sur cette figure, l'échelle est constante afin de montrer l'évolution de ce taux au cours de la sollicitation. La triaxialité des contraintes ayant pour but de donner une indication du niveau de confinement matriciel, les fibres n'apparaissent pas sur la figure. La *figure 3-14 (B)* présente la comparaison entre la distribution du taux de triaxialité dans la CESR (et sa valeur médiane), les valeurs obtenues avec le modèle à double-motif et celles obtenus avec le modèle de Lielens.



(A)



(B)

Figure 3-14 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes de la simulation numérique par éléments finis entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en traction dans le sens longitudinal (11) : (A) aperçu de la triaxialité sur la CESR pour les quatres valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité des contraintes dans la matrice

En début de sollicitation, la matrice révèle un taux de triaxialité hétérogène dont la valeur médiane est proche de *0*, soit quasiment le cas d'une sollicitation en cisaillement simple. Même si cette valeur n'est pas atteinte par les deux modèles en début de sollicitation, il est à noter que dans le motif inverse du modèle à double-motif, la matrice est peu sollicité puisque sont taux de trixialité est proche de *0* (*figure 3-14(B) point 1*). Le modèle à double-motif présente alors une triaxialité moyenne de *0,33*, ce qui correspond exactement à une sollicitation en traction uniaxiale d'un matériau homogène. Le modèle de Lielens traduit quant à lui un chargement quasi-biaxial, avec un taux de triaxialité de *0,66*. A ce niveau, le modèle ne traduit qu'une sollicitation en traction de la matrice et une faible influence des fibres. L'étude des trois autres points significatifs montre que le système à double-motif se positionne mieux que celui de Lielens. De plus, le motif inverse du modèle parvient à encadrer la valeur médiane (*figure 3-14(B)* point 3 et 4).

Les courbes de contrainte-déformation pour les autres cas de sollicitation sont tracées sur la *figure 3-15*, pour une traction transverse *(A)*, un cisaillement plan *(B)* et un cisaillement transverse *(C)*.

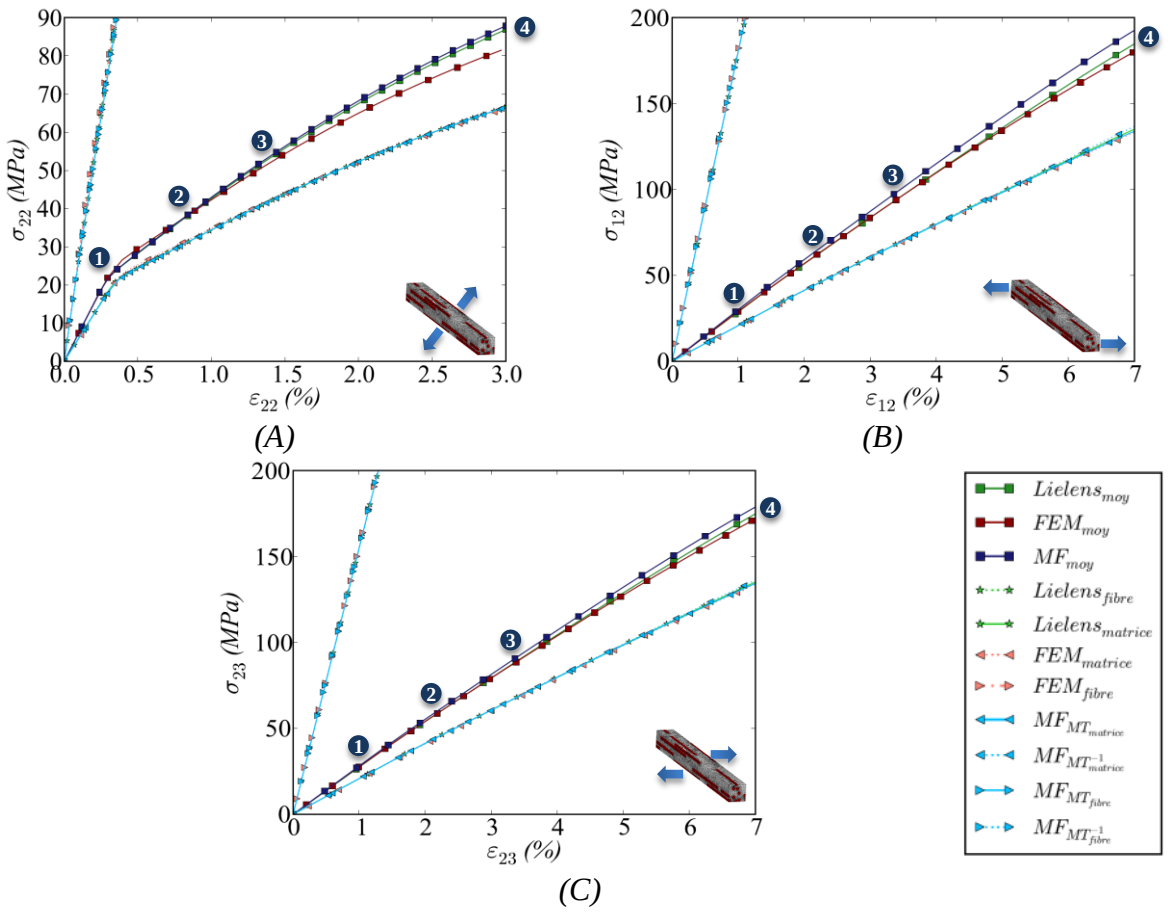


Figure 3-15 : Comparaison des courbes de contrainte déformation entre la simulation numérique par éléments finis sur la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens
A : En traction transverse (22)
B : En cisaillement plan (12)
C : En cisaillement transverse (23)

La comparaison des courbes de contrainte-déformation entre la CESR et les deux modèles d'homogénéisation traduit de bonnes prédictions du comportement macroscopique de la cellule, quel que soit le modèle. De plus, les écarts entre les courbes des deux modèles et celle du modèle éléments finis sont inférieurs à 7%. Une telle comparaison permet de montrer que le modèle à double-motif ne présente pas de réelle différence avec une solution de Lielens existante. Cela conforte l'approche sans toutefois la mettre en avant vis-à-vis d'un modèle de Lielens.

Pour les cas de sollicitations conventionnelles étudiés, une synthèse est proposée sur la *figure 3-16 (A)* pour les résultats de l'étude de la déformation plastique et sur la *figure 3-16 (B)* pour le taux de triaxialité. Ils sont représentés pour chaque type de sollicitation, en calculant la moyenne de l'écart entre le modèle d'homogénéisation et la médiane de la distribution sur les quatre points étudiés. La barre d'erreur correspond à l'écart moyen entre les quatre valeurs et est calculée avec l'expression *(3.51)*.

$$Ecart\ moyen = \frac{1}{n}\sum_{n=1}^{4}|x - \bar{x}| \qquad (3.51)$$

Où *n* correspond au nombre de point étudié, $\bar{x}$ est la moyenne des écarts entre le modèle et la médiane et *x* est l'écart entre le modèle et la médiane.

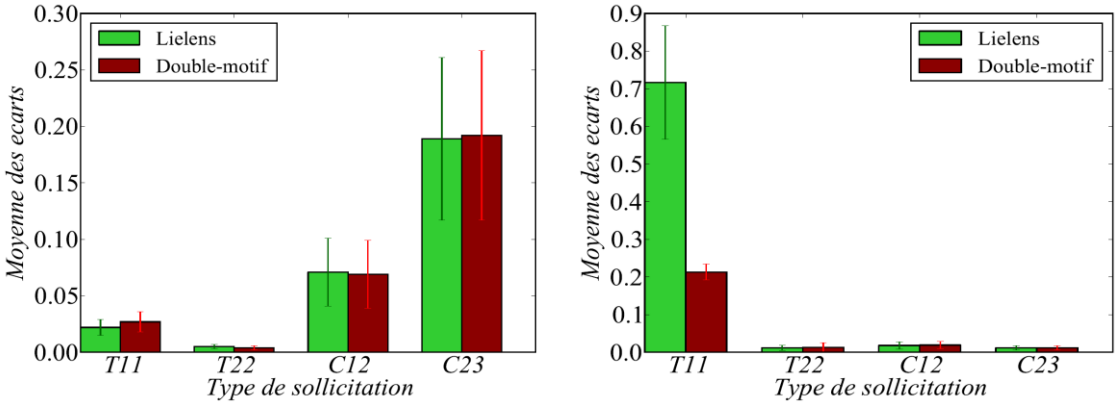


Figure 3-16 : Tracé de la moyenne des écarts et de l'écart moyen entre les modèles d'homogénéisation (MF et Lielens) et la médiane de la CESR, sur les quatre points d'étude et pour chaque type de sollicitation
A : Sur les valeurs de la déformation plastique
B : Sur les valeurs du taux de triaxialité

Le modèle à double-motif est proche de celui obtenu avec un modèle de Lielens et est capable de reproduire de manière globale le comportement effectif de la CESR, avec un écart systématiquement inférieur à 10%, pour un niveau de déformation macroscopique moyen de 3%. Comme cela l'est montré dans la suite du manuscrit, les essais sur le matériau composite n'atteignent cependant jamais de telles valeurs en déformation. Il est donc raisonnable de valider la calibration du modèle sur le comportement macroscopique moyen. Un modèle en champs moyens est, par définition, un modèle qui représente globalement un comportement homogène équivalent [*Böhm*, 2017]. L'étude de grandeurs telles que la déformation plastique et le taux de triaxialité des contraintes présentent, dans la majorité des cas, des corrélations avec la CESR d'un point de vue statistique.

L'étude du taux de triaxialité en traction longitudinale montre le principal avantage du modèle : les paramètres du système à double-motifs permettent de mieux prendre en compte l'effet de sollicitations locales complexes qu'un modèle de Lielens. Ce point montre qu'avec un modèle à motifs représentatifs, il est possible d'étudier des grandeurs locales.

7.2.3. Comparaison du modèle sous sollicitations complexes

Le modèle à double-motif est la première brique du modèle d'homogénéisation, qui, une fois intégrée dans la démarche globale sous la forme de pseudos-grains, va être sollicitée de manière non conventionnelle. Afin de valider la possibilité de l'intégrer dans la démarche, il est nécessaire d'étudier sa réponse macroscopique effective dans le cas de chargement plus complexes, tels que des chargements biaxiaux. Bien que ce type d'essais numériques soit simple dans sa mise en données, son dépouillement n'est pas trivial. A la différence d'un chargement uniaxial, il n'existe pas dans ce cas de contrainte équivalente (ou de déformation équivalente) permettant de représenter le comportement effectif suivant deux axes de sollicitation. La méthode la plus simple consiste à les comparer composantes à composantes, comme a pu le faire Feyel dans ses travaux [*Feyel et al.*, 1997].

La réponse du modèle en champs moyens est étudiée dans trois cas de sollicitations biaxiales en traction : les directions longitudinales et transverses simultanées (soit les axes *11* et *22*), les directions transverses simultanées (soit les axes *22* et *33*) et les directions en cisaillement plan et transverse simultanées (soit les axes *12* et *23*). Les essais numériques sont pilotés en déformation et les chargements sont équiaxiaux. D'après les observations des travaux sur les sollicitations conventionnelles, la réponse effective du modèle en champs moyens est ici comparée à la réponse moyenne du comportement de la CESR en contrainte-déformation. En effet, les courbes de comportement résultantes de ces cas de sollicitation semblent traduire la bonne prise en compte de la triaxialité des contraintes dans la matrice au cours de l'essai.

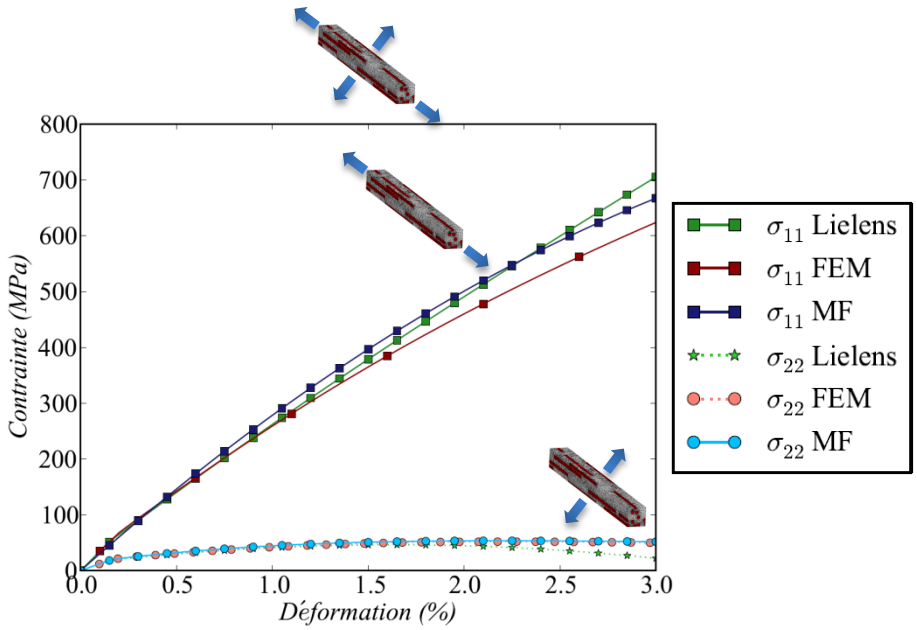


Figure 3-17 : Comparaison de la réponse macroscopique en contrainte-déformation entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif sur la simulation d'un essai biaxial longitudinal-transverse

Pour les deux méthodes de calcul, l'étude des courbes macroscopique est suffisante afin de statuer sur l'intérêt du modèle d'homogénéisation à double-motif. Elles sont tracées sur la *figure 3-17* pour simulation biaxiale longitudinale-transverse, sur la *figure 3-18* pour la traction biaxiale dans les directions transverse et sur la *figure 3-19* pour la traction biaxiale dans les directions de cisaillement.

Comme pour une sollicitation uniaxiale dans la direction des fibres (*11*), les deux modèles d'homogénéisation surestiment la contrainte effective moyenne de la CESR à 3% de déformation totale (*figure 3-17*). Cependant, la sollicitation biaxiale induit une non-linéarité apparente plus marquée sur le modèle à double-motif. Ce phénomène est la confirmation que la triaxialité des contraintes dans la matrice est mieux prise en compte par le modèle à double-motif. Le modèle de Lielens ne montre ici que peu de non-linéarité macroscopique. De plus, il présente une perte de rigidité importante de la matrice en fin de sollicitation, sa valeur finale en contrainte étant de 22 MPa, contre 50 MPa et 52MPa pour la CESR et le modèle à double-motif respectivement.

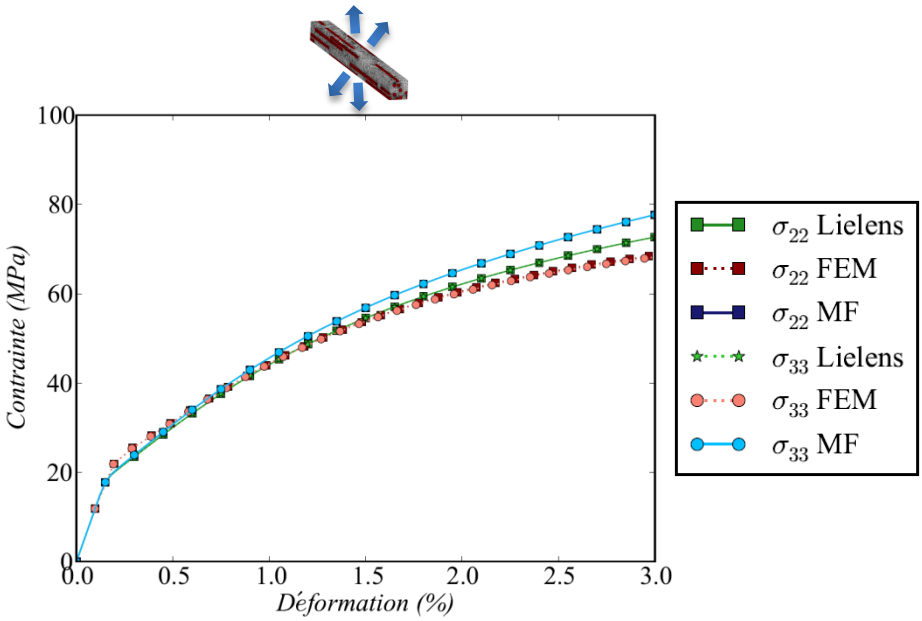


Figure 3-18 : Comparaison de la réponse macroscopique en contrainte-déformation entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif sur la simulation d'un essai biaxial dans les directions transverses

En cisaillement biaxial (*22* et *33* simultanément), les réponses sont identiques pour les composantes *22* et *33* d'une même méthode de calcul, ce qui traduit l'isotropie transverse de la CESR et des modèles en champs moyens (*figure 3-18*). Les seuils de non-linéarité du comportement effectif sont les mêmes pour les deux modèles mais sont 9% inférieurs à celui du comportement effectif de la CESR. Le modèle de Lielens donne une réponse plus proche de celle de la CESR dans ce cas de sollicitation avec un écart relatif de 6% par rapport au niveau de contrainte atteint par la CESR à 3% de déformation moyenne totale (contre 13% pour le modèle à double-motif).

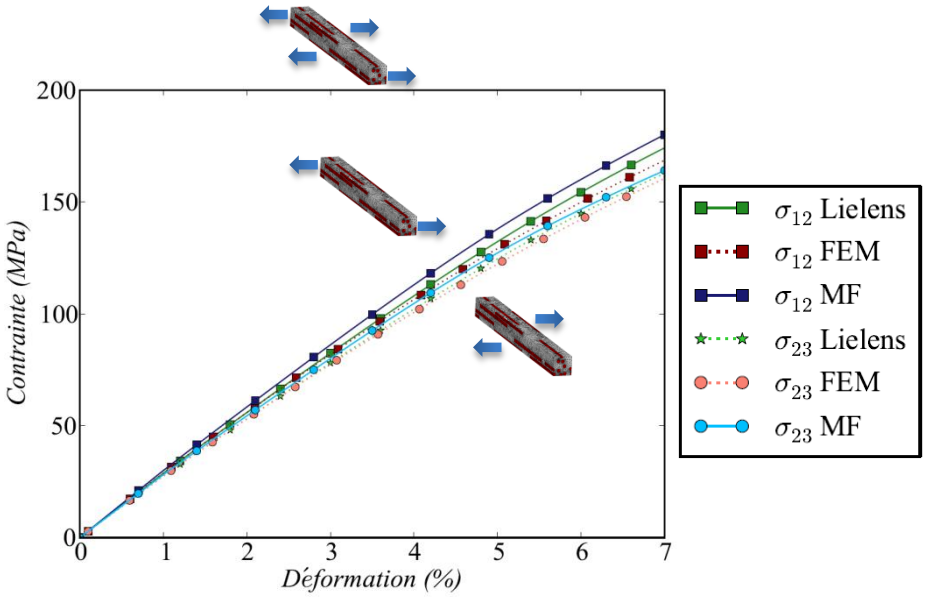


Figure 3-19 : Comparaison de la réponse macroscopique en contrainte-déformation entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif sur la simulation d'un essai biaxial dans les directions de cisaillement 12 et 23

La simulation numérique de l'essai biaxial en cisaillement transverse présente un comportement par composante proche de celui qui est obtenu pour les mêmes sollicitations uniaxiales séparées (*figure 3-19*). Les écarts observables entre les deux modèles sont par conséquent du même ordre que ceux observés sur la *figure 3-15 (A)* pour le cisaillement plan et *(B)* pour le cisaillement transverse : à 7% de déformation macroscopique les écarts entre la CESR et le modèle à double-motif sont respectivement de 7% et 3%.

Le modèle à double-motif semble répondre aux sollicitations biaxiales proportionnelles avec un écart relatif maximal de 13% (pour l'essai biaxial transverse). Les comportements sous les deux autres types de sollicitations biaxiales simulées sont globalement reproduits avec le modèle. Le modèle à double-motif est proche de celui de Lielens et montre une meilleure corrélation aux éléments finis dans le cas de la traction biaxiale longitudinale-transverse. Il est également à noter que les niveaux de déformations simulés dans ces essais ne seront pas atteints une fois le modèle intégré à l'échelle supérieure, les simulations numériques présentées dans les deux derniers paragraphes constituent donc des cas extrêmes. La première brique que constitue le modèle à double-motif dans la démarche d'homogénéisation est identifiée.

7.2.4. Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif

Avant de réaliser le changement d'échelle permettant la simulation du comportement du composite, un dernier point peut être abordé : quel est l'effet de la microstructure sur le modèle à double-motif ? En d'autres termes, il s'agit de montrer l'intérêt du modèle à décrire non-seulement le comportement macroscopique d'une cellule, mais à également prendre en compte une morphologie spécifique de cellule (des positions de fibres différentes). Ce dernier point revient finalement à montrer que grâce à ses paramètres intrinsèques, le système à double-motif est capable de capter des valeurs spécifiques de la distribution de grandeurs locales, telles que la déformation plastique ou la triaxialité des contraintes, alors qu'un modèle de Lielens est moins performant. Bien entendu, cette démonstration n'est valable que si les paramètres d'entrée du problème restent inchangés : la fraction volumique et le comportement des constituants.

Afin de mener cette comparaison, une nouvelle cellule périodique est générée. L'arrangement des fibres dans cette cellule est fixé et se rapproche d'un arrangement hexagonal que l'on peut retrouver dans les travaux en 2D [*Hashin & Rosen*, 1964]. Comme il n'existe pas d'équivalent à ce type d'arrangement dans le cas des fibres courtes, c'est-à-dire dans un cas tridimensionnel, celui-ci est respecté dans le plan diamétral de la fibre. Dans le plan longitudinal, la distance entre les fibres est équivalente à la distance au centre des fibres dans le plan diamétral. Outre cette spécificité morphologique, la démarche de génération de la cellule est la même que celle présentée dans le cinquième chapitre (*paragraphe 5.1*) : son maillage est adaptatif et les conditions aux limites spécifiques pour les maillages non-coïncidents sont utilisées. La *figure 3-20* donne un aperçu de cette cellule à l'arrangement spécifique.

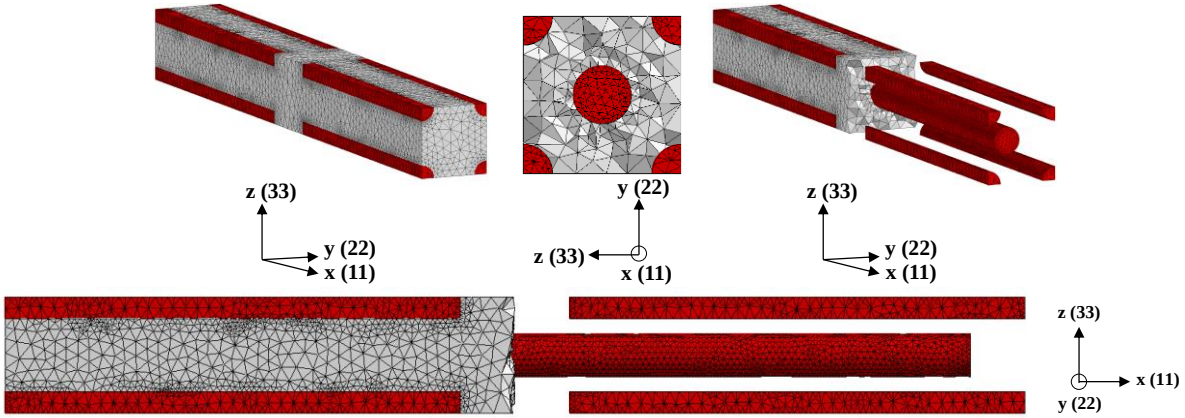
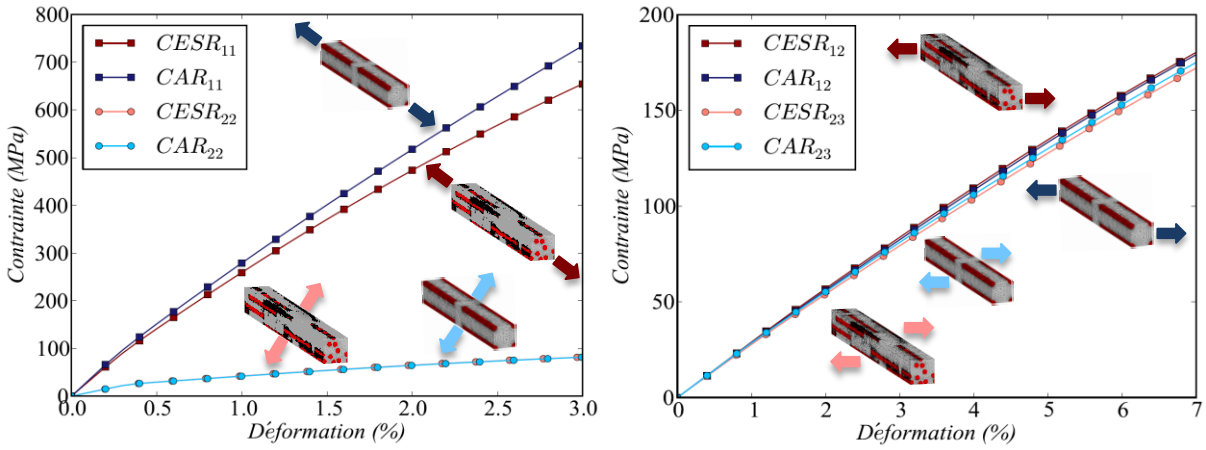


Figure 3-20 : Présentation de la cellule à l'arrangement hexagonal dans le plan diamétral et aligné dans le plan longitudinal

Les paramètres du modèle à double-motif sont réidentifiés pour corréler au comportement macroscopique et aux distributions de grandeurs locales dans la cellule à l'arrangement régulier. Celle-ci ayant la même fraction volumique de fibres, la réponse du modèle de Lielens est équivalente à une cellule à l'arrangement aléatoire. Tel qu'il est proposé, aucun paramètre ne peut être modifié dans ce modèle, ce qui en fait un modèle plus simple à mettre en œuvre mais peut s'avérer insuffisant afin de prédire l'évolution de grandeurs locales responsables du comportement macroscopique. Les courbes de contrainte-déformation de la CESR et de la cellule à l'arrangement régulier (CAR) en traction longitudinale, transverse et dans les deux plans de cisaillement sont tracées sur la *figure 3-21*.



(A) *(B)*

Figure 3-21 : Comparaison de la réponse macroscopique en contrainte-déformation entre la CESR et une cellule à la morphologie arrangée sur la simulation d'essais de traction uniaxiale
(A) : Longitudinale (11) et transverse (22)
(B) : Cisaillement plan (12) et cisaillement transverse (23)

Bien que les deux cellules testées contiennent la même fraction volumique de fibres, leur morphologie respective modifie cependant leur comportement macroscopique. L'écart relatif entre la pente de leur domaine réversible linéaire en traction longitudinale est de 8% à 65 MPa et est nul dans le sens transverse. Cet écart est amplifié dans le domaine irréversible puisque la différence en contrainte entre les deux calculs est de 12% à 3% de déformation moyenne macroscopique. Ces observations se retrouvent, dans une moindre mesure, en cisaillement plan et transverse avec des écarts respectifs de 0,6 et 1,6%.

L'étude comparative n'est menée que dans le cas de sollicitations uniaxiales : traction longitudinale, transverse, cisaillement plan (*12*) et cisaillement transverse (*23*). Les grandeurs comparées restent les mêmes que celles étudiées dans le paragraphe *7.2.2* : comportement macroscopique (courbes de contrainte-déformation), distribution de la déformation plastique et du taux de triaxialité dans la matrice. De même que dans le cas d'une cellule à la morphologie de fibre aléatoire, l'ensemble de ces résultats sont présentés pour la sollicitation en traction longitudinale. Pour les autres types de sollicitations, seules les courbes de contrainte-déformation sont présentées dans cette section, les distributions de déformation plastique et de triaxialité sont placées dans *l'annexe C* du manuscrit.

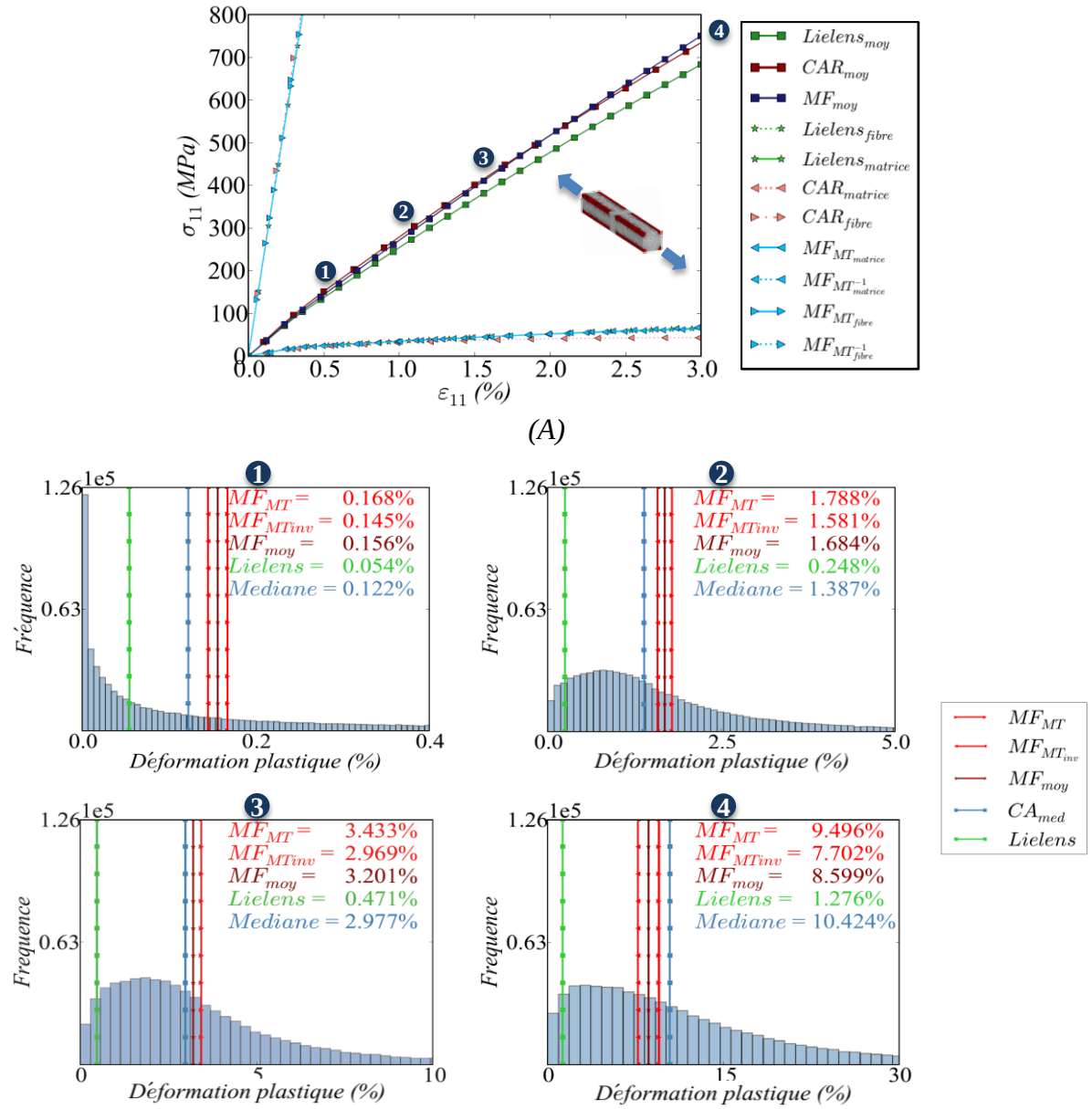


Figure 3-22 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la cellule à l'arrangement régulier des fibres (CAR), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens dans le sens des fibres (11) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

La *figure 3-22 (A)* présente une meilleure corrélation du modèle à double-motif sur le comportement macroscopique effectif de la cellule en traction longitudinale. Cette observation se confirme dans l'étude de la distribution de la déformation plastique dans la matrice *figure 3-22 (B)*. En effet, alors que le modèle de Lielens sousestime systématiquement la valeur médiane de la distribution d'au moins 50%, le modèle à double-motif la surestime tout d'abord avec un écart relatif de 6%. Au cours de la sollicitation, le modèle présente une valeur moyenne plus « mobile » que celle du modèle de Lielens, il atteint par conséquent la valeur médiane au troisième point d'observation et tend à la sousestimer pour un niveau de sollicitation élevé.

