



HAL
open science

Mélange de spin dans un condensat de Bose-Einstein : Gouttelette quantique et couplage cohérent

Lucas Lavoine

► **To cite this version:**

Lucas Lavoine. Mélange de spin dans un condensat de Bose-Einstein : Gouttelette quantique et couplage cohérent. Optique [physics.optics]. Université Paris-Saclay, 2022. Français. NNT : 2022UP-ASP099 . tel-04054920

HAL Id: tel-04054920

<https://pastel.hal.science/tel-04054920>

Submitted on 1 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mélange de spin dans un condensat de Bose-Einstein : Gouttelette quantique et couplage cohérent

Thèse de doctorat de l'université Paris-Saclay et de l'Institut d'Optique

École doctorale n°527 Ondes et Matière (EDOM)
Spécialité de doctorat : Physique
Graduate School : Physique Référent : Institut d'Optique

Thèse préparée dans l'unité de recherche **LCF (Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS)**, sous la direction de **Thomas Bourdel**, Chargé de recherche

Thèse soutenue à Paris-Saclay, le 13 Octobre 2022, par

Lucas Lavoine

Composition du jury

Anna MINGUZZI Directrice de recherche, LPMMC Université Grenoble Alpes	Rapportrice
Radu CHICIREANU Chargé de recherche, PhLAM Université de Lille	Rapporteur
Nicolas PAVLOFF Professeur, LPTMS Université Paris-Saclay	Président du jury
Jean DALIBARD Directeur de recherche, Collège de France, LKB École Normale Supérieure de Paris	Examineur
Tilman PFAU Professeur, Institut de Physique, Université de Stuttgart	Examineur
Thomas BOURDEL Chargé de recherche, LCF Institut d'Optique, Université Paris-Saclay	Directeur de thèse

Table des matières

Remerciements	7
Introduction	9
1 Théorie de la diffusion, condensats de Bose-Einstein et mélanges de spin	17
1.1 Collision entre atomes neutres	17
1.1.1 Les différents types de collisions	17
1.1.2 Quelques éléments sur la théorie de la diffusion	19
1.1.3 Potentiel de contact	21
1.1.4 Résonance de Feshbach	23
1.2 Interactions dans un condensat de Bose-Einstein	26
1.2.1 Théorie de champ-moyen et équation de Gross-Pitaevskii	26
1.2.2 Déplétion quantique et correction de Lee-Huang-Yang	29
1.3 Mélange de condensats de Bose-Einstein	30
1.3.1 Interactions et diagramme des phases	31
1.3.2 Excitations élémentaires d'un mélange	33
1.3.3 Correction de Lee-Huang-Yang pour un mélange	35
2 Généralités sur les gouttelettes quantiques	37
2.1 Introduction	37
2.2 Champ-moyen et blocage du ratio de la densité	38
2.3 Mécanisme de stabilisation	39
2.4 Propriétés de la gouttelette quantique	40
2.4.1 Profil de densité	40
2.4.2 Spectre des excitations	41
2.4.3 Dimensions hybrides	42
2.5 État de l'art sur les gouttelettes quantiques	43
2.5.1 Gouttelette quantique dipolaire	43
2.5.2 Gouttelette quantique non-dipolaire	45

3	Crossover tridimensionnel à unidimensionnel du terme au-delà du champ-moyen dans les gouttelettes quantiques	51
3.1	Introduction	51
3.2	Résumé de l'article	52
3.2.1	Gouttelette quantique dans le cas homogène	52
3.2.2	Gouttelette quantique de taille finie	53
3.3	Résultats : voir publication	55
3.4	Méthode numérique	65
3.4.1	Équation de Gross-Pitaevksii effective	65
3.4.2	La Méthode "Split-step Fourier"	66
3.4.3	Évolution temporelle	67
3.4.4	Temps imaginaire	68
3.5	Conclusion et perspectives	70
4	L'expérience de potassium ^{39}K	73
4.1	Les propriétés du potassium	73
4.1.1	Propriétés optiques du ^{39}K	73
4.1.2	Propriétés de collisions du ^{39}K	74
4.2	Description de l'expérience	77
4.2.1	La chambre à vide	77
4.2.2	Le système laser	79
4.2.3	Les bobines magnétiques	80
4.2.4	Amélioration de la stabilité du champ magnétique	83
4.2.5	Refroidissement laser	86
4.2.6	MOT comprimé et mélasse grise	87
4.2.7	Du piège magnétique au chargement d'un piège optique	88
4.3	Transferts radiofréquences vers les états Zeeman de $F = 1$	91
4.3.1	Couplage cohérent entre deux états de spin	91
4.3.2	Transfert Adiabatique	94
4.3.3	Circuit radio-fréquence	96
4.4	Évaporation dans un piège croisé	99
4.5	Imagerie	102
5	Interactions à trois corps contrôlables dans les mélanges de condensats de Bose-Einstein couplés	105
5.1	Introduction	105
5.2	Collisions entre états habillés	107
5.2.1	Hamiltonien du système	107
5.2.2	Régime du couplage fort	108
5.3	Effets des interactions sur l'état habillé	110
5.3.1	Dérivation du terme d'interaction à trois corps	110
5.3.2	Discussion physique	114
5.4	Mise en oeuvre expérimentale	116

5.4.1	Décalage de la fréquence du mode de respiration radiale	117
5.4.2	Effondrement induit par les interactions à trois corps	121
5.5	Conclusion et perspectives	125
6	Effets au-delà du champ-moyen dans les mélanges de condensats de Bose-Einstein couplés de manière cohérente	127
6.1	Introduction	127
6.2	Spectre de Bogoliubov pour un mélange couplé	129
6.2.1	Hamiltonien et énergie de champ-moyen	129
6.2.2	Spectres des excitations	130
6.3	Terme au-delà du champ-moyen pour un mélange couplé	131
6.3.1	Expression du terme provenant des fluctuations quantiques . .	132
6.4	Observations expérimentales	135
6.4.1	Procédure expérimentale	135
6.4.2	Mesure de l'équation d'état au-delà du champ-moyen	139
6.4.3	Observation d'une symétrisation des pertes à trois corps . . .	145
6.4.4	Simulation numérique	147
6.4.5	Validation de la théorie	149
6.4.6	Étude du cas non couplé ($\Omega = 0$)	151
6.5	Conclusion	152
7	Conclusion générale et perspectives	153
A	Schéma électrique du relais mécanique	159
B	Différences d'énergies entre les sous-niveaux Zeeman	161
C	Oscillations de Ramsey	165
D	Discussion sur l'énergie au-delà du champ-moyen pour un mélange de spin couplé	171
	Table des figures	173
	Bibliographie	181
	Publications	195

Remerciements

Ce travail de thèse, les résultats obtenus, la progression de ma maturité humaine et scientifique, n'auraient jamais pu voir le jour sans mon directeur de thèse Thomas Bourdel. Thomas m'a accueilli avec bienveillance au début du mois de mars 2019 pour mon stage de deuxième année de master. Il m'a tout de suite fait confiance en me laissant rapidement seul dans la salle de l'expérience. Thomas n'a jamais cessé de venir travailler sur l'expérience pendant mes trois années de thèse, j'ai pu énormément apprendre au quotidien à ses côtés, je lui en suis reconnaissant. Je voudrais souligner son positivisme infailible même lorsque l'on casse des choses, et comme il dit « Il n'y a que ceux qui ne touchent à rien qui ne cassent rien ». Thomas m'a aussi beaucoup aidé dans mon choix de postdoc, ses conseils et son point de vue m'ont toujours orienté de la meilleure des manières. Je te remercie pour ces trois années et demies.

Une thèse n'est que la prolongation de la précédente, c'est pourquoi je tiens à remercier grandement Guillaume. Il m'a également formé sur l'expérience pendant la rédaction de son manuscrit. Comme tu l'as déjà il y a maintenant trois ans, mon seul regret est de ne pas t'avoir connu plus tôt. Malgré la distance, nous avons réussi à garder contact. J'espère que dans le futur, nous allons réussir à se voir plus souvent.

Je tiens également à remercier Alfred avec qui j'ai travaillé pendant deux ans sur l'expérience et avec qui j'ai partagé également le bureau. Nous avons travaillé ensemble dans la bonne humeur et je te remercie pour toutes les critiques constructives que tu as pu faire, elles nous ont toujours permis d'avancer. Je te remercie pour toutes les discussions non scientifiques que nous avons eues sur l'actualité et la société. Je te remercie également pour m'avoir donné envie de lire les classiques de la physique. Je ne doute pas qu'avec la venue de Roy l'expérience soit entre de bonnes mains.

Je suis très reconnaissant envers Anna Minguzzi, Radu Chicireanu, Nicolas Pavloff, Jean Dalibard et Tilman Pfau, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Je voudrais remercier l'ensemble des membres du groupe Gaz Quantique pour

l'ambiance stimulante et l'atmosphère bienveillante. Merci aux permanents du groupe, David Clément, Marc Cheneau, Isabelle Bouchoule, Denis Boiron, Chris Westbrook, Vincent Josse et Alain Aspect, merci pour tous nos différents échanges. Un grand merci aux doctorants et postdoctorants : Gaétan, Antoine, Jan-Phillip, Maxime, Félix, Romaric, Clémence, Anaïs, Sayali, Quentin, Victor, Charlie, Ziyad, Baptiste, Yukun, Xudong, Niranjan, Léa, Vaso...

La réalisation de ces travaux scientifiques n'aurait pu voir le jour sans de nombreuses aides extérieures. Tout d'abord, grâce à une étroite collaboration avec D.S. Petrov et également A. Recati, je les remercie grandement. L'atelier d'électronique, nous a aidé dans la fabrication du relais mécanique permettant de changer d'alimentation de courant, dans la recherche des sources de bruit, et dans le filtrage du bruit provenant de la RF ambiante, merci à eux. Je remercie également l'atelier d'optique, de mécanique, et tous les autres services de l'institut d'optique pour leurs disponibilités et leurs aides au quotidien. Un grand merci à Patrick Georges, le directeur du laboratoire, pour être aussi investi et bienveillant envers tous les doctorants. Merci à Christophe de l'accueil pour sa bonne humeur du quotidien.

Je viens maintenant à mes amis. Mes premières pensées vont à mes amis du M2, Yohan, Gaétan, Lionel, Christian, Jerem et Élise, Charles, Romaric merci de m'avoir changé les idées et pour tous les moments que nous avons passés ensemble! Je veux également remercier énormément mes amis de Bordeaux et particulièrement, Alice, Harmo, Nathan et Mehdi. Merci beaucoup à Alexis, mon compagnon d'escalade et de pintes aux Hall of Beer! Merci également à mes amis de la prépa : Hugo, Guillaume, Anthony, Cédric et Benjamin.

Je veux maintenant remercier toute ma famille. Tout d'abord, mes parents, qui ont su me soutenir depuis le début, me pousser dans les études et d'avoir toujours cru en moi. Merci à mes grands-parents qui m'ont toujours tout donné, vous êtes une source d'inspiration. Merci à mes frères, Félix et Martin, vous êtes mes meilleurs amis, dédicace à Martin qui a participé activement dans le cosmétique des graphiques de ce manuscrit! Je remercie également toute ma belle-famille, pour tous les moments et les découvertes culinaires! Merci à toutes ces personnes d'avoir essayé de comprendre mon sujet, et pour qui le mot quantique sert surtout à justifier le caractère magique des technologies dans les films de SF.

Je veux terminer mes remerciements par toi Laura. Je veux te remercier d'avoir supporté mes monologues sur les problèmes de la manip, mais je suis sûr maintenant que les théories MF et BMF n'ont plus de secrets pour toi. Merci de m'avoir soutenu depuis tout ce temps. Et surtout merci pour tout, pour tout!

Introduction

L'étude quantitative des réactions chimiques au dix-neuvième siècle vit resurgir « *l'hypothèse atomique* », une idée provenant de l'Antiquité. Ces réactions pouvaient s'interpréter très convenablement en supposant que la matière est un agrégat de constituants microscopiques, de particules insécables [1]. Cette hypothèse prit de plus en plus d'importance jusqu'à devenir un consensus scientifique dès le vingtième siècle. Malgré les nombreux succès de la physique macroscopique regroupant la mécanique, l'optique, l'électricité, le magnétisme, l'acoustique ou encore la thermodynamique, la considération pour la physique microscopique ne cessa de croître pour son caractère fondamental. Les phénomènes physiques que nous observons à notre échelle et les lois que nous en déduisons, ne sont que la manifestation de comportements mettant en jeu une quantité gigantesque de constituants microscopiques. L'étude des propriétés de ces particules permet donc une compréhension plus fondamentale et élémentaire de notre monde physique. La naissance de la physique microscopique au début du XXe siècle s'est suivie de nombreux développements. En 1897, les recherches de J.J. Thomson sur la conductivité électrique de gaz dans des tubes cathodiques lui permettent de prouver l'existence des électrons. En 1911, E. Rutherford entreprend des expériences de diffusion de protons à travers des feuilles d'or et démontre l'existence du noyau atomique. La recherche des constituants les plus élémentaires de la matière continue encore aujourd'hui dans les accélérateurs de particules comme le Grand collisionneur de hadrons, communément appelé LHC (pour Large Hadron Collider).

La description physique des molécules, des atomes et des particules élémentaires ne peut se faire avec la mécanique classique dites newtonienne. Les lois gouvernant la matière à cette échelle microscopique, de l'ordre du nanomètre, sont essentiellement quantiques. Sous l'impulsion de nombreux physiciens comme M. Planck, E. Schrödinger, A. Einstein, M. Born., N. Bohr, P. Dirac, W. Pauli, L. De Broglie, W. Heisenberg, la révolution quantique débute pendant la première moitié du XXe siècle. Le développement de la théorie quantique a conduit à des développements technologiques spectaculaires comme par exemple l'invention du laser ou du transistor qui ont aujourd'hui pénétré et influencé en profondeur notre société. Un des concepts clef pour comprendre si un système doit être décrit de manière quantique, est la longueur d'onde de De Broglie. Cette longueur d'onde fut introduite par Louis

De Broglie en 1923 dans sa thèse de doctorat [2], il postule que la matière peut se comporter comme une onde et la longueur permettant de quantifier cet aspect ondulatoire de la matière est égale à :

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{p}, \quad (1)$$

où h est la constante de Planck, p est l'impulsion de la particule considérée. Cette longueur d'onde de matière peut se généraliser dans le cas d'un système composé d'un ensemble de particules à une température T . Cette longueur d'onde de De Broglie thermique s'exprime en fonction de la masse m des constituants et de k_B la constante de Boltzmann :

$$\lambda_{\text{dB}} = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}, \quad (2)$$

Lorsque la distance inter-particule est plus grande que la longueur de De Broglie, c'est-à-dire $n\lambda_{\text{dB}}^3 \ll 1$ où n est la densité des particules, le caractère ondulatoire de la matière peut être négligé et l'ensemble de particules peut être décrit par les lois classiques de la Physique. En revanche, lorsque $n\lambda_{\text{dB}}^3 \sim 1$, plusieurs particules occupent le même niveau quantique. Le système est dans le régime nommé, la **dégénérescence quantique**, et doit être décrit par la mécanique quantique. La manifestation des propriétés quantiques de la matière comme sa nature ondulatoire, les effets de la statistique quantique, ou les effets des fluctuations quantiques, vont se manifester et conduire à des phénomènes physiques défiant notre intuition.

En 1972, dans son célèbre article « *More is different* » [3], P.W. Anderson discute les limites du réductionnisme, qui consiste à penser que certains domaines scientifiques ne sont que l'application des lois plus élémentaires d'un autre domaine, qui est lui, plus fondamental. Il affirme :

« Il s'avère que le comportement d'ensembles volumineux et complexes de particules élémentaires ne doit pas être compris en termes d'une simple extrapolation des propriétés de quelques particules. Au lieu de cela, à chaque niveau de complexité, des propriétés entièrement nouvelles apparaissent, et la compréhension des nouveaux comportements nécessite une recherche qui, à mon avis, est aussi fondamentale dans sa nature que n'importe quelle autre ».

Il existe en effet de nombreux phénomènes physiques macroscopiques dont l'origine ne peut être expliquée à partir des lois microscopiques. Ainsi, notre capacité, à déduire les lois fondamentales n'implique pas d'être capable de reconstruire l'ensemble des phénomènes physiques appliquant un nombre de particules importants.

Pourtant, de nombreux domaines de la Physique étudient les propriétés d'un système de quelques particules ou à grand nombre de particules en interaction.

La description complète d'un atome nécessite de prendre en compte l'interaction du noyau atomique avec l'ensemble des électrons mais, également l'interaction de chaque électron avec les autres. Ce problème, pourtant fondamental, devient très rapidement insoluble sans approximations. À plus petite échelle, il apparaît déjà que la résolution complète et générale de trois particules en interactions est trop difficile. Il est, par conséquent, impensable de pouvoir décrire de manière exacte et complète un système faisant intervenir un nombre de constituants importants. Ces problèmes traitant un ensemble de particules en interaction sont regroupés sous la dénomination générale de « **problèmes à N-corps** ». Les ordinateurs, même les plus puissants, sont incapables dans la majorité des cas de simuler le comportement de ces systèmes.

En 1982, une alternative fut proposée par R. Feynman [4]. Il suggéra que afin d'être dans la capacité de simuler un problème quantique à N-corps, nous devrions utiliser une machine imitant le problème. C'est-à-dire, si nous voulons simuler un système quantique complexe, nous avons besoin d'un **simulateur quantique**.

Les gaz quantiques

Suite aux travaux sur le refroidissement d'atomes par laser [5, 6, 7], qui ont valu à S. Chu, W. D. Phillips et C. Cohen-Tannoudji le prix Nobel de 1997, et à ceux sur le refroidissement par évaporation, il a été possible de refroidir des gaz d'atomes, en particulier des alcalins, jusqu'à des températures proches de quelques nK et d'atteindre la dégénérescence quantique ($n\lambda_{dB}^3 \sim 1$). Dans le régime quantique, les bosons, les particules respectant la statistique quantique de Bose-Einstein, vont s'accumuler dans l'état fondamental du système et former une onde de matière macroscopique. Ce nouvel état de la matière, appelé **Condensat de Bose-Einstein**, a été observé expérimentalement en 1995 [8, 9], et conduit au décernement du prix Nobel en 2001 à E. Cornell, C. E. Wieman. et W. Ketterle. Ces techniques de refroidissements ont été adaptées aux fermions et ont permis en 1998, la première réalisation de gaz dégénéré de Fermi avec du ^{40}K [10].

Ces gaz dilués ultra-froids sont des systèmes quantiques très bien adaptés pour la simulation quantique. Premièrement, ils sont extrêmement dilués ($n \sim 10^{20} m^{-3}$), environ 5 ordres de grandeurs plus dilués que l'air ambiant, et par leur taille quasi macroscopique il est possible de les observer directement. Ces gaz sont produits dans des enceintes à ultra-vide et sont donc isolés de tout environnement extérieur. L'utilisation de champs magnétiques extérieurs et de lasers permet de changer le potentiel de piégeage ressenti par les atomes. Il est également possible de travailler dans des géométries arbitraires et en dimensions réduites, de changer la température dans le système et de changer les interactions inter-atomiques [11]. La nature quantique de ces systèmes macroscopiques permet l'étude de problèmes issus de

la matière condensée, de l'optique quantique, de la cosmologie et de la mécanique quantique. On peut citer comme exemple l'étude de la superfluidité par l'observation de vortex quantifiés dans des condensats de Bose-Einstein en rotation [12, 13, 14], la transition Berezinskii-Kosterlitz-Thouless (BKT) [15, 16], la réalisation de l'effet Hanbury-Brown-Twiss et Hong-Ou-Mandel avec des atomes [17, 18], la transition métal-isolant de Mott [19], ou encore la transition métal-isolant induite par le désordre, appelé **localisation d'Anderson** [20]. La présence de résonances de diffusions, appelées **résonances de Feshbach**, permet le contrôle des interactions inter-atomiques [21, 22]. Dans une configuration géométrique unidimensionnelle, l'introduction d'interactions attractives a conduit à la formation de solitons d'ondes de matières [23, 24, 25, 26]. Sur des gaz de Fermi, ces résonances ont rendu possible l'étude de la transition BEC (Bose-Einstein Condensate)-BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) [27]. Plus récemment, l'observation directe de paires de Cooper dans un gaz de Fermi bidimensionnel a été réalisée dans l'équipe de S. Jochim [28].

L'ajout d'un couplage entre deux états quantiques complexifie encore le système et permet d'étudier une riche variété de phénomènes physiques, comme par exemple l'analogie avec l'effet Josephson pour les supraconducteurs [29]. On peut évoquer les expériences du groupe de M.K. Oberthaler sur l'étude de la transition entre le régime Rabi et Josephson dans le cas d'un mélange de spin couplé [30, 31, 32], ou l'étude de la dynamique hors-équilibre à travers la transition de phase paramagnétique-ferromagnétique par la mesure des exposants critiques et des lois d'échelles [33, 34, 35].

Interactions dans les gaz quantiques

Les gaz quantiques sont dans un régime tel que la portée du potentiel interatomique R_{vdW} , de l'ordre de quelques nanomètres, est très inférieur par rapport à la longueur d'onde de De Broglie ($\lambda_{\text{dB}} \gg R_{\text{vdW}}$). Dans ce régime, les atomes ne sont pas sensibles aux détails du potentiel et il est suffisant de décrire les interactions à partir d'un seul paramètre a , nommé la **longueur de diffusion**. De plus, la densité atomique est telle que le système se trouve dans le régime dilué ($l \gg R_{\text{vdW}}$), où $l = n^{-1/3}$ est la distance moyenne entre particules, et il est raisonnable de considérer que les atomes n'interagissent que par paires. Dans ces conditions, on peut supposer l'action de l'ensemble des particules sur une seule comme un potentiel moyen. Ainsi, le problème à N-corps est simplifié en un problème à une particule effective dans un potentiel moyen formé par les autres atomes, c'est l'approximation de **champ-moyen**. Dans la majorité des expériences, cette approximation est suffisante pour expliquer correctement les observations.

Cependant, à mesure que les interactions augmentent, la théorie de champ-moyen tend à s'éloigner de la réalité. Une description plus correcte consiste à prendre en

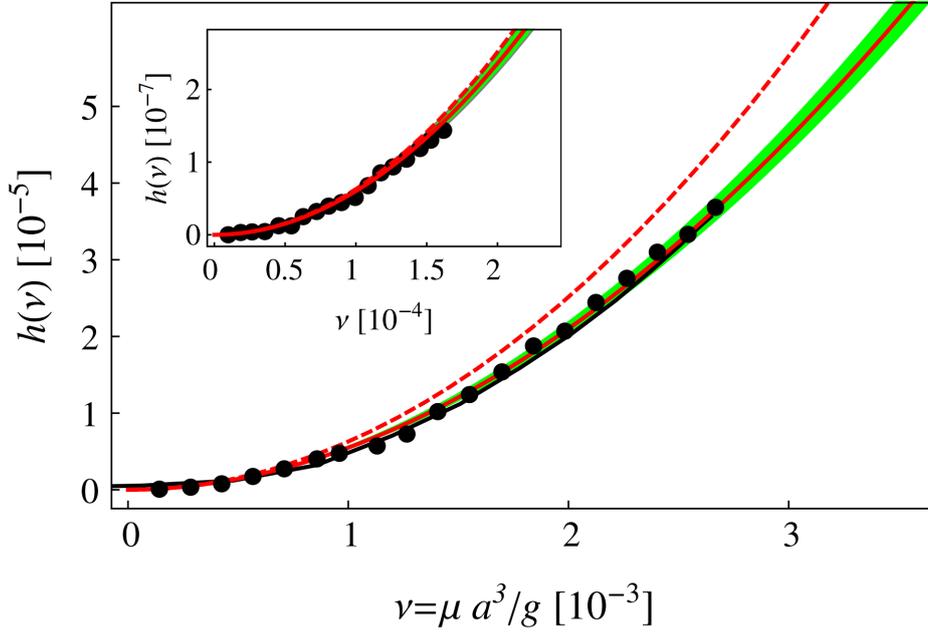


FIGURE 1 – Équation d'état d'un condensat de Bose-Einstein homogène à température nulle. Pression h normalisée en fonction du paramètre du gaz ν . La courbe rouge correspond à l'équation d'état avec le correction de Lee-Huang et Yang. La courbe en tirets rouge représente l'équation d'état dans l'approximation de champ-moyen. Figure issue de [38].

compte les effets **au-delà du champ-moyen**. Pour un gaz de bosons, à température nulle, la première correction a été initialement calculée par Lee, Huang et Yang en 1957 [36], et provient des fluctuations quantiques dans le système (plus précisément à l'énergie de point-zéro des modes de Bogoliubov [37]). Le groupe de C. Salomon, a étudié la dynamique et la thermodynamique d'un condensat de Bose-Einstein à température nulle et proche du régime des interactions fortes [38]. À partir de l'analyse du profil de densité *in-situ* d'un gaz de Bose de ^7Li , ils mesurèrent directement l'équation d'état (voir figure 1) et montrèrent par l'expérience qu'à mesure que l'amplitude des interactions augmente et que le système se rapproche du régime des interactions fortes, la théorie de champ-moyen n'est plus suffisante pour décrire le système et des effets au-delà doivent être pris en considération. Néanmoins, le terme de Lee-Huang-Yang reste une correction par rapport au terme de champ-moyen.

Une brève histoire des gouttelettes quantiques

En 2002, Bulgac propose un mécanisme afin de former un système auto-lié en absence de piégeage [39]. Proche d'une résonance de Feshbach, il montre qu'une

interaction à trois corps répulsive, impliquant la physique d’Efimov [40], peut stabiliser une interaction attractive à deux corps conduisant ainsi à la stabilisation du système. Cet état, appelé *boselet*, est très difficile à observer expérimentalement à cause des pertes d’atomes importantes proches des résonances de Feshbach et donc à un temps de vie du système drastiquement réduit. En 2014, D.S. Petrov propose un moyen, en dehors d’une résonance de Feshbach, de contrôler et d’implémenter, en plus de l’interaction à deux corps de champ-moyen, une interaction répulsive à trois corps. Sa méthode demande la présence de deux états internes couplés et séparés en énergie, tel que l’état de plus haute énergie est peuplé virtuellement durant les processus de collisions [41].

Dans une autre proposition théorique de 2015 [42], D.S. Petrov analyse la stabilité d’un mélange de deux condensats de Bose-Einstein, lorsque les interactions intra-espèces sont répulsives et les interactions inter-espèces sont attractives. Dans l’approximation de champ-moyen et lorsque les interactions attractives sont plus importantes, il est attendu que le système, pour diminuer son énergie, augmente sa densité et implose. Cet effondrement du système est contrecarré par l’existence du terme répulsive de Lee-Huang-Yang, le système se stabilise à une certaine densité même en l’absence de piégeage. Cette stabilisation provient uniquement de la présence de fluctuations quantiques, et est donc purement un effet quantique à N-corps. Ce nouvel état de la matière est nommé **gouttelette quantique** et possède des propriétés exotiques (phénomène d’auto-évaporation) et également similaires aux liquides classiques (tension de surface, saturation de la densité interne, etc). La première observation de gouttelettes quantiques se fit dans des gaz quantiques dipolaires de Dy et Er [43, 44]. L’interaction de champ moyen est réduite par la présence d’interactions dipolaires magnétiques. Peu après, les premières gouttelettes quantiques formées par les mélanges de condensats sont observées dans des mélanges de spin de ^{39}K [45, 46].

Ces expériences démontrent la possibilité, dans le régime des interactions faibles, de diminuer l’interaction de champ-moyen généralement dominante, de telle sorte qu’elle devienne du même ordre de grandeur que le terme de Lee-Huang-Yang. Il est alors possible d’étudier les fluctuations quantiques dans le système, un effet à N-corps purement quantique.

Contenu du manuscrit

Mon travail de thèse s’inscrit dans la continuité des travaux sur les gouttelettes quantiques. Lorsque je suis arrivé au laboratoire en stage de Master 2, j’ai eu l’opportunité de travailler sur la localisation d’Anderson unidimensionnel en présence d’une force constante [47] et cette étude a continué jusqu’au début de ma première année de thèse. En l’absence de force extérieure, le système est toujours localisé par

la présence du désordre. Nous avons cependant observé une transition entre une localisation algébrique et une délocalisation en fonction de notre paramètre de contrôle définie comme le rapport de la force relative au désordre sur la force extérieure. Nous avons également montré que la transition est intrinsèquement indépendante de l'énergie initiale et que la vitesse initiale du paquet d'ondes joue seulement un rôle à travers la force effective du désordre due à la corrélation du désordre. Par soucis de lisibilité, j'ai décidé de ne pas consacrer un chapitre à cette étude. Ce travail est déjà détaillé dans la thèse de mon prédécesseur G. Berthet [48] et l'article associé est inséré à la fin de ce manuscrit à la page 195.

Mon manuscrit est organisé en six chapitres. Le thème général est la physique des mélanges de condensats de Bose-Einstein couplé ou non de manière cohérente, proches de la zone d'effondrement. On démontre la possibilité d'implémenter de nouvelles non-linéarités dans l'équation d'état et d'étudier les effets quantiques au-delà du champ-moyen.

Chapitre 1

Le chapitre 1 est introductif et dédié à une présentation générale de la théorie de la diffusion. On y introduit les paramètres nécessaires à la description des collisions dans les gaz d'atomes froids. Nous introduisons l'équation de Schrödinger non-linéaire, également nommée équation de Gross-Pitaevskii, permettant la description du condensat dans l'approximation de champ-moyen. Le spectre de Bogoliubov décrivant les excitations élémentaires ainsi que le terme de Lee-Huang-Yang sont discutés. La dernière partie du chapitre est consacrée à introduire la physique des mélanges de condensats et le terme au-delà du champ-moyen associé.

Chapitre 2

Le chapitre 2 correspond à un état de l'art sur les gouttelettes quantiques. Nous décrivons en détail le mécanisme à l'origine de la stabilisation et de la formation du système auto-lié. Les propriétés de ce nouvel état quantique sont détaillées. Nous décrivons également les différents types de gouttelettes observées à ce stade, les premières expériences et les limites expérimentales rencontrées.

Chapitre 3

Le chapitre 3 présente une étude théorique que nous avons réalisée, basée sur l'étude des gouttelettes quantiques dans une configuration géométrique allongée et dans la transition tridimensionnelle à unidimensionnelle du terme au-delà du champ-moyen. Ce travail est motivé par la possibilité de surpasser plusieurs limites expérimentales rencontrées lors de la réalisation de gouttelettes quantiques tridimensionnelles.

Chapitre 4

Ce chapitre présente l'expérience de potassium 39 utilisée durant cette thèse. Nous décrivons brièvement les différents éléments du système expérimental. Nous discutons relativement en détail la physique d'un atome à deux niveaux en présence d'un couplage et les transferts adiabatiques par balayage de fréquence. Cette partie développe également mes contributions sur le montage expérimental, plus spécifiquement mon travail sur la stabilisation du champ magnétique nécessaire aux expériences que nous souhaitons réaliser, le nouveau circuit pour la génération de champs radio-fréquences, permettant la formation de mélanges. Nous discutons finalement les nouvelles étapes permettant d'atteindre la condensation de Bose-Einstein dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$, qui est nécessaire pour la réalisation de mélanges avec l'état $|F = 1, m_F = 0\rangle$.

Chapitre 5

Le chapitre 5 est consacré à l'étude de mélanges de spin couplés dans une approche de champ-moyen. Dans une première partie, nous présentons comment en présence d'un couplage, il est possible de contrôler les interactions entre atomes. Ensuite, ce chapitre développe notre étude expérimentale sur la possibilité d'introduire une interaction à trois corps attractive dans l'équation d'état dans l'approximation de champ-moyen. Nous discutons minutieusement les conséquences expérimentales que nous avons observées dues à la présence de cette nouvelle non-linéarité dans le système.

Chapitre 6

Le chapitre 6 présente notre étude en collaboration avec D.S. Petrov et A. Recati sur les effets au-delà du champ-moyen dans les mélanges de condensats de Bose-Einstein couplés. Nous présentons le spectre de Bogoliubov et l'énergie au-delà du champ-moyen pour un mélange couplé. Finalement, nos résultats expérimentaux sur l'observation d'une symétrisation des pertes d'atomes entre les deux états du mélange, et sur la première mesure quantitative de l'équation d'état au-delà du champ-moyen en fonction de la force de couplage, caractérisée par la fréquence Rabi, sont exposés.

Chapitre 1

Théorie de la diffusion, condensats de Bose-Einstein et mélanges de spin

Dans ce chapitre, nous allons introduire les bases théoriques à la description d'un condensat de Bose-Einstein. Dans une première partie, nous verrons brièvement la théorie de la diffusion à basses énergies, nous introduirons la longueur de diffusion qui est le paramètre permettant de décrire les interactions entre atomes, et les résonances de Feshbach qui donnent la possibilité de contrôler les interactions entre les atomes. Plus particulièrement, nous verrons pourquoi le ^{39}K est un candidat adéquat pour les expériences où il est nécessaire de contrôler les interactions entre atomes. La description du système dans une approche de champ-moyen sera introduite, et nous verrons comment la théorie de Bogoliubov, donne à la fois accès aux excitations élémentaires du système, et également aux corrections au-delà du champ-moyen. La seconde partie introduira la physique des mélanges de condensats de Bose-Einstein. La grande variété d'interactions possible entre les deux composants augmente la complexité et la richesse des phénomènes physiques, donnant la possibilité d'étudier des transitions de phases. En fonction du signe des interactions inter-spin, il est possible d'avoir une implosion du système ou une démixtion, c'est-à-dire une séparation spatiale des deux espèces.

1.1 Collision entre atomes neutres

1.1.1 Les différents types de collisions

Les gaz quantiques ultra-froids sont dans un état métastable. En effet, à la température et pression de travail, l'état d'équilibre est un solide. Pour en former un, les atomes doivent d'abord former une molécule. Pour cela, il est nécessaire que trois atomes entrent en collision¹. Les gaz quantiques ultrafroids sont très dilués,

1. La conservation de l'énergie et de l'impulsion empêchent que le processus de formation d'une molécule se fasse avec seulement deux atomes.

la probabilité que trois atomes se rencontrent est par conséquent, très faible. Il est ainsi possible de garder pendant plusieurs minutes le gaz dans un état métastable. La majorité des collisions mettent donc en jeu seulement deux atomes. Plusieurs formes de collisions ont lieu et on peut les répertorier en deux catégories.

Collisions élastiques

Une collision élastique conserve l'énergie cinétique. En effet, seule la quantité de mouvement des particules change. Ces collisions permettent une redistribution de l'énergie cinétique entre les particules dans le gaz, et elles sont responsables de sa thermalisation. Elles permettent l'utilisation du refroidissement évaporatif pour atteindre la condensation de Bose-Einstein. De plus, les collisions élastiques sont responsables de l'énergie de champ-moyen dans un condensat de Bose-Einstein.

Collisions inélastiques

Les collisions inélastiques engendrent une diminution de la densité et sont responsables du temps de vie du condensat de Bose-Einstein. Ils existent différents types de collisions inélastiques :

- Des interactions dipolaires entre atomes peuvent conduire au changement de spin d'un ou des deux atomes. L'énergie totale est conservée, mais l'excédent d'énergie interne est converti en énergie cinétique et les atomes peuvent s'échapper du piège.
- Les collisions inélastiques les plus présentes généralement dans les expériences d'atomes froids, sont les recombinaisons à trois corps. Lors d'une collision entre trois atomes, deux atomes peuvent former une molécule due à l'existence de niveaux moléculaires du potentiel interatomique. La troisième particule absorbe le surplus d'énergie sous forme cinétique et sort du piège. Le résultat de ce processus à trois corps est la perte des trois atomes et une diminution de la densité atomique n de la forme [49]

$$\frac{dn(t)}{dt} = -K_3 n^3(t) \tag{1.1}$$

K_3 est défini comme le coefficient de recombinaison à trois corps. Dans notre expérience, ce sont les recombinaisons à trois corps qui limitent le temps de vie du condensat et empêchent la réalisation de certaines expériences comme nous allons le voir plus loin.

Remarque : Dans une expérience d'atome froids, le vide n'est jamais parfait, il se peut que des atomes piégés entrent en collision avec le gaz résiduel et s'échappent du piège.

1.1.2 Quelques éléments sur la théorie de la diffusion

Un atome neutre de masse m et dans son état fondamental n'a pas de dipôle électrique permanent. Cependant, la variance de l'opérateur dipôle n'est pas nul, ce qui signifie que le dipôle fluctue au cours du temps. Ainsi, deux atomes neutres dans leur état fondamental vont interagir *via* une interaction dipôle-dipôle attractive à longue portée, nommé interaction de Van der Waals [50]. Le potentiel d'interaction s'écrit² :

$$V_{\text{vdW}}(r) = -\frac{C_6}{r^6} \quad (1.2)$$

où $C_6 > 0$ définit la force de l'interaction. La valeur de C_6 dépend directement des éléments de matrice de l'opérateur dipôle entre l'état fondamental et les états excités. À courte portée, l'interaction est dominé par un terme répulsif provenant du principe de Pauli et de la répulsion de Coulomb. Cette partie du potentiel est difficile à connaître précisément, le potentiel de Lennard-Jones le modélise via un terme répulsif proportionnel à $1/r^{12}$. Lorsque l'énergie cinétique quantique d'un paquet d'ondes d'extension R_{vdW} , $E_{\text{cin}} = \hbar^2/mR_{\text{vdW}}^2$, est égale à l'énergie potentielle associée $|E_p| = C_6/R_{\text{vdW}}^6$, on peut définir R_{vdW} comme la portée du potentiel et elle s'écrit [50] :

$$R_{\text{vdW}} = \left(\frac{mC_6}{\hbar^2} \right)^{1/4} \quad (1.3)$$

Considérons la collision de deux particules via le potentiel $V(\mathbf{r})$ ³. La fonction d'onde ψ décrivant la collision est solution de l'équation de Schrödinger $\hat{H}_{\text{rel}}\psi = E\psi$, où \hat{H}_{rel} est l'hamiltonien décrivant le mouvement relatif des deux atomes et s'écrit :

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_r} + V_{\text{vdW}}(\hat{\mathbf{r}}) \quad (1.4)$$

où m_r est la masse réduite du système et $\hat{\mathbf{p}}$ l'impulsion relative. On constate que le problème de la collision de deux atomes se ramène donc à un problème de diffusion d'une particule sur le potentiel $V(\mathbf{r})$. On peut ainsi définir la fonction d'onde comme la somme d'une onde incidente $\psi^{(in)}$ et d'une onde diffusée $\psi^{(diff)}$:

$$\psi = \psi^{(in)} + \psi^{(diff)} \quad (1.5)$$

Dans la limite $r \rightarrow +\infty$:

$$\psi \approx e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + f(k, \theta) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.6)$$

2. On néglige ici les effets de retards. En prenant en compte ces effets l'interaction longue portée devient $\propto r^{-7}$ [51].

3. Le lecteur est invité à se référer à [50, 52] pour une démonstration des résultats qui suivent.

où $f(k, \theta)$ est l'amplitude de diffusion et correspond à la transformée de Fourier du potentiel $V(\mathbf{r})$ dans l'approximation de Born. Le déphasage accumulé entre l'onde incidente et l'onde sortante lors du processus d'interaction avec le potentiel $V(\mathbf{r})$ contient toute l'information sur le processus de collision, et est donc la quantité à considérer. La section efficace différentielle de collision est directement liée à l'amplitude de diffusion :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta)|^2 \quad (1.7)$$

Ici, nous n'avons pas pris en compte les effets d'indiscernabilités. En effet, nous avons à symétriser (*resp.* antisymétriser) la fonction d'onde dans le cas des bosons (*resp.* fermions)⁴. Dans ce cas, la section différentielle de collision devient :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k, \theta) \pm f(k, -\theta)|^2 \quad (1.8)$$

"+" correspond au cas des bosons et "-" aux fermions.

L'hamiltonien \hat{H}_{rel} étant invariant par rotation⁵, la fonction d'onde peut s'écrire comme le produit d'une fonction d'onde radiale et des harmoniques sphériques :

$$\psi(r, \theta, \phi) = \chi(r)Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (1.9)$$

où ℓ est le moment angulaire et m sa projection selon l'axe Oz . On en déduit que la fonction d'onde radiale réduite $u(r) = r\chi(r)$ vérifie l'équation :

$$-\frac{\hbar^2}{2m_r} \frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left(V_{\text{vdw}}(r) + \frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{2m_r r^2} \right) u(r) = Eu(r) \quad (1.10)$$

On remarque que pour chaque valeur de ℓ , il existe un canal de diffusion, la particule diffuse dans un potentiel effectif consistant en la somme du potentiel $V(r)$ et d'une barrière centrifuge d'énergie $\hbar^2\ell(\ell+1)/2m_r r^2$.

Diffusion à basses énergies

Considérons le cas de deux atomes de ^{39}K qui interagissent en onde p ($\ell = 1$), l'énergie nécessaire pour que les atomes passent la barrière de potentiel centrifuge est de l'ordre de $E_{\text{bar}} \sim k_{\text{B}} \times 325 \mu\text{K}$. Dans le cas des atomes froids, l'énergie typique est largement inférieure à E_{bar} , il est donc raisonnable de considérer dans les processus de collisions seulement les collisions en onde s . Dans ce cas, il est possible de montrer que l'amplitude de diffusion $f(k, \theta)$ se réécrit :

4. Nous devrions également prendre en compte l'indiscernabilité dans l'équation (1.6).

5. Ici on néglige les interactions dipôle-dipôle entre atomes. Cette simplification n'a pas de sens lorsque l'on considère les collisions pour des atomes avec des interactions dipolaires magnétiques comme les lanthanides (Er, Dy...).

$$\frac{1}{f(k)} = \frac{k}{\tan \delta_0(k)} - ik \quad (1.11)$$

où $\delta_0(k)$ est le déphasage entre l'onde incidente et sortante pour $\ell = 0$. Pour un canal de diffusion ℓ , les solutions de l'équation 1.10 peuvent s'écrire sous la forme [50] :

$$\chi(r) \propto \frac{\sin(kr - \ell\pi/2)}{r} + \tan(\delta_\ell) \frac{\cos(kr - \ell\pi/2)}{r} \quad (1.12)$$

où δ_ℓ est le déphasage dans le canal de diffusion ℓ .

On définit a la **longueur de diffusion** :

$$a = - \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\tan \delta_0(k)}{k} \quad (1.13)$$

À basse énergie, l'amplitude de diffusion peut se réécrire :

$$f(k) \approx - \frac{a}{1 + ika} \xrightarrow{k \rightarrow 0} -a \quad (1.14)$$

La section efficace dans le cas des bosons devient ⁶ :

$$\sigma = 8\pi a^2 \quad (1.15)$$

On peut réécrire la fonction d'onde $\psi(r)$ telle que :

$$\psi(r) = 1 - \frac{a}{r} \quad (1.16)$$

Physiquement, un potentiel avec une longueur de diffusion positive peut-être vue comme un potentiel de sphère dure avec un rayon a .

Finalement, l'amplitude de diffusion dépend uniquement de a et la longueur de diffusion joue un rôle central dans la description des collisions à basses énergies. Dans la majorité des situations et des expériences d'atomes ultra froids, il suffit de connaître a pour décrire la physique, que ce soit pour décrire les propriétés statiques ou dynamiques.

1.1.3 Potentiel de contact

Il est intéressant de noter que la longueur de De Broglie dans les gaz quantiques est typiquement de l'ordre de $\lambda_{dB}(T = 1\mu K) \sim 5550 a_0$, où a_0 est le rayon de

6. Dans le cas de fermions identiques, la section efficace en onde s est nulle. Les canaux de diffusion autorisés sont pour les ℓ impairs.

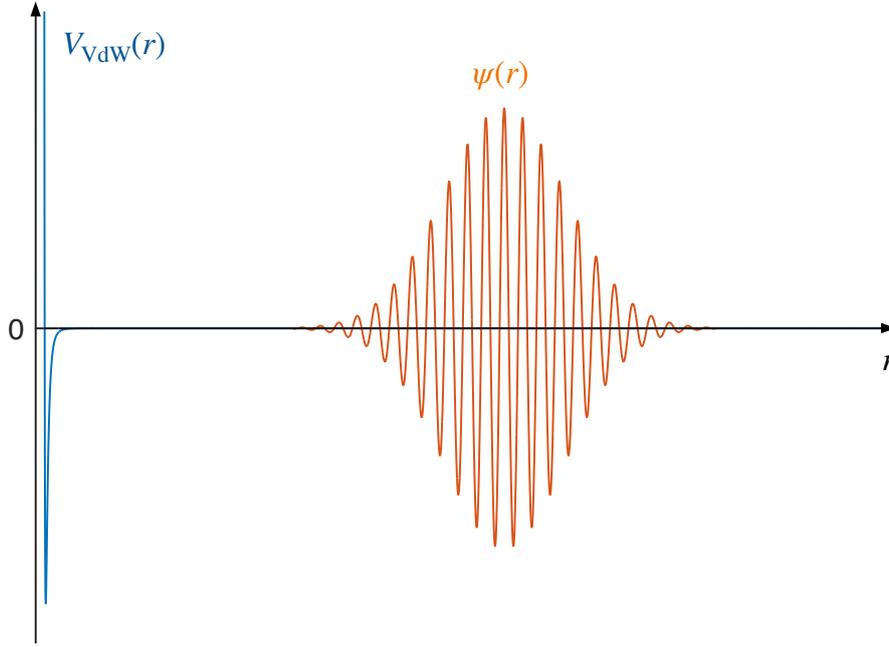


FIGURE 1.1 – Potentiel inter-atomeur $V_{\text{VdW}}(\mathbf{r})$ et la fonction d'onde ψ d'atome dans la limite des basses énergies. La longueur de De Broglie λ_{dB} est plus grande que la portée R_{VdW} .

Bohr⁷, et que la portée de l'interaction de Van der Waals $R_{\text{VdW}} = \left(\frac{mC_6}{\hbar^2}\right) \sim 130 a_0$. Ainsi, lors d'une collision, les atomes ne résolvent pas les détails du potentiel et se comportent de la même manière que pour un potentiel de contact (Voir figure 1.1). Dans la limite des basses énergies et dans deux potentiels différents, mais avec la même longueur de diffusion, les atomes auront quasiment le même comportement. Il est donc possible de construire un potentiel de contact à partir de la longueur de diffusion qui va décrire les interactions entre atomes. On peut décrire l'interaction entre deux atomes *via* le potentiel de contact suivant, appelé pseudo-potentiel [11] :

$$V_{\text{pp}}[\psi(r)] = g\delta(r)\frac{\partial}{\partial r}(r\psi(r)) \quad (1.17)$$

où $\delta(r)$ est la distribution de Dirac, $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ est la constante de couplage et caractérise les interactions dans les gaz quantiques :

- Plus $|a|$ est élevé plus les interactions sont grandes.
- Si $a > 0$ les interactions sont répulsives.
- Si $a < 0$ les interactions sont attractives.
- Si $a = 0$ les interactions sont nulles.

7. $a_0 = 0.529 \times 10^{-10}$ m

Lorsque la longueur de diffusion est négative, les interactions sont donc attractives. Dans un gaz quantique, le système va augmenter sa densité pour minimiser son énergie. Plus la densité augmente, plus le nombre d'atomes va diminuer dû aux recombinaisons à trois corps. Le destin d'un condensat tridimensionnel avec $a < 0$ est généralement l'implosion caractérisée par une chute brutale du nombre d'atomes, qu'on nomme « **collapse** ».

Remarque : Dans l'approximation de Born, il est possible de calculer la longueur de diffusion ($a = a^{(1)} + a^{(2)} + \dots$). À l'ordre 1, la longueur de diffusion s'exprime comme :

$$a = a^{(1)} = \frac{m}{4\pi\hbar^2} \int V_{\text{VdW}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (1.18)$$

1.1.4 Résonance de Feshbach

Précédemment, nous n'avons pas considéré la structure atomique des deux atomes lors de la collision. En effet, le potentiel d'interaction dépend de l'état de spin des deux atomes. Chaque atome i a un spin total \mathbf{S}_i , et on peut écrire son état interne $|S_i, m_{S_i}\rangle$. Des canaux de diffusion dont le spin total $M = m_{S_1} + m_{S_2}$ est conservé, peuvent se coupler et changer les propriétés de collision, et même donner lieu à une résonance de diffusion, nommé résonance de Feshbach [21]. Cette résonance peut avoir lieu due au fait que l'hamiltonien hyperfin $\hat{H}_{\text{hf}} \propto \hat{\mathbf{I}} \cdot \hat{\mathbf{S}}$ ne commute pas avec le spin total $\hat{\mathbf{S}}_{\text{tot}} = \hat{\mathbf{S}}_1 + \hat{\mathbf{S}}_2$. Ainsi, lors de la collision, l'hamiltonien hyperfin peut induire des changements dans la configuration de spin. Afin de décrire ce phénomène⁸, nous nous plaçons dans l'approximation de Born-Oppenheimer qui consiste à supposer que la dynamique interne atomique est plus rapide que la dynamique externe. Ainsi, l'état interne s'adapte adiabatiquement à l'état externe.

Prenons le cas de deux atomes identiques de spin $S_{1,2} = 1/2$. Le dimère formé par l'appariement des spin est soit dans l'état singulet ($S=0$), soit dans l'état triplet ($S=1$). Il existe donc deux canaux de diffusions possibles, le potentiel singulet V_S qui est un canal de diffusion fermé et celui du triplet V_T qui est un canal de diffusion ouvert. Supposons de plus qu'il existe des états moléculaires dans le potentiel singulet.

En présence d'un champ magnétique \mathbf{B} aligné selon Oz , le couplage du spin avec le champ magnétique est décrit par l'hamiltonien Zeeman \hat{H}_Z [52] :

$$\hat{H}_Z = \frac{gS\mu_B}{\hbar} \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{B} = \frac{gS\mu_B}{\hbar} \hat{S}_Z \cdot B \quad (1.19)$$

8. Notre description des résonances de Feshbach n'est pas exhaustive. Elle n'aborde pas, par exemple, l'origine de résonance large ou étroite. Une étude plus détaillée se trouve dans les références [21, 22].

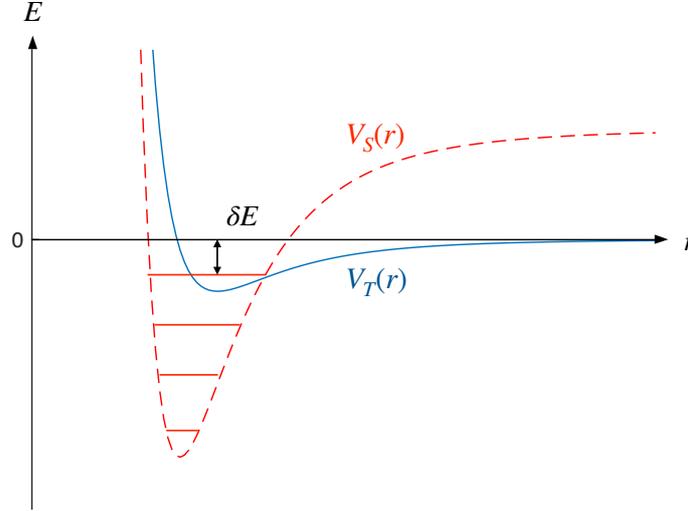


FIGURE 1.2 – Schéma du potentiel singulet et triplet. Une résonance à lieu lorsque l'écart d'énergie δE entre l'énergie d'un état moléculaire et l'énergie de collision tend vers 0.

Généralement, il est possible d'écrire le potentiel d'interaction V_{int} comme [53] :

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{1}{4}(3V_T(\mathbf{r}) + V_S(\mathbf{r})) + \hat{\mathbf{S}}_1 \cdot \hat{\mathbf{S}}_2 (V_T(\mathbf{r}) - V_S(\mathbf{r})) \quad (1.20)$$

Seul l'état triplet va être affecté par la présence du champ magnétique. En changeant la valeur du champ magnétique, on modifie l'énergie de l'état triplet, cela revient donc à changer l'écart relatif entre le potentiel triplet et singulet δE . Qualitativement, lorsque l'énergie d'un état moléculaire coïncide avec l'énergie de collision, l'interaction hyperfine peut induire des échanges de spin et une résonance à lieu (Voir figure 1.2) . De plus, on remarque que même si on considère que l'état initial est l'état triplet, lors de la collision le second terme de (1.20) couple les deux canaux, et engendre une modification de l'amplitude de diffusion dans le canal ouvert, et par conséquent change la longueur de diffusion.

Proche d'une résonance positionnée en B_0 , la longueur de diffusion peut se réécrire simplement sous la forme⁹ :

$$a(B) = a_{bg} \left(1 + \frac{\Delta}{B - B_0} \right) \quad (1.21)$$

9. Le régime unitaire est atteint lorsque $a = \pm\infty$ mais ne sera pas traité ici

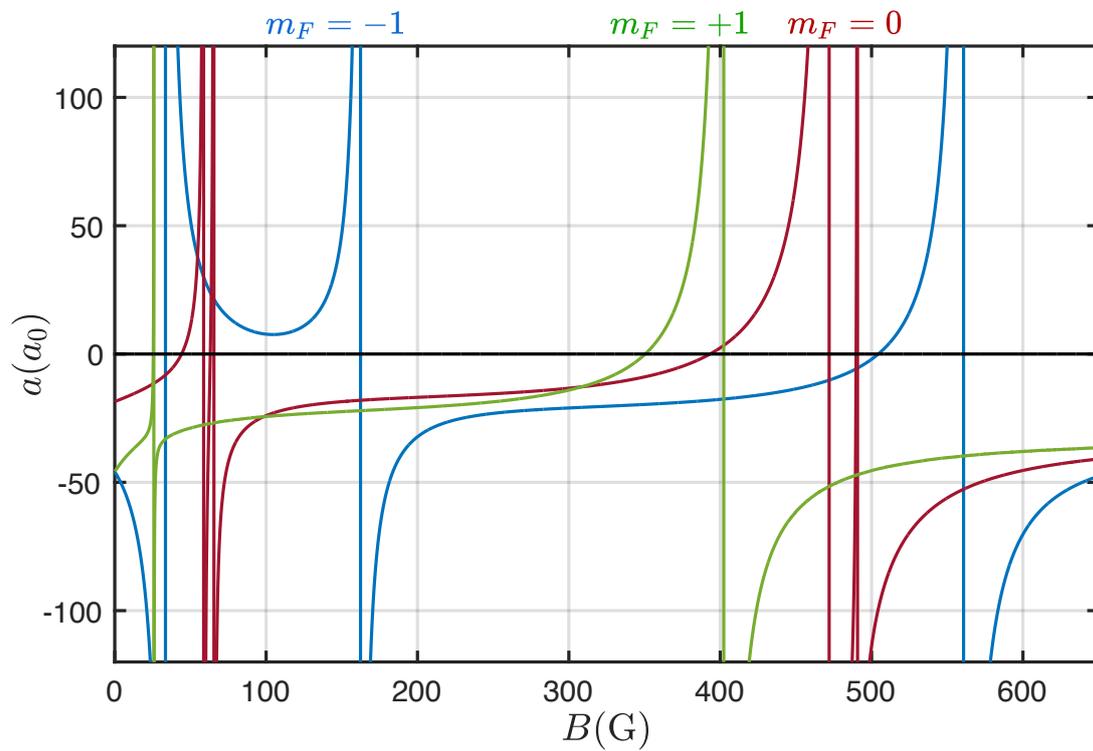


FIGURE 1.3 – Longueur de diffusion a en unité de a_0 en fonction du champ magnétique en G . Les résonances de Feshbach en onde s pour les mêmes états $m_F = -1, 0, +1$ sont représentées en bleues, rouges et vertes respectivement. Figure provenant de [54].

m_{F_a}, m_{F_b}	B_{exp} (G)	B_{th} (G)	$-\Delta_{\text{th}}$ (G)	$-s$ (μ_B)	$a_{\text{bg}}(a_0)$	(SIf) or $\{SIM_S\}$
1, 1	25.85(10)	25.9	0.47	1.5	-33	(133)
	403.4(7)	402.4	52	1.5	-29	
		745.1	0.4	3.9	-35	{113}
	752.3(1)	752.4	0.4	3.9	-35	{111}
0, 0	59.3(6)	58.8	9.6	0.83	-18	(133)
	66.0(9)	65.6	7.9	0.78	-18	(111)
		471	72	1.22	-28	
		490	5	1.70	-28	
		825	0.032	3.92	-36	{113}
		832	0.52	3.90	-36	{111}
-1, -1	32.6(1.5)	33.6	-55	-1.9	-19	(112)
	162.8(9)	162.3	37	1.2	-19	(133)
	562.2(1.5)	560.7	56	1.4	-29	

FIGURE 1.4 – Positions des résonances de Feshbach en onde s expérimentales B_{exp} et théoriques B_{th} , largeurs Δ , longueurs de diffusions a_{bg} pour différents sous-états Zeeman m_{F_a} et m_{F_b} . Tableau provenant de [55].

a_{bg} est la longueur de diffusion dans le canal ouvert. Δ est la largeur de la résonance.