L'étude du taux de triaxialité des contraintes dans la matrice pour les cas de chargement simulés montre également l'intérêt de l'utilisation du modèle à double-motif afin de capter le confinement matriciel dans un cas plus physique, comme la simulation par éléments finis. Pour cette étude, seule la matrice est représentée sur la cellule par éléments finis. Il est à noter qu'afin d'afficher les valeurs de triaxialité dans les modèles et méthodes comparées, l'échelle des histogrammes de distribution ont été adaptés.

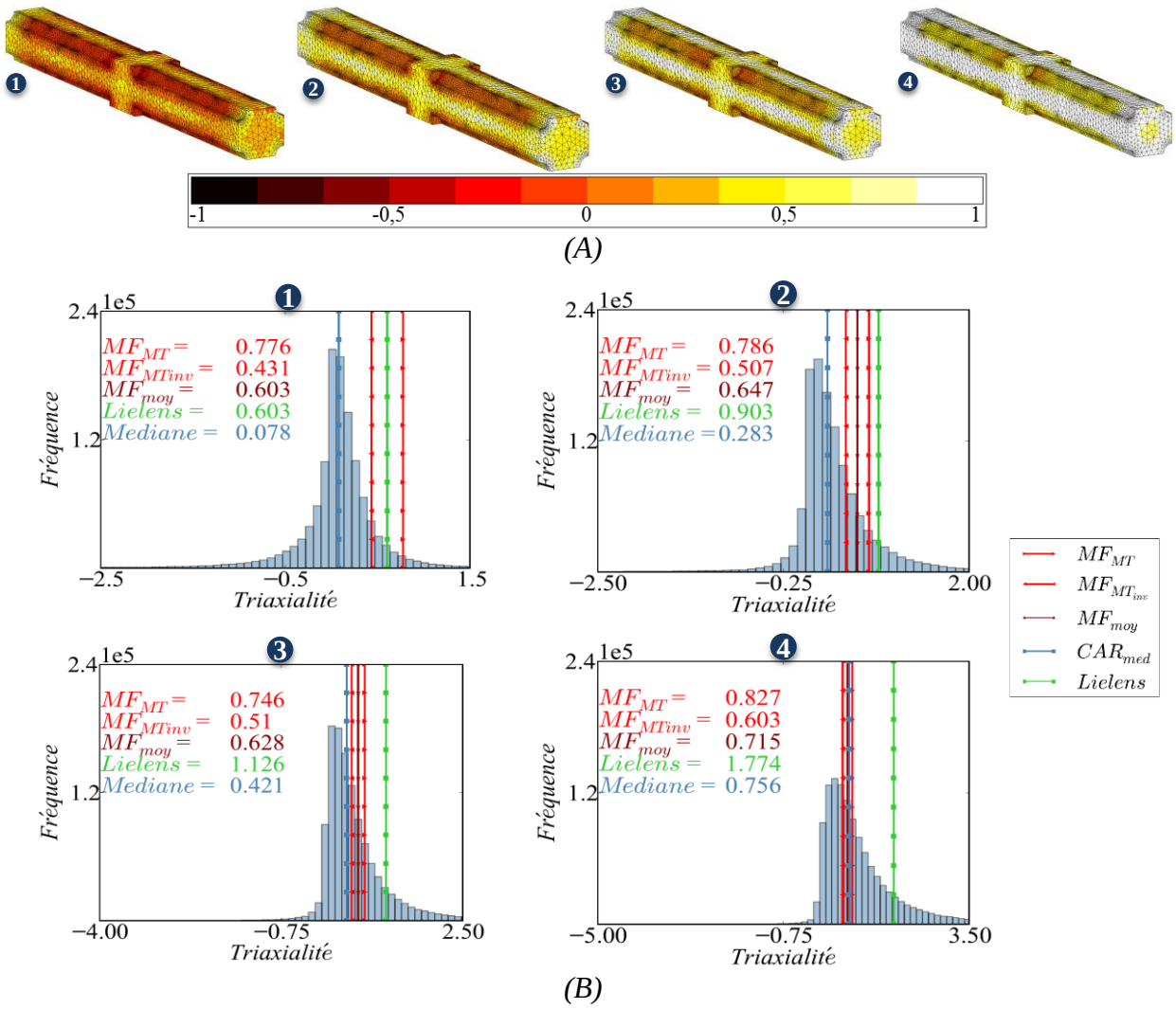


Figure 3-23 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes entre la simulation numérique par éléments finis de la cellule à l'arrangement régulier des fibres (CAR), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en traction dans le sens longitudinal (11) : (A) aperçu de la triaxialité dans la matrice de la CAR pour les quatres valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité des contraintes dans la matrice

Dans l'étude de la triaxialité des contraintes, c'est la sollicitation en traction longitudinale qui présente le plus d'intérêt pour le modèle à double-motif. En effet, bien que le modèle surestime la valeur médiane en début de sollicitation, celui-ci, présentant déjà une meilleure « mobilité » dans la corrélation à la déformation plastique médiane, parvient à capter cette valeur au cours et à la fin de la sollicitation *figure 3-23 (B)*. Dans ce cas de sollicitation, le modèle de Lielens est insuffisant afin de prédire la tendance et l'évolution de la triaxialité des contraintes dans la matrice.

Les courbes de contrainte-déformation pour les autres cas de sollicitation sont tracées sur la *figure 3-24*, pour une traction transverse *(A)*, un cisaillement plan *(B)* et un cisaillement transverse *(C)*.

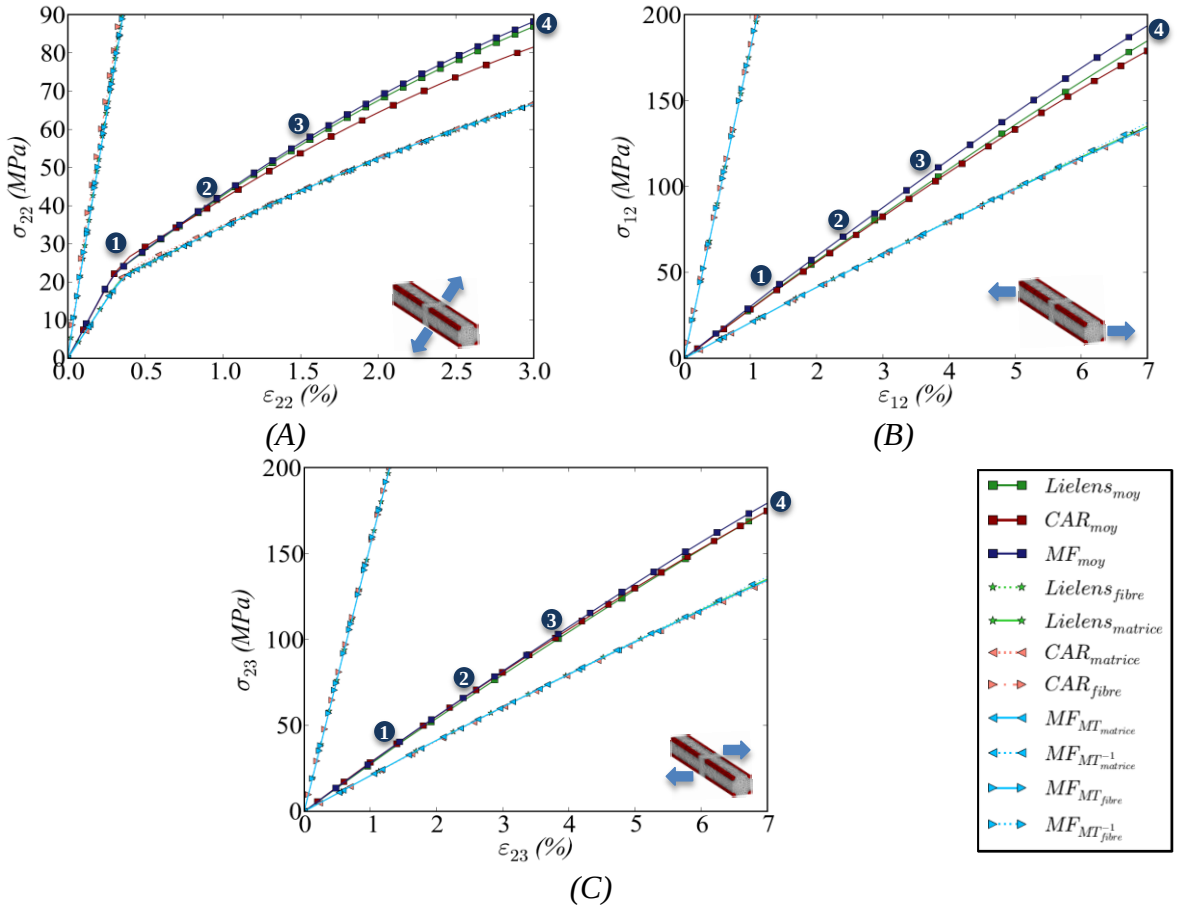


Figure 3-24 : Comparaison des courbes de contrainte déformation entre la simulation numérique par éléments finis sur la CAR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens
A : En traction transverse (22)
B : En cisaillement plan (12)
C : En cisaillement transverse (23)

De même que pour le cas de la cellule à l'arrangement aléatoire de fibres, les résultats sont tracés sur la *figure 3-25 (A)* pour l'étude de la déformation plastique et sur la *figure 3-25 (B)* pour le taux de triaxialité. Ils sont représentés pour chaque type de sollicitation, en calculant la moyenne de l'écart entre le modèle d'homogénéisation et la médiane de la distribution sur les quatre points étudiés. La barre d'erreur correspond à l'écart moyen entre les quatre valeurs et est calculée avec l'expression *(3.51)*.

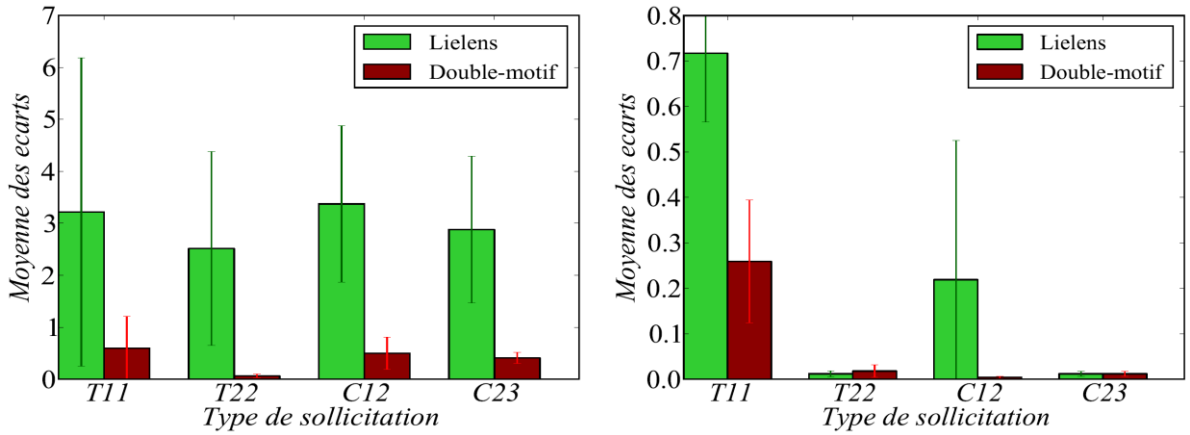


Figure 3-25 : Tracé de la moyenne des écarts et de l'écart moyen entre les modèles d'homogénéisation (MF et Lielens) et la médiane de la CAR, sur les quatre points d'étude et pour chaque type de sollicitation
A : Sur les valeurs de la déformation plastique
B : Sur les valeurs du taux de triaxialité

L'étude du comportement macroscopique effectif, de la distribution de la déformation plastique et de la triaxialité des contraintes dans la matrice, dans différents cas de chargement, montre la capacité du modèle à corréler les calculs par éléments finis sur le plan global. Grâce à ses paramètres supplémentaires vis-à-vis d'un modèle de Lielens, une cellule élémentaire peut être mieux décrite d'un point de vue local (*figure 3-25)*, tant en termes de déformation plastique que de triaxialité et ce, quelle que soit sa morphologie. Le *tableau 3-2* donne la synthèse de la comparaison du modèle à double-motif par rapport aux calculs par éléments finis. Seuls les cas qui montrent les avantages du modèle sont présentés dans ce tableau, les autres cas étant très proches du modèle de Lielens. Les résultats sont donnés en pourcentage d'écart moyen par rapport au modèle de Lielens.

Ces résultats montrent que le modèle à double-motif est meilleur en termes de prédiction du comportement local. En effet, pour l'ensemble des calculs, le taux de triaxialité médian dans les cellules est capté par le modèle avec moins d'écart que le modèle de Lielens. Une bonne prise en compte du comportement local amène à mieux prédire le comportement macroscopique lorsque la cellule est sollicitée de manière complexe. De plus, l'étude sur une cellule à l'arrangement spécifique de fibres montre que le modèle à double-motif est capable de prendre en compte les variabilités morphologiques traduites par les éléments finis. Cette prise en compte est à la fois visible sur le comportement macroscopique et sur les variables locales étudiées.

A ce stade de l'étude, la brique de base que constitue le modèle à double-motif calibré peut être utilisée afin de simuler le comportement macroscopique réversible linaire et irréversible du composite. Dans ce qui suit, cette brique est appelé pseudo-grain élémentaire (PGE).

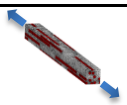
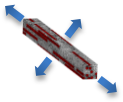
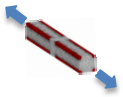
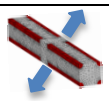
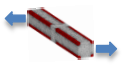
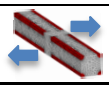
Morphologie	Sollicitation		Comparaison	Résultats
Aléatoire	Traction longitudinale		Taux de triaxialité	50 % plus proche que Lielens
	Traction biaxiale 11-22		Courbe contrainte-déformation	Non-linéarité longitudinale apparente Rigidité transverse du modèle de Lielens (50% de différence avec la CESR)
Spécifique	Traction longitudinale		Déformation plastique Taux de triaxialité	27 % plus proche que Lielens 46 % plus proche que Lielens
	Traction transverse		Déformation plastique	24 % plus proche que Lielens
	Cisaillement plan		Déformation plastique Taux de triaxialité	26 % plus proche que Lielens 22 % plus proche que Lielens
	Cisaillement transverse		Déformation plastique	26 % plus proche que Lielens

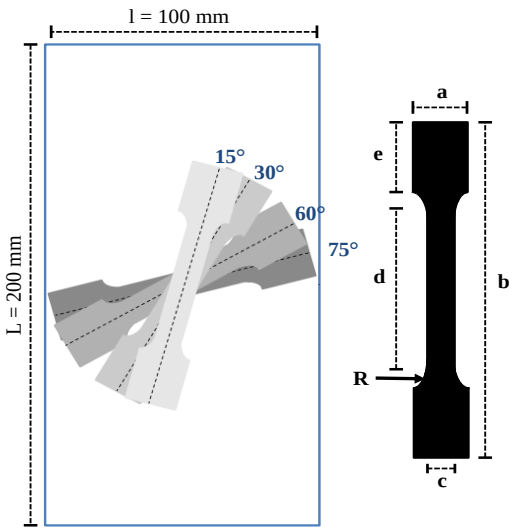
Tableau 3-2 : Synthèse de la calibration du modèle à double-motif

7.3. Homogénéisation du comportement macroscopique réversible linéaire

L'objectif de la démarche est de constituer un assemblage de pseudo-grains élémentaires orientés, dont l'homogénéisation du comportement effectif permet de représenter celui du composite. Cet assemblage contient l'orientation réelle et la distribution de longueurs des fibres. Le composite ainsi constitué est finalement un assemblage de pseudo-grains d'orientations et de facteurs de forme uniques homogénéisés à l'aide d'un modèle de Voigt. Afin de mener cette démarche, une comparaison avec la procédure d'homogénéisation en deux étapes disponible sous Digimat-MF est réalisée. Le but de cette comparaison est de situer l'approche proposée dans ces travaux de thèse vis-à-vis d'une méthode éprouvée. En effet, la procédure conventionnelle en deux étapes ayant déjà fait ses preuves pour la corrélation du comportement expérimental d'un composite élastoplastique [*Doghri & Ouaar*, 2003], il s'agit de vérifier si la démarche proposée reste cohérente avec ces résultats.

Des essais de traction supplémentaires sont menés sur le composite et viennent compléter ceux présentés dans la première partie du manuscrit (*paragraphe 3.1.1*) pour des angles intermédiaires : *15°*, *30°*, *60°* et *75°*. Cinq éprouvettes de chaque orientation ont été prélevées dans les plaques de matériau pour assurer la représentativité des résultats. Les dimensions des éprouvettes sont des homothéties des dimensions préconisées par la norme ASTM D638 [*ASTM International*, 2008]. La *figure 3-26* donne les dimensions des éprouvettes et montre les zones de prélèvement dans les plaques du matériau. Les essais mécaniques sont réalisés sur une machine électromécanique Instron 5982.

L'instrumentation utilisée pour tracer les courbes de contrainte-déformation est une cellule de charge de 100 kN. Pour les essais de traction, des jauges de déformation Kyowa (KFG-10-120-C1-11) sont utilisées.



Dimensions (mm)	
a	13,3
b	100
c	6,7
d	40
e	20
R	60°

Figure 3-26 : Dimensions des éprouvettes de traction à 15°, 30°, 60° et 75° par rapport au sens d'injection des fibres et illustration de leur prélèvement dans les plaques de matériau

Les courbes de contrainte-déformation moyennes de ces essais et des essais à 0° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres sont tracées sur la *figure 3-27*. Ces courbes sont confidentielles et normalisées par rapport à la contrainte maximale mesurée sur l'essai à 0°.

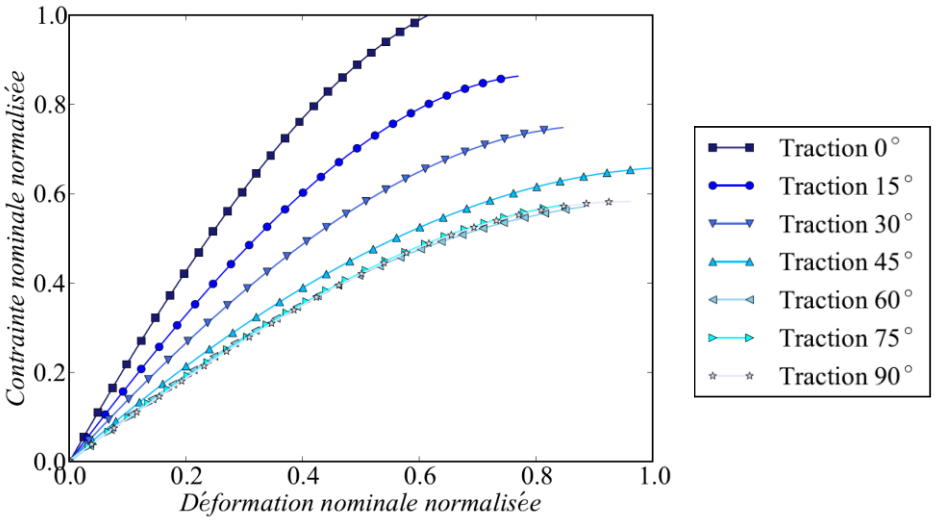


Figure 3-27 : Courbes de contrainte-déformation moyennes normalisées des essais de traction uniaxiale normée ASTM D638 pour des angles de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres

Dans un premier temps, seul le comportement réversible linéaire du composite est simulé. Les mêmes essais de traction sont simulés sous Digimat-MF en reprenant la démarche d'homogénéisation en deux étapes utilisée pour l'identification inverse des fibres (*chapitre 3, paragraphe 3.2*). Afin de représenter le comportement réversible linéaire suivant les angles testés, un diagramme polaire des valeurs des modules de réversibilité linéaires mesurés et simulé sous Digimat-MF pour chaque angle est proposé et tracé sur la *figure 3-28*. L'enveloppe tracée sur cette figure correspond aux essais expérimentaux.

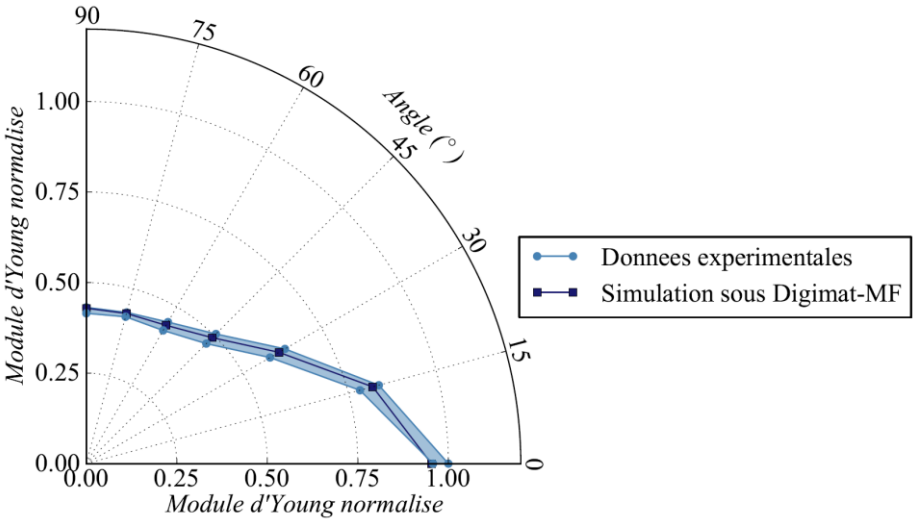


Figure 3-28 : Représentation polaire des modules de réversibilité expérimentaux normalisés du composite testé en traction uniaxiale ASTM D638 et de la simulation en champs moyens sous Digimat-MF, pour des angles de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres

La *figure 3-28* montre l'anisotropie du matériau composite de l'étude lorsqu'il est sollicité en traction uniaxiale : le module transverse est environ 40% inférieur au module longitudinal. Les données présentées vont dans le sens des travaux réalisés sur le sujet [*Takao et al.*, 1982], [*Mortazavian & Fatemi*, 2015]. Le module à 45° par rapport au sens d'injection est, à température ambiante, légèrement supérieur à celui à 90°. La simulation numérique à l'aide de Digimat-MF présente une bonne corrélation avec les essais de traction sur le composite, puisqu'elle se situe systématiquement dans le faisceau des données expérimentales. La représentation polaire des modules est conservée dans la suite de la démarche afin de vérifier la pertinence de la démarche d'homogénéisation proposée vis-à-vis de l'existant (Digimat-MF).

7.3.1. Intégration de l'orientation des fibres courtes

L'intégration de l'orientation des fibres dans le modèle d'homogénéisation permet de s'affranchir de l'utilisation des tenseurs d'orientation et d'intégrer des données réelles mesurées. Le gradient d'orientation des fibres dans l'épaisseur du matériau influe directement sur son comportement effectif [*Bakir & Hashem*, 2013], l'objectif de la démarche est d'apporter plus de physique, puisque ces données sont directement issues de la tomographie RX. L'objectif étant toujours de conserver une bonne corrélation avec la démarche conventionnelle en deux étapes.

De manière pragmatique, l'épaisseur du matériau est discrétisée en neufs couches. Ce choix permet de conserver les orientations préférentielles des fibres dans chacune des couches. Dans le modèle, l'orientation des fibres est donnée par les angles d'Euler ϕ et θ, définis dans le quatrième chapitre (*4.1.2*) et mesurés dans la microstructure. Près de 240000 données sont donc disponibles. La *figure 3-29* montre la discrétisation du matériau dans son épaisseur selon les couches d'orientation considérées, ainsi que la distribution des angles ϕ et θ dans chacune des couches.

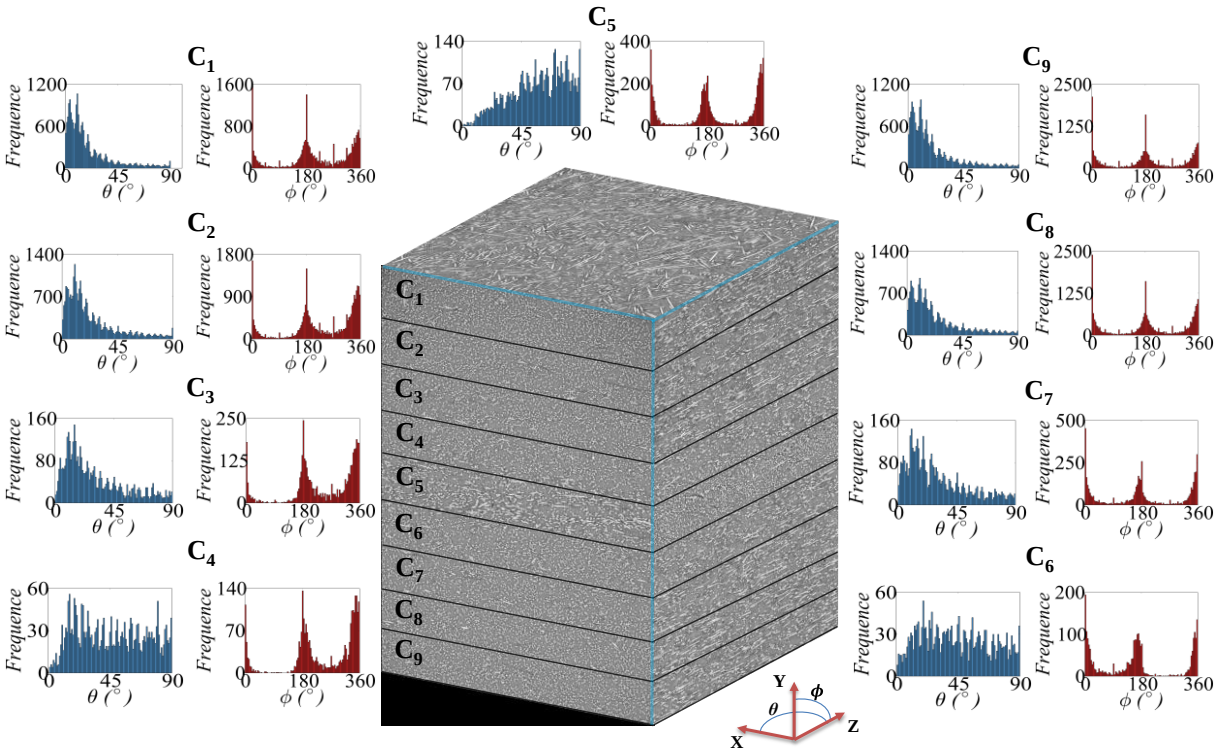


Figure 3-29 : Représentation des couches numériques dans l'épaisseur du matériau et des distributions de ϕ et θ dans chacune des couches

Sur la *figure 3-29*, les couches en vis-à-vis sont les couches symétriques par rapport à la couche de cœur. Les couches C_1 et C_9 sont les couches de peau limites, dans lesquelles la distribution de l'angle θ suit une orientation préférentielle dans l'axe d'injection des fibres (X). Plus la couche étudiée est proche du centre du matériau, plus la distribution de θ tend vers une valeur de $90°$, soit la direction transverse au sens d'injection des fibres (la couche de cœur est C_5). Les distributions d'orientation des fibres dans les couples de couches à droite et à gauche de la figure sont comparables : l'orientation des fibres est symétrique entre le cœur et la peau du matériau, dans les deux directions.

De façon pratique, la mise en données d'un calcul prenant en compte l'orientation des fibres consiste à tirer aléatoirement un nombre N d'orientation distribuée dans chaque couche. Chaque orientation représente un grain du matériau unidirectionnel, soit un système à double-motif calibré dans le paragraphe *7.2.2*. L'ensemble des couches est homogénéisé avec un modèle de Voigt. Le comportement homogène équivalent du matériau composite peut ainsi être simulé. Le matériau effectif est isotrope transverse. Les principaux paramètres qui définissent son comportement réversible linéaires sont : les modules de réversibilité E_{11} et E_{22}, les coefficients de Poisson ν_{12}, ν_{23} et les modules de cisaillement G_{12}, et G_{23} [*Berthelot*, 2005].

Le modèle étant prévu pour un enrichissement local d'un calcul de structure, il s'inscrit naturellement dans une démarche intégrant des enjeux scientifiques et industriels. De ce fait, l'intégration de la totalité de l'orientation des fibres pose nécessairement un problème : le modèle devient trop lourd à mettre en œuvre, tant du point de vue de sa mise en données que de son coût de calcul. Il est donc d'emblée important de déterminer le nombre de grain (*d'orientations*) à considérer afin d'obtenir un comportement effectif *fiable*, conciliant un temps de calcul raisonnable. Cette *fiabilité* est déterminée par la valeur du coefficient de variation C_v des paramètres de son comportement réversible linéaire, donné par l'expression *(3.52)*. Cet indicateur de convergence est évalué pour un nombre de grains spécifique. Pour chaque nombre de grain, cinq calculs sont menés.

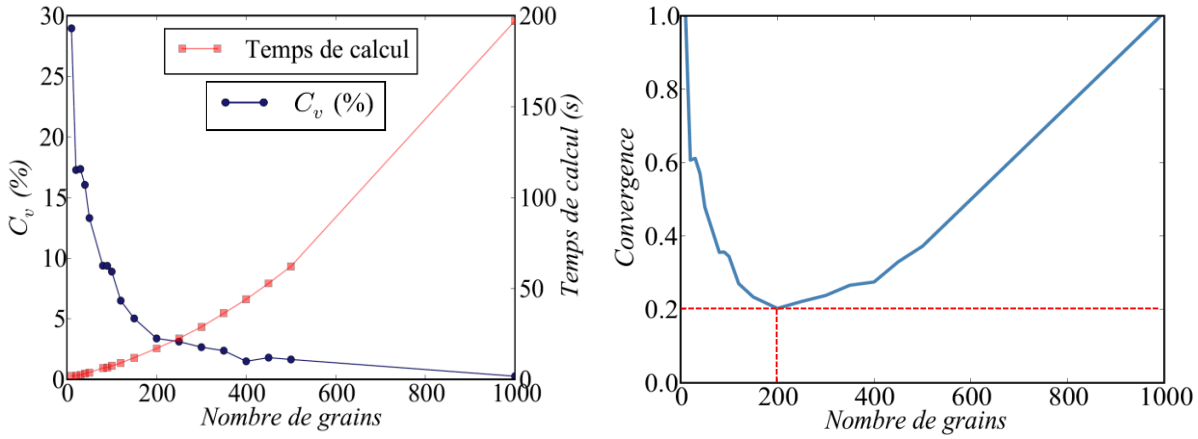
$$C_v = \sum_{i=1}^{6} \frac{\sqrt{\frac{1}{5}\sum_{n=1}^{5}\left(P_{i,n} - \sum_{n=1}^{5}\frac{P_{i,n}}{5}\right)^2}}{\sum_{n=1}^{5}\frac{P_{i,n}}{5}} = \sum_{i=6}^{6} C_{v_i} \qquad (3.52)$$

Où *i* et *n* correspondent respectivement aux six paramètres du comportement réversible linéaire et aux cinq tirages aléatoires de *N* grains dans une couche. Le calcul de C_v est indépendant des couches. Le coefficient de variation C_v correspond à la somme des coefficients de variation C_{vi} des paramètres du comportement. Le coefficient de variation d'un paramètre *i* est égal au rapport de l'écart type sur la moyenne des valeurs des paramètres par tirage aléatoire. Les calculs sont menés pour dix-huit valeurs de *N* allant de dix à mille grains. Le temps de chaque calcul est relevé et tracé avec les valeurs de C_v sur la *figure 3-30 (A)*. Pour faciliter le choix du nombre de grain à convergence, ces deux paramètres peuvent être intégrés au calcul d'un dernier indicateur, donné par l'expression *(3.53)*.

$$Conv = \frac{C_v}{max(C_v)} + \frac{T}{max(T)} \qquad (3.53)$$

Cet indicateur, évalué également pour chaque nombre de grain, est une normalisation des valeurs de C_v et du temps de calcul par leurs valeurs maximales respectives. De cette manière, ces paramètres peuvent être additionnés et la valeur la plus basse de l'indicateur correspond ainsi au meilleur compromis entre le temps de calcul et sa valeur à convergence. Il est tracé par rapport au temps de calcul sur la *figure 3-30 (B)*.