Finalement, proche d'une résonance, il est possible de contrôler la longueur de diffusion. Il est important de noter que, proche d'une résonance, la section efficace de collisions augmente et également les pertes d'atomes. Entre 0 G et 700 G, le potassium ^{39}K possède beaucoup de résonances de Feshbach en onde s accessibles expérimentalement (Voir figure 1.3 et 1.4) [55].

1.2 Interactions dans un condensat de Bose-Einstein

1.2.1 Théorie de champ-moyen et équation de Gross-Pitaevskii

Nous avons vu précédemment que le potentiel d'interaction de deux atomes dans la limite des basses énergies peut être remplacé par un potentiel de contact. L'état fondamental $|\Psi\rangle$ du système, composé de N atomes, n'est pas en général un produit de N fonctions d'ondes de dimension 3, mais une seule fonction d'onde de dimension $3N$. L'approche de champ-moyen est une approche variationnelle, on cherche l'état quantique de N atomes condensés, se rapprochant le plus de l'état véritable, comme le produit de N fonctions d'ondes identiques à une particule $\psi(\mathbf{r})$ [56] :

$$\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N) = \prod_{i=1}^N \psi(\mathbf{r}_i) \quad (1.22)$$

Les interactions sont prises facilement en compte, en considérant que chaque atome voit un potentiel moyen $gn(\mathbf{r})$, où $n(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})|^2$ est la densité locale. Les propriétés statiques d'un condensat de Bose-Einstein dans un potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ se déterminent par la résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire [11] :

$$\mu\psi(\mathbf{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + gn(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \quad (1.23)$$

où $g = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ est la constante de couplage et μ le potentiel chimique. La fonction d'onde vérifie la condition de normalisation suivante $\int |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} = N$.

Régime sans interactions dans un piège harmonique

La plupart des expériences de gaz quantique se font dans des pièges optiques gaussiens. À suffisamment basse température, le potentiel extérieur peut être considéré harmonique de pulsation $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$. Lorsque $g = 0$, le condensat est dit sans interactions et s'apparente à un gaz parfait. La fonction d'onde du condensat est dans l'état fondamental du piège harmonique, c'est-à-dire dans l'état gaussien :

$$\psi(x, y, z) = \frac{1}{\pi^{3/4} \sqrt{a_{oh_x} a_{oh_y} a_{oh_z}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a_{oh_x}^2} - \frac{y^2}{2a_{oh_y}^2} - \frac{z^2}{2a_{oh_z}^2}\right) \quad (1.24)$$

où $a_{oh_{x,y,z}} = \sqrt{\hbar/m\omega_{x,y,z}}$ est la longueur de l'oscillateur harmonique dans la direction (x, y, z) .

Régime de Thomas-Fermi

Le régime où les interactions dominent le système et, où l'énergie cinétique joue un rôle négligeable s'appelle le **régime de Thomas-Fermi**. Il est alors possible de négliger le terme cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii et la fonction d'onde s'écrit simplement :

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{\mu - V(\mathbf{r})}{g}} \quad (1.25)$$

et ψ s'annule en dehors de la zone où $\mu > V(\mathbf{r})$. L'énergie cinétique joue un rôle au niveau des bords de la fonction d'onde où la densité est localement faible.

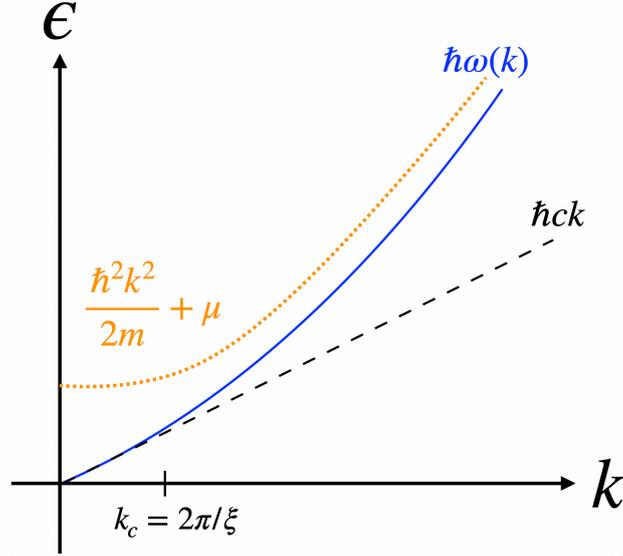


FIGURE 1.5 – Spectre de Bogoliubov $\omega(k)$ en fonction du vecteur d'onde k . On distingue deux régimes : le régime phononique en noir et le régime des particules libres en orange

Dynamique du condensat

On peut décrire la dynamique du condensat dans un potentiel extérieur $V(\mathbf{r})$ via l'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}, t) + gn(\mathbf{r}, t)\psi(\mathbf{r}, t) \quad (1.26)$$

Afin de connaître les excitations du système, il est possible de linéariser l'équation (1.26) autour de l'état d'équilibre. Dans le cas homogène et dilué ($na^3 \ll 1$), le spectre des excitations élémentaires $\omega(k)$ en fonction du vecteur d'onde k , appelé aussi spectre de Bogoliubov est [11] :

$$\hbar\omega(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(2gn + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)} \quad (1.27)$$

On distingue deux régimes d'excitation dans un condensat (cf Figure-1.5). Dans la limite $k \rightarrow 0$, les excitations élémentaires sont sous forme de phonons se propageant à la vitesse du son $c = \sqrt{gn/m}$:

$$\omega(k) \approx ck \quad (1.28)$$

On définit $\xi = \hbar/\sqrt{2mc}$ la longueur de cicatrisation. Lorsque $\lambda = 2\pi/k < \xi$, les atomes ne se comportent plus collectivement, on entre dans le régime des particules libres. La relation de dispersion est donné par :

$$\omega(k) \approx \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{gn}{\hbar} \quad (1.29)$$

Afin d'exciter une particule dans un état libre $|\mathbf{k}\rangle$, il faut payer l'énergie correspondant au potentiel chimique $\mu = gn$, plus l'énergie de la particule libre égale à $\hbar^2 k^2/2m$.

Lorsque la longueur de diffusion devient négative, la vitesse du son devient imaginaire, les différents modes de Bogoliubov vont donc croître exponentiellement en fonction du temps. Les atomes vont se regrouper de plus en plus, augmentant ainsi la densité jusqu'au collapse¹⁰.

1.2.2 Déplétion quantique et correction de Lee-Huang-Yang

Déplétion quantique

On considère un gaz de bosons avec une longueur de diffusion positive ($a > 0$). En utilisant le formalisme de la seconde quantification et en le diagonalisant via la méthode de Bogoliubov, il est possible d'écrire l'hamiltonien comme [11, 37] :

$$\hat{H} = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \epsilon(k) \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}} \quad (1.30)$$

où E_0 est l'énergie de point-zéro, $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ (*resp.* $\hat{b}_{\mathbf{k}}$) est l'opérateur création (*resp.* annihilation) d'un phonon dans le mode \mathbf{k} et $\epsilon(k) = \hbar\omega(k)$.

L'hamiltonien est la somme d'un terme constant et d'oscillateurs harmoniques. L'état fondamental du système $|\Psi_0\rangle$ est l'état où chaque oscillateur harmonique est dans son état fondamental. Cependant les opérateurs création et annihilation d'une particule dans l'état d'impulsion \mathbf{k} ne commutent pas avec l'hamiltonien. Ainsi, l'état fondamental du système n'est pas l'état où toutes les particules sont dans l'état où $\mathbf{k} = \vec{0}$. Le nombre d'atomes dans les états d'impulsions non nul N_0 est :

$$\frac{N - N_0}{N} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} (na^3)^{1/2} \quad (1.31)$$

Ainsi, l'état fondamental ne coïncide pas avec l'état de Fock où tout les atomes sont dans l'état d'impulsion nul. Une partie des atomes est déplété vers des états excités dû aux interactions. C'est ce qu'on appelle la **déplétion quantique**. À ne pas confondre avec la déplétion thermique qui caractérise les excitations du système, en raison d'une température non nulle. Dans la plupart des expériences, la déplétion quantique est très faible (inférieur à 1%).

¹⁰. Il existe des mécanismes de stabilisation, comme la formation de soliton à 1D ou la formation de gouttelette quantique.

Correction de Lee-Huang-Yang

À température nulle et pour $a > 0$, la densité d'énergie de l'état fondamental pour un condensat de Bose-Einstein homogène dans la limite $na^3 \ll 1$ s'écrit :

$$\frac{E_0}{V} = \frac{gn^2}{2} \left(1 + \frac{128}{15\sqrt{\pi}} (na^3)^{1/2} \right) \quad (1.32)$$

Le premier terme de (1.32) est l'énergie de champ-moyen que nous avons vu précédemment. Le deuxième terme est la première correction au-delà du champ-moyen, plus généralement appelé la correction de Lee-Huang-Yang (LHY) [36]. L'origine de cette correction est l'énergie de point-zéro des excitations de Bogoliubov, et est donc intrinsèquement quantique. Étant donné que $na^3 \ll 1$, la correction de LHY est extrêmement faible et ne joue généralement pas de rôle dans la dynamique du condensat.

Les résonances de Feshbach ont donné la possibilité d'augmenter la longueur de diffusion a et donc d'augmenter le rôle des fluctuations quantiques. Plusieurs observations ont été faites dans les gaz de Bose. Proche d'une résonance de Feshbach et grâce à la spectroscopie de Bragg, l'observation de la déviation du spectre d'excitations du modèle de champ moyen [57] et la mesure directe de la déplétion quantique [58] ont été réalisés. La mesure de la distribution des impulsions k d'un gaz de Bose dans un réseau optique a permis l'observation des paires de Bogoliubov $\mathbf{k}/ - \mathbf{k}$ provenant de la déplétion quantique [59].

Pour des mélanges de bosons ou pour un gaz quantique en présence d'interactions dipolaires magnétiques (Dy, Er), il est possible d'être dans des configurations où les fluctuations quantiques donnent une énergie du même ordre que l'énergie de champ-moyen dans l'équation d'état. Ces systèmes ont permis l'observation de gouttelette quantique et de supersolide [44]. Une description plus détaillée sera faite dans le chapitre 2.

1.3 Mélange de condensats de Bose-Einstein

Les mélanges de condensats de Bose-Einstein permettent de complexifier le système et donc de donner la possibilité d'étudier une physique plus riche inaccessible pour le cas de condensat avec une seule espèce. Dans cette thèse, nous nous pencherons sur la physique des mélanges pour deux états de spin de la même espèce atomique [60].

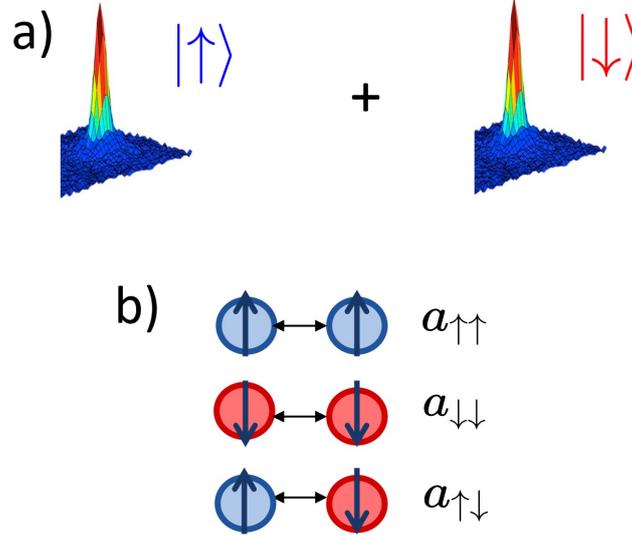


FIGURE 1.6 – (a) Le système est composé de deux condensats dans les états de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. (b) Longueurs de diffusion permettant de définir les interactions inter- et intra-spin.

1.3.1 Interactions et diagramme des phases

On considère deux condensats dans les états de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ à température nulle, décrit par les fonctions d'ondes $|\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\rangle$ et $|\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\rangle$. Afin de décrire les interactions présentes dans le système, on définit trois longueurs de diffusions $a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$ décrivant les interactions intra-spin et $a_{\uparrow\downarrow}$ pour les interactions inter-spin (Voir figure-1.6). Le système est décrit par une paire d'équations de Gross-Pitaevskii couplées :

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{\uparrow}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow}(\mathbf{r},t) + g_{\uparrow\downarrow}n_{\downarrow}(\mathbf{r},t) \right] \psi_{\uparrow}(\mathbf{r},t) \quad (1.33)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{\downarrow}(\mathbf{r},t)}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r}) + g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow}(\mathbf{r},t) + g_{\uparrow\downarrow}n_{\uparrow}(\mathbf{r},t) \right] \psi_{\downarrow}(\mathbf{r},t) \quad (1.34)$$

où $n_{\uparrow}(\mathbf{r},t)$ et $n_{\downarrow}(\mathbf{r},t)$ sont respectivement la densité dans l'état $|\psi_{\uparrow}(\mathbf{r})\rangle$ et $|\psi_{\downarrow}(\mathbf{r})\rangle$. De plus, $g_{\uparrow\uparrow}$, $g_{\downarrow\downarrow}$ et $g_{\uparrow\downarrow}$ sont les constantes de couplage associées aux longueurs de diffusions $a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$ et $a_{\uparrow\downarrow}$.

La densité d'énergie de champ-moyen du mélange s'écrit :

$$\frac{E}{V} = \frac{g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow}^2}{2} + \frac{g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow}^2}{2} + g_{\uparrow\downarrow}n_{\uparrow}n_{\downarrow} \quad (1.35)$$

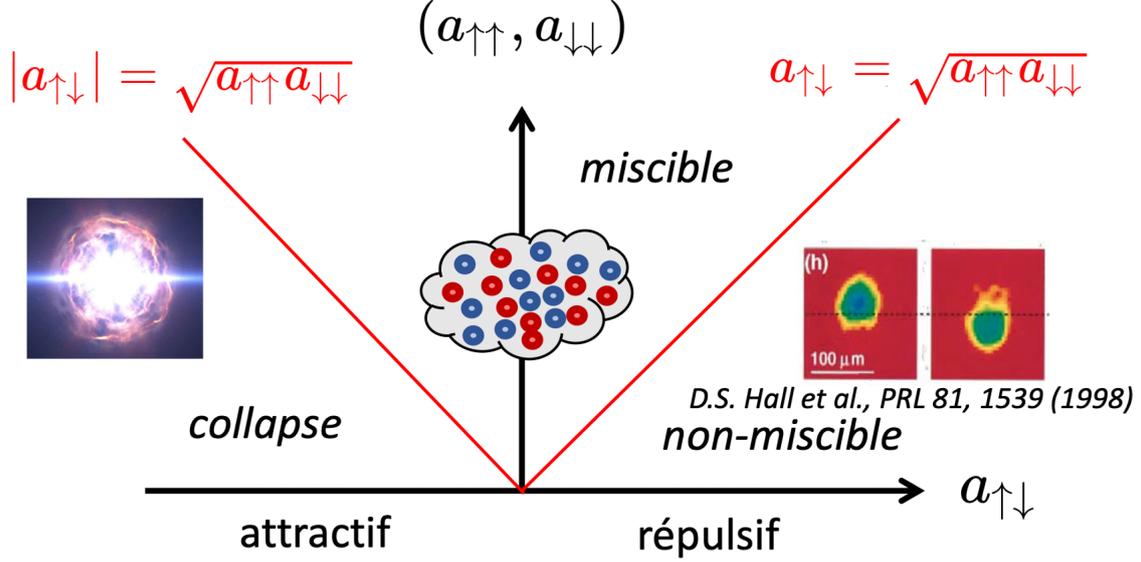


FIGURE 1.7 – Diagramme des phases pour un mélange de condensats de Bose-Einstein. Le système peut subir une transition de phase miscible-non miscible lorsque $a_{\uparrow\downarrow} \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. Lorsque $-a_{\uparrow\downarrow} \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, une instabilité dynamique a lieu, et le système implose.

À partir de l'équation (1.35), on peut déduire la nature de l'état fondamental en fonction des longueurs de diffusion. On considère que les longueurs de diffusion intra-spin sont positives et donc que les interactions intra-spin sont répulsives. La valeur et le signe de la longueur de diffusion $a_{\uparrow\downarrow}$ va changer la nature de l'état fondamental. En effet, on distingue trois régimes. Lorsque $a_{\uparrow\downarrow} \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, les interactions inter-spin sont répulsives et trop importantes, le système va minimiser son énergie en séparant spatialement les deux condensats [61, 62]. Le système est donc dans le régime non-miscible. Le régime miscible est atteint lorsque $-\sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}} \ll a_{\uparrow\downarrow} \ll \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$ et les fonctions d'ondes se recouvrent spatialement [63]. Pour des interactions inter-spin attractives et lorsque $|a_{\uparrow\downarrow}| \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, les interactions dans le système sont globalement attractives, ainsi le système va minimiser son énergie en augmentant sa densité, ce qui va conduire à un collapse du système [64, 65]. Proche de la zone du collapse, il est possible de décrire le système comme étant composé d'un seul spin avec une longueur de diffusion¹¹ $\delta a = a_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. Lorsque on se place sur la ligne où $|a_{\uparrow\downarrow}| = \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, $\delta a = 0$ et correspond à une interaction de champ-moyen globale nulle [42, 63].

11. De manière plus précise, la longueur de diffusion est $2\delta a \frac{\sqrt{a_{\uparrow\uparrow}/a_{\downarrow\downarrow}}}{(1+\sqrt{a_{\uparrow\uparrow}/a_{\downarrow\downarrow}})^2}$. Voir le chapitre 2

1.3.2 Excitations élémentaires d'un mélange

Le spectre d'excitations de Bogoliubov pour un mélange est plus compliqué à obtenir mais peut être déterminé d'une manière similaire au cas avec une seule espèce. Il existe deux types d'excitations ($g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g$) [66] :

- **Modes de densité** : Ils correspondent à une excitation où le densité totale du système oscille spatialement et où les deux condensats oscillent en phase (Voir (a) de la figure 1.8). La relation de dispersion pour les modes de densité est :

$$E_d(k) = \hbar\omega_d(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + n(g + g_{\uparrow\downarrow}) \right)} \quad (1.36)$$

- **Modes de spin** : Ils correspondent à une excitation où la densité totale est constante, mais les condensats oscillent en opposition de phase (Voir (b) de la figure 1.8). La relation de dispersion pour les modes de spin est :

$$E_s(k) = \hbar\omega_s(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + n(g - g_{\uparrow\downarrow}) \right)} \quad (1.37)$$

On définit les longueurs de cicatrisation pour les modes de densité et de spin comme :

$$\xi_d = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}c_d}, \quad \xi_s = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}c_s} \quad (1.38)$$

où $c_d = \sqrt{(g + g_{\uparrow\downarrow})n/m}$ et $c_s = \sqrt{(g - g_{\uparrow\downarrow})n/m}$ sont respectivement la vitesse du son pour les modes densité et les modes de spin. On remarque qu'il existe dans un mélange deux échelles de longueurs associées aux différentes excitations. Nous verrons, dans le chapitre 3, qu'il est possible de se placer dans des dimensions hybrides, par exemple, dans une configuration où on gèle radialement le mode de densité mais pas celui de spin, le système devient ainsi unidimensionnel pour les modes de densité, mais reste tridimensionnel pour les modes de spin.

Selon les différents régimes, les différents modes sont plus ou moins coûteux en énergie pour être excités. Proche du régime non-miscible, il est plus favorable pour les deux condensats d'osciller en opposition de phase, les modes de spin sont les **soft modes** (Voir (c) de la figure 1.8). Les modes de densité sont les **hard modes**, en effet augmenter localement la densité totale conduit à augmenter l'énergie, ils sont donc énergétiquement difficiles à exciter. À mesure que l'on se rapproche de la ligne de la séparation spatiale des condensats, les modes de spin deviennent de moins en moins énergétiques, et il devient de plus en plus favorable et facile de séparer les condensats spatialement [67, 68]. Lorsque que l'on passe la ligne $a_{\uparrow\downarrow} = \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, les

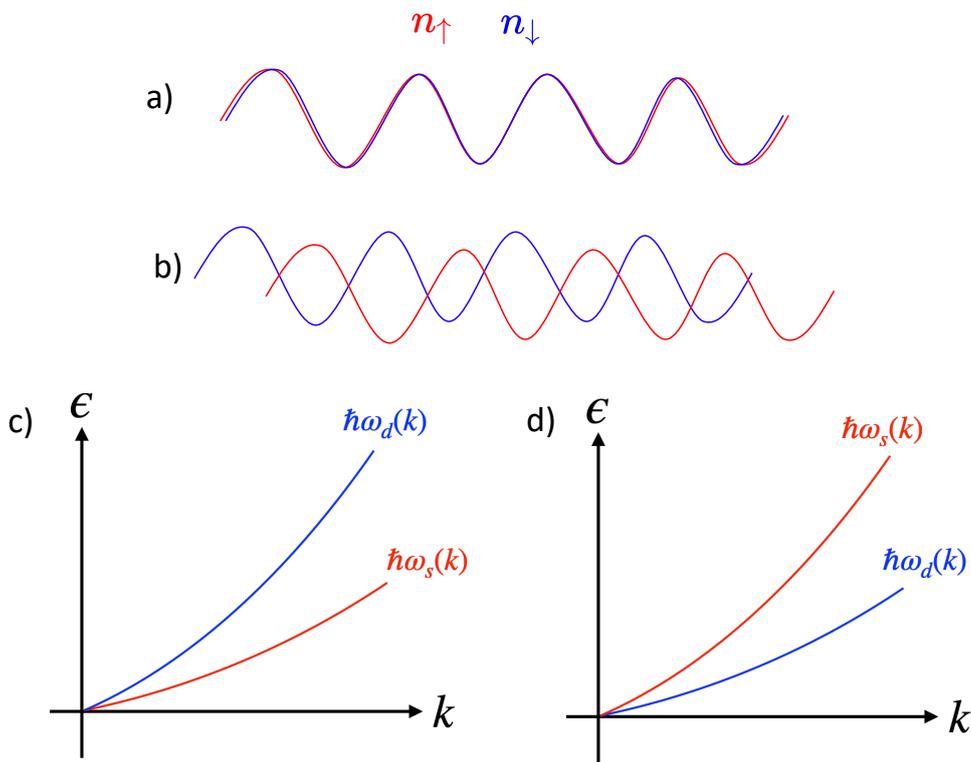


FIGURE 1.8 – Schéma des excitations de Bogoliubov pour un mélange. (a) Mode de densité, les condensats oscillent en phase. (b) Mode de spin, les condensats oscillent en opposition de phase. (c) (*resp.* (d)) Relation de dispersion du mode de spin et de densité proche du régime non-miscible ($a_{\uparrow\downarrow} > 0$) (*resp.* du collapse ($a_{\uparrow\downarrow} < 0$)).

modes de spin deviennent imaginaires, ainsi chaque mode va croître exponentiellement, conduisant à la séparation spatiale des deux condensats [61].

À la limite du collapse, les interactions inter-spin sont attractives, il est donc énergétiquement coûteux de séparer les condensats spatialement, ainsi les modes de spin deviennent les **hard modes** (Voir (d) de la figure 1.8). Les modes de densité sont par conséquent les **soft modes**, ainsi augmenter la densité totale est favorable énergétiquement proche du collapse. Lorsque que l'on passe la limite $-a_{\uparrow\downarrow} = \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, les modes de densité deviennent imaginaires, et chaque mode va exponentiellement croître conduisant à l'implosion du système.

1.3.3 Correction de Lee-Huang-Yang pour un mélange

Précédemment, on a vu que la correction Lee-Huang-Yang à l'énergie pour un condensat à une seule composante provenait de l'énergie de point-zéro des excitations de Bogoliubov. Dans le cas d'un mélange, comme expliqué plus haut, il existe deux modes d'excitations, les modes de densité et les modes de spin. Ainsi, chaque mode va contribuer à l'énergie des fluctuations quantiques. À mesure que l'on se rapproche de la limite du collapse ($\delta a \rightarrow 0$), les modes de densité deviennent de plus en plus mous et leurs contributions à l'énergie de point-zéro deviennent négligeables par rapport à la contribution des modes de spin¹². Finalement, les fluctuations quantiques des modes de spin sont les principales contributions à la correction de Lee-Huang-Yang. La correction dans l'équation d'état s'écrit [42, 69] :

$$\frac{E_{\text{LHY}}}{V} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} (g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow})^{5/2} f \left(1, \frac{g_{\uparrow\downarrow}^2}{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}}, \frac{g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow}}{g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow}} \right) \quad (1.39)$$

où $f > 0$ est une fonction sans dimension définie par :

$$f(1, x, y) = \sum_{\pm} (1 + y \pm \sqrt{(1-y)^2 + 4xy})^{5/2} / 4\sqrt{2} \quad (1.40)$$

On remarque que l'énergie de Lee-Huang-Yang dépend très peu de δg et de son signe [70]. Cela signifie que contrairement au cas d'un condensat avec une seule composante, même si la longueur de diffusion globale δa est nul, le terme au-delà du champ-moyen reste quant à lui non nul.

12. Dans le cas d'un condensat d'une seule espèce, lorsque $a = 0$ $E_{\text{LHY}} = 0$.

Chapitre 2

Généralités sur les gouttelettes quantiques

2.1 Introduction

Les liquides classiques proviennent de la compétition entre, l'interaction attractive à longue portée de Van der Waals, ou de la liaison hydrogène, et de la répulsion à courte portée de Pauli (figure 2.1 (a)). La bonne description du liquide dépend de la connaissance en détail du potentiel d'interaction, qui malheureusement reste une tâche complexe, rendant la description des liquides classiques non-universelle. Tandis que les liquides classiques subissent une transition de phase vers l'état solide à basse température, les liquides quantiques n'y sont pas nécessairement soumis. Par exemple, l'hélium reste liquide proche de zéro kelvin et à pression atmosphérique due à la répulsion quantique de point-zéro des atomes.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu qu'un condensat de Bose-Einstein avec une longueur de diffusion négative et à trois dimensions s'effondre sur lui-même (collapse). De même, dans une vision purement de champ-moyen, un mélange dans la zone de collapse va diminuer son énergie en augmentant sa densité, et va par conséquent finir lui aussi par s'effondrer. En prenant en compte les effets au-delà du champ-moyen, le système ne s'effondre pas sur lui-même, mais possède un état d'équilibre stable dû au terme répulsif de Lee-Huang-Yang, un effet quantique purement à **N-corps**. Cet état est appelé **gouttelette quantique**. Ce liquide quantique est ultra dilué, environ 10^8 fois plus dilué que l'eau liquide. D'autre part, la description des interactions est simple et nécessite uniquement la connaissance des longueurs de diffusions, rendant leur description universelle. Ce chapitre est consacré à la description du mécanisme permettant la stabilisation du système et aux propriétés intrinsèques de cet état. Nous verrons également les études déjà réalisées sur ce système et leurs limitations expérimentales. Pour la rédaction de ce chapitre, je me suis principalement inspiré de [71, 72].

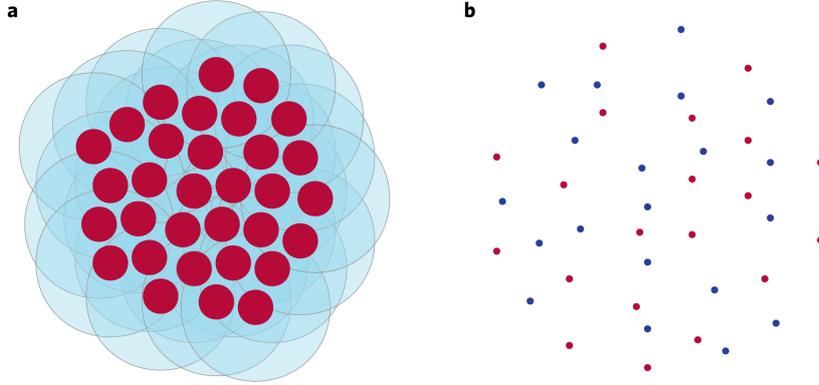


FIGURE 2.1 – Schéma issu de [73]. (a) Schéma d'une gouttelette classique dense, stabilisée par la compétition entre l'attraction longue portée de Van der Waals (rayon bleu) et la répulsion de Pauli à courte portée (boule rouge). (b) Schéma d'une gouttelette quantique diluée faite à partir d'un mélange de spin bosonique ultra-froid (billes rouge et bleu). L'interaction de contact attractive inter-espèce (interaction rouge-bleue) légèrement supérieure à la répulsion intra-espèce (interaction rouge-rouge et bleue-bleue), est compensée par les fluctuations quantiques phononiques du système.

2.2 Champ-moyen et blocage du ratio de la densité

On considère un mélange de condensat de Bose-Einstein à température nulle, dans les états de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, avec des interactions intra-spin répulsives et inter-spin attractives ($a_{\uparrow\uparrow} > 0$, $a_{\downarrow\downarrow} > 0$, $a_{\uparrow\downarrow} < 0$). On considère le cas d'un système homogène de densité totale $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$, où $n_{\uparrow,\downarrow}$ correspondent respectivement à la densité pour l'état de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. La densité d'énergie de champ-moyen s'écrit :

$$\frac{E}{V} = \frac{g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow}^2}{2} + \frac{g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow}^2}{2} + g_{\uparrow\downarrow}n_{\uparrow}n_{\downarrow} \quad (2.1)$$

En introduisant $\delta g = g_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}}$ et $g = \sqrt{g_{\uparrow\uparrow}g_{\downarrow\downarrow}}$, on peut réécrire (2.1) tel que :

$$\frac{E}{V} = \frac{(\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}}n_{\uparrow} - \sqrt{g_{\downarrow\downarrow}}n_{\downarrow})^2}{2} + \frac{g\delta g(\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}}n_{\downarrow} + \sqrt{g_{\downarrow\downarrow}}n_{\uparrow})^2}{(g_{\uparrow\uparrow} + g_{\downarrow\downarrow})^2} \quad (2.2)$$

Proche de la zone du collapse $\delta g/g \ll 1$, le premier terme de (2.2) est dominant par rapport au second. Le système va minimiser son énergie en minimisant ce terme. Il va par conséquent bloquer le rapport des deux densités n_{\uparrow} et n_{\downarrow} de telle sorte à valider :

$$\frac{n_{\uparrow}}{n_{\downarrow}} = \sqrt{\frac{g_{\downarrow\downarrow}}{g_{\uparrow\uparrow}}} \quad (2.3)$$

On appelle cette caractéristique **le blocage du ratio de la densité**. Dans cette situation et en supposant qu'aucun mode de spin n'est excité, la densité d'énergie de champ-moyen se réécrit :

$$\frac{E}{V} = \frac{g\delta g(\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}}n_{\downarrow} + \sqrt{g_{\downarrow\downarrow}}n_{\uparrow})^2}{(g_{\uparrow\uparrow} + g_{\downarrow\downarrow})^2} \iff \frac{E}{V} = \frac{g\delta g}{(\sqrt{g_{\uparrow\uparrow}} + \sqrt{g_{\downarrow\downarrow}})^2}n^2 \quad (2.4)$$

Au niveau du champ-moyen, on remarque qu'on peut décrire le système à deux composantes, comme un système à une composante, de densité $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$, et avec une longueur de diffusion effective $2a\delta a/(\sqrt{a_{\uparrow\uparrow}} + \sqrt{a_{\downarrow\downarrow}})^2$.

2.3 Mécanisme de stabilisation

Le mécanisme de stabilisation et la formation de gouttelette quantique ont été initialement proposés par D.S. Petrov en 2015 [42]. L'origine de la stabilisation est la compétition entre l'énergie de champ-moyen attractive $E_{\text{MF}}/V \propto n^2$ et l'énergie de Lee-Huang-Yang répulsive $E_{\text{LHY}}/V \propto n^{5/2}$. L'équation d'état d'un mélange de spin homogène s'écrit ¹ :

$$\frac{E}{V} = \frac{\pi\hbar^2}{m}\delta an^2 + \xi a^{5/2}n^{5/2} \iff \frac{E}{N} = \frac{\pi\hbar^2}{m}\delta an + \xi a^{5/2}n^{3/2} \quad (2.5)$$

où $\xi = \frac{256\hbar^2\sqrt{\pi}}{15m}f(1, \frac{a_{\uparrow\downarrow}^2}{a^2}, 1)$, où la fonction f est définie dans le chapitre 1 par l'équation 1.40 et $a = a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow}$. On voit que la présence du terme LHY répulsif avec une dépendance en densité différente du terme de champ-moyen permet la stabilisation du système lorsque $\delta a < 0$. La figure 2.2 représente un schéma du mécanisme de stabilisation. Le terme attractif de champ moyen $E_{\text{MF}}/N \propto n$ dominant à basse densité et compensé par le terme au-delà du champ-moyen répulsif $E_{\text{LHY}}/N \propto n^{3/2}$ et dominant à haute densité. Cette compétition entraîne un minimum d'énergie pour la densité à l'équilibre n_{eq} tel que :

$$n_{eq} = \left(\frac{2\pi\hbar^2}{3m\xi}\right)^2 \frac{|\delta a|^2}{a^5} \quad (2.6)$$

Discussion physique

Dans la zone du collapse, les modes de densité E_d deviennent imaginaires pour les excitations de grandes longueurs d'ondes $k \sim \sqrt{m|\delta g|n}$. Cela entraîne donc une instabilité qui se traduit par une augmentation de la densité. Cette dernière va accroître l'énergie des modes de spin $E_s(k)$ et donc élever l'énergie de point-zéro $\propto n^{5/2}$. L'augmentation de l'énergie de Lee-Huang-Yang est plus rapide que

1. La phase relative des deux condensats n'a pas d'importance car ils ne sont couplés que par leurs densités (Eq. (1.33) et Eq. (1.34))

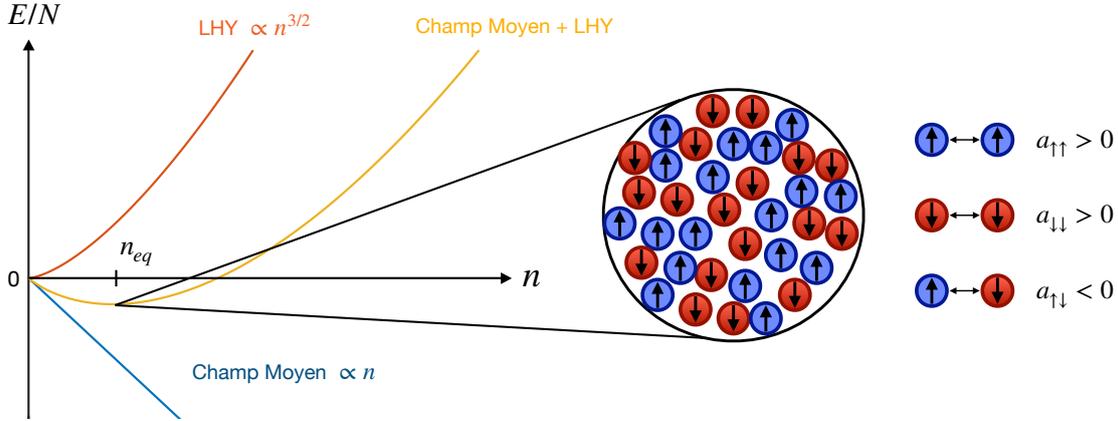


FIGURE 2.2 – Énergie par particule en fonction de la densité. Schéma du mécanisme de stabilisation formant la gouttelette quantique à la densité d'équilibre n_{eq} . L'interaction attractive de champ-moyen dominante à basse densité est compensée par le terme Lee-Huang-Yang répulsif dominant à haute densité formant ainsi un minimum d'énergie pour la densité n_{eq} .

le gain en énergie de champ-moyen $\propto n^2$. Finalement, cela signifie que l'instabilité aux grandes longueurs d'onde est bloquée par les fluctuations quantiques à courtes longueurs d'ondes (contributions majeures à E_{LHY}) [42].

2.4 Propriétés de la gouttelette quantique

Dans cette partie, nous allons discuter des propriétés de la gouttelette dérivées par D.S. Petrov [42].

2.4.1 Profil de densité

Nous avons vu que la gouttelette est un système auto-lié décrit par des interactions en onde- s . Par conséquent, elle est également isotrope dans l'espace en absence d'un piégeage supplémentaire. La figure 2.3 (a), représente la fonction d'onde de la gouttelette en fonction de la composante radiale \tilde{r} . Les dépendances en fonction du nombre d'atomes pour les différentes énergies sont les suivantes : $E_{LHY}/V \propto N^{5/2}$, l'énergie de champ moyen $E_{MF}/V \propto N^2$ et l'énergie cinétique $E_c/V \propto N$. Pour un nombre d'atomes faible, en dessous de la densité n_{eq} , la forme de la gouttelette est dominée par les effets de surface et la pression quantique. Lorsque le nombre d'atomes est trop faible, la répulsion due à la pression quantique domine le système, et une transition de phase liquide-gaz a lieu. Il existe par conséquent, un nombre d'atome critique N_c en dessous de lequel le système n'est plus auto-lié. Lorsque l'on augmente le nombre d'atomes, la densité centrale augmente jusqu'à atteindre

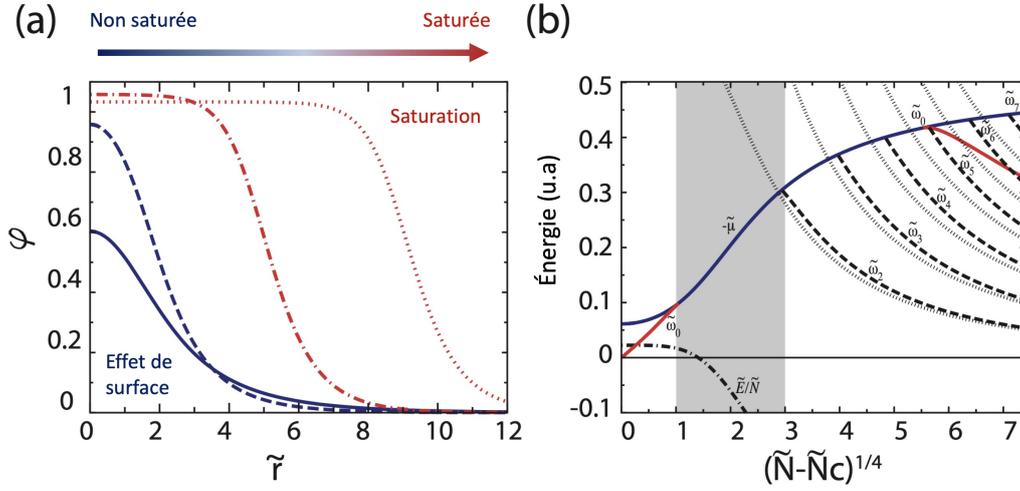


FIGURE 2.3 – Figure issue de [71]. (a) Fonction d’onde normalisée en fonction de la composante radiale en absence de piégeage. (b) Spectre des excitations pour une gouttelette quantique isotrope (en absence de piégeage) en fonction de $(\tilde{N} - \tilde{N}_c)^{1/4}$, où \tilde{N} et \tilde{N}_c sont respectivement le nombre d’atomes et le nombre d’atomes critique renormalisés. Seuil d’émission de particule $-\tilde{\mu}$ (courbe bleue). Le mode de respiration $\tilde{\omega}_0$ (courbe rouge). Les autres modes d’excitations sont en tirets noirs. En pointillés fins sont représentés les modes de surface (ripples).

la densité d’équilibre n_{eq} . À ce stade, l’ajout supplémentaire d’atomes a pour conséquence l’augmentation de la taille tout en gardant la densité à n_{eq} . C’est le régime **saturé**. Le profil de densité présente une **densité interne homogène**, c’est à dire une densité constante en fonction de la position jusqu’aux bords de la fonction d’onde. Au niveau des bords, la densité diminue rapidement vers zéro sur une distance caractéristique ξ , la longueur de cicatrisation, et l’énergie cinétique n’est plus négligeable par rapport aux énergies d’interactions. Ce profil de densité rappelle celui d’une goutte de liquide classique. Le système acquiert des propriétés similaires aux liquides classiques, comme une tension de surface, une faible compressibilité, des modes d’excitations de surface, etc [42].

2.4.2 Spectre des excitations

La gouttelette quantique possède un spectre des excitations très particulier. La figure 2.3 (b) représente le spectre des excitations (en absence de piégeage) en fonction du nombre d’atomes. Les différents modes $\tilde{\omega}_l$, où l est le moment angulaire, ainsi que les modes de surface, appelés *ripples*, y sont représentés. La courbe bleue représente le seuil d’émission de particules $-\tilde{\mu}$. Seuil qui sépare les modes discrets du continuum d’énergie. Dans le cas d’énergies au-dessus du seuil, il est plus favorable d’expulser des atomes de la gouttelette que d’exciter un mode particulier.

Dans le régime saturé, les modes $\tilde{\omega}_l$ et les modes de surfaces existent. Cependant plus le nombre d'atomes diminue, plus les modes $\tilde{\omega}_l$ croisent et dépassent le seuil $-\tilde{\mu}$ et donc disparaissent. Seul le mode de respiration $\tilde{\omega}_0$ (courbe rouge) existe à plus faible nombre d'atomes. Ce mode correspond à l'oscillation de la taille de la gouttelette en fonction du temps, il peut être associé à la compressibilité du système. Plus $\tilde{\omega}_0$ est grand, moins le système est compressible. On remarque que $\tilde{\omega}_0$ diminue quand le nombre d'atomes diminue. En effet, on a besoin d'apporter moins d'énergie au système pour déformer la gouttelette. À l'opposé, au grand nombre d'atomes, les effets cinétiques sont négligeables et les interactions dominantes, il est donc plus difficile de changer la densité du système.

On constate qu'il existe une zone (zone grise sur la figure 2.3 (b)) où l'ensemble des modes d'excitations sont inexistantes. Plus précisément, chaque excitation est couplée avec le continuum et la gouttelette va donc expulser des atomes afin de dissiper l'énergie et atteindre un régime sans excitations. En d'autres termes, la gouttelette va **s'auto-évaporer**. Ce mécanisme donne la possibilité de former des systèmes macroscopiques à température nulle. En paraphrasant D.S. Petrov [42] : à partir d'un mélange de condensats à une température finie, on obtient un système à température nulle ; les excitations correspondantes au continuum d'énergie s'évaporent lorsque le piège est éteint.

2.4.3 Dimensions hybrides

Afin de simuler les gouttelettes quantiques, nous utilisons l'équation de Gross-Pitaevskii étendue (eGPE), c'est-à-dire, avec l'ajout d'un terme supplémentaire correspondant à la contribution des fluctuations quantiques. En ajoutant ce terme, il est nécessaire de prendre quelques précautions. En effet, l'équation de Gross-Pitaevskii repose sur l'approximation de densité locale. Dans le cas d'un seul condensat, les contributions majeures au terme de Lee-Huang-Yang proviennent d'excitations dont la longueur d'onde est plus petite ou de l'ordre de la longueur de cicatrisation ξ . Afin de pouvoir traiter le terme de Lee-Huang-Yang dans le cadre de l'approximation de densité locale, il faudrait que la densité change sur des distances plus grandes que ξ . Ce qui n'est pas toujours le cas pour un condensat à une seule composante, comme au niveau des bords dans une boîte par exemple. Néanmoins, dans le cas des gouttelettes quantiques, les changements de densités se font sur des distances comparables à la longueur de cicatrisation des modes de densité ξ_d . De plus, dans les mélanges, le terme de Lee-Huang-Yang provient des excitations de spin, dont la longueur de cicatrisation est ξ_s . Dans le régime des gouttelettes quantiques, on a $\xi_d \gg \xi_s$, cette séparation d'échelle permet de justifier l'approximation de densité locale, et permet l'ajout du terme des fluctuations quantiques dans l'équation de Gross-Pitaevskii [106].

L'énergie caractéristique associée aux modes de densité est $e_d = mc_d^2$ et celle associée aux modes de spin est $e_s = mc_s^2$, dans le régime des gouttelettes quantiques, elles vérifient $e_s \gg e_d$. Cette séparation des échelles d'énergies pour le champ-moyen et pour le terme de Lee-Huang-Yang, a pour conséquence de pouvoir travailler en dimensions hybrides. C'est-à-dire, qu'il est possible de geler les excitations de densités dans certaines dimensions, mais de ne pas geler les excitations de spin. Par exemple, il est possible de travailler avec un système unidimensionnel pour le champ moyen, mais tridimensionnel pour le terme de Lee-Huang-Yang. Il est également possible de geler les excitations de spin dans plusieurs dimensions, dans ce cas, le terme LHY change. Les contributions des fluctuations quantiques en deux et trois dimensions ont été calculées par G.E. Astrakharchik et D.S. Petrov [74]. Il est prédit qu'à une dimension, la densité d'énergie LHY devient attractive avec une dépendance en densité $\propto n^{3/2}$. Dans ce cas, les gouttelettes quantiques existent lorsque $\delta a > 0$ [74]. Contrairement au cas tridimensionnel, à une dimension, le mode de respiration des gouttelettes quantiques est toujours moins énergétique que le seuil d'émission de particules [75]. Ainsi, le phénomène d'auto-évaporation est absent. Il est également possible de travailler dans un régime où le terme LHY est dans le **crossover** (transition molle) entre deux dimensions [76, 77]. Les gouttelettes quantiques dans le crossover 1D-3D seront discutées dans le chapitre suivant.

2.5 État de l'art sur les gouttelettes quantiques

2.5.1 Gouttelette quantique dipolaire

La première observation de gouttelette quantique a été réalisée en 2015 dans l'équipe de T. Pfau à Stuttgart. Le système était constitué d'atomes de dysprosium ^{164}Dy . Le ^{164}Dy est un atome avec un moment magnétique dipolaire important ($\mu_m = 9.93 \mu_B$, avec μ_B le magnéton de Bohr). Par conséquent, en plus des interactions de contact, les atomes interagissent également *via* des interactions dipôle-dipôle de la forme [78] :

$$V_{dd}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{\mu_0 \mu_m^2}{4\pi} \frac{1 - 3 \cos^2(\theta)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.7)$$

Le système était préparé dans un régime où une instabilité mécanique a lieu et où le collapse du système devrait se produire dans une vision de champ-moyen. Ils ont plutôt observé la formation d'une structure organisée "cristalline" de manière analogue à l'instabilité de Rosensweig dans les ferrofluides classiques [79]. Ils ont également observé la formation de gouttelettes auto-liées dont la taille reste constante en fonction du temps (figure 2.4 (a)). Cette stabilisation n'était pas prévue et son origine était inconnue. Plusieurs mécanismes permettant la stabilisation ont été proposés, comme une stabilisation due à des interactions répulsives à trois corps [39], ou une répulsion provenant des fluctuations quantiques [42]. Rapidement, en

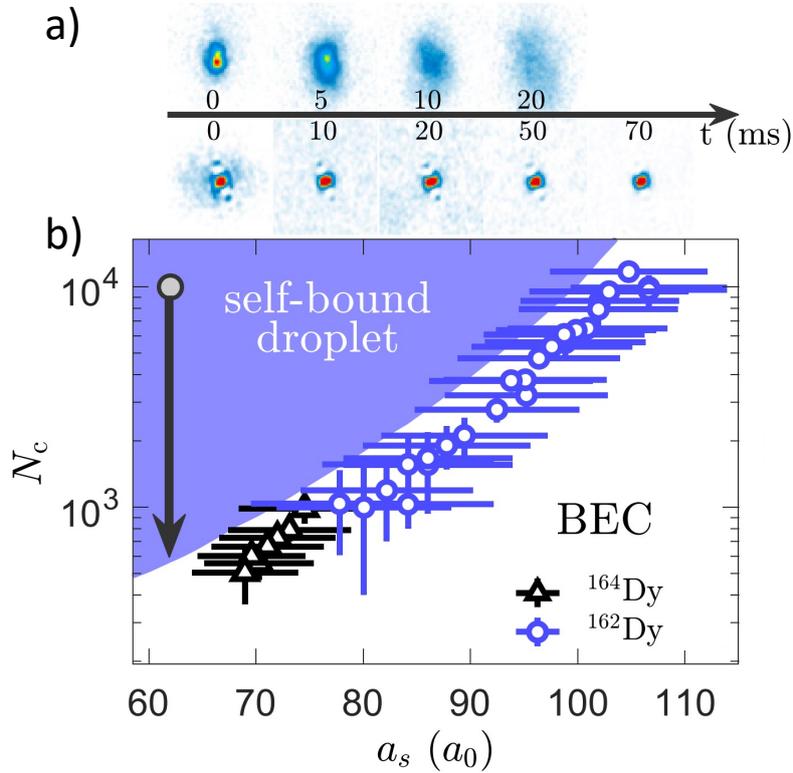


FIGURE 2.4 – Figure issue de [44]. (a) Images typiques d’un condensat (haut) et d’une gouttelette quantique dipolaire (bas) en l’absence de piégeage en fonction du temps. (b) Diagramme des phases entre gaz (zone blanche) et gouttelettes quantiques (zone mauve) et nombres d’atomes critiques mesurés pour le ^{164}Dy [80] et ^{162}Dy [81].

mesurant la densité de ces gouttelettes, leurs temps de vie et en regardant la dépendance de la densité en fonction des interactions, ils en conclurent que le collapse était stabilisé par les fluctuations quantiques [43], de manière analogue à la proposition théorique de D.S. Petrov pour un mélange de spin [42].

La formation de gouttelettes dipolaires se fait sans mélange. L’énergie de champ-moyen est ici réduite par la compétition entre les interactions de contact et les interactions dipôle-dipôle. L’anisotropie des interactions dipôle-dipôle conduit à l’anisotropie de la gouttelette. Elle est allongée le long de l’axe de quantification donné par le champ magnétique. Lorsque plusieurs gouttelettes quantiques sont formées à partir du même système, elles se séparent spatialement dues à la présence de répulsions à longues distances provenant des interactions dipôle-dipôle.

La figure 2.4 (b) présente le diagramme des phases gouttelette-gaz pour le ^{162}Dy et le ^{164}Dy . Ce dernier est obtenu par la résolution de l’équation de Gross-Pitaevskii en ajoutant le terme provenant des fluctuations quantiques. Le nombre d’atomes cri-

tique est obtenu en sondant la transition de phase liquide-gaz. Une gouttelette est préparée avec un nombre d'atomes élevé (point gris sur la figure), le piège est éteint et le système évolue dans l'espace libre. Les pertes à trois corps, qui sont très importantes dues à la densité élevée des gouttelettes, diminue le nombre d'atomes dans le système jusqu'à atteindre le nombre d'atomes critique N_c (flèche noire). Lorsque le nombre d'atomes $N < N_c$, le système n'est plus auto-lié et il s'étend comme un gaz. Cette expansion conduit à une diminution de la densité, entraînant la suppression des pertes d'atomes, et le nuage est imagé afin d'extraire le nombre d'atomes. On remarque que la description, par l'équation de Gross-Pitaevskii étendue, donne la bonne tendance. Cependant, des différences entre théories et expériences restent visibles et sont discutées dans la référence [44], et aussi succinctement à la fin ce chapitre.

Le spectre d'excitations des gouttelettes quantiques dipolaires ne présente pas la zone d'**auto-évaporation**, caractéristique des gouttelettes non-dipolaire vue précédemment. Le mode axial d'excitation, le mode d'énergie le plus bas d'excitation au-dessus du mode dipolaire, a été sondé dans l'équipe de F. Ferlaino à Innsbruck [82]. Cette expérience a permis de montrer le rôle important du terme des fluctuations quantiques dans les propriétés de la gouttelette quantique. Le mode ciseau a également été étudié avec des gouttelettes de ^{164}Dy [83].

2.5.2 Gouttelette quantique non-dipolaire

Comme nous l'avons vu, afin d'observer des gouttelettes quantiques, nous devons trouver un mélange homonucléaire ou hétéronucléaire dont les interactions inter-espèces sont attractives, les interactions intra-espèces sont répulsives et où $\delta a < 0$. Les systèmes hétéronucléaires connus vérifiant ces conditions sont : ^{41}K - ^{87}Rb [84], ^{39}K - ^{23}Na [85]. Pour les mélanges homonucléaires : le ^{39}K [45, 46] et le ^{41}K [86]. Les premières gouttelettes ont été obtenues avec un mélange de spin de ^{39}K à la fois dans l'équipe de L. Tarruell à Barcelone [45] et dans celle de M. Fattori à Florence [46]. Les deux équipes travaillent avec le mélange de spin $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$. Les résonances de Feshbach pour le ^{39}K permettent un bon contrôle sur les longueurs de diffusions, et donnent donc la possibilité de pouvoir contrôler δa sur un grand intervalle (figure 2.5). Nos expériences utilisent également ces deux états quantiques.

L'expérience de Barcelone

L'expérience consiste à travailler avec un condensat dans $|1, -1\rangle$ confiné verticalement dans un plan provenant d'un réseau optique vertical. Le mélange est formé par un pulse radiofréquence (RF) à un champ magnétique tel que $\delta a > 0$ ($B \approx 57.3 \text{ G}$). Une fois le mélange obtenu, le champ magnétique est diminué jusqu'à atteindre la valeur finale de $\delta a < 0$. Le piège horizontal est coupé afin de laisser le

système libre dans le plan. L'expérience se passe dans une configuration quasi-2D, la longueur de cicatrisation de densité ξ_d est plus petite que la longueur de l'oscillateur harmonique verticale a_{oh} , par conséquent le système est dans une configuration 2D pour les modes de densité. Toutefois, la longueur de cicatrisation de spin ξ_s est inférieure d'un facteur $\sim 1/3$ à a_{oh} . Le terme de Lee-Huang-Yang est relativement proche du régime bidimensionnel et des corrections sont nécessaires pour décrire proprement les fluctuations quantiques. Des images typiques de l'expérience avec un gaz et une gouttelette quantique sont présentées en figure 2.6. On remarque que contrairement à un gaz, la gouttelette garde une taille constante au cours du temps, une caractéristique typique des systèmes auto-liés.