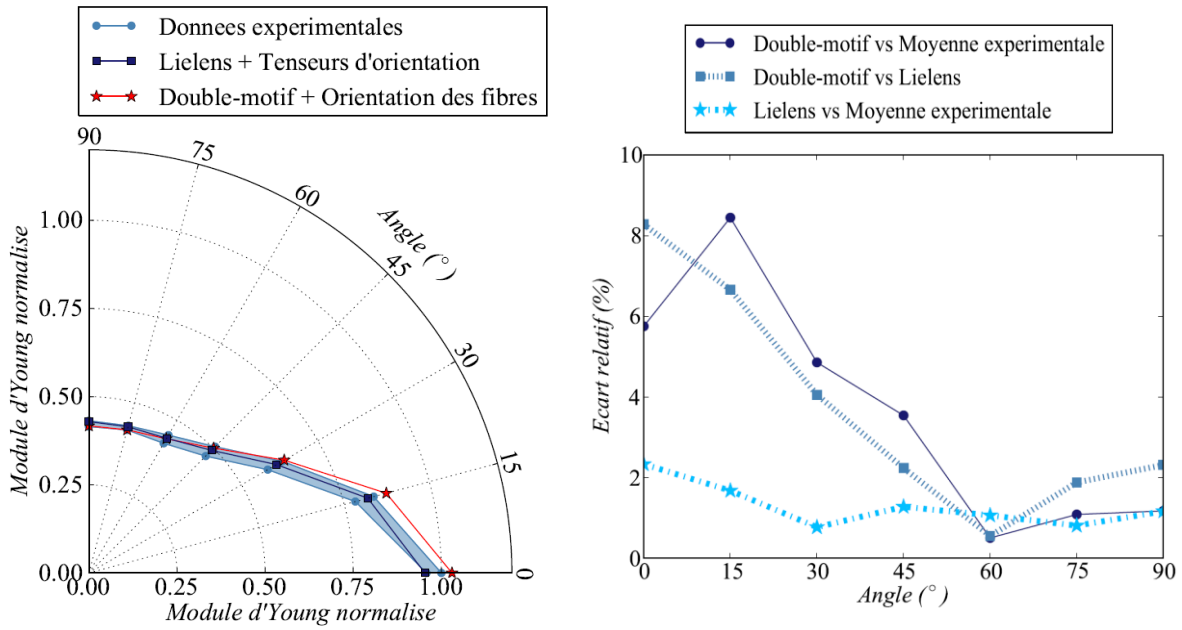
Au regard de la *figure 3-30*, il apparait que pour deux cent PGE tirés aléatoirement dans chaque couche, la convergence (*figure 3-30 (B)*) présente la valeur la plus faible. Pour ce nombre de grains, le coefficient de variation est de 4,23%. En d'autres termes, le comportement effectif du composite varie de 4,23%. Au total, 1800 orientations de fibres sont tirées au sort pour mener le calcul, ce qui semble être statistiquement suffisant pour prédire le comportement réversible linéaire du composite à moins de 5% d'écart près. Pour cette valeur de C_v, le temps de calcul est de 17 secondes par couche sur un point d'intégration et d'environ 3 minutes pour l'ensemble des couches. Un tirage aléatoire de deux cent PGE semble être un bon compromis pour continuer la démarche.



(A) *(B)*

Figure 3-30 : Tracé du coefficient de variation C_v et du temps de calcul (A) et de l'indicateur de convergence finale (B) en fonction du nombre de grains par couche

Avec deux cents PGE dans chaque couche, le comportement effectif réversible linéaire du composite est tracé sur le diagramme polaire de la *figure 3-31 (A)* pour les sept angles testés expérimentalement. La démarche est comparée à une procédure d'homogénéisation en deux étapes sous Digimat-MF (avec le modèle de Lielens), Afin de la situer vis-à-vis d'une procédure éprouvée. En pratique, une rotation du repère matériau est appliquée à chaque grain du modèle suivant l'angle testé. La *figure 3-31 (B)* présente l'écart relatif calculé entre les modèles et les données expérimentales pour ces sept angles.



(A) *(B)*

Figure 3-31 : Comparaison des données normalisées du composite testé en traction uniaxiale, de la simulation en champs moyens avec le modèle de Lielens (Digimat-MF) et du modèle d'homogénéisation, pour des angles de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres avec intégration des orientation réelles de fibres : (A) modules de réversibilité et (B) écarts relatifs entre la moyenne des essais et les modèles

Les résultats de la simulation présentés sur la *figure 3-31 (A)* indiquent une surestimation de la rigidité effective allant jusqu'à 8,43% à 15°. Le modèle présente cependant une bonne corrélation générale avec les essais expérimentaux puisqu'il se situe sur la borne supérieure du faisceau de courbes dans la majorité des cas. Il est proche de la borne inférieure à 90°. L'étude des écarts relatifs entre les deux simulations et la moyenne expérimentale pour les sept angles, tracés sur la *figure 3-31 (B)*, indique une proximité de la réponse effective de Digimat-MF avec un écart maximal de 2,3% à 0°. La figure montre également une surestimation de la valeur expérimentale moyenne des deux modèles d'homogénéisation. La simulation de la rigidité à 60° est cependant prédite par les deux modèles, avec un écart relatif de 0,5%.

Bien que le modèle permette une prédiction du comportement réversible linéaire effectif du composite acceptable en termes d'écart relatif aux données expérimentales, l'intégration de la distribution de longueur des fibres peut permettre de modifier la réponse du modèle et d'améliorer cette prévision.

7.3.2. Intégration de la distribution de longueur des fibres courtes

L'intégration de la distribution de longueurs de fibres dans le modèle permet d'augmenter le degré de physique du modèle, grâce à l'apport de données mesurées et présentées dans le quatrième chapitre (*paragraphe 4.3.4*). Le tenseur de localisation des contraintes dans les phases est calculé grâce au tenseur d'Eshelby. Or, ce tenseur est lui-même évalué grâce au facteur de forme de l'inclusion. C'est donc ce paramètre qui est modifié dans le modèle afin d'intégrer la distribution de longueur des fibres. En pratique, chaque fibre tirée aléatoirement dans la couche est associée à un couple d'angles θ et ϕ et à une longueur. Cette longueur, divisée par le diamètre de la fibre, donne le facteur de forme du modèle de Mori-Tanaka dans le système à double-motif. La prise en compte de la longueur des fibres n'implique pas de temps de calcul supplémentaire par rapport au calcul précédent. En effet, dans le précédent calcul, ce facteur de forme est également pris en compte mais avec une valeur constante (égale à *21*).

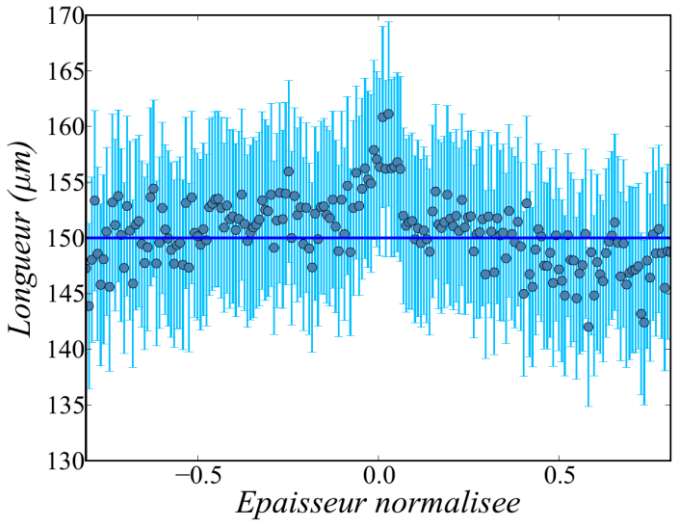
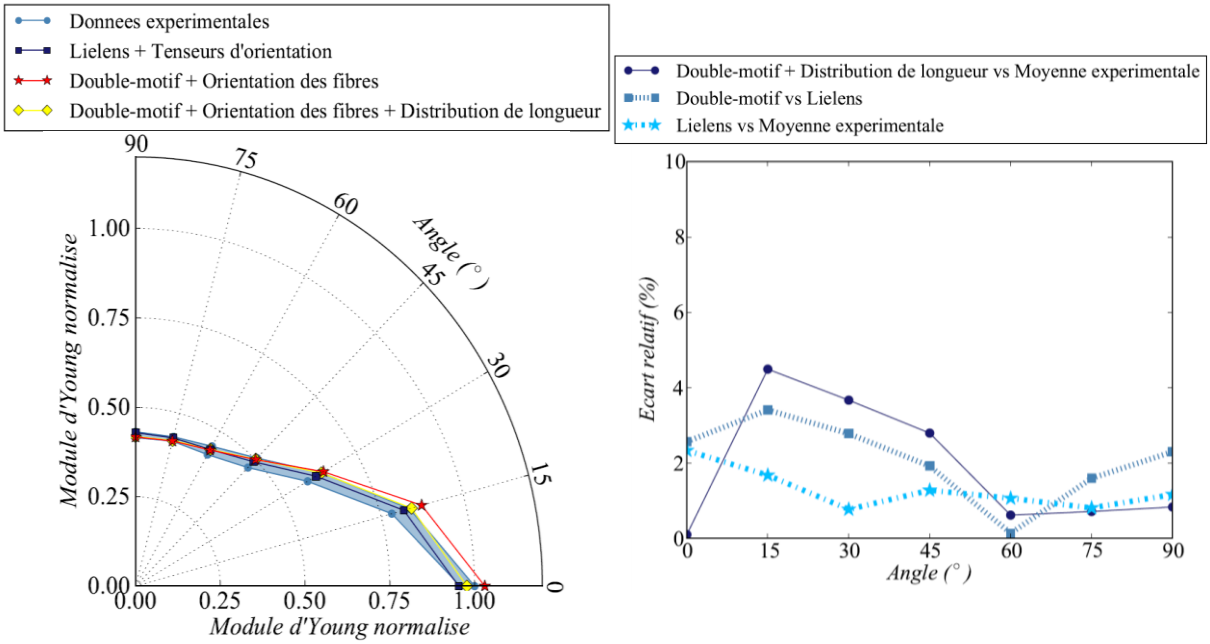


Figure 3-32 : Tracé de la moyenne et de l'écart-type de la longueur des fibres pour chaque lot de deux cents orientations dans les couches et suivant la position dans l'épaisseur du matériau

Avant de mener le calcul intégrant la distribution de longueur des fibres, la *figure 3-32* présente le tracé de la moyenne et de l'écart-type de la longueur des fibres dans les couches et suivant l'épaisseur du matériau. Pour une meilleure lisibilité de la figure et une cohérence vis-

à-vis du nombre de grains considérés dans le modèle, cette moyenne est systématiquement calculée par lot de deux cent grains. La moyenne de l'ensemble des fibres est représentée par la ligne horizontale.

Les fibres semblent être plus longues à mi-épaisseur du matériau. En effet, la longueur des fibres à cœur varie de 155 à 162 micromètres. Cette seconde observation complète un point abordé dans la seconde partie (*chapitre 4, paragraphe 4.3.5*) concernant les clusters de fibres [*Ranganathan & Advani*, 1990] : lors du moulage par injection et pendant la phase de solidification du polymère, la formation des clusters d'orientation est due aux interactions entre les fibres. L'étude de la longueur des fibres amène ici un élément de compréhension : il est raisonnable de penser que la longueur des fibres conditionne leurs interactions lors de la fabrication du matériau.



(A) *(B)*

Figure 3-33 : Comparaison des données normalisées du composite testé en traction uniaxiale, de la simulation en champs moyens avec le modèle de Lielens (Digimat-MF) et du modèle d'homogénéisation, pour des angles de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres avec intégration des orientation réelles de fibres et de la distribution de longueur des fibres : (A) modules de réversibilité et (B) écarts relatifs entre la moyenne des essais et les modèles

La prise en compte de l'hétérogénéité de longueurs des fibres dans le modèle permet une meilleure prédiction du comportement réversible linéaire du composite. En effet, le graphique de la *figure 3-33 (A)* indique que pour chaque angle de sollicitation, le modèle se positionne dans le faisceau des modules expérimentaux. De plus, la *figure 3-33 (B)* montre une diminution générale de l'écart relatif entre les valeurs des modules simulés et des modules moyens expérimentaux par angle de sollicitation, avec un écart maximal de 4,5% à 15°.

L'intégration des deux variables relatives aux fibres dans le modèle (orientation et distribution de longueur), ne donne pas une meilleure prédiction macroscopique que celle obtenue avec Digimat-MF. Cependant, l'enrichissement du comportement local, à partir de données mesurées expérimentalement, démontre la capacité du modèle à prédire le

comportement réversible linéaire effectif du composite, permettant ainsi la validation de la démarche. L'étape suivante de la démarche porte maintenant sur sa capacité à prédire le comportement irréversible du composite, dans le cas de sollicitations conventionnelles et plus complexes.

7.4. Homogénéisation du comportement macroscopique irréversible

Le modèle d'homogénéisation est testé sur des sollicitations conventionnelles et complexes dans le domaine irréversible du comportement du composite. Afin de valider la pertinence du modèle, il est nécessaire de disposer d'essais mécaniques permettant d'estimer ses performances. Les sollicitations conventionnelles correspondent ici aux essais de traction uniaxiale aux différents angles, testés dans le domaine réversible linéaire du comportement du matériau au paragraphe précédent. Les sollicitations complexes correspondent à un essai de traction sur éprouvette entaillée axisymétrique réalisé en tomographie RX *in-situ*.

7.4.1. Traction irréversible pour des angles intermédiaires

Les essais de traction utilisés pour la validation du comportement réversible linéaire pour sept angles par rapport au sens d'injection des fibres sont repris afin de montrer la capacité du modèle à simuler le comportement irréversible macroscopique du matériau. La mise en données est similaire à celle des calculs dans le domaine réversible linéaire : les calculs sont pilotés en déformation sur un point d'intégration. De même que dans le domaine réversible linéaire, une rotation du repère matériau est appliquée à chaque grain selon l'angle testé. Les courbes de contrainte-déformation normalisées sont tracées séparément pour chaque angle sur la *figure 3-34* pour la simulation numérique et les cinq essais réalisés sur le composite. Les courbes des angles de 0° à 90° correspondent respectivement aux lettres *(A)* à *(G)* de la figure.

Sur l'ensemble des courbes de comportement présentées par la *figure 3-34*, le comportement macroscopique effectif, simulé à l'aide de la procédure d'homogénéisation complète, tend à surestimer son comportement expérimental. Quel que soit l'angle, la contrainte macroscopique effective est systématiquement supérieure aux essais. Selon les essais, pour les niveaux de déformation à rupture, l'écart entre le modèle et les essais peut être de 25% supérieure. De plus, les courbes du comportement effectif montrent peu de non-linéarité macroscopique apparente.

Dans un composite renforcé en fibres courtes, les travaux de Rolland montrent qu'il existe quatre type d'endommagement avant la rupture macroscopique [*Rolland et al.*, 2016], dont le principal est la rupture des fibres. La démarche d'homogénéisation proposée ici n'intègre aucun type d'endommagement. De ce fait, les résultats présentés sur la *figure 3-34* sont cohérents : la prise en compte de l'endommagement, comme la rupture des fibres, amènerait plus de non-linéarité macroscopique du comportement effectif et tendrait ainsi à corréler les courbes expérimentales. L'ajout d'un modèle d'endommagement des fibres est abordé dans la partie consacrée aux perspectives des travaux.

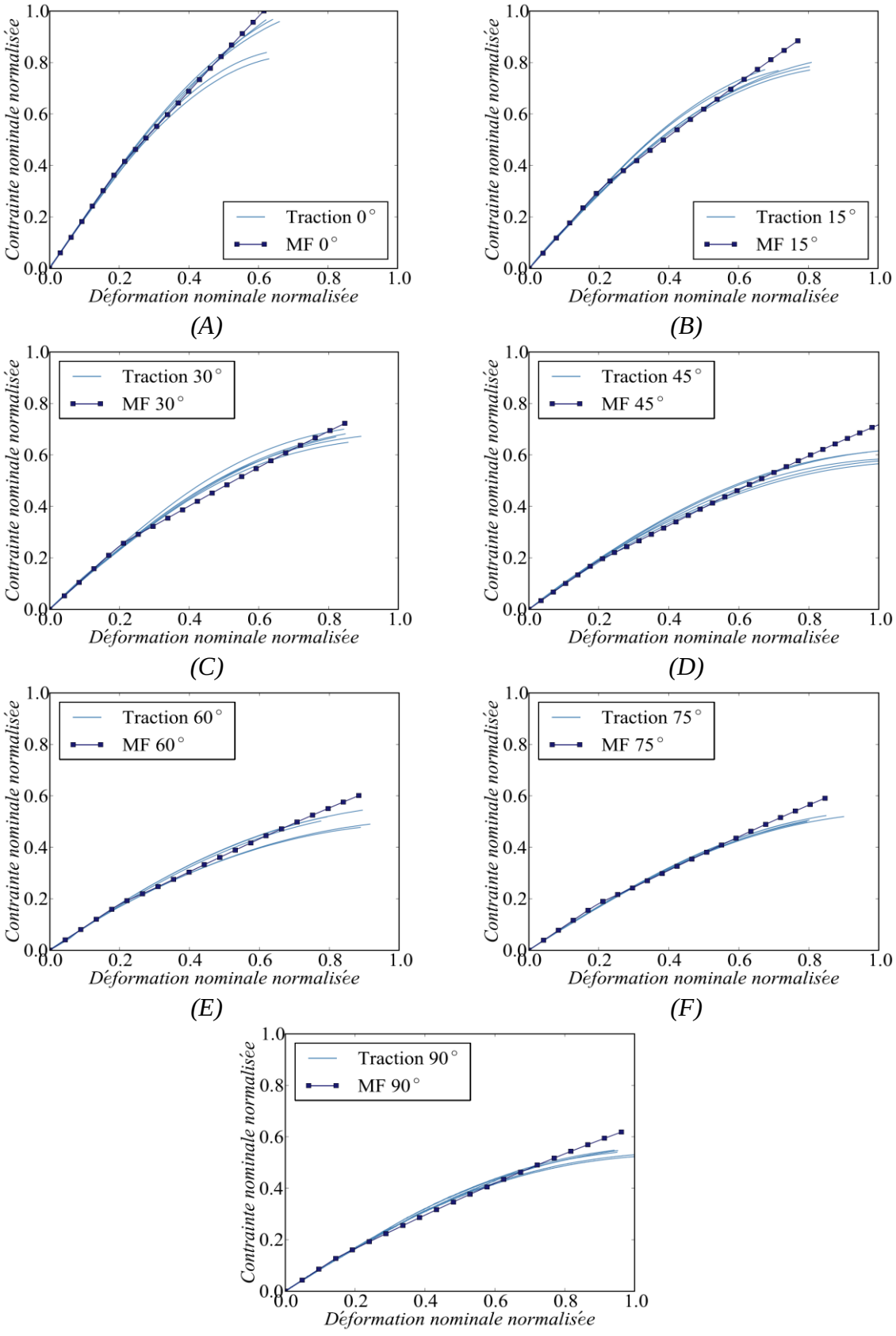


Figure 3-34 : Comparaison entre les comportements expérimentaux normalisés du composite testé en traction uniaxiale et la simulation en champs moyens, pour des angles de 0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75° et 90° par rapport au sens d'injection des fibres

Il est à noter que ces résultats sont issus d'un modèle ne considérant aucun compromis quant aux données d'entrées utilisées : celles-ci sont toutes mesurées ou ont fait l'objet d'une caractérisation expérimentale. Au regard de cette dernière remarque, la démarche d'homogénéisation semble être pertinente afin de prédire le comportement du composite.

7.4.2. Traction sur éprouvette axisymétrique entaillée

Afin de valider la capacité du modèle d'homogénéisation à prédire le comportement du matériau soumis à des sollicitations complexes de façon macroscopique et locale, un essai de traction sur éprouvette axisymétrique entaillée est mené. Cet essai a été réalisé lors de la campagne expérimentale sur la ligne PSICHE du synchrotron SOLEIL (*chapitre 4, paragraphe 4.2*). En parallèle à ces travaux de thèse, une machine de traction *in-situ* a été développée au Centre des Matériaux afin d'associer l'observation à l'échelle micrométrique et les essais mécaniques. La machine *« Bulky »* est utilisée pour l'essai de traction axisymétrique entaillée et est présentée sur la *figure 3-35*.

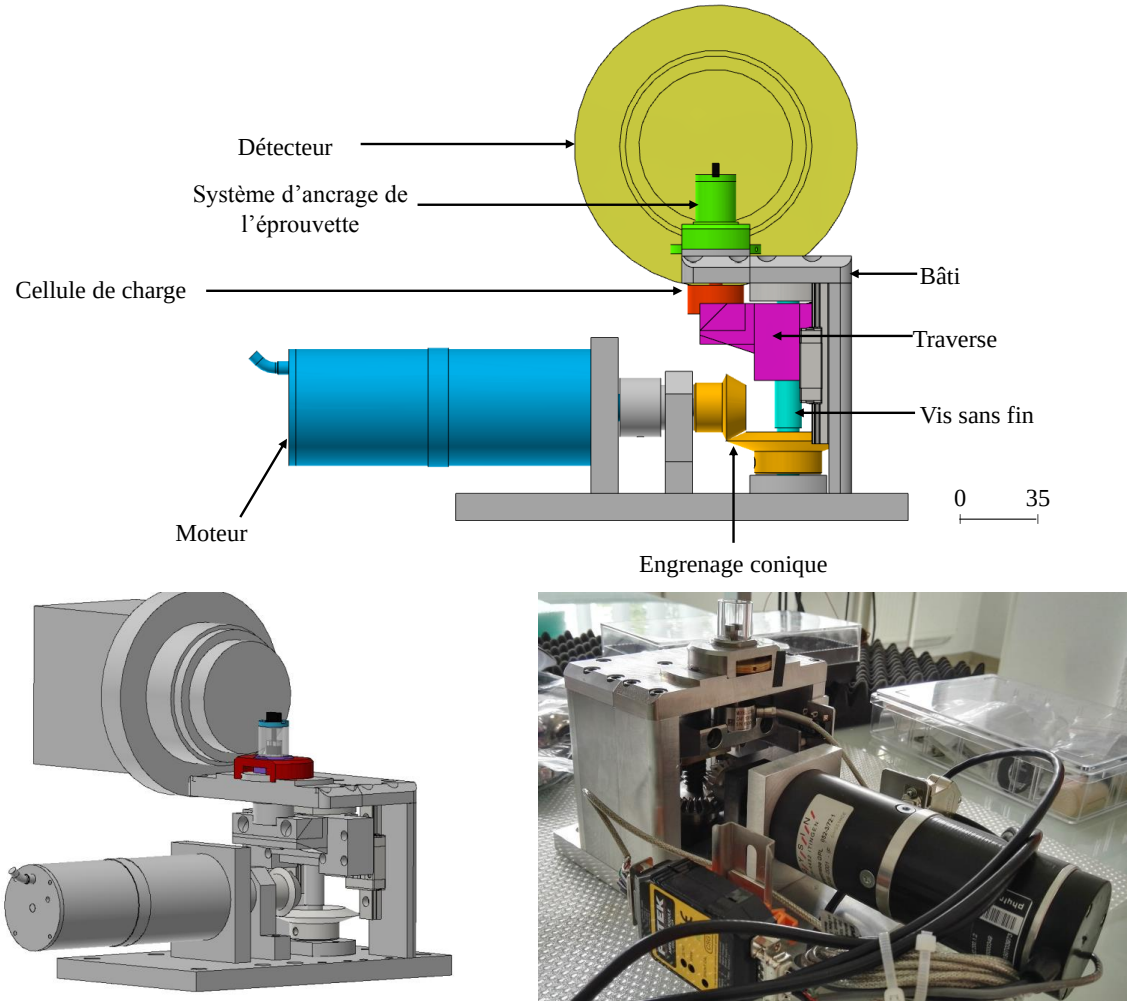


Figure 3-35 : Schéma, visuels 3D et photographie de la machine de traction in-situ (« Bulky ») utilisée pour l'essai de traction sur éprouvette axisymétrique entaillée

La machine *« Bulky »* est conçue afin de mener des essais de traction sur une large gamme de matériaux, grâce à une cellule de charge pouvant aller jusqu'à 4kN. La modularité de son système d'ancrage d'éprouvettes permet de tester différentes géométries. Ces spécificités ont permis de choisir l'éprouvette axisymétrique entaillée afin de mener un essai générant une sollicitation complexe globale et locale du matériau [*Hancock & Mackenzie*, 1976]. Le système d'ancrage adapté ainsi que la géométrie et la représentation 3D de l'éprouvette sont présentés sur la *figure 3-36*.

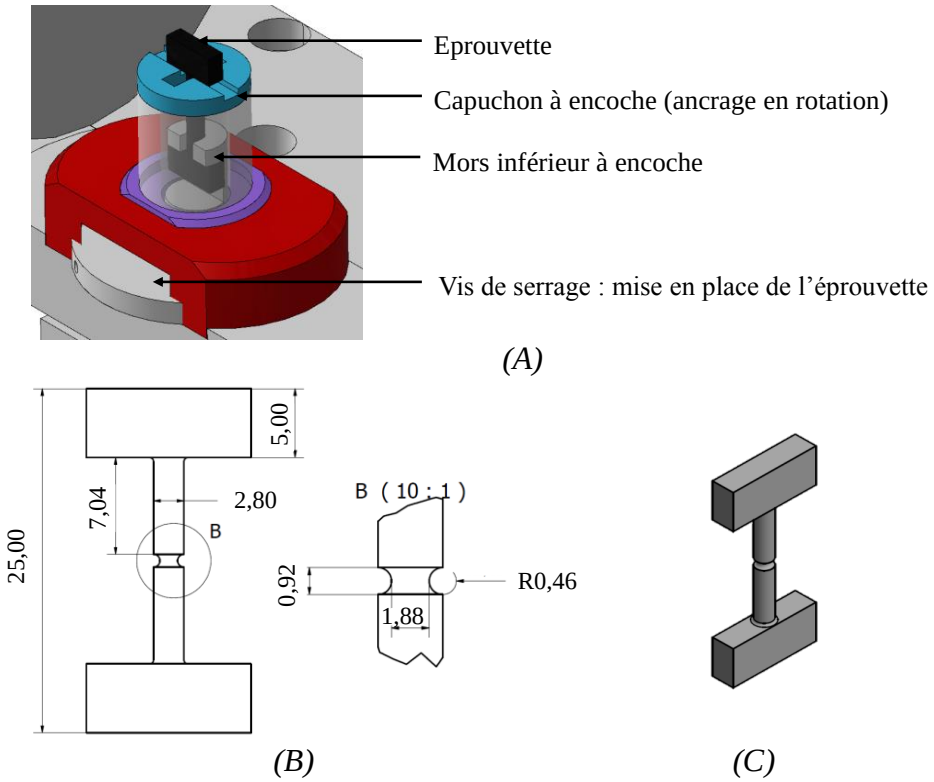


Figure 3-36 : Traction in-situ sur éprouvette axisymétrique entaillée : (A) schéma du système d'encrage, (B) géométrie et dimensions de l'éprouvette et (C) représentation 3D de l'éprouvette

Au total, dix-sept scans de l'éprouvette ont été réalisés au cours de l'essai de traction *in-situ*. Ces scans contiennent tous une image reconstruite en 3D du matériau après sollicitation. Entre le pallier de sollicitation et un scan, quinze minutes de maintien sont observées afin d'éliminer d'éventuels effets de relaxation du matériau, permettant ainsi l'obtention d'une image stable.

Le calcul par élément finis pour simuler l'essai est réalisé sous Z-set, sur la zone utile de l'éprouvette (représentée sur la *figure 3-36 (B)*, zoom B). Seul un huitième de cette zone est maillé et des conditions aux limites symétriques sont appliquées sur les faces tronquées. Le calcul est piloté en effort sur la face supérieure du maillage. Le maillage et ses conditions aux limites sont présentés sur la *figure 3-37*. La symétrie de la distribution de l'orientation des fibres autour de la couche de peau permet de travailler sur cette zone réduite de l'éprouvette.

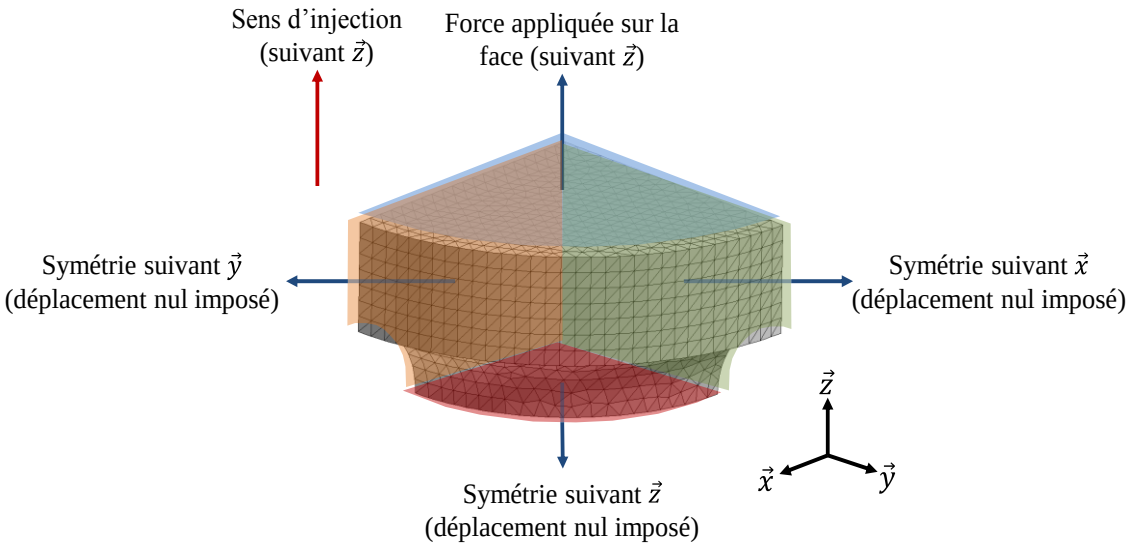


Figure 3-37 : Maillage et conditions aux limites du modèle de l'essai de traction in-situ sur éprouvette axisymétrique entaillée

Avec les conditions de symétries appliquées, seules 4 couches et demie sur les neufs couches initiales sont à représenter : quatre couches de peau et la moitié de la couche de cœur. La portion de la géométrie de l'éprouvette représentée justifie l'utilisation d'éléments tétraédriques quadratiques. En effet, de tels éléments permettent le maillage d'une géométrie locale complexe avec précision. Les éléments utilisés sont nommés « c3d10_4 » et sont constitués de dix nœuds et de quatre points d'intégration.

La déformation du matériau dans la partie supérieure de l'éprouvette n'atteint jamais une déformation suffisante afin de mener à la rupture dans cette zone. De ce fait, un comportement linéaire des couches dans ce volume est appliqué. Le comportement linéaire est estimé au préalable pour chaque couche sur un point d'intégration et est intégré au calcul sous la forme d'un comportement anisotrope réversible linéaire. Dans l'entaille, chaque élément d'une couche est « chargé » par vingt grains au comportement irréversible et tirés aléatoirement. Les calculs menés sur un point d'intégration au paragraphe 7.4.1 représentent le comportement d'une éprouvette entière. Hors, le calcul sur l'éprouvette entaillée est un calcul de structure. Chaque élément étant donc représentatif de la microstructure et contient en moyenne vingt grains, ce qui justifie le choix de mener le calcul avec ce nombre de grain. De plus, une telle mise en données assure un nombre de grain très supérieur aux 200 permettant une bonne convergence des résultats. Chaque point d'intégration d'un élément contient ainsi le même comportement. De cette manière chaque couche est constituée de *n* grains spécifiques. Le *tableau 1-1* donne le nombre d'éléments et de grains de chaque couche au comportement irréversible.

Couche	Nombre d'élément	Nombre de grain
C1	274	5480
C2	1510	30200
C3	2858	57160
C4	3356	67120
C5	1646	32920

Tableau 3-3 : Nombre de grain considérés dans chaque couche du maillage

Le nombre conséquent de grains dans chaque couche permet de se rapprocher de l'hétérogénéité réelle de l'orientation des fibres dans la microstructure, tout en permettant un calcul complet dans le domaine irréversible. Environ quarante-quatre heures sont nécessaires au calcul, ce qui reste raisonnable au regard de la richesse du modèle.

La mise en données du calcul nécessite que chaque élément d'une couche soit identifié comme un *elset* unique. Cela est réalisé de manière automatique à l'aide d'un script Python. La représentation des couches et de leurs éléments est proposée sur la *figure 3-38 (A)* et les couleurs des éléments de la *figure 3-38 (B)* correspondent à un comportement unique, sans toutefois être fondamentalement différent grâce à la considération de plusieurs couches.