L'expérience de Florence

Dans cette expérience, le condensat est dans l'état $|1, -1\rangle$ à un champ magnétique tel que $\delta a < 0$. Un pulse radiofréquence permet de former le mélange souhaité. Le système est ensuite soumis à une lévitation optique, permettant de se rapprocher des conditions de gouttelette auto-lié en absence de piégeage dans une configuration tridimensionnelle pour les deux modes d'excitations. Contrairement à l'expérience de Barcelone, la préparation de la gouttelette est très rapide et correspond à un **quench** (changement non adiabatique) des interactions. En préparant le système initial dans une configuration proche de la configuration finale à l'équilibre, ils arrivent à obtenir des gouttelettes avec relativement de faibles excitations.

De manière analogue au cas des gouttelettes dipolaires, les deux équipes ont pu mesurer le nombre d'atomes critique N_c en fonction de δa (figure 2.6). Les différences entre les deux expériences proviennent principalement des deux méthodes de préparation de la gouttelette, l'une relativement adiabatique, l'autre *via* un quench des interactions. De plus, dans l'expérience de Barcelone, le système est confiné verticalement, ce qui change les propriétés de la gouttelette, comme par exemple sa densité de saturation. Les différences entre théorie et expérience sont discutées en détails dans [72]. Il a notamment été montré que la portée effective du potentiel devait être prise en compte pour une description précise des gouttelettes quantiques [87, 88].

Limitations expérimentales

Une des limitations des gouttelettes dans le régime tridimensionnel en l'absence de piégeage est leurs tailles en dessous de la limite de résolution de l'imagerie ($\lesssim 1 \mu\text{m}$). De plus, à cause de la haute densité des gouttelettes ($\sim 10^{21} \text{ m}^{-3}$), chaque expérience avait comme limitation principale les pertes d'atomes élevées provenant des recombinaisons à trois corps. L'étude théorique de Florence [89] permet de comprendre la dynamique de formation de la gouttelette. Tout d'abord, les pertes d'atomes sont très importantes et le temps de vie de la gouttelette est très bas, de

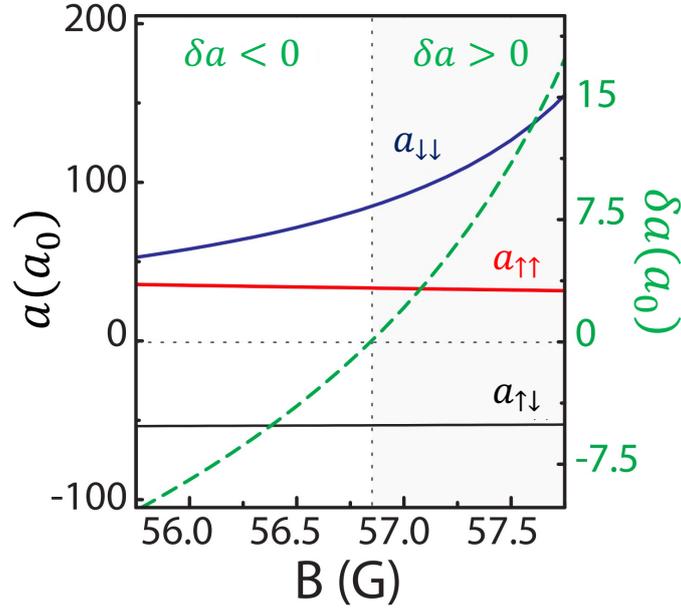


FIGURE 2.5 – Longueurs de diffusions ($a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$, $a_{\uparrow\downarrow}$) intra et inter espèces dans le cas d'un mélange de spin $|1, -1\rangle$ et $|1, 0\rangle$ pour le ^{39}K , ainsi que la longueur de diffusion effective δa .

l'ordre de quelques dizaines de ms. Ces pertes empêchent donc de sonder le spectre des excitations, et aussi d'observer une gouttelette à l'équilibre et ses propriétés intrinsèques comme la densité interne constante. De plus, le taux de recombinaisons à trois corps pour les deux états n'est pas le même (pertes asymétriques) [89] : $K_{111}/3! \approx 9 \times 10^{-40} \text{ m}^6/\text{s}$ et $K_{222}/3! \approx 1 \times 10^{-41} \text{ m}^6/\text{s}$, où $|1\rangle = |1, 0\rangle$ et $|2\rangle = |1, -1\rangle$. Cette asymétrie des pertes conduit le système à ne plus vérifier la condition de blocage du ratio de la densité (2.3), et donc introduit des effets de champ-moyen supplémentaires. Finalement, la dynamique des gouttelettes est ici dominée par les pertes à trois corps et par l'expulsion du surplus d'atomes dans l'état excédentaire. Quant au phénomène d'auto-évaporation, il joue ici un rôle marginal. Ces expériences ont permis la première observation de gouttelettes quantiques non-dipolaire, mais dans un régime hors-équilibre. La gouttelette doit s'adapter à un nouvel état d'équilibre continûment avant d'atteindre le nombre d'atomes critique et de redevenir un gaz. Les mélanges hétéronucléaires promettent d'être de bons candidats pour l'étude des propriétés des gouttelettes proche de l'équilibre grâce à leurs temps de vie élevés [84, 85].

Afin de se débarrasser de ces inconvénients, il est possible de travailler avec des systèmes en dimensions hybrides, qui sont le sujet du prochain chapitre. De plus, nous verrons dans le dernier chapitre que l'addition d'un couplage cohérent entre les deux états de spin symétrise les pertes, permettant l'absence d'effets de champ-

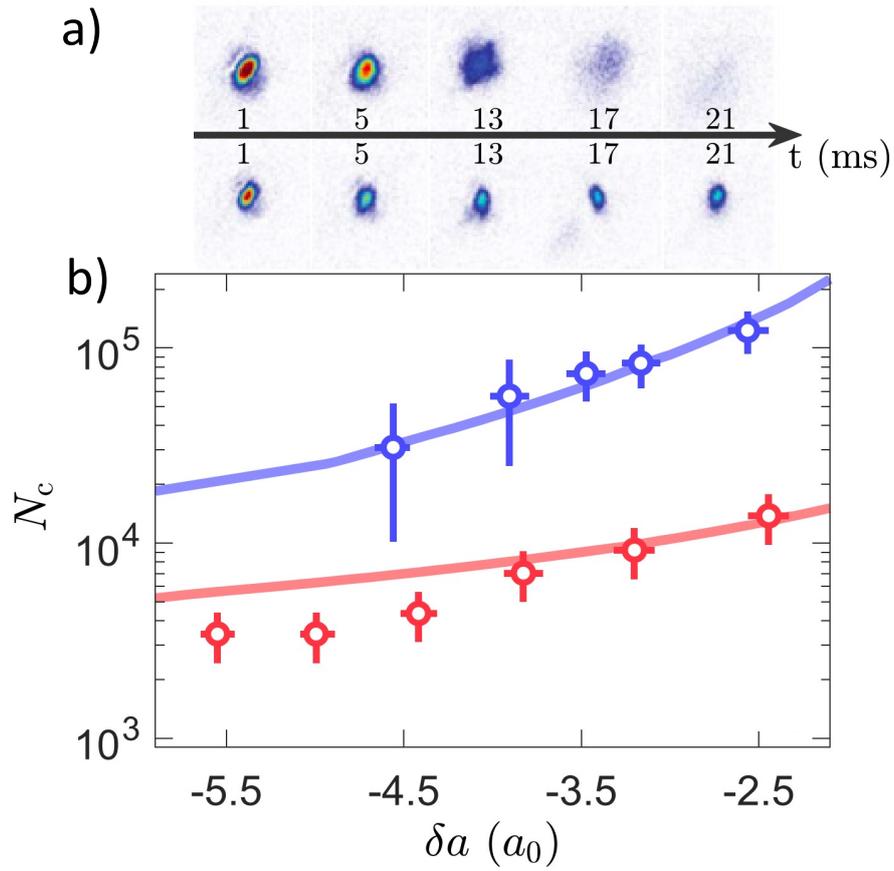


FIGURE 2.6 – Figure issue de [44]. (a) Images typique d'un condensat (haut) et d'une gouttelette quantique (bas) en l'absence de piégeage en fonction du temps. (b) Nombre d'atomes critique en fonction de la longueur de diffusion effective δa . Les données en rouge (*resp.* bleue) proviennent de [45] (*resp.* [46]).

moyen supplémentaires non souhaités.

À la suite de ces premières expériences sur les gouttelettes quantiques, l'équipe de Florence a étudié les propriétés de collisions entre deux gouttelettes quantiques [90]. Ils ont observé deux régimes de collisions dépendant de la vitesse relative de collision et du nombre d'atomes dans la gouttelette. Un premier régime où les gouttelettes se réunissent afin de n'en former qu'une et le second régime où les gouttelettes se séparent après la collision. Ils ont mis en évidence des effets de surface, ainsi qu'un crossover entre un régime compressible et incompressible. L'équipe de Barcelone a étudié le crossover entre gouttelettes quantiques et solitons pour un mélange dans une configuration géométrique unidimensionnelle [91]. Dans le cas des gaz dipolaires, la formation d'une assemblée de plusieurs gouttelettes a permis la formation de supersolide [92, 93].

Théoriquement, divers travaux ont essayé de proposer des explications aux différences entre les résultats théoriques et expérimentaux sur le nombre d'atomes critique N_c . Par exemple, des études basées sur des méthodes Monte-Carlo quantiques et variationnelles ont montré le rôle et l'importance de la portée du potentiel d'interaction dans la description des gouttelettes quantiques à mesure que les interactions inter-espèces attractives augmentent [87, 88, 94, 95]. Plusieurs études ont également proposé des descriptions auto-consistantes des gouttelettes afin de régler le problème de la vitesse du son imaginaire pour le mode de densité [96, 97].

Chapitre 3

Crossover tridimensionnel à unidimensionnel du terme au-delà du champ-moyen dans les gouttelettes quantiques

3.1 Introduction

Comme nous l'avons décrit dans le chapitre précédent, les gouttelettes quantiques ont des propriétés extrêmement intéressantes, comme la densité de saturation conduisant au profil de densité interne homogène, ou son spectre d'excitations avec le phénomène d'auto-évaporation. Cependant, expérimentalement, les systèmes ne sont pas idéaux et ont plusieurs inconvénients pour l'observation de ces caractéristiques, comme par exemple les pertes à trois corps dominant la dynamique du système, et leurs tailles inférieures au μm rendant leurs observations difficiles. La proposition théorique de gouttelettes quantiques dans une configuration géométrique unidimensionnelle est à première vue attirante. Puisque le terme correspondant aux fluctuations quantiques provient de la sommation de l'énergie de point-zéro des modes d'excitations, son expression dépend donc de la dimension du système. Ainsi, le terme de Lee-Huang-Yang unidimensionnel est attractif et a une dépendance en $n^{3/2}$, permettant potentiellement de former des liquides quantiques pour $\delta g > 0$. La densité de saturation est plus basse ($\sim 10^{19} \text{ m}^{-3}$), conduisant par conséquent à un taux de perte excessivement plus faible. De plus, la taille est plus grande que dans le cas tridimensionnel, donnant la possibilité d'observer correctement le profil de densité. Toutefois, cette configuration s'accompagne d'une énergie caractéristique extrêmement faible (inférieure au Hz), entraînant des difficultés expérimentales considérables. Un régime proposant potentiellement les avantages à la fois de la configuration tridimensionnelle et unidimensionnelle, est le crossover 1D-3D du terme de Lee-Huang-Yang [77].

Ce chapitre est la présentation d'une étude théorique que nous avons réalisée [98], afin de comprendre un peu mieux les contraintes et les ordres de grandeurs expérimentaux dans le cas de gouttelettes quantiques, lorsque le terme de Lee-Huang-Yang est dans le crossover 1D-3D, et le champ-moyen dans une configuration unidimensionnelle. Ce travail se base sur l'expression du terme au-delà du champ-moyen dans le crossover 1D-3D provenant de [76]. J'ai décidé de ne pas réécrire l'article, étant déjà relativement long et complet, mais de l'insérer directement dans ce chapitre. Je vais toutefois décrire les grandes parties et les résultats principaux, et je vais finalement expliquer la méthode numérique qui n'est pas développée dans l'article.

3.2 Résumé de l'article

Dans cet article, nous avons choisi de considérer le cas expérimental, d'une gouttelette quantique dans un piège en forme de cigare avec un confinement radial harmonique. Nous étudions les gouttelettes quantiques dans un régime où les modes de densité sont dans une configuration unidimensionnelle, et le mode de spin dans le crossover 1D-3D. Il existe, en effet, un crossover mou, dans lequel les modes de spin et par conséquent le terme LHY sont progressivement modifiés à mesure que le confinement radial de pulsation ω_{\perp} augmente. Dans l'intégralité du crossover, nous étudions les paramètres expérimentaux importants comme la densité, la taille, l'énergie de liaison ou encore le taux de pertes par recombinaisons à trois corps en fonction de paramètres adimensionnés. Tout au long de l'article, nous considérons un mélange de spin de même masse m et dans le cas d'interactions symétriques ($a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow} = a$), de densité totale $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$, où n_{\uparrow} et n_{\downarrow} sont respectivement les densités de l'état de spin $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$.

3.2.1 Gouttelette quantique dans le cas homogène

Dans cette première partie, nous introduisons l'expression du terme au-delà du champ-moyen (BMF) dans le crossover en fonction des paramètres $\kappa = na$ et $\lambda = a/a_{oh}$, où $a_{oh} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$. Pour $\kappa \gg 1$, le terme de Lee-Huang-Yang est dans le régime tridimensionnel et la densité d'énergie E_{BMF}^{3D} s'écrit [76] :

$$\frac{E_{\text{BMF}}^{3D}}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} \frac{512}{75\pi} \kappa^{5/2} \quad (3.1)$$

Dans l'article [76], les auteurs ont calculé l'expression du terme au-delà du champ-moyen pour un condensat à une seule composante dans le crossover 1D-3D. Néanmoins, le résultat peut s'appliquer pour le cas d'un mélange avec le mode de spin. L'expression de la densité d'énergie des fluctuations quantiques dans le crossover 1D-3D ($\kappa \lesssim 1$) se formule :

$$\frac{E_{\text{BMF}}^c}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} f(\kappa) \quad (3.2)$$

avec

$$f(\kappa) = \frac{C_{1D}^h}{\sqrt{2}} \kappa^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \kappa^{3/2} + \frac{4\sqrt{2} \ln 4/3}{\pi} \kappa^{5/2} + B_{1D}^h \kappa^3 \quad (3.3)$$

Le premier terme de $f(\kappa)$ est une correction au champ moyen issue d'une résonance induite par le confinement ($C_{1D}^h \approx 1.4603$) [99]. Le deuxième terme est la contribution de Lee-Huang-Yang dans le cas d'un système purement unidimensionnel dominant à $\kappa \ll 1$. Les deux derniers termes correspondent à des corrections pour les grandes valeurs de κ . Le troisième terme a la même dépendance ($\propto \kappa^{5/2}$) que le terme LHY tridimensionnel. Lorsque $\kappa \sim 1$, le terme LHY ne peut plus s'écrire simplement, mais on peut interpoler les deux expressions avec une relativement bonne précision.

À partir de l'expression du terme LHY et dans l'intégralité du crossover, nous avons étudié la densité d'équilibre et l'énergie de liaison de la gouttelette quantique en fonction de $\delta a = a_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{a_{\uparrow\uparrow} a_{\downarrow\downarrow}}$, qui est le paramètre caractérisant les interactions de champ-moyen (voir Fig. 1 et Fig. 2 de l'article) [42, 45]. Nous avons trouvé une solution stable à la fois pour des interactions de champ moyen attractives et répulsives, et également pour $\delta a = 0$ ¹. Plus δa augmente de négatif à positif, moins la densité d'équilibre est élevée et plus le système devient purement unidimensionnel, cela s'accompagne d'une diminution de l'énergie caractéristique. En analysant le rapport de l'énergie de liaison sur l'énergie associée au taux de pertes à trois corps (Fig. 3), nous avons mis en évidence que dans le régime purement tridimensionnel, la formation de gouttelette quantique stable vis à vis des pertes est délicate. Néanmoins, nous avons déterminé que le crossover est un bon régime pour obtenir une gouttelette quantique non dominée par les pertes. En effet, même si l'énergie de la gouttelette est réduite, les pertes diminuent encore plus rapidement et donnent accès à un régime où les expériences peuvent être réalisées sur des échelles d'énergies certes faibles, mais envisageables.

3.2.2 Gouttelette quantique de taille finie

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas d'un système fini dans le crossover 1D-3D, c'est-à-dire dans le cas de gouttelettes quantiques avec un nombre d'atomes fini et une taille finie. Pour cela, nous dérivons l'équation de Gross-Pitaevskii effective avec un terme supplémentaire correspondant au terme de LHY dans le crossover.

1. Dans ce cas, les interactions de champ-moyen sont nulles, le système est uniquement stabilisé par les différents termes de l'énergie des fluctuations quantiques dans le crossover 1D-3D.

Sans piège longitudinal

Nous avons tout d'abord regardé les profils de densités typiques à faible et grand nombre d'atomes pour $\delta a' < 0$, $\delta a' = 0$ et $\delta a' > 0$ (voir Fig. 4), donnant ainsi une vue d'ensemble des solutions dans tout le crossover. Nous voyons que pour chaque valeur de $\delta a'$, la densité maximale augmente avec le nombre d'atomes jusqu'au moment de la saturation (Fig. 5 (a)). À ce stade, le profil de densité possède une densité interne constante caractéristique des gouttelettes quantiques. La taille des gouttelettes diminue en fonction du nombre d'atomes avant la saturation (Fig. 5 (b)), afin d'augmenter la densité centrale jusqu'à la densité d'équilibre. Une fois la densité d'équilibre atteinte, la taille augmente avec le nombre d'atomes tout en gardant une densité interne constante. Nous avons vu que plus le système est unidimensionnel, c'est-à-dire plus $\delta a'$ est positif, moins il faut d'atomes pour saturer la gouttelette, donc plus favorable expérimentalement. Nous avons pu distinguer plusieurs régimes. À faible nombre d'atomes, la densité et la taille de la gouttelette ne dépendent pas de $\delta a'$. Le système est ici dominé par le terme LHY 1D et l'énergie cinétique, l'énergie de champ-moyen est négligeable. Dans le cas $\delta a' < 0$, nous avons également identifié des solutions correspondant à des solitons brillants lorsque le nombre d'atomes est intermédiaire, le système est dominé par l'énergie cinétique et le champ-moyen. À grand nombre d'atomes, le système devient saturé et l'énergie de Lee-Huang-Yang et de champ-moyen dominant.

Cas piégé longitudinalement

Nous avons considéré le cas expérimental d'un piège longitudinal harmonique, de pulsation $\omega_{\parallel} = 0.01$ Hz, et regardé son effet sur les gouttelettes quantiques (Fig. 6). À faible nombre d'atomes, le profil de densité correspond à l'état fondamental du piège harmonique, en effet, les interactions sont dans ce cas négligeables. Pour un nombre d'atomes intermédiaire, le piège n'a pas d'effets sur la fonction d'onde (Fig. 7 (a)), il correspond au cas où l'énergie potentielle associée au piège est négligeable par rapport aux autres énergies du système. Pour un grand nombre d'atomes, le piège empêche le système d'augmenter sa taille avec le nombre d'atomes à densité constante. Dans ce régime le profil de densité ressemble à un profil de Thomas-Fermi où l'énergie cinétique est négligeable (Fig. 7 (b,c)).

Mode de respiration

Dans cette dernière partie, nous avons étudié le mode de respiration pour les gouttelettes dans le crossover (Fig. 8). Ce mode donne une échelle de temps caractéristique à laquelle la gouttelette quantique peut être préparée de manière adiabatique en faisant varier un paramètre expérimental. Nous avons constaté que la fréquence du mode de respiration augmente avec le nombre d'atomes jusqu'à atteindre un maximum correspondant au moment où la gouttelette devient saturée. La fréquence

diminue ensuite lorsque la taille de la gouttelette augmente. Plus $\delta a'$ est négatif, plus le maximum du mode de respiration est énergétique.

3.3 Résultats : voir publication

Beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions in quantum droplets of binary mixtures

L. Lavoine and T. Bourdel 

Laboratoire Charles Fabry, UMR 8501, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Saclay,
Avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau CEDEX, France



(Received 24 November 2020; revised 29 January 2021; accepted 26 February 2021; published 15 March 2021)

The existence of quantum droplets in binary Bose-Einstein condensate mixtures relies on beyond-mean-field effects, competing with mean-field effects. Interestingly, the beyond-mean-field effects change from repulsive in three dimensions (3D) to attractive in 1D leading to drastically different behaviors. We quantitatively model quantum droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D in the relevant case of an elongated harmonic trap and give realistic numbers for experimental realizations. We identify and quantify two main limiting factors: three-body losses and tiny energy scales. The crossover region is appealing as it offers a trade-off between these two main limitations opening the possibility of observing stable flat-top density profiles, a yet unobserved, characteristic feature of quantum droplets. It would permit testing of beyond-mean-field theories to an unprecedented precision.

DOI: [10.1103/PhysRevA.103.033312](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.033312)

I. INTRODUCTION

Ultracold quantum gases are uniquely well controlled many-body systems [1]. Their diluteness permits accurate *ab initio* theoretical treatment using zero-range interaction. They are thus good candidates for tests of many-body theories. As an example, the energy of a zero-temperature Bose gas can be calculated within the Bogoliubov theory beyond the usual mean-field approximation [2,3]. Experimentally, there has been a quest for the measurement of these beyond-mean-field corrections mostly by increasing na^3 , where n is the density and a is the scattering length [4–7].

Recently, it was discovered that quantum mixtures of two Bose-Einstein condensates with repulsive intraspecies interaction and attractive interspecies interactions permit a cancellation of the global mean-field interaction without a reduction in the magnitude of the beyond-mean-field effects [8]. They can then play a dominant role in the dynamics of the system and compete with the reduced mean-field energy. In this context, quantum droplets, i.e., self-bound Bose-Einstein condensates, due to beyond-mean-field effects have been predicted [8] and experimentally observed [9–12]. The name “droplet” is given in analogy to liquid droplets, which have similar properties such as a constant density profile although their stabilization mechanism is different. Quantum droplets were also observed in dipolar condensates where the magnetic interaction competes with the usual contact interaction [13] (see Refs. [14,15] and references therein for recent reviews on quantum droplets). Experimentally, the droplets are observed at high densities (typically $\sim 10^{21} \text{ m}^{-3}$). Three-body losses thus play an important role in the droplet dynamics [16] and have hindered the observation of the predicted characteristic flat-top density profile of a stable droplet.

Interestingly, the beyond-mean-field energy, which originates from the summation of the zero-point energies of the Bogoliubov modes in the Lee-Huang-Yang description [17], strongly depends on the dimension of the systems with important consequences [18]. For example, the three-dimensional (3D) beyond-mean-field energy density is positive and scales as $n^{5/2}$, whereas the 1D beyond-mean-field energy density is negative and scales as $n^{3/2}$. In the 1D case, a dominant beyond-mean-field energy is obtained at low density in contrast to the 3D case. Quantum droplets thus exist in both cases in, however, quite different conditions, requiring, in particular, an opposite sign of the mean-field interaction [19]. The beyond-mean-field energy density in the 1D-3D crossover was calculated predicting the existence of quantum droplets for any value and sign of the mean-field interaction term in elongated geometries [20,21].

Experimentally, droplets in Bose-Bose mixtures have been observed not only in free space [10] but also in cigar and pancake traps corresponding to quasi-1D [11] and quasi-2D situations [9], where the motion of particles is frozen in one or two directions. Nevertheless, the beyond-mean-field effects were still in a 3D regime. This possibility of hybrid dimension comes from the different energy scales associated with the two excitation branches, which are relevant in droplets of binary mixtures, i.e., the low energy density branch (the two condensates oscillate in phase) and the high energy spin branch (the two condensates oscillate out of phase). The latter is responsible for the main beyond-mean-field effects [21].

In this paper, we study the 1D-3D crossover for quasi-1D quantum droplets in the experimentally relevant case of a cigar-shaped harmonic trap. Our work crucially uses a calculation of the beyond-mean-field energy density, in which the radial wave function is fixed to the radial harmonic oscillator one [20]. There is a smooth 1D-3D crossover where the spin mode excitations and thus also the Lee-Huang-Yang energy density are progressively modified by the radial trapping. In

*thomas.bourdel@institutoptique.fr

the whole crossover, we study important experimental parameters such as the droplet density, size, binding energy, or three-body loss rate as a function of the relevant dimensionless parameters. The paper first describes bulk droplet properties and second introduces finite-size effects within an extended Gross-Pitaevskii equation formalism. We study the ground-state droplets with and without longitudinal trapping and find the conditions in which a flat-top density profile is expected. We also study the breathing mode frequency which gives the relevant time scale for an adiabatic preparation of quantum droplets. We find that the crossover regime offers an experimentally favorable trade-off between high three-body losses close to the 3D regime and tiny energy scales in the 1D regime.

II. QUANTUM DROPLETS IN THE BULK

We consider a mixture of two atomic Bose-Einstein condensates in states $|1\rangle$ and $|2\rangle$ (of equal mass m for simplicity) and radially harmonically trapped with a frequency $\omega_{\perp}/2\pi$. We assume that we are in the quasi-1D regime such that the radial condensate wave functions are Gaussian characterized by the harmonic oscillator size $a_{oh} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$, where \hbar is the reduced Planck constant. The three relevant scattering lengths are $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} < 0$ associated with the 1D coupling constants $g_{ij} = 2\hbar\omega_{\perp}a_{ij}$. We first consider the homogenous case with the two 1D densities n_1 , n_2 and the total density $n = n_1 + n_2$.

The mean-field energy density can be written as

$$\begin{aligned} E_{MF} &= g_{11}n_1^2/2 + g_{22}n_2^2/2 + g_{12}n_1n_2, \\ E_{MF} &= \frac{(\sqrt{g_{11}}n_1 - \sqrt{g_{22}}n_2)^2}{2} \\ &\quad + \frac{g\delta g(\sqrt{g_{11}}n_2 + \sqrt{g_{22}}n_1)^2}{(g_{11} + g_{22})^2} \end{aligned} \quad (1)$$

with $\delta g = g_{12} + \sqrt{g_{11}g_{22}}$ and $g = \sqrt{g_{11}g_{22}}$.

In the vicinity of the mean-field collapse $\delta g/g \ll 1$, the first term is much larger than the second one. The system thus minimizes its mean-field energy by locking the two densities such that $\sqrt{g_{11}}n_1 = \sqrt{g_{22}}n_2$. In this situation, the mean-field energy density reduces to

$$\frac{E_{MF}}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{2a\delta a}{(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})^2} n^2 \quad (2)$$

with

$$\delta a = a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \text{ and } a = \sqrt{a_{11}a_{22}}. \quad (3)$$

This equation can be written in a more convenient form,

$$\frac{E_{MF}}{\hbar\omega_{\perp}} = \delta a' \lambda \kappa^2 / 2a, \quad (4)$$

with $\kappa = na$, $\lambda = a/a_{oh}$, and $\delta a' = \frac{4\delta a}{\lambda(a_{11}^{1/2} + a_{22}^{1/2})^2}$ being a dimensionless parameter characterizing the mean-field interaction.

The beyond-mean-field energy density has been calculated in two limits depending on the value of κ . For $\kappa \gg 1$ corresponding to large densities such that the spin healing length is smaller than a_{oh} , one can make a local density approximation

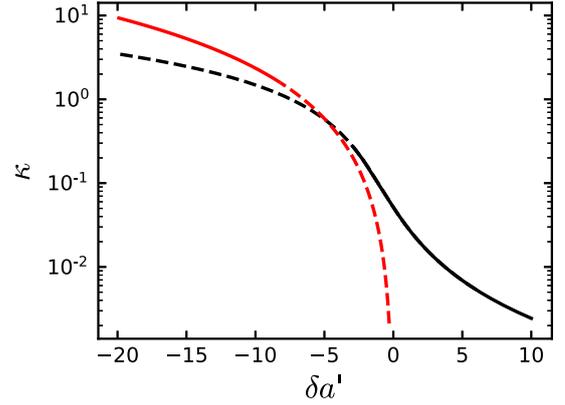


FIG. 1. Dimensionless density κ in a bulk quantum droplet as a function of the mean-field parameter $\delta a'$. The black (red) curve corresponds to the 1D-3D-crossover (3D) beyond-mean-field model. The curves are dashed in the regions where the theory is expected not to be valid.

along the radial Gaussian density profile and integrate the usual 3D beyond-mean-field expression [20]:

$$\frac{E_{BMF}^{3D}}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} \frac{512}{75\pi} \kappa^{5/2}. \quad (5)$$

In the opposite limit $\kappa \lesssim 1$, the summation over the radial oscillation modes has been performed in order to calculate the beyond-mean-field energy density of a quasi-1D Bose-Einstein condensate in the 1D-3D crossover [20]. Interestingly, the result can also be used for the spin modes in a Bose-Bose mixture, giving the following beyond-mean-field contribution:

$$\frac{E_{BMF}^c}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} f(\kappa), \quad (6)$$

with

$$f(\kappa) = \frac{C_{1D}^h}{\sqrt{2}} \kappa^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \kappa^{3/2} + \frac{4\sqrt{2} \ln(\frac{4}{3})}{\pi} \kappa^{5/2} + B_{1D}^h \kappa^3. \quad (7)$$

The first term in $f(\kappa)$ is a mean-field correction due to the confinement-induced resonance ($C_{1D}^h \approx 1.4603$). The second term is the beyond-mean-field contribution of a purely one-dimensional system [18], which dominates at small κ . The third and fourth terms are corrections for higher values of κ ($B_{1D}^h \approx 1.13$ [22]). For $\kappa \sim 1$, the beyond-mean-field energy density cannot be written in a simple form, but one can interpolate between the two previous expressions with a relatively good accuracy.

In the two cases, one can simply minimize the energy per particle $E = (E_{MF} + E_{BMF})/n$ as a function of κ in order to find the equilibrium density in the bulk, i.e., neglecting the kinetic energy. We plot the resulting value of κ as a function of the mean-field parameter $\delta a'$ (see Fig. 1). Note that in the 3D beyond-mean-field case, the minimization leads to a nonzero density only for attractive mean-field interaction which compensates a repulsive beyond-mean-field term (red curve). In contrast, the crossover expression leads to the existence of a finite density droplet for any value of the

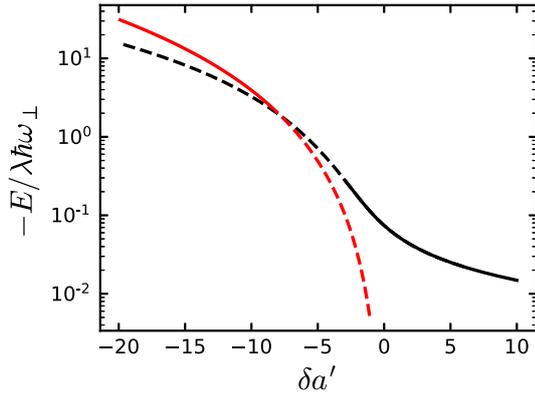


FIG. 2. Energy per particle in the bulk. The black (red) curve corresponds to the energy minimization using the 1D-3D-crossover (3D) formula. The curves are dashed in the regions where the corresponding theory is expected not to be valid.

mean-field parameter (black curve). For a large and negative mean-field parameter $\delta a'$, we find $\kappa \gg 1$, and the 3D expression is the valid one. For $\delta a' \gtrsim -3$, the crossover expression finds $\kappa \lesssim 1$, and it is thus valid. By interpolating the two results from their validity region, we find droplets for any value of the mean-field interaction and an approximated value of κ in the whole crossover. The equilibrium density is drastically reduced when increasing the mean-field interaction parameter.

We also plot the energy per particle in Fig. 2. It is negative as a droplet is a self-bound object. One can interpolate between the two solid curves in order to find its behavior for any parameter $\delta a'$. The binding energy of the droplet significantly decreases as one goes toward the 1D regime. The relevant scaling for the binding energy $\lambda \hbar \omega_{\perp} \propto \omega_{\perp}^{3/2}$ shows the influence of the radial confinement.

In this context, we can thus wonder whether the increased lifetime of the droplet due to reduced densities and three-body loss rates is sufficient to counterbalance its reduced energy scale and thus increased time scale. The three-body loss rate is characterized by a three-body loss coefficient K_3 . By integration over the Gaussian radial profile, we find the loss rate $\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = -\Gamma = -K_3 \frac{\kappa^2}{3\pi^2 a_{oh}^4 a^2}$. We then plot the dimensionless ratio of the droplet binding energy to the three-body loss rate, which is a measure of the relative importance of losses as compared with the droplet intrinsic time scale (see Fig. 3). Small values imply that losses play an important role in the droplet dynamics [16]. We find that it is indeed favorable to move toward $\delta a' > 0$ in order to minimize the relative effect of losses. Note that the ratio is plotted in units of the dimensionless quantity $\hbar a^3 a_{oh} / (m K_3)$, which reveals the importance of the different parameters. In particular, we find that reducing the confinement ω_{\perp} is favorable to reduce the relative role of losses in the droplet dynamics despite the reduction in the droplet binding energy.

We now discuss experimentally realistic numbers. We consider droplets made of potassium-39 in the second and third spin states around 56.8 G as used in previous experiments. In this case, $a_{11} \approx 33 a_0$, $a_{22} \approx 84 a_0$, and $a_{12} \approx 53 a_0$, where a_0 is the Bohr radius. The mean-field parameters δa and $\delta a'$ can

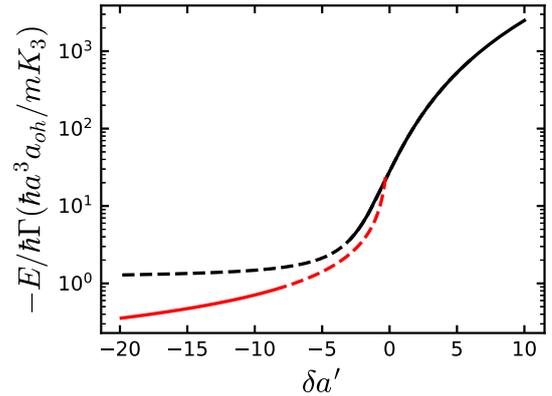


FIG. 3. Ratio of the binding energy per particle to the three-body loss rate in the beyond-mean-field 1D-3D crossover. Larger ratios are favorable to minimize the relative effect of losses.

be varied around zero by slight adjustment of the magnetic field. As an example, we take $\omega_{\perp}/2\pi = 500$ Hz, and the energy scale $\lambda \hbar \omega_{\perp} \approx (2\pi \hbar) \times 2$ Hz is relatively low. For $\delta a = -5 a_0$, a value close to the experimental ones [9–11], $\delta a' = -20$, and the binding energy per particle $\sim (2\pi \hbar) \times 60$ Hz is such that droplet physics can be observed on a time scale of tens of milliseconds [11]. With an effective three-body loss rate coefficient $K_3 = 1.4 \times 10^{-40}$ m⁶/s that can be assumed to be constant in the relevant region of the magnetic field [11,23], the loss rate is ~ 80 s⁻¹, and losses play a significant role in the droplet dynamics.

When one goes toward the 1D regime, the energy scale decreases rapidly. Nevertheless, the loss rate decreases even more rapidly, and the crossover regime is an adequate region to look for more stable droplets. For example, at $\delta a' = 0$, where the droplet is solely stabilized by the peculiar density dependence of the beyond-mean-field energy as a function of density [20], the droplet density is reduced by a factor of ~ 100 , and three-body losses are then negligible. The energy per particle is then of the order of $\sim (2\pi \hbar) \times 0.2$ Hz. Note that such a low energy scale implies long experimental times as well as a control of the trap parameters such as its longitudinal flatness to an extreme precision.

III. QUANTUM DROPLETS IN A FINITE SYSTEM

Whereas the above discussion focused on the properties of droplets in the bulk, we now turn to the question of finite atom numbers and finite sizes in quasi-1D droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D. One of our goals is to identify realistic parameters where a stable flat-top droplet density profile could be observed.

A. Extended Gross-Pitaevskii equation

In the same spirit as before, we suppose that the spin modes are unpopulated such that the ratio of densities between the two spin states is fixed. Within this assumption the system can be described by a single wave-function $\psi(x, t)$ solution of the following extended Gross-Pitaevskii

equation:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \hbar \omega_{\perp} [\delta a' \lambda |\psi|^2] + \lambda g(\kappa) \psi + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x^2 \psi, \quad (8)$$

where $g(\kappa) = \frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa}$ is the beyond-mean-field interaction potential.

This equation can be written in dimensionless units using the following scalings:

$$t = t_0 t' = \frac{1}{\lambda \omega_{\perp}} t', \quad (9)$$

$$x = x_0 x' = \frac{a_{\perp}}{\lambda^{1/2}} x', \quad (10)$$

$$\psi = \psi_0 \psi' = \frac{1}{a^{1/2}} \psi', \quad (11)$$

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + [\delta a' |\psi'^2| + g(|\psi'^2|)] \psi' + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega_{\perp}^2 \lambda^2} x'^2 \psi', \quad (12)$$

with the normalization condition $\int |\psi'^2| dx' = N' = N \lambda^{3/2}$. In addition to this rescaled atom number, there are two dimensionless parameters: $\delta a'$ for the mean-field interaction and $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp} \lambda}$ for the trapping potential.

B. Ground-state solutions

We find the droplet ground state using the split-step Fourier method and imaginary time evolution. We first study the solution with no longitudinal trapping ($\omega_{\parallel} = 0$). Remarkably, we always find a self-bound solution for all parameters. This is in contrast to the 3D situation, where a minimal atom number is needed to form a droplet. We now plot the ground-state density profiles for two different atom numbers $N' = 0.3$ and $N' = 3$ and mean-field interaction parameters in the crossover $\delta a' = -6.7, 0$, and 6.7 (corresponding to $\delta a/a_0 = -1.6, 0$, and 1.6 , for the previously given experimental parameters) in Fig. 4. For large atom numbers $N' \geq 3$, the droplet profile exhibits a flat-top profile corresponding to the bulk solution whose edges are rounded because of the kinetic-energy term. The droplet density gets smaller and its size gets larger as $\delta a'$ goes from negative to positive values. For small atom numbers $N' \leq 0.3$, the droplets do not show an extended flat region, and the kinetic energy plays a dominant role.

For the realistic experimental parameters chosen previously, $N' = 1$ corresponds to 3800 atoms, and the quasi-1D situation offers the possibility of saturating a droplet with realistic atom numbers. This is in contrast to the quasi-2D and, even more, the 3D droplets, where the critical atom number to reach a flat top can be too high especially for low values of $|\delta a|$, which are favorable to reduce the role of three-body losses [8].

Another way to get an idea of the density profiles is to minimize the energy of an ansatz wave function. Here, an appropriate choice for the density

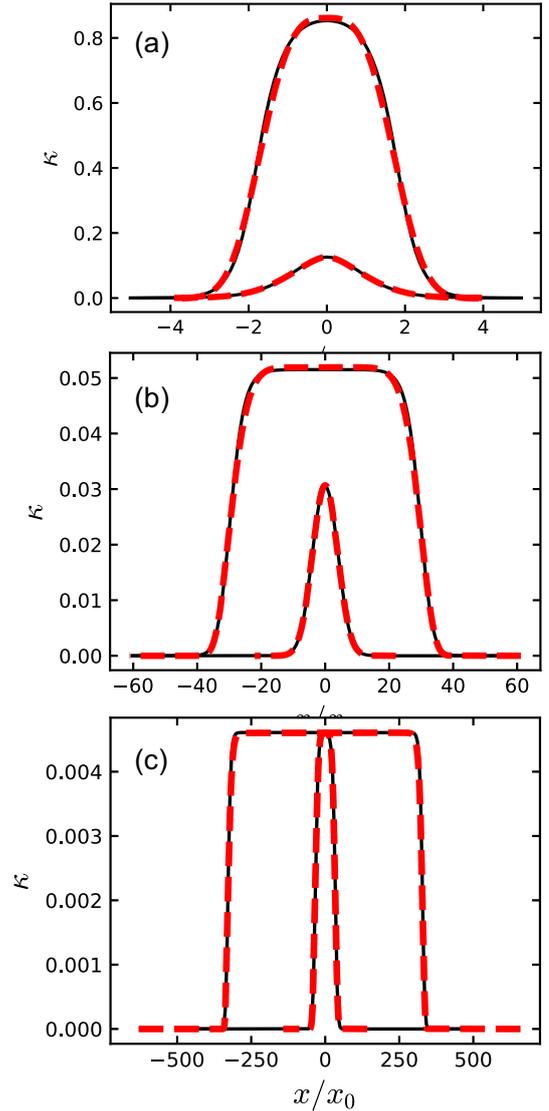


FIG. 4. Quantum droplet density profiles in the absence of a longitudinal trap ($\omega_{\parallel} = 0$) for $N' = 0.3$ and $N' = 3$ for three values of $\delta a'$. (a) $\delta a' = -6.7$. (b) $\delta a' = 0$. (c) $\delta a' = 6.7$. Please note the different scales both in x and in κ in (a)–(c). The solid black curves correspond to the exact minimization of the extended Gross-Pitaevskii equation in the 1D-3D crossover using imaginary time evolution. The superimposed dashed red curves are the results using the two-parameter ansatz presented in the text.

profile is

$$n(\sigma, r) = \frac{N}{2\sigma\Gamma(1+1/2r)} \exp\left[-\left(\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^r\right]. \quad (13)$$

This two-parameter function has the ability to interpolate between a peaked density profile for low values of r , a Gaussian density profile for $r = 1$, and a flat-top density profile for $r \gg 1$. Its typical width is given by σ . It has the great advantage that the different energy terms are analytical and can be simply written in terms of the Γ function. The energy minimization is then straightforward. In Fig. 4, it is obvious that the ansatz

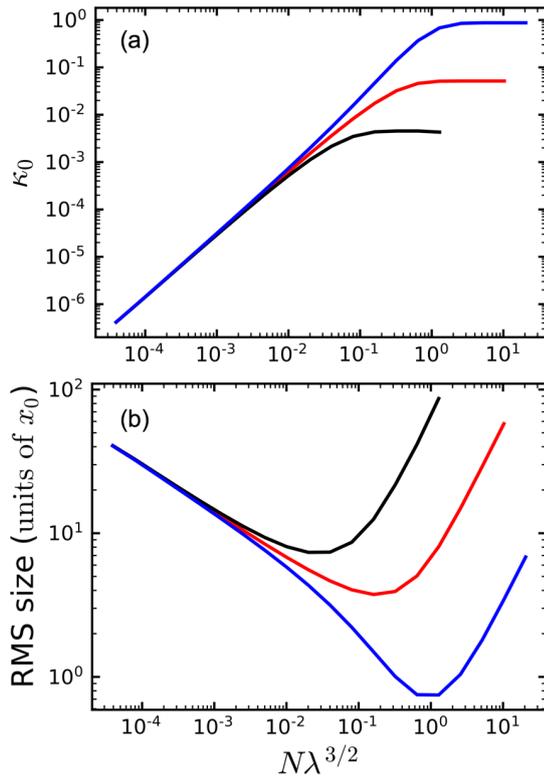


FIG. 5. Maximum rescaled density κ_0 (a) and rms size (b) of a droplet as a function of the atom number in the absence of a longitudinal trap ($\omega_{\parallel} = 0$). The three curves correspond to three values of the mean-field parameters $\delta a'$: black [(a) bottom curve, (b) top curve], $\delta a' = 6.7$; red (middle curve), $\delta a' = 0$; blue [(a) top curve, (b) bottom curve], $\delta a' = -6.7$.

minimization method is able to approximate the exact ground state.

C. Maximum density and rms size: Scalings

We now plot the maximum rescaled density κ_0 and the root-mean-square (rms) size of the ground-state profile as a function of the atom number for $\delta a' = -6.7, 0$, and 6.7 (see Fig. 5). In all cases, the density increases with the atom number until it reaches a saturation value corresponding to the bulk density, when the droplet exhibits a flat-top profile. It also appears that a lower atom number is necessary to reach a flat-top droplet as one moves toward the 1D regime. The ground-state size first decreases as the atom number increases and then increases when a flat-top droplet is formed.

For the above figures, one can extract scalings in different regimes. For low atom numbers, all three curves are superimposed, and $\kappa_0 \ll 1$. The dominant energy terms are the 1D beyond-mean-field attractive terms and the kinetic energy. The mean-field term is negligible. In this case, the size scales as $N^{-1/3}$, and the density scales as $N^{2/3}$. For a large atom number, the ground state is a flat-top quantum droplet. The dominant energies are then the mean-field and beyond-mean-field terms. The kinetic energy can be neglected in the analysis. In this case, the size simply scales as N' as the density is fixed. For attractive mean-field $\delta a' < 0$, there exists

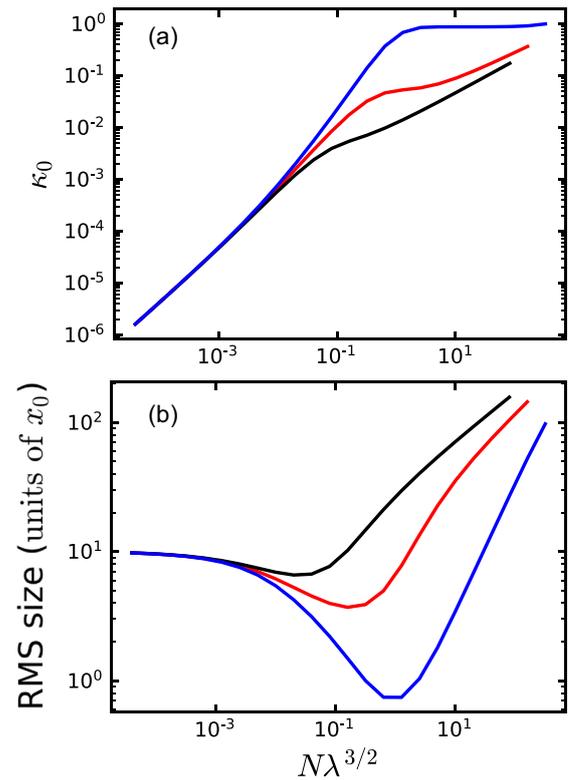


FIG. 6. Maximum rescaled density κ_0 (a) and rms size (b) as a function of the atom number in the presence of a longitudinal harmonic trap $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp\lambda}} = 5 \times 10^{-3}$. The curves follow the same coding as in Fig. 5.

an intermediate-atom-number region in which the solution corresponds to a standard mean-field bright soliton [11,24,25] for which the size scales as N'^{-1} and the density scales as N'^2 .

D. Trapped case

We now turn to the trapped case. As an example, we choose $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp\lambda}} = 5 \times 10^{-3}$ (which corresponds to $w_{\parallel}/2\pi = 0.01$ Hz, for the previously chosen parameters) and find the ground state by imaginary time evolution (see Fig. 6). For intermediate atom number, the trap has no effect. It corresponds to a regime where the trap potential energy is negligible as compared with the other energy scales. For low atom number, the size reaches a plateau in contrast to the untrapped case. This corresponds to a situation where the gas can be considered as noninteracting and the condensates occupy the ground state of the longitudinal harmonic trap.

At high atom numbers, the trap prevents the droplet from growing in size at a constant density as observed in the absence of a longitudinal trap. In this regime, the kinetic energy can be neglected, and the density profile can be found in an approximation analogous to the Thomas-Fermi approximation. A local chemical potential is then directly linked to the density through the homogenous equation of state. In the 3D case, this was presented in Ref. [26]. The entrance in this last regime can be simply estimated by comparing the bulk energy per particle to the potential energy given by the rms size of the droplet. The value of N' where this happens

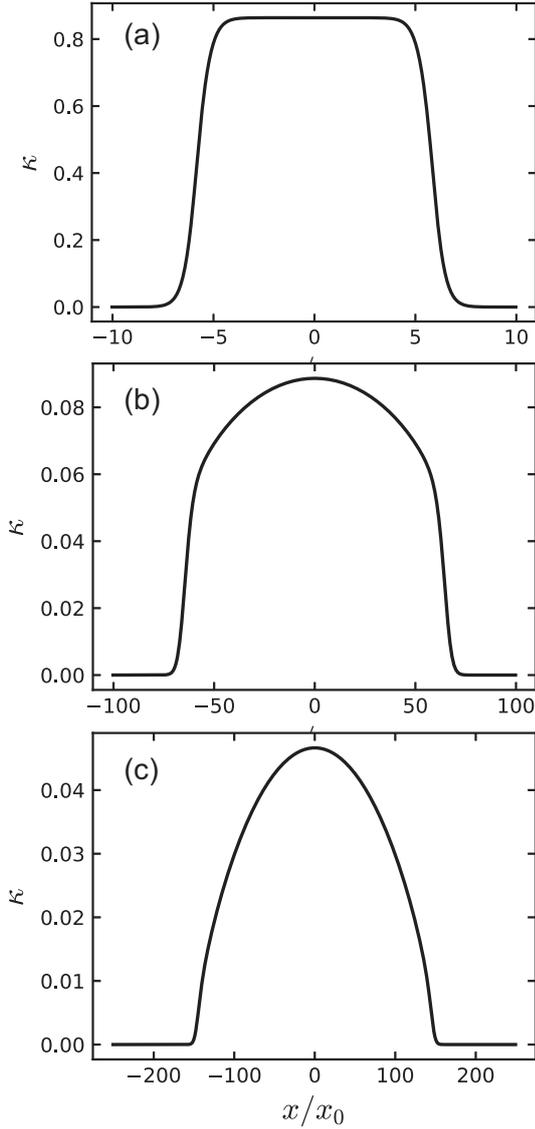


FIG. 7. Droplet profiles in the presence of a longitudinal confinement $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\perp,\lambda}} = 5 \times 10^{-3}$ for $N' = 10$ and three different values of $\delta a'$. (a) $\delta a' = -6.7$. (b) $\delta a' = 0$. (c) $\delta a' = 6.7$.

drastically depends on $\delta a'$. As an example, density profiles for $N' = 10$ are plotted in Fig. 7 for different values of $\delta a'$. The profile indeed resembles a Thomas-Fermi profile for $\delta a' = 6.7$ with dominant mean-field and potential energies. Oppositely, a flat-top droplet profile with negligible trap influence is found for $\delta a' = -6.7$. For $\delta a' = 0$, the situation is intermediate. Our results show that even a minute axial confinement can greatly affect the droplet shape, in particular for $\delta a \gtrsim 0$, where the droplet energy scale is especially low.

E. Breathing mode

We now turn to the study of excitations of the quasi-1D droplets in the absence of a longitudinal trap. They can be studied by real-time integration of the extended Gross-Pitaevskii equation. More specifically, we start from a situation close to equilibrium by rescaling the first computed

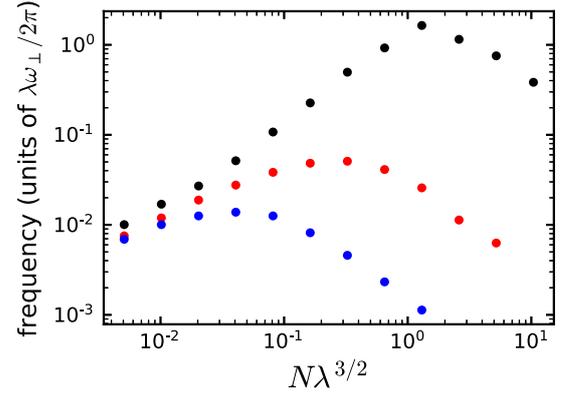


FIG. 8. Frequency of the breathing mode as a function of the rescaled atom number for three values of the mean-field parameter $\delta a'$: black, top points, $\delta a' = -6.7$; red, middle points, $\delta a' = 0$; blue, lower points, $\delta a' = 6.7$.

ground-state wave function by a coefficient of 1.01 [19]. After this modification, we study, in particular, the evolution of the rms size of the droplet as a function of time and extract its main (lowest) oscillation frequency, which is plotted in Fig. 8. Interestingly, we find that these small breathing oscillations are essentially undamped. This can be expected as their frequency remains below the particle emission threshold for all parameters. High frequency modes can evaporate, but there are only weakly excited in our excitation scheme [8]. This behavior is in contrast to the 3D situation, where there is a region just above the critical atom number where the droplets quickly evaporate to their ground state [8]. Importantly, the excitation mode period gives a time scale in which a droplet can be prepared in an adiabatic (quasistatic) way by time variation of the experimental parameters.

We find that the breathing mode frequency first increases with the atom number as can be expected from an increasing binding energy. It then reaches a maximum close to the point where the droplet becomes flat topped. Then, it decreases when the droplet size increases. This observed behavior is qualitatively similar to the behavior previously predicted in the pure 1D regime ($\delta a' > 0$) [19] but quantitatively differs. For an increasing value of $\delta a'$, the maximum frequency takes significantly lower values. For the above mentioned parameters in potassium-39 mixtures, the frequency scale $\lambda\omega_{\perp}/2\pi = 2$ Hz is already quite low, and the droplet breathing mode frequency appears to be reasonably large only in the attractive mean-field region. In this condition, even an adiabatic preparation of a ground-state (unexcited) flat-top density droplet by a slow sweep of the parameters seems challenging. Creating the droplet already close to its stable shape by releasing the gas from a longitudinal box potential appears to be a more realistic solution to avoid too strong excitations.

IV. CONCLUSIONS

In a mixture of two Bose-Einstein condensates with repulsive intraspecies interaction and attractive interspecies interaction, we have studied quantum droplets in the 1D-3D crossover for the beyond-mean-field energy, which changes from positive in 3D to negative in 1D. The equilibrium

density is found to decrease rapidly when moving toward the 1D regime, which would be experimentally favorable in order to reduce the role of three-body losses. This reduction comes with a reduction in the typical energy scale of the droplets imposing severe experimental constraints on the control of the residual potential such as the longitudinal trapping or the preparation of the droplets close to their ground state. Nevertheless, stable quasi-1D quantum droplets with a characteristic flat-top profile should be realistically observable with a $\delta a'$ that is negative and of the order of a few units in potassium-39 experiments [9–11]. The conditions would be even more favorable for low-loss mixtures such as Rb-K [12].

The realization of quasi-1D droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D would allow precise studies of the beyond-mean-field effects in Bose gases.

Effects beyond the standard Lee-Huang-Yang energy used in this paper will appear [27], either because of higher-order terms in the density expansion [28], because of finite-range interacting potentials [29,30], or because of temperature effects [31].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank D. Petrov for inspiring discussions and A. Hammond for careful rereading. This research has been supported by CNRS, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Labex PALM, Région Île-de-France in the framework of DIM Sirteq, Université Paris-Saclay in the framework of IQUPS, ANR Droplets Project No. 19-CE30-0003-01, and the Simons Foundation (Award No. 563916: Localization of Waves).

-
- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012).
- [2] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **105**, 1119 (1957).
- [3] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity* (Oxford University Press, Oxford, 2016).
- [4] S. B. Papp, J. M. Pino, R. J. Wild, S. Ronen, C. E. Wieman, D. S. Jin, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 135301 (2008).
- [5] Y. I. Shin, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 070404 (2008).
- [6] N. Navon, S. Piątekki, K. Günter, B. Rem, T. C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 135301 (2011).
- [7] R. Lopes, C. Eigen, N. Navon, D. Clément, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 190404 (2017).
- [8] D. S. Petrov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 155302 (2015).
- [9] R. Cabrera, L. Tanzi, J. Sanz, B. Naylor, P. Thomas, P. Cheiney, and L. Tarruell, *Science* **359**, 301 (2018).
- [10] G. Semeghini, G. Ferioli, L. Masi, C. Mazzinghi, L. Wolswijk, F. Minardi, M. Modugno, G. Modugno, M. Inguscio, and M. Fattori, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 235301 (2018).
- [11] P. Cheiney, C. R. Cabrera, J. Sanz, B. Naylor, L. Tanzi, and L. Tarruell, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 135301 (2018).
- [12] C. D'Errico, A. Burchianti, M. Prevedelli, L. Salasnich, F. Ancilotto, M. Modugno, F. Minardi, and C. Fort, *Phys. Rev. Research* **1**, 033155 (2019).
- [13] I. Ferrier-Barbut, H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, and T. Pfau, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 215301 (2016).
- [14] Z.-H. Luo, W. Pang, B. Liu, Y.-Y. Li, and B. A. Malomed, *Front. Phys.* **16**, 32201 (2021).
- [15] F. Böttcher, J.-N. Schmidt, J. Hertkorn, K. S. H. Ng, S. D. Graham, M. Guo, T. Langen, and T. Pfau, *Rep. Prog. Phys.* **84**, 012403 (2021).
- [16] G. Ferioli, G. Semeghini, S. Terradas-Briansó, L. Masi, M. Fattori, and M. Modugno, *Phys. Rev. Research* **2**, 013269 (2020).
- [17] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **106**, 1135 (1957).
- [18] D. S. Petrov and G. E. Astrakharchik, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 100401 (2016).
- [19] G. E. Astrakharchik and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **98**, 013631 (2018).
- [20] T. Ilg, J. Kumlin, L. Santos, D. S. Petrov, and H. P. Büchler, *Phys. Rev. A* **98**, 051604(R) (2018).
- [21] P. Zin, M. Pylak, T. Wasak, M. Gajda, and Z. Idziaszek, *Phys. Rev. A* **98**, 051603(R) (2018).
- [22] There is a misprint in Ref. [20] for the value of B_{1D}^h ; L. Santos (private communication).
- [23] The given effective value of K_3 takes into account a 1/6 factor due to the absence of Bose enhancement as compared with the thermal loss coefficient and also includes the fact that only a fraction of the atoms are in the lossy state $|2\rangle$.
- [24] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [25] K. E. Strecker, G. B. Patridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature (London)* **417**, 150 (2002).
- [26] N. B. Jørgensen, G. M. Bruun, and J. J. Arlt, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 173403 (2018).
- [27] F. Böttcher, M. Wenzel, J.-N. Schmidt, M. Guo, T. Langen, I. Ferrier-Barbut, T. Pfau, R. Bombin, J. Sánchez-Baena, J. Boronat, and F. Mazzanti, *Phys. Rev. Research* **1**, 033088 (2019).
- [28] M. Ota and G. E. Astrakharchik, *SciPost Phys.* **9**, 020 (2020).
- [29] V. Cikojević, L. V. Markić, G. E. Astrakharchik, and J. Boronat, *Phys. Rev. A* **99**, 023618 (2019).
- [30] V. Cikojević, L. V. Markić, M. Pi, M. Barranco, and J. Boronat, *Phys. Rev. A* **102**, 033335 (2020).
- [31] G. De Rosi, P. Massignan, M. Lewenstein, and G. E. Astrakharchik, *Phys. Rev. Research* **1**, 033083 (2019).

3.4 Méthode numérique

Nous avons développé un programme numérique pour résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii avec le terme supplémentaire au-delà du champ-moyen dans le crossover 1D-3D. Nous avons besoin de résoudre l'équation pour trouver l'état d'équilibre de la gouttelette quantique et d'en déduire ses propriétés stationnaires (densité, taille, énergie de liaison, etc). Nous avons également besoin de pouvoir simuler numériquement la dynamique de la fonction d'onde de la gouttelette afin d'étudier le mode de respiration.

3.4.1 Équation de Gross-Pitaevskii effective

Nous voulons résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii avec un terme supplémentaire provenant de l'énergie des fluctuations quantiques dans le crossover 1D-3D. L'équation de Gross-Pitaevskii effective s'écrit :

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = (\hat{H}_{\text{cin}} + V(r) + \hat{H}_{\text{MF}}(n) + \hat{H}_{\text{LHY}}(n))\psi(\vec{r}, t) \quad (3.4)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(r)\psi(\vec{r}, t) + gn(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t) + \hat{H}_{\text{LHY}}(n)\psi(\vec{r}, t) \quad (3.5)$$

où \hat{H}_{cin} correspond à la pression quantique, $V(r)$ est le terme se rapportant au potentiel extérieur (piège optique). Les deux derniers termes $\hat{H}_{\text{MF}}(n)$ et $\hat{H}_{\text{LHY}}(n)$ correspondent respectivement au terme d'interactions de champ-moyen et des fluctuations quantiques.

Dans le cas d'un hamiltonien indépendant du temps \hat{H} , l'état du système à un temps Δt est donné par :

$$\psi(\Delta t) = e^{-i\hat{H}\Delta t/\hbar}\psi(0) \quad (3.6)$$

Dans notre cas, on peut décomposer l'hamiltonien en deux termes. Le premier terme \hat{T} correspondant à la pression quantique \hat{H}_{cin} , s'appliquant dans l'espace des impulsions. Le deuxième terme \hat{I} est la somme des autres termes, dont la contribution est dans l'espace réel. L'évolution du système après un temps Δt est donc donnée par :

$$\psi(\Delta t) = e^{-i(\hat{T}+\hat{I})\Delta t/\hbar}\psi(0) \quad (3.7)$$

Les deux termes \hat{T} et \hat{I} ne commutent pas ($[\hat{T}, \hat{I}] \neq 0$), on ne peut donc pas ici décomposer l'opérateur évolution en un produit de deux exponentielles. De plus, le calcul de ce terme peut être délicat.

Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

En mathématiques, la formule de Baker-Campbell-Hausdorff est la solution Z à l'équation :

$$e^Z = e^A e^B \quad (3.8)$$

où A, B sont des opérateurs, et $Z = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}[A, [A, B]] - \frac{1}{12}[B, [B, A]] + \dots$

On peut donc réécrire l'opérateur évolution $e^{-i(\hat{T}+\hat{I})\Delta t/\hbar}$:

$$e^{-i(\hat{T}+\hat{I})\frac{\Delta t}{\hbar}} \approx e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{-i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{i\frac{1}{2}[\hat{T}, \hat{I}]\frac{\Delta t^2}{\hbar^2}} \quad (3.9)$$

Le dernier terme du membre de droite de l'équation (3.9) à une dépendance quadratique en Δt contrairement aux autres termes qui en dépendent linéairement. Cette dépendance en Δt^2 , permet de négliger le dernier terme pour des pas de temps Δt suffisamment faibles, permettant de décomposer l'exponentielle en un simple produit :

$$e^{-i(\hat{T}+\hat{I})\frac{\Delta t}{\hbar}} \approx e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{-i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}} \quad (3.10)$$

Cette simplification n'est valide que si Δt est suffisamment faible par rapport aux temps caractéristiques des énergies mises en jeu dans l'évolution du système (énergie cinétique, potentielle et celles associées aux interactions) :

$$\max_i \left| \frac{E_i \Delta t}{\hbar} \right| \ll 1 \iff \Delta t \ll \frac{\hbar}{\max_i |E_i|} \quad (3.11)$$

3.4.2 La Méthode "Split-step Fourier"

La méthode **Split-step Fourier** est une méthode numérique pseudo-spectrale utilisée pour la résolution d'équation différentielle non-linéaire comme l'équation de Gross-Pitaevskii. Considérons un système évoluant sous l'hamiltonien $\hat{H} = \hat{H}_{\text{cin}} + V(r) + \hat{H}_{\text{MF}}(n) + \hat{H}_{\text{LHY}}(n)$, dont la fonction d'onde à $t = 0$ est $\psi(0) = \psi_0$. La méthode consiste à appliquer des étapes de calcul l'un après l'autre sur des périodes de temps Δt suffisamment faibles afin de trouver la solution finale $\psi(t_f)$, où t_f est le temps final. Deux schémas de calculs simples sont couramment utilisés :

Schéma de Lie

Les opérateurs s'exerçant dans l'espace réel et dans l'espace de Fourier (impulsions) sont appliqués indépendamment l'un après l'autre [100] :

$$\psi(t_f) = e^{-i\hat{H}_{\text{cin}}\Delta t/\hbar} \times e^{-i\hat{H}_{\text{pot}}\Delta t/\hbar} \times e^{-i\hat{H}_{\text{MF}}\Delta t/\hbar} \times e^{-i\hat{H}_{\text{LHY}}\Delta t/\hbar} \psi_0 \quad (3.12)$$

$$\psi(t_f) = e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{-i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}} \psi_0 \quad (3.13)$$

La contribution de l'hamiltonien cinétique \hat{H}_{cin} est calculée dans le domaine de Fourier. Ce schéma a une précision temporellement du premier ordre [101, 102]. Il a une erreur de division locale temporelle $\epsilon_{Lie}(\Delta t)$ [100] :

$$\epsilon_{Lie}(\Delta t) = e^{-i\Delta t(\hat{T}+\hat{I})/\hbar}\psi - e^{-i\Delta t\hat{T}/\hbar}e^{-i\Delta t\hat{I}/\hbar}\psi \propto \Delta t^2 \quad (3.14)$$

Schéma de Strang

Le schéma de Strang, ou encore appelé la méthode **symmetric split step Fourier**, est une méthode permettant d'améliorer la précision temporelle. Elle consiste d'appliquer le schéma opérationnel suivant [100] :

$$\psi(\Delta t) = e^{-\frac{1}{2}i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{-i\hat{T}\frac{\Delta t}{\hbar}} \times e^{-\frac{1}{2}i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}} \psi(0) \quad (3.15)$$

L'évolution de la fonction d'onde par l'opérateur $e^{-i\hat{I}\frac{\Delta t}{\hbar}}$ est décomposée en deux étapes de calcul, séparées par l'étape d'évolution de la fonction d'onde par la pression quantique. Ce schéma a une précision temporellement du deuxième ordre [101, 102]. Il a une erreur de division locale temporelle $\epsilon_{Strang}(\Delta t)$ [100] :

$$\epsilon_{Strang}(\Delta t) = e^{-i\Delta t(\hat{T}+\hat{I})/\hbar}\psi - e^{-i\Delta t\hat{T}/\hbar}e^{-i\Delta t\hat{I}/\hbar}\psi \propto \Delta t^3 \quad (3.16)$$

Dans notre étude théorique, nous avons utilisé le schéma de Strang.

3.4.3 Évolution temporelle

Dans cette partie nous allons expliciter les différents termes qui interviennent dans le schéma de Strang.

Évolution sous le terme potentiel

Le terme associé à l'énergie potentiel $V(r)$ s'écrit dans l'espace réel, $V(r) = m\omega^2 x^2/2$ dans le cas d'un piège harmonique. Ainsi la contribution du terme potentiel est juste une multiplication de la fonction d'onde :

$$\psi_1 = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}V(r)\Delta t\right)\psi(0) \quad (3.17)$$

Évolution sous les terme des interactions

De la même manière, le terme des interactions de champ-moyen et des fluctuations quantiques s'écrivent dans l'espace réel² :

2. Dans le cas de gaz dipolaire, il est nécessaire de calculé la contribution du champ-moyen dans l'espace de Fourier.

$$\psi_2 = \exp\left(-\frac{i}{2\hbar}(g|\psi_1(r)|^2 + H_{\text{LHY}}(|\psi_1(r)|^2))\Delta t\right)\psi_1 \quad (3.18)$$

Évolution sous le terme cinétique

L'évolution sous la pression quantique fait intervenir une dérivée seconde de la fonction d'onde. Il est donc nécessaire de passer dans le domaine de Fourier dans lequel l'hamiltonien cinétique est diagonal :

$$F\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi\right] = \frac{\hbar^2k^2}{2m}\psi_k \quad (3.19)$$

où $F[\psi] = \psi_k$ est la transformée de Fourier de la fonction ψ . Cela signifie que, dans l'espace de Fourier, la contribution de l'hamiltonien cinétique correspond à une multiplication :

$$F[\psi_3] = \exp(-i\frac{\hbar k^2}{2m}\Delta t)F[\psi_2](k) \quad (3.20)$$

Afin de revenir dans l'espace réel, et de trouver ψ_3 , il suffit de calculer la transformée de Fourier inverse :

$$\psi_3 = F^{-1}\left[\exp(-i\frac{\hbar k^2}{2m}\Delta t)F[\psi_2](k)\right] \quad (3.21)$$

Afin d'avoir une évolution complète, il suffit de remultiplier la fonction d'onde ψ_3 par les termes correspondants au potentiel extérieur et aux interactions. Dans une version compacte, on peut écrire l'évolution totale :

$$\psi(\Delta t) = e^{-\frac{i}{2\hbar}\hat{I}(r)\Delta t}F^{-1}\left[e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}\Delta t}F\left[e^{-\frac{i}{2\hbar}\hat{I}(r)\Delta t}\psi(0)\right](k)\right] \quad (3.22)$$

avec $I(r) = V(r) + g|\psi(r,0)|^2 + H_{\text{LHY}}(|\psi(r,0)|^2)$.

3.4.4 Temps imaginaire

Afin de trouver l'état fondamental d'un hamiltonien, il est commun d'utiliser **la méthode de temps imaginaire** [103, 104, 105]. Cette méthode consiste à résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii en temps imaginaire, c'est-à-dire en remplaçant $\Delta t \rightarrow -i\Delta t$. Considérons une fonction d'onde arbitraire initiale Ψ_{ini} d'énergie E . Dans la base des états propres $\{\phi_i(r), E_i\}$, la fonction d'onde s'écrit :

$$\Psi_{ini}(r, t) = \sum_i c_i \phi_i(r) e^{-iE_i t/\hbar} \quad (3.23)$$

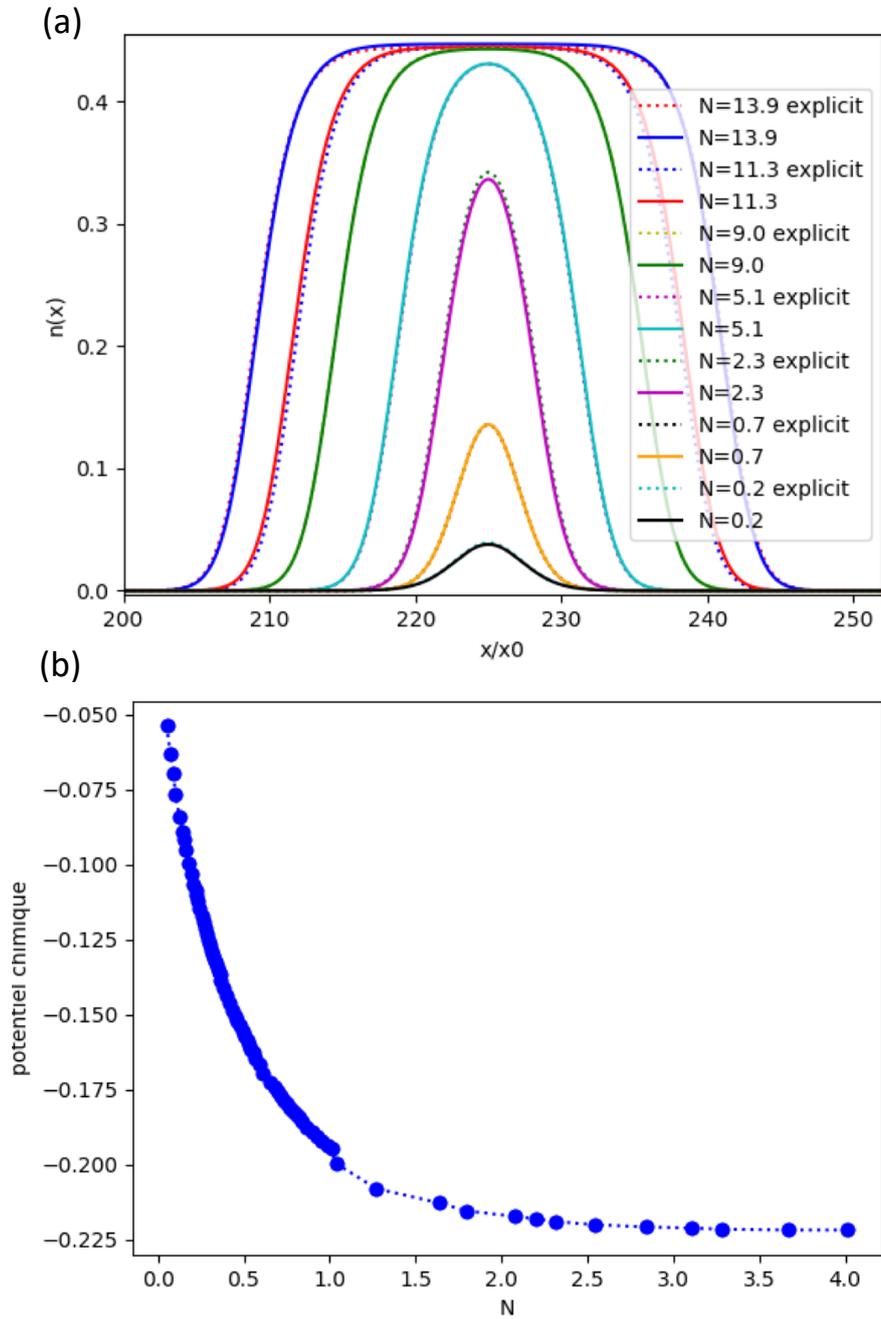


FIGURE 3.1 – Simulations numériques de gouttelettes quantiques unidimensionnels (LHY 1D). Comparaison de nos résultats avec les résultats analytiques de [106] (voir texte). Les petites différences proviennent du temps de calcul, qui n'est pas suffisamment long dans nos profils affichés.

En passant en temps imaginaire, on obtient :

$$\Psi_{ini}(r, t) = \sum_i c_i \phi_i(r) e^{-E_i t/\hbar} = c_0 \phi_0(x) e^{-E_0 t/\hbar} + \sum_{i \neq 0} c_i \phi_i(r) e^{-E_i t/\hbar} \quad (3.24)$$

où ϕ_0 est l'état fondamental du système, avec $E_0 < E_i$ pour $i \neq 0$. Ainsi, pour un temps suffisamment long, les composantes avec des énergies supérieures à E_0 vont converger exponentiellement et plus rapidement vers zéro que l'état fondamental. On obtient donc $\Psi(r, t) \propto \phi_0(r)$ après un temps suffisamment long. Il est nécessaire de renormaliser la fonction d'onde après chaque étape de pas $-i\Delta t$ afin d'obtenir une stabilité numérique. Le critère de temps suffisamment long est arbitraire. On peut considérer que le critère est valide lorsque l'énergie de l'état à atteint une valeur constante, c'est-à-dire que la différence relative d'énergie des fonctions d'ondes entre deux étapes est inférieure à 0.1% par exemple.

Afin de vérifier que notre programme numérique fonctionne correctement, nous avons simulé des systèmes simples dont nous connaissons bien la dynamique et l'état fondamental (expansion gaussienne, profil Thomas-Fermi). Nous avons également retrouver les résultats de l'article [106]. La figure 3.1 expose nos simulations numériques où nous retrouvons les résultats analytiques de l'article [106] sur les gouttelettes quantiques unidimensionnels. En figure (a) sont représentés les profils de densités unidimensionnels normalisés en fonction de la position pour différents nombres d'atomes normalisés. Le potentiel chimique en fonction du nombre d'atomes est tracé en figure (b). Les courbes pleines correspondent à nos simulations, tandis que les courbes en pointillées sont issues de l'article.

3.5 Conclusion et perspectives

Nous avons étudié les gouttelettes quantiques quasi 1D dans le crossover 1D-3D pour le terme Lee-Huang-Yang. Nous avons trouvé que la densité d'équilibre diminue rapidement à mesure que le système va dans le régime 1D. Ceci est favorable expérimentalement afin de réduire les pertes par recombinaison à trois corps qui dominent la dynamique dans le régime 3D. Cependant, cette diminution de la densité d'équilibre conduit à une réduction de l'énergie du système, imposant de sévères contraintes expérimentales. Par exemple, nous avons mis en évidence, que la présence d'un piègeage, même extrêmement faible, peut avoir des effets importants sur la gouttelette. De l'analyse du mode de respiration, nous pouvons en conclure qu'il est envisageable uniquement de former des gouttelettes lorsque les interactions de champ moyen $\delta a'$ sont attractives. En effet, les énergies mises en jeu dans le régime purement 1D sont trop faibles expérimentalement. Cependant, même dans ces conditions, la fréquence du mode de respiration est de l'ordre de quelques Hz et il semble

extrêmement difficile expérimentalement d'envisager de former une gouttelette adiabatiquement. Il semble plus raisonnable d'envisager de former une gouttelette avec un quench des interactions dans le régime saturé à partir d'un condensat dans un piège en forme de boîte, dont le profil de densité initial est proche du profil final. Expérimentalement, cela peut se faire à l'aide d'une matrice de micro-miroirs (Digital micromirrors devices (DMD)) et de projeter un potentiel dans la direction longitudinale en forme de boîte sur les atomes, avec un laser dans le bleu de la transition optique.

La réalisation de gouttelettes quantiques dans le crossover permettrait une étude détaillée du rôle des fluctuations quantiques dans les gaz quantiques bosoniques. Des effets au-delà du terme de Lee-Huang-Yang sont attendus [107], causés par des termes d'ordres supérieurs [97], par la forme du potentiel d'interactions atomique [88, 95] ou par des effets de la température [108, 109].

Chapitre 4

L'expérience de potassium 39

Ce chapitre est consacré à une description succincte à la fois de l'expérience et des différentes étapes expérimentales permettant l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein. Une description détaillée pourra être trouvée dans les thèses de G. Salomon, L. Fouché et G. Berthet [110, 111, 48]. Un accent sera mis sur les contributions que j'ai apportées lors de ma thèse. Nous verrons l'implémentation d'une nouvelle alimentation de courant, la stabilisation du champ magnétique, la mise en place du circuit radio-fréquence permettant le transfert et le couplage entre différents états de spin et la condensation de Bose-Einstein dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$.

4.1 Les propriétés du potassium

Le potassium est un alcalin de numéro atomique $Z = 19$, il possède à la fois 19 protons et 19 électrons. Le remplissage des différentes couches électroniques est le suivant $(1s)^2(2s)^2(2p)^6(3s)^2(3p)^6(4s)^1$, ainsi le potassium n'a qu'un seul électron sur sa couche externe $n = 4$. Il existe deux isotopes bosoniques, le ^{39}K et ^{41}K , ainsi qu'un isotope fermionique, le ^{40}K (Voir le tableau 4.1).

4.1.1 Propriétés optiques du ^{39}K

La structure des niveaux d'énergie du potassium 39 est représentée en figure 4.1. Les transitions optiques dominantes dans l'état fondamental sont la D1 ($^2S_{1/2} \rightarrow$

Masse atomique A	Neutrons N	Abondance naturelle(%)	Temps de vie
39	20	93.2581(44)	stable
40	21	0.0117(1)	1.28×10^9 années
41	22	6.7302	stable

TABLE 4.1 – Propriétés générales des différents isotopes du potassium.

Transition atomique		Ligne D2	Ligne D1
Longueur d'onde	λ	766.700921822(24) nm	770.108385049(123) nm
Temps de vie	τ	26.37(5) ns	26.72(5) ns
Largueur naturelle	$\Gamma/2\pi$	6.035(11) MHz	5.956(11) MHz
Vitesse de recul	v_{rec}	1.335736144(7) cm/s	1.329825973(7) cm/s
Température Doppler	T_D	145 μK	145 μK
Intensité de saturation	I_{sat}	1.75 mW/cm ²	1.70 mW/cm ²

TABLE 4.2 – Propriétés optiques du ³⁹K

²P_{1/2}) et la D2 (²S_{1/2} → ²P_{3/2}). Le temps de vie naturel τ dans les états excités ²P_{1/2} et ²P_{3/2} est relié à la largeur naturelle de raie Γ associée à la transition par :

$$\Gamma = 1/\tau \approx 2\pi \times 6 \text{ MHz} \quad (4.1)$$

Les propriétés importantes pour les expériences avec du ³⁹K sont récapitulées dans le tableau 4.2. Pour les deux transitions, les atomes se désexcitent à la fois vers les états hyperfins $F = 1$ et $F = 2$ de l'état fondamental. Ainsi, il est nécessaire d'utiliser un faisceau principal ($F = 2 \rightarrow F'$) et repompeur ($F = 1 \rightarrow F'$) pour les deux lignes spectrales. Un des inconvénients du potassium 39, est la structure étroite des niveaux hyperfins de l'état ²P_{3/2}, environ 33.8 MHz de large. Il est par conséquent, très difficile d'isoler une transition cyclante due au couplage avec les autres niveaux hyperfins [111], cela entraîne donc un besoin accru en puissance dans le faisceau repompeur. De plus, il y a environ que 21 MHz d'écart entre les niveaux $F' = 2$ et $F' = 3$ de la ligne D2, ceci empêche de réaliser un refroidissement sub-Doppler *via* l'effet Sisyphe par exemple. Cette structure impose donc de travailler dans le rouge des états hyperfins de l'état ²P_{3/2}.

4.1.2 Propriétés de collisions du ³⁹K

Une des étapes nécessaire à l'obtention d'un gaz quantique dégénéré, est le refroidissement par évaporation. Lors de ce processus, les atomes les plus chauds quittent le piège, les atomes restant dans le piège thermalisent *via* les collisions inter-atomiques à une température inférieure. Pour que le refroidissement soit efficace, il faut que le taux de collisions élastique γ soit suffisamment rapide :

$$\gamma = n\sigma v \propto a^2 \quad (4.2)$$

où n est la densité du gaz, σ la section efficace de collision et v la vitesse moyenne des atomes. Ainsi, il est nécessaire que la longueur de diffusion soit suffisamment grande. À champ magnétique nul, la longueur de diffusion a est de l'ordre de $-25 a_0$. Cette longueur de diffusion est petite en comparaison de celle du ⁸⁷Rb égale à $100 a_0$. Ainsi, le taux de collisions dans le cas du ³⁹K est environ 16 fois plus faible que pour le rubidium.

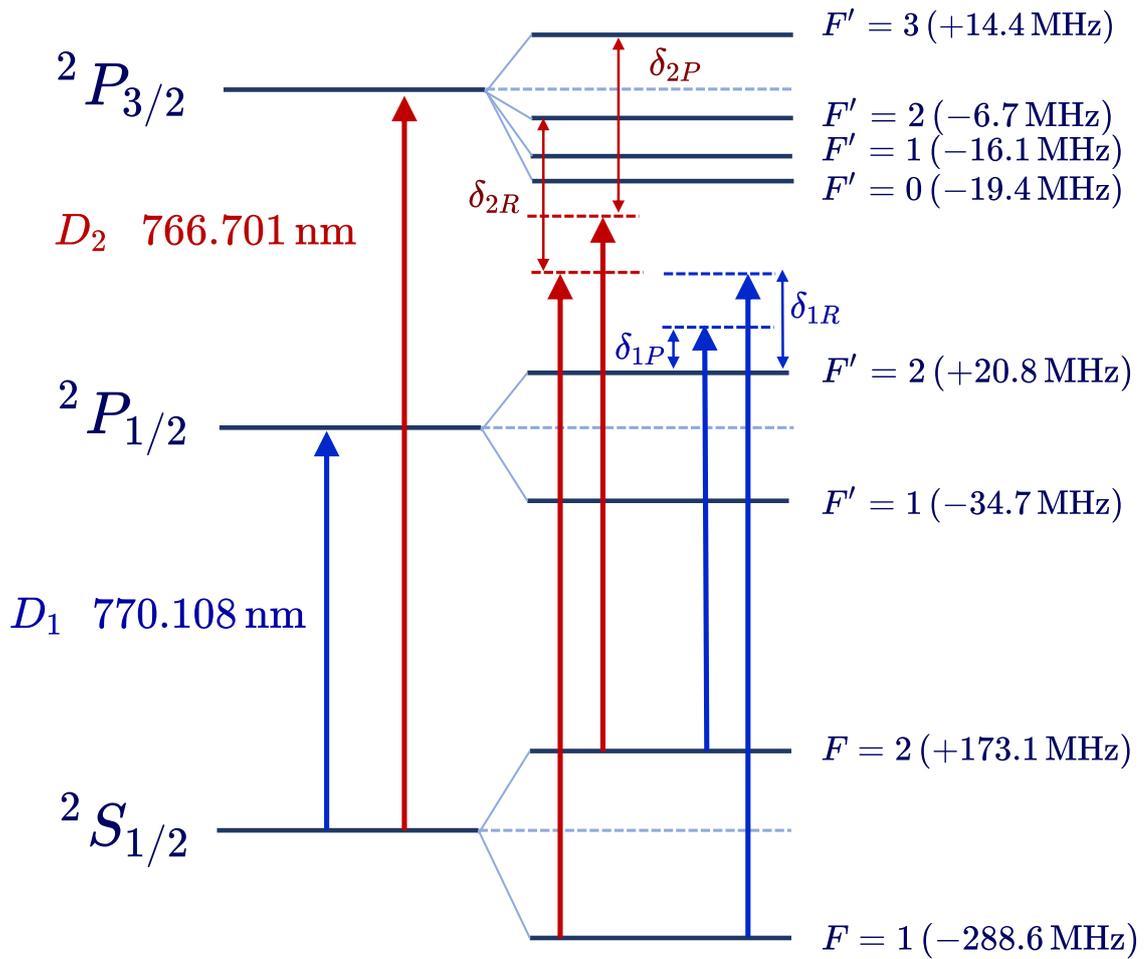


FIGURE 4.1 – Niveaux d'énergie du potassium 39. Les transitions de la ligne D2 sont représentées en rouge, δ_{2R} et δ_{2P} sont les désaccords respectivement du faisceau repompeur et du principal. En bleu, les transitions de la ligne D1, δ_{1R} et δ_{1P} sont les désaccords associés.

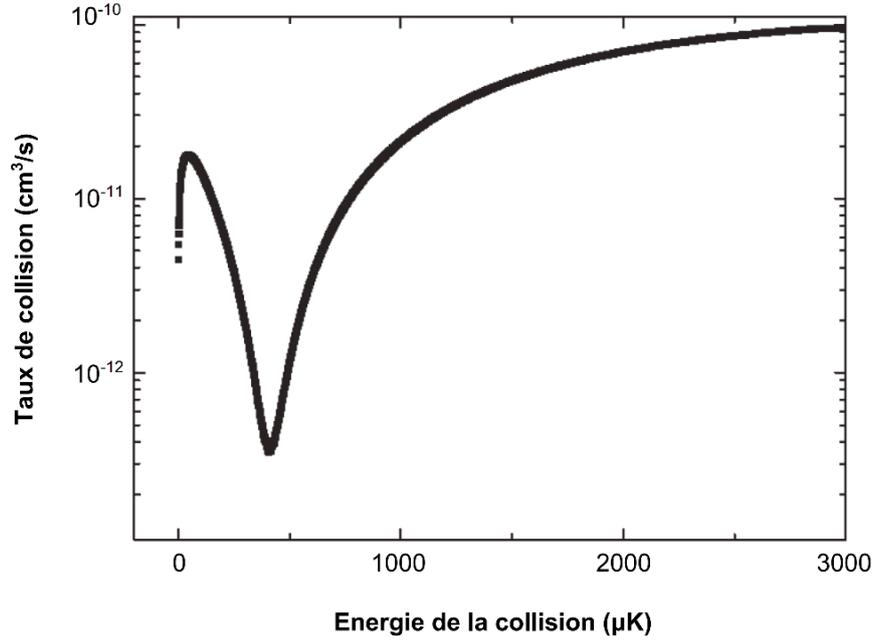


FIGURE 4.2 – Taux de collisions élastiques pour le potassium 39 en fonction de l'énergie de collision pour des atomes dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ [113].

Minimum de Ramsauer

De plus, le développement à basses énergies du déphasage en onde- s $\delta_0(k)$ en puissance de k s'écrit :

$$\tan(\delta_0) \sim -ka - \frac{1}{2}r_e a^2 k^3 \quad (4.3)$$

on définit r_e comme la portée effective du potentiel. On remarque que lorsque la longueur de diffusion a est négative, il existe un k donné et donc une énergie, pour lequel le taux de collision est minimal, appelé minimum de Ramsauer [112]. Dans le cas du ^{39}K , ce minimum est atteint vers une température de $400 \mu\text{K}$ (Voir figure 4.2).

Une technique pour accroître le taux de collision du ^{39}K , aurait pu être l'augmentation de la densité en augmentant le confinement du piège dipolaire. En augmentant le confinement, on augmente la température du gaz. Expérimentalement, la température atteindra plusieurs centaines de μK . On en déduit qu'en augmentant la densité, nous pensions augmenter le taux de collisions, mais en réalité, nous nous rapprochons du minimum de Ramsauer. Afin de contourner le problème, il est possible de changer la longueur de diffusion *via* une résonance de Feshbach.

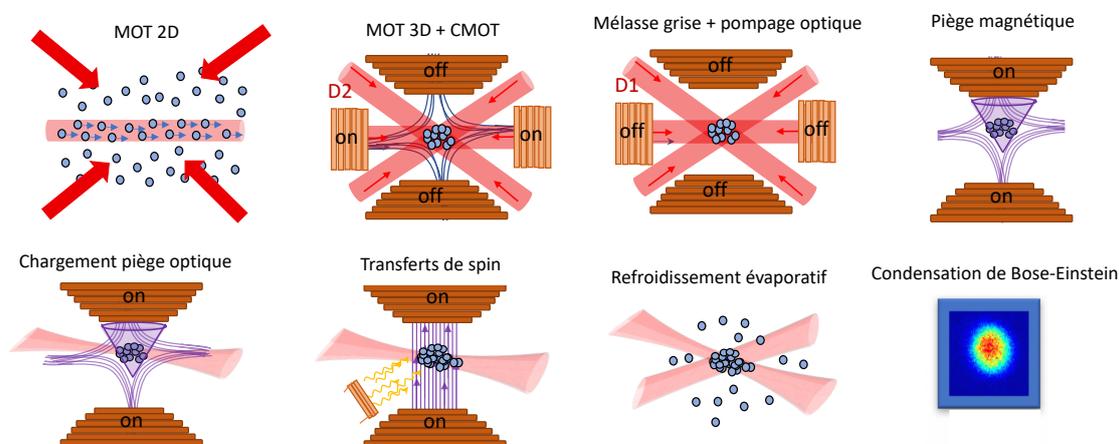


FIGURE 4.3 – Schéma simplifié de la séquence expérimentale permettant l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein de ^{39}K en 7 secondes. Les bobines sur l'axe verticale permettent de réaliser le piégeage magnétique et le champ Feshbach. Les bobines sur l'axe horizontal sont utilisées pour le piège magnéto-optique. Après le chargement du piège optique, la configuration des bobines passe de quadropôle à dipôle (Voir partie 4.2.3). À la fin de la séquence, on utilise de l'imagerie par fluorescence.

4.2 Description de l'expérience

Une vue d'ensemble de la séquence expérimentale est présentée en figure 4.3. On présente ici les étapes clef afin d'obtenir un condensat de Bose-Einstein de potassium 39 toutes les 7 secondes. Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la machine expérimentale et nous verrons les différentes étapes. Une description plus détaillée peut être trouvée dans la thèse de G. Berthet [48].

4.2.1 La chambre à vide

Les cellules en verre

La chambre à vide est présentée en figure 4.4. Les cellules en verre sont fabriquées à partir de *Shott Borofloat 33* par l'entreprise ColdQuanta. Le parallélisme des faces est assuré avec une précision de $30''$. Chaque face est spécifiée à $\lambda/2$ RMS avec une rugosité maximale de 2Å RMS et un traitement anti-reflet interne et externe a été appliqué. Les spécificités en réflectivité du verre sont détaillées dans la thèse de G. Berthet [48]. Un schéma en figure 4.5 montre les dimensions de la cellule en verre, et également la configuration géométrique des pièges dipolaires nommés FORT (pour *Far Off Resonance Trap*), que nous utilisons dans l'expérience. L'utilisation de cellule en verre dans l'expérience, permet d'approcher au plus près des atomes

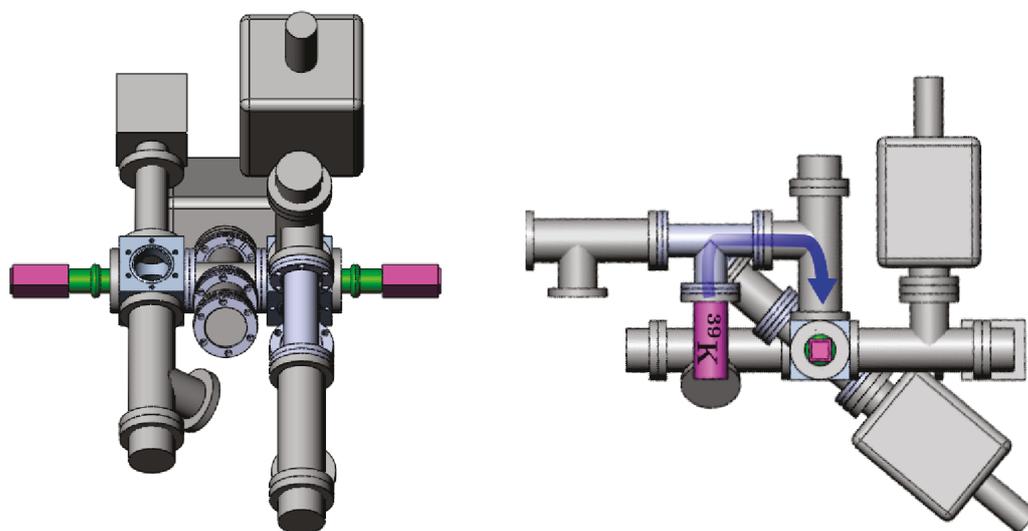


FIGURE 4.4 – Schéma réalisé sur Solidworks de la chambre à vide. À gauche, vue de dessus de l'expérience. Les cellules en verre (en rose) sont placées à chaque extrémité de l'enceinte métallique, la cellule de gauche est la chambre de science, celle de droite est la chambre de collection utilisée pour le MOT 2D. À droite, vue de côté de l'expérience. La source de potassium est placée dans un four (en rose). Le chauffage permet de faire migrer les atomes de ^{39}K dans la chambre de collection.

les bobines de champ magnétique générant le champ Feshbach, tout en évitant des effets de courants induits comme les courants de Foucault. En effet, on verra dans la suite que, par l'utilisation de résonances de Feshbach, on souhaite une très bonne stabilité magnétique. Les cellules permettent également un accès optique élevé en comparaison à une chambre de science métallique.

L'enceinte métallique

L'enceinte métallique est constituée d'acier inoxydable 316, un alliage fer-chrome-nickel à faible teneur de carbone ($< 0.1\%$) amagnétique. Il est important dans notre expérience d'avoir une enceinte métallique amagnétique, cela permet d'éviter une magnétisation de la chambre qui va perturber l'expérience et sa reproductibilité. Les atomes de potassium sont initialement dans un échantillon solide placé dans un four (en rose sur la figure) chauffé à 150°C . Les atomes migrent ensuite vers une cellule en verre servant de chambre de collection.

Lors d'une expérience d'atomes froids, il est nécessaire de travailler avec un ultra-vide stable de l'ordre de 10^{-11} mbar. Cependant, une collecte efficace d'atomes impose de travailler sous pression de vapeur saturante ($\sim 10^{-8}$ mbar) dans la chambre de collection. Afin de conserver la pression nécessaire dans chacune des deux chambres,

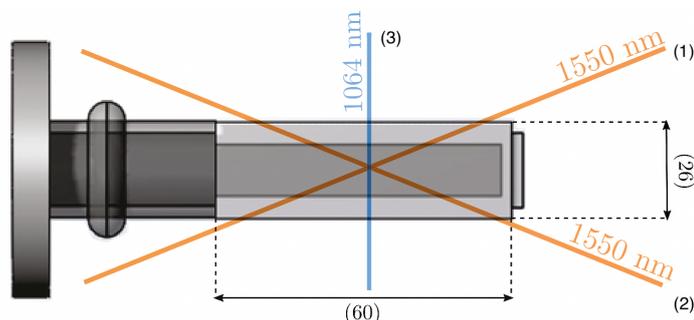


FIGURE 4.5 – Schéma de la cellule en verre avec les dimension en mm (Vue de dessus). La géométrie des pièges dipolaires utilisés dans l'expérience est représentée. Le piège optique initial est (1) nommé FORT1. Le (2) est le FORT2. Le piège final (3) est nommé le FORT1D.

un pompage différentiel est implémenté.

4.2.2 Le système laser

Production de la lumière D2 (767 nm)

Afin de produire la lumière pour la transition atomique D2, on utilise une diode fibrée DFB (Fitel) à 1534 nm, amplifié via un amplificateur (Manlight) fibré dopé à l'erbium de 2 W, qui est couplé à deux sorties et asservie en fréquence via une cellule d'absorption saturée (l'asservissement se fait sur le courant de la diode). On obtient deux faisceaux d'environ 600 mW à 1534 nm. Deux doubleurs de fréquences (NTT Optoelectronics) permettent l'obtention d'un faisceau principal et d'un faisceau repompeur de 100 mW à 767 nm. Les doubleurs sont asservis en température dans le but de vérifier l'accord de phase. Des modulateurs acousto-optiques (AOM) nous permettent de contrôler la puissance et la fréquence de la lumière. Les faisceaux sont ensuite recombinaés dans la même fibre optique, cela nous permet d'avoir les deux fréquences (du principal et du repompeur) dans le même mode pour la suite. En sortie de fibre, le faisceau est séparé en deux de façon à avoir deux lignes lasers, la ligne D2 MOT3D et la ligne D2 MOT2D. Chaque faisceau est injecté dans un amplificateur optique MOPA (pour *master oscillator power amplifier*) fournissant chacun environ 1 W de puissance laser. Chaque ligne possède un AOM servant d'interrupteur rapide et permettant le contrôle de la puissance.

Production de la lumière D1 (770 nm)

Une diode fibrée EMCORE, asservie en fréquence à l'aide d'une cellule d'absorption saturée délivre un faisceau à 1540 nm. Ce dernier est injecté dans un amplificateur KEOPSYS de 1 W. Un doubleur de fréquence fibré asservie en température

(NTT Optoelectronics) produit la lumière laser à 770 nm. Un amplificateur optique MOPA permet d'atteindre environ 1 W de puissance avant de traverser un modulateur électro-optique (EOM). Cet EOM génère deux bandes latérales dans le spectre du laser dont nous contrôlons à la fois la puissance et la fréquence. La première bande sera utilisée pour le faisceau repompeur et la deuxième n'aura aucune utilité. Le faisceau principal sera quant à lui formé par le faisceau initial. Un AOM permet la coupure rapide du faisceau servant ainsi d'interrupteur. La lumière D1 rejoint ensuite le faisceau D2 MOT 3D où ils sont recombinaés dans la même fibre Schäfter-Kirchoff grâce à un filtre interférentiel de 1 nm de bande passante.

4.2.3 Les bobines magnétiques

Nous avons constaté que le potassium possède une grande quantité de résonances de Feshbach accessibles expérimentalement de 0 G à 500 G. La production de tels champs magnétiques nécessite l'utilisation de forts courants électriques. Il est impératif d'être capable d'avoir un champ magnétique homogène et stable sur toute l'extension du nuage atomique. Afin de les générer, on utilise deux bobines magnétiques placées de part et d'autre de la cellule en verre correspondant à la chambre de science. Si on place les bobines en configuration Helmholtz/dipôle, alors nous obtenons un champ magnétique uniforme au centre des deux bobines dont les lignes de champ sont parallèles à l'axe de révolution. En configuration anti-Helmholtz/quadrupole, les bobines forment un gradient magnétique, donnant ainsi la possibilité d'utiliser un piège quadrupolaire magnétique.

Les bobines utilisées expérimentalement sont illustrées en figure 4.6, chaque bobine est refroidie par un circuit d'eau. Nous avons deux paires de bobines, les « **grosses bobines** » se situent proche de la cellule, et les « **petites bobines** », selon le même axe vertical, sont celles les plus éloignées de la cellule, les deux paires peuvent être utilisées à la fois en configuration Helmholtz et anti-Helmholtz. Les premières peuvent être à la fois utilisées pour produire le champ Feshbach ou le piège quadrupolaire magnétique. Les petites bobines sont principalement utilisées en configuration dipôle afin de réaliser des biais et de compenser la courbure du champ produit par les grosses bobines dans la même configuration.

Les petites bobines

Le courant est généré grâce à une alimentation de puissance *Delta Elektronika SM15-100* de 1500 W. Le temps de montée à pleine puissance est de 6 ms. La commutation entre les deux configurations (dipôle/quadrupôle) se fait à l'aide de switch (relais) mécaniques. La commutation se fait en 100 ms après coupure du courant électrique. En configuration quadrupôle et à 100 A, il est possible d'atteindre un gradient dans l'axe fort de 26 G/cm. En configuration dipôle, la calibration du champ magnétique en fonction du courant électrique donne :

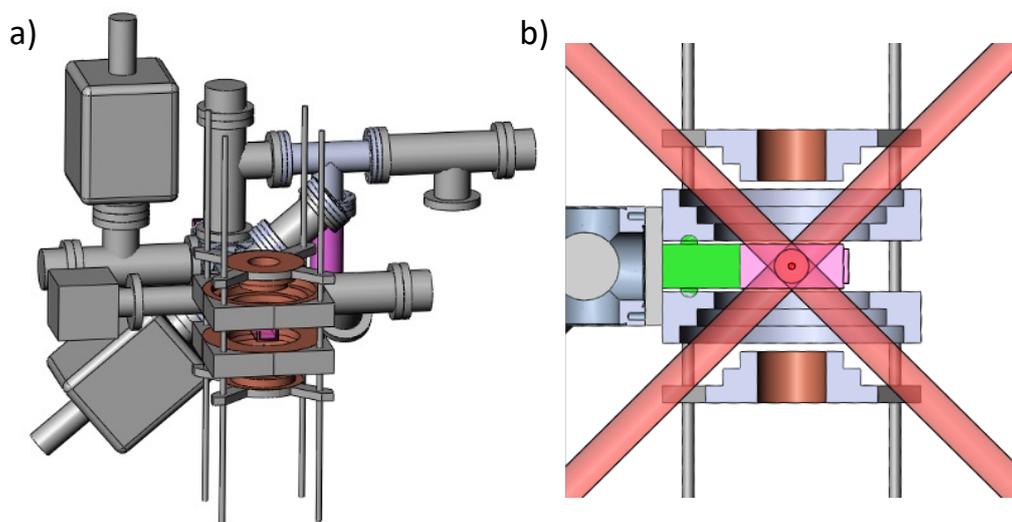


FIGURE 4.6 – a) Schéma Solidworks de la chambre de science entourée des bobines coniques permettant de former le champ Feshbach. b) Les faisceaux du MOT 3D sont représentés en rouge. La troisième paire de faisceaux est perpendiculaire au plan de la feuille

$$\left(\frac{dB}{dI}\right) = 0.70(4) \text{ G/A} \quad (4.4)$$

Les grosses bobines

Les grosses bobines sont alimentées par un générateur *Delta Elektronika SM18-220* (18 V – 220 A) de puissance 3300 W. Cette alimentation est capable de monter de 0 V à 18 V en 5 ms. Sa stabilité relative en commande courant (CC) est de 9×10^{-5} . Le gradient de champ magnétique atteignable à 200 A dans l'axe fort est de 127 G/cm. En configuration dipôle, la calibration du champ en fonction du courant donne :

$$\left(\frac{dB}{dI}\right) = 3.80(4) \text{ G/A} \quad (4.5)$$

Pendant une séquence expérimentale, nous avons besoin de passer de la configuration dipôle à quadrupôle rapidement, on a donc besoin d'inverser le sens du courant dans l'une des deux bobines. La commutation est réalisée au moyen de transistor de puissance IGBT (transistor bipolaire à grille isolée). Le figure 4.7 illustre le switch utilisé sur l'expérience. De plus, le switch sert aussi d'interrupteur. En effet, il nous permet de couper très rapidement (~ 0.3 ms) le courant dans les bobines pour être capable d'imager les atomes¹.

1. Aux champs magnétiques que nous utilisons, les lasers ne sont plus à résonance.

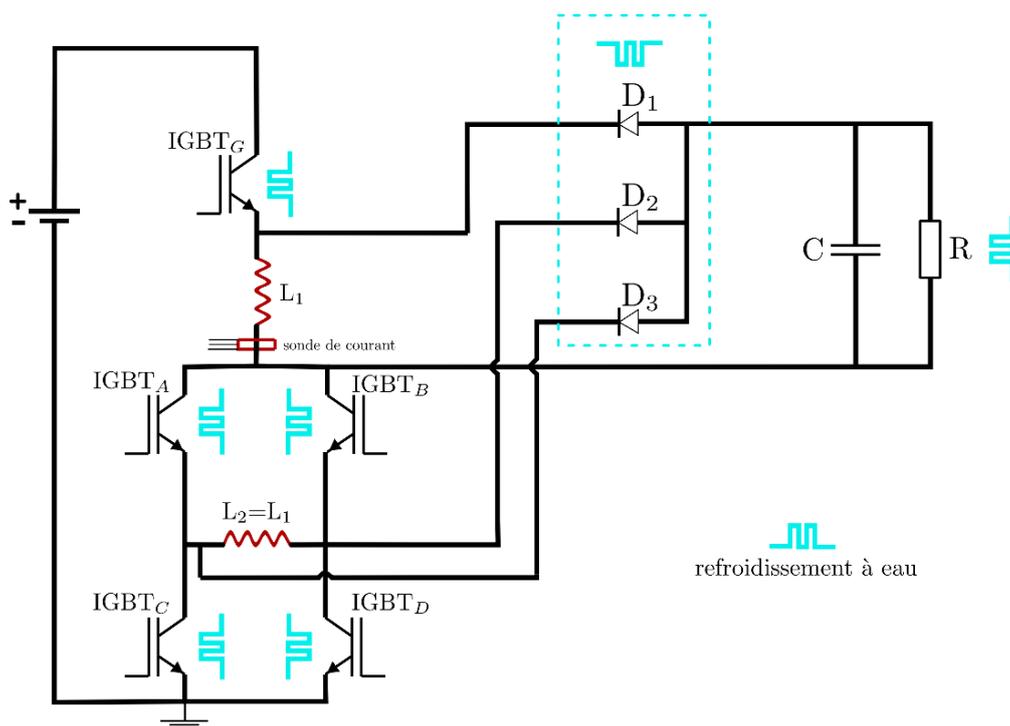


FIGURE 4.7 – Schéma électrique du switch (fabriqué par F. Moron) permettant la commutation de la configuration dipôle à quadripôle. Les grosses bobines sont représentées en rouge par L_1 et L_2 . Le courant dans L_2 peut être inversé en utilisant les IGBT A et D ou B et C en mode passant. Le circuit de décharge est composé d'un condensateur $C = 360 \mu\text{F}$ (800 V) et d'une résistance $R = 470 \Omega$ (50 W). Les composants internes au switch sont refroidis par un circuit d'eau indépendant.

4.2.4 Amélioration de la stabilité du champ magnétique

Les expériences que nous souhaitons réaliser demandent une grande stabilité du champ magnétique, de l'ordre du mG. À mon arrivée sur l'expérience², les cartes analogiques utilisées dans le contrôle de l'expérience sont des *NI-PXI-6723*, 13 bits, 32 voies, ($-10\text{ V} : +10\text{ V}$), 1 bit servant au signe. Le bruit RMS est de $30\ \mu\text{V}$ sur 1 ms. De plus, nous avons observé la présence de glitch (saut de tension dû à la mise à jour de la commande analogique) de l'ordre de 80 mV. La précision attendue est donc de $10/2^{12}\text{ V} = 2\text{ mV}$. Expérimentalement, cela se traduit sur les champs magnétiques par :

- Grosses bobines : $750/2^{12}\text{ G} \approx 180\text{ mG}$ de précision. Le bruit de la commande engendre une stabilité RMS de 2.25 mG.
- Petites bobines : $70/2^{12}\text{ G} \approx 17\text{ mG}$ de précision. Le bruit de la commande engendre une stabilité RMS de 0.21 mG.

De plus, nous avons observé des fluctuations shot-shot de l'ordre de 0.5 mV sur la commande. Dans cet état, la précision est insuffisante et la stabilité relative mesurée est de l'ordre de 5×10^{-4} pour le champ produit par les grosses bobines.

Changement de carte analogique

Une première amélioration effectuée a été de changer de carte analogique. Nous avons opté pour une carte *NI-PXI-6738*, 16 bits, 32 voies, avec un bruit RMS de $30\ \mu\text{V}$ sur 1 ms, nous n'avons pas observé de glitch pour cette carte. Nous n'avons pas observé de fluctuations shot-shot (à chaque itération) de la commande. La précision sur la commande que nous avons :

- Grosses bobines : $750/2^{15}\text{ G} \approx 22\text{ mG}$ de précision. Le bruit de la commande engendre une stabilité RMS de 2.25 mG.
- Petites bobines : $70/2^{15}\text{ G} \approx 2\text{ mG}$ de précision. Le bruit de la commande engendre une stabilité RMS de 0.21 mG.

Ajout d'une alimentation de courant en parallèle

Afin d'augmenter la stabilité du champ magnétique du champ Feshbach, nous avons mis en place un nouveau générateur de courant *Delta Elektronika SM70-AR-24* (35 V – 24 A) avec un intervalle de courant plus restreint augmentant ainsi

2. Le séquenceur pour le contrôle de l'expérience utilise un ordinateur National Instrument *NI PXIe-1078*, sur lequel on connecte des cartes analogiques et digitales. La mise en réseau des cartes se fait par le logiciel **Atticus** et le séquençage via **Cicero Word Generator** [114]

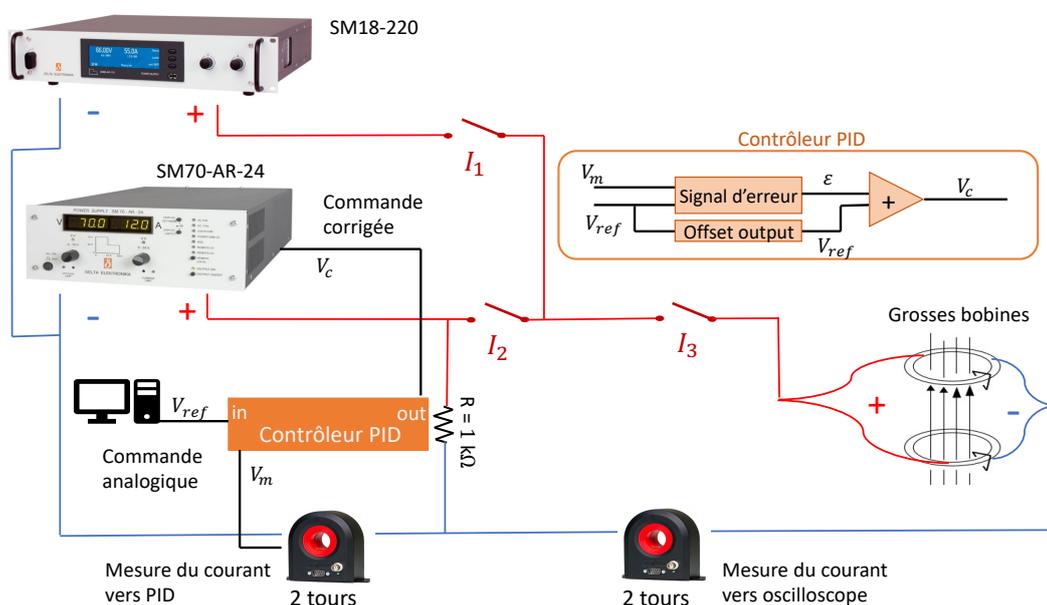


FIGURE 4.8 – Schéma de la boucle d'asservissement du courant de l'alimentation SM70-AR-24 pour la production du champ Feshbach. Le signal est amplifié par l'augmentation du nombre de tours au niveau des transducteurs de courant. L'encadré orange schématise grossièrement le contrôleur PID. V_m est la valeur mesurée, V_{ref} est la valeur de référence (provenant de l'ordinateur), ϵ est le signal d'erreur multiplié par un gain et V_c est le signal corrigé allant vers l'alimentation de courant. L'alimentation de courant SM18-220 est uniquement stabilisée via sa boucle d'asservissement interne. I_1 et I_2 correspondent respectivement au relais mécanique permettant le changement d'alimentation de courant et I_3 correspond au switch IGBT.

la stabilité de champ. Cette alimentation est en parallèle de la *Delta Elektronika SM18-220* (voir figure 4.8), nous utilisons un relais mécanique rapide permettant de passer de l'une à l'autre pendant la séquence expérimentale en une dizaine de ms, le schéma est présenté en Annexe A. Le changement est effectué juste après le chargement du premier piège dipolaire. Le champ magnétique atteignable avec cette alimentation est d'environ 90 G, la stabilité relative attendue en CC est de 9×10^{-5} . Avec cette alimentation, la précision attendue sur la commande est de 2.7 mG. Le bruit engendré par les fluctuations de la commande est d'environ 0.27 mG.