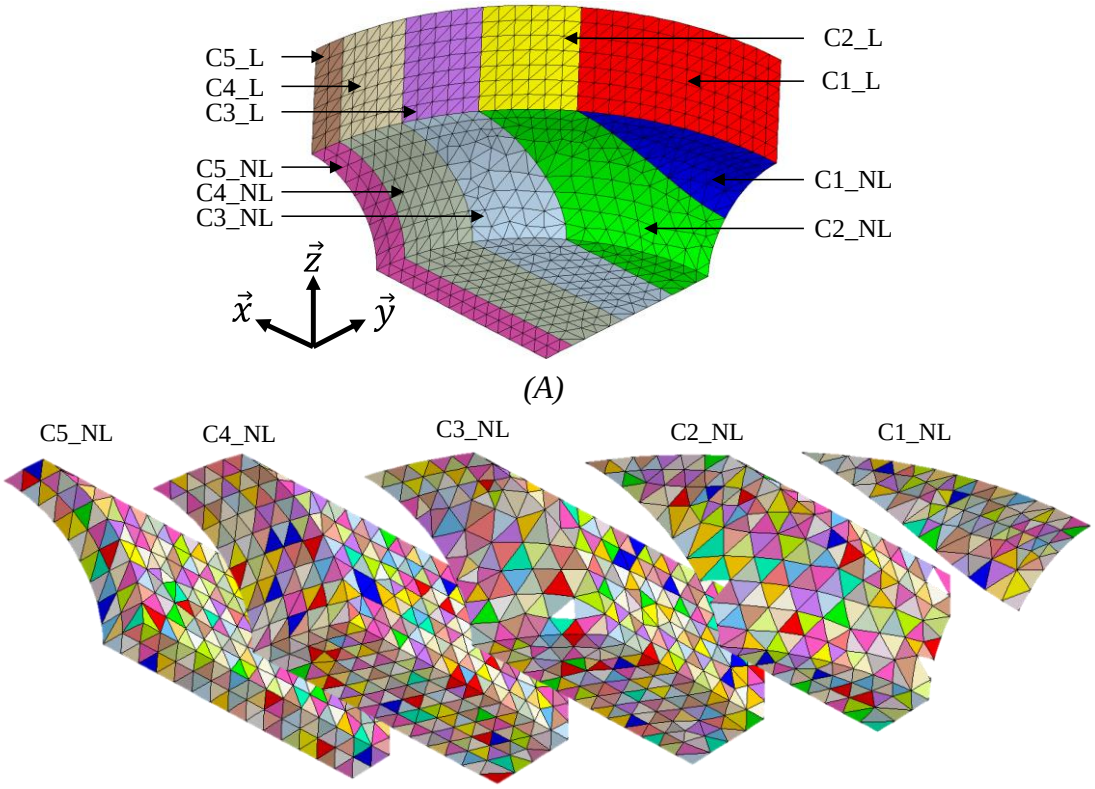
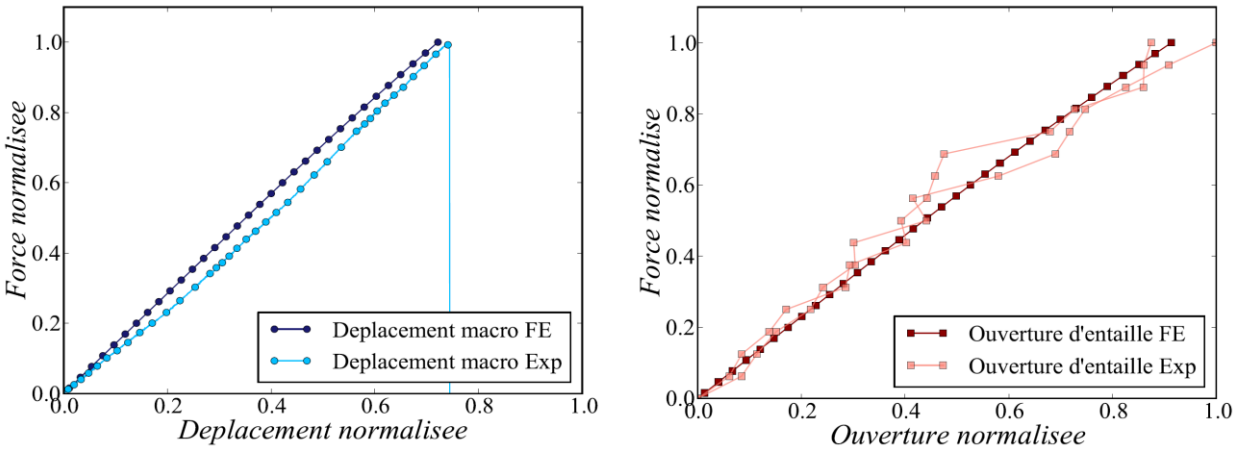


Figure 3-38 : Discrétisation du maillage en couches au comportement réversible linéaire (« L ») et irréversible (« NL ») (A) et illustration des éléments constituant chaque couche (B).

L'objectif de ce calcul est de valider la capacité de la démarche à prédire le comportement global et local du composite lorsqu'il est soumis à des chargements complexes. Deux comparaisons essai-simulation sont menées afin de vérifier la capacité du modèle à prédire le comportement du composite sollicité en traction de manière complexe. La première consiste à comparer la courbe de force-déplacement de la face supérieure du maillage. Lors de l'essai en traction *in-situ* le déplacement de la traverse et la force mesurée par la cellule de charge sont récupérés. La seconde comparaison est la courbe d'ouverture d'entaille en fonction de la force macroscopique. L'ouverture d'entaille est mesurée sur chaque image obtenue après l'essai *in-situ*. Les courbes de déplacement macroscopique et d'ouverture d'entaille en fonction de la charge macroscopique sont tracées sur la *figure 3-39*. Deux côtés de l'entaille sont considérés afin de réduire l'éventuelle dispersion liée à l'usinage des éprouvettes. Ces données sont normalisées par rapport aux valeurs maximales en force, déplacement et ouverture d'entaille. Ne disposant que d'un essai expérimental, il n'est toutefois pas possible de statuer quant à la reproductibilité des essais.

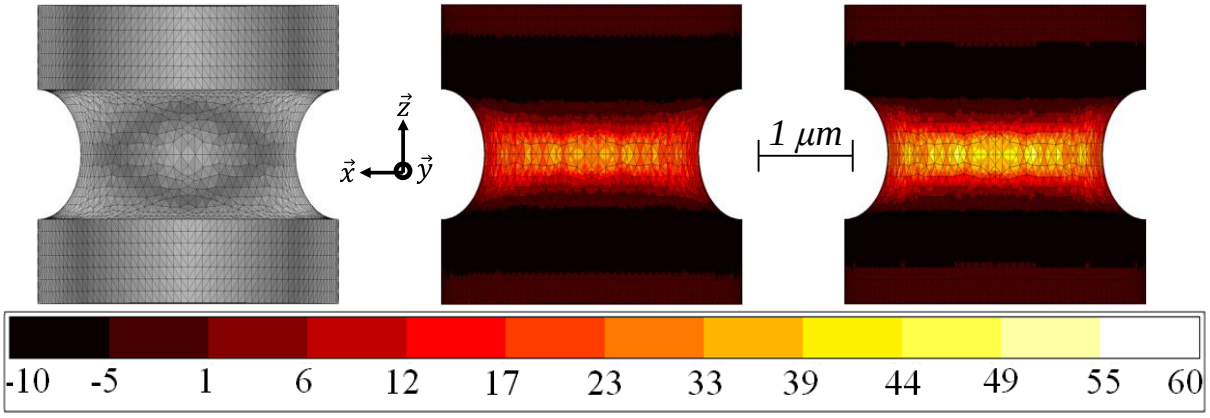


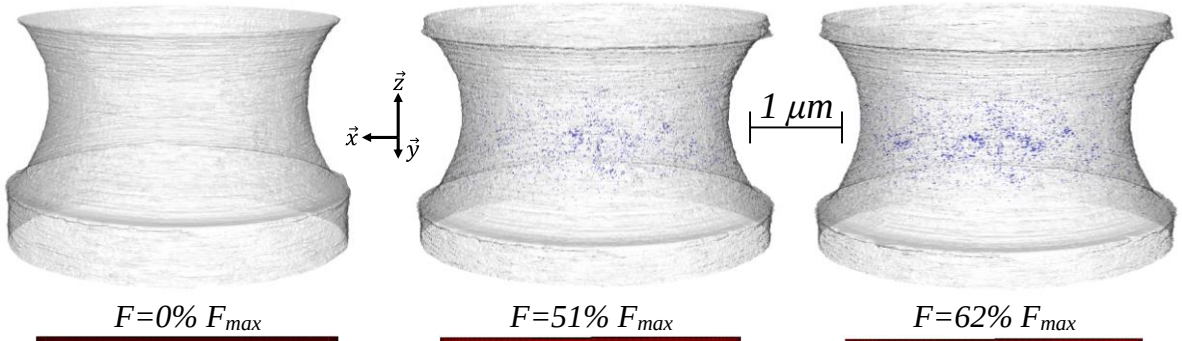
(A) *(B)*

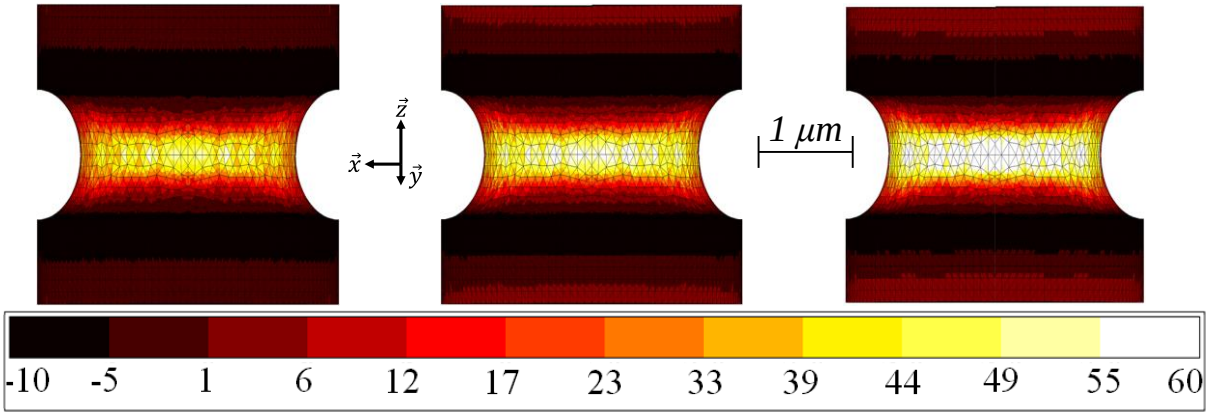
Figure 3-39 : Comparaison des courbes de force-déplacement macroscopique normalisés (A) et d'ouverture d'entaille normalisées (B) de l'essai de traction in-situ et de la simulation numérique par éléments finis

La courbe expérimentale de la *figure 3-39 (A)* présente une inflexion en début de chargement, ce qui correspond à la mise en place de l'éprouvette dans le système d'ancrage de la machine. La rupture macroscopique de l'éprouvette se fait au niveau de l'entaille, ce qui indique une concentration de contraintes importante en fond d'entaille. D'autre part, l'ouverture des deux entailles (*figure 3-39 (B)*) ayant été mesurée sur chacun des scans des essais, la dispersion expérimentale est conséquente, ce qui explique l'irrégularité des deux courbes. Outre ces remarques expérimentales, la simulation numérique de l'essai présente une bonne corrélation avec le comportement expérimental macroscopique et la courbe d'ouverture d'entaille se positionne dans le faisceau des courbes expérimentales.

Au cours de l'essai, l'endommagement au cœur de l'éprouvette est comparé à la pression hydrostatique obtenue à l'aide de la simulation par éléments finis. Cette seconde comparaison est qualitative : elle permet d'évaluer la capacité du modèle à représenter la concentration de contraintes locales, traduite par l'endommagement de l'éprouvette réelle. Sur les dix-sept scans récupérés, ce n'est qu'à partir du treizième qu'un endommagement local du matériau commence à être observable. La *figure 3-40* montre l'état initial de l'éprouvette, ainsi que l'amorçage de l'endommagement et son état final dans l'éprouvette. L'endommagement est segmenté et présenté de manière globale sur le volume de l'entaille et localement sur une coupe de l'éprouvette. L'endommagement est comparé à l'état de contrainte obtenu avec la simulation par éléments finis, pour un chargement global donné. Le repère des deux représentations est légèrement différent : le zoom et la perspective de l'image de tomographie semble montrer une éprouvette aux dimensions différentes, ce qui n'est pas le cas. En effet, les deux éprouvettes sont équivalentes (à l'usinage de l'éprouvette réelle près).







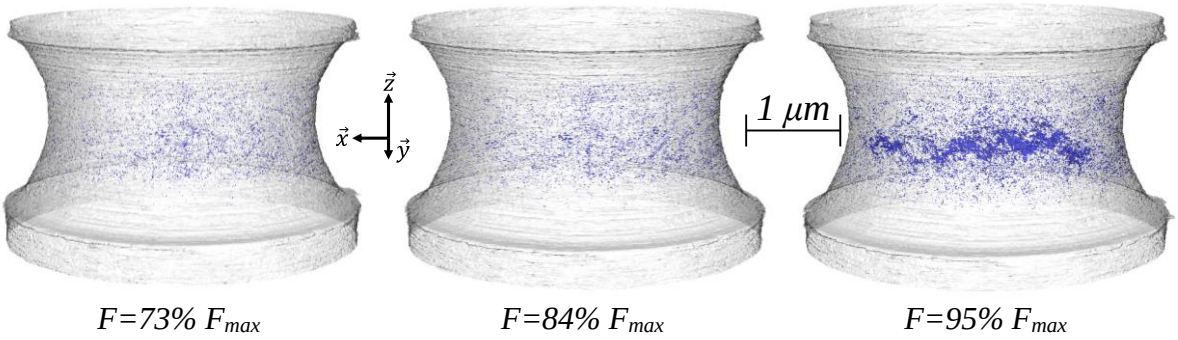


Figure 3-40 : Comparaison de l'endommagement du matériau et de la concentration de contraintes en fond d'entaille de l'essai de traction in-situ et de la simulation numérique par éléments finis

Sur la *figure 3-40*, la segmentation est réalisée sous Python avec la librairie Pymicro développée par Henry Proudhon au Centre des Matériaux [*Proudhon*, 2017]. Sur les images de tomographie, l'endommagement est représenté par du vide, soit un niveau de gris nul (couleur noire). Par conséquent, sa segmentation et sa labellisation est plus facile que celle des fibres, menée dans le quatrième chapitre (*paragraphe 4.3.2*). Sur les images de tomographie, l'endommagement est représenté en bleu et aucune distinction n'est faite sur le type d'endommagement.

Le calcul par éléments finis, incluant le comportement local par champs moyens, présente une concentration de la contrainte équivalente au cœur de l'éprouvette. Bien que cette observation soit liée à la géométrie de l'éprouvette, elle montre également que l'augmentation de la contrainte équivalente est dépendante du comportement local du matériau (par élément du maillage) : le niveau de contrainte n'est pas homogène dans l'entaille. L'endommagement dans l'éprouvette de tomographie est localisé au cœur de l'entaille mais n'est également pas homogène dans cette zone. Ces observations mènent à conclure sur la capacité du modèle à reproduire le comportement effectif global et local du matériau.

Conclusions de la partie

Le comportement à l'échelle macroscopique d'un matériau renforcé en fibres courtes est principalement constitué de travaux numériques. La modélisation de son comportement n'étant pas possible avec des méthodes en champs complets, une méthode d'homogénéisation en champs moyens est développée. En respectant la séparation des échelles du matériau, la démarche proposée est basée sur un système de motifs morphologiques représentatifs. Une fois homogénéisé, ce système est appelé pseudo-grain et est homogène au comportement unidirectionnel du matériau. La démarche fait intervenir l'ensemble des travaux des chapitres précédents, l'orientation réelle des fibres et leur distribution de longueur.

Les paramètres du modèle d'homogénéisation du comportement unidirectionnel du composite sont identifiés grâce à celui de la CESR. Le système à double-motif, constitué de deux modèles de Mori-Tanaka direct et inverse, homogénéisés avec un modèle auto-cohérent, présente l'avantage de reproduire le comportement global de la CESR, tout en prenant en compte sa morphologie. Les paramètres du système permettent ainsi la description globale et locale d'une large gamme de comportement et de morphologies. L'orientation réelle des fibres et leur distribution de longueur sont intégrées de manière statistique à la procédure par l'homogénéisation d'un système de deux cent pseudos-grains. Cet ensemble de grain est homogénéisé avec un modèle de Voigt.

Le comportement effectif du composite obtenu à l'issue de la procédure d'homogénéisation complète reproduit le comportement réversible linéaire du composite à différents angles en traction. Dans le domaine irréversible, les tendances obtenues à l'aide de la procédure sont comparables au comportement macroscopique du composite modélisé sans endommagement des fibres. La simulation de l'essai de traction sur éprouvette axisymétrique entaillée présente une bonne corrélation avec l'expérimental en termes de comportement macroscopique : déplacement et ouverture d'entaille. Ces résultats, complétés par la comparaison qualitative de la pression hydrostatique et de l'évolution de l'endommagement au cours de l'essai tendent à aborder une des principales perspectives de ces travaux : l'endommagement observé sur le matériau réel est la prochaine étape de modélisation.

Résumé graphique de la partie

Bibliographie

Advani, S. G., (1987), *Prediction of fiber orientation during processing of short-fiber composites*, Thèse de doctorat, University of Illinois.

Advani, S. G., & Tucker III, C. L., (1987), The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites, *Journal of Rheology*, 31: 751–784. (cité p.181, p.183 et p.183-2)

ASTM International, (2008), D638-03 : Standard test method for tensile properties of plastics.

Bakir, B., & Hashem, H., (2013), Effect of fiber orientation for fiber glass reinforced composite material on mechanical properties.pdf, *International Journal of Mining, Metallurgy & Mechanical Engineering (IJMMME)*, 1: 341–345.

Benveniste, Y., (1987), A new approach to the application of Mori-Tanaka's theory in composite materials, *Mechanics of Materials*, 6: 147–157.

Berthelot, J.-M., (2005), *Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures* (4e édition), Paris; Londres: Tec & Doc Lavoisier.

Berveiller, M., & Zaoui, A., (1978), An extension of the self-consistent scheme to plastically-flowing polycrystals, *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 26: 325–344.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., & Forest, S., (2001), *Mécanique non linéaire des matériaux*, Paris: Hermes Science Publications.

Bishop, J. F. W., & Hill, R., (1951), A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses., *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 42: 414–427.

Böhm, H. J., (2017), *A short introduction to basic aspects of contiuum micromechanics* (Vienna University of Technology).

Budiansky, B., & Wu, T., (1962), Theoretical Prediction of Plastic strains of Polycrystals, *Proc. 4th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 2: 1175.

Camacho, C. W., Tucker, C. L., Yalvaç, S., & McGee, R. L., (1990), Stiffness and thermal expansion predictions for hybrid short fiber composites, *Polymer Composites*, 11: 229–239.

Castañeda, P. P., (1991), The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 39: 45–71.

Castañeda, P. P., (1992), New variational principles in plasticity and their application to composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40: 1757–1788.

Chaboche, J., Kanoute, P., & Roos, A., (2005), On the capabilities of mean-field approaches for the description of plasticity in metal matrix composites, *International Journal of Plasticity*, 21: 1409–1434. (cité p.179 et p.191)

Chaboche, J. L., Kruch, S., Maire, J. F., & Pottier, T., (2001), Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites, *International Journal of Plasticity*, 17: 411–439. (cité p.171 et p.179)

Chou, T.-W., & Nomura, S., (1981), Fibre orientation effects on the thermoelastic properties of short-fibre composites, *Fibre Science and Technology*, 14: 279–291.

Chou, T.-W., Nomura, S., & Taya, M., (1980), A self-consistent approach to the elastic stiffness of short-fiber composites, *Journal of Composite Materials*, 14: 178–188.

Christensen, R. M., (1979), *Mechanics of Composite Materials*, Mineola, NY: Dover Publications.

Christensen, R. M., (1990), A Critical Evaluation for a Class of Micro-Mechanics Models, in: G. J. Dvorak (ed.), *Inelastic Deformation of Composite Materials*, New York, NY: Springer New York.

Chung, D. H., & Kwon, T. H., (2001), Improved model of orthotropic closure approximation for flow induced fiber orientation, *Polymer Composites*, 22: 636–649.

Cintra, J. S., & Tucker, C. L., (1995), Orthotropic closure approximations for flow-induced fiber orientation, *Journal of Rheology*, 39: 1095–1122.

Crevel, J., (2014), *Étude et modélisation du comportement et de l'endommagement d'un composite injecté à matrice PEEK renforcée de fibres courtes de carbone*, ISAE - SUPAERO - Institu Supérieur de l'Aéronautique et de l'Espace.

Doghri, I., & Friebel, C., (2005), Effective elasto-plastic properties of inclusion-reinforced composites. Study of shape, orientation and cyclic response, *Mechanics of Materials*, 37: 45–68.

Doghri, I., & Ouaar, A., (2003), Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures, *International Journal of Solids and Structures*, 40: 1681–1712. (cité p.181, p.186, p.190 et p.191)

Doghri, I., & Tinel, L., (2006), Micromechanics of inelastic composites with misaligned inclusions: Numerical treatment of orientation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195: 1387–1406.

Doi, M., (1981), Molecular dynamics and rheological properties of concentrated solutions of rodlike polymers in isotropic and liquid crystalline phases, *Journal of Polymer Science: Polymer Physics Edition*, 19: 229–243.

Dray, D., Gilormini, P., & Regnier, G., (2007), Comparison of several closure approximations for evaluating the thermoelastic properties of an injection molded short-fiber composite, *Composites Science and Technology*, 67: 1601–1610.

Dvorak, G. J., (1992), Transformation field analysis of inelastic composite materials, *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 437: 311–327.

Dvorak, G. J., Bahei-El-Din, Y. A., & Wafa, A. M., (1994), The modeling of inelastic composite materials with the transformation field analysis, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 2: 571–586.

Dvorak, G. J., & Benveniste, Y., (1992), On Transformation Strains and Uniform Fields in Multiphase Elastic Media, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 437: 291–310.

Eshelby, J. D., (1957), The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 241: 376–396.

E-Xstream, (2014), *Digimat 5.1.2 User Manual*, E-Xstream. (cité p.175 et p.181)

Feyel, F., (2003), A multilevel finite element method (FE2) to describe the response of highly non-linear structures using generalized continua, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192: 3233–3244.

Feyel, F., Calloch, S., Marquis, D., & Cailletaud, G., (1997), F.E. computation of a triaxial specimen using a polycrystalline model, *Computational Materials Science*, 9: 141–157.

Forest, S., Barbe, F., & Cailletaud, G., (2000), Cosserat modelling of size effects in the mechanical behaviour of polycrystals and multi-phase materials, *International Journal of Solids and Structures*, 37: 7105–7126.

Friebel, C., Doghri, I., & Legat, V., (2006), General mean-field homogenization schemes for viscoelastic composites containing multiple phases of coated inclusions, *International Journal of Solids and Structures*, 43: 2513–2541.

Fritzen, F., (2012), *Microstructural Modeling and Computational Homogenization of the Physically Linear and Nonlinear Constitutive Behavior of Micro-Heterogeneous Materials*, Karlsruhe: KIT Scientific Publishing. (cité p.171 et p.178)

Fritzen, F., Marfia, S., & Sepe, V., (2015), Reduced order modeling in nonlinear homogenization: A comparative study, *Computers & Structures*, 157: 114–131.

Fu, S.-Y., & Lauke, B., (1996), Effects of fiber length and fiber orientation distributions on the tensile strength of short-fiber-reinforced polymers, *Composites Science and Technology*, 56: 1179–1190.

Gates, T., Chen, J.-L., & Sun, C., (1994), Micromechanical Characterization of Nonlinear Behavior of Advanced Polymer Matrix Composites, in: R. Deo & C. Saff (eds.), *Composite Materials: Testing and Design: Twelfth Volume*, 100 Barr Harbor Drive, PO Box C700, West Conshohocken, PA 19428-2959: ASTM International.

Gregory, J., & Spearing, S., (2005), Nanoindentation of neat and polymers in polymer-matrix composites, *Composites Science and Technology*, 65: 595–607.

Han, K.-H., & Im, Y.-T., (1999), Modified hybrid closure approximation for prediction of flow-induced fiber orientation, *Journal of Rheology*, 43: 569–589.

Hancock, J. W., & Mackenzie, A. C., (1976), On the mechanisms of ductile failure in high-strength steels subjected to multi-axial stress-states, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 24: 147–160.

Hand, G. L., (1962), A theory of anisotropic fluids, *Journal of Fluid Mechanics*, 13: 33. (cité p.181 et p.183)

Hashin, Z., & Rosen, B. W., (1964), The elastic moduli of fiber-reinforced materials, *Journal of Applied Mechanics*, 31: 223.

Hashin, Z., & Shtrikman, S., (1963), A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11: 127–140.

Hervé-Luanco, E., & Joannès, S., (2016), Multiscale modelling of transport phenomena for materials with n-layered embedded fibres. Part I: Analytical and numerical-based approaches, *International Journal of Solids and Structures*, 97–98: 625–636.

Hill, R., (1963), Elastic properties of reinforced solids: Some theoretical principles, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 11: 357–372.

Hill, R., (1965)a, A self-consistent mechanics of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13: 213–222.

Hill, R., (1965)b, Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13: 89–101. (cité p.178 et p.191)

Hori, M., & Nemat-Nasser, S., (1993), Double-inclusion model and overall moduli of multi-phase composites, *Mechanics of Materials*, 14: 189–206.

Jack, D. A., (2006), Sixth-order Fitted Closures for Short-fiber Reinforced Polymer Composites, *Journal of Thermoplastic Composite Materials*, 19: 217–246.

Joannès, S., & Hervé-Luanco, E., (2016), Multiscale modelling of transport phenomena for materials with n-layered embedded fibres. Part II: Investigation of fibre packing effects, *International Journal of Solids and Structures*, 97–98: 566–574. (cité p.188 et p.190)

Kröner, E., (1958), Berechnung der elastischen Konstanten des Vielkristalls aus den Konstanten des Einkristalls, *Zeitschrift für Physik*, 151: 504–518.

Lahellec, N., Michel, J. C., Moulinec, H., & Suquet, P., (2003), Analysis of Inhomogeneous Materials at Large Strains using Fast Fourier Transforms, in: *IUTAM Symposium on Computational Mechanics of Solid Materials at Large Strains*, Springer, Dordrecht.

Largenton, R., (2012), June, *Modélisation du comportement effectif du combustible MOX par une analyse micromécanique en champs de transformation non uniformes*, Thèse de doctorat, Université de Provence Aix-Marseille 1. (cité p.179 et p.179-2)

Lielens, G., (1999), *Micro-macro modeling of structured materials*, Thèse de doctorat, UCL - Université Catholique de Louvain. (cité p.181 et p.190)

Lielens, G., Pirotte, P., Couniot, A., Dupret, F., & Keunings, R., (1998), Prediction of thermo-mechanical properties for compression moulded composites, *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 29: 63–70. (cité p.176 et p.182)

Masson, R., (1998), *Estimations non linéaires du comportement global de matériaux hétérogènes en formulation affine : application aux alliages de zirconium*, Palaiseau, Ecole polytechnique.

Masson, R., Bornert, M., Suquet, P., & Zaoui, A., (2000), An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48: 1203–1227.

Mercier, S., Molinari, A., Berbenni, S., & Berveiller, M., (2012), Comparison of different homogenization approaches for elastic–viscoplastic materials, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 20: 024004.

Michel, J. C., Galvanetto, U., & Suquet, P., (2000), Constitutive relations involving internal variables based on a micromechanical analysis, in: G. A. Maugin, R. Drouot, & F. Sidoroff (eds.), *Continuum Thermomechanics* (Vol. 76), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Michel, J. C., & Suquet, P., (2003), Nonuniform transformation field analysis, *International Journal of Solids and Structures*, 40: 6937–6955.

Mori, T., & Tanaka, K., (1973), Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metallurgica*, 21: 571–574.

Mortazavian, S., & Fatemi, A., (2015), Effects of fiber orientation and anisotropy on tensile strength and elastic modulus of short fiber reinforced polymer composites, *Composites Part B: Engineering*, 72: 116–129.

Moulinec, H., & Suquet, P., (1994), Fast numerical method for computing the linear and nonlinear properties of composites, *Comptes Rendus de l'Académie Des Sciences. Série II*, 318.

Moussaddy, H., (2013), April, *A new definition of the representative volume element in numerical homogenization problems and its application to the performance evaluation of analytical homogenization models*, Thèse de doctorat, Ecole Polytechnique de Montréal.

Moussaddy, H., Lévesque, M., & Therriault, D., (2011), Évaluation des performances des modèles d'homogénéisation pour des fibres aléatoirement dispersées ayant des rapports de forme élevés, Presented at the Journées Nationales sur les Composites - JNC 17.

Müller, V., Kabel, M., Andrä, H., & Böhlke, T., (2015), Homogenization of linear elastic properties of short-fiber reinforced composites – A comparison of mean field and voxel-based methods, *International Journal of Solids and Structures*, 67–68: 56–70.

Munganga, J. M. W., Reddy, B. D., & Diatezua, K. J., (2000), Aspects of the thermodynamic stability of fibre suspension flows, *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 92: 135–150.

Mura, T., (1991), *Micromechanics of Defects in Solids*.

Pierard, O., (2006), *Micromechanics of inclusion-reinforced composites in elasto-plasticity and elasto-viscoplasticity : modeling and computation/*, UCL - Université Catholique de Louvain.

Pierard, O., Friebel, C., & Doghri, I., (2004), Mean-field homogenization of multi-phase thermo-elastic composites: a general framework and its validation, *Composites Science and Technology*, 64: 1587–1603. (cité p.172, p.176 et p.181)

Pottier, T., (1998), *Modélisation multiéchelle du comportement et de l'endommagement des composites à matrice métallique*, Thèse de doctorat, École nationale des ponts et chaussées (France).

Proudhon, H., (2017), Page personnelle - Centre des Matériaux - MINES ParisTech.

Ranganathan, S., & Advani, S. G., (1990), Characterization of orientation clustering in short-fiber composites, *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 28: 2651–2672.

Reuss, A., (1929), Berechnung der fließgrenze von mischkristallen auf grund der plastizitätsbedingung für einkristalle ., *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift Für Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 9: 49–58.

Rolland, H., Saintier, N., & Robert, G., (2016), Damage mechanisms in short glass fibre reinforced thermoplastic during in situ microtomography tensile tests, *Composites Part B: Engineering*, 90: 365–377.

Roussette, S., (2005), January 1, *Analyse par champs de transformation de matériaux élastoviscoplastiques multiphases : application aux combustibles MOX*, Thèse de doctorat, Aix Marseille 2.

Sachs, G., (1929), Zur Ableitung einer Fließbedingung, 94–97.

Schneider, M., Merkert, D., & Kabel, M., (2017), FFT-based homogenization for microstructures discretized by linear hexahedral elements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 109: 1461–1489.

Selmi, A., Doghri, I., & Adam, L., (2011), Micromechanical simulations of biaxial yield, hardening and plastic flow in short glass fiber reinforced polyamide, *International Journal of Mechanical Sciences*, 53: 696–706.

Suquet, P., (1995), Overall properties of nonlinear composites, 149–156.

Suquet, P. M., (1985), Local and global aspects in the mathematical theory of plasticity, *Plasticity Today*, 279–309.

Takao, Y., Chou, T. W., & Taya, M., (1982), Effective Longitudinal Young's Modulus of Misoriented Short Fiber Composites, *Journal of Applied Mechanics*, 49: 536–540.

Taylor, G. I., (1938), Plastic strain in metals, *Journal of the Institute of Metals*, 62: 307–324.

Tian, W., Qi, L., Su, C., Liang, J., & Zhou, J., (2016), Numerical evaluation on mechanical properties of short-fiber-reinforced metal matrix composites: Two-step mean-field homogenization procedure, *Composite Structures*, 139: 96–103.

Tsai, S. W., & Pagano, N. J., (1968), Invariant properties of composite materials, Presented at the Composite Material Workshop, Technomic Publishing Co.

Tucker III, C. L., & Liang, E., (1999), Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: review and evaluation, *Composites Science and Technology*, 59: 655–671. (cité p.171 et p.174)

Vinogradov, V., & Milton, G. W., (2008), An accelerated FFT algorithm for thermoelastic and non-linear composites, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 76: 1678–1695.

Voigt, W., (1889), Ueber die beziehung zwischen den beiden elasticitätsconstanten isotroper körper, *Annalen Der Physik*, 274: 573–587.

Walpole, L. J., (1966)a, On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems—I, *Journal of Mechanics Physics of Solids*, 14: 151–162.

Walpole, L. J., (1966)b, On bounds for the overall elastic moduli of inhomogeneous systems—II, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14: 289–301.

Walpole, L. J., (1969), On the overall elastic moduli of composite materials, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 17: 235–251.