Asservissement du courant des grosses bobines

En première approche, les courants étaient stabilisés *via* la boucle d'asservissement interne aux alimentations de puissance. Nous avons implémenté, à la fois sur les petites et les grosses bobines, une boucle d'asservissement externe. La figure 4.8

représente le schéma de la boucle d'asservissement des grosses bobines. Le courant délivré par l'alimentation *Delta Elektronika SM70-AR-24* est mesuré par un transducteur de courant de haute précision *Danisense DS200UB*. Le signal est ensuite envoyé dans le contrôleur PID où il est comparé avec la valeur de référence provenant de la commande analogique. Dans notre PID, nous utilisons uniquement le proportionnel. En effet, avec l'intégrateur, le courant prend trop de temps à atteindre la valeur de référence. Nous avons donc connecté l'entrée de référence et la sortie « offset output » pour assurer la valeur DC. On a mis en parallèle des bobines et après le relais mécanique, une résistance de 1 k Ω , ceci nous permet d'asservir en permanence l'alimentation, y compris lorsque le switch est ouvert. Cela sert aussi de circuit de décharge après la coupure rapide des champs magnétiques et ainsi d'éviter de garder chargées les capacités internes de l'alimentation, avant une nouvelle séquence expérimentale³. Un deuxième transducteur de courant, nous permet la lecture du courant dans les bobines. Il est important d'avoir une lecture indépendante de la boucle d'asservissement afin de détecter le vrai bruit du courant.

Avant la boucle de l'asservissement, pour un champ magnétique de 39 G, nous avons obtenu des fluctuations de l'ordre de 17 mG (largeur à mi-hauteur) sur 1 ms d'intégration. Grâce à l'asservissement, nous obtenons un bruit de l'ordre de 1.4 mG (largeur à mi-hauteur) sur 1 ms d'intégration. Le spectre de bruit du champ magnétique produit par les bobines est composé d'un bruit de fond à basses fréquences avec des pics à 50 Hz et aux autres harmoniques. Il y a également un bruit de fond à des fréquences jusqu'à quelques kHz. Les bobines magnétiques se comportent comme un filtre passe-bas et les fréquences au-delà de 10 kHz sont éliminées. Finalement, nous obtenons une stabilité relative de l'ordre de 3×10^{-5} sur le champ magnétique.

Asservissement du courant des petites bobines

L'asservissement des petites bobines est similaire à celui expliqué précédemment pour les grosses bobines. Afin de lire le courant électrique, nous utilisons un transducteur de haute précision *Danisense DS50UB*. Le signal est envoyé dans le PID et comparé à la valeur de référence envoyée par l'ordinateur. Ici nous utilisons à la fois le proportionnel et l'intégrateur. Cette boucle d'asservissement nous permet de diviser nos fluctuations d'un facteur proche de cinq. Nous obtenons une stabilité relative de l'ordre de 1.5×10^{-5} sur le champ magnétique à 49 G.

3. Plusieurs amplificateurs opérationnels ont été détruits dus à des pics de tensions provenant des alimentations de courant lors des coupures rapides. Nous avons opto-couplé la sortie du PID, évitant ainsi des grandes différences de tensions entre l'entrée et la sortie.

4.2.5 Refroidissement laser

Le piège magnéto-optique 2D (MOT 2D)

Le MOT 2D a lieu dans la chambre de collection. Le but de cette étape est de créer un jet atomique collimaté suffisamment froid pour pouvoir être capturé par un piège magnéto-optique 3D (MOT 3D). Comme son nom l'indique, un MOT 2D est constitué de deux paires de faisceaux contra-propageant adressant la transition D2 et polarisés respectivement σ_+ et σ_- . Le champ magnétique quadrupolaire 2D est créé par deux bobines magnétiques en configuration anti-Helmholtz. Ces quatre faisceaux vont permettre le refroidissement des atomes selon deux directions de l'espace. Un dernier faisceau appelé « push », aligné selon l'axe longitudinal, pousse les atomes refroidis de la chambre de collection vers la chambre de science où ils sont capturés par le MOT 3D. Des bobines magnétiques de compensation permettent de changer le champ magnétique ressenti par les atomes afin de les guider. On obtient donc un jet atomique collimaté avec une vitesse de l'ordre de 35 m/s suffisamment faible pour être capturé par le MOT 3D.

Les paramètres expérimentaux optimaux sont :

- $\delta_{2P} = -7.2 \Gamma$ et $\delta_{2R} = -3.1 \Gamma$.
- $I = 37 \text{ mW/cm}^2$ par faisceau et $I_{2P}/I_{2R} = 1$.
- Le gradient de champ magnétique est de l'ordre de 10 G/cm.

Le piège magnéto-optique 3D (MOT 3D)

Le MOT 3D est constitué de trois paires de faisceaux contra-propageant dans les trois dimensions de l'espace. La figure 4.6 (b) montre un schéma de la géométrie des faisceaux pour former le MOT 3D. Le gradient de champ magnétique est produit par deux bobines magnétiques en configuration anti-Helmholtz placées dans l'axe perpendiculaire à la figure. Sur la figure, les deux sets de bobines magnétique correspondent aux grosses et petites bobines magnétiques discutés précédemment. En vue de leurs proximités avec la cellule en verre, les bobines ont été conçues coniques de manière à ne pas entraver le passage des faisceaux MOT 3D. Le MOT 3D est chargé en permanence. C'est-à-dire qu'il y a un flux atomique provenant du MOT 2D en continu.

Les paramètres expérimentaux pour le MOT 3D sont les suivants :

- $\delta_{2P} = -7.5 \Gamma$ et $\delta_{2R} = -4.2 \Gamma$.
- On dispose d'une puissance par faisceau de 32 mW, soit d'une intensité $I = 25 \text{ mW/cm}^2$ par faisceau et $I_{2P}/I_{2R} = 1$.
- Le gradient de champ magnétique est de l'ordre de 12 G/cm.

Expérimentalement, les six faisceaux MOT 3D sont composés à la fois des lasers

issus de la ligne D1 et D2. Les deux lignes lasers ont été injecté dans la même fibre initiale qui est couplée à un Schäfter-Kirchoff permettant l'obtention des six faisceaux MOT 3D. La présence de la D1 n'est pas nécessaire au refroidissement des atomes, mais augmente le nombre d'atomes capturé. En effet, il y a une compétition entre l'éclatement du nuage dû à la lumière de la D1 à résonance et la force de rappel due à la lumière D2. Cette compétition va avoir tendance à diminuer la densité du nuage, réduisant ainsi les pertes assistées par la lumière. Cette configuration nous permet d'obtenir $\sim 2 \times 10^9$ atomes dans le MOT 3D pour une température de $2 - 3$ mK en début de séquence expérimentale.

4.2.6 MOT comprimé et mélasse grise

Dans cette sous-partie, nous parlerons succinctement des étapes de MOT comprimé (CMOT) et de mélasse grise [115]. Une étude détaillée et une explication claire peuvent être trouvées dans les thèses de G. Salomon [110] et de L. Fouché [111].

CMOT

La densité d'un MOT est limitée par les processus de collisions assistées par la lumière et par les processus de diffusions multiples de la lumière qui engendrent une force répulsive entre atomes réduisant la densité. Le but de cette étape est l'augmentation de la densité atomique et le refroidissement des atomes, afin d'augmenter l'efficacité de la mélasse grise, décrite prochainement. L'idée est d'éteindre le faisceau principal D2, d'augmenter le désaccord du repompeur D2 et d'accroître le gradient de champ magnétique. Les atomes sont donc pompés dans un état peu couplé avec la lumière et diffusent ainsi moins de photons. Le repompeur de la D2 permet de conserver une transition piégeante. Le laser D1 assure un refroidissement Sisyphé au centre du nuage, au niveau du zéro de champ magnétique. Expérimentalement, les désaccords utilisés sont les suivants :

$$\delta_{2R} = -2\Gamma, \quad \delta_{1P} = 3.5\Gamma \quad (4.6)$$

On obtient une température de $200 \mu\text{K}$ en 12 ms. La taille du nuage est de l'ordre de 0.5 mm. On observe une augmentation de la densité d'un facteur dix par rapport au MOT.

Mélasse grise

La mélasse grise combine deux effets, un piégeage de population sélectif en vitesse (VSCPT) [116] et du refroidissement Sisyphé [117]. Les atomes sont pompés optiquement dans un état noir (état non-couplé à la lumière). Un couplage motionnel entre l'état noir et l'état brillant (état couplé avec la lumière) existe. Ainsi, l'atome dans l'état noir avec une vitesse non nul va repartir dans l'état brillant, gravir de nouveau les collines de potentiel, avant d'être pompé de nouveau dans l'état noir. Ce

mécanisme permet d'atteindre des températures sub-Doppler. Expérimentalement on utilise les faisceaux principaux et repompeurs de la D1. Les désaccords utilisés sont les suivant :

$$\delta_{1R} = 3.5 \Gamma, \quad \delta_{1P} = 3.5 \Gamma \quad (4.7)$$

On obtient en 6.5 ms une température de $6 \mu\text{K}$, sans augmentation de la taille.

4.2.7 Du piège magnétique au chargement d'un piège optique

Dans cette partie, nous décrivons rapidement le piège magnétique utilisé comme réservoir pour charger un premier piège optique très confinant, une description approfondie peut être trouvée dans la thèse de G. Berthet [48].

Piégeage magnétique

Le théorème de Wing [118] énonce qu'il n'existe pas de maximum local du module du champ magnétique dans un espace vide de courant électrique. Ainsi, il est seulement possible dans notre cas, de piéger magnétiquement les atomes dans un état quantique « low-field seeker », c'est-à-dire, un état attiré vers les zones de champs faibles. On peut donc piéger les atomes seulement autour d'un minimum de champ magnétique. L'hamiltonien d'un atome, placé dans un champ magnétique B selon l'axe Oz , s'écrit :

$$H = \frac{a_{hf}}{\hbar^2} \mathbf{I} \cdot \mathbf{J} + \frac{\mu_B}{\hbar^2} B (g_J J_z + g_I I_z) \quad (4.8)$$

où a_{hf} est l'énergie de l'état hyperfin, μ_B est le magnéton de Bohr, g_J et g_I sont le facteur de Landé et le rapport gyromagnétique du noyau. Les énergies sont données par la formule de Breit-Rabi (figure 4.9). On nommera les niveaux d'énergie $|F, m_F\rangle$ même à champ fort, par soucis de concision⁴.

L'énergie d'un atome dans l'état interne $|F, m_F\rangle$ dans un champ magnétique faible peut donc s'écrire :

$$E_{F, m_F} = C_F - \mu_{F, m_F} B \quad (4.9)$$

où C_F est une constante dépendant de l'état hyperfin F , μ_{F, m_F} est le moment magnétique associé à l'état $|F, m_F\rangle$. Lorsque μ_{F, m_F} est positif, les atomes vont donc être attirés dans les zones de champ forts. A contrario, lorsque μ_{F, m_F} est négatif alors les atomes vont être attirés dans les zones de champ faibles. D'après la figure 4.9, l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$ vérifie $\mu_{F, m_F} < 0$ à champs quelconques. De plus, il est possible de pomper optiquement l'ensemble des atomes vers cet état quantique.

4. À champ fort, la base des états $|F, m_F\rangle$ n'est plus adaptée. Dans le régime Paschen-Back, il faut utiliser la base des états $|J, m_J, I, m_I\rangle$.

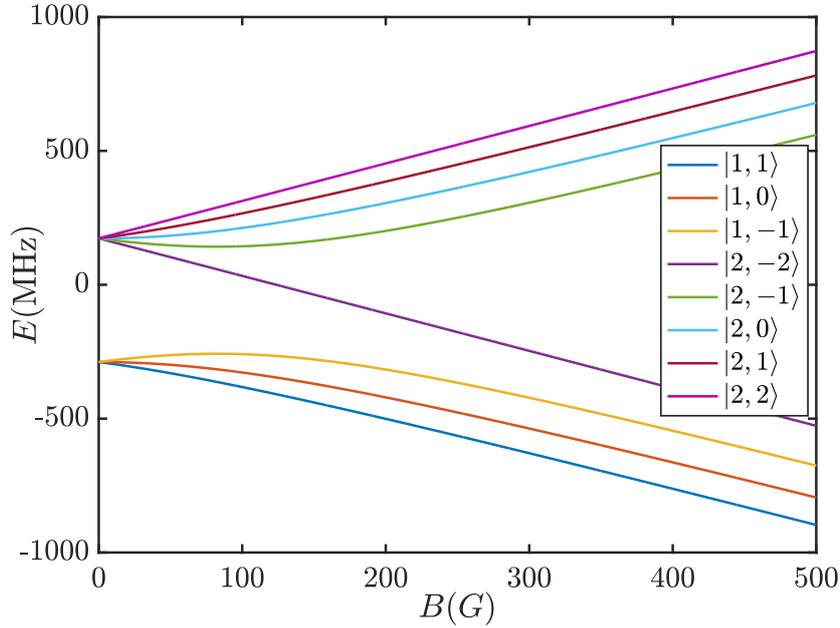


FIGURE 4.9 – Niveaux d'énergies en fonction du champ magnétique pour l'état électronique $^2S_{1/2}$.

Pompage optique sur la transition D1

Après la mélasse optique, les états internes des atomes sont répartis dans chacun des niveaux $|F, m_F\rangle$ du niveaux $^2S_{1/2}$. Comme nous venons de le voir, seul les atomes dans le niveaux $|F = 2, m_F = 2\rangle$ pourront être piégés magnétiquement. Afin d'optimiser le nombre d'atomes, nous faisons un pompage optique sur la transition D1 vers l'état souhaité. Les petites bobines en configuration dipôle créent un champ de 1.6 G, formant l'axe de quantification. La lumière utilisée est polarisée σ_+ et constituée d'un faisceau principal excitant la transition $F = 2 \rightarrow F' = 2$ et d'un faisceau repompeur sur la transition $F = 1 \rightarrow F' = 2$ (Figure 4.10). Finalement, après $100 \mu\text{s}$ de pompage optique, tous les atomes sont dans l'état $|2, 2\rangle$.

Le piège magnétique

Le piège est créé grâce aux grosses bobines en configuration quadrupôle. Le champ s'annule au point $(0,0,0)$ situé sur l'axe de symétrie, entre les deux bobines. Au voisinage de ce point, le module du champ magnétique peut s'écrire :

$$B = b\sqrt{x^2 + 4y^2 + z^2} \quad (4.10)$$

Afin d'atteindre un gradient suffisant, on utilise l'alimentation de courant *Delta Elektronika SM18-220*. Pour un courant de 190 A, on obtient un gradient magnétique

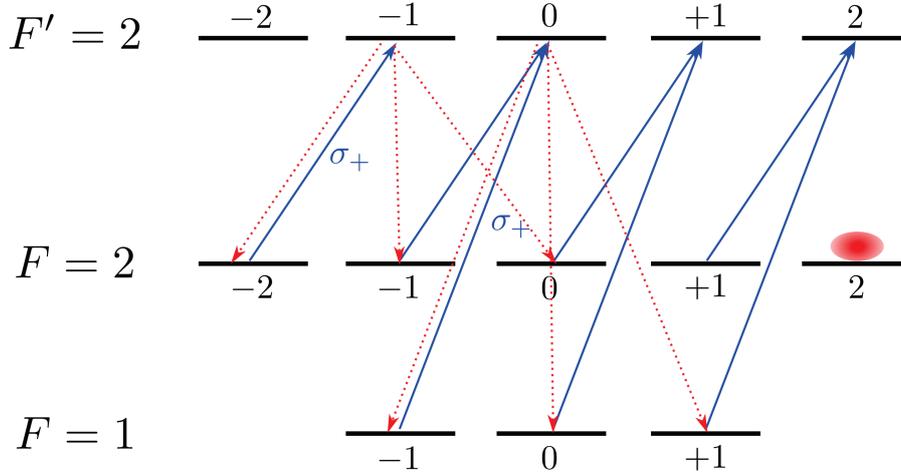


FIGURE 4.10 – Pompage optique sur la transition D1 des atomes vers l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$.

de 120.6 G/cm dans l'axe fort. Le quadrupôle n'est pas aligné avec la mélasse grise, on utilise à la fois deux bobines de compensation et les petites bobines pour changer la position du zéro de champ et l'aligner avec la position de la mélasse. Cette étape nous permet de charger environ $\sim 5.5 \times 10^8$ atomes dans le piège magnétique. La température mesurée est de l'ordre de 270 μ K.

Chargement du piège optique

Comme nous l'avons vu précédemment, le potassium possède un minimum pour sa section efficace, appelé minimum de Ramsauer. À ce stade de l'expérience, nous sommes proches de ce minimum, ce qui conduit à un taux de collisions très faible dans le piège magnétique. Par conséquent, il est impossible d'effectuer un refroidissement évaporatif. Il est nécessaire de charger un premier piège optique dipolaire, nommé FORT1 (pour *Far Off Resonance Trap*), afin de pouvoir exploiter une résonance de Feshbach et d'augmenter le taux de collisions.

Nous utilisons un faisceau provenant d'un laser fibré *IPG* (modèle *ELR-30-1550-LP*) à 1550 nm et de puissance totale 30 W. Le faisceau est aligné près du centre du piège magnétique. La puissance totale accessible après la mise en forme du faisceau au niveau des atomes est de l'ordre de 19 W, et les caractéristiques du piège sont les suivantes :

- Fréquence radiale : $f_r = 11.1$ kHz.
- Fréquence axiale : $f_l = 189$ Hz.
- Profondeur : $|U_{dip}|/k_B = 2.5$ mK.

où k_B est la constante de Boltzmann. Après 700 ms d'accumulation d'atomes dans le piège optique, nous arrivons à charger entre 2 à 5% des atomes du piège magnétique, soit environ 1.5×10^7 atomes. La température mesurée, juste après le chargement, est de $147 \mu\text{K}$. Il est possible à ce stade de l'expérience, de faire un premier refroidissement évaporatif. Pour cela, nous baissions la puissance du piège dipolaire à 8% de sa valeur initiale en 150 ms, selon un profil exponentiel décroissant avec une constante de temps égale à 70 ms. En conclusion, nous obtenons environ 8.5×10^6 atomes dans le piège dipolaire, pour une température de $30 \mu\text{K}$.

4.3 Transferts radiofréquences vers les états Zeeman de $F = 1$.

Dans le but d'atteindre la condensation de Bose-Einstein, il est nécessaire de transférer les atomes dans un des états Zeeman $m_F = -1, 0, +1$ de l'état hyperfin $F = 1$, afin de pouvoir exploiter l'une des résonances de Feshbach. Dans cette partie, nous introduirons les notions nécessaires pour comprendre les transferts radiofréquences. Nous allons voir également le dispositif expérimental permettant de générer le champ radiofréquence et les différents transferts permettant de passer de $|2, 2\rangle$ à $|1, -1\rangle$.

4.3.1 Couplage cohérent entre deux états de spin

Comme nous l'avons vu dans la partie 4.2.7, la différence d'énergie entre les deux niveaux hyperfins et entre les sous-niveaux Zeeman est de l'ordre de la centaine et de la dizaine de MHz respectivement (Voir annexe B). Ces fréquences sont accessibles électroniquement, on a donc la possibilité expérimentale de changer l'état interne des atomes. Considérons deux états internes $|a\rangle$ et $|b\rangle$ d'énergies respectives $-\hbar\omega_0/2$ et $+\hbar\omega_0/2$. Ces deux états quantiques peuvent être soit deux états hyperfins ou deux sous-niveaux Zeeman. Nous décrivons le champ radiofréquence par un champ magnétique classique. On considère un champ homogène oscillant à la pulsation ω , polarisé linéairement selon la direction \mathbf{e}_x , orthogonal à la l'axe de quantification $0z$ [119] :

$$\mathbf{B}(t) = B \cos(\omega t) \mathbf{e}_x \quad (4.11)$$

Le champ radio-fréquence va induire un couplage \hat{V}_c entre les états de la forme :

$$\hat{V}_c = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \mathbf{B}(t) = g\mu_B B \cos(\omega t) \hat{S}_x = \hbar\Omega \cos(\omega t) \hat{S}_x \quad (4.12)$$

où \hat{S}_x correspond à la matrice de Pauli, g est le facteur de Landé associé à la transition, $\Omega = g\mu_B B/\hbar$ est la pulsation de Rabi. L'hamiltonien du système s'écrit donc :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar\omega_0}{2} & \hbar\Omega \cos(\omega t) \\ \hbar\Omega \cos(\omega t) & \frac{\hbar\omega_0}{2} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

Afin de se ramener à un hamiltonien indépendant du temps, on doit passer dans le référentiel tournant [56]. Les coefficients $c_a(t)$ et $c_b(t)$ sont la décomposition du vecteur d'état dans la base non-couplée $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. En appliquant le changement de variables :

$$\begin{cases} c_a(t) &= \tilde{c}_a(t)e^{+i\omega t/2} \\ c_b(t) &= \tilde{c}_b(t)e^{-i\omega t/2} \end{cases}$$

et en l'injectant dans l'équation de Schrödinger, on obtient :

$$\begin{cases} i\dot{\tilde{c}}_a(t) &= \frac{\Omega}{2}(1 + e^{-2i\omega t})\tilde{c}_b(t) - \frac{\delta}{2}\tilde{c}_a(t) \\ i\dot{\tilde{c}}_b(t) &= \frac{\Omega}{2}(1 + e^{+2i\omega t})\tilde{c}_a(t) + \frac{\delta}{2}\tilde{c}_b(t) \end{cases}$$

Les termes hautes fréquences ($e^{\pm 2i\omega t}$) sont de moyennes temporelles nuls, on peut donc les négliger près de résonance. Le nouvel hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -\hbar\delta/2 & \hbar\Omega/2 \\ \hbar\Omega/2 & \hbar\delta/2 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Les états propres de cette hamiltonien sont appelés les **états habillés** et ils s'écrivent :

$$|-\rangle = \sin(\theta)|a\rangle - \cos(\theta)|b\rangle \quad (4.15)$$

$$|+\rangle = \cos(\theta)|a\rangle + \sin(\theta)|b\rangle \quad (4.16)$$

les énergies propres associées sont :

$$E_{\pm} = \pm \frac{\hbar}{2} \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} = \pm \frac{\hbar}{2} \tilde{\Omega} \quad (4.17)$$

θ est l'angle de mélange défini par $\cotan(\theta) = \delta/\Omega$, $\cos(\theta) = \sqrt{(1+P)/2}$, $\sin(\theta) = \sqrt{(1-P)/2}$, où $P = \delta/\tilde{\Omega}$ est la polarisation. En figure 4.11 sont représentées à la fois, l'énergie des états habillés en fonction de δ/Ω (à gauche) et les populations des états non-couplés en fonction du désaccord (à droite). Le dégradé de couleur permet de montrer que les population des états non-couplés $|a\rangle$ (en vert) et $|b\rangle$ (en bleu) changent en fonction du désaccord à la résonance δ . Proche de résonance ($\delta = 0$), les états habillés sont des superpositions quantiques des deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$. À résonance, l'écart en énergie entre l'état $|-\rangle$ et $|+\rangle$ est égale à $\hbar\Omega$. On remarque que, loin de résonance, les états habillés correspondent aux états non-couplés $|a\rangle$ et $|b\rangle$.

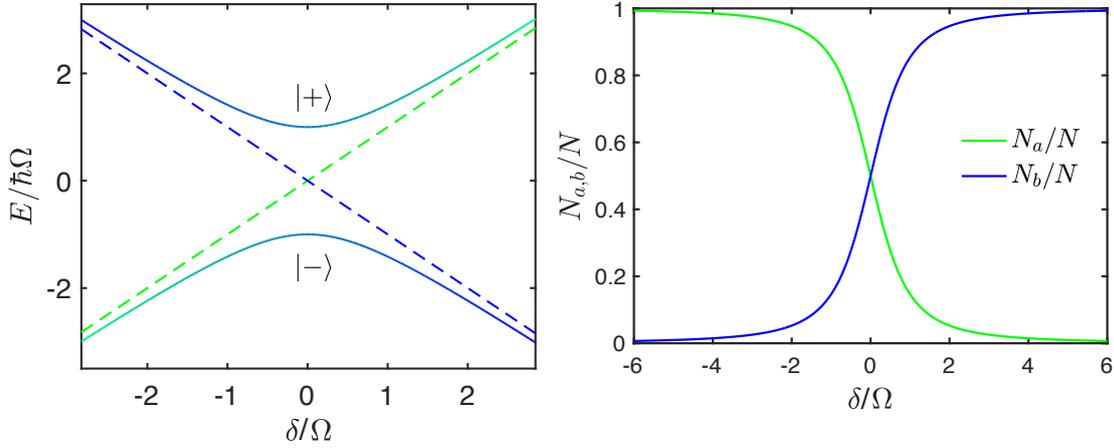


FIGURE 4.11 – À gauche : Énergies des états habillés $|-\rangle$ et $|+\rangle$ en fonction de δ/Ω . Le dégradé de couleur donne la population des états non couplés $|a\rangle$ et $|b\rangle$ pour chaque états habillés. À droite : les populations normalisées des états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ en fonction de δ/Ω pour $|-\rangle$.

Oscillations de Rabi

L'évolution temporelle du système peut être connue *via* la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. En supposant qu'à l'instant $t = 0$, le système est dans l'état $|a\rangle$ et qu'on allume brusquement le champ radiofréquence, on trouve que la probabilité que l'atome se trouve dans l'état excité $|b\rangle$ est [120] :

$$P_b(t) = \frac{\Omega^2}{\delta^2 + \Omega^2} \sin^2\left(\sqrt{\delta^2 + \Omega^2} \frac{t}{2}\right) \quad (4.18)$$

Le résultat est une oscillation de la probabilité de transition vers l'état $|b\rangle$ en fonction du temps appelé **oscillations de Rabi**. La fréquence caractéristique de cette oscillation est la pulsation de Rabi généralisée $\tilde{\Omega}$. En figure 4.12 est tracé la probabilité $P_b(t)$ en fonction du temps (à gauche). Pour $\delta = 0$, la probabilité que le système soit dans l'état $|b\rangle$ est égale à 1 pour $t/\Omega = \pi + [2\pi]$ et sa fréquence d'oscillation est égale à la fréquence de Rabi Ω . De plus, si on s'éloigne de résonance, $P_b(t)$ oscille plus rapidement, mais avec une amplitude plus faible.

Afin de transférer les atomes dans l'état souhaité expérimentalement, il est possible d'appliquer un pulse π ($t/\Omega = \pi$). Cependant, nous avons des fluctuations expérimentales qui vont engendrer des décalages à la fois du désaccord et aussi des changements de la puissance RF. La manière de se débarrasser des fluctuations et de transférer plus efficacement les atomes, est de faire un transfert adiabatique.

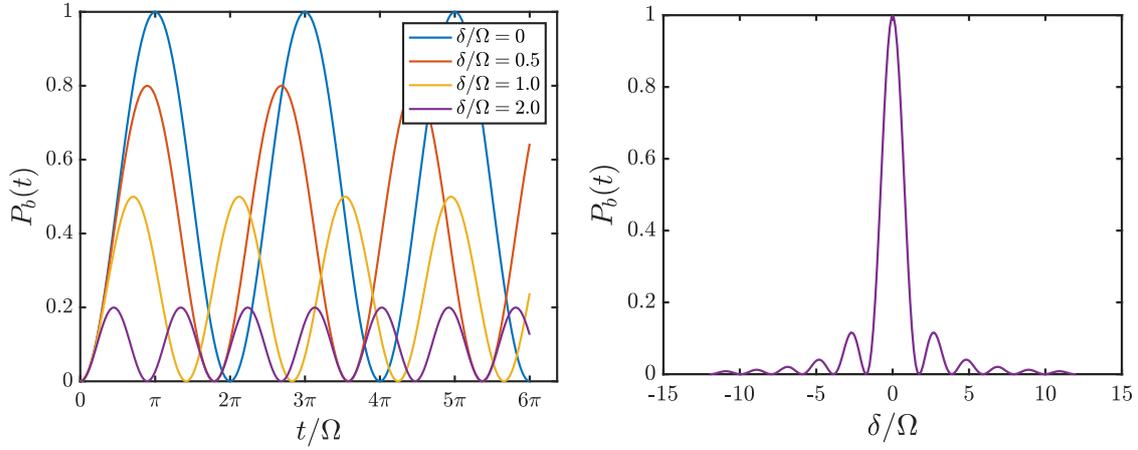


FIGURE 4.12 – À gauche : probabilité $P_b(t)$ que le système soit dans l'état $|b\rangle$ en fonction du temps pour différentes valeurs de δ/Ω . À droite : probabilité $P_b(t)$ que le système soit dans l'état $|b\rangle$ en fonction du désaccord à la résonance δ/Ω pour $t/\Omega = \pi$.

4.3.2 Transfert Adiabatique

Adiabaticité

Comme nous l'avons vu précédemment, les états propres du système {Atome + Champ RF} sont les états habillés $|-\rangle_\theta$ et $|+\rangle_\theta$. Supposons que nous partons de l'état $|\psi(0)\rangle = |-\rangle_\theta$ à $t = 0$ et très loin de résonance ($-\delta \gg \Omega$). L'état $|-\rangle_\theta$ correspond à l'état $|a\rangle$, le champ n'a quasiment aucun effet sur l'atome. Si le paramètre θ ne change pas au cours du temps, l'état du système après un temps t est donné par l'évolution libre que l'on déduit de l'équation de Schrödinger [121] :

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iE_-(\theta)t/\hbar}|\psi(0)\rangle \quad (4.19)$$

L'état reste égale à l'état initial à un facteur de phase près. Supposons maintenant que le paramètre θ varie au cours du temps très lentement (le critère quantitatif de "lentement" sera explicité plus loin). Le théorème adiabatique assure que l'état du système, à l'instant t , est donné approximativement à une phase près, par⁵ :

$$|\psi(t)\rangle \approx |-\rangle_{\theta(t)} \quad (4.20)$$

Autrement dit, le système va rester dans l'état propre associé à l'énergie E_- , bien que l'état n'est plus le même à l'instant t .

5. Pour une étude détaillée sur la condition d'adiabaticité, le lecteur est invité à se référer à [122, 123].

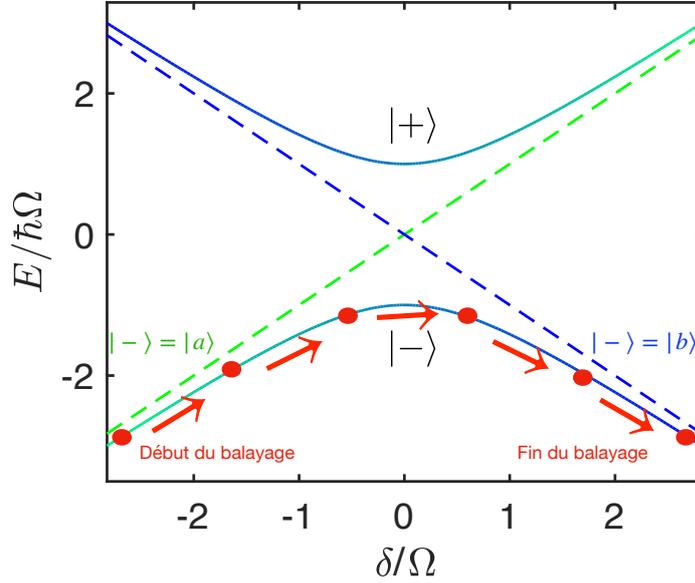


FIGURE 4.13 – Schéma explicatif du transfert adiabatique par balayage de fréquence.

Balayage de fréquence adiabatique

Expérimentalement, il est possible de contrôler l'angle de mélange θ *via* le désaccord δ et la pulsation Rabi Ω (*via* la puissance RF). Le plus simple dans notre cas, est de jouer uniquement sur le désaccord (Voir figure 4.13). Considérons que le système est dans l'état initial $|a\rangle$ à $t = 0$, et que le champ RF est éteint. On allume le champ à l'instant $t = 0^+$ à une fréquence loin de résonance ($-\delta \gg \Omega$), l'état du système devient $|-\rangle$. On change lentement la fréquence du champ RF de telle sorte que $\delta \gg \Omega$, on arrive de l'autre côté de la résonance. À ce désaccord, et également en absence de RF, l'état $|-\rangle$ est égale à l'état non-couplé $|b\rangle$. Après extinction du champ RF, on a donc transféré le système dans l'état $|b\rangle$. La condition d'adiabaticité est donné par [119, 123] :

$$|\dot{\theta}| \ll \sqrt{\delta^2 + \Omega^2} \iff |\dot{\delta}\Omega - \delta\dot{\Omega}| \ll (\delta^2 + \Omega^2)^{3/2}. \quad (4.21)$$

Dans notre cas, où on ne change que le désaccord δ , la condition devient $|\dot{\delta}| \ll \Omega^2$. On remarque donc que le transfert adiabatique par balayage de fréquence est plus efficace que le simple π -pulse. En effet, lorsque la fréquence Rabi est suffisamment grande, par rapport aux variations temporelles de δ et Ω , le transfert n'est pas perturbé et on peut ainsi transférer la totalité des atomes vers l'état souhaité, de manière stable expérimentalement.

4.3.3 Circuit radio-fréquence

Dans les expériences qu'on souhaite réaliser, nous voulons travailler avec un mélange de spin des sous-niveaux Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$, dans le régime proche du collapse, c'est-à-dire vers un champ magnétique autour de 56 G. Nous devons donc condenser les atomes dans l'un des deux états avant la création du mélange. Les deux niveaux présentent chacun une résonance de Feshbach accessible. La résonance se trouve vers 59 G pour $|1, 0\rangle$, et vers 33 G pour $|1, -1\rangle$. Cependant, la condensation dans les deux états n'est pas similaire. En effet, il existe un taux de perte d'atomes par recombinaison à trois corps plus élevé dans l'état $|1, 0\rangle$ [89, 70]. Il est donc plus favorable de condenser les atomes dans l'état $|1, -1\rangle$ avant la formation du mélange.

À ce stade de l'expérience, les atomes sont dans l'état $|2, 2\rangle$. Pour les transférer dans l'état $|1, -1\rangle$, il y a deux possibilités. Nous pouvons d'abord transférer les atomes dans l'état $|2, -2\rangle$ grâce à un transfert adiabatique à travers tout les états Zeeman de $F = 2$, puis avec un transfert final de $|2, -2\rangle$ à $|1, -1\rangle$. En essayant ce premier schéma de transferts, nous avons observé une perte d'atomes importante dans l'état $|2, -2\rangle$ au champ magnétique utilisé (~ 14.3 G). Nous avons donc favorisé le second schéma de transferts qui est le suivant : on réalise un premier transfert de $|2, 2\rangle$ vers $|1, 1\rangle$ à ~ 4.05 G, la fréquence de résonance est 472.41 MHz. Et ensuite, un transfert de $|1, 1\rangle$ vers $|1, -1\rangle$ en passant par l'état $|1, 0\rangle$ à ~ 42.7 G. La fréquence de résonance des transferts sont respectivement 27.3 MHz et 30.9 MHz (Voir annexe B).

Dispositif

Le circuit radiofréquence est présenté en figure 4.14. Le champ RF nécessaire à la transition $|2, 2\rangle \rightarrow |1, 1\rangle$, provient d'un générateur de signal *Anapico Apsin2010HC* (G1 sur la figure). Le générateur *Anapico Apsin2010HC* en G2, nous permet de faire les transferts $|1, 1\rangle \rightarrow |1, 0\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$. Le dernier générateur G3 *Hewlett Packard 8647A*, est utilisé pour la formation du mélange de spin. Chaque générateur radiofréquence est commandé en mode FM (Frequency modulation) par une commande analogique, provenant de la carte *NI-PXI-6738*, cela nous permet de faire des balayages de fréquences de formes arbitraires. Il y a à chaque sortie de générateur, des interrupteurs⁶ contrôlés par un signal TTL. On peut ainsi, lors de la séquence, laisser passer le champ radiofréquence que nous souhaitons. Les signaux RF sont combinés⁷ dans le même câble, qui est connecté à un amplificateur 100 W *ZHL-100W-GANX+*⁸, permettant d'atteindre des fréquences de Rabi de l'ordre de

6. ZX80-DR230-S+ , Minicircuit.

7. ZFSC-2-372-S+ Minicircuit.

8. Il est important de ne pas saturer l'amplificateur en entrée, on a observé la génération de la fréquence double avec une compétition de gain entre les deux fréquences.

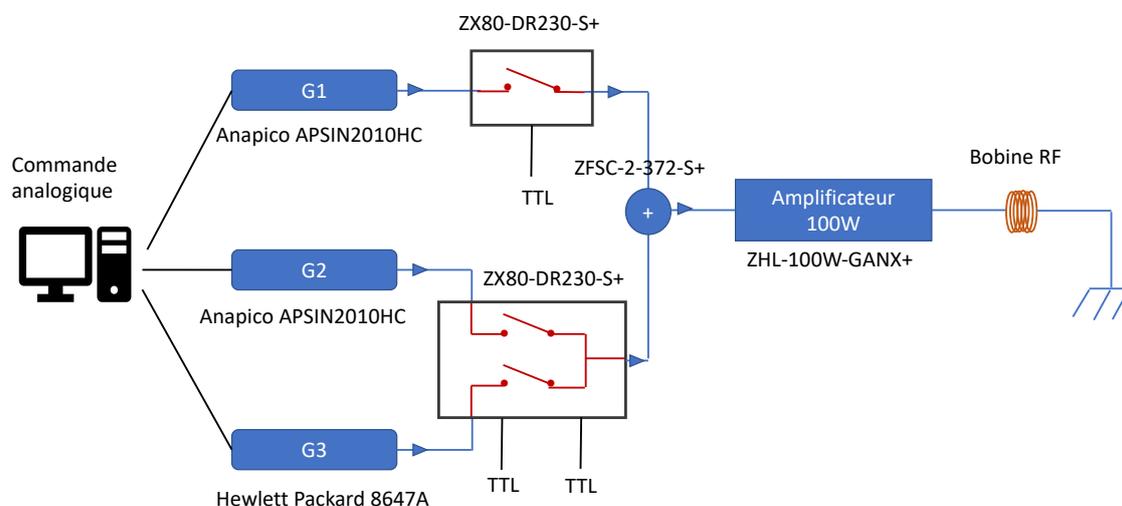


FIGURE 4.14 – Schéma du circuit radiofréquence

plusieurs dizaines de kHz. L'antenne est réalisée en faisant deux spires de diamètre 5 cm avec du fil de cuivre de diamètre 1 mm. Elle est positionnée proche des atomes, à environ 10 cm. Nous n'avons pas cherché à adapter l'impédance du circuit au niveau de l'antenne pour augmenter la puissance rayonnée. En effet, nous voulons éviter de faire un circuit résonant, nous voulons pouvoir utiliser la même antenne sur un grand intervalle de fréquences. Nous avons de plus, déjà des problèmes d'isolations dus à la présence de RF émise dans la pièce aux puissances utilisées.

Problème d'isolation

La salle de l'expérience baigne dans le champ rayonné par l'antenne, dont la longueur d'onde est de l'ordre de plusieurs mètres. Les objets conducteurs comme les câbles, les châssis métalliques des appareils électroniques, dont les tailles sont de l'ordre de la longueur d'onde du champ radiofréquence, se comportent comme des antennes, et vont par conséquent, capter les ondes ambiantes. Les systèmes électroniques sont directement affectés par la présence de RF. Par exemple, les asservissements des fréquences pour les lasers (D1 et D2) se coupent lorsque la puissance du champ RF est trop importante. En addition de ces problèmes, on a observé des changements de tensions sur les commandes analogiques avec l'ajout de bruits supplémentaires. Ces décalages limitent majoritairement la stabilité du champ magnétique. Nous avons vu des décalages du champ magnétique de l'ordre de 30 mG. Nous avons blindé le plus possible les différents éléments, et nous avons également ajouté des filtres passe-bas avec des fréquences de coupure de l'ordre du kHz. Après blindage, nous avons constaté que même si l'effet est fortement réduit au niveau des commandes, après passage dans l'électronique des boîtes PID, et également de celle de l'alimentation de courant des bobines, la valeur du champ magnétique change.

Nous avons identifié, que la présence de champ RF a un effet direct sur la masse des circuits. Il est par conséquent, nécessaire de connecter ensemble les masses des différents appareils et d'éviter des boucles de masses, qui engendre des tensions parasites, et donc des décalages en tension des commandes analogiques. Nous avons enlevé les amplificateurs différentiels à l'entrée du PID, ce qui fixe la masse du circuit électronique, et restreint par conséquent les décalages. Ce genre de problèmes reste généralement délicat à résoudre. Nous avons aussi éloigné les éléments sensibles de l'antenne, réduisant la quantité d'ondes captée, et diminuant par conséquent le décalage en tension des commandes. Nous envisageons également, dans la suite, de les mettre dans une autre pièce.

Calibration et homogénéité du champ magnétique

La calibration précise du champ magnétique, au niveau des atomes, peut se faire grâce aux transferts RF. En effet, la transition d'un état à un autre se fait à une fréquence bien précise, qui dépend du champ magnétique (Voir la figure 4.9 et l'annexe B). De plus, l'homogénéité du champ au niveau des atomes peut aussi être connue. Le gradient magnétique résiduel, dans la direction longitudinale du FORT1D, est détecté par des expériences de temps de vol unidimensionnel. Et, à l'aide de bobines hors de l'axe, nous pouvons appliquer des gradients magnétiques, permettant l'annulation de ce dernier. De plus, les petites bobines étant un peu trop éloignées pour être véritablement en configuration Helmholtz, il est possible d'annuler la courbure du champ au niveau des atomes, en les utilisant en configuration dipôle. Au champ magnétique où nous faisons les expériences de mélange de spin, la courbure est suffisamment faible pour être négligée par rapport à la taille longitudinale du nuage. Il est également possible de sonder précisément l'environnement magnétique des atomes le long du piège final FORT 1D en faisant des oscillations de Ramsey (pour plus de détails voir l'annexe C). Finalement, durant les expériences, et sur toute l'extension du nuage, nous ne voyons pas d'effets provoqués par la présence d'un gradient magnétique résiduel.

Finalement, nous pouvons transférer 95% des atomes⁹ dans l'état $|1, -1\rangle$ en 4 ms.

9. Nous avons observé que le transfert $|1, 0\rangle \rightarrow |1, -1\rangle$ n'était pas parfait. Nous avons identifié la présence d'un décalage lumineux différentiel entre les deux états [124]. Les oscillations des atomes dans le piège, à des fréquences de l'ordre de plusieurs kHz, engendrent donc des fluctuations du désaccord δ à des fréquences proches de $\Omega/2\pi$. Les atomes dans l'état $|1, 0\rangle$ ne sont plus présents après les phases d'évaporation.

4.4 Évaporation dans un piège croisé

Configuration géométrique des pièges dipolaires

Une fois le transfert vers l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ effectué, nous voulons continuer l'évaporation, afin d'atteindre la condensation de Bose-Einstein. La puissance du FORT1 diminuant fortement lors de l'évaporation, son confinement longitudinal devient insuffisant pour piéger les atomes, nous ajoutons donc un deuxième piège dipolaire, nommé FORT2, pour assurer le confinement longitudinal. La figure 4.15 montre un schéma de la configuration géométrique des pièges optiques. Ce dernier est issu du même laser que le FORT1, il provient de l'ordre 0 d'un modulateur acousto-optique, par lequel le FORT1 passe, il permet un contrôle de la puissance, et sert d'interrupteur rapide. Le FORT2 est ensuite mis en forme, la puissance maximale disponible est de 14 W. Les caractéristiques du faisceau, à pleine puissance et au niveau des atomes, sont les suivantes :

- Waist $w = 120 \mu\text{m}$.
- Fréquence radiale $f_{r2} = 278 \text{ Hz}$.
- Fréquence longitudinale $f_{l2} = 0.8 \text{ Hz}$.
- Profondeur : $|U_{dip2}|/k_B = 50 \mu\text{K}$.

Un dernier piège est ajouté dans l'axe des faisceaux MOT horizontaux, nommé FORT1D. Le FORT1D est un faisceau de longueur d'onde 1064 nm, et de puissance maximale 500 mW. Les caractéristiques du faisceau, à pleine puissance et au niveau des atomes, sont les suivantes :

- Waist $w = 44 \mu\text{m}$.
- Fréquence radiale $f_{r1D} = 490 \text{ Hz}$.
- Fréquence longitudinale $f_{l1D} = 2.7 \text{ Hz}$.
- Profondeur : $|U_{dip1D}|/k_B = 22 \mu\text{K}$.

Ce dernier piège est utilisé en fin d'évaporation, lorsque la température des atomes est suffisamment faible. Il donne une plus grande versatilité dans le choix des fréquences de piégeage et permet d'être perpendiculaire aux deux axes d'imagerie. Il est également utilisé comme piège final pour les expériences. En effet, sa faible fréquence longitudinale engendre un confinement longitudinal très faible, voire négligeable. Il est donc possible de faire des expériences dans une configuration 1D, comme l'étude de soliton [125], de localisation 1D [47, 126] ou de gouttelette quantique 1D [98, 106].

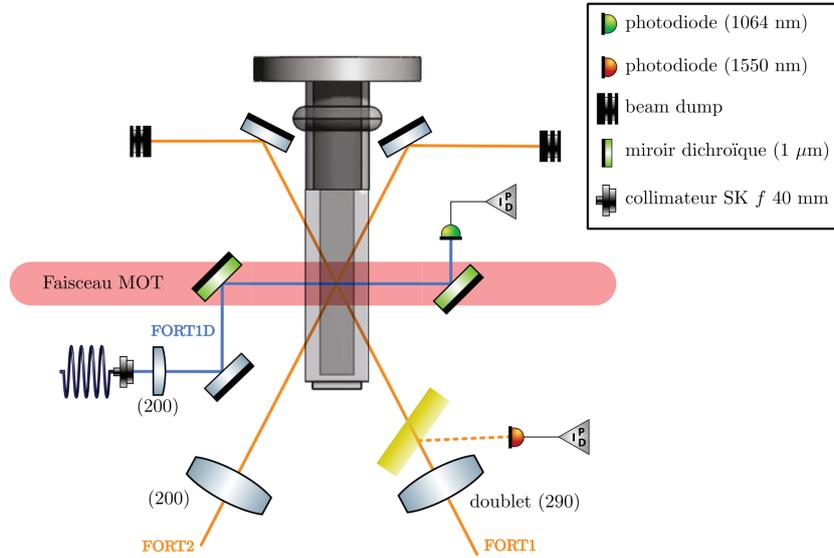


FIGURE 4.15 – Schéma de la configuration géométrique des différents pièges dipolaires, issu de [48]. En orange, les deux pièges à 1550 nm, croisent la cellule avec un angle d'incidence élevé, afin de maximiser la transmission de l'intensité. En bleu, le FORT1D à 1064 nm traverse la cellule à faible incidence. Des lames dichroïques permettent le passage de ce piège dans l'axe des faisceaux MOT horizontaux.

Évaporation

L'étape de l'évaporation consiste à baisser la puissance des différents pièges optiques. Afin d'évaporer efficacement, nous tirons avantage de la présence de la résonance de Feshbach à 33 G. Après avoir transféré les atomes dans l'état $|1, -1\rangle$, nous changeons le champ magnétique jusqu'à atteindre $B_f = 40.5$ G où la longueur de diffusion est égale à environ $140 a_0$. La figure 4.16 représente les étapes d'évaporations, les faisceaux utilisés et leurs puissances. Nous appliquons au total quatre étapes d'évaporation. La première, numérotée (1) sur le schéma, consiste à diminuer la puissance du FORT 1 jusqu'à environ 8%. Nous appliquons ensuite les transferts radio-fréquences, changeons le champ magnétique à B_f , et allumons le FORT2 à 30%. Une deuxième étape d'évaporation (2) est mise en œuvre, où le FORT1 est diminué jusqu'à 1% de sa puissance. Avant la troisième étape (3), le FORT1D est allumé à 25% de sa puissance, nous baissons ensuite la puissance du FORT1 jusqu'à l'éteindre. La dernière étape (4) est l'étape de condensation, nous baissons simultanément la puissance du FORT2 et du FORT1D jusqu'à 3.5% et 12%. Le piège final est un piège allongé en forme de cigare.

Les différentes étapes permettent d'obtenir un condensat de Bose-Einstein pur dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$. Le nombre d'atomes maximal dans le condensat est d'environ 220 000 atomes. Les fluctuations shot à shot sont de l'ordre de 15%.

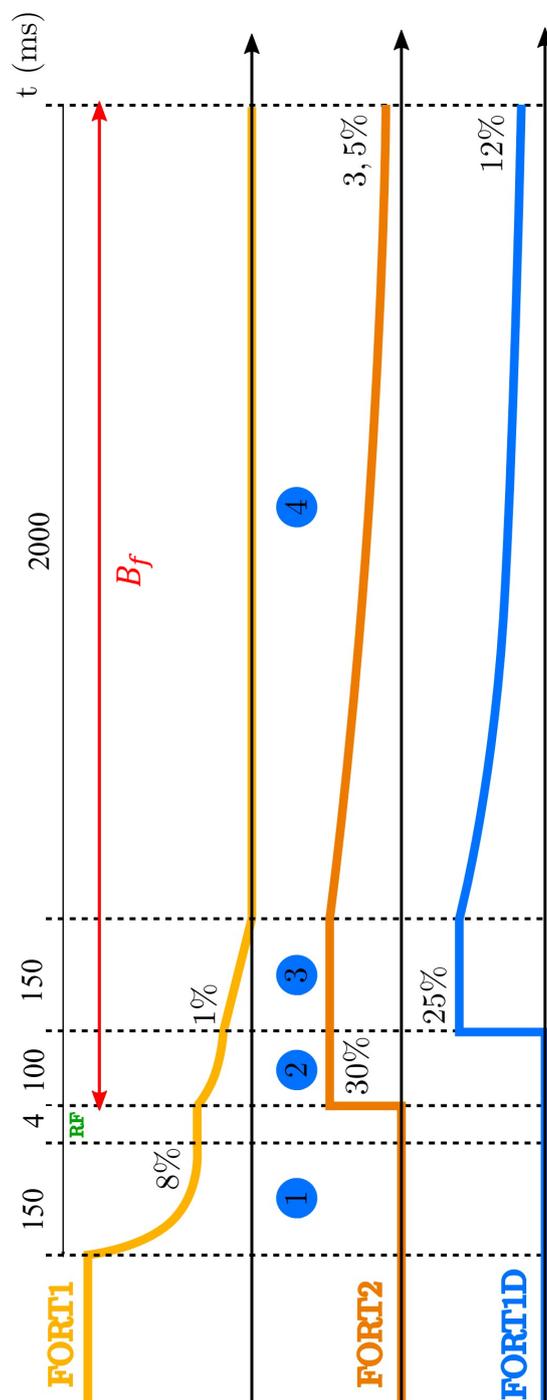


FIGURE 4.16 – Schéma des étapes d'évaporations à partir du chargement du FORT1. Les puissances des lasers sont données en pourcentage de leur puissance maximale. Les différentes étapes sont numérotées de 1 à 4.

4.5 Imagerie

Imagerie par fluorescence

Afin d'observer les atomes, nous utilisons de l'imagerie par fluorescence. À champ magnétique non nul, les atomes ne sont plus à résonance avec la lumière provenant des faisceaux MOT (nous utilisons pour l'imagerie le faisceau principal et repompeur de la ligne D2). Il est donc nécessaire de couper le champ magnétique. Ceci doit se faire suffisamment rapidement, pour éviter qu'une dynamique non voulue se passe. En effet, en éteignant le champ magnétique, la longueur de diffusion change et par conséquent, les interactions inter-atomiques également et peuvent engendrer une dynamique spatiale. À l'aide du switch au niveau des grosses bobines, il est possible de couper le champ en ~ 0.3 ms. De plus, nous appliquons un temps de vol avant chaque image pour diluer le gaz, diminuant ainsi les interactions, et par conséquent limitant l'effet de la coupure du champ. Avant d'imager, nous pouvons appliquer un gradient magnétique à l'aide des petites bobines en configuration quadrupôle, pour faire une expérience du type Stern-Gerlach. Nous imageons le nuage pendant typiquement $30\mu\text{s}$.

Deux axes d'imagerie

Nous avons deux axes d'imageries, schématisés en figure 4.17. L'axe d'imagerie horizontal est formé d'un triplet de focale 42.72 mm (voir thèse de G.Berthet [48]), suivi d'un doublet LAO de 190 mm, et d'une caméra *Andor Ixon EMCCD*. L'ouverture numérique de l'axe d'imagerie est de $O.N = 0.28$. La caméra possède une matrice 1004×1002 de pixel de $8\mu\text{m}$. Le grandissement sur cette axe d'imagerie est de $\times 4.57$. L'axe verticale est composé du même triplet de 42.72 mm, suivi d'un doublet LAO de 80 mm et d'une caméra *Andor Zyla 4.2 sCMOS* de 4.2 Méga-pixel. L'ouverture numérique est également de $O.N = 0.28$. La taille réelle des pixels est $6.5\mu\text{m}$. Le grandissement selon cette axe est de $\times 1.87$.

Résolution de l'imagerie

La résolution attendue de l'imagerie dans les deux axes est de $1\mu\text{m}$. Cependant, la taille minimale mesurée expérimentalement sur des condensats, dont la taille radiale attendue est de l'ordre du micro, est de $3 - 4\mu\text{m}$. Cette différence peut venir de la position des objectifs. En effet, pour des raisons stériques, nous imageons les atomes à 0.8 mm hors de l'axe (dans l'axe horizontal). Nous avons donc de l'astigmatisme qui diminue la résolution. De plus, nous avons également vu des effets de chauffage (diffusion des photons par les atomes pendant l'imagerie) et de densité (interactions dipôle-dipôle) lors de l'imagerie, qui peuvent augmenter la taille observée¹⁰ [127].