Weng, G. J., (1992), Explicit evaluation of Willis' bounds with ellipsoidal inclusions, *International Journal of Engineering Science*, 30: 83–92.

Willis, J. R., (1977), Bounds and self-consistent estimates for the overall properties of anisotropic composites, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25: 185–202.

Willot, F., Gillibert, L., & Jeulin, D., (2013), Microstructure-induced hotspots in the thermal and elastic responses of granular media, *International Journal of Solids and Structures*, 50: 1699–1709.

Wu, C.-T. D., & McCullough, R. L., (1977), Constitutive relationships for heterogeneous materials, in: *Developments in Composites Materials-I* (GS Holister). (cité p.172 et p.181)

Conclusions et perspectives

Dans ces travaux, une étude multi-échelle d'un composite renforcé par 19% en volume de fibres courtes de carbone est menée. Son objectif est de proposer un modèle d'homogénéisation du comportement effectif du composite, ne considérant aucun compromis et enrichit localement par les variabilités mesurées dans la microstructure. La mise en synergie des techniques d'observation, de la caractérisation mécanique et de la modélisation numérique permettent de déterminer les spécificités de chaque échelle du matériau. A l'échelle microscopique, les constituants sont modélisés et caractérisés de manière à prendre en compte leurs interactions à l'échelle supérieure. A l'échelle mésoscopique, l'effet du procédé de fabrication du matériau est étudié grâce à la définition et la mesure des variabilités microstructurales. La modélisation du comportement du composite débute à cette échelle, avec l'identification d'une cellule élémentaire représentative du comportement unidirectionnel. A l'échelle macroscopique, le comportement de la cellule permet la calibration d'un modèle d'homogénéisation en champs moyens. Ce modèle, constitués de pseudo-grains, intègre un maximum de données mesurées au cours de l'étude afin d'approcher le comportement macroscopique effectif du matériau. Enfin, la pertinence du modèle est validée sur la simulation d'un essai sollicitant le matériau de manière complexe.

Rappel du contexte et des enjeux de l'étude

Ces travaux s'inscrivent dans une démarche d'allègement des structures aéronautiques soumise à la réduction du coût des matériaux utilisés. Grâce à la possibilité d'en faire des pièces structurelles complexes, les composites renforcés en fibres courtes sont identifiés pour répondre à ces enjeux. Ces travaux de thèse visent à étudier et modéliser un composite à matrice thermoplastique, renforcée par 25% en masse de fibres courtes de carbone. Afin de mieux dimensionner des pièces de structure, leur comportement mécanique doit être correctement décrit à l'aide de la simulation numérique. Le moulage par injection, utilisé pour la fabrication du matériau étudié, procure un des avantages majeurs à ce type de matériau : la possibilité de créer des pièces de grande série à la géométrie élaborée. Cependant, ce procédé est également à l'origine de la complexité du matériau, en générant une microstructure complexe responsable de son comportement macroscopique

Un tel matériau peut donc être considéré à plusieurs échelles : ses constituants, sa microstructure, dans laquelle sont positionnés les constituants et l'échelle de la structure, composée par le matériau à l'état massif. L'objectif de cette étude est de plonger au cœur du matériau, via une démarche multi-échelle, afin d'en observer les spécificités et de les prendre en compte dans une démarche de modélisation pertinente. Cette démarche doit permettre l'amélioration de méthodes existantes grâce à l'intégration de ces spécificités. Le modèle résultant est utilisable dans l'industrie, dans le but d'enrichir localement le comportement d'une pièce de structure. Les principaux résultats obtenus sont résumés ci-dessous.

Conclusions par échelles

Des résultats sont obtenus aux différentes échelles étudiées dans ces travaux. Ce paragraphe est une synthèse de l'ensemble de ces résultats pour chaque échelle.

A l'échelle des constituants, la matrice Polyétherimide (amorphe) a été modélisée à l'aide d'un critère de plasticité de Drucker-Prager généralisé. Au travers d'essais de traction conventionnels et complexes, la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique a été caractérisée. Il s'agit en réalité de pouvoir rendre compte du comportement de la matrice, lorsqu'elle est confinée par la présence des fibres de carbone dans son voisinage. De cette manière, un seul comportement de matrice est utilisé à chaque échelle au cours de la démarche. L'intégration explicite du comportement, à l'aide de la *θ-méthode* a été implémentée dans le logiciel Zset. La validation de la pertinence du critère généralisé, vis-à-vis de sa formulation linéaire (et d'un critère de von-Mises) a été vérifiée sur le comportement global, l'ouverture d'entaille et les champs de déformation locaux. Les résultats ont démontré que si la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique n'est pas correctement prise en compte, une erreur systématique est faite sur la prédiction du comportement local. Sur l'ouverture d'une entaille, cet écart donne une différence en contrainte d'au moins 37% sur la matrice seule et d'environ 10% sur le matériau composite.

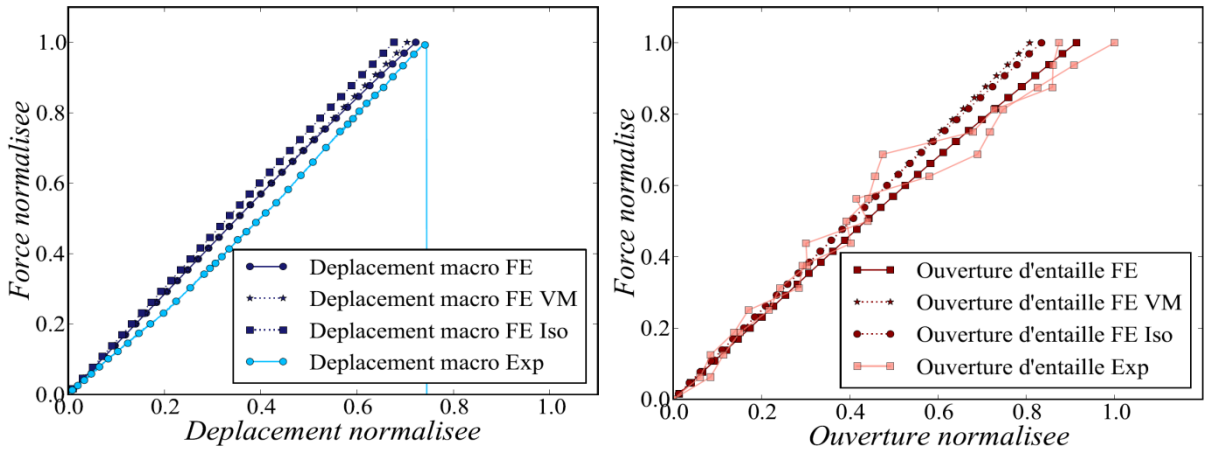
Un comportement linéaire et isotrope transverse des fibres de carbone a été identifié par une méthode inverse en champs moyens, à l'aide des comportements réversibles de la matrice et du composite. Une étude de sensibilité du comportement des fibres a été menée afin d'identifier les paramètres d'influence de premier ordre sur le comportement du composite : la fraction volumique de fibres, leur facteur de forme et leur module longitudinal.

L'échelle mésoscopique, définie comme l'échelle de la microstructure, a été abordée en deux étapes : sa mesure et sa modélisation unidirectionnelle. L'étude de la microstructure est basée sur la mesure de ses variabilités : la fraction volumique de fibres, les orientations et les longueurs des fibres et leur proximité au sein de la microstructure. La fraction volumique de fibre a été mesurée en microscopie optique et par pyrolyse. Les autres variabilités de la microstructure ont été mesurées à l'aide de la tomographie RX en contraste de phase. Pour ces analyses, la fraction volumique est une donnée d'entrée à une méthode de segmentation par corrélation de cylindres. Cette méthode a été utilisée afin d'identifier chaque fibre séparément et d'en mesurer l'orientation et la forme. La proximité des fibres, relative à l'état de confinement de la matrice, a été évaluée à l'aide de l'étude de la fraction volumique locale de fibres dans un cube d'observation. Ce cube permet l'observation de la distribution de la fraction volumique locale de fibres dans l'ensemble de la microstructure et donne ainsi une indication sur sa morphologie.

La première partie de la modélisation traite de la définition d'une cellule élémentaire statistiquement représentative (CESR) du comportement unidirectionnel du composite. Une méthode de génération automatique des cellules a été développée et utilise les atouts des logiciels Digimat-FE, Abaqus et Zset. La fraction volumique mesurée et la longueur moyenne des fibres sont utilisées comme données d'entrée à la procédure de génération de cellules périodiques sous Digimat-FE. Un maillage adaptatif a été réalisé sous Abaqus et permet un raffinement local de la taille des mailles, donnant ainsi la possibilité de solliciter les cellules dans le domaine réversible linéaire (et irréversible par la suite). Les calculs ont été menés sous Zset, grâce auquel des conditions aux limites spécifiques pour les maillages non-coïncidents peuvent être appliqués. Des indicateurs globaux, basé sur la performance de cellules périodiques et leur degré d'isotropie transverse, permettent le classement des cellules et l'identification d'une famille éligibles à la CESR. Un indicateur local a été défini afin de proposer une méthode de génération de potentielles CESR, sans calculs par éléments finis. Enfin, la fraction volumique locale de la cellule a été comparée à la distribution de celle de la microstructure afin d'identifier une CESR finale. Cette cellule est statistiquement représentative du comportement mécanique unidirectionnel et de la microstructure du matériau composite de l'étude. La démarche proposée se veut applicable à tout type de matériaux composite renforcé en fibres courtes.

L'échelle macroscopique, qui concerne le comportement effectif du composite, traite essentiellement de la modélisation du matériau. A cette échelle, les matériaux renforcés en fibres courtes ne peuvent se modéliser qu'à l'aide de méthodes d'homogénéisation en champs moyens. Une démarche d'homogénéisation originale s'appuyant sur procédure en deux étapes conventionnelle a été proposée afin d'enrichir la prédiction du comportement local du matériau. L'échelle mésoscopique a été homogénéisée par un système à double-motif de Mori-Tanaka direct et inverse, eux-mêmes homogénéisés avec un modèle auto-cohérent. Ce système a été calibré afin de correspondre au comportement effectif de la CESR. La brique de base du modèle, appelée pseudo-grain, ainsi constituée a été ensuite utilisée pour reconstituer les ensembles de fibres orientées de la microstructure. Pour ce faire, la microstructure réelle a été discrétisée en neufs couches, dans lesquelles deux cent fibres ont été tirées aléatoirement. Ces fibres constituent chacune un grain d'orientation et de longueur unique. L'ensemble de ces grains a enfin été homogénéisé à l'aide d'un modèle de Voigt. Chaque modèle d'homogénéisation est implémenté spécifiquement sous Zset. Le comportement effectif du composite obtenu grâce à cette démarche est validé expérimentalement dans le domaine réversible linéaire et irréversible du composite sollicité en traction suivant sept angles. Le modèle est enfin validé sur un essai de traction sur une éprouvette axisymétrique entaillée, réalisé en tomographie RX *in-situ.* Le modèle reproduit à la fois le comportement macroscopique et l'ouverture d'entaille de l'éprouvette. Bien que basée sur une démarche existante en deux étapes, la méthode développée dans ces travaux apporte un degré de réalisme supplémentaire dans la modélisation en champs moyens de CRFC. En effet, la prise en compte du confinement matriciel, de la morphologie de la microstructure et de ses variabilités (orientations et longueurs réelles de fibres) contribuent à la constitution d'un modèle plus physique que l'existant et ne considérant aucun compromis.

Un retour sur les hypothèses initiales conforte la démarche adoptée dans ces travaux. En effet, le calcul sur éprouvette axisymétrique entaillée a également été mené sans prise en compte de la pression hydrostatique (sur la matrice) dans un cas, et avec des fibres au comportement isotrope dans un autre cas. Les résultats de ces calculs sont comparés à ceux obtenus en prenant ces hypothèses dans la démarche et sont tracés sur la *figure 41*.



(A) *(B)*

Figure 41 : Vérification de la pertinence de la prise en compte de la pression hydrostatique dans la matrice et de l'isotropie transverse des fibres dans la simulation de l'essai de traction sur éprouvette axisymétrique entaillé.
A : Courbes de force déplacement normalisées
B : Courbes de force-ouverture d'entaille normalisée

Les résultats de la simulation numérique avec un critère de von-Mises présentent peu de différence avec le comportement macroscopique de l'éprouvette. Cependant, l'ouverture de l'entaille est moins bien prévue lorsque ce critère est utilisé. Ces remarques sont similaires à celles évoquées dans la modélisation du comportement de la matrice (*partie 2, paragraphe 2.3.2*). De plus, elles mettent en évidence l'intérêt de prendre en compte la sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique : le comportement du matériau composite étudié est également dépendant de cette grandeur physique. Bien qu'elle soit meilleure afin de prédire l'ouverture d'entaille, la simulation avec des fibres isotropes donne de moins bon résultats sur la prédiction du comportement macroscopique de l'essai.

Perspectives

Dans les travaux présentés dans ce manuscrit, un certain nombre d'hypothèses ont été prises. Une partie des perspectives consistent à revenir sur ces hypothèses. Une autre partie des concerne l'approfondissement de l'étude de la tomographie RX en contraste de phase. Enfin les dernières perspectives visent à proposer des améliorations et des cas d'utilisation du modèle d'homogénéisation en champs moyens.

A l'échelle des constituants

Le comportement des fibres de carbone du matériau a été identifié par méthode inverse à l'aide du comportement de la matrice et du composite. Cette méthode nécessite la considération d'hypothèses sur la longueur des fibres, leur orientation et le choix d'un modèle d'homogénéisation.

Bien entendu, en disposant des fibres seules sous la forme de bobine, il est possible de s'affranchir de l'identification par méthode inverse. En effet, des moyens d'essai permettent de caractériser le comportement longitudinal des fibres unitaires [*Bunsell et al.*, 1971]. De plus, le comportement transverse des fibres peut également être caractérisé grâce à un essai de compression diamétrale sur fibre unitaire (appelé aussi essai brésilien), notamment décrit par Josse [*Josse et al.*, 2004], [*Wollbrett-Blitz et al.*, 2016]. Ces types d'essai nécessitent cependant

une campagne d'au moins trente réalisations afin d'obtenir des valeurs significatives [*Vève*, 1987]. Ces études peuvent également permettre d'évaluer les mécanismes d'endommagement des fibres, comme a pu l'observer Wollbrett-Blitz dans ses travaux de thèse [*Wollbrett-Blitz*, 2014]. Enfin, de tels essais peuvent également mener à enrichir la compréhension du comportement des fibres de forme *« kidney shape »* observées dans la microstructure, comme a pu l'étudier Alves Fidelis sur des fibres naturelles [*Alves Fidelis et al.*, 2013].

Le comportement du PolyEtherImide étudié et modélisé dans ces travaux n'est pas considéré comme étant dépendant de la vitesse de sollicitation. Le choix de caractériser sa sensibilité à la pression hydrostatique a été préféré pour deux raisons :

- Du fait de la position de l'étude dans un régime quasi-statique uniquement
- Du fait de la faible quantité de matériau à disposition
- Du fait de la volonté de prioriser la prise en compte de l'influence des fibres dans le voisinage de la matrice sur son comportement

Bien que faiblement visqueux, le PEI reste une résine polymère dont la dépendance à la vitesse de sollicitation (ou à la température) peut être étudiée [*Johnson & Burlhis*, 1983]. Des essais mécaniques supplémentaires sur la matrice seule peuvent être menés : traction à différentes températures ou à différentes vitesses, essais de fluage en traction, afin de déterminer les paramètres du modèle de Norton non activés dans la modélisation.

A l'échelle de la microstructure

Une étude de la cinétique d'endommagement du composite pourrait permettre une meilleure compréhension générale de son comportement local. Les différents mécanismes pourraient ainsi être quantifiés et pris en compte dans le modèle d'homogénéisation.

Grâce à la tomographie RX in-situ, les récents travaux de Rolland [*Rolland et al.*, 2016], [*Rolland et al.*, 2017], sur l'étude des mécanismes d'endommagement dans les composites renforcés en fibres courtes, permettent d'en identifier quatre types : l'endommagement en bout de fibre, le déchaussement des fibres, la rupture des fibres et l'endommagement de la matrice. Le dernier mécanisme étant phénoménologiquement pris en compte par le critère de Drucker-Prager utilisé pour modéliser le comportement de la matrice, aucune implémentation concernant l'endommagement des fibres (ou issu des fibres) n'est considéré dans la démarche. Or, l'étude des faciès de rupture en traction, présentés sur la *figure 42,* prouve la présence de ces mécanismes d'endommagement au sein du matériau.

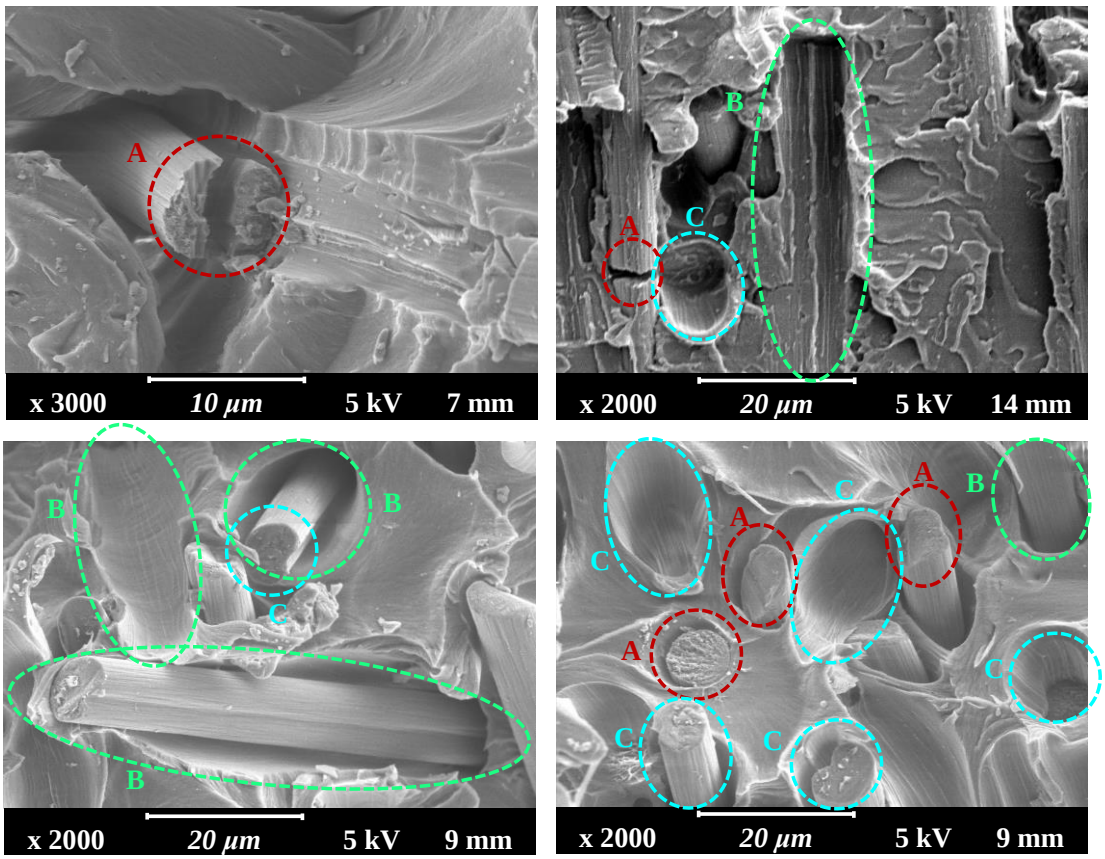


Figure 42 : Clichés en microscopie optique à balayage des faciès de rupture du composite sollicité en traction uniaxiale. Les lettres correspondant aux différents mécanismes de rupture :
A : Rupture des fibres
B : Déchaussement des fibres dans la matrice (décohésion de l'interface fibre-matrice)
C : Endommagement en bout de fibre

Les travaux de Rolland indiquent que les deux principaux mécanismes d'endommagement sont la rupture en bout de fibre et la rupture des fibres, où le second concerne deux-tiers de la population initiale de fibres [*Rolland et al.*, 2016]. La *figure 42* montre une proximité de la localisation de ces mécanismes, dont le couplage lors de la sollicitation n'est pas exclu. Bien qu'ils soient dépendants de l'orientation des fibres par rapport à l'axe de sollicitation, Rolland a observé que la majorité de ces mécanismes sont déclenchés par un confinement local. Ce confinement local étant résultant de la proximité et/ou du croisement des fibres, induisant une forte concentration de contrainte locale.

Au regard de la littérature et des résultats obtenus avec la procédure d'homogénéisation, une première approche de l'endommagement pourrait être implémentée dans le modèle, de même que dans les travaux de Despringres [*Despringres, 2015*]. Cette approche pragmatique ne concernerait que la rupture des fibres. Dans la pratique, il s'agit de mettre une contrainte seuil à partir de laquelle une fibre va être rompue. La comparaison entre la concentration des contraintes et l'endommagement réel de l'éprouvette au cœur de l'entaille semble montrer qu'une telle approche est pertinente. Un seul mode de rupture pourrait être considéré : lorsque la contrainte seuil est atteinte, la fibre est *rompue* en deux fibres dont le facteur de forme est divisé par deux, la fraction volumique globale restant ainsi constante. Dans une telle approche, il est possible d'identifier la contrainte seuil. En effet, en étudiant l'orientation et la proximité des fibres rompues dans la microstructure au cours de l'essai (via la méthode du cube

d'observation développée dans ces travaux), la contrainte seuil pourrait être appliquée dans le modèle d'homogénéisation de sorte qu'elle concerne la même population de fibres. De plus, des essais sur fibre peuvent permettre d'encadrer les valeurs de contrainte à rupture des fibres dans la direction longitudinale.

Pour de tels travaux, une meilleure résolution des observations en tomographie RX en contraste de phase permettrait d'observer plus finement les endommagement et ruptures locaux, soit au minimum un micromètre par pixel. L'endommagement et la rupture du matériau ne sont jamais directement abordés dans ces travaux de thèse. Il est cependant à noter que dans le cas de l'éprouvette axisymétrique entaillée, l'endommagement ne représente que 10% du volume total de l'éprouvette à 95% de la charge à rupture. Cette observation, ajoutée à la courbe de charge déplacement de l'essai, tend à montrer que la rupture macroscopique de l'éprouvette est causé par une forte augmentation des phénomènes d'endommagement, amorcés lors de l'essai, dans les derniers instants de la sollicitation. Le lien entre la cinétique d'endommagement et la rupture complète du matériau ne peut alors être fait que dans le cas d'un essai continu en tomographie RX *in-situ*. Lors de la campagne expérimentale au synchrotron Soleil, des tests sur la machine de traction « *Bulky* » semble montrer qu'elle pourrait être capable de réaliser de tels essais. Une première étape de recalage des images obtenues est alors à développer afin d'exploiter ces données.

A l'échelle macroscopique

Bien qu'il ne soit pas envisageable de réaliser des calculs de structures complètes à l'aide du modèle d'homogénéisation proposé dans ces travaux, celui-ci pourrait cependant permettre plusieurs études. En tant que telle, la procédure d'homogénéisation développée peut s'imaginer comme un modèle de substitution local aux procédures existantes pour le calcul de structure. En effet, les modèles conventionnels sont généralement performants pour la prédiction du comportement macroscopique et optimisés en termes de temps de calcul. Or, dans le cas d'une structure à géométrie complexe, la procédure proposée peut remplacer localement ces modèles et ainsi être plus pertinente pour rendre compte du comportement de local de la pièce. De plus, des études en lien direct avec la littérature sont possibles :

- L'extension des travaux de Christensen [*Christensen & al.*, 1992] et de Qiu [*Qiu & Weng*, 1990] sur les limitations du modèle de Mori-Tanaka, intégrant des inclusions ayant différents facteurs de forme, avec et sans la procédure d'isotropisation du tenseur d'Eshelby [*Doghri & Ouaar*, 2003].

- En partant des travaux d'Advani et Tucker [*Advani & Tucker III*, 1987], [*Advani & Tucker*, 1990], le modèle pourrait permettre d'identifier l'équation de fermeture la plus pertinente pour l'homogénéisation d'un matériau renforcés en fibres courtes, voire d'en déterminer une forme spécifique s'adaptant à un matériau. Le modèle d'homogénéisation se placerait ainsi en tant que modèle de *calibration* des modèles existants.

L'approche par motifs morphologiques représentatifs développée dans ces travaux de thèse ne fait intervenir que deux motifs. Il n'est pas exclu d'intégrer plus de motifs (composite ou de matrice seule) afin de multiplier les modes de comportement pris en compte dans la brique de base. Via cette approche, d'autres types d'inclusions peuvent également être intégrées à la procédure d'homogénéisation. L'extension de l'ensemble des travaux à d'autres types de sollicitations (traction biaxiale, charge-décharge, compression,…) et à différentes températures permettrait de consolider la modélisation du matériau sous chargements complexes. Enfin, la démarche d'homogénéisation proposée pourrait être reprise et optimisée afin de déterminer le degré minimal et le nombre de variabilités à intégrer afin de la rendre plus performante.

Bibliographie

Advani, S. G., & Tucker, C. L., (1990), Closure approximations for three-dimensional structure tensors, *Journal of Rheology*, 34: 367–386.

Advani, S. G., & Tucker III, C. L., (1987), The use of tensors to describe and predict fiber orientation in short fiber composites, *Journal of Rheology*, 31: 751–784.

Alves Fidelis, M. E., Pereira, T. V. C., Gomes, O. da F. M., de Andrade Silva, F., & Toledo Filho, R. D., (2013), The effect of fiber morphology on the tensile strength of natural fibers, *Journal of Materials Research and Technology*, 2: 149–157.

Bunsell, A. R., Hearle, J. W. S., & Hunter, R. D., (1971), An apparatus for fatigue-testing of fibres, *Journal of Physics E: Scientific Instruments*, 4: 868.

Christensen, R., Schantz, H., & Shapiro, J., (1992), On the range of validity of the Mori-Tanaka method, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 40: 69–73.

Despringre, N., (2015), *Analyse et modélisation d'endommagement et de déformation en gatigue multiaxiale de matériaux composites: polyamide renforcé par des fibres courtes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, Metz, France.

Doghri, I., & Ouaar, A., (2003), Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures, *International Journal of Solids and Structures*, 40: 1681–1712.

Johnson, R. O., & Burlhis, H. S., (1983), Polyetherimide: A new high-performance thermoplastic resin, *Journal of Polymer Science: Polymer Symposia*, 70: 129–143.

Josse, G., Sergot, P., Creton, C., & Dorget, M., (2004), Measuring interfacial adhesion between a soft viscoelastic layer and a rigid surface using a probe method, *The Journal of Adhesion*, 80: 87–118.

Qiu, Y. P., & Weng, G. J., (1990), On the application of Mori-Tanaka's theory involving transversely isotropic spheroidal inclusions, *International Journal of Engineering Science*, 28: 1121–1137.

Rolland, H., Saintier, N., & Robert, G., (2016), Damage mechanisms in short glass fibre reinforced thermoplastic during in situ microtomography tensile tests, *Composites Part B: Engineering*, 90: 365–377. (cité p.242 et p.243)

Rolland, H., Saintier, N., Wilson, P., Merzeau, J., & Robert, G., (2017), In situ X-ray tomography investigation on damage mechanisms in short glass fibre reinforced thermoplastics: Effects of fibre orientation and relative humidity, *Composites Part B: Engineering*, 109: 170–186.

Vève, J.-C., (1987), *Interpretation microsctructurale de l'endommagement par fatigue mécanique des fibres de polyester pour le renforcement des élastomères*, Thèse de doctorat, École nationale supérieure des mines, Paris, France.

Wollbrett-Blitz, J., (2014), *Comportement mécanique longitudinal et transverse, micro-mécanismes de déformation et effet de la température sur la fibre Kevlar® 29*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Wollbrett-Blitz, J., Joannès, S., Bruant, R., Le Clerc, C., Romero De La Osa, M., Bunsell, A., & Marcellan, A., (2016), Multiaxial mechanical behavior of aramid fibers and identification of skin/core structure from single fiber transverse compression testing, *Journal of Polymer Science Part B: Polymer Physics*, 54: 374–384.

ANNEXES

TABLE DES MATIERES

Annexe A……245
Ecriture du modèle de comportement de la matrice PEI 245
Calcul de la matrice Jacobienne 248
Validation de l'implémentation du modèle de comportement de la matrice PEI..... 252
Expression numérique de la matrice de rigidité identifiée 255

Annexe B……256
Expressions du tenseur d'Eshelby en milieu isotrope et isotrope transverse 256

Annexe C……262
Calibration complète du modèle à double motif 262
Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif 269

Bibliographie..... 275

Annexe A

L'annexe A fait référence à la première partie du manuscrit, traitant de l'échelle microscopique d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone. Le premier paragraphe s'intéresse à l'écriture du modèle de comportement de la matrice PEI. Dans le second paragraphe, le calcul de la matrice tangente nécessaire à l'intégration explicite du comportement est présenté. Le troisième paragraphe traite de la validation de l'implémentation du modèle de comportement de la matrice.

Ecriture du modèle de comportement de la matrice PEI

L'écriture d'un modèle de comportement fait appel à la thermodynamique des milieux continus. Une telle approche permet de décrire les phénomènes physiques opérant dans le milieu continu et homogène équivalent considéré par l'évolution de variables d'état internes. Les variables d'état généralement considérées dans ce contexte sont la température et la déformation totale. Dans ces travaux, les transformations de la matrice sont considérées isothermes. L'unique variable d'état observable considérée est donc la déformation totale ε, constituée par la somme des variables d'état tensorielles $\bar{\varepsilon}_{el}$ et $\bar{\varepsilon}_{ir}$, qui décrivent respectivement la déformation réversible linéaire (élastique, par analogie avec les métaux) et la déformation irréversible *(A.1)*. Les variables duales associées sont $\bar{\sigma}_{el}$ et $\bar{\sigma}_{ir}$, respectivement les contraintes linéaire et irréversible.

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{el} + \bar{\varepsilon}_{ir} \qquad (A.1)$$

La dimension du domaine d'élasticité, intervient dans *f* en tant que variable d'écoulement irréversible scalaire. Son évolution s'exprime en fonction de la déformation irréversible cumulée *p*. L'écoulement irréversible cinématique, proposé par Prager [*Prager*, 1955] décrit quant à lui la position du domaine de réversibilité par la variable tensorielle *X*, fonction de l'état de la déformation irréversible. Son évolution est exprimée par α¸ la déformation généralisée. Les fonctions de charge de l'écoulement irréversible isotrope et cinématique sont respectivement exprimées dans les relations. Les fonctions de charge de l'écoulement irréversible isotrope et cinématique sont respectivement exprimées dans les relations *(A.2)* et *(A.3)*.

$$f(\bar{\sigma}, R) = f(\bar{\sigma}) - R(p) \qquad (A.2)$$

$$f(\bar{\sigma}, X) = f(\bar{\sigma} - \bar{X}) \qquad (A.3)$$

L'ensemble des variables d'état internes et de leurs variables duales nécessaires à la modélisation de la matrice sont récapitulées dans le *tableau a-1*.

Variables d'état internes	Variables d'état duales
$\bar{\varepsilon}_{el}$	$\bar{\sigma}_{el}$
$\bar{\varepsilon}_{ir}$	$\bar{\sigma}_{ir}$
p	R
$\bar{\alpha}$	$\bar{X}$

Tableau A-1: Variables d'états internes et duales pour la modélisation du comportement du polymère

Le tenseur des déformations réversibles, est relié au tenseur des contraintes par la matrice de rigidité *[C₀]* grâce à la loi de Hooke *(A.4)* (en notation matricielle et *(1.8)* en notation

tensorielle, pour rappel). Les autres lois d'état permettant le calcul des variables duales à partir des variables internes sont exprimées par les relations *(A.6)* et *(A.7)* et découlent du potentiel thermodynamique. Pour des solides, l'énergie libre spécifique est choisie comme potentiel [*Lemaitre et al.*, 2009].

$$\{\sigma\} = [C_0]\{\varepsilon_{el}\} \quad (A.4)$$

$$\bar{\sigma} = \bar{\bar{C}}_0 : \bar{\varepsilon}_{el} \quad (A.5)$$

$$R = R_0 + H\,p + Q\,[1 - e^{-bp}] \quad (A.6)$$

$$\bar{X} = \frac{2}{3}\,C\bar{\alpha} \quad (A.7)$$

Où R_0 est la limite du comportement élastique du polymère. H, Q et b sont les paramètres de l'écoulement irréversible isotrope, qui définissent donc la forme de sa surface de charge et C le paramètre de l'écoulement irréversible cinématique déterminant la position du domaine élastique.