10. La totalité des effets rentrant en jeu sont encore incompris et pourront faire l'objet d'une étude future.

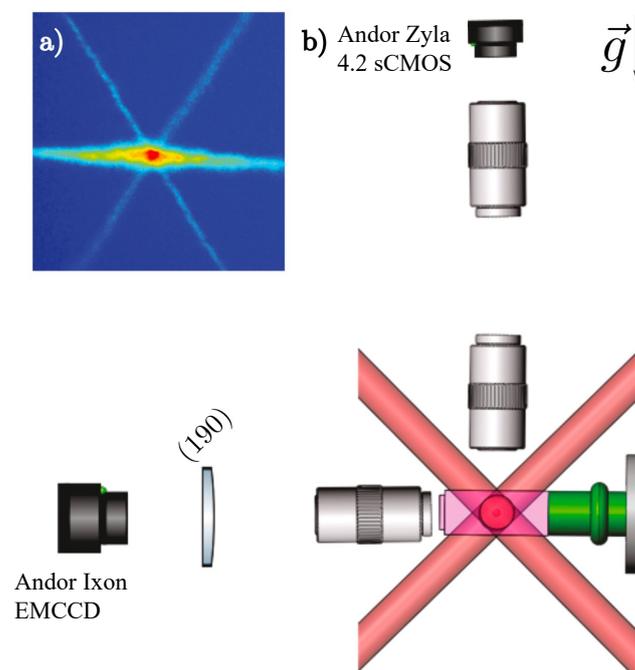


FIGURE 4.17 – a) Image par fluorescence des trois pièges optiques. Image prise dans la direction verticale. L'axe longitudinale du FORT1D est perpendiculaire aux deux axes d'imagerie, il est donc au focus des deux caméras, dans tout le champ de vue. b) Schéma des deux axes d'imageries.

Chapitre 5

Interactions à trois corps contrôlables dans les mélanges de condensats de Bose-Einstein couplés

5.1 Introduction

La très faible densité des gaz ultrafroids entraîne que les atomes interagissent principalement par paires. Comme nous l'avons souligné dans le Chapitre 1, la longueur de De Broglie est plus grande que la portée du potentiel de Van der Waals R_{vdw} , on peut ainsi décrire le potentiel d'interaction comme un potentiel de contact caractérisé par un seul paramètre : la longueur de diffusion a . La possibilité de contrôler la longueur de diffusion *via* les résonances de Feshbach a permis d'explorer divers phénomènes physiques comme la transition BEC-BCS avec un gaz de Fermi [27, 128, 129, 130], l'étude des polarons de Fermi [131, 132] et de Bose [133, 134], les gouttelettes quantiques [45, 46] et les supersolides [92, 93], ainsi que la physique des solitons [91, 125, 135]. Néanmoins, la vitesse de changement des interactions est limitée par l'inductance des bobines magnétiques. Il est alors possible de décaler optiquement les résonances de Feshbach pour améliorer la résolution temporelle [136, 137].

Une autre possibilité pour contrôler les interactions est l'utilisation de couplage cohérent entre deux états quantiques [138, 139]. Dans [139], les auteurs démontrent que les interactions entre deux atomes dans un état habillé sont décrit par une constante de couplage qui est une combinaison linéaire des constantes de couplages intra et inter espèces et qui dépend également des paramètres du couplage. Le groupe de M.K Oberthaler à Heidelberg a étudié la physique et la dynamique de la transition entre le régime de Rabi et de Josephson dans le cas d'un mélange de spin couplé [30, 31]. Ils ont également exploré le caractère miscible et non miscible d'un mélange en présence d'un couplage. Ils montrèrent que le couplage entre les deux

états de spin peut produire une inversion de la miscibilité du mélange [32, 33]. Récemment, le groupe de L. Tarruell ont directement mesuré la longueur de diffusion d'un état habillé en fonction du désaccord à la résonance δ , ils formèrent également des solitons habillés dans une configuration géométrique unidimensionnelle [140].

Bien que les interactions à trois corps dans un gaz d'atomes ultrafroid sont très faibles et négligeables dans la plupart des situations par rapport aux interactions à deux corps, leur considération théorique est importante [141, 142, 143]. Leurs présences conduisent à des effets non linéaires intéressants [144, 145, 146] et à la formation de gouttelette quantique [39, 147]. À basse température, les interactions à trois corps sont caractérisées par un hypervolume de diffusion D [148], avec un rôle similaire à la longueur de diffusion a dans le cas des interactions à deux corps. D est un nombre complexe dont la partie imaginaire $\Im(D)$ est associée à la perte d'atomes par recombinaison à trois corps et la partie réelle $\Re(D)$ correspond à un décalage en énergie et donc, à la magnitude des interactions à trois corps [149]. Une augmentation des interactions à trois corps (augmentation de la partie réelle) est attendue proche des résonances de Feshbach, provenant d'une coïncidence en énergie avec des états faiblement liés à trois corps [39, 148, 149, 150, 151, 152]. Cependant, les potentiels interatomiques possèdent de nombreux états liés profonds à deux corps, par conséquent l'augmentation des interactions à trois corps $\Re(D)$ s'accompagne d'un accroissement de $\Im(D)$, causé par des recombinaisons à trois corps vers ces états profonds [153]. Par exemple, les résonances d'Efimov à trois corps ont été observées expérimentalement à travers l'augmentation des pertes d'atomes par recombinaison à trois corps [154, 40, 155]. Plusieurs études ont été faites sur la manière d'introduire des interactions à trois corps. Dans les réseaux optiques, les grandes pertes d'atomes à trois corps et l'effet Zeno quantique induisent une interaction à trois corps [156, 157]. Le couplage cohérent entre deux états quantiques peut également induire des interactions à trois corps [158, 41].

Une interaction à trois corps effective peut aussi être induite *via* une constante de couplage à deux corps dépendant de la densité du gaz. Cette méthode a besoin de la présence d'un degré de liberté supplémentaire, qui s'adapte rapidement à la densité locale et peut donc être éliminé adiabatiquement. Dans le cas d'un condensat dans une configuration géométrique quasi-2D ou quasi-1D, sa fonction d'onde dans les directions confinées fournit le degré de liberté supplémentaire [159]. En présence d'interactions à deux corps, la taille va augmenter (diminuer) lorsque les interactions sont répulsives (attractives). Cet effet induit un terme d'interactions à trois corps de constante de couplage $g_3 \propto -a^2$ dans l'équation d'état pour la fonction d'onde en dimension réduite. Ce développement est perturbatif, valide seulement lorsque le terme trois corps est faible par rapport à celui du deux corps. L'étude de cette interaction à trois corps a été faite en observant le décalage en fréquence du mode de respiration dans un piège quasi-2D [161] et la rupture de l'intégrabilité en géométrie

quasi-1D [160].

Dans ce chapitre, nous allons expliquer comment le couplage cohérent entre deux états de spin permet le contrôle des interactions à travers le désaccord à la résonance δ . Ce couplage permet de changer les interactions très rapidement sur une grande amplitude et donc d'envisager des expériences de quench. Nous allons démontrer l'apparition dans l'équation d'état d'une interaction effective à trois corps attractive $\propto n^3$ [162]. Elle provient de l'affectation du degré de liberté du spineur par un décalage du désaccord à la résonance causé par l'interaction à deux corps de champ-moyen. Cette interaction est particulièrement attrayante, il est possible de contrôler la magnitude de l'interaction à trois corps à travers la fréquence de Rabi $\Omega/2\pi$ sans pertes à trois corps supplémentaires et indépendamment des interactions à deux corps. Permettant ainsi de former un système dont les interactions à trois corps sont dominantes et dictent la dynamique. Expérimentalement, nous allons étudier deux conséquences de l'apparition de l'interaction trois corps. Nous allons voir que le mode de respiration d'un condensat dans un piège allongé, qui est usuellement indépendant de l'interaction de champ moyen à deux corps, montre un décalage causé par la présence du terme à trois corps. Nous allons également montrer que le condensat peut s'effondrer sur lui-même en présence d'interactions à trois corps, malgré une longueur de diffusion positive.

5.2 Collisions entre états habillés

5.2.1 Hamiltonien du système

Considérons un condensat de Bose-Einstein composé de N atomes, en présence d'un couplage cohérent entre les deux états de spin $\sigma = \uparrow, \downarrow$. Notons Ω la pulsation Rabi et δ le décalage en fréquence à la résonance. Dans le référentiel tournant, l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \int \left(\sum_{\sigma} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} + \hbar \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \xi_{\sigma\sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}} + \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{g_{\sigma, \sigma'}}{2} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} \quad (5.1)$$

où $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}$ est l'opérateur annihilation d'une particule de spin σ en position \mathbf{r} , $\hat{\xi} = -(\delta\hat{\sigma}_z + \Omega\hat{\sigma}_x)$ est l'hamiltonien de spin à une particule écrit avec les matrices de Pauli ($\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x$) s'appliquant sur les états internes $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. $g_{\sigma\sigma'}$ est la constante de couplage associé à l'interaction $\sigma - \sigma'$ avec la longueur de diffusion $a_{\sigma\sigma'}$.

Dans l'approximation des interactions faibles et à température nulle, nous pouvons suivre la méthode de Bogoliubov en écrivant la fonction d'onde $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} = \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) +$

$\hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$, où $n_\sigma(\mathbf{r}) = |\Psi_\sigma(\mathbf{r})|^2$ est la densité du condensat dans l'état $|\sigma\rangle$, $\hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$ est l'opérateur annihilation de particule en position \mathbf{r} et à impulsion non nulle. En négligeant le terme $\hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$ et en substituant $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} = \Psi_\sigma(\mathbf{r})$ dans l'équation 5.1, l'énergie de champ-moyen s'écrit :

$$\frac{E_{\text{MF}}}{V} = -\hbar\Omega(\Psi_\uparrow^*\Psi_\downarrow - \Psi_\downarrow^*\Psi_\uparrow) + \frac{\hbar\delta}{2}(n_\uparrow - n_\downarrow) + \frac{g_{\uparrow\uparrow}}{2}n_\uparrow^2 + \frac{g_{\downarrow\downarrow}}{2}n_\downarrow^2 + g_{\uparrow\downarrow}n_\uparrow n_\downarrow \quad (5.2)$$

5.2.2 Régime du couplage fort

Collisions élastiques

Le régime de couplage fort est défini comme le régime où le couplage cohérent est l'énergie dominante dans le système $\hbar\Omega \gg p^2/2m$, $g_{\uparrow\uparrow}n$, $g_{\downarrow\downarrow}n$, $g_{\uparrow\downarrow}n$, où $n = n_\uparrow + n_\downarrow$ est la densité totale. Dans ce régime, chaque atome est dans un des deux états propres de l'hamiltonien Rabi, les états habillés $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ (voir 4.3.1). Les interactions peuvent ainsi être décrites par des constantes de couplages effectives g_{--} , g_{++} et g_{+-} associées aux longueurs de diffusions effectives [139, 140] :

$$a_{--} = a_{\downarrow\downarrow} \sin^4(\theta) + a_{\uparrow\uparrow} \cos^4(\theta) + \frac{1}{2}a_{\uparrow\downarrow} \sin^2(2\theta) \quad (5.3)$$

$$a_{++} = a_{\downarrow\downarrow} \cos^4(\theta) + a_{\uparrow\uparrow} \sin^4(\theta) + \frac{1}{2}a_{\uparrow\downarrow} \sin^2(2\theta) \quad (5.4)$$

$$a_{-+} = \frac{1}{2}(a_{\uparrow\uparrow} + a_{\downarrow\downarrow}) \sin^2(2\theta) + a_{\uparrow\downarrow} \cos^2(2\theta) \quad (5.5)$$

En figure 5.1, nous avons tracé les longueurs de diffusions décrivant les interactions entre deux atomes dans les états habillés $\{|-\rangle, |+\rangle\}$. Dans cet exemple, nous avons choisi $a_{\uparrow\uparrow} = 83.4 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 33.4 a_0$ et $a_{\uparrow\downarrow} = -53.2 a_0$. Nous voyons qu'en fonction du désaccord δ/Ω les longueurs de diffusions sont modifiées. Lorsque $\delta/\Omega \gg 1$, a_{--} correspond à la longueur de diffusion dans les états non couplés $a_{\downarrow\downarrow}$. De l'autre côté de la résonance, pour $\delta/\Omega \ll -1$, a_{--} correspond à $a_{\uparrow\uparrow}$. Proche de la résonance, les longueurs de diffusions correspondent à une somme des trois longueurs de diffusions des états non couplés ($a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$ et $a_{\uparrow\downarrow}$) pondérée par le produit des probabilités de trouver le premier et le deuxième atome dans les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. Pour l'état $|-\rangle$ cela peut s'écrire :

$$a_{--} = \left(P_\downarrow^{(-)}\right)^2 a_{\downarrow\downarrow} + \left(P_\uparrow^{(-)}\right)^2 a_{\uparrow\uparrow} + 2P_\downarrow^{(-)}P_\uparrow^{(-)}a_{\uparrow\downarrow} \quad (5.6)$$

avec $P_\downarrow^{(-)} = \sin^2(\theta)$ et $P_\uparrow^{(-)} = \cos^2(\theta)$, qui sont respectivement les probabilités de trouver l'état $|-\rangle$ dans $|\downarrow\rangle$ et $|\uparrow\rangle$ lors de la collision.

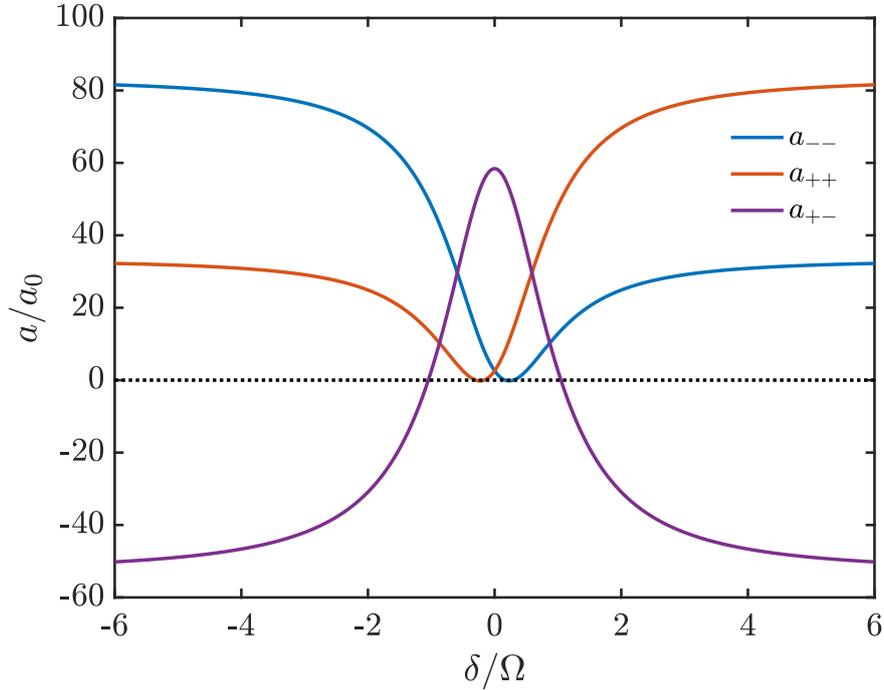


FIGURE 5.1 – Longueurs de diffusions décrivant les interactions entre deux atomes dans un des états habillés $\{|-\rangle, |+\rangle\}$.

Le minimum de a_{--} est atteint pour la polarisation de l'état $|-\rangle$ $P = \delta/\tilde{\Omega} = (a_{\downarrow\downarrow} - a_{\uparrow\uparrow})/(a_{\downarrow\downarrow} + a_{\uparrow\uparrow} - 2a_{\uparrow\downarrow})$ et peut s'écrire :

$$a_{--}^{\min} = \frac{a_{\downarrow\downarrow}a_{\uparrow\uparrow} - a_{\uparrow\downarrow}^2}{a_{\downarrow\downarrow} + a_{\uparrow\uparrow} - 2a_{\uparrow\downarrow}} \quad (5.7)$$

Dans [140], les auteurs ont montré le changement de la longueur de diffusion pour l'état $|-\rangle$ avec un mélange couplé des états $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$ du ^{39}K . Dans des expériences d'expansions, ils mesurèrent directement la longueur de diffusion en fonction du désaccord δ/Ω . De plus, à l'aide des résonances de Feshbach, il est possible d'avoir $a_{--}^{\min} < 0$ et ils observèrent la formation de train de solitons brillants dans un état habillé. Avec notre expérience, nous avons pu répéter ces expériences et observer les mêmes résultats.

Il est également intéressant de remarquer que pour l'exemple précédent et dans la base non couplée $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$, le mélange est proche de la zone du collapse. Mais un mélange des états habillés pour $\delta = 0$ vérifie $a_{+-} > \sqrt{a_{++}a_{--}}$ et subit par conséquent une transition de phase vers un état non-miscible (Voir la partie 1.3.1). Cette démixtion induite par le couplage Rabi a été étudiée dans les références [32, 33] dans le groupe de M. Oberthaler.

Collisions inélastiques

Nous pouvons également travailler avec l'état $|+\rangle$. Cependant des collisions inélastiques existent. Les processus de désexcitations suivant vers l'état $|-\rangle$ sont possibles [140] :

$$|++\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|-+\rangle + |+-\rangle) \quad (5.8)$$

$$|++\rangle \longrightarrow |--\rangle \quad (5.9)$$

Ces processus de changement d'états par collisions à deux corps ne conservent pas l'énergie cinétique. En effet, la différence d'énergie entre les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$ (figure 5.2 (a)) est transférée en énergie cinétique. La figure 5.2 (b) montre les deux transitions inélastiques possibles. Suite au processus 1, les deux atomes acquièrent chacun une vitesse $v_1 = \sqrt{2\hbar\tilde{\Omega}/m}$, la différence d'énergie $2\hbar\tilde{\Omega}$ est transférée en énergie cinétique entre les deux atomes. Le processus 2 conduit à une vitesse finale $v_2 = \sqrt{\hbar\tilde{\Omega}/m}$. La section efficace de diffusion pour les processus 1 et 2 s'écrivent respectivement [140] :

$$\sigma_1 = \frac{\pi}{2} ((a_{\uparrow\uparrow} + a_{\downarrow\downarrow} - 2a_{\uparrow\downarrow}) \sin^2(2\theta))^2 \quad (5.10)$$

$$\sigma_2 = 4\pi ((a_{\uparrow\uparrow} \sin^2(2\theta) - a_{\downarrow\downarrow} \cos^2(2\theta) + a_{\uparrow\downarrow} \cos(2\theta)) \sin^2(2\theta))^2 \quad (5.11)$$

La figure 5.3 montre un profil de densité d'un condensat initialement transféré adiabatiquement dans l'état $|+\rangle$ *via* un champ RF de pulsation Rabi $\Omega/2\pi = 20$ kHz. Après le transfert, le piège longitudinal est éteint afin de laisser le gaz s'étendre dans le piège 1D pendant 63.8 ms. Le profil de densité possède trois pics¹. Le plus haut correspond à la position initiale des atomes dans le piège. Les deux autres correspondent aux atomes ayant subi une collision inélastique ($|++\rangle \longrightarrow |--\rangle$). Ces pics se trouvent à environ $400 \mu\text{m}$ de la position initiale, ainsi leur vitesse est d'environ 6.3 mm/s . Le gain d'énergie est donc bien de l'ordre de $20 \text{ kHz} \sim \Omega/2\pi$. Dans des expériences de temps de vol tridimensionnel, les auteurs de [140] observent des halos de collisions.

5.3 Effets des interactions sur l'état habillé

5.3.1 Dérivation du terme d'interaction à trois corps

Dans la partie précédente, nous n'avons pas pris en compte l'effet des interactions sur l'état interne des atomes, on était dans une configuration telle que

1. Les collisions étant en onde s , les pics de collisions inélastiques sont des halos de collisions pour une expansion tridimensionnelle.

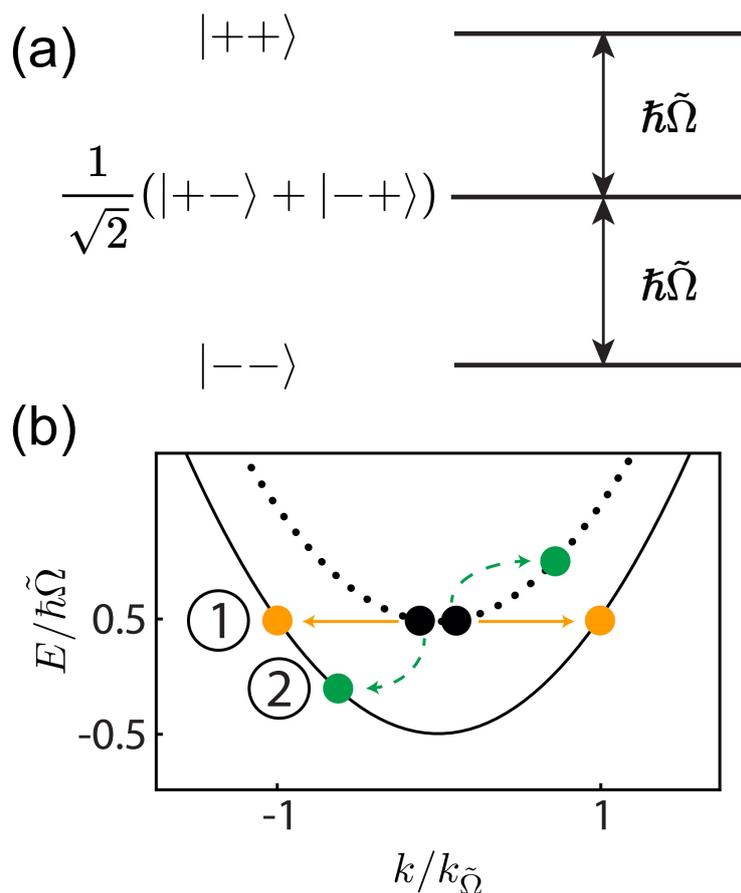


FIGURE 5.2 – Figures issues de [72]. Processus de changement d'états par collisions à deux corps inélastiques. (a) États à deux particules et leurs énergies internes associées. (b) Dispersion de l'énergie d'une particule en fonction du moment $k/k_{\tilde{\Omega}}$ où $k_{\tilde{\Omega}} = \sqrt{2m\tilde{\Omega}}/\hbar$ et $\tilde{\Omega}$ est la fréquence de Rabi généralisée. Les processus 1 et 2 correspondent respectivement à $|++\rangle \rightarrow |--\rangle$ et $|++\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + |+-\rangle)$.

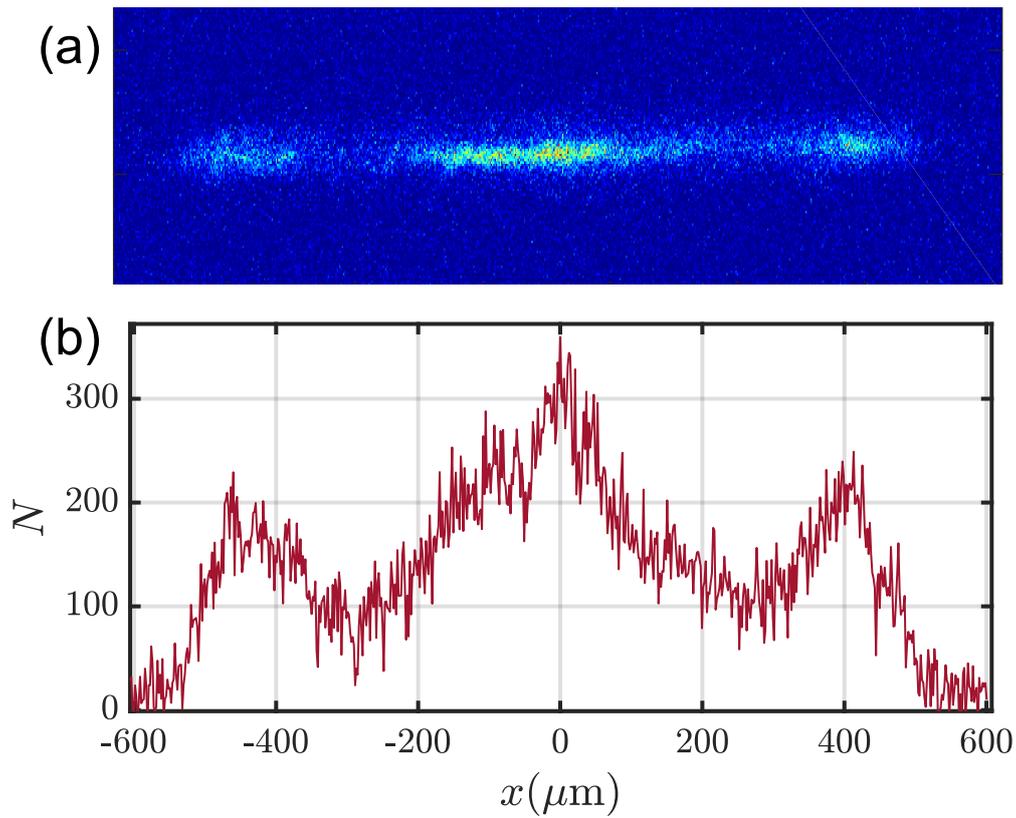


FIGURE 5.3 – (a) Distribution atomique en fausses couleurs. (b) Profil de densité longitudinale de (a). Le condensat est initialement transféré adiabatiquement dans l'état $|+\rangle$. Nous appliquons 63.8 ms d'expansion dans le piège longitudinale. $\Omega = 20$ kHz.

$\hbar\Omega \gg g_{\uparrow\uparrow}n, g_{\downarrow\downarrow}n, g_{\uparrow\downarrow}n$. Dans le cas contraire, l'énergie de l'état $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$ vont respectivement être décalée d'une quantité :

$$\mu_{\uparrow} = g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}n_{\downarrow} \quad (5.12)$$

$$\mu_{\downarrow} = g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} + g_{\uparrow\downarrow}n_{\uparrow} \quad (5.13)$$

Par conséquent le décalage à la résonance δ est lui aussi affecté par les interactions dans le système. Il peut se réécrire δ' tel que :

$$\hbar\delta' = \hbar\delta + g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} + g_{\uparrow\downarrow}n_{\downarrow} - g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} - g_{\uparrow\downarrow}n_{\uparrow} \quad (5.14)$$

Afin de prendre en compte les interactions et voir leur influence sur l'équation d'état d'un condensat couplé de façon cohérente, nous repartons de l'équation de l'énergie de champ moyen (5.2). Afin de simplifier la discussion, nous travaillons dans le cas d'interaction symétrique $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g$ et on définit $\bar{g} = (g - g_{\uparrow\downarrow})/2$. L'état fondamental du système est déterminé par minimisation de l'énergie par rapport à l'état interne du système. Le premier terme fixe la phase relative du spineur ($\Psi_{\uparrow}, \Psi_{\downarrow}$) qui peut finalement s'écrire :

$$(\Psi_{\uparrow}, \Psi_{\downarrow}) = \sqrt{n} [\sin(\theta/2), \cos(\theta/2)] \quad (5.15)$$

L'énergie de champ-moyen par particules se réécrit maintenant :

$$\frac{E_{\text{MF}}}{N} = -\hbar\Omega \sin(\theta) - \frac{\hbar\delta}{2} \cos(\theta) + \frac{gn}{2} - \frac{\bar{g}n}{2} \sin^2(\theta) \quad (5.16)$$

Dans la suite, nous allons considérer le cas où les atomes sont dans l'état habillé $|-\rangle$, c'est à dire $\theta \in [0, \pi]$. Nous cherchons la correction à l'angle de mélange causée par les interactions. Nous minimisons donc l'énergie par particules en fonction de θ :

$$\frac{\partial(E_{\text{MF}}/N)}{\partial\theta} = 0 \iff \cotan(\theta) = \frac{\delta}{\Omega} \left(\frac{1}{1 + 2\gamma \sin(\theta)} \right) \quad (5.17)$$

avec le rapport $\gamma = [\bar{g}n/\hbar\Omega]$ qui compare le décalage de champ-moyen à la fréquence Rabi. Ce rapport donne l'importance des interactions par rapport au couplage cohérent. En l'absence d'interactions ($\gamma = 0$), $\theta = \theta_0$ tel que :

$$\cotan(\theta_0) = \frac{\delta}{\Omega} \quad (5.18)$$

Le condensat est dans l'état propre de l'hamiltonien Rabi $|-\rangle = \sin(\theta_0/2) |\uparrow\rangle + \cos(\theta_0/2) |\downarrow\rangle$. Afin de trouver la modification de l'état interne par les interactions², nous calculons la correction $\Delta\theta$ à θ_0 au premier ordre en γ :

2. Erratum : Dans l'article [162] que nous avons rédigé sur cette étude, il y a une faute de typographie sur le signe de la correction. La bonne formule est $\theta \approx \theta_0 + 2\gamma \frac{\delta/\Omega}{(1+\delta^2/\Omega^2)^{3/2}}$.

$$\cotan(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \frac{\delta}{\Omega}(1 - 2\gamma \sin(\theta_0)) \quad (5.19)$$

$$\Delta\theta = 2\gamma \frac{\delta/\Omega}{(1 + \delta^2/\Omega^2)^{3/2}} \quad (5.20)$$

En présence des interactions, γ est le paramètre contrôlant la modification de l'état interne du condensat par rapport à l'état $|-\rangle$. En injectant la modification de θ dans l'expression de l'énergie de champ moyen (5.16) et en faisant un développement en puissance de γ , on trouve :

$$\frac{E_{\text{MF}}}{N} \approx \epsilon_- + g_2 \frac{n}{2} + g_3 \frac{n^2}{3} \quad (5.21)$$

$$\text{avec } g_2 = g - \frac{\bar{g}}{1 + \delta^2/\Omega^2} \quad (5.22)$$

$$\text{et } g_3 = -\frac{3\bar{g}^2}{\hbar\Omega} \frac{\delta^2/\Omega^2}{(1 + \delta^2/\Omega^2)^{5/2}} \quad (5.23)$$

Le premier terme de (5.21) correspond à l'énergie de l'état habillé $|-\rangle$, $\epsilon_- = -\hbar\sqrt{\delta^2 + \Omega^2}/2$. La constante de couplage à deux corps $g_2 = 4\pi\hbar^2 a_{--}/m$ correspond à celle définie précédemment en équation (5.3). Le dernier terme, proportionnel à n^2 , correspond à une interaction effective à trois corps de constante de couplage g_3 provenant de la modification de l'angle de mélange θ par les interactions de champ-moyen.

5.3.2 Discussion physique

La figure 5.4 présente un schéma de la forme des constantes de couplages g_2 et g_3 en fonction du désaccord δ/Ω . Elles sont représentées dans le cas d'interaction symétrique et pour $a_{\uparrow\downarrow} > \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. g_2 dépend seulement de δ/Ω . D'après la forme de g_3 , on remarque que les interactions trois corps sont uniquement attractives. g_3 est nulle pour les grandes valeurs de δ/Ω , lorsque les deux états sont non couplés. Elle est également nulle pour $\delta = 0$, l'énergie (5.16) est donc minimale pour $\theta = \theta_0 = \pi/2$. $|g_3|$ est maximale pour $\delta/\Omega = \pm\sqrt{2/3}$.

Il est important de noter que g_3 peut être contrôlée indépendamment de g_2 via la pulsation Rabi ($g_3 \propto 1/\Omega$). Sur la figure 5.4, on a tracé la constante de couplage g_3 pour différentes valeurs de pulsations Rabi ($\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3$), on remarque que plus Ω diminue plus les interactions à trois corps sont attractives. Néanmoins, il y a quelques limitations. Tout d'abord, Ω ne peut pas être arbitrairement petit, il faut que le transfert vers l'état habillé soit fait de manière adiabatique $\dot{\gamma} \ll \Omega$ quand la densité varie dans le temps. Deuxièmement l'expansion de l'énergie en puissance

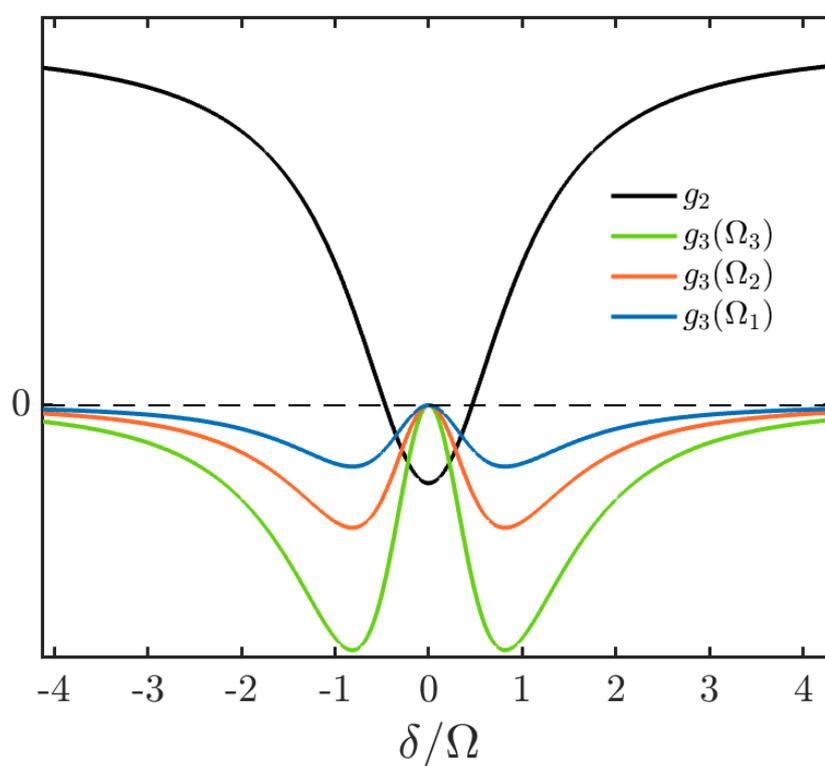


FIGURE 5.4 – Schéma des constantes de couplages pour l'interaction à deux corps g_2 et pour l'interaction à trois corps g_3 en fonction de δ/Ω (en unités arbitraires). Les trois pulsations Rabi vérifient $\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3$.

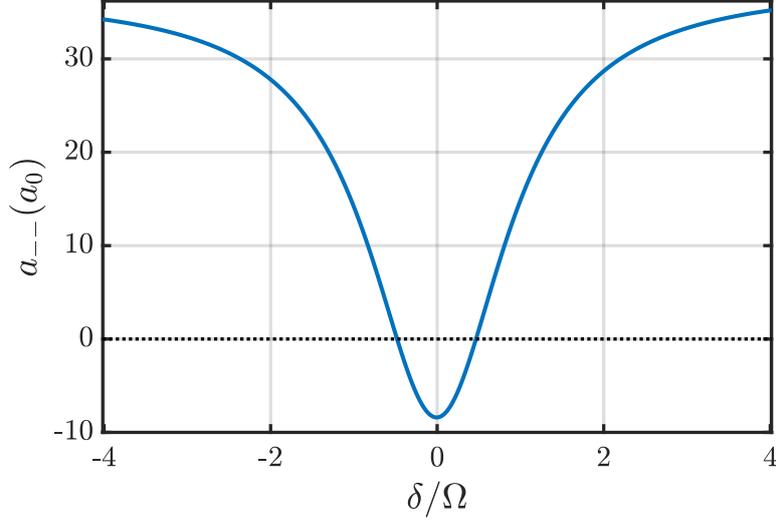


FIGURE 5.5 – Longueur de diffusion $a_2 = a_{--}$ dans notre configuration expérimentale en fonction de δ/Ω .

de la densité (Eq. (5.21)) et donc le terme d'interaction trois corps ne sont valides que dans le régime $\gamma \ll 1$. Cette seconde limitation est plus restrictive dans notre expérience. Ainsi, en prenant $\gamma \approx 1$ ou $\bar{g}n \approx \hbar\Omega$, on trouve que la valeur absolue maximale de l'énergie à trois corps par particules $g_3 n^2/3$ représente une fraction significative de l'énergie à deux corps $\bar{g}n/2$. Finalement dans le régime $\gamma \gg 1$ et $\bar{g}n \gg \hbar|\delta|$, $\theta \approx \pi/2$ et l'énergie (Eq (5.16)) retrouve un comportement similaire à un système avec des interactions uniquement à deux corps.

5.4 Mise en oeuvre expérimentale

Nous travaillons avec un condensat de Bose-Einstein dans les états $|\uparrow\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|\downarrow\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$ à un champ magnétique $B = 54.690(1)$ G. Les trois longueurs de diffusion décrivant les interactions sont $a_{\uparrow\uparrow} = 37.9 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 36.9 a_0$ et $a_{\uparrow\downarrow} = -54.2 a_0$. Avec ces paramètres³, la longueur de diffusion a_{--} a un minimum égale à $-8.4 a_0$ pour $\delta \approx 0$ et s'annule pour $\delta/\Omega \approx \pm 0.47$ (voir figure 5.5). Nous voulons travailler dans un régime où on garde un bon contrôle sur les paramètres du système, nous avons mesuré expérimentalement par des oscillations de Ramsey de $50 \mu\text{s}$ (Voir annexe C), $\Delta B = 0.8(2)$ mG⁴ de fluctuations (RMS)

3. Nous avons vérifié que la légère différence entre $a_{\uparrow\uparrow}$ et $a_{\downarrow\downarrow}$ ne jouent pas de rôle quantitatif dans nos données expérimentales. Ainsi, nous allons dans nos analyses considérer la valeur moyenne des deux longueurs de diffusion.

4. Avec les oscillations de Ramsey, nous trouvons des fluctuations du champ magnétique similaires à la mesure avec les transducteurs de courant (Voir partie 4.2.4).

du champ magnétique correspondant à 0.56(14) kHz de fluctuations pour δ . Nous allons ainsi faire notre étude pour $\Omega/2\pi \geq 7$ kHz où les fluctuations du champ sont négligeables.

Ordres de grandeurs

Pour $\Omega/2\pi = 7$ kHz et pour $\delta/\Omega \approx 0.8$, la valeur absolue maximale pour la constante de couplage à trois corps est $|g_3|\hbar = 3 \times 10^{-38}$ m⁶/s. Cette valeur est plus grande d'un facteur ~ 100 par rapport au coefficient des pertes à trois corps dominant $K_3^{\downarrow\downarrow\downarrow}/6 \approx 3 \times 10^{-40}$ m⁶/s dans les mélanges de spin du ³⁹K. L'hypervolume de diffusion D pour notre système est donc essentiellement réel $|\Re(D)| \gg |\Im(D)|$.

5.4.1 Décalage de la fréquence du mode de respiration radiale

Pour un condensat dans une configuration allongée en forme de cigare avec des interactions uniquement à deux corps, il est attendu que la fréquence du mode de respiration radiale est toujours constante. Elle est égale à $2\omega_{\perp}$, où $\omega_{\perp}/2\pi$ est la fréquence radiale du piège, et est indépendante des interactions à deux corps. Cette invariance est causée par une symétrie cachée de l'hamiltonien à travers une transformation d'échelle [163, 164, 165]. Dans cette partie nous allons voir l'effet des interactions à trois corps sur le mode de respiration.

Observations expérimentales

L'expérience commence avec un condensat de Bose-Einstein quasi pur d'environ 1.4×10^5 atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ dans un piège allongé en forme de cigare avec les fréquences de piègeages suivantes $(\omega_{\perp}, \omega_{\parallel})/2\pi = (300, 16.4)$ Hz. Le condensat dans l'état fondamental de l'hamiltonien (l'état $|-\rangle$ sans interactions) est préparé grâce à un transfert adiabatique par balayage de fréquence. Le désaccord δ est décalé de $\delta_{ini} = 7.5\Omega$ jusqu'à sa valeur finale δ_f en 0.4 ms. La forme et la durée du balayage $\delta(t)$ sont choisies afin d'être adiabatique par rapport à la dynamique interne⁵ mais non adiabatique par rapport à la dynamique spatiale du condensat $2\pi/\omega_{\perp}$. Ainsi, le balayage est équivalent à un quench des interactions et induit une dynamique spatiale du nuage. La taille initiale du condensat est plus élevée que la taille à l'équilibre pour le nouvel état habillé, l'énergie potentielle supplémentaire va être convertie en énergie cinétique et les atomes vont osciller dans le piège. La fréquence longitudinale du piège est plus faible que la fréquence radiale, et en la contrôlant durant la séquence expérimentale, nous limitons la dynamique longitudinale du nuage sur la

5. La forme de $\delta(t)$ a été choisie en analysant numériquement et expérimentalement les oscillations de Rabi résiduelles après un balayage adiabatique. Nous avons trouvé que la fonction suivante $\delta(t) = \frac{(\delta_{ini} - \delta_f)}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{1 + \alpha t/t_f} - 1 \right) + \delta_f$, avec $t \in [0, t_f]$ où t_f est le temps du balayage et α une constante, minimise mieux les oscillations de Rabi résiduelles et donc permet un meilleur transfert adiabatique qu'une droite ou une exponentielle.

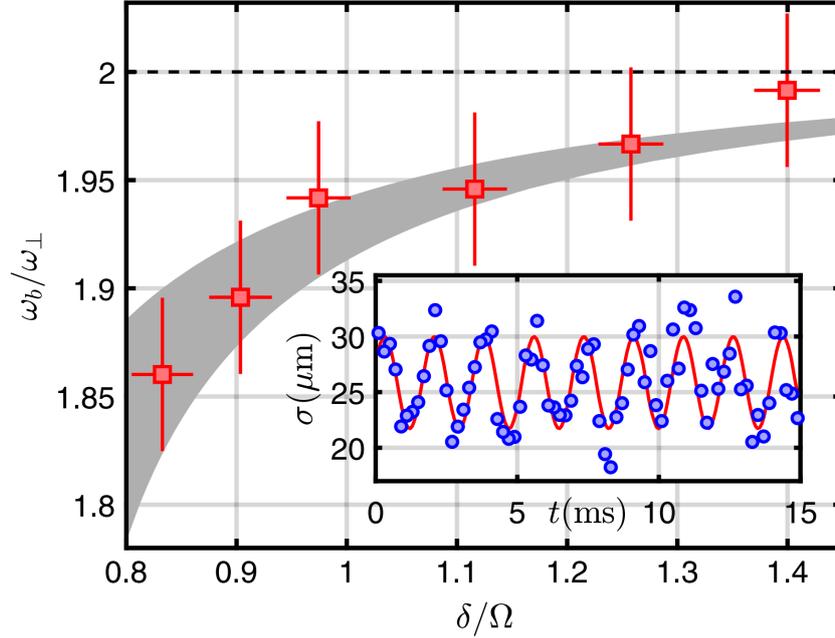


FIGURE 5.6 – Fréquence du mode de respiration radiale en fonction de δ/Ω pour $\Omega/2\pi = 25.4\text{kHz}$. Les points correspondent aux données expérimentales. Les barres d’erreurs verticales correspondent à une incertitude de 1.5% sur la fréquence mesurée. Les barres d’erreurs horizontales sont liées aux 0.8(2) mG de fluctuations du champ magnétique. La zone grisée correspond à l’estimation théorique de la fréquence pour $2.3 \times 10^9\text{ m}^{-1} < n_{1D} < 2.65 \times 10^9\text{ m}^{-1}$ prenant ainsi en compte notre incertitude sur le nombre d’atomes provenant des fluctuations de l’expérience et la détectivité. En insertion : taille du condensat en fonction du temps après un balayage inverse de δ jusqu’à 7.5Ω et d’un temps de vol de 9.7 ms.

durée de l’expérience ($\sim 15\text{ ms}$) et nous permet donc de la négliger. Notre analyse se focalise sur la dynamique radiale du condensat et en particulier nous nous intéressons à la zone centrale du profil longitudinal où la densité est approximativement constante et égale à n_{1D} .

Dans un premier temps nous travaillons avec les paramètres suivants $\Omega/2\pi = 25.4\text{kHz}$ et $\delta/\Omega > 0.8$. Après le transfert adiabatique jusqu’au désaccord δ_f , le champ RF reste allumé à la même fréquence et le système commence sa dynamique radiale. À différents temps, nous coupons le piège optique laissant les atomes libres dans les trois dimensions de l’espace. Nous faisons dans le même temps un balayage inverse ($\delta_f \rightarrow \delta_{ini}$) en 0.4 ms, permettant d’augmenter les interactions et donc d’augmenter la résolution spatiale après un temps de vol de 9.7 ms. On observe une claire oscillation de la taille radiale (graphique inséré en figure 5.6). Sur les 15 ms de l’ex-

périence, nous observons une chute du nombre d'atomes de maximum 20%. La figure 5.6 montre la fréquence du mode de respiration en fonction de δ/Ω . Contrairement à l'invariance d'échelle dans le cas d'interactions uniquement à deux corps, nous mesurons une claire diminution de la fréquence du mode de respiration (jusqu'à 8%) en diminuant le désaccord δ/Ω de 1.4 à 0.8.

Modèle théorique

Nous voulons maintenant comparer les fréquences mesurées aux valeurs théoriques attendues pour un condensat vérifiant l'équation d'état (5.21). Notre modèle est basé sur une approche variationnelle, qui est valide dans le régime des faibles oscillations⁶ autour de la position d'équilibre [166, 167]. Nous considérons que durant le mouvement des atomes, le profil de densité maintient la même forme et uniquement son extension spatiale change. La fonction d'onde bidimensionnelle peut s'écrire :

$$\Psi(\mathbf{r}) = \frac{AN^{1/2}}{R} f(r/R) e^{i\phi(r)} \quad (5.24)$$

où f est une fonction arbitraire réelle, N le nombre d'atomes, A une constante de normalisation, r la coordonnée radiale et R la taille du condensat. Nous supposons $\phi(r) = 0$, ce qui revient à supposer que la fonction d'onde est dans l'état fondamental du piège. L'énergie du système est $E(R)$ tel que :

$$E(R) = E_{\text{pot}}(R) + E_{\text{cin}}(R) + E_2(R) + E_3(R) \quad (5.25)$$

avec

$$E_{\text{pot}}(R) = \frac{1}{2} m \omega_{\perp}^2 \int (r^2 |\Psi(r)|^2) dr^2 = C_{\text{pot}} R^2 \quad (5.26)$$

l'énergie potentielle,

$$E_{\text{cin}}(R) = \frac{\hbar^2}{2m} \int \left(\frac{d|\Psi(r)|}{dr} \right)^2 dr^2 = C_{\text{cin}} R^{-2} \quad (5.27)$$

l'énergie cinétique,

$$E_2(R) = \frac{g_2}{2} \int |\Psi(r)|^4 dr^2 = C_2 R^{-2} \quad (5.28)$$

l'énergie associée aux interactions à deux corps,

$$E_3(R) = \frac{g_3}{3} \int |\Psi(r)|^6 dr^2 = C_3 R^{-6} \quad (5.29)$$

6. Expérimentalement, nous avons augmenté le temps du premier balayage, réduisant l'amplitude des oscillations mais sans changement sur sa fréquence. Ceci valide notre hypothèse de faible amplitude des oscillations.

correspondant à l'énergie des interactions à trois corps. Les constantes $C_{\text{pot}}, C_{\text{cin}}, C_2, C_3$ dépendent de la fonction f . En minimisant l'énergie, on en détermine la relation du Viriel :

$$E_{\text{cin}} + E_2 - E_{\text{pot}} + 2E_3 = 0 \quad (5.30)$$

Nous souhaitons évaluer la fréquence ω_b des faibles oscillations autour de la position d'équilibre dont la taille est R_0 . On développe le potentiel $E(R)$ autour de sa position d'équilibre :

$$E(R) = E(R_0) + \frac{1}{2}m_{\text{eff}}\omega_b^2 (R - R_0)^2 \quad (5.31)$$

où m_{eff} est la masse effective définie tel que :

$$m_{\text{eff}} = Nm \frac{\bar{r}^2}{R^2}, \quad \bar{r}^2 = \frac{\int r^2 n(r) dr^2}{\int n(r) dr^2} \quad (5.32)$$

\bar{r}^2 est la moyenne quadratique de la taille du condensat. En dérivant deux fois $E(R)$ et en utilisant la relation du Viriel, on en déduit la fréquence du mode de respiration dans le régime des faibles oscillations :

$$\omega_b = 2\omega_{\perp} \sqrt{1 + \frac{E_3}{E_{\text{pot}}}} \quad (5.33)$$

Tout d'abord, nous voyons qu'en absence d'interaction à trois corps ($E_3 = 0$) nous retrouvons l'invariance de la fréquence du mode de respiration. Dans notre cas $E_3 < 0$, on s'attend donc à une diminution de la fréquence en fonction de l'importance des interactions à trois corps. Nous avons évalué les énergies E_3 et E_{pot} numériquement avec l'équation de Gross Pitaevskii, incluant le terme d'interactions à trois corps, *via* la méthode de temps imaginaire (voir 3.4.4).

Comparaison avec l'expérience

Les résultats numériques des fréquences du mode de respiration sont tracés en figure 5.6 (zone grise) en fonction de δ/Ω . Afin de prendre en compte notre incertitude sur le nombre d'atomes provenant des fluctuations de l'expérience et la détection, nous avons estimé la fréquence pour $2.3 \times 10^9 \text{ m}^{-1} < n_{1D} < 2.65 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$. Dans les barres d'erreurs expérimentales, nous trouvons un excellent accord avec les fréquences mesurées expérimentalement. Il est important de noter que dans notre intervalle de valeurs pour δ/Ω , diminuer δ/Ω correspond à diminuer g_2 et d'augmenter $|E_3|$. Finalement, nous attribuons la diminution de la fréquence d'oscillation et donc la brisure de l'invariance d'échelle à la présence d'interactions à trois corps.

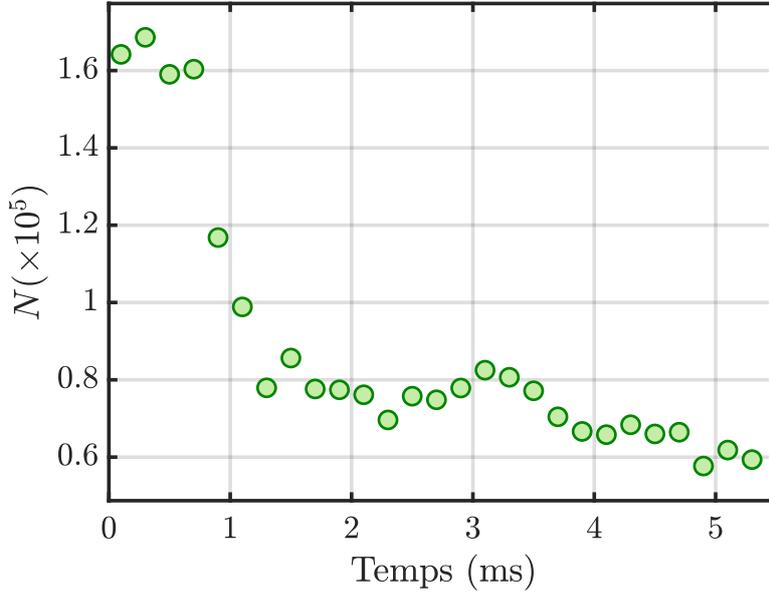


FIGURE 5.7 – Nombre d’atomes en fonction du temps. Chaque point correspond à une seule itération de l’expérience.

5.4.2 Effondrement induit par les interactions à trois corps

Observations expérimentales

En continuant de diminuer le désaccord δ/Ω , nous observons une chute brutale du nombre d’atomes en environ 1 ms après le début du balayage en fréquence (voir figure 5.7). À ce moment ci, le condensat a rétréci et a atteint une haute densité. Nous interprétons ce comportement comme un collapse radiale du nuage induit par les interactions à trois corps. Cet effondrement est attendu pour $\delta/\Omega \approx 0$ car le minimum de a_{--} est égale à $-8.4 a_0$. Dans la suite, nous n’allons pas nous intéresser à la dynamique du collapse, en incluant le rôle des pertes d’atomes. Mais plutôt au seuil δ_c/Ω en dessous duquel un collapse a lieu. Afin d’étudier ce seuil, nous attendons 3 ms après le début du balayage et nous traçons en figure 5.8 (a) la densité centrale unidimensionnelle n_{1D} en fonction de δ/Ω pour deux valeurs de pulsation Rabi (figure (a)). On observe que le collapse se fait brutalement lorsque $|\delta|/\Omega$ diminue. De plus, on s’aperçoit que le collapse se produit pour des valeurs différentes de δ/Ω en fonction de Ω . Pour $\Omega/2\pi = 7.6$ kHz (courbe bleue), le seuil est à une valeur de $|\delta|/\Omega$ plus élevée que pour $\Omega/2\pi = 29.8$ kHz (courbe rouge). La figure 5.8 (b) représente la longueur de diffusion a_{--} en fonction de δ/Ω .

La figure 5.9 représente le seuil δ_c/Ω en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Nous observons que plus $\Omega/2\pi$ augmente plus le seuil diminue. Ce comportement ne peut être expliqué simplement avec les interactions à deux corps qui ne dépendent que du

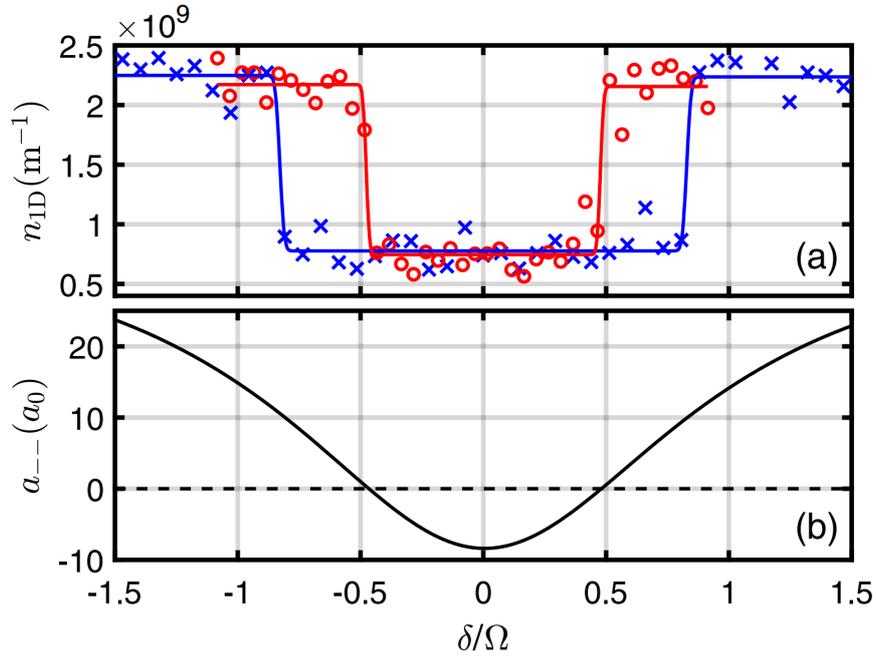


FIGURE 5.8 – (a) Densité 1D en fonction du désaccord final δ/Ω . \times : $\Omega/2\pi = 7.6$ kHz, \circ : $\Omega/2\pi = 29.8$ kHz. Les courbes sont ajustées avec la fonction $n_{\text{coll}} + (n_{1D} - n_{\text{coll}})\text{erf}[(|\delta| - \delta_c)/(W\Omega)]$, où n_{coll} , n_{1D} , W et δ_c sont des paramètres libres. (b) Longueur de diffusion a_{--} en fonction of δ/Ω .