Le comportement viscoplastique du polymère est modélisé grâce à la généralisation du modèle de Norton [*Norton*, 1929], avec les coefficients matériau N et K. Cette dernière hypothèse de modélisation permet l'expression des lois complémentaires définissant l'évolution des variables internes du système. Ces lois, données par les relations *(A.8)* à *(A.10)*, où $\bar{\bar{n}}$ est la direction de l'écoulement, décrivent les transformations irréversibles du matériau.

$$\dot{\bar{\bar{\varepsilon}}}_{ir} = \left(\frac{f}{K}\right)^N \bar{\bar{n}} = \left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial f}{\partial \bar{\bar{\sigma}}} \quad (A.8)$$

$$\dot{p} = -\left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial f}{\partial R} \quad (A.9)$$

$$\dot{\bar{\bar{\alpha}}} = -\left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial f}{\partial X} \quad (A.10)$$

La *θ-méthode* de type *point milieu généralisé* [*Besson et al.*, 2001] implémentée dans le modèle nécessite l'évaluation de l'incrément général des variables d'état ΔZ. Cette évaluation est effectuée grâce à un point intermédiaire $t + \theta t$ *(A.11)*.

$$\Delta Z = \Delta t \dot{Z}^{t+\theta\Delta t} = \Delta t F\left(Z^{t+\theta\Delta t}\right) \quad (A.11)$$

Avec : $Z^{t+\theta\Delta t} = Z^t + \theta\Delta t$.

F est la fonction d'écoulement choisie, définie par l'expression *(A.12)*, où C et D sont les paramètres de l'écoulement irréversible cinématique [*Lemaitre et al.*, 2009].

$$F = f + \frac{3}{4}\frac{D}{C}\bar{X}:\bar{X} \quad (A.12)$$

A chaque incrément de temps Δt, les équations constitutives sont écrites en termes d'incréments supposés des variables d'état. La résolution du système non-linéaire *(A.13)* permet finalement l'évaluation de ΔZ en introduisant le résidu local R dont la valeur est proche de zéro.

$$R^Z = \Delta Z - \Delta\lambda F(Z^t + \theta\Delta Z) < \epsilon \qquad (A.13)$$

Dans le cadre de la loi de comportement définie précédemment : $\Delta\lambda = \left(\frac{f}{K}\right)^N$, ce système d'équation non-linéaire est résolu à l'aide d'un algorithme de Newton-Raphson disponible dans Z-set [*Transvalor SA*, 2015]. Cet algorithme nécessite le calcul de la matrice Jacobienne définie dans l'expression *(A.14)*.

$$J = \frac{\partial R^Z}{\partial \Delta Z} = 1 - \Delta F \left[\frac{\partial F}{\partial \Delta Z}\right]^{t+\theta\Delta t} \qquad (A.14)$$

La fonction résiduelle R peut s'exprimer par sa dépendance aux résidus élastiques, irréversibles et d'écoulement irréversible, respectivement R^e, R^{irr} et R^α, comme suit *(A.15)*.

$$\bar{R} = \left(\bar{R}^{el}, \bar{R}^{irr}, \bar{R}^{\alpha}\right) \qquad (A.15)$$

La partition des déformations donne l'expression des incréments de déformation totale en fonction des incréments de déformation élastiques et irréversibles *(A.16)*.

$$\Delta\bar{\varepsilon} = \Delta\bar{\varepsilon}^{el} + \Delta\bar{\varepsilon}^{p} \qquad (A.16)$$

Le résidu élastique est défini en remplaçant l'expression de l'incrément de déformation irréversible *(A.8)* et s'écrit comme suit *(A.17)*.

$$\bar{R}^{el} = \Delta\bar{\varepsilon}^{el} - \Delta\bar{\varepsilon} + \left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = 0 \qquad (A.17)$$

De la même manière et à l'aide de la définition de $\dot{p}$ *(A.9)*, le résidu irréversible est donné par l'expression *(A.18)*.

$$\bar{R}^{irr} = \Delta p + \left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial F}{\partial R} = 0 \qquad (A.18)$$

Le résidu de la déformation généralisée, s'exprime à l'aide de la relation *(A.10)* et s'exprime en fonction de F *(A.19)*.

$$\bar{R}^{\alpha} = \Delta\bar{\alpha} + \left(\frac{f}{K}\right)^N \frac{\partial F}{\partial \bar{X}} = 0 \qquad (A.19)$$

Calcul de la matrice Jacobienne

L'expression *(A.14)* permet l'écriture de la matrice Jacobienne *(A.20)* par l'ensemble de ses termes en fonction des expressions des résidus *(A.18)* à *(A.12)*.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{R}^e}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \\ \frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \\ \frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^e} & \frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} \end{bmatrix} \qquad (A.20)$$

Les dérivées partielles des termes de la matrice Jacobienne sont calculées séparément pour chaque résidu. Pour le résidu élastique, leur expression est donnée par les équations *(A.21)* à *(A.26)*.

- $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = \bar{\bar{1}} + \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \bar{\bar{C}} \theta \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2} \bar{\bar{C}} \theta \qquad (A.21)$$

  $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = \bar{\bar{1}} + \theta \left[\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \otimes \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2}\right] \bar{\bar{C}} \qquad (A.22)$$

  $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = \bar{\bar{1}} + \theta \left[\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{n-1} \bar{n} \otimes \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2}\right] \bar{\bar{C}} \qquad (A.23)$$

- $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta p} = \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1} \frac{\partial f}{\partial p} \theta \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma} \partial p} \theta \qquad (A.24)$$

- $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = \left[\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1} \frac{\partial f}{\partial \bar{X}} \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}} \theta \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{s} \partial \bar{X}} \theta\right] \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}} \qquad (A.25)$$

  $$\frac{\partial \bar{R}^{el}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = -\theta \left[\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1} \bar{n} \otimes \bar{n} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{s}^2}\right] \frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}} \qquad (A.26)$$

Les équations aux dérivées partielles du résidu irréversible sont données par les relations *(A.27)* à *(A.32)*.

- $$\frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{n-1} \theta \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \bar{\bar{C}} \frac{\partial f}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial f_a}\right)}{\partial \bar{\sigma}} \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right) \bar{\bar{C}} \theta + \left(\frac{f}{K}\right)^{N} \frac{\partial f}{\partial f_a} \frac{\partial\left(\frac{\partial f_a}{\partial R}\right)}{\partial \bar{\sigma}} \bar{\bar{C}} \theta \qquad (A.27)$$

$$\frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\bar{\bar{C}}\frac{\partial f}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial f_a}{\partial R}\bar{\bar{C}}\theta + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial R \partial \bar{\sigma}}\bar{\bar{C}}\theta \quad (A.28)$$

- $\frac{\partial \bar{\bar{R}}^{irr}}{\partial \Delta p} = \bar{\bar{1}} + \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\theta\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial f_a}\right)}{\partial p}\frac{\partial f_a}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)}{\partial p}\theta$ (A.29)

$$\frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta p} = \bar{\bar{1}} + \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\theta\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\left(\frac{\partial {f_a}^2}{\partial R}\right)\frac{\partial R}{\partial p} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\theta\frac{\partial f}{\partial f_a}\left(\frac{\partial {f_a}^2}{\partial R}\right)\frac{\partial R}{\partial p} \quad (A.30)$$

- $\frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial \bar{X}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial R} + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{X}}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\theta + \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial R \partial \bar{\alpha}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\theta$ (A.31)

$$\frac{\partial \bar{R}^{irr}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = -\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\frac{\partial f}{\partial R} - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\theta - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial R \partial \bar{\alpha}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\theta \quad (A.32)$$

Les équations aux dérivées partielles du résidu de la variable interne α sont données par les relations *(A.33)* à *(A.38)*.

$$\bar{R}^{\alpha} = \Delta\alpha - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}X\right) = \Delta\bar{\alpha} - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right) \quad (A.33)$$

- - $\frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = -\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\bar{\bar{C}}\left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right) - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}}\right)}{\partial \bar{\sigma}}\theta\,\bar{\bar{C}}\right)$ (A.34)

$$\frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\varepsilon}^{el}} = -\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\bar{n} \otimes \left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right)\bar{\bar{C}} - \theta\left(\frac{f}{K}\right)^{N}\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2}\bar{\bar{C}} \quad (A.35)$$

- $\frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta p} = -\left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial p}\left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right) - \left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}\partial p}\sigma\right)$ (A.36)

- $\frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = \bar{\bar{1}} - \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\frac{\partial f}{\partial \bar{X}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\sigma}}\left(\bar{\bar{n}} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right) - \theta\left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{X}\partial \bar{s}}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}}\right)$ (A.37)

$$\frac{\partial \bar{R}^{\alpha}}{\partial \Delta \bar{\alpha}} = \bar{\bar{1}} - \left(\frac{N}{K}\right)\left(\frac{f}{K}\right)^{N-1}\theta\bar{n} \otimes \left(\bar{n} - \frac{3}{2}\frac{D}{C}\bar{X}\right)\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\sigma}} + \theta\left(\frac{f}{K}\right)^{N}\left(-\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{s}^2}\frac{\partial \bar{X}}{\partial \bar{\alpha}} + D\bar{\bar{1}}\right) \quad (A.38)$$

La fonction de charge s'exprime selon *(A.39)* et *(A.40)*, et la définition de ses dérivées partielles est nécessaire afin de calculer les résidus présentés ci-avant. Les différentes dérivées partielles de la fonction de charge sont données de l'équation *(A.42)* à *(A.58)*.

$$f_a = {J_2}^a - \beta R^a(p) + (\beta - 1) I_1 (\beta - \bar{X}) R^{a-1}(p) \tag{A.39}$$

$$f_a = \left[\frac{3}{2}(\bar{\sigma} - \bar{X}) : (\bar{\sigma} - \bar{X})\right]^{a/2} - \beta R^a(p) + (\beta - 1) I_1 (\beta - \bar{X}) R^{a-1}(p) \tag{A.40}$$

$$f(\bar{\sigma}, \bar{X}, \bar{p}) = signe(f_a) |f_a|^{1/a} = (f_a)^{1/a} \tag{A.41}$$

$$\frac{\partial f}{\partial f_a} = \frac{1}{a} [f_a]^{\left(\frac{1}{a} - 1\right)} \tag{A.42}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2} = \frac{1}{a}\left[\frac{1}{a} - 1\right] f_a^{\left(\frac{1}{a} - 2\right)} \tag{A.43}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p} = Qb\, exp(-bp) \tag{A.44}$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} = -Qb^2\, exp(-bp) \tag{A.45}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} a (\bar{\sigma} - \bar{X}) {J_2}^{(a-2)} + (\beta - 1) \bar{\bar{1}} R(p) = -\frac{\partial f_a}{\partial X} \tag{A.46}$$

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial \sigma^2} = \frac{3}{2} a\, {J_2}^{(a-2)} \left[\bar{\bar{1}} + \frac{3}{2}(a-2) {J_2}^{-2} (\bar{\sigma} - \bar{X}) \otimes (\bar{\sigma} - \bar{X})\right] \tag{A.47}$$

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial \sigma \partial R} = (\beta - 1)(a - 1) R^{(a-2)}(p) \bar{\bar{1}} \tag{A.48}$$

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial R \partial \sigma} = (\beta - 1)(a - 1) R^{(a-2)}(p) \bar{\bar{1}} \tag{A.49}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial R} = -\beta a R^{(a-1)} + (\beta - 1) I_1 (\bar{\sigma} - \bar{X})(a - 1) R^{(a-2)} \tag{A.50}$$

$$\frac{\partial^2 f_a}{\partial R^2} = -\beta a (a - 1) R^{(a-2)} + (\beta - 1)(a - 1)(a - 2) R^{(a-3)} I_1 (\bar{\sigma} - \bar{X}) \tag{A.51}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} = \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} \tag{A.52}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\left[\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}}\right]^2 + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial \bar{\sigma}^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} \otimes \frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial \bar{\sigma}^2} \tag{A.53}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}\partial p} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial f_a}\right)}{\partial p}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial\left(\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}}\right)}{\partial p} \tag{A.54}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}\partial p} = \frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial p}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial \bar{\sigma}\partial R}\frac{\partial R}{\partial p} \tag{A.55}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{\sigma}\partial p} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial f_a}{\partial \bar{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial \bar{\sigma}\partial R}\right]\frac{\partial R}{\partial p} \tag{A.56}$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial p} \tag{A.57}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial {f_a}^2}\left(\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial^2 f_a}{\partial R^2}\left(\frac{\partial R}{\partial p}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial f_a}\frac{\partial f_a}{\partial R}\frac{\partial^2 R}{\partial p^2} \tag{A.58}$$

Validation de l'implémentation du modèle de comportement de la matrice PEI

Trois étapes de validation sont menées sur le modèle de comportement afin d'en vérifier l'implémentation dans le code de calcul. Pour chacune de ces vérifications, un essai de traction uniaxiale est simulé sur un élément de volume dont le comportement est équivalent à celui d'un matériau isotrope fictif.

La première vérification consiste à vérifier que pour $a = 1$ et $\beta = 1$, le comportement obtenu correspond bien à celui d'un comportement élastoplastique parfait avec un critère de von-Mises implémenté disponible dans la version native de Z-set. Pour ce cas de vérification, quatre comportements tests sont simulés avec un modèle de von-Mises original et comparés au modèle implémenté dans sa version von-Mises. L'élément de maillage est sollicité en traction quasi-statique uniaxiale pour chaque comportement tests. Les courbes de contrainte-déformation des quatre calculs (de *C1* à *C4*) sont tracées sur la *figure a-1* et le *tableau a-2* donne les paramètres de chaque comportement test simulé. Ces résultats montrent que pour $a = 1$ et $\beta = 1$, le modèle reproduit strictement le comportement d'un matériau élastoplastique avec un critère de von-Mises.

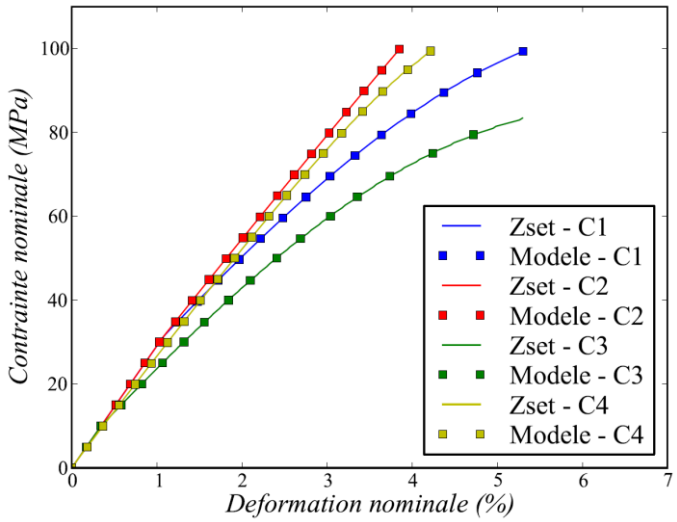


Figure A-1 : Vérification de l'implémentation du modèle de comportement en comparaison avec un critère de von-Mises associé à un écoulement purement plastique

Paramètre	C1		C2		C3		C4	
Calcul	Modèle	Zset	Modèle	Zset	Modèle	Zset	Modèle	Zset
E (MPa)	2910		2910		2910		2910	
Poisson	0,4		0,4		0,4		0,4	
R_0 *(MPa)*	30		30		30		2	
Q	80		200		80		100	
b	100		100		100		300	
C	30		30		30		3000	
D	500		500		300		500	
a	1		1		1		1	
B	1		1		1		1	
N	2		2		2		2	
K	100		100		100		100	

Tableau A-2 : Paramètres des comportements tests simulés pour la vérification de l'implémentation du modèle dans sa forme von-Mises a = 1 et β = 1

La seconde vérification consiste à valider la prise en compte de la dépendance au temps du modèle implémenté. Un écoulement de Norton [*Norton*, 1929] est rajouté au comportement original de Z-set. Les paramètres de viscosité *N* et *K* sont choisis de manière à simuler le comportement d'un matériau peu visqueux (*N=2*, *K=100*). Quatre calculs sont menés en parallèle sur le modèle implémenté et sur le modèle élasto-viscoplastique disponible dans la version native du code de calcul. Le comportement *C1* de la vérification précédente est simulé en faisant varier la vitesse de sollicitation. Les courbes de contrainte-déformation de ces quatre calculs sont tracées sur la *figure a-2*.

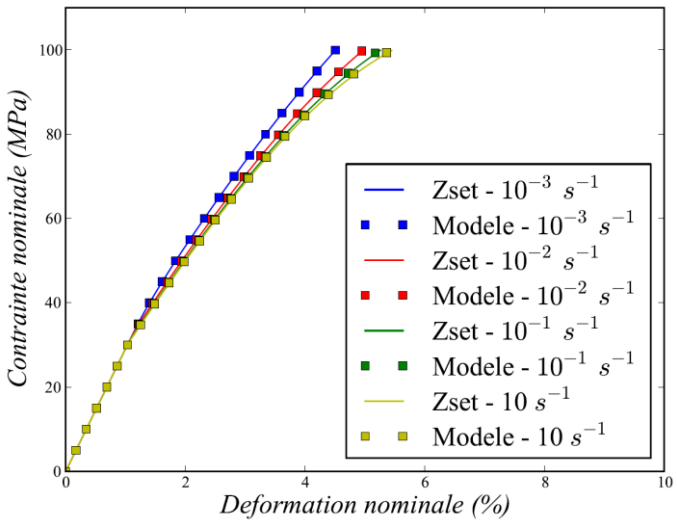


Figure A-2 : Vérification de l'implémentation du modèle de comportement en comparaison avec un critère de von-Mises associé à un écoulement viscoplastique

Le modèle implémenté reproduit de manière systématique le comportement d'un matériau élasto-viscoplastique avec un critère de von-Mises. La vitesse de sollicitation ayant une influence sur le comportement simulé, la dépendance au temps du modèle est bien prise en compte dans le cas de matériaux peu visqueux.

Le modèle implémenté dans Z-set n'ayant pas de version comparable dans la version native du code, la dernière étape de vérification consiste à comparer la simulation d'un comportement évalué suivant les deux méthodes d'intégration : explicite (*Runge-Kutta*) et implicite (*θ-méthode*) dans le régime quasi-statique. Quatre comportements tests sont choisis arbitrairement et les calculs sont menés en parallèle avec les deux méthodes d'intégration implémentées. Le tracé des courbes de contrainte-déformation est donné par la *figure a-3*. Le *tableau a-3* donne également les paramètres des comportements tests simulés avec les deux méthodes d'intégration.

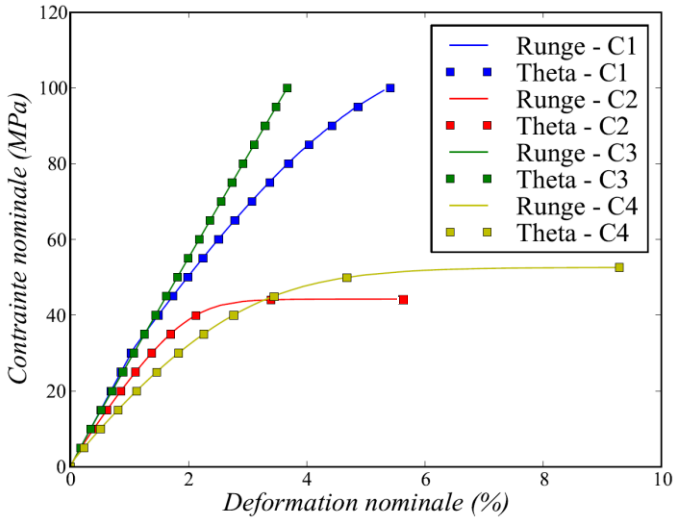


Figure A-3 : Vérification de l'implémentation du modèle de comportement : comparaison entre une intégration de Runge-Kutta et une θ-méthode

Paramètre	C1	C2	C3	C4
E (MPa)	2910	2910	2910	2910
Poisson	0,4	0,4	0,4	0,4
R_0 *(MPa)*	30	3	10	1
Q	80	40	300	50
b	100	300	150	100
C	30	30	30	400
D	500	500	100	1000
a	2	2	2	2
β	3	2	2	2
N	2	2	2	2
K	100	100	100	100

Tableau A-3 : Paramètres des comportements tests simulés pour la vérification de l'implémentation de la θ-méthode en comparaison avec la méthode de Runge-Kutta

Cette dernière étape de vérification de l'implémentation montre que les deux méthodes d'intégration donnent des résultats similaires, quels que soient les comportements tests simulés. Les trois étapes de vérification numérique présentées confirment l'implémentation correcte du modèle de comportement sous Zset. Les principaux avantages de l'intégration à l'aide de la *θ-méthode* vis-à-vis de Runge-Kutta sont donnés dans le *tableau a-4*. Ces ordres de grandeur restent dépendants des paramètres du modèle et sont donc données à titre indicatif.

Nombre d'incréments : 100	Runge-Kutta	θ-méthode
Temps de calcul (s)	8,27	4,06
Nombre d'incréments ne nécessitant qu'une itération	37	96
Nombre d'itération max	4	2

Tableau A-4 : Avantages de l'intégration à l'aide de la θ-méthode par rapport à Runge-Kutta pour la simulation du comportement non-linéaire sur un élément de volume

Expression numérique de la matrice de rigidité identifiée

La matrice de rigidité $[C_0]$ du polymère est identifiée à partir des essais à faible taux de triaxialité décrits dans le paragraphe 2.1.2 du second chapitre. Le PEI étant considéré comme isotrope, sa matrice de rigidité $[C_0]$ est calculée en inversant sa matrice de souplesse. Son expression numérique, utilisée comme donnée d'entrée à l'indentification des paramètres pour trois formulations du critère de Drucker-Prager, est donnée par l'expression *(A.59)*.

$$[C_0]=\begin{bmatrix} 6235,7 & 4157,1 & 4157,1 & 0 & 0 & 0 \\ 4157,1 & 6235,7 & 4157,1 & 0 & 0 & 0 \\ 4157,1 & 4157,1 & 6235,7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1039,3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1039,3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1039,3 \end{bmatrix} \quad (MPa) \qquad (A.59)$$

Annexe B

L'annexe B fait référence au sixième chapitre du manuscrit, traitant l'homogénéisation d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone en champs moyens. Les expressions du tenseur d'Eshelby pour différentes formes d'inclusions sont rappelées dans ce paragraphe.

Expressions du tenseur d'Eshelby en milieu isotrope et isotrope transverse

Dans ses travaux, Mura donne l'expression du tenseur d'Eshelby lorsque l'inclusion est plongée dans un milieu isotrope [*Mura*, 1991]. Le calcul du tenseur est mené à l'aide des fonctions de Green. En écriture de Voigt, le sa représentation est donnée par l'expression *(B.1)*, dans laquelle seules les composantes non-nulles sont mentionnées (selon la géométrie de l'inclusion).

$$[T^{Esh}]= \begin{bmatrix} T_{1111} & T_{1122} & T_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ T_{2211} & T_{2222} & T_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ T_{3311} & T_{3322} & T_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{1212} \end{bmatrix} \qquad (B.1)$$

Dans le seul cas d'un milieu isotrope, celles-ci sont explicites et permettent directement d'exprimer les composantes du tenseur en fonction de v_m, le coefficient de Poisson de la matrice, et de *AR*, le facteur de forme de l'inclusion (« Aspect Ratio » en anglais). L'axe principal de l'inclusion est l'axe *1*, dans ce qui suit, les paramètres a_1, a_2 et a_3 correspondent respectivement aux dimensions de l'inclusion dans son axe principal et dans ses deux autres axes. Le facteur de forme *AR* est défini par l'expression

$$AR = \frac{a_1}{a_3} \qquad (B.2)$$

Ces expressions du tenseur d'Eshelby sont données pour six formes d'inclusions, dont la plus simple est la sphère, représentée par la *figure b-1*. L'expression des composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby est donnée par le système *(B.3)*. Pour cette géométrie, le facteur de forme de l'inclusion est égal à 1.

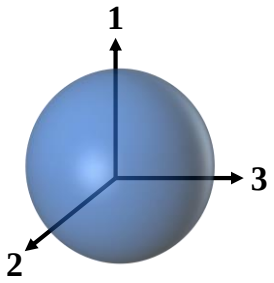


Figure B-1 : Représentation d'une inclusion sphérique dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{1111} = T_{2222} = T_{3333} = \dfrac{7 - 5\nu_m}{15(1 - \nu_m)} \\ T_{1122} = T_{2233} = T_{3311} = \dfrac{5\nu_m - 1}{15(1 - \nu_m)} \\ T_{1212} = T_{2323} = T_{3131} = \dfrac{4 - 5\nu_m}{15(1 - \nu_m)} \end{cases} \qquad (B.3)$$

La représentation d'une inclusion cylindrique de section droite circulaire est donnée par la *figure b-2* et les composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby sont données par le système *(B.4)*. Pour cette géométrie, la longueur de l'inclusion est considérée infinie, soit un facteur de forme infini ($AR \to \infty$).

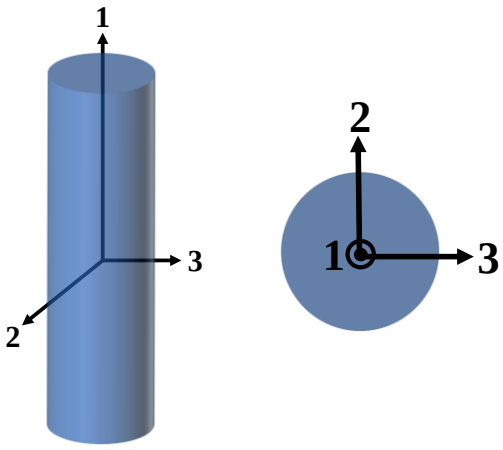


Figure B-2 : Représentation d'une inclusion cylindrique circulaire dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{1111} = T_{2222} = \dfrac{5 - 4\nu_m}{8(1 - \nu_m)} \\ T_{3333} = 0 \\ T_{1122} = T_{2211} = \dfrac{4\nu_m - 1}{8(1 - \nu_m)} \\ T_{1133} = T_{2233} = \dfrac{\nu_m}{2(1 - \nu_m)} \\ T_{3311} = T_{3322} = 0 \\ T_{3131} = T_{3232} = \dfrac{1}{4} \end{cases} \qquad (B.4)$$

La représentation d'une inclusion sous la forme d'un disque est donnée par la *figure b-3* et les composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby sont données par le système *(B.5)*. Pour cette géométrie, la dimension de l'inclusion dans la direction principale est très petite, son facteur de forme tend donc à être nul ($AR \to 0$).

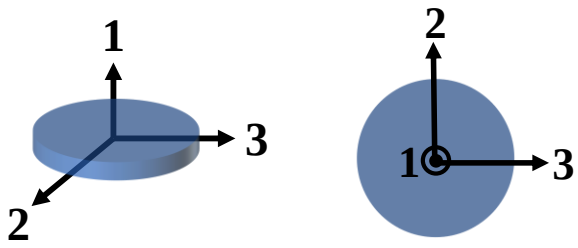


Figure B-3 : Représentation d'une inclusion sous la forme d'un disque dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{3333} = 1 \\ T_{3311} = T_{3322} = \dfrac{\nu_m}{1-\nu_m} \\ T_{3131} = T_{3232} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \qquad (B.5)$$

La représentation d'une inclusion ellipsoïdale est donnée par la *figure b-4* et les composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby sont données par le système *(B.6)*. Cette géométrie d'inclusion est celle choisie dans les travaux de thèse présentés dans ce manuscrit et dans la majorité des études d'homogénéisation sur les composites renforcés en fibres courtes.

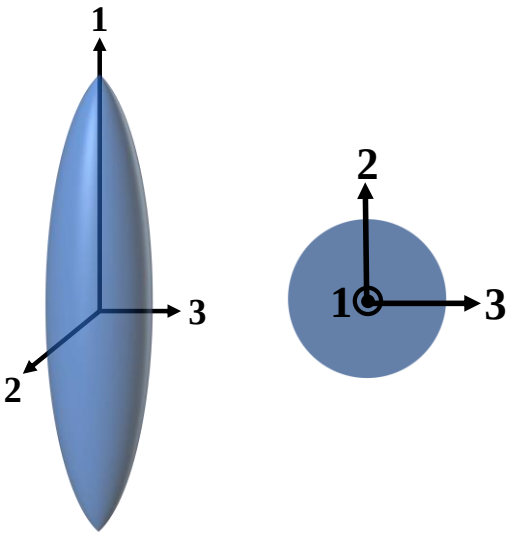


Figure B-4 : Représentation d'une inclusion ellipsoïdale dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{1111} = \dfrac{1}{2(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m+\dfrac{3AR^2-1}{AR^2-1}-\left(1-2\nu_m+\dfrac{3AR^2}{AR^2-1}\right)f(AR)\right] \\ T_{2222} = T_{3333} = \dfrac{3}{8(1-\nu_m)}\dfrac{AR^2}{AR^2-1}+\dfrac{1}{4(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m-\dfrac{9}{4(AR^2-1)}\right]f(AR) \\ T_{2233} = T_{3322} = \dfrac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\dfrac{AR^2}{2(AR^2-1)}-\left(1-2\nu_m+\dfrac{3}{4(AR^2-1)}\right)\right]f(AR) \\ T_{2211} = T_{3311} = -\dfrac{1}{2(1-\nu_m)}\dfrac{AR^2}{AR^2-1}+\dfrac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\dfrac{3AR^2}{AR^2-1}-(1-2\nu_m)\right]f(AR) \\ T_{1122} = T_{1133} = -\dfrac{1}{2(1-\nu_m)}\left(1-2\nu_m+\dfrac{1}{AR^2-1}\right)+ \\ \dfrac{1}{2(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m+\dfrac{3}{2(AR^2-1)}\right]f(AR) \\ T_{2323} = T_{3232} = \dfrac{1}{4(1-\nu_m)}\left[\dfrac{AR^2}{2(AR^2-1)}+\left(1-2\nu_m+\dfrac{3}{4(AR^2-1)}\right)f(AR)\right] \\ T_{1212} = T_{1313} = \dfrac{1}{4(1-\nu_m)}\left[1-2\nu_m-\dfrac{AR^2+1}{AR^2-1}-\dfrac{1}{2}\left(1-2\nu_m-\dfrac{3(AR^2+1)}{AR^2-1}\right)f(AR)\right] \end{cases} \quad (B.6)$$

Où *f(AR)* est définie par l'expression *(B.7)*.

$$f(AR) = \frac{AR}{(AR^2-1)^{3/2}}\left[AR(AR^2-1)^{1/2} - acosh(AR)\right] \quad (B.7)$$

La représentation d'une inclusion sphéroïdale aplatie est donnée par la *figure b-5* et les composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby sont données par le système *(B.8)*. Pour cette géométrie, l'axe de symétrie de l'inclusion est parallèle à l'axe *3* et la relation entre les dimensions est : $a_1 = a_2 > a_3$, et son facteur de forme *AR* est inférieur à 1.