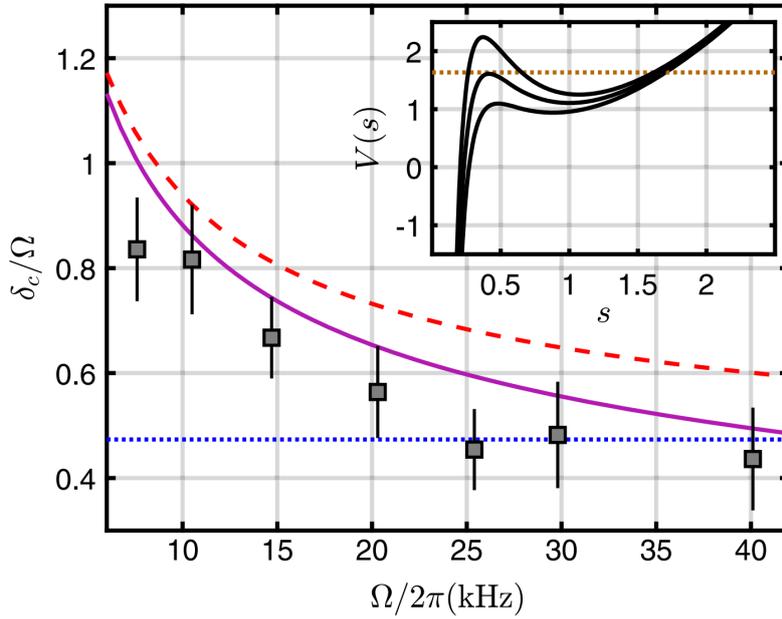


FIGURE 5.9 – Seuil du collapse δ_c/Ω en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Les points expérimentaux sont représentés par des carrés. La courbe en pointillé bleue à $\delta/\Omega = 0.47$ correspond à $a_{--} = 0$. La courbe violette (*resp.* en tirée rouge) correspond à la prédiction théorique en prenant en compte les effets de champ moyen sur l'état interne plus (*resp.* sans) la renormalisation de l'interaction à deux corps (voir texte). En insertion : Potentiel effectif V pour $\Omega/2\pi = 30$ kHz pour (de haut en bas) $\delta/\Omega = 0.54$, $\delta/\Omega = \delta_c/\Omega = 0.49$, $\delta/\Omega = 0.44$. La courbe en pointillée orange est l'énergie initiale pour la courbe de potentiel au milieu et correspondant à $s(0) = 1.7$.

rapport δ/Ω . Ainsi cette tendance révèle le rôle des interactions à trois corps dans le collapse radiale. Pour $\Omega/2\pi < 20$ kHz, le collapse se produit pour $\delta/\Omega > 0.47$, ce qui signifie que la longueur de diffusion est positive (voir figure 5.8 (b)). Par exemple, lorsque $\Omega/2\pi = 7.6$ kHz, $\delta_c/\Omega = 0.82(5)$ et la longueur de diffusion deux corps vaut environ $10 a_0$ (figure 5.8 (b)).

Modèle théorique

Dans le but d'interpréter quantitativement nos observations, nous avons développé un modèle simple basé sur l'hypothèse que la fonction d'onde radiale est gaussienne à tout instant avec une taille RMS $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = s(t)a_{ho}$, où $a_{ho} = \sqrt{\hbar/m\omega_\perp}$ correspond à la taille du condensat dans le cas sans interaction. La densité d'énergie est ensuite calculée par minimisation locale par rapport à l'état interne (Eq. (5.2)). Après intégration radiale, l'énergie totale E s'écrit comme :

$$\frac{E}{N\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\epsilon_{-}}{\hbar\omega_{\perp}} + \frac{\dot{s}^2}{2} + \underbrace{\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2s^2}}_{V(s)} + \frac{E_{\text{int}}(s)}{N\hbar\omega_{\perp}}, \quad (5.34)$$

où les termes du membre de droite correspondent respectivement à l'énergie interne d'une particule, l'énergie cinétique associée au mouvement des particules, l'énergie potentielle harmonique, l'énergie provenant de la pression quantique et l'énergie originant des interactions entre atomes. Nous avons vérifié que l'énergie associée au gradient de θ [168] est négligeable dans notre configuration expérimentale et justifie l'approximation de densité locale dans le calcul de l'état interne. Dans la limite $\gamma \ll 1$, l'énergie des interactions peut être calculée simplement à partir de l'équation (5.21) :

$$\frac{E_{\text{int}}(s)}{N} = \frac{g_2 n_{1D}}{4\pi a_{\text{ho}}^2 s^2} + \frac{g_3 n_{1D}^2}{12\pi^2 a_{\text{ho}}^4 s^4} \quad (5.35)$$

Cependant, puisque $\gamma \sim 1$ pour certains paramètres, nous devons calculer numériquement l'énergie des interactions $E_{\text{int}}(s)$ à partir de l'équation (5.16) :

$$E_{\text{int}} = \int \min_{\theta} (E_{\text{MF}}(\theta)/N) n(\mathbf{r}) d^3r - N\epsilon_{-}, \quad (5.36)$$

Puisque nous ne voyons pas de pertes d'atomes avant le collapse, nous avons décidé d'omettre un terme de perte dans la dynamique initiale. D'après l'équation (5.34), la dynamique se réduit à celle d'une particule classique dans un potentiel effectif $V(s)$ donnée par les trois derniers termes.

Plusieurs exemples de potentiel $V(s)$ pour des paramètres proches du collapse sont représentés en insertion de la figure 5.9. Les courbes présentent un maximum local de potentiel pour les faibles valeurs de s qui peut être dépassé ou non en fonction de l'énergie initiale, donnée par la taille initiale du condensat. Cette dernière est déterminée *via* une simulation numérique de l'équation de Gross Pitaevskii en prenant en compte nos paramètres expérimentaux, nous trouvons une taille égale à $1.1 \mu\text{m}$, correspondant à $s(0) = 1.7$. Nous trouvons pour chaque valeur de fréquence Rabi $\Omega/2\pi$, le seuil $|\delta_c|/\Omega$ pour lequel l'énergie initiale est égale au maximum local de potentiel (voir la courbe en pointillée en figure 5.9). Notre modèle est représenté par la courbe rouge en tiret en figure 5.9, il capture la tendance générale des points expérimentaux avec une légère surestimation. Afin d'affiner notre modèle, nous pouvons prendre en compte la principale correction au-delà du champ-moyen à a_{--} (Voir l'équation (6.14)). Ce terme est proportionnel à $a_{\uparrow\downarrow}^2 \sqrt{\Omega}$, et sera le sujet du chapitre suivant. Cette modélisation approfondie apporte une meilleure adéquation avec les données expérimentales (courbe violette). Finalement, nous pouvons conclure que ce modèle renforce notre interprétation du collapse radiale induit par les interactions à trois corps.

5.5 Conclusion et perspectives

Nous avons montré qu'un condensat de Bose-Einstein couplé de manière cohérente dont les longueurs de diffusions sont différentes, permet l'obtention d'un terme d'interactions à trois corps attractives dans l'équation d'état. Ce terme de champ-moyen provient de la dépendance en densité du désaccord à la résonance du couplage Rabi. Nous avons observé que l'interaction à trois corps peut être contrôlée à partir de la fréquence Rabi et peut être ajuster afin de jouer un rôle majeur dans la dynamique. Cette interaction attractive peut être beaucoup plus grande que l'énergie associée aux pertes à trois corps. Nous avons observé expérimentalement deux conséquences directes du terme trois corps : un décalage de la fréquence du mode de respiration transverse et un collapse radiale malgré la présence d'interaction deux corps répulsives ($g_2 > 0$). Nos résultats peuvent être généralisés au cas d'interactions asymétriques ($a_{\downarrow\downarrow} \neq a_{\uparrow\uparrow}$). Dans ce cas, il y a une plus grande liberté dans le choix de l'espèce atomique, du mélange de spin à considérer, du champ magnétique, afin de trouver des conditions optimales, c'est à dire une grande constante de couplage à trois corps et un faible taux de recombinaison à trois corps.

Dans le but d'induire une interaction à trois corps répulsive, il est possible de travailler dans l'état interne qui maximise l'énergie ($|+\rangle$ dans le cas sans interaction)⁷. Dans ce cas, on a $\theta \in [-\pi, 0]$, et la constante de couplage g_3 devient positive. Malheureusement, comme nous l'avons mentionné dans la partie 5.2.2, ils existent de grandes pertes d'atomes à deux corps. Le taux de pertes à deux corps est $\Gamma \sim \hbar n \bar{a}^2 / l_\Omega$, où $\bar{a} = (a_{\uparrow\uparrow} - a_{\uparrow\downarrow})/2$ et $l_\Omega = \sqrt{\hbar/m\Omega}$ est la longueur associée à la pulsation Rabi Ω . Par conséquent, réduire Ω pourrait permettre de trouver un régime où le terme d'énergie trois corps répulsive $E_3 \propto g_3 n^2$ domine l'énergie associée au taux de pertes à deux corps, c'est à dire $E_3/\hbar\Gamma \propto n l_\Omega^3 \gg 1$. Ce régime nécessite de réduire encore davantage les fluctuations du champ magnétique, et semble par conséquent difficile à atteindre expérimentalement.

7. À noter que ceci n'est valable que pour $\gamma < 1$, en effet cette solution est un point fixe que pour $\gamma < 1$, sinon une bifurcation se produit [31].

Chapitre 6

Effets au-delà du champ-moyen dans les mélanges de condensats de Bose-Einstein couplés de manière cohérente

6.1 Introduction

Nous avons vu que pour un gaz de bosons dans le régime des interactions faibles, les fluctuations quantiques causent la déplétion quantique et conduisent à la correction de Lee-Huang-Yang (LHY) dans l'équation d'état. La déplétion quantique du condensat vers des états excités a été observée expérimentalement [58, 59]. La mesure de cette correction à l'énergie au-delà du champ-moyen a été le sujet de plusieurs études [63, 38]. Cependant, sa faible magnitude par rapport au champ-moyen rend son observation délicate et complexe. Comme nous l'avons abordé dans le chapitre 3, un mélange dont les interactions de champ-moyen globales sont attractives est stabilisé par le terme de Lee-Huang-Yang. L'énergie de champ-moyen est abaissée et devient du même ordre de grandeur que l'énergie des fluctuations quantiques. L'observation de gouttelettes quantiques, est une observation indirecte de l'énergie de Lee-Huang-Yang et n'a pas permis sa mesure précise. La première mesure relativement quantitative provient de l'équipe de Jan J. Arlt à Aarhus [70]. Ils ont mesuré cette énergie par des mesures de décalage de la fréquence de respiration dans un piège harmonique isotrope tridimensionnel en fonction du nombre d'atomes. Cependant, la présence de pertes asymétriques introduit des effets de champ-moyen supplémentaires dans la dynamique, et les mesures se font dans un régime d'oscillations de grandes amplitudes. Ils observent, par conséquent, seulement un décalage globale de la fréquence du mode de respiration. Ce décalage est relativement constant en fonction de l'énergie au-delà du champ-moyen initiale, et limite par conséquent la précision sur la mesure de l'énergie.

Le terme au-delà du champ-moyen correspond à l'énergie de point-zéro des modes de Bogoliubov du système. Dans le cas d'un condensat à une seule composante, les excitations sont données par le spectre de Bogoliubov standard discuté dans la partie 1.2.1. Ce spectre est sans gap et correspond à faible impulsion au mode de Goldstone provenant de la brisure spontanée de la symétrie $U(1)$. Dans le cas d'un mélange de deux condensats de Bose-Einstein sans couplage cohérent, explicité en 1.3.1, le spectre de Bogoliubov possède deux branches sans gap correspondant aux modes d'excitations de densités et de spin. Ces deux modes sont associés à la conservation du nombre de particules dans chacun des états de spin. Le terme de LHY dans le cas d'un mélange est un peu plus compliqué à calculer à cause de la plus grande complexité du spectre de Bogoliubov [69]. Néanmoins, la forme des branches d'excitations est inchangée et, par conséquent, la dépendance en densité reste la même $E_{\text{LHY}}/V \propto n^{5/2}$.

Dans ce chapitre, nous allons considérer le cas d'un condensat de Bose-Einstein formé par des atomes avec deux états internes de spin couplés de manière cohérente [169]. Le paramètre d'ordre du condensat devient un vecteur à deux composantes dont les excitations de la phase relative entre les deux états sont coûteux énergétiquement [162, 170]. Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent, ces systèmes couplés ont été analysés en détails dans une vision purement de champ-moyen, on peut citer les oscillations de Rabi [168, 171], la transition entre les régimes Rabi et Josephson [31], la bifurcation classique ferromagnétique [32], le mécanisme de Kibble-Zurek [172], le contrôle des interactions à deux corps [140], l'apparition d'interaction à trois corps [162], ou encore la dynamique de domaines magnétiques [173]. Il est également prédit que pour des interactions inter-espèces suffisamment attractives, un mélange de spin couplé reste stable et forme une gouttelette quantique, de manière similaire au cas non couplé [174]. Le mécanisme de stabilisation est interprété comme l'émergence d'une interaction à trois corps répulsive causée par le couplage [158], ou comme un effet quantique à plusieurs corps au-delà du champ-moyen [174] causé par le changement du spectre de Bogoliubov par le couplage cohérent.

Dans la suite, nous allons tout d'abord expliciter le spectre de Bogoliubov pour un mélange de condensats couplé de manière cohérente. Nous allons ensuite calculer analytiquement la densité d'énergie au-delà du champ-moyen (noté E_{BMF}/V , l'abréviation BMF est pour « *Beyond Mean Field* ») pour un mélange de spin couplé avec des interactions asymétriques ($a_{\uparrow\uparrow} \neq a_{\downarrow\downarrow}$) en fonction de la pulsation Rabi Ω . Nous allons montrer que l'énergie BMF passe d'une dépendance en densité $n^{5/2}$ pour les faibles valeurs de Ω à une expansion en puissance de la densité pour les grandes valeurs de Ω . Dans ce régime, le terme proportionnel à n^2 peut être compris comme une renormalisation de la longueur de diffusion provenant de transitions virtuelles

vers des états excités, le terme proportionnel à n^3 est vue comme un terme émergent dans l'équation d'état, originant des collisions à trois corps [158]. Chaque terme a une dépendance en Ω différente. Dans cette étude [175], nous explorons expérimentalement le régime des grandes pulsations Rabi dans une configuration telle que le champ-moyen est annulé. Nous mettons en évidence les deux contributions BMF, respectivement proportionnelles à n^2 et n^3 , par des expériences de temps de vol unidimensionnelles. Ces effets au-delà du champ-moyen sont à des énergies extrêmement faibles (quelques dizaines de Hz), une mesure quantitative de ces énergies demandent une compréhension et une étude minutieuse des différentes influences supplémentaires sur le système. Ensuite, nous allons nous intéresser au cas spécifique de couplage nul ($\Omega = 0$), nous montrons que les pertes asymétriques entre les deux états de spin, absentes en présence d'un couplage Rabi, induisent d'importants effets de champ-moyen supplémentaires dans la dynamique d'expansion.

6.2 Spectre de Bogoliubov pour un mélange couplé

6.2.1 Hamiltonien et énergie de champ-moyen

Nous considérons un condensat de Bose-Einstein formé de N atomes avec deux états internes de spin $\sigma = \uparrow, \downarrow$ couplés de manière cohérente par un champ extérieur. Les paramètres caractérisant le couplage sont la pulsation de Rabi Ω et le désaccord à la résonance δ . Dans le référentiel tournant, l'hamiltonien décrivant le système s'écrit :

$$\hat{H} = \int \left(\sum_{\sigma} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \frac{\hbar^2 \nabla_{\mathbf{r}}^2}{2m} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} + \hbar \sum_{\sigma, \sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \xi_{\sigma\sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}} + \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{g_{\sigma, \sigma'}}{2} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} \hat{\Psi}_{\sigma'\mathbf{r}} \right) d\mathbf{r} \quad (6.1)$$

où $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}}$ est l'opérateur annihilation d'une particule de spin σ en position \mathbf{r} , $\hat{\xi} = -(\delta\hat{\sigma}_z + \Omega\hat{\sigma}_x)$ est l'hamiltonien de spin à une particule écrit en fonction des matrices de Pauli ($\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_x$) s'appliquant sur les états internes $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$. $g_{\sigma\sigma'}$ est la constante de couplage associée à l'interaction $\sigma - \sigma'$ avec la longueur de diffusion $a_{\sigma\sigma'}$.

Dans la suite, on suppose que le système est à température nulle. Nous suivons la procédure standard de Bogoliubov en écrivant la fonction d'onde $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} = \Psi_{\sigma}(\mathbf{r}) + \hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$, où $n_{\sigma}(\mathbf{r}) = |\Psi_{\sigma}(\mathbf{r})|^2$ est la densité du condensat dans l'état $|\sigma\rangle$, $\hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$ est l'opérateur annihilation d'une particule en position \mathbf{r} d'impulsion non-nul. En négligeant le terme $\hat{\phi}_{\sigma\mathbf{r}}$ et en substituant $\hat{\Psi}_{\sigma\mathbf{r}} = \Psi_{\sigma}(\mathbf{r})$ dans l'équation 6.1, l'énergie de champ-moyen s'écrit :

$$\frac{E_{\text{MF}}}{V} = \frac{\hbar\delta(1 - \alpha^2) - 2\hbar\Omega\alpha}{2(1 + \alpha^2)}n + \frac{g_{\uparrow\uparrow}\alpha^4 + g_{\downarrow\downarrow} + 2g_{\uparrow\downarrow}\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{n^2}{2} \quad (6.2)$$

où $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ et $\alpha = \sqrt{n_{\uparrow}/n_{\downarrow}}$. Dans la limite de faible densité, l'énergie de champ-moyen E_{MF} est minimisée pour $\alpha = \alpha_0 = \delta/\Omega + \sqrt{1 + \delta^2/\Omega^2}$. Ceci est équivalent à supposer que l'ensemble des atomes du condensat sont dans l'état habillé à une particule $|-\rangle$. Cet état est l'état fondamental de l'hamiltonien Rabi $\hat{\xi}$ et s'écrit avec nos notations :

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_0^2}}(\alpha_0 |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (6.3)$$

Comme détaillé dans le chapitre 5, le premier terme de l'équation (6.2) correspond à la densité d'énergie de l'hamiltonien de Rabi à une particule. Le deuxième terme est la densité d'énergie associée aux interactions à deux corps, dont la longueur de diffusion a_{--} est définie par :

$$a_{--} = \frac{a_{\uparrow\uparrow}\alpha_0^4 + a_{\downarrow\downarrow} + 2a_{\uparrow\downarrow}\alpha_0^2}{(1 + \alpha_0^2)^2} \quad (6.4)$$

Pour $a_{\uparrow\uparrow} > 0$, $a_{\downarrow\downarrow} > 0$ et $a_{\uparrow\downarrow} < 0$, la longueur de diffusion a_{--} admet un minimum en fonction de δ (ou α_0).

6.2.2 Spectres des excitations

La présence du terme Ω dans l'hamiltonien (6.1) a une conséquence importante sur le système. Le couplage va fixer la phase relative $\phi_r = \phi_{\uparrow} - \phi_{\downarrow}$ entre les deux états de spin, et conduit à une conservation du nombre total d'atomes $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ uniquement. Dans le cas où $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow}$, les modes de Bogoliubov peuvent s'écrire¹ [66, 170] :

$$E_d(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + (g + g_{\uparrow\downarrow})n \right)} \quad (6.5)$$

$$E_s(k) = \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + (g - g_{\uparrow\downarrow})n + 4\hbar\tilde{\Omega} \right) + 2\hbar\tilde{\Omega} \left[(g - g_{\uparrow\downarrow})n + 2\hbar\tilde{\Omega} \right]} \quad (6.6)$$

avec $\tilde{\Omega} = \Omega(\alpha_0 + 1/\alpha_0)/2$.

La figure 6.1 représente le spectre de Bogoliubov pour un mélange couplé de manière cohérente. Les modes de densité $E_d(k)$ sont sans gap et correspondent à des

1. Les expressions des modes $E_d(k)$ et $E_s(k)$ ne sont valables que pour $g_{\uparrow\downarrow}n < gn + \hbar\Omega$.

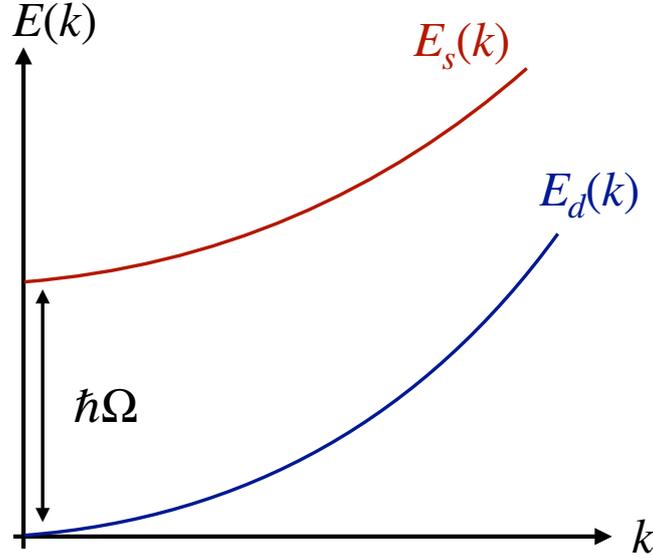


FIGURE 6.1 – Spectre des excitations pour un mélange couplé dans le régime où $-a_{\uparrow\downarrow} < \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. $E_d(k)$ et $E_s(k)$ correspondent respectivement à l'énergie des modes de densité et de spin.

excitations de la densité totale, ces modes sont identiques au cas non couplé (Voir la partie 1.3.2). La relation de dispersion pour les modes de spin présente un gap d'énergie $\hbar\Omega$ correspondant à la fixation de la phase relative entre les deux états de spin. Lorsque $\Omega = 0$, le gap disparaît et on retrouve le cas standard d'un mélange non couplé avec deux branches de Bogoliubov sans gap. Le spectre de Bogoliubov d'un mélange couplé de manière cohérente a été sondé dans le groupe de G. Ferrari à Trento [179].

6.3 Terme au-delà du champ-moyen pour un mélange couplé

Dans la suite, nous allons nous focaliser sur le cas particulier où le minimum de a_{--} est égale à zéro. Expérimentalement, nous atteignons cette configuration en changeant le champ magnétique extérieur et le désaccord δ . Ceci se traduit par deux conditions :

$$\delta a = 0 \text{ et } \alpha_0 = \beta \quad (6.7)$$

où $\delta a = a_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$ et $\beta = (a_{\downarrow\downarrow}/a_{\uparrow\uparrow})^{1/4}$ est le paramètre quantifiant l'asymétrie des interactions. Il est important de remarquer que dans l'équation de champ-moyen (6.2), nous avons omis le terme d'interaction à trois corps [162]. En effet, comme nous

l'avons détaillé dans le chapitre précédent, ce terme à trois corps est nul au niveau du minimum de a_{--} et E_{MF}/V est quadratique en n . Lorsque a_{--} est minimale et que les longueurs de diffusions du système sont tels que $\delta a = 0$, le condensat devient sans interactions dans une vision purement de champ-moyen. Dans ces conditions, le spectre de Bogoliubov se réécrit simplement :

$$E_d(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (6.8)$$

$$E_s(k) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\tilde{\Omega}\right) \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \hbar\tilde{\Omega} - 2g_{\uparrow\downarrow}n\right)} \quad (6.9)$$

6.3.1 Expression du terme provenant des fluctuations quantiques

Comme nous l'avons déjà souligné, le terme dans l'équation d'état provenant des fluctuations quantiques, correspond à la sommation des énergies de point-zéro des modes de Bogoliubov. En comparaison du cas sans couplage cohérent, la structure des modes d'excitations a ici changé. Plus particulièrement, le mode de spin présente un gap, changeant ainsi la forme du terme au-delà du champ-moyen. Le calcul dans le cas d'interactions symétriques ($a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow}$) et pour $\delta = 0$ a été réalisé dans [174]. La généralisation au cas asymétrique ($a_{\uparrow\uparrow} \neq a_{\downarrow\downarrow}$) est plus difficile à mettre en oeuvre en raison de la complexité des expressions des modes de Bogoliubov². Ces calculs ont été réalisés par D.S. Petrov et A. Recati. Le terme au-delà du champ-moyen E_{BMF} peut s'écrire simplement sous la forme suivante [176] :

$$\begin{aligned} \frac{E_{\text{BMF}}}{V} &= \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \left[\frac{(g + g_{\uparrow\downarrow})}{2} n \right]^{5/2} \\ &+ \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \left[\frac{(g - g_{\uparrow\downarrow})}{2} n \right]^{5/2} I \left(\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{-2g_{\uparrow\downarrow}n} \right), \end{aligned} \quad (6.10)$$

où la fonction $I(y)$ est définie tel que :

$$I(y) = \frac{15}{4} \int_0^1 \sqrt{x(1-x)(x+y)} dx \quad (6.11)$$

Le premier terme de (6.10) correspond à la contribution des modes de densité dans l'équation d'état. Le deuxième terme dépend de la pulsation Rabi *via* l'intégrale $I(\tilde{\Omega}/-2g_{\uparrow\downarrow}n)$ et se rapporte à la contribution des fluctuations quantiques associés aux modes de spin. Sous les conditions définie en (6.7), le terme au-delà du champ-moyen originant des modes de densité s'annule et l'énergie E_{BMF} vaut :

2. Le lecteur est invité à lire le *supplemental material* de l'article [175] associé à cette étude pour le détail des calculs. Les calculs sont exposés en pages 217 - 220.

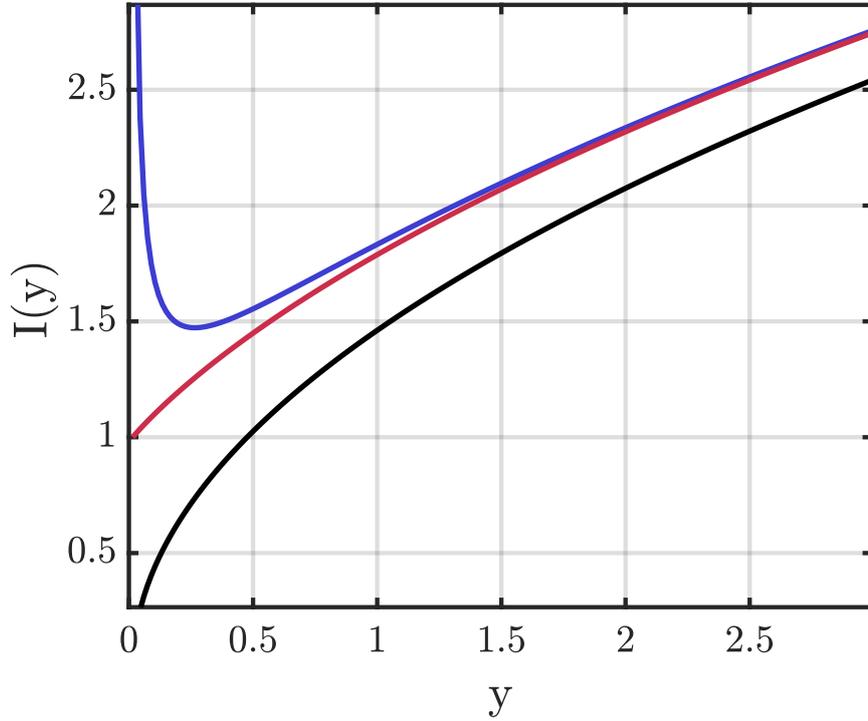


FIGURE 6.2 – Intégrale $I(y)$ en fonction du paramètre $y = \hbar\tilde{\Omega}/-2g_{\uparrow\downarrow}n$. La courbe rouge correspond à l'expression exacte de $I(y)$. Pour $1/y \rightarrow 0$, il est possible de développer l'intégrale, on obtient ainsi un terme à deux corps et un terme à trois corps dans l'équation d'état. La courbe noire représente le terme de $I(y)$ associé au terme à deux corps. La courbe bleue est la somme des terme de $I(y)$ associés à l'interaction à deux et à trois corps.

$$\frac{E_{\text{BMF}}}{V} = \frac{8}{15\pi^2} \frac{m^{3/2}}{\hbar^3} \left[\frac{(-2g_{\uparrow\downarrow})}{2} n \right]^{5/2} I \left(\frac{\hbar\tilde{\Omega}}{-2g_{\uparrow\downarrow}n} \right) \quad (6.12)$$

Nous avons tracé l'intégrale $I(\hbar\tilde{\Omega}/-2g_{\uparrow\downarrow}n)$ en figure 6.2. La fonction I est une fonction monotone croissante qui tend vers 1 lorsque $y = \hbar\tilde{\Omega}/-2g_{\uparrow\downarrow}n \rightarrow 0$. Ainsi, pour $y = 0$, on retrouve le cas de deux condensats non couplés dont la densité d'énergie E_{BMF}/V est proportionnelle à $n^{5/2}$. De plus, on remarque qu'en augmentant le couplage Ω entre les deux états de spin, la contribution des fluctuations quantiques dans l'équation d'état va augmenter également. L'expression (6.12) est une bonne approximation de la densité d'énergie au-delà du champ-moyen lorsque $|\delta a/a_{\uparrow\downarrow}| \ll 1$ et $|\alpha_0 - \beta| \ll 1$.

Régime de couplage fort

Lorsque $1/y = -2g_{\uparrow\downarrow}n/\hbar\tilde{\Omega} \rightarrow 0$, nous sommes dans le régime de couplage fort, et l'intégrale $I(y)$ peut être développée en puissance de $1/y$. Les deux premiers termes de l'expansion sont :

$$I(y) \approx \frac{15\pi}{128} (4\sqrt{y} + 1/\sqrt{y}) \quad (6.13)$$

La substitution dans l'équation (6.12) conduit à la densité d'énergie suivante :

$$\frac{E_{\text{BMF}}}{V} = \frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi\hbar^3} \sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} g_{\uparrow\downarrow}^2 \frac{n^2}{2} + \frac{3m^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}\hbar^3} \frac{|g_{\uparrow\downarrow}|^3 n^3}{\sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} 6}, \quad (6.14)$$

Dans l'approximation de la densité locale, l'énergie totale s'obtient en intégrant :

$$E_{\text{BMF}} = \int \left[\frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi\hbar^3} \sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} g_{\uparrow\downarrow}^2 \frac{n(\mathbf{r})^2}{2} + \frac{3m^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}\hbar^3} \frac{|g_{\uparrow\downarrow}|^3 n(\mathbf{r})^3}{\sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} 6} \right] d\mathbf{r}, \quad (6.15)$$

où $n(\mathbf{r})$ est le profil de densité du condensat.

La nouvelle expression change qualitativement du cas non couplé, c'est-à-dire, du terme de Lee-Huang-Yang, qui est proportionnel à $n^{5/2}$. Le premier terme³ du membre de droite est une interaction à deux corps $\propto n^2$ proportionnel à $\sqrt{\tilde{\Omega}}$. Le dernier terme est une interaction à trois corps $\propto n^3$ proportionnel à $1/\sqrt{\tilde{\Omega}}$. Il y a évidemment des termes supérieurs dans l'expansion, correspondant à des termes à quatre corps, cinq corps, etc. Cependant, leurs poids respectifs dans l'équation d'état sont négligeables par rapport aux termes à deux et à trois corps pour $y > 1$.

Discussion physique

Les deux termes peuvent être interprétés comme une renormalisation au-delà du champ-moyen de la longueur de diffusion a_{--} et d'une interaction à trois corps émergente du couplage, chacun avec une dépendance en $\tilde{\Omega}$ spécifique (Voir annexe D). Notamment, le terme à deux corps $\propto a_{\uparrow\downarrow}^2 \sqrt{\tilde{\Omega}}$, dérivé dans une approche à N-corps, coïncide avec la résolution exacte du problème à deux corps dans la limite $a_{\uparrow\downarrow} \sqrt{m\tilde{\Omega}/\hbar} \ll 1$ [176]. De plus, la constante de couplage à trois corps de l'expression (6.14) correspond également à celle obtenue lors de la résolution exacte du problème à trois corps en présence d'un couplage cohérent [158].

3. C'est ce terme $\propto g_{\uparrow\downarrow}^2 \sqrt{\tilde{\Omega}}$ que nous avons pris en compte dans les expériences de collapse détaillées dans le chapitre précédent afin d'affiner notre modèle théorique.

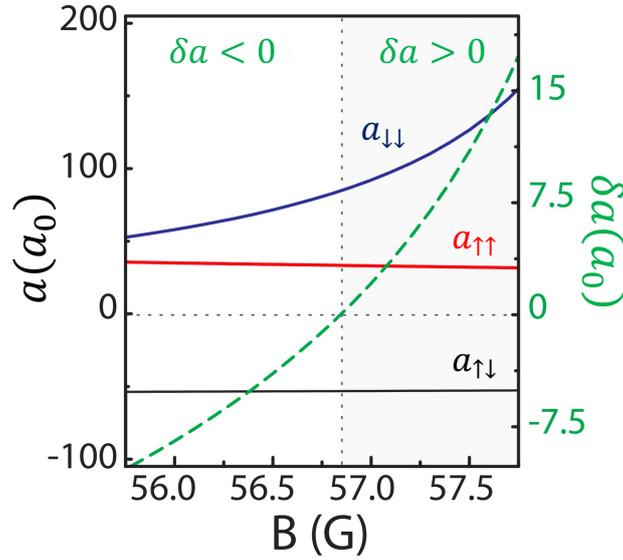


FIGURE 6.3 – Longueurs de diffusions ($a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$, $a_{\uparrow\downarrow}$) intra et inter espèces dans le cas d'un mélange de spin $|1, -1\rangle$ et $|1, 0\rangle$ pour le ^{39}K , ainsi que la longueur de diffusion effective δa .

6.4 Observations expérimentales

6.4.1 Procédure expérimentale

Le but de l'expérience est ici de mesurer l'énergie des fluctuations quantiques au point où le champ-moyen est annulé (Voir condition (6.7)) à travers des mesures d'énergies libérées dans des expansions unidimensionnelles (Voir figure 6.5). Nous travaillons avec les sous-états Zeeman $|\uparrow\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|\downarrow\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$. Afin d'obtenir un champ-moyen nul, après la condensation, le champ magnétique est changé jusqu'à atteindre $B = 56.830(1)$ G. À proximité de ce point, la longueur de diffusion δa s'annule⁴ (Voir figure 6.3). Les longueurs de diffusions pour les états non couplés valent respectivement $a_{\uparrow\uparrow} = 33.4 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 83.4 a_0$ et $a_{\uparrow\downarrow} = -53.2 a_0$, le minimum de a_{--} vaut $-0.2 a_0$ lorsque $\delta = 0.23 \Omega$ (voir figure 6.4). Nous avons vérifié que l'énergie de champ-moyen résiduelle est une faible correction dans notre expérience par rapport à l'énergie provenant des fluctuations quantiques.

L'expérience commence avec un condensat dans l'état $|\uparrow\rangle$ piégé optiquement dans un potentiel harmonique allongé en forme de cigare avec les fréquences $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (\omega_{\perp}, \omega_{\perp}, \omega_z) = (137, 137, 25.4)$ Hz. Initialement, le rayon longitudinal du profil de Thomas-Fermi intégré dans les deux directions transverses (profil de Thomas-Fermi

4. À la suite de la prise des données expérimentales, nous avons discuté avec E. Tiemann qui a réalisé des calculs plus précis des longueurs de diffusions. À ce champ magnétique $\delta a = -0.42 a_0$.

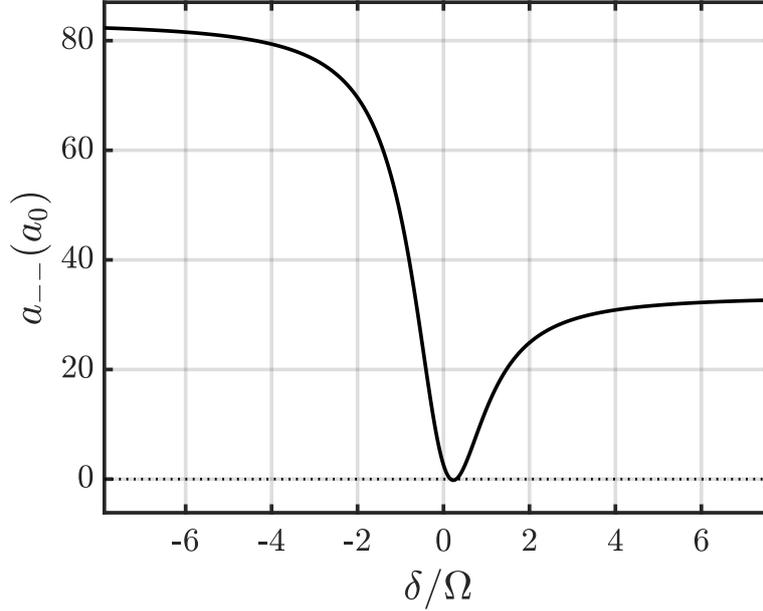


FIGURE 6.4 – Longueur de diffusion a_{--} à $B = 56.830(1)$ G avec $a_{\uparrow\uparrow} = 33.4 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 83.4 a_0$ et $a_{\uparrow\downarrow} = -53.2 a_0$, le minimum a_{--}^{\min} vaut $-0.2 a_0$ lorsque $\delta/\Omega = 0.23$.

1D) est $R_{\text{ini}} \approx 33 \mu\text{m}$. La figure 6.6 montre les différentes étapes de la procédure expérimentale. Afin de transférer le condensat de l'état $|\uparrow\rangle$ dans l'état habillé $|-\rangle$, nous procédons à un transfert adiabatique par balayage de fréquence. Le champ radiofréquence est allumé à une fréquence loin de résonance $\delta = 7.5 \Omega$, nous changeons ensuite sa fréquence jusqu'à atteindre le désaccord $\delta \approx 0.23 \Omega$, pour lequel $\alpha_0 \approx \beta$ et nous laissons le champ radio-fréquence allumé durant le reste de l'expérience.

Toutefois, durant le balayage en fréquence la longueur de diffusion a_{--} diminue de $33.4 a_0$ à une valeur proche de zéro. Ce changement des interactions peut induire une dynamique spatiale si le transfert est trop rapide par rapport aux fréquences des pièges. Par conséquent, la forme et la durée de 9 ms ont été choisis afin d'être à la fois adiabatique par rapport à la dynamique interne⁵ (condition (4.21)) et par rapport à la dynamique radiale de la fonction d'onde dont l'échelle de temps est donnée par $2\pi/\omega_{\perp}$. Pendant le transfert, à mesure que les interactions diminuent, la fonction d'onde radiale va rétrécir de plus en plus et se rapprocher de l'état fondamental du piège transverse. Nous avons vérifié que nous n'observons pas d'oscillations ra-

5. La forme de $\delta(t)$ a été choisie en analysant numériquement et expérimentalement les oscillations de Rabi résiduelles après un balayage adiabatique. Nous avons trouvé que la fonction suivante $\delta(t) = \frac{(\delta_{\text{ini}} - \delta_f)}{\alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{1 + \alpha t/t_f} - 1 \right) + \delta_f$, avec $t \in [0, t_f]$ où t_f est le temps du balayage et α une constante, minimise mieux les oscillations de Rabi résiduelles et donc permet un meilleur transfert adiabatique qu'une droite ou une exponentielle.

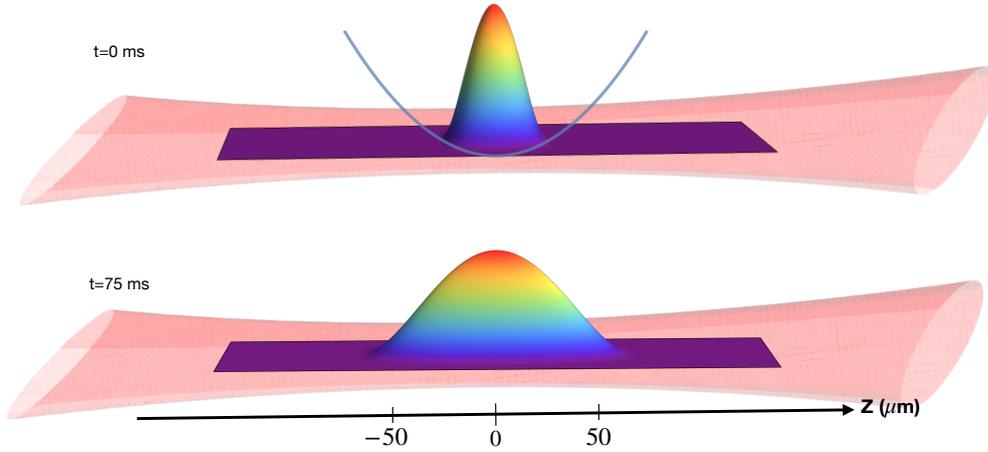


FIGURE 6.5 – Schéma de l’expérience. Le condensat est initialement à $t=0$ dans l’état $|-\rangle$, et de taille initiale dans la direction longitudinale $R_{\text{ini}} \approx 33 \mu\text{m}$. Le piège longitudinale est coupé et les atomes sont libres d’évoluer unidimensionnellement pendant 75 ms. L’énergie d’interaction est répulsive, le système minimise son énergie en diminuant sa densité et va donc s’étendre. L’énergie initiale d’interaction est convertie en énergie cinétique. Dans le régime balistique, la taille finale du condensat $\sigma_f \propto \sqrt{E_{\text{BMF}}}$.

diales résiduelles causées par un transfert trop rapide. Néanmoins, le balayage en fréquence est non adiabatique par rapport à la dynamique axiale, le transfert est donc un quench des interactions, et la fonction d’onde axiale acquiert ainsi une dynamique (rétrécissement dû à la diminution des interactions). Pour contrecarrer cette dynamique, nous éteignons le piège longitudinalement et ajustons sa diminution de telle sorte d’annuler toute diminution ou augmentation de la taille axiale après un temps de vol tridimensionnel de 10.4 ms.

Une fois le piège longitudinal éteint, les atomes sont libres d’évoluer longitudinalement, nous procédons à un temps de vol unidimensionnel pendant $t_f = 75 \text{ ms}$ (Voir figure 6.5 et 6.6). Les interactions étant globalement répulsives, le système va minimiser son énergie en diminuant sa densité, c’est-à-dire, que l’énergie initiale d’interaction est convertie en énergie cinétique. Après un long temps d’expansion⁶, la mesure de la taille RMS ($\sigma = \sqrt{\langle z^2 \rangle}$) finale du condensat σ_f , nous donne directement accès à l’énergie au-delà du champ-moyen, plus précisément $\sigma_f \propto \sqrt{E_{\text{BMF}}}$ (Voir figure 6.5).

6. Dans le régime balistique ($t_f \gg \sqrt{m\sigma_{\text{ini}}^2/2E_{\text{BMF}}}$), on a $\sigma_f \propto \sqrt{E_{\text{BMF}}}$, où σ_f et σ_{ini} sont respectivement la taille RMS finale et initiale.

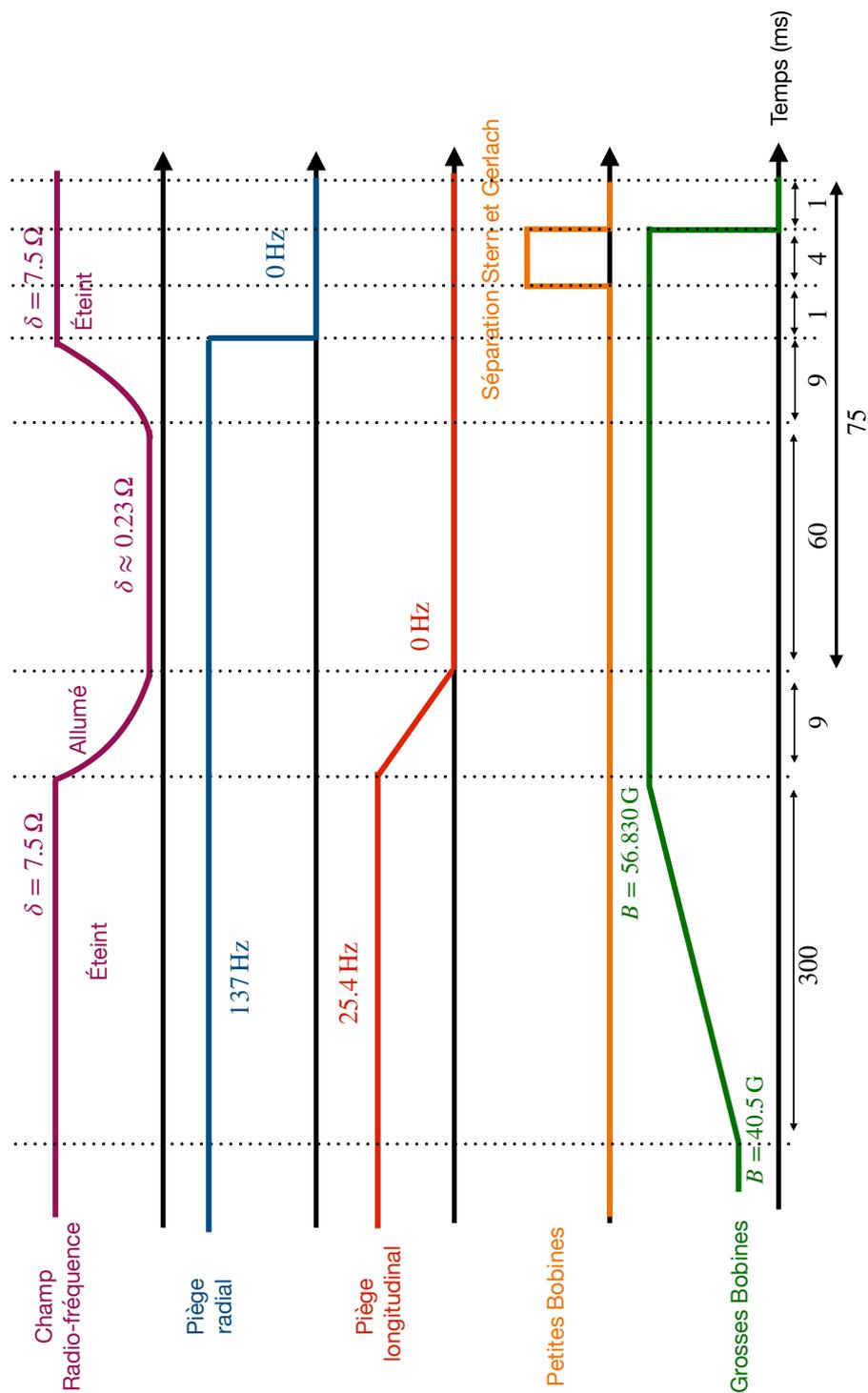


FIGURE 6.6 – Schéma de la procédure expérimentale, juste après la condensation dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$.

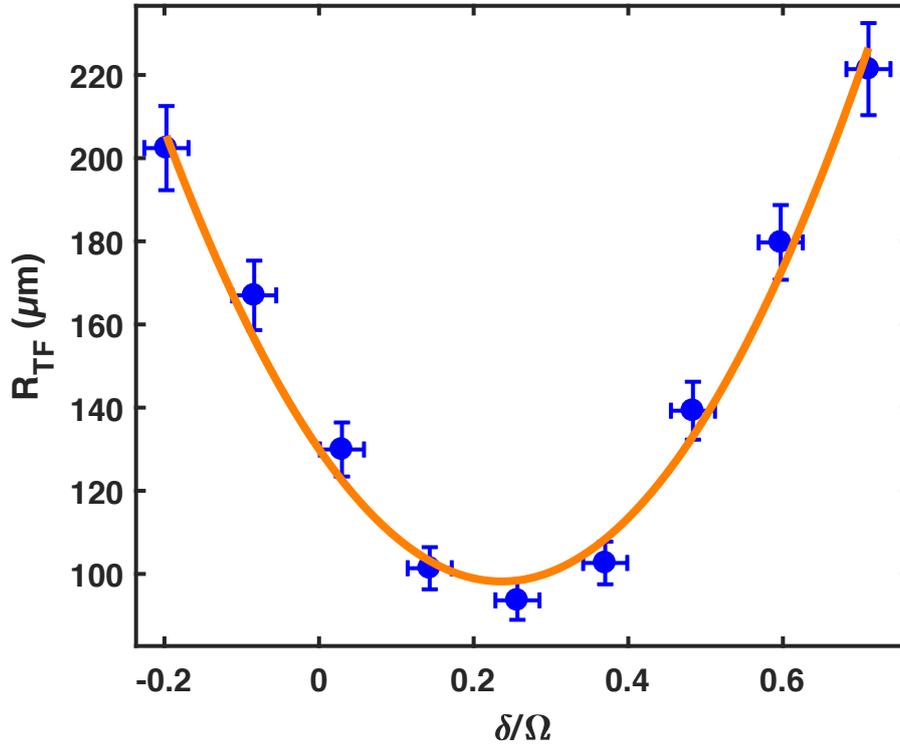


FIGURE 6.7 – Rayon de Thomas-Fermi expérimental après une expansion de 75 ms en fonction de δ/Ω pour $\Omega/2\pi = 12.29$ kHz. La courbe orange parabolique permet de schématiser la tendance des points expérimentaux.

6.4.2 Mesure de l'équation d'état au-delà du champ-moyen

Expansion en fonction de δ/Ω

Après l'expansion de 75 ms, nous extrayons la taille du condensat à l'aide d'un fit de la densité avec la fonction de Thomas-Fermi unidimensionnel ⁷ $\propto 1 - (z/R_{TF})^2$. La figure 6.7 représente la taille R_{TF} du condensat en fonction du désaccord δ/Ω pour une fréquence Rabi $\Omega/2\pi = 12.29$ kHz. Nous observons un clair minimum pour $\delta/\Omega \approx 0.23$, qui est la valeur attendue théoriquement pour laquelle a_{--} et donc l'énergie de champ moyen E_{MF} s'annulent. En principe dans cette expérience, nous minimisons l'énergie totale $E_{MF} + E_{BMF}$ en fonction du désaccord δ . Cependant, la variation de l'énergie E_{MF} en fonction de δ est largement plus importante que celle de l'énergie E_{BMF} . Ainsi, nous pouvons supposé que E_{BMF} est approximativement constant. Par conséquent, la variation de la taille du condensat est dominée par la variation de l'énergie de champ-moyen E_{MF} *via* a_{--} . Nous avons vérifié que pour

7. La forme analytique de la fonction d'onde longitudinale n'est pas connue après l'expansion. Nous avons testé plusieurs fonctions pour le fit (Gaussienne, Thomas-Fermi 3D, etc). Celle qui minimise l'erreur est la fonction de Thomas-Fermi 1D.

nos paramètres expérimentaux, la prise en compte de la dépendance en δ pour E_{BMF} conduit à des décalages de l'énergie minimale en dessous de 1 %. Ainsi, comme nous venons de le souligner, au minimum trouvé expérimentalement, les conditions (6.7) sont validées, l'énergie de champ-moyen est nulle, et la dynamique du système est uniquement dictée par les fluctuations quantiques.

Expansion en fonction de Ω

Pour $\delta = 0.23\Omega$, nous répétons l'expérience pour différentes valeurs de Ω . La figure 6.8 représente le rayon de Thomas-Fermi mesuré en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Pour des valeurs de $\Omega/2\pi$ comprises entre 6 kHz et 38 kHz, nous observons une lente augmentation de la taille du condensat avec Ω . Nous interprétons cette accroissement par l'augmentation du terme au-delà du champ-moyen avec Ω . Plus spécifiquement, après un long temps de vol et dans le régime fortement couplé, où l'interaction à deux corps BMF domine, la taille est attendue d'avoir une dépendance en $\sqrt{E_{\text{BMF}}} \propto \Omega^{1/4}$. Toutefois, à faibles fréquences de Rabi, nous notons une augmentation de la taille du condensat que nous attribuons à la présence de fluctuations du champ magnétique.

Contrairement à la mesure proche du régime des interactions fortes du groupe de C. Salomon [38], où typiquement $na^3 \sim 2 \times 10^{-3}$, nos expériences sont effectuées dans un régime d'interactions faibles ($na_{\uparrow\downarrow}^3 \sim 1 \times 10^{-5}$). Les énergies mesurées⁸ sont de l'ordre de la vingtaine de Hz et la précision (barres d'erreurs) de nos mesures est de l'ordre de quelques Hz. Ces valeurs sont à comparer à celles des énergies de champ-moyen initiales (avant la formation du mélange) qui sont de l'ordre de 3 kHz. Le poids de l'énergie BMF est donc similaire à celui d'un condensat typique de densité $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$ et avec une longueur de diffusion $a \sim 50 a_0$ (c'est-à-dire quelques %). Cependant, grâce au couplage cohérent, nous avons été capable de suffisamment diminuer l'énergie de champ-moyen et de rendre l'énergie au-delà du champ-moyen dominante. Notre précision expérimentale a permis la première mesure quantitative de l'énergie au-delà du champ-moyen pour un mélange couplé de manière cohérente, tout en restant dans le régime des interactions faibles.

Effets des fluctuations du champ magnétique sur la taille du condensat

Le spectre de bruit du champ magnétique produit par les bobines est composé d'un bruit de fond à basses fréquences avec des pics à 50 Hz et aux autres harmoniques. Il y a également un bruit de fond à des fréquences jusqu'à quelques kHz.

8. L'ordre de grandeur des énergies peut être estimé avec relativement une bonne précision à partir de $E \approx m\sigma_f^2/2t_f^2$. Cette relation est valide dans le régime balistique et nos mesures ne sont pas réellement dans ce régime. La densité a uniquement diminuée d'un facteur ~ 3 et par conséquent toute l'énergie d'interaction n'est pas encore convertie en énergie cinétique. Une estimation plus correcte des énergies sera faites dans la suite à partir de simulations numériques.

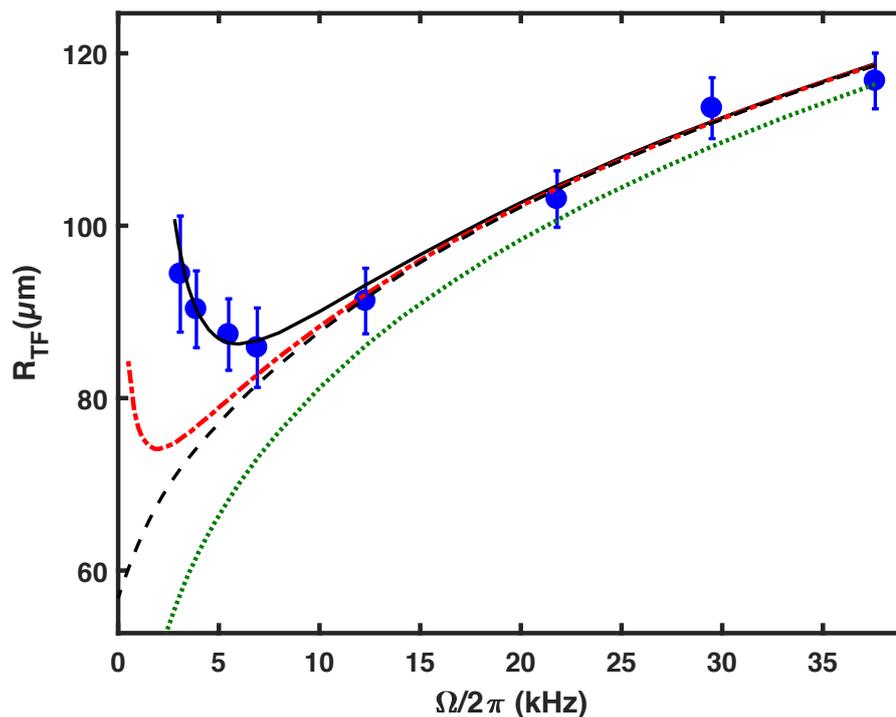


FIGURE 6.8 – Rayon de Thomas Fermi minimal (pour $\delta = 0.23$) du condensat après 75 ms d’expansion en fonction de la fréquence de Rabi $\Omega/2\pi$. Chaque point est obtenu en moyennant 15 images et les barres d’erreurs correspondent à l’écart-type des mêmes mesures. Les courbes correspondent aux simulations de l’équation de Gross-Pitaevskii avec ou sans ajout du bruit magnétique et pour différentes expressions de E_{BMF} (voir texte). La courbe noire : expression exacte avec bruit magnétique. La courbe noire en tiret : expression exacte sans bruit magnétique. La courbe verte en pointillée : uniquement le terme à deux corps de E_{BMF} sans bruit. La courbe rouge en tiret-pointillé : somme du terme à deux et à trois corps sans bruit.