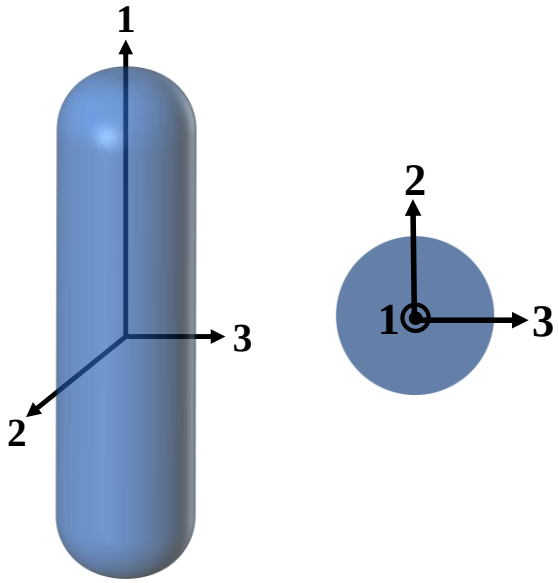


Figure B-5 : Représentation d'une inclusion sphéroïdale aplatie dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{1111} = T_{2222} = \dfrac{3}{8\pi(1-\nu_m)}\left[\pi - \dfrac{(I_1 - I_3)}{4(AR^2-1)}\right] + \dfrac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \\ T_{3333} = \dfrac{3}{8\pi(1-\nu_m)}\left[\dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{2}{3}AR^2\dfrac{(I_1 - I_3)}{AR^2-1}\right] + \dfrac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \\ T_{1122} = T_{2211} = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu_m)}\left[\pi - \dfrac{(I_1 - I_3)}{4(AR^2-1)}\right] - \dfrac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \\ T_{1133} = T_{2233} = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu_m)} AR^2 \dfrac{(I_1 - I_3)}{AR^2-1} - \dfrac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_1 \\ T_{3311} = T_{3322} = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu_m)} \dfrac{(I_1 - I_3)}{AR^2-1} - \dfrac{1-2\nu_m}{8\pi(1-\nu_m)} I_3 \\ T_{1212} = \dfrac{1}{8\pi(1-\nu_m)}\left[\pi - \dfrac{(I_1 - I_3)}{4(AR^2-1)}\right] + \dfrac{1-2\nu_m}{16\pi(1-\nu_m)} 2I_1 \\ T_{2323} = T_{1313} = \dfrac{1}{16\pi(1-\nu_m)}(1+AR^2)\dfrac{(I_1 - I_3)}{AR^2-1} + \dfrac{1-2\nu_m}{16\pi(1-\nu_m)}(I_1 - I_3) \end{cases} \quad (B.8)$$

Où I_1 et I_3 sont respectivement définis par les expressions *(B.9)* et *(B.10)*.

$$I_1 = \frac{2\pi AR}{(1-AR)^{3/2}}\left[acos(AR) - AR(1-AR^2)^{1/2}\right] \quad (B.9)$$

$$I_3 = 4\pi - 2I_1 \quad (B.10)$$

La représentation d'une inclusion de type plaquette (ou « penny shape » en anglais) est donnée par la *figure b-6* et les composantes non nulles de son tenseur d'Eshelby sont données par le système *(B.11)*. Pour cette géométrie, l'axe de symétrie de l'inclusion est normal à l'axe *3*, la relation entre les dimensions est : $a_1 = a_2\ \pi\ a_3$, et son facteur de forme *AR* est inférieur à 1.

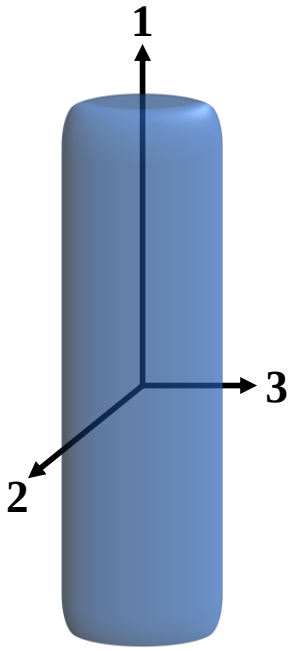


Figure B-6 : Représentation d'une inclusion sous la forme d'une plaquette dans son repère spatial

$$\begin{cases} T_{1111} = T_{2222} = \dfrac{13 - \nu_m}{32(1-\nu_m)}\pi AR \\ T_{3333} = 1 - \dfrac{1-2\nu_m}{1-\nu_m}\dfrac{\pi}{AR} \\ T_{1122} = T_{2211} = \dfrac{8\nu_m - 1}{32(1-\nu_m)}\pi AR \\ T_{1133} = T_{2233} = \dfrac{2\nu_m - 1}{8(1-\nu_m)}\pi AR \\ T_{3311} = T_{2233} = \dfrac{\nu_m}{1-\nu_m}\left(1 - \dfrac{4\nu_m + 1}{8\nu_m}\pi AR\right) \\ T_{1212} = \dfrac{7 - 8\nu_m}{32(1-\nu_m)}\pi AR \\ T_{2323} = T_{1313} = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{\nu_m - 2}{1-\nu_m}\dfrac{\pi}{4}AR\right) \end{cases} \qquad (B.11)$$

Annexe C

L'annexe C fait référence septième chapitre du manuscrit, traitant l'homogénéisation d'un composite renforcé en fibres courtes de carbone à l'aide d'un modèle à double-motif. Le premier paragraphe donne l'ensemble des comparaisons macroscopiques et à l'échelle locale sous différentes sollicitations. Ces résultats permettent la calibration du modèle. Le second paragraphe donne les mêmes comparaisons dans le cas d'une cellule à l'arrangement régulier. Ce paragraphe permet de montrer l'influence de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif.

Calibration complète du modèle à double motif

Cette annexe de la troisième partie du manuscrit concerne la calibration du modèle d'homogénéisation à double-motif. La totalité des figures permettant la comparaison entre le modèle à double-motif, le modèle de Lielens et les calculs par éléments finis sur la CESR est présentée. En plus de la traction longitudinale reportée dans le corps du manuscrit, ces comparaisons sont faites pour trois autres types de sollicitations :

- Traction dans le sens transverse (soit l'axe macroscopique *22*), dont la courbe de contrainte-déformation est présentée sur la *figure c-1 (A)* et la distribution de la déformation plastique dans la matrice est présentée sur la *figure c-1(B)* ;

- Traction dans la direction de cisaillement *12* (où *11* est l'axe des fibres et *22* un axe transverse), dont la courbe de contrainte-déformation est présentée sur la *figure c-2 (A)* et la distribution de la déformation plastique dans la matrice est présentée sur la *figure c-2 (B)* ;

- Traction dans la direction de cisaillement transverse *23* (où *22* et *33* sont les deux axes transversaux de la fibre), dont la courbe de contrainte-déformation est présentée sur la *figure c-3(A)* et la distribution de la déformation plastique dans la matrice est présentée sur la *figure c-3(B)*.

Dans le sens transverse, le modèle à double-motif (MF) est capable, comme dans le sens longitudinale, de reproduire globalement le comportement effectif du matériau équivalent (*figure c-1 (A)*). Les comportements macroscopiques obtenus avec les deux modèles d'homogénéisation sont très proches, avec des écarts respectifs de 7% et 6% par rapport à celui de la CESR à 3% de déformation totale moyenne. Il est important de rapeller que dans cet axe de sollicitation et pour un matériau à renforts unidirectionnels, c'est principalement le comportement matriciel qui gouverne celui du matériau effectif équivalent [*Morgan*, 2005], [*Berthelot*, 2005]. L'influence des fibres étant moindre dans ce cas, le seuil d'irréversibilité de la matrice est corrélé aux éléments finis par les deux modèles en champs moyens. Dans les deux cas, le seuil est inférieur à celui de la matrice seule (R_0=*30MPa* contre environ *20MPa* sur la figure), ce qui montre que les fibres induisent une pression hydrostatique suffisante sur celle-ci afin de la forcer à entrer dans son domaine de comportement irréversible. Ce phénomène est bien capté par les modèles d'homogénéisation : les courbes du comportement de la matrice seule sont identiques.

De la même manière que les modèles en champs moyens prédisent mieux le comportement du matériau effectif dans cette direction de sollicitation, la valeur médiane de la distribution de la déformation plastique est atteinte dès le début de la sollicitation. Le modèle à double-motif est cependant légèrement plus prédictif jusqu'à la moitié de la sollicitation totale (*figure c-1 (B)* points 1 et 2*)*, puis égale au modèle de Lielens sur la suite du chargement (*figure c-1 (B)* points 3 et 4*)*.

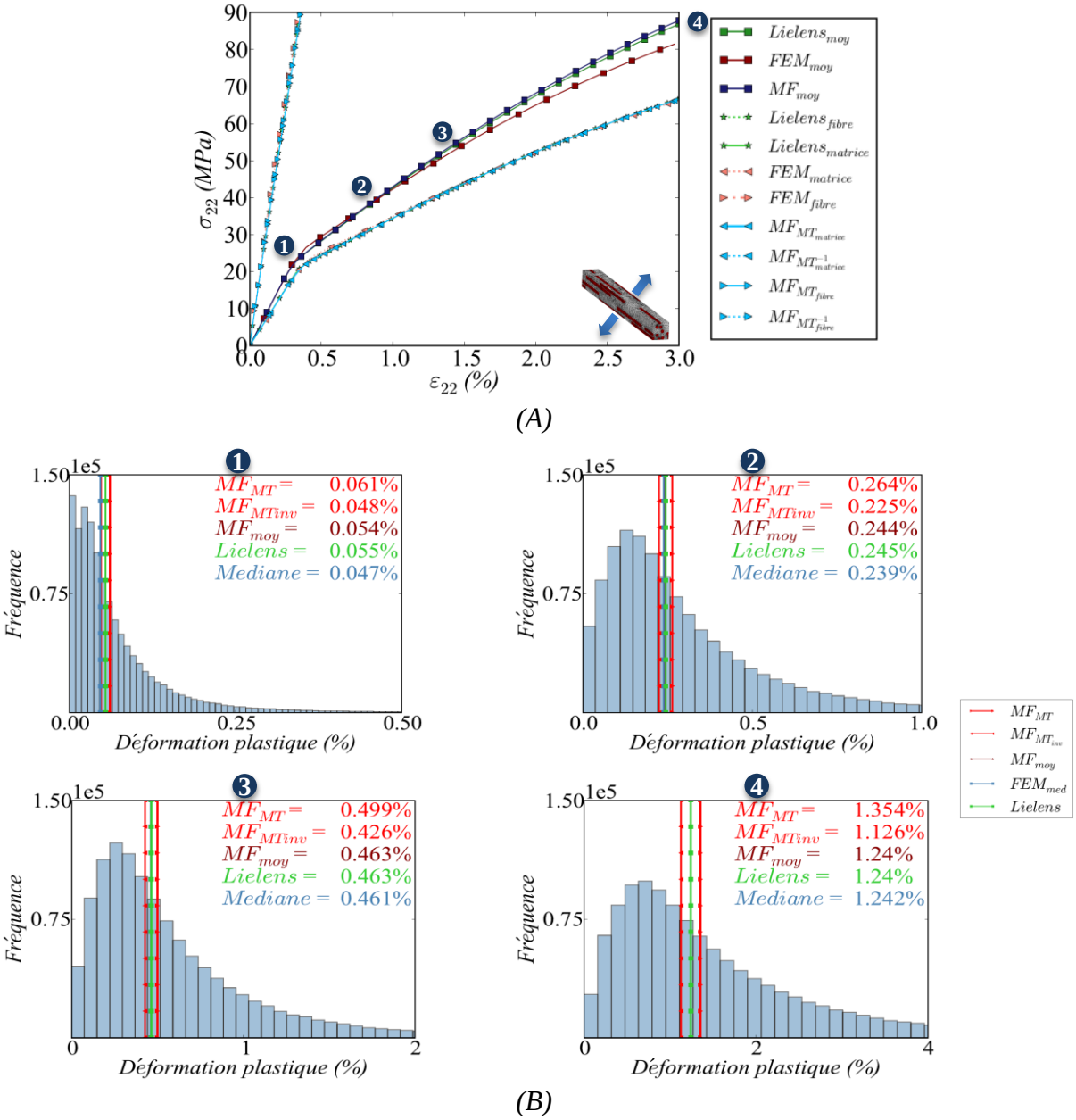


Figure C-1 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens dans le sens transverse (22) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

Dans le plan de cisaillement *12*, une sollicitation plus élevée (en contrainte ou en déformation) est nécessaire afin de déclencher l'irreversibilité du matériau effectif. Les deux modèles d'homogénéisation sont également capables de reproduire globalement le comportement effectif du matériau équivalent (*figure c-2 (A)*). Les courbes du comportement simulé avec les modèles en champs moyens présentent un écart du même ordre par rapport à celle de la CESR. L'étude de la distribution de la déformation plastique dans la matrice montre que le modèle à double-motif est plus proche de la valeur médiane que le modèle de Lielens au cours du chargement, exepté au niveau final de la sollicitation (*figure c-2 (B)* point 4*)*. Bien que les valeurs de déformation plastique dans chacun des motifs soient relativement proches de la médiane de la distribution, elles restent qualitativement moins précises que dans les cas de traction longitudinale et transverse, avec un écart maximal de 15%.

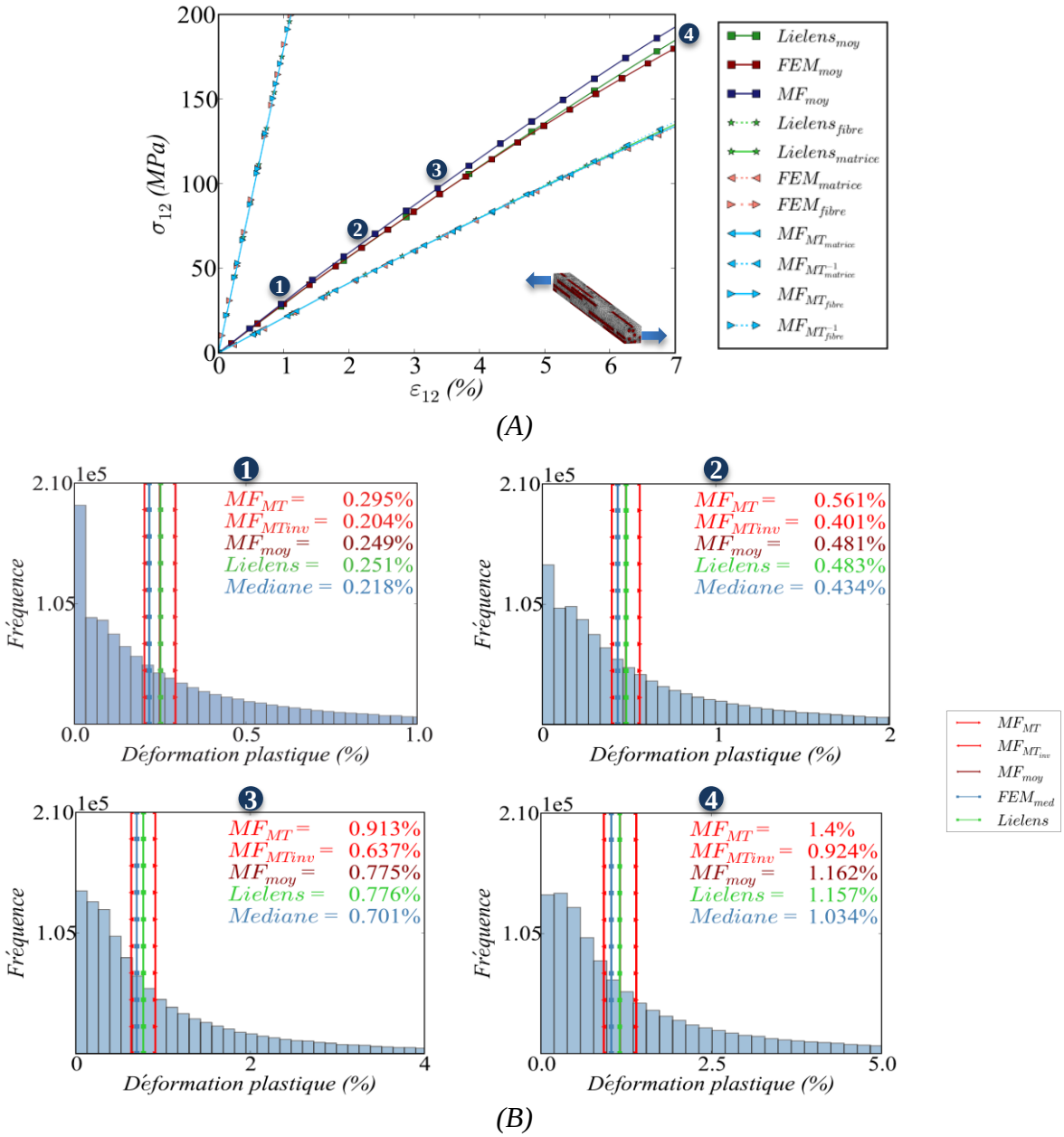


Figure C-2 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement plan (12) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique de la matrice

Dans le plan de cisaillement transversal *23*, le comportement de la CESR est mieux reproduit par les deux modèles d'homogénéisation que dans le plan *12*. L'écart entre celui de la CESR et le modèle MF est légèrement inférieur à celui de Lielens. Cette observation confirme le fait que lorsque le comportement de la matrice a plus d'influence pour la même direction de sollicitation étudiée, les modèles en champs moyens sont capables de décrire le comportement effectif global du matériau et celui de la matrice avec précision.

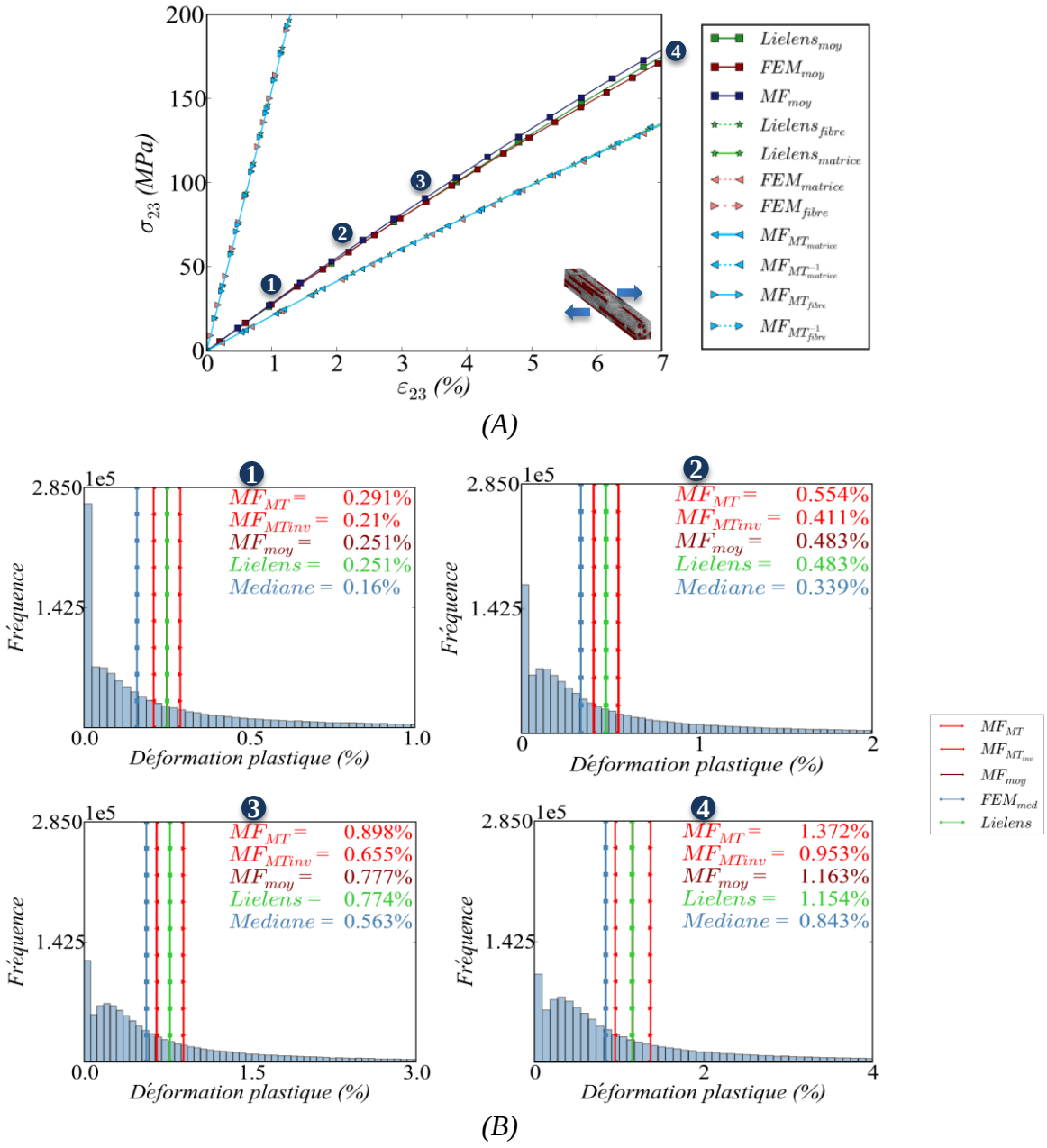


Figure C-3 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement dans les sens transverses (23) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

Les deux modèles d'homogénéisation ne parviennent pas à atteindre la valeur médiane de la distribution et présentent des écarts relatifs d'au moins 40%. La déformation plastique est systématiquement surestimée par les méthodes d'homogénéisation en champs moyens (*figure c-3 (B)*).

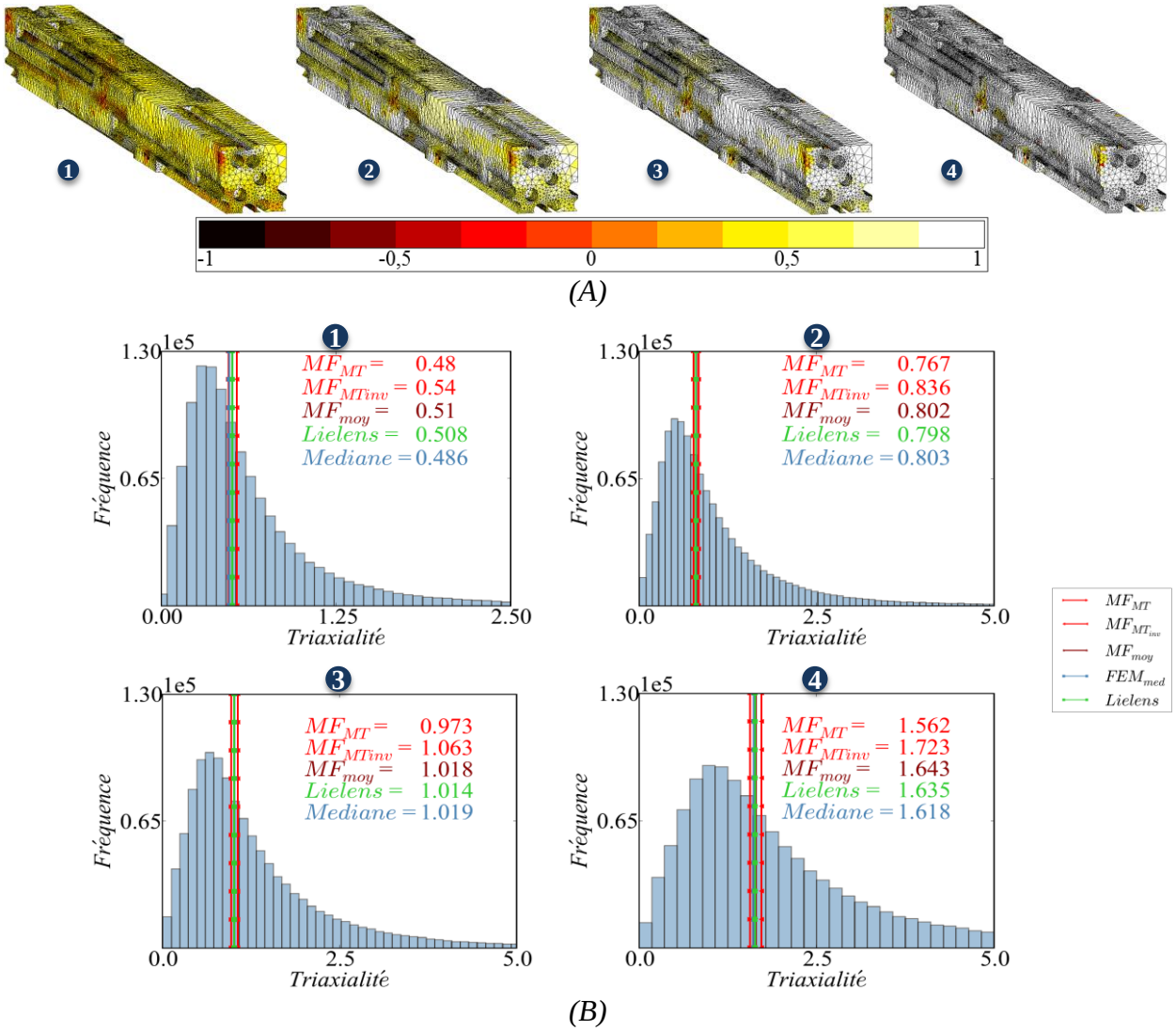
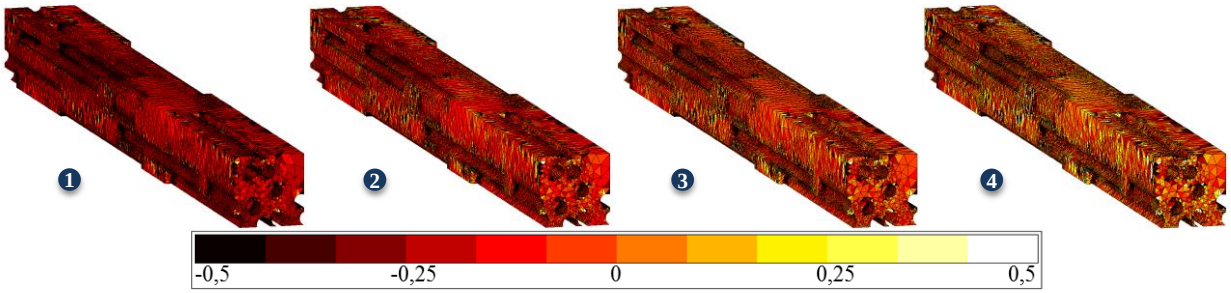
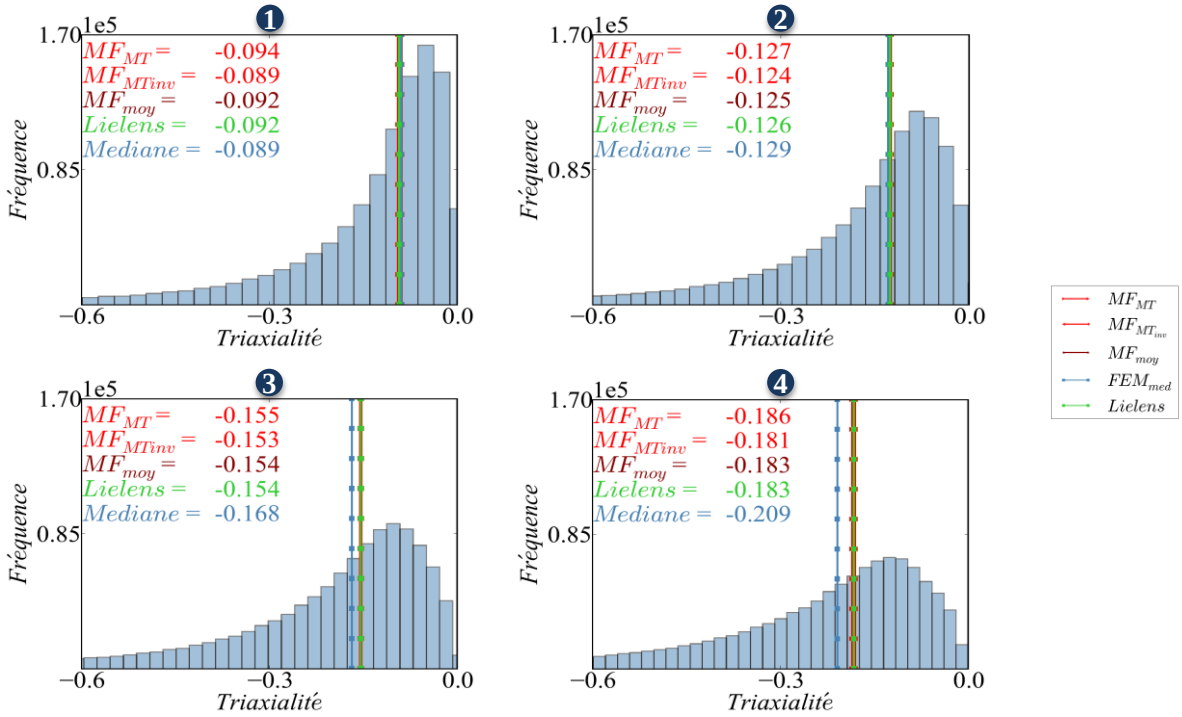


Figure C-4 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes de la simulation numérique par éléments finis entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en traction dans le sens transverse (22) : (A) aperçu de la triaxialité sur la CESR pour les quatres valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

En traction transverse, où le comportement de la matrice gouverne le comportement effectif du matériau, les deux modèles d'homogénéisation parviennent à atteindre la valeur médiane de la triaxialité des contraintes dès le début de la sollicitation. L'influence des fibres est réduite suivant cet axe de sollicitation et, comme vu sur la *figure c-4*, le comportement effectif du matériau est proche de celui de la matrice.



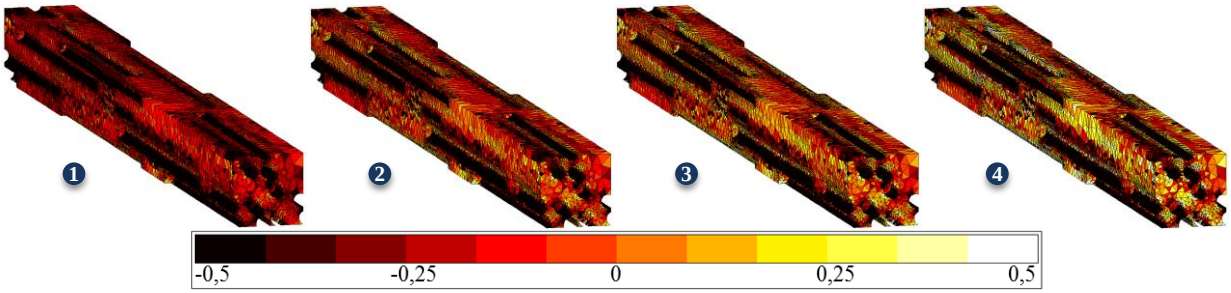
(A)



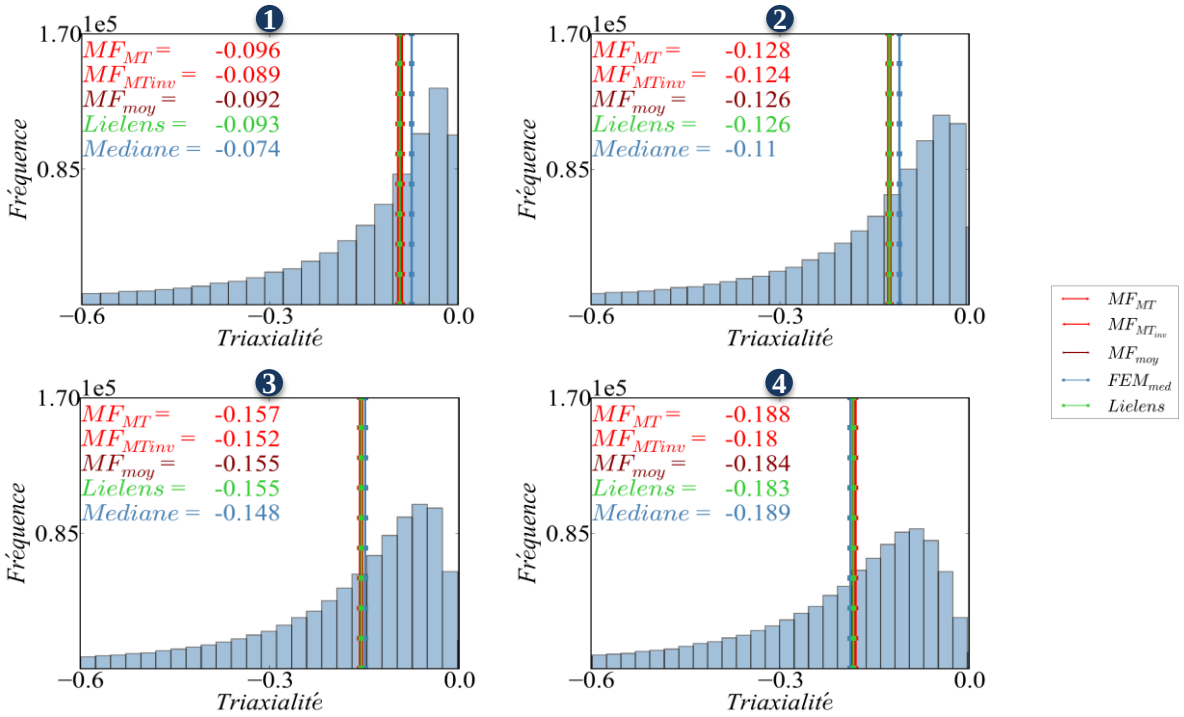
(B)

Figure C-5 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes de la simulation numérique par éléments finis entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement plan (12) : (A) aperçu de la triaxialité sur la CESR pour les quatre valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

Le cisaillement plan (*12*) génère un cas particulier de confinement matriciel, appelé effet Poynting, étudié nottament par Angela Mihai [*Angela Mihai & Goriely*, 2013]. Sur un cube sollicité en cisaillement, ce phénomène explique la présence d'une importante contrainte normale aux faces de cisaillement. Dans le cas de la CESR, la déformation de la matrice est également limitée par la présence des fibres (soixante-dix fois plus rigides) et les conditions aux limites périodiques régissant l'ensemble des faces non sollicitées. La triaxialité des contraintes étant fonction des contraintes principales, or, la contrainte principale dans l'axe des fibres (*11*) est négative et seize fois supérieure aux deux autres. La matrice est donc en compression et la triaxialité des contraintes est négative. Ce phénomène est reproduit par les deux méthodes de calcul. Le premier niveau de sollicitation indique une sollicitation en cisaillement quasi-pur de la matrice, soit un taux de trixialité proche de 0 (*figure c-5(B)* point 1). Sur les deux premiers niveaux de sollicitation, les faibles niveaux de triaxialité médians sont reproduits par les deux modèles d'homogénéisation (*figure c-5(B)* points 1 et 2). Lorsque le niveau de sollicitation augmente, ils expriment une augmentation de la triaxialité mais sous-estiment la valeur médiane (*figure c-5(B)* points 3 et 4).



(A)



(B)

Figure C-6 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes de la simulation numérique par éléments finis entre la CESR, le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement transverse (23) : (A) aperçu de la triaxialité sur la CESR pour les quatre valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

Le même phénomène de triaxialité négative est observable en cisaillement transverse (*23*). Dans ce cas, c'est la contrainte principale dans la direction transverse aux fibres qui est négative et treize fois supérieure aux deux autres. Cependant, les tendances observées en cisaillement (*12*) s'inversent dans ce cas. En effet, les deux modèles d'homogénéisation ne parviennent pas à atteindre la valeur médiane en début de sollicitation (*figure c-6 (B)* points 1 et 2). Elle est cependant atteinte aux deux autres niveaux de déformation observés (*figure c-6 (B)* points 2 et 4).

Effet de la morphologie des cellules sur le modèle à double-motif

L'ensemble des comparaisons menées entre le modèle à double-motif, le modèle de Lielens et la cellule à la morphologie arrangée sont placées dans cette section.

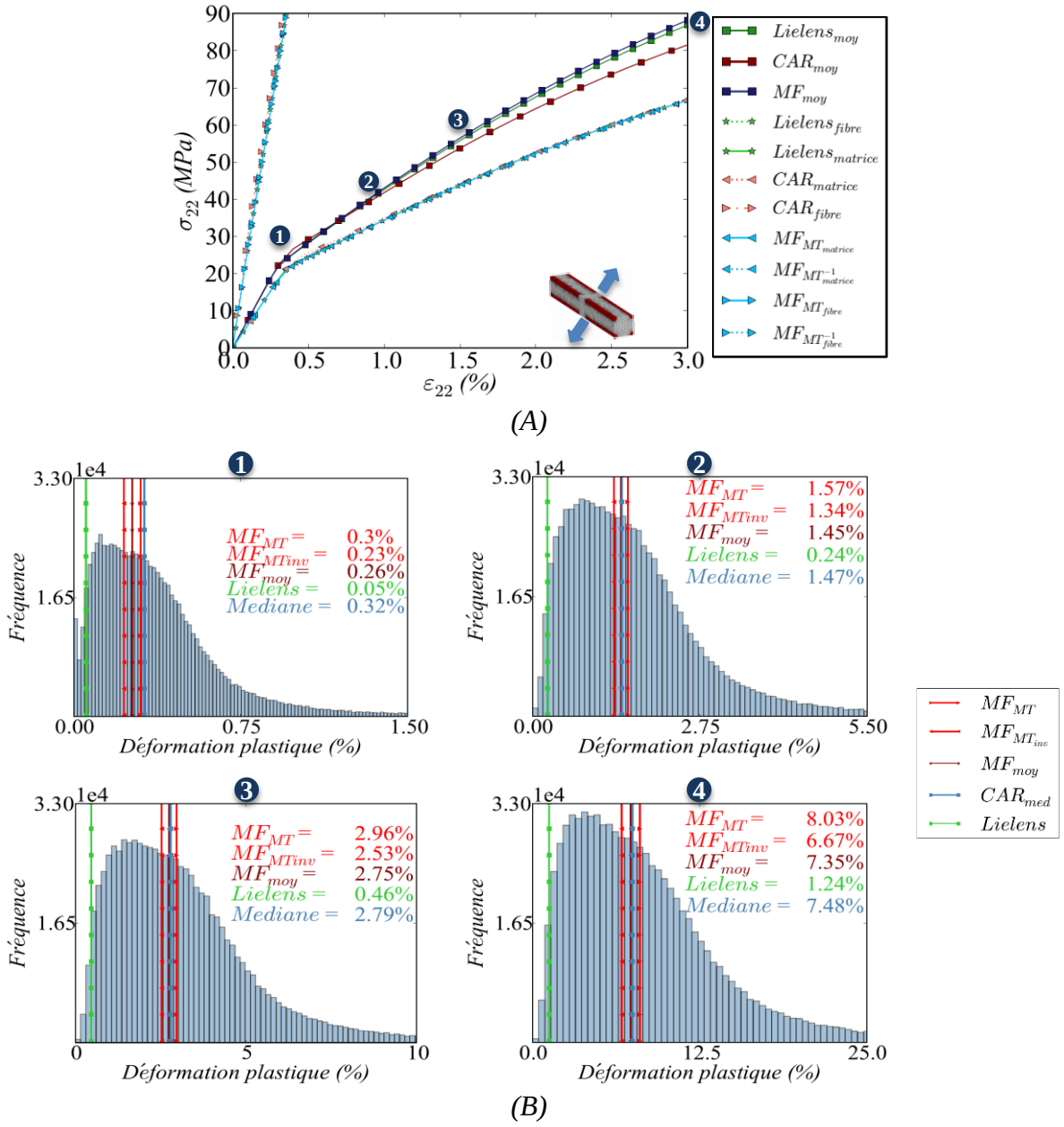


Figure C-7 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens dans le sens transverse (22) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

La simulation de l'essai de traction transverse, présentée sur la *figure c-7 (A)* et *(B)*, présente les mêmes indications que dans le cas de la traction longitudinale : le comportement macroscopique effectif est mieux prédit par le modèle à double-motif. Comme dans le cas d'une cellule à l'arrangement aléatoire, le modèle présente une meilleure corrélation du comportement local, dans le cas d'une sollicitation transversale. En effet, la valeur médiane de la distribution de déformation plastique dans la matrice est tout d'abord sous-estimée par le modèle mais est cependant rapidement égalé par celui-ci. Le modèle de Lielens reste quant à lui à des écarts non-négligeables pouvant atteindre 100% d'écart relatif avec la médiane.

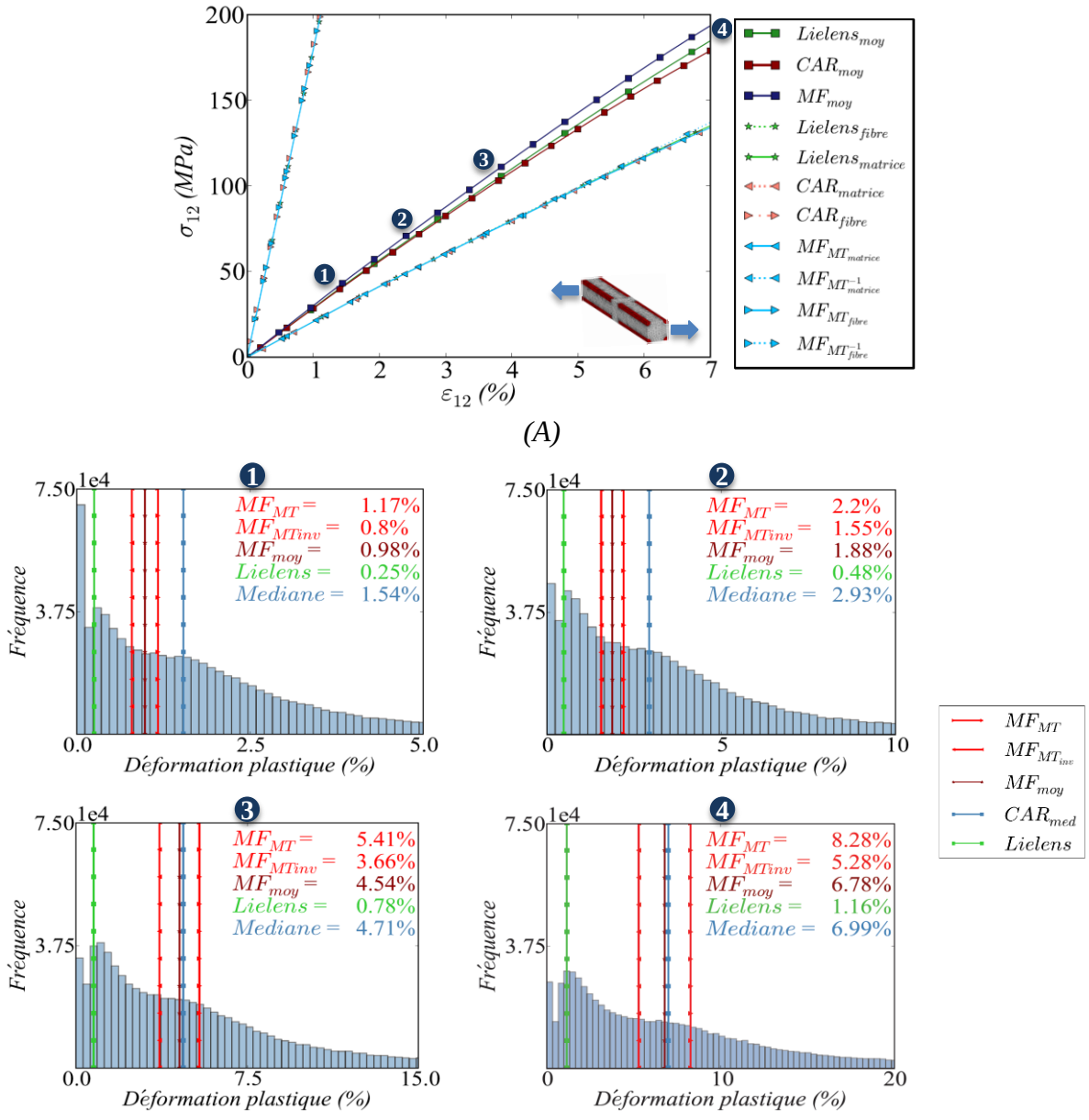


Figure C-8 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement plan (12) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique de la matrice

La simulation de l'essai de cisaillement plan, présenté par la *figure c-8 (A)* et *(B)*, présente une bonne corrélation du comportement global par les deux modèles. Cependant, l'étude de la distribution de la déformation plastique dans la matrice montre que le modèle à double-motif capte généralement mieux la valeur médiane. Bien qu'il la sous-estime de 36% en début de sollicitation, il atteint une valeur proche à 3% au troisième point d'observation. Cette bonne corrélation avec la valeur médiane est conservée jusqu'au niveau de déformation maximal simulé, avec un écart relatif de 3,5% par rapport à la valeur médiane.

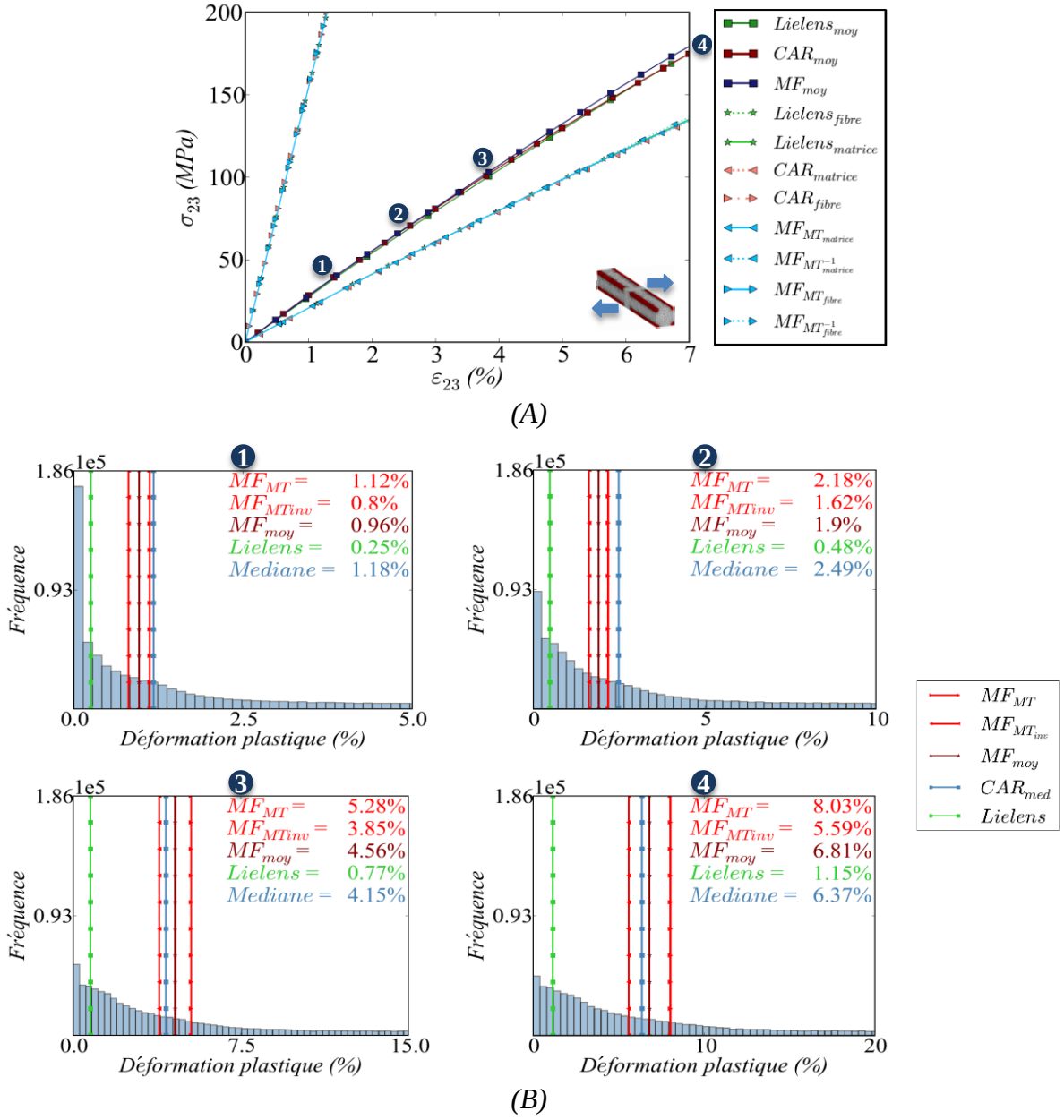


Figure C-9 : Comparaison entre la simulation numérique par éléments finis sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement dans le sens transverse (23) : (A) courbes de contrainte-déformation macroscopiques moyennes effectives globales et dans les phases et (B) distribution pondérée de la déformation plastique dans la matrice

En cisaillement transverse (*23*), les mêmes observation qu'en cisaillement plan (*12*) sont faites : le comportement macroscopique est mieux corrélé par le modèle de Lielens *figure c-9 (A)*, mais la médiane de la distribution de la déformation plastique dans la matrice est généralement mieux captée par le modèle à double-motif *figure c-9 (B)*. Les écarts sur le comportement macroscopique et sur la médiane de la distribution de la déformation plastique restent néanmoins très faibles.

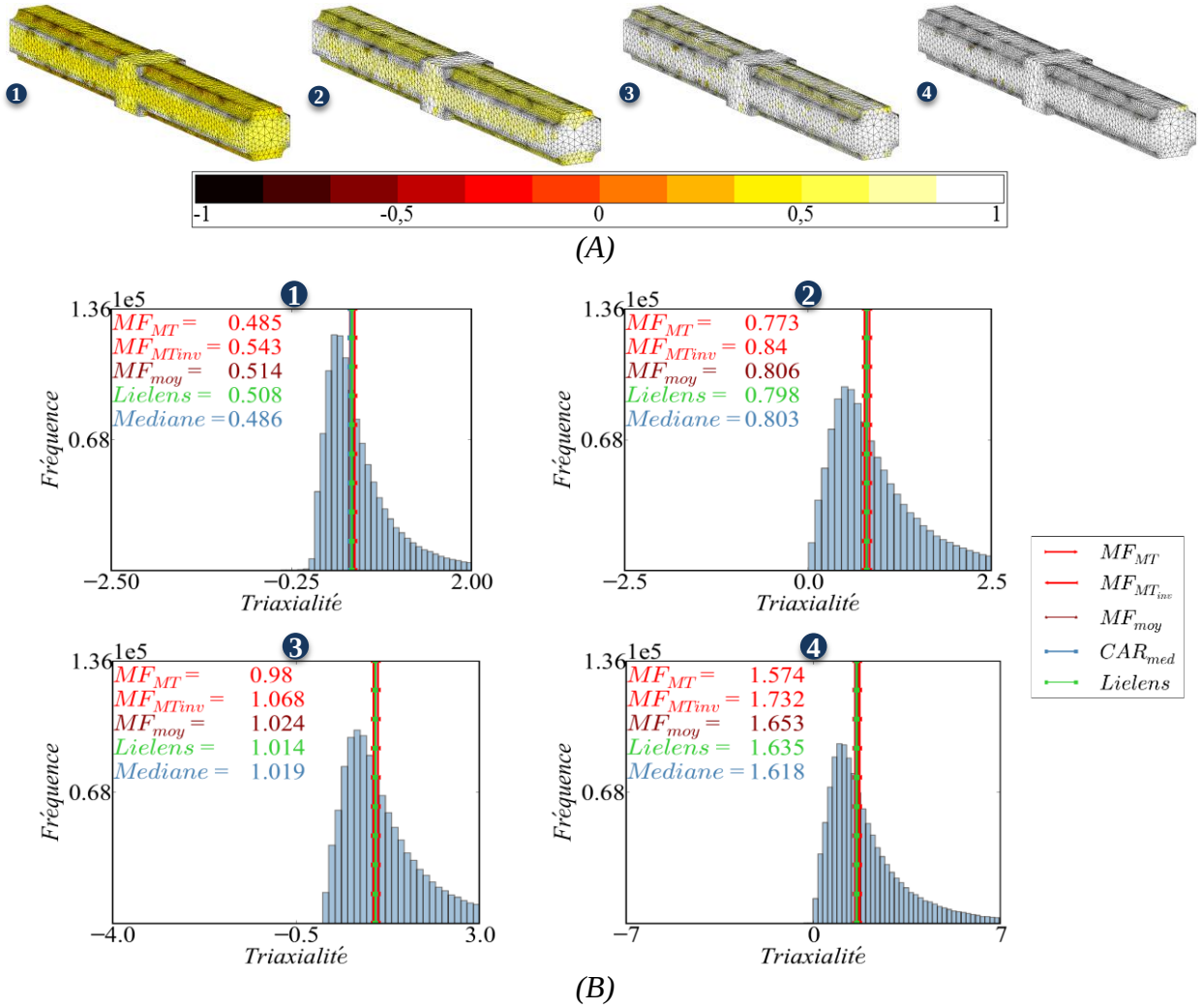


Figure C-10 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes entre la simulation numérique par éléments finis entre la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en traction dans le sens transverse (22) : (A) aperçu de la triaxialité sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA) pour les quatre valeurs étudiée et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

De la même manière que pour une cellule à l'arrangement aléatoire de fibres, la triaxialité en traction dans le sens transverse est correctement prédite par les deux modèles d'homogénéisation. En effet, la médiane de la distribution est atteinte dès le début de la sollicitation et son évolution au cours de la sollicitation est prise en compte quel que soit le modèle d'homogénéisation.

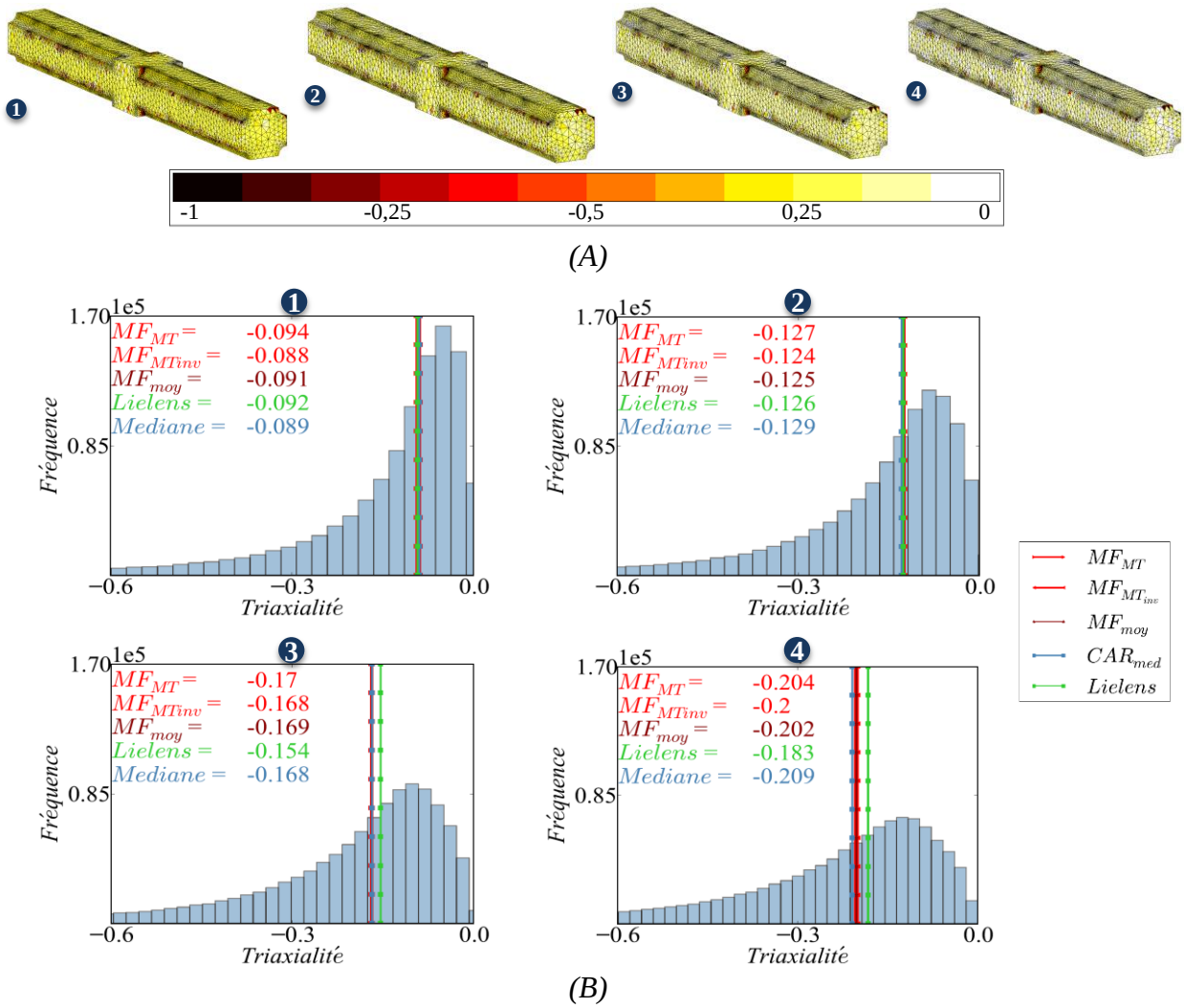


Figure C-11 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes entre la simulation numérique par éléments finis entre la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement plan (12) : (A) aperçu de la triaxialité sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA) pour les quatre valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

En cisaillement plan (*12*) la triaxialité négative de la cellule est également observable. Dans ce cas de sollicitation, bien que les deux modèles présentent une valeur très proche en début de sollicitation, le modèle à double-motif reste plus proche de la médiane jusqu'à la fin.

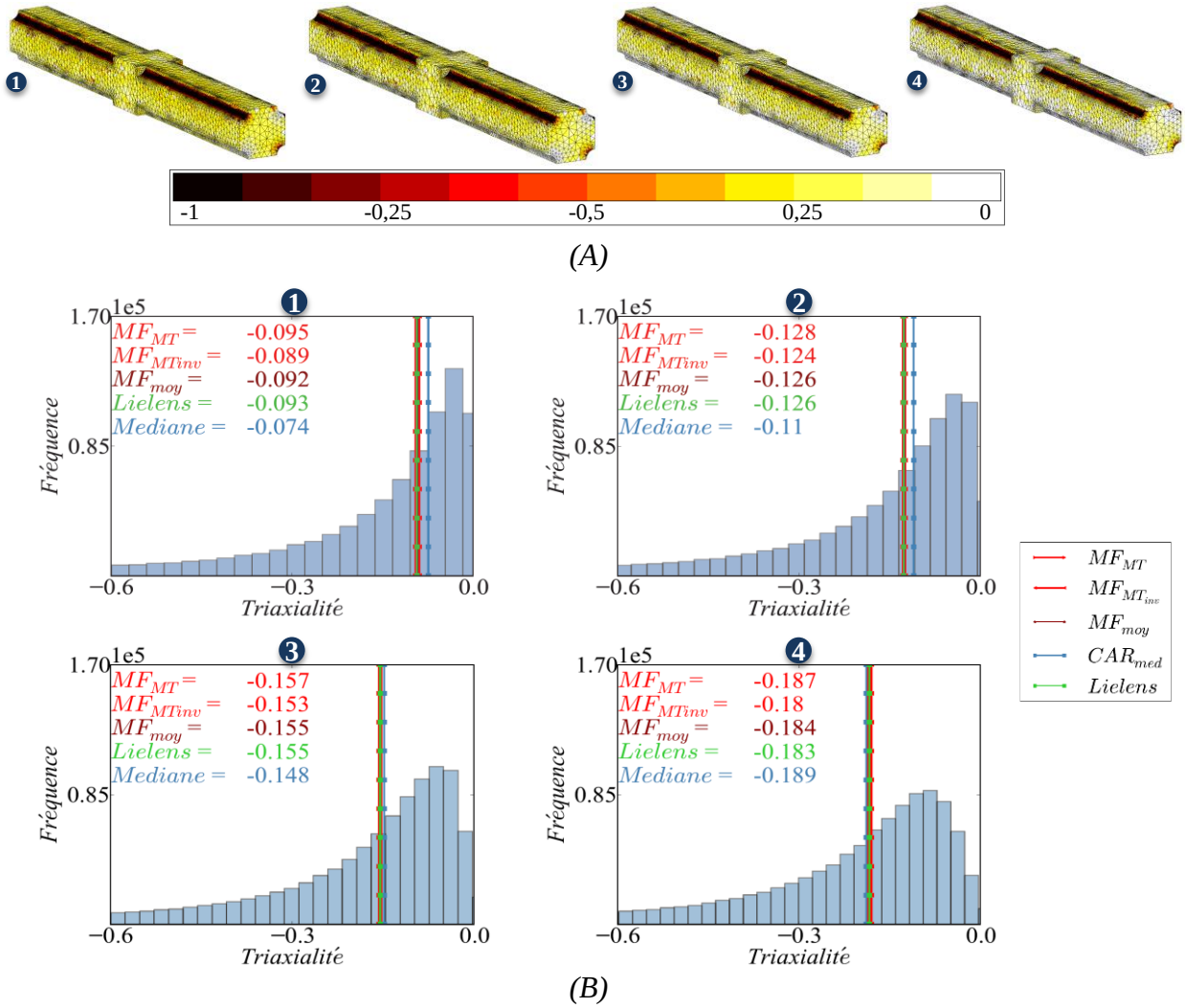


Figure C-12 : Comparaison du taux de triaxialité des contraintes entre la simulation numérique par éléments finis entre la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA), le modèle de Lielens et le modèle à double-motif en champs moyens en cisaillement transverse (23) : (A) aperçu de la triaxialité sur la cellule à l'arrangement spécifique de fibres (CA) pour les quatre valeurs étudiées et (B) distribution pondérée de la triaxialité contraintes dans la matrice

La simulation du cisaillement transverse montre une quasi-égalité systématique de la triaxialité présente dans les deux modèles d'homogénéisation.

Bibliographie

Angela Mihai, L., & Goriely, A., (2013), Numerical simulation of shear and the Poynting effects by the finite element method: An application of the generalised empirical inequalities in non-linear elasticity, International Journal of Non-Linear Mechanics, 49: 1–14.

Berthelot, J.-M., (2005), Matériaux composites : Comportement mécanique et analyse des structures (4e édition), Paris; Londres: Tec & Doc Lavoisier.

Besson, J., Cailletaud, G., Chaboche, J.-L., & Forest, S., (2001), Mécanique non linéaire des matériaux, Paris: Hermes Science Publications.

Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A., & Desmorat, R., (2009), Mécanique des matériaux solides - 3ème édition, Dunod. (cité p.252 et p.252-2)

Morgan, P., (2005), Carbon Fibers and Their Composites, CRC Press.

Mura, T., (1991), Micromechanics of Defects in Solids.

Norton, F. H., (1929), The creep of steel at high temperatures (1st ed.), New York: McGraw-Hill book company, inc. (cité p.252 et p.259)

Prager, W., (1955), The theory of plasticity: A survey of recent achievements, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1847-1982 (Vols 1-196), 169: 41–57.

Transvalor SA, (2015), Z-set (Version 8.6), Evry: Transvalor SA.

Résumé

L'allègement des structures aéronautiques est aujourd'hui soumis à des contraintes économiques : les matériaux doivent à la fois être plus légers, avoir de bonnes propriétés mécaniques et leurs coûts doivent être réduits. Les matériaux composites à matrice organique renforcée par des fibres courtes de carbone sont de bons candidats pour répondre à ces enjeux. Cependant, le moulage par injection utilisé pour les transformer, génère une microstructure complexe qui influence leur comportement. Les travaux présentés dans ce manuscrit proposent une démarche visant à identifier, étudier, caractériser et modéliser les différentes échelles du matériau : les constituants, la microstructure et le matériau global, afin de proposer une démarche de modélisation basée sur l'enrichissement local du comportement dans le cas de chargements complexes.

La sensibilité de la matrice à la pression hydrostatique est identifiée et modélisée à l'aide d'un critère de Drucker-Prager généralisé. A l'aide de celui du composite, un comportement réversible des fibres est identifié. Grâce à des observations en tomographie RX en contraste de phase, l'orientation et la longueur de chaque fibre sont mesurées. Le confinement matriciel, responsable du comportement local et macroscopique du matériau, est étudié par le biais d'une méthode de mesure de la distribution de la fraction volumique locale de fibres dans la microstructure.

Une démarche de génération et d'identification d'une cellule élémentaire représentative du comportement unidirectionnel et de la morphologie de la microstructure est développée en champs complets. A la même échelle, un modèle d'homogénéisation utilisant un système de motifs morphologiques représentatif est implémentée et permet de constituer la brique unidirectionnelle du comportement du composite en champs moyens. Une procédure d'intégration de l'orientation et des longueurs réelles de fibres est mise en place afin de simuler le comportement homogène équivalent du composite de l'étude. Cette procédure d'homogénéisation originale en deux étapes est calibrée à de manière globale et locale l'aide d'essais virtuels. Enfin, la démarche est vérifiée sur un essai de structure, sollicitant le composite de manière complexes.

Mots Clés

Composite, fibres courtes, tomographie RX, contraste de phase, homogénéisation, pression hydrostatique

Abstract

Today, the aeronautic structure lightening is subjected to costs considerations: the materials must all at once be lightweight, have good mechanical properties and their cost must remain low. Short carbon fiber reinforced organic matrix composites are good candidates in order to handle that issues. However, the injection molding process uses to make that kind of materials induces a complex microstructure which influences the composite behavior. The presented thesis work aim to identify, study, characterize and model the specific scales of the material: the components, the microstructure and the global material in order to propose a modelling approach based on the local enrichment of the composite behavior under complex loadings.

The hydrostatic pressure matrix sensitivity is identified and modeled with a Generalized Drucker-Prager plastic criterion. The composite elastic behavior is used to identify one carbon fiber behavior through a reverse engineering method. Thanks to X-ray phase contrast tomography, both the orientation and the length of each fiber are measured. The matrix confinement, responsible for the local and the global composite behavior is investigated by mean of the study of the local fiber volume fraction distribution in the microsctructure.

A generation and identification approach of a representative volume element of both the unidirectional composite behavior and the microstructure morphology is developed by finite element modeling. At the same scale, a mean field model, based on morphological representative patterns is implemented and allows determining the unidirectional composite behavior. An original mean field procedure with the integration of the real orientations and fiber lengths is proposed and allows simulating the effective composite behavior. This original two-step homogenization procedure is globally and locally calibrated thanks to virtual testing. Finally, this approach is experimentally verified on a structural test, putting a strain on the composite in a complex way.

Keywords

Composite material, short-fibers, X-ray tomography, phase contrast, homogenization, hydrostatic pressure