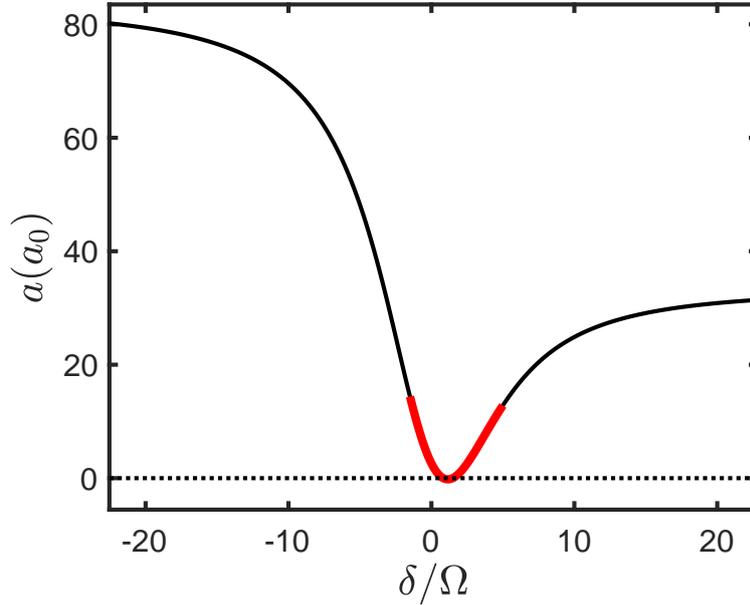


FIGURE 6.9 – Longueur de diffusion a_{--} en fonction de delta (courbe noire). La zone surlignée en rouge schématise l’effet des fluctuations de champ. Pendant l’expansion, le changement de δ induit un scan de la zone parabolique de a_{--} .

Les bobines magnétiques se comportent comme un filtre passe-bas et les fréquences au-delà de 10 kHz peuvent être négligées dans la suite de notre analyse. Les fluctuations du champ magnétique vont avoir deux effets distincts sur la taille du condensat après expansion. Les fluctuations magnétiques à basses fréquences ω_b , c’est à dire $\omega_b \ll \Omega$, n’induisent pas de dynamique non-adiabatique de l’état interne, les atomes restent dans l’état habillé $|-\rangle$. Toutefois, les changements du champ magnétique induisent des changements de δ , et comme le schématise la figure 6.9 on explore la zone parabolique de a_{--} pendant l’expansion du condensat. Ces fluctuations à basses fréquences conduisent donc à l’ajout d’énergie de champ-moyen dans le système. Comme expliqué dans l’annexe C, à partir d’une expérience de Ramsey de $50 \mu\text{s}$, nous avons mesuré des fluctuations du champ magnétique d’écart type (RMS) $\Delta B \sim 0.8(2) \text{ mG}$ ⁹ correspondant pour le désaccord à des fluctuations $\Delta\delta \sim 560(140) \text{ Hz}$. Ces fluctuations conduisent à une augmentation de la valeur moyenne de la longueur de diffusion d’une quantité :

$$\Delta a_{--} \approx 48 \left(\frac{\Delta\delta}{\Omega} \right)^2 a_0. \quad (6.16)$$

Cette valeur provient essentiellement du moyennage du bruit à 50 Hz et 100 Hz.

9. Avec les oscillations de Ramsey, nous trouvons des fluctuations du champ magnétique similaires à la mesure avec les transducteurs de courant (Voir partie 4.2.4).

La deuxième contribution provient du bruit proche de Ω . Nous avons vu que la différence d'énergie entre les deux états habillés ($|-\rangle$ et $|+\rangle$) est égale à $\hbar\Omega$. Ces fluctuations peuvent donc induire des transitions de l'état $|-\rangle$ vers l'état $|+\rangle$. La longueur de diffusion a_{+-} est positive et vaut $\sim 52.5 a_0$. La présence d'atomes dans $|+\rangle$ induit des effets de champ-moyen répulsifs et va ainsi changer la dynamique. Afin de savoir si des atomes sont transférés dans l'état $|+\rangle$ nous appliquons la procédure expérimentale suivante (figure 6.6) :

- À la fin de l'expansion, nous appliquons un balayage de fréquence inverse, la fréquence est changée rapidement par rapport à la dynamique spatiale mais lentement devant la dynamique interne, jusqu'à revenir au désaccord $\delta = 7.5 \Omega$. Cette étape, nous permet de projeter les états $|-\rangle$ et $|+\rangle$ sur les états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$, qui sont ensuite détectés séparément par fluorescence à l'aide d'une séparation de Stern et Gerlach.

La figure 6.10 montre le pourcentage d'atomes dans l'état $|+\rangle$ en fonction de la fréquence Rabi pour les données de la figure 6.8. On remarque que pour $\Omega > 10$ kHz, on n'observe pas d'atomes dans $|+\rangle$. L'inductance des bobines magnétiques agit comme un filtre passe-bas. Notamment, le bruit dont la fréquence est supérieure à 10 kHz est filtré et peut être négligé dans notre expérience. Pour $\Omega/2\pi < 10$ kHz, on observe une claire augmentation du nombre d'atomes dans $|+\rangle$ lorsque Ω diminue.

L'effet des atomes dans $|+\rangle$ sur l'expansion est difficile à quantifier. Tout d'abord, les atomes sont transférés dans $|+\rangle$ tout au long de l'expansion. Au début de l'expansion la densité est plus élevée, et comme $a_{+-} > 0$, les atomes transférés dans $|+\rangle$ au début de l'expansion vont avoir un effet plus important sur la dynamique, ils vont davantage augmenter l'énergie dans le système que s'ils sont transférés plus tard. Pour $\Omega = 12.29$ kHz, nous avons ajouté artificiellement du bruit sur le courant électrique des bobines à une fréquence proche de Ω . Qualitativement, nous avons observé que les atomes dans $|+\rangle$ augmentent la taille du condensat, et que l'effet sur la taille devient du même ordre de grandeur que celui du bruit à basses fréquences lorsque il y a plus de $\sim 20\%$ des atomes qui sont transférés dans l'état habillé $|+\rangle$. De plus, nous sommes dans une situation de démixtion pour les états habillés ($a_{+-} > \sqrt{a_{--}a_{++}}$). Ainsi, dans un deuxième temps, les atomes dans $|+\rangle$ vont être expulsés aux bords du profil de densité des atomes dans $|-\rangle$, ils peuvent donc ensuite agir comme un potentiel de piégeage pour les atomes dans $|-\rangle$ et peuvent donc ralentir l'expansion. Quantitativement, pour nos mesures, l'effet de la présence d'atomes dans l'état $|+\rangle$ est secondaire par rapport à l'effet des fluctuations aux basses fréquences.

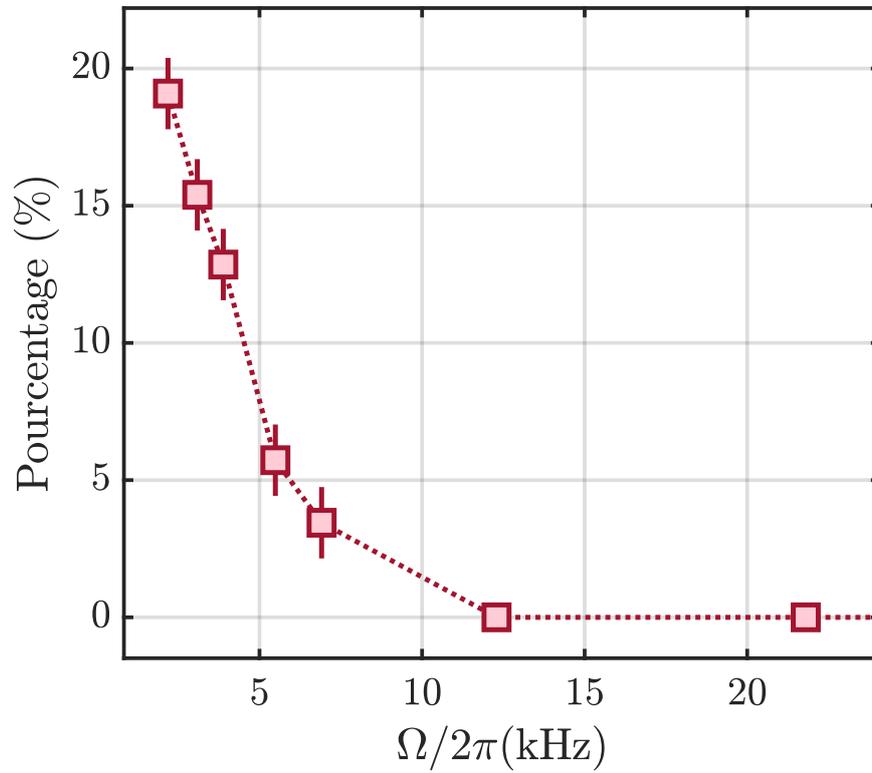


FIGURE 6.10 – Pourcentage d’atomes dans l’état $|+\rangle$ après l’expansion de 75 ms en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Les barres d’erreurs correspondent aux fluctuations sur le nombre d’atomes à chaque itérations de l’expérience.

6.4.3 Observation d'une symétrisation des pertes à trois corps

Les pertes ont lieu principalement dans l'état $|\downarrow\rangle$. On pourrait penser naïvement qu'elles donneraient lieu à un phénomène de décohérence de l'état habillé $|-\rangle$ et à la formation d'atomes dans l'état $|+\rangle$. En pratique, cela n'est pas le cas et nous constatons sur la figure 6.10, qu'il n'y a pas d'atomes dans l'état $|+\rangle$ pour $\Omega/2\pi > 10$ kHz. Les atomes restent donc dans l'état habillé $|-\rangle$. Afin de comprendre la dynamique interne du système, nous pouvons modéliser les pertes dans l'état $|\downarrow\rangle$ en ajoutant un terme imaginaire $-i\Gamma/2$ dans l'hamiltonien Rabi $\hat{\xi}$:

$$\hat{\xi} = \hbar \begin{pmatrix} \delta & \Omega/2 \\ \Omega/2 & -i\Gamma/2 \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

En diagonalisant l'hamiltonien et dans la limite $\Gamma \ll \Omega$, l'état initial reste inchangé, mais décroît avec un taux environ égal à $\Gamma |\langle - | \downarrow \rangle|^2 = \Gamma/(1 + \alpha_0^2)$. Dans notre expérience, la valeur typique est $\Gamma \sim 20 \text{ s}^{-1}$, ce qui est en effet très inférieure à la pulsation Rabi Ω . Nous pouvons par conséquent en conclure que les pertes asymétriques présentes dans les expériences non couplées se réduisent ici à des pertes effectives dans l'état $|-\rangle$ avec le taux de perte Γ renormalisé par la fraction d'atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$.

Nous pouvons également nous convaincre en simulant directement la dynamique interne du système en résolvant les équations de Schrödinger couplées pour les amplitudes de probabilités des états $|\uparrow\rangle$ et $|\downarrow\rangle$. La figure 6.11 montre une simulation numérique réalisée avec un balayage en fréquence linéaire de $\delta_{\text{in}} = 10\Omega$ à $\delta_f = 0$ en 20 ms (a). En (b), nous observons des oscillations rapides des populations correspondant à des oscillations de Rabi résiduelles engendrées par un transfert adiabatique imparfait. On remarque également qu'une fois le désaccord final δ_f atteint, les populations des deux états décroissent exactement de la même manière malgré la présence de perte uniquement dans l'état $|\downarrow\rangle$.

Finalement, l'ajout d'un couplage cohérent dans le système permet une symétrisation des pertes, qui sont initialement présentes que dans un seul des deux états. Ce résultat est important, il montre qu'il est possible de se débarrasser des pertes asymétriques, l'une des principales limitations des expériences sur les effets au-delà du champ-moyen dans les mélanges de condensats.

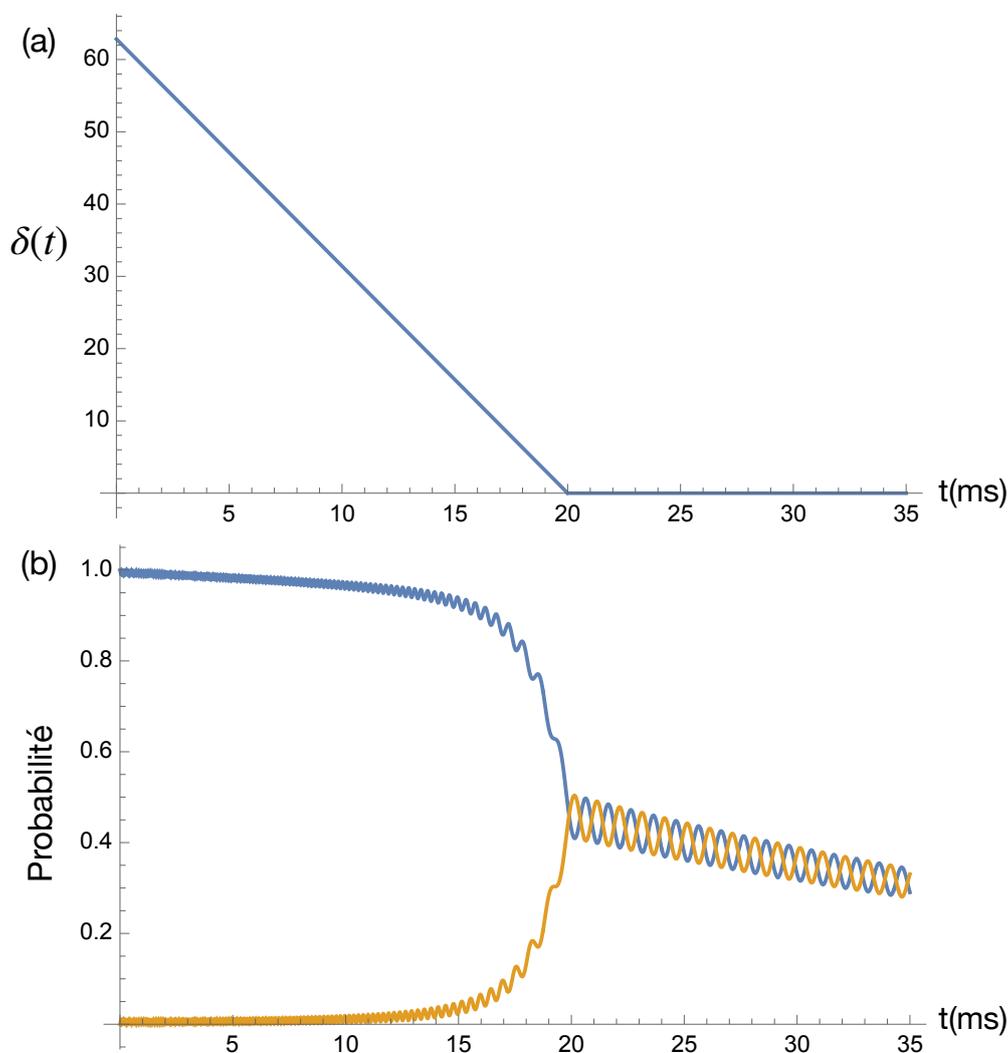


FIGURE 6.11 – Exemple de simulation numérique de l'état interne des atomes par résolution de l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien de Rabi en présence d'un terme imaginaire pour l'énergie de l'état $|\downarrow\rangle$. Dans cette simulation, le taux de perte dans l'état $|\downarrow\rangle$ vaut 25 s^{-1} . (a) Désaccord à la résonance en fonction du temps, la valeur initiale est équivalente à 10Ω . (b) La courbe bleue (respectivement orange) correspond à la probabilité que les atomes soit dans l'état $|\uparrow\rangle$ (respectivement $|\downarrow\rangle$) en fonction du temps.

6.4.4 Simulation numérique

Afin de modéliser¹⁰ précisément notre expérience, nous simulons l'évolution de la fonction d'onde des atomes dans l'état $|-\rangle$ à travers la résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire à une seule composante en présence du terme au-delà du champ-moyen. Dans notre simulation, nous ne prenons pas en compte l'effet de la présence des atomes dans l'état $|+\rangle$ ¹¹. La fonction d'onde axiale est proportionnelle à $1 - (z/R_{\text{TF}})^2$, afin que le profil de densité axial soit celui du profil de Thomas Fermi tridimensionnel avant le transfert adiabatique dans l'état $|+\rangle$. La longueur de cicatrisation de spin est plus petite que la taille radiale du condensat, on peut donc traiter l'énergie E_{BMF} dans l'approximation de densité locale (Voir Eq. 6.15). De plus, comme le potentiel chimique du condensat peut être du même de grandeur que $\hbar\omega_{\perp}$, surtout pour les grandes valeurs de Ω , nous devons prendre en compte en fonction de la densité 1D, notée n_{1D} , la correction à la taille du profil radial gaussien à cause de l'énergie au-delà du champ-moyen à deux corps. Pour cela, nous supposons que la densité radiale est gaussienne de taille RMS $\sigma = \sqrt{\langle r^2 \rangle}$:

$$n = \frac{n_{1D}}{2\pi\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-y^2/2\sigma^2} \quad (6.18)$$

Après intégration radiale et en posant $\tilde{\sigma} = \sqrt{2}\sigma/a_{oh}$, l'énergie totale dans le régime de couplage fort s'écrit¹² :

$$\frac{E}{\hbar\omega_{\perp}N} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2 + \frac{1}{2\tilde{\sigma}^2} + \frac{an_{1D}}{\tilde{\sigma}^2}, \quad (6.19)$$

où $a = a_2 + a_{--} + \Delta a_{--}$, avec $g_2 = 4\pi\hbar^2 a_2/m$ est la constante de couplage associée au terme à deux corps BMF définie par $g_2 = (m^{3/2} g_{\uparrow\downarrow}^2 \sqrt{\hbar\tilde{\Omega}})/(2\hbar^3 \sqrt{2\pi})$, Δa est le terme provenant des fluctuations du champ magnétique à basses fréquences. La correction à la taille radiale se trouve en minimisant l'énergie par rapport à $\tilde{\sigma}$, on trouve :

$$\tilde{\sigma} = (1 + 2an_{1D})^{1/4} \quad (6.20)$$

L'énergie peut donc se réécrire :

$$\frac{E}{\hbar\omega_{\perp}N} = n_{1D} \sqrt{1 + 2an_{1D}} \quad (6.21)$$

Le potentiel chimique intervenant dans l'équation de Schrödinger se détermine par dérivation de l'énergie en fonction de n_{1D} :

10. Pour nos simulations numériques, nous utilisons le module GPElab sur Matlab [101, 103]

11. Pour cela, il faut résoudre le système d'équations couplées pour les états $|-\rangle$ et $|+\rangle$ en présence du spectre de bruit.

12. Nous omettons ici le terme à trois corps. La correction originant de ce terme est négligeable pour nos paramètres. Nous calculons uniquement la correction au terme à trois corps.

$$\mu_2 = \frac{\hbar\omega_{\perp}an_{1D}}{\sqrt{1+2an_{1D}}} + \hbar\omega_{\perp}\sqrt{1+2an_{1D}} \quad (6.22)$$

Nous souhaitons calculer la correction au terme à trois corps par la taille $\tilde{\sigma} = (1+2an_{1D})^{1/4}$. L'énergie correspondant au terme à trois corps au-delà du champ-moyen s'exprime :

$$\frac{E}{N\hbar\omega_{\perp}} = \frac{g_3 n_{1D}^3}{3 \tilde{\sigma}^4} = \frac{g_3 n_{1D}^3}{3 (1+2an_{1D})} \quad (6.23)$$

avec $g_3 = (3m^{3/2}|g_{\uparrow\downarrow}|^3)/(4\hbar^3\sqrt{2\pi}\sqrt{\hbar\tilde{\Omega}})$, la constante de couplage à trois corps. Nous déterminons également le potentiel chimique du terme à trois corps BMF par la dérivation de l'énergie en fonction de n_{1D} :

$$\mu_3 = \frac{\hbar\omega_{\perp}g_3n_{1D}^3}{1+2an_{1D}} - \frac{2\hbar\omega_{\perp}ag_3n_{1D}^3}{3(1+2an_{1D})^2} \quad (6.24)$$

Sur la figure 6.8, nous avons tracé plusieurs courbes correspondant aux différentes simulations de l'expérience. Notre calibration expérimentale du nombre d'atomes est réalisée en utilisant la température de condensation. Cette méthode de calibration est précise à $\sim 20\%$. Dans notre simulation, le nombre d'atomes initial est 1.05×10^5 et a été ajusté à moins de 5% par rapport aux nombres d'atomes mesurées expérimentalement, on reste donc dans nos barres d'erreurs. Le pic initial de densité correspond à $\sim 5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$. Expérimentalement, nous observons durant l'expansion une perte d'atomes d'environ 30%. Comme nous l'avons déjà mentionné, les pertes à trois corps dans l'état $|\downarrow\rangle$ sont dominantes. Si les pertes sont uniquement attribuées à ce canal de pertes, et en tenant compte de la fraction plus faible d'atomes dans $|\downarrow\rangle$, nous obtenons $K_{\downarrow\downarrow\downarrow} = 4 \times 10^{-26} \text{ cm}^6/\text{s}^{-1}$. Cette valeur est environ sept fois plus élevée que celle mesurée dans d'autres études sur des gaz thermiques [46, 91], ceci nous informe de la possible présence d'autres canaux de pertes d'atomes importants. En ajustant le coefficient de pertes à trois corps avec les données expérimentales, nous obtenons un coefficient $K_{\downarrow\downarrow\downarrow} = 4 \times 10^{-28} \text{ cm}^6/\text{s}^{-1}$. La courbe pleine noire correspond à la simulation avec le terme BMF exact (Eq. (6.12)) en présence des fluctuations magnétiques décrites par $\Delta a_{\downarrow\downarrow}$. La courbe en tirets noirs représente la simulation avec le terme BMF exact sans les fluctuations de champ. La courbe en pointillés-tirets rouges montre les résultats de la simulation en tenant compte de l'expression (6.14) et sans fluctuations de champ magnétiques. La courbe en pointillés verts correspond à la simulation avec uniquement le terme au-delà du champ-moyen à deux corps et sans fluctuations du champ magnétique.

Nos simulations montrent que dans l'intervalle exploré expérimentalement ($\Omega > 3 \text{ kHz}$), l'énergie au-delà du champ-moyen est approximativement bien décrite, au moins théoriquement, par la somme d'un terme à deux corps $\propto \sqrt{\tilde{\Omega}}$ et d'un terme

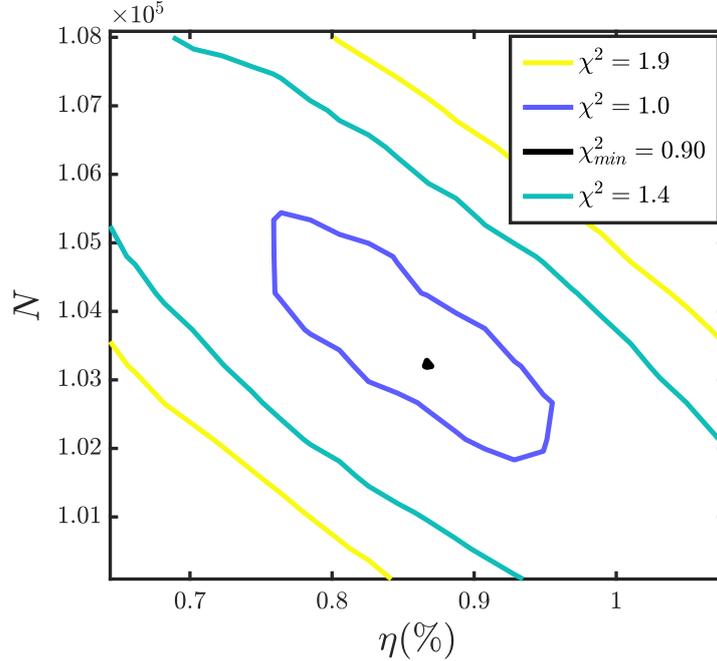


FIGURE 6.12 – Fonction χ^2 en fonction du nombre d'atomes N et de η pour $\Delta B = 560$ Hz.

plus faible à trois corps en $1/\sqrt{\tilde{\Omega}}$. De plus, à l'aide de nos simulations numériques, nous pouvons estimer plus précisément les énergies. Dans notre expérience, pour $\Omega/2\pi = 10$ kHz et $n \approx 5 \times 10^{14}$ cm $^{-3}$, on a $\tilde{\Omega}/(-2g_{\uparrow\downarrow}n) \approx 1$ et l'énergie initiale à deux et à trois corps correspondent respectivement à 20 Hz et 3.2 Hz. Ces valeurs sont similaires à l'ordre de grandeur des énergies mesurées expérimentalement (Voir la discussion de la partie 6.4.2).

6.4.5 Validation de la théorie

Nous souhaitons déterminer plus précisément dans quelle mesure nous vérifions la théorie développée dans la partie 6.3.1. Premièrement, nous observons quantitativement la dépendance de $E_{\text{BMF}} \propto \sqrt{\tilde{\Omega}}$ pour $\Omega/2\pi > 6$ kHz. La dépendance en $1/\sqrt{\tilde{\Omega}}$ provenant du terme à trois corps n'est pas clairement observée. Par conséquent, nous supposons que l'énergie au-delà du champ-moyen s'écrit :

$$\frac{E_{\text{BMF}}}{V} = \frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi\hbar^3} \sqrt{\tilde{\Omega}} g_{\uparrow\downarrow}^2 \frac{n^2}{2} + \eta \times \frac{3m^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}\hbar^3} \frac{|g_{\uparrow\downarrow}|^3 n^3}{\sqrt{\tilde{\Omega}} 6}, \quad (6.25)$$

où le coefficient η est un paramètre variationnel permettant de tester la présence ou non du terme d'interaction à trois corps $\propto 1/\sqrt{\tilde{\Omega}}$. En fonction du nombre d'atomes

N , du paramètre η et des fluctuations du champ magnétique ΔB , nous simulons numériquement l'expérience et nous calculons la fonction χ^2 [180] :

$$\chi^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\left(R_{\text{TF},i}^{(\text{exp})} - R_{\text{TF},i}^{(\text{th})} \right)^2}{\sigma_{\text{exp},i}^2}, \quad (6.26)$$

avec N_p est le nombre de points expérimental, $R_{\text{TF},i}^{(\text{exp})}$ et $R_{\text{TF},i}^{(\text{th})}$ sont respectivement le rayon de Thomas-Fermi expérimental et théorique pour la mesure i , $\sigma_{\text{exp},i}$ est l'incertitude de la mesure i . Cette fonction permet une mesure raisonnable de la qualité d'un modèle théorique par rapport aux données expérimentales [180], un bon modèle va minimiser la fonction χ^2 . Cette méthode est similaire à la méthode des moindres carrés, mais ici chaque point est pondéré par son incertitude expérimentale $\sigma_{\text{exp},i}$. Si $\chi^2 \approx 0$, cela signifie que nous avons surestimé nos barres d'erreurs expérimentales. Inversement, si χ^2 est trop élevé, soit nous avons sous-estimé nos incertitudes expérimentales, soit le modèle théorique est incorrect. Un modèle peut être considéré comme bon lorsque :

$$\chi^2 = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\left(R_{\text{TF},i}^{(\text{exp})} - R_{\text{TF},i}^{(\text{th})} \right)^2}{\sigma_{\text{exp},i}^2} \approx \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\sigma_{\text{exp},i}^2}{\sigma_{\text{exp},i}^2} \approx 1, \quad (6.27)$$

cela signifie qu'en moyenne, à chaque mesure i , la valeur expérimentale est à un $\sigma_{\text{exp},i}$ de la valeur obtenue à partir du modèle théorique. Ce qui est le maximum de ce que l'on peut attendre en raison de nos incertitudes de mesures.

Pour différentes valeurs de N et η , nous pouvons extraire la valeur minimale du χ^2 . À cette valeur, correspond une valeur pour η qu'on nomme η_m . Nous extrayons η_m ainsi que son incertitude σ_η défini par les valeurs extrémales du contour¹³ $\chi_{\text{min}}^2 + 1$. La figure 6.12 montre un exemple de la fonction χ^2 en fonction de N et η pour $\Delta B = 560$ Hz. Le point noir correspond au minimum de χ^2 et vaut $\chi_{\text{min}}^2 = 0.90$. Par exemple, pour cette valeur des fluctuations $\Delta B = 560$ Hz, on trouve $\eta_m = 0.86(30)$. De plus, en répétant cette procédure, nous pouvons également déterminer η_m et σ_η pour différentes valeurs de fluctuations magnétiques ΔB .

Finalement, nous trouvons¹⁴ $\eta = 0.85(35)$, nos mesures expérimentales en fonction de $\Omega/2\pi$ sont, par conséquent, en accord quantitatif avec l'expression (6.14). Les deux termes de (6.14), appelés le terme à deux corps et à trois corps, sont donc mesurés indépendamment grâce à leurs dépendances spécifiques en Ω .

13. Ce critère donne approximativement un intervalle de confiance de 70% [180].

14. La barre d'erreur semble dominée par l'incertitude dans notre détermination des fluctuations du champ magnétique.

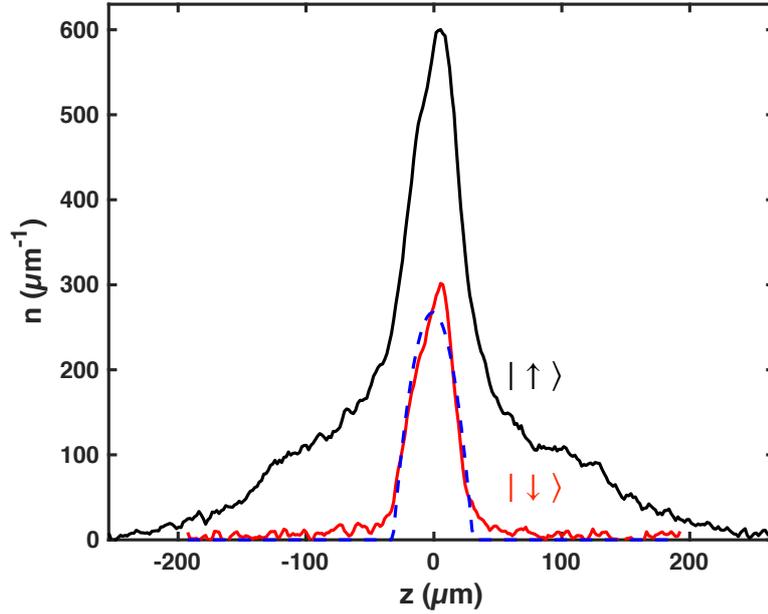


FIGURE 6.13 – Profils de densité pour les atomes dans $|\uparrow\rangle$ (courbe noire) et $|\downarrow\rangle$ (courbe rouge) après une expansion de 75 ms pour $\Omega = 0$. La courbe en tirets bleus correspond à un fit Thomas-Fermi unidimensionnel du profil de densité de l'état $|\downarrow\rangle$.

6.4.6 Étude du cas non couplé ($\Omega = 0$)

Nous répétons la procédure expérimentale d'expansion unidimensionnelle. Toutefois, nous éteignons le champ radiofréquence après le transfert adiabatique par balayage de fréquence. Ainsi les deux condensats sont non couplés. Les pertes d'atomes sont dominantes dans l'état $|\downarrow\rangle$ et contrairement au cas couplé (voir 6.4.3), le paramètre α dévie rapidement de sa valeur initiale β et induit des effets de champ-moyen supplémentaires. De plus, à l'aide d'une séparation Stern et Gerlach, nous observons que les deux condensats se comportent différemment durant l'expansion (voir figure 6.13). Le condensat dans $|\downarrow\rangle$ s'étend peu alors que celui dans l'état $|\uparrow\rangle$ présente une double structure, c'est-à-dire, un pic de densité avec une énergie faible et une partie diffuse à plus haute énergie. Ce comportement est similaire à celui des gouttelettes quantiques (discuté dans le chapitre 3), observé dans les études précédentes [45, 46, 70, 89] où les atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ en excès sont expulsés afin de vérifier la condition de blocage du rapport des densités (Eq. 2.3).

Nous observons que le rayon de Thomas-Fermi 1D du condensat dans l'état $|\downarrow\rangle$ est égal à $31 \mu\text{m}$. Cette valeur est significativement plus faible que le rayon attendu égal à $57 \mu\text{m}$ dans le cadre de notre simulation numérique¹⁵ pour un condensat

15. Nos simulations considère un condensat à une composante dans l'état $|\downarrow\rangle$, il faudrait résoudre les équations couplées de Gross-Pitaevskii pour chaque état de spin.

dans l'état $|-\rangle$ lorsque $\Omega \rightarrow 0$, c'est-à-dire avec $E_{\text{BMF}}/V \propto n^{5/2}$. De plus, cette valeur est du même ordre de grandeur que la taille initiale du nuage $R_{\text{ini}} \approx 33 \mu\text{m}$. Cette différence avec la théorie indique un rôle significatif des effets de champ-moyen supplémentaires et transitoires dans la dynamique de l'expansion au niveau de la région centrale des deux nuages atomiques ($z = 0$). Dans notre expérience, les atomes dans l'état $|\uparrow\rangle$ qui sont en excès, prennent un certain temps pour s'échapper de la région centrale, ils créent un potentiel attractif pour les atomes dans l'état $|\downarrow\rangle$ et les forcent donc à ralentir leurs expansions.

6.5 Conclusion

Finalement, nous avons étudié à la fois théoriquement et expérimentalement, l'équation d'état au-delà du champ-moyen d'un condensat à deux composantes couplé de manière cohérente pour le cas d'interactions asymétriques ($a_{\uparrow\uparrow} \neq a_{\downarrow\downarrow}$). L'énergie E_{BMF} a un poids important lorsque la polarisation de spin et les interactions sont dans la configuration donnée par l'équation 6.7, où les effets de champ-moyen sont minimisés. Nous avons montré qu'en fonction de n , la densité d'énergie provenant des fluctuations quantiques interpole de la dépendance usuelle de Lee-Huang-Yang en $n^{5/2}$ pour un condensat non couplé, vers un comportement qualitativement différent dans le régime de couplage fort, où on peut introduire un terme d'interaction à deux corps et un terme à trois corps, avec des dépendances spécifiques en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$.

Dans des expériences d'expansions unidimensionnelles, nous avons montré que la dynamique est gouvernée par l'énergie au-delà du champ-moyen. Nous détectons non seulement le terme à deux corps dominant $\propto \sqrt{\Omega}$, mais nous mettons également en évidence la présence du terme à trois corps plus faible $\propto 1/\sqrt{\Omega}$. Ces deux termes sont détectés *via* leurs dépendances spécifiques en Ω . Nous avons réalisé, dans le régime des interactions faibles, la première mesure quantitative de l'énergie au-delà du champ-moyen pour un mélange couplé de manière cohérente. Ces expériences démontrent également notre possibilité de mesurer des énergies très faibles de l'ordre de quelques Hz. De plus, nous avons observé que l'addition d'un couplage cohérent permet de préserver la composition entre les deux états de spin et empêche par conséquent que le système s'éloigne du point où le champ-moyen s'annule et facilite ainsi les mesures de l'équation d'état au-delà du champ-moyen. Nos résultats ouvrent la voie à la création de gouttelettes quantiques couplés de manière cohérente dans lesquelles l'interaction globale à deux corps, composée du champ-moyen et des fluctuations quantiques, est compensée par l'effet des interactions à trois corps répulsive du terme au-delà du champ-moyen [39, 158]. Il serait également intéressant d'étudier plus en détail et quantitativement l'effet du terme à trois corps répulsif sur un condensat. Cependant, ces futures expériences nécessitent une réduction supplémentaire des fluctuations magnétiques.

Chapitre 7

Conclusion générale et perspectives

Le travail de cette thèse de doctorat s'inscrit dans le cadre de l'étude des mélanges de spin proches de la zone d'effondrement, c'est-à-dire, proche de l'implosion du système. La possibilité de réduire l'énergie de champ-moyen dans les mélanges, dont les interactions intra-espèces sont répulsives et les interactions inter-espèces attractives, a permis l'observation de gouttelettes quantiques [45, 46] et la mesure quantitative de l'énergie provenant des fluctuations quantiques [70]. Dans ces mélanges, le champ-moyen est fortement réduit, rehaussant le rôle des fluctuations quantiques dans le système. Ces études montrent qu'il n'est pas nécessaire d'aller dans le régime des interactions fortes afin d'observer des effets quantiques à N-corps. Notre expérience de ^{39}K est bien adaptée pour l'étude de ces problématiques. En effet, nous avons vu que le potassium 39 possède une grande quantité de résonances de Feshbach dans son état fondamental hyperfin, donnant la capacité de changer expérimentalement les interactions de répulsives à attractives dans le système.

Les gouttelettes quantiques sont des systèmes où l'attraction de champ-moyen est stabilisée par le terme de Lee-Huang-Yang provenant de la sommation de l'énergie de point-zéro des modes de Bogoliubov [69]. Dans cette phase exotique de la matière, les interactions peuvent être traitées dans une approche perturbative, les gouttelettes quantiques offrent donc une plateforme idéale pour l'étude des fluctuations quantiques et de la physique quantique à N-corps. De plus, elles présentent des propriétés extrêmement intéressantes, on peut citer la saturation de la densité interne, les caractéristiques similaires aux liquides classiques (tension superficielle, faible compressibilité, etc), et également le phénomène d'auto-évaporation [42]. Cependant, ces systèmes présentent expérimentalement des inconvénients. La densité de saturation dans le cas tridimensionnel est élevée et difficile à atteindre expérimentalement, elle conduit à des pertes d'atomes importantes, diminuant fortement le temps de vie du système. De plus, le taux de pertes dans les différents états du mélange n'est pas le même, introduisant des effets de champ-moyen supplémentaires, qui perturbent la dynamique du système [89, 70]. Afin de contourner ces différents problèmes, nous avons entrepris une étude théorique sur les gouttelettes

quantique quasi-1D dans le crossover tridimensionnel à unidimensionnel [175], basée sur l'équation au-delà du champ-moyen dans le crossover 1D-3D développé dans l'article [76]. Nous avons montré que le régime du crossover pour le terme au-delà du champ moyen est attirant expérimentalement. Il offre la possibilité de réduire à la fois les pertes d'atomes, et la densité de saturation. Cependant, cette diminution de la densité d'équilibre conduit à une réduction de l'échelle d'énergie du système, imposant de sévères contraintes expérimentales.

La formation de gouttelettes quantiques saturées à l'équilibre reste donc un challenge expérimental. En effet, il est nécessaire de contrôler parfaitement les pièges, la gouttelette étant sensible à la moindre rugosité du potentiel. Mais la réalisation de tels systèmes permettrait des études précises sur les fluctuations quantiques dans les condensats de Bose-Einstein. Plus précisément, l'exploration expérimentale du crossover permettrait de tester les théories au-delà du champ-moyen dans des configurations plus complexes. Des effets au-delà de la description de Lee-Huang-Yang sont également attendus [107], causés par des termes d'autres supérieurs [97], par la forme du potentiel d'interaction inter-atomique [88, 95] ou par des effets de la température [108, 109]. Une récente étude théorique, propose un nouveau candidat pour la formation de gouttelette quantique, un gaz spineur de spin 1, dont l'effondrement provenant de l'interaction de champ-moyen peut être stabilisé par deux mécanismes différents [192]. Le premier provenant des fluctuations quantiques de spin et le deuxième d'un décalage Zeeman quadratique négatif.

Expérimentalement, l'étude des mélanges nécessite une bonne stabilité du champ magnétique extérieur, utilisé pour changer les interactions *via* les résonances de Feshbach. Nous avons ainsi travaillé sur notre circuit électrique afin de minimiser les fluctuations de champ magnétique. Nous avons changé la carte analogique permettant le contrôle de l'expérience, et mis en place une alimentation de courant intrinsèquement plus stable en parallèle de l'ancienne. Nous avons également implémenté une boucle d'asservissement du courant des bobines magnétiques afin de réduire davantage les fluctuations du champ. Ces différents changements ont considérablement amélioré notre stabilité du champ magnétique et permettent maintenant des études précises sur les mélanges de spin. La formation de ces mélanges dans la zone proche du collapse, nécessite de travailler avec les sous états Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$. Nous avons mis en place un circuit radio-fréquence permettant de réaliser des transferts entre les différents niveaux Zeeman. Finalement, ces différents changements nous ont permis de réaliser des condensats de Bose-Einstein dans l'état $|1, -1\rangle$ et par conséquent, de former des mélanges de spin ($|1, -1\rangle, |1, 0\rangle$).

Notre stabilité de champ magnétique nous a conduit à l'étude des mélanges couplés de manière cohérente, qui sont en général plus sensibles aux fluctuations de champ qu'un mélange non couplé. Le condensat de Bose-Einstein est dans un

état habillé, c'est-à-dire, une superposition quantique des deux états de spin, et les interactions sont décrites par une longueur de diffusion effective dépendant des paramètres du couplage de Rabi. Il est alors possible de contrôler les interactions en changeant le désaccord à la résonance δ . Dans un régime où l'effet des interactions sur le couplage est négligeable, le groupe de L. Tarruell a étudié les propriétés de collisions d'un mélange couplé de manière cohérente [140]. Dans un premier temps, nous avons observé et reproduit les résultats de cette étude. Ensuite, nos travaux issus de [162] présentés dans le chapitre 5, analysent de manière plus approfondie, l'effet des interactions à deux corps sur le couplage. Nous avons montré l'apparition d'une interaction à trois corps attractive dans l'équation d'état de champ-moyen. Cette interaction est induite par l'affectation du degré de liberté du spineur par le décalage du désaccord à la résonance causé par les interactions. Cette interaction à trois corps a des effets conséquents sur la dynamique du système. Dans des expériences d'oscillations dans le piège radial, nous avons montré que l'invariance d'échelle d'un condensat dans un piège harmonique allongé est brisée par les interactions à trois corps. Nous avons également observé des effondrements du système induits par les interactions à trois corps malgré une longueur de diffusion à deux corps positive. Récemment, le groupe de L. Tarruell a étudié le cas d'un condensat couplé de manière cohérente avec des faisceaux Raman [193, 194]. Dans ce cas, la longueur de diffusion effective dépend à la fois des paramètres du couplage et de l'impulsion des atomes. La dépendance en densité du désaccord Raman permet d'obtenir des interactions chirales et de simuler des problèmes de champ de jauge dynamique.

Notre étude ouvre la voie à l'étude de condensats de Bose-Einstein en présence d'une interaction à trois corps dans une nouvelle situation où l'émergence de cette interaction se fait sans pertes d'atomes supplémentaires. La présence de l'interaction à trois corps dans l'équation d'état modifie les propriétés thermodynamiques des gaz quantiques bosoniques. Par exemple, un changement de la température de condensation est attendu [181]. Il est également prédit que la condensation de Bose-Einstein dans un piège harmonique devient du premier ordre [190]. La présence d'un terme à trois corps conduit à un décalage de la fréquence des modes d'excitations de faible énergie. Les excitations comme les vortex [182], les solitons noirs [183], ou les ondes de chocs dispersives [184, 185] vont également voir leurs propriétés modifiées. En particulier, il est attendu que la non-linéarité du terme à trois corps brise l'intégrabilité de la dynamique du soliton à 1D [186]. L'implémentation d'une interaction à trois corps répulsive, *via* par exemple notre proposition théorique, offrirait la possibilité de former une nouvelle sorte de gouttelettes [39]. Des gouttelettes quantiques [187] et des états liés à quelques particules [188, 189], causés par la présence d'un terme répulsif à trois corps, ont récemment été étudiés théoriquement.

Dans une deuxième expérience et en collaboration avec D.S Petrov et A. Recati,

nous avons exploré l'équation d'état au-delà du champ-moyen pour un mélange de spin couplé dans le cas asymétrique ($a_{\uparrow\uparrow} \neq a_{\downarrow\downarrow}$) [175]. Le changement de structure des modes de Bogoliubov, notamment des modes de spin, induit un changement du terme de l'énergie au-delà du champ-moyen. Nous avons montré que la densité d'énergie, provenant des fluctuations quantiques, interpole de la dépendance usuelle de la correction de Lee-Huang-Yang pour un condensat non couplé, vers un comportement qualitativement différent dans le régime de couplage fort où on peut introduire un terme d'interactions à deux corps et un terme à trois corps, avec des dépendances spécifiques en fonction de la fréquence Rabi. Grâce au couplage cohérent, nous sommes capables de suffisamment diminuer l'énergie de champ-moyen et de rendre l'énergie au-delà du champ-moyen dominante. Dans des expériences d'expansions unidimensionnelles, nous avons étudié la taille finale en fonction de la fréquence Rabi Ω , la force du couplage. Nous avons tout d'abord observé une augmentation de la taille avec l'augmentation de Ω , ce qui traduit l'augmentation de l'énergie au-delà du champ-moyen avec la pulsation Rabi Ω . Les énergies mises en jeu ici sont de l'ordre de la vingtaine de Hz et la précision de nos mesures sont de quelques Hz, notre expérience nous permet donc de mesurer avec une très bonne précision l'énergie des fluctuations quantiques. Ces expériences sont, dans le régime d'interactions faibles, la première mesure quantitative de l'équation d'état au-delà du champ-moyen dans un mélange couplé de manière cohérente. À l'aide de simulations numériques de l'expérience, basées sur la résolution de l'équation de Schrödinger non-linéaire avec l'ajout du terme au-delà du champ-moyen, nous avons validé à la fois la présence du terme à deux corps et de celui à trois corps *via* leurs dépendances en Ω respectives. Nous avons également montré que l'ajout d'un couplage cohérent dans le mélange symétrise les pertes entre les deux états quantiques, permettant notamment d'éliminer une des limitations majeures du cas non couplé.

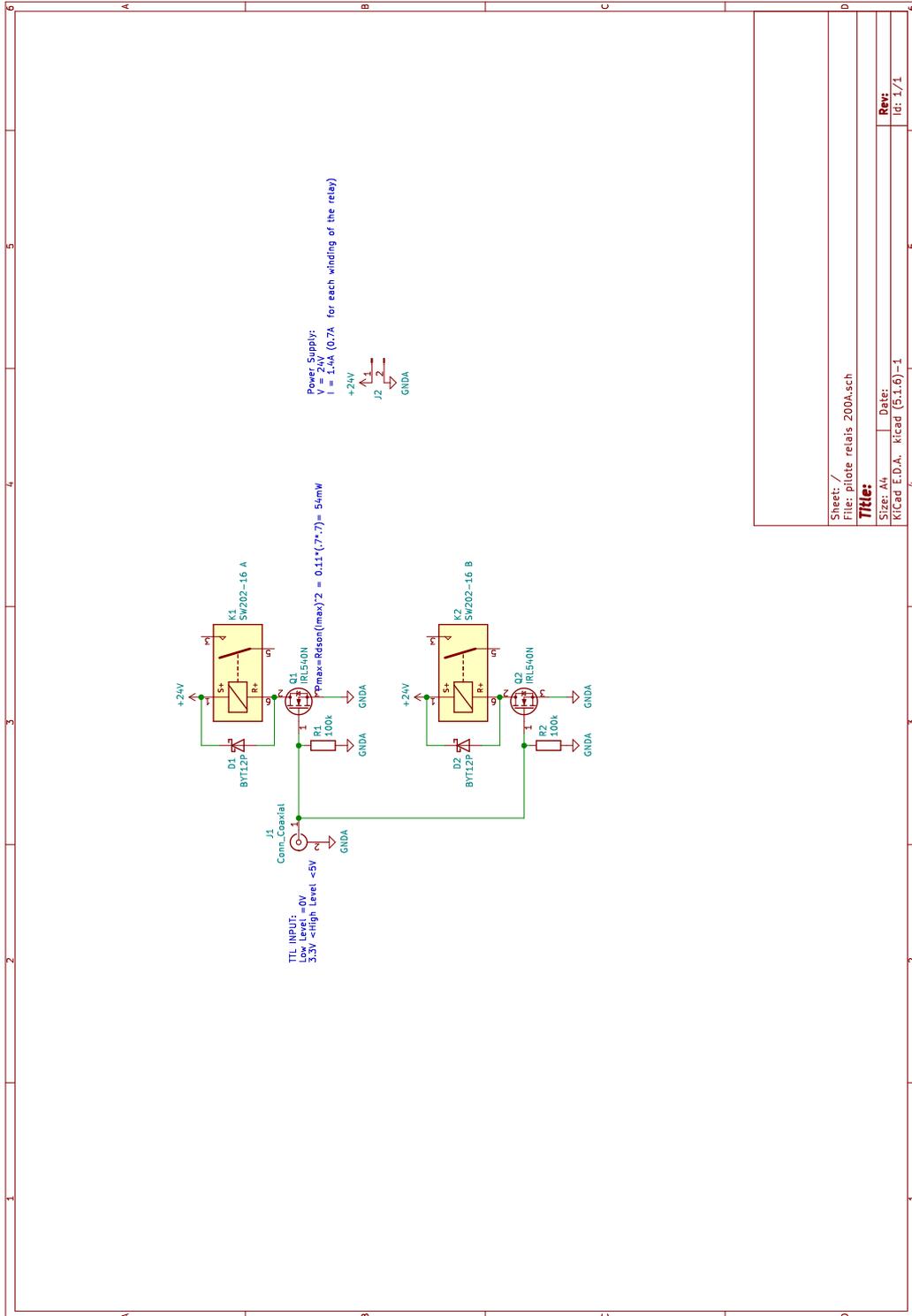
Notre étude ouvre la voie à la formation de gouttelette quantique couplée de manière cohérente, dans laquelle l'interaction globale à deux corps, composée du champ-moyen et des fluctuations quantiques, est compensée par l'effet des interactions à trois corps répulsive du terme au-delà du champ-moyen [39, 158]. Nous avons commencé à observer expérimentalement des signes de ce mécanisme de stabilisation. Il est aussi possible d'étudier le spectre des modes d'excitations pour ce genre de gouttelettes quantiques, et de regarder si le phénomène d'auto-évaporation existe. Dans le cas du couplage faible, il serait également intéressant d'étudier la transition liquide-gaz induite par la renormalisation de la longueur de diffusion due à la présence du couplage [174]. Une autre perspective serait d'étudier le cas unidimensionnel pour l'énergie au-delà du champ-moyen d'un mélange couplé. Dans le régime de couplage fort, il est attendu que l'énergie peut toujours se développer en puissance de la densité. De plus, le terme à deux corps devient attractif est proportionnel à $1/\sqrt{\Omega}$. Le terme à trois corps reste répulsif et proportionnel à $1/\Omega^{3/2}$ [191]. Une gouttelette quantique est donc attendue même lorsque l'interaction de

champ-moyen est nulle. Cette gouttelette est uniquement stabilisée par des effets au-delà du champ-moyen. L'exploration du régime du crossover du terme au-delà du champ-moyen, pour la formation de gouttelette quantique couplée pourrait être également intéressante. Une gouttelette quantique couplée dans ce régime pourrait lier les différents avantages du crossover et de la symétrisation des pertes par le couplage. La présence du couplage introduit également une nouvelle échelle de longueur dans le système, nommée $l_\Omega = \sqrt{\hbar/m\Omega}$, il serait également intéressant d'étudier la possibilité d'être dans des configurations géométriques encore plus complexes, c'est-à-dire, de se placer dans des crossover faisant intervenir également l'échelle de longueur l_Ω .

Expérimentalement, nous avons récemment mis en place une nouvelle alimentation de courant encore plus stable, nous permettant de réduire encore davantage les fluctuations du champ magnétique. Comme nous l'avons souligné précédemment, les expériences sur les effets au-delà du champ moyen et sur les gouttelettes quantiques imposent de sévères contraintes expérimentales, notamment sur le contrôle des pièges optiques. Nous avons décidé d'installer une matrice de micro-miroirs (DMD), qui permet maintenant de projeter des potentiels arbitraires dans le plan des atomes. Ce dispositif, nous permettra notamment de contrôler plus précisément les pièges et de compenser les rugosités du potentiel. Ce DMD pourra également être utilisé pour effectuer de la spectroscopie de Bragg [196], ou des potentiels dépendants du temps. Il permet également de former des boîtes de potentiels dans l'axe longitudinal ou d'introduire du désordre dans le système.

Annexe A

Schéma électrique du relais mécanique



Annexe B

Différences d'énergies entre les sous-niveaux Zeeman

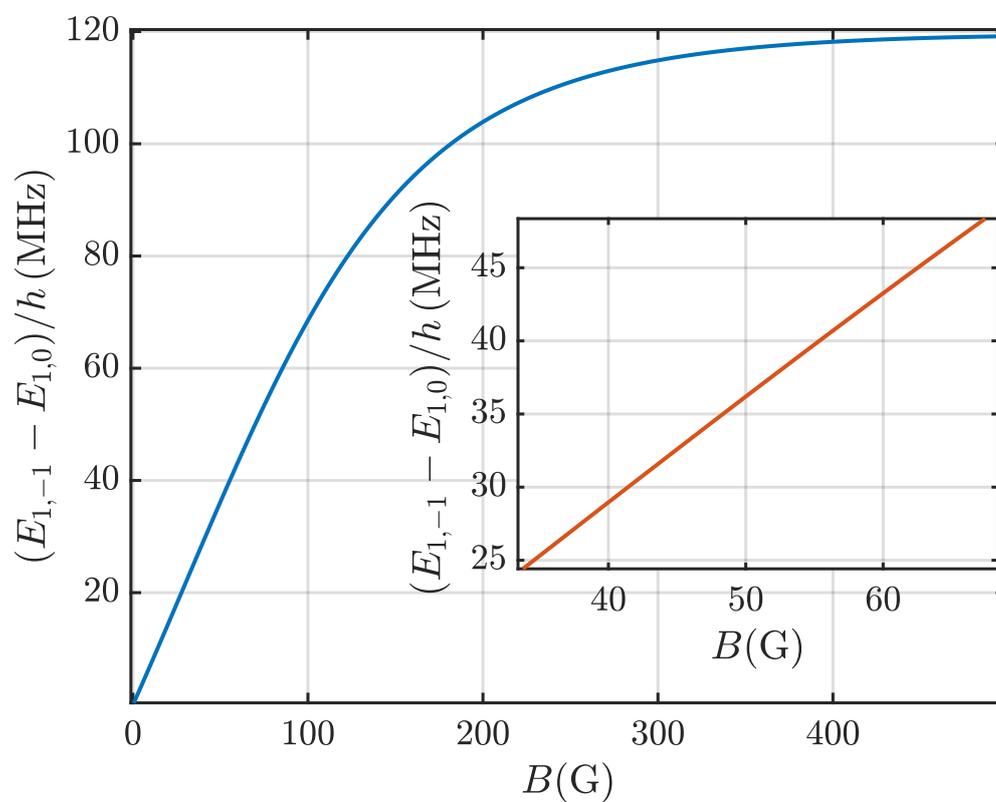


FIGURE B.1 – Différence d'énergie $(E_{1,-1} - E_{1,0})$ entre les deux sous-niveaux Zeeman $|F = 1, m_F = -1\rangle$ et $|F = 1, m_F = 0\rangle$ en fonction du champ magnétique B .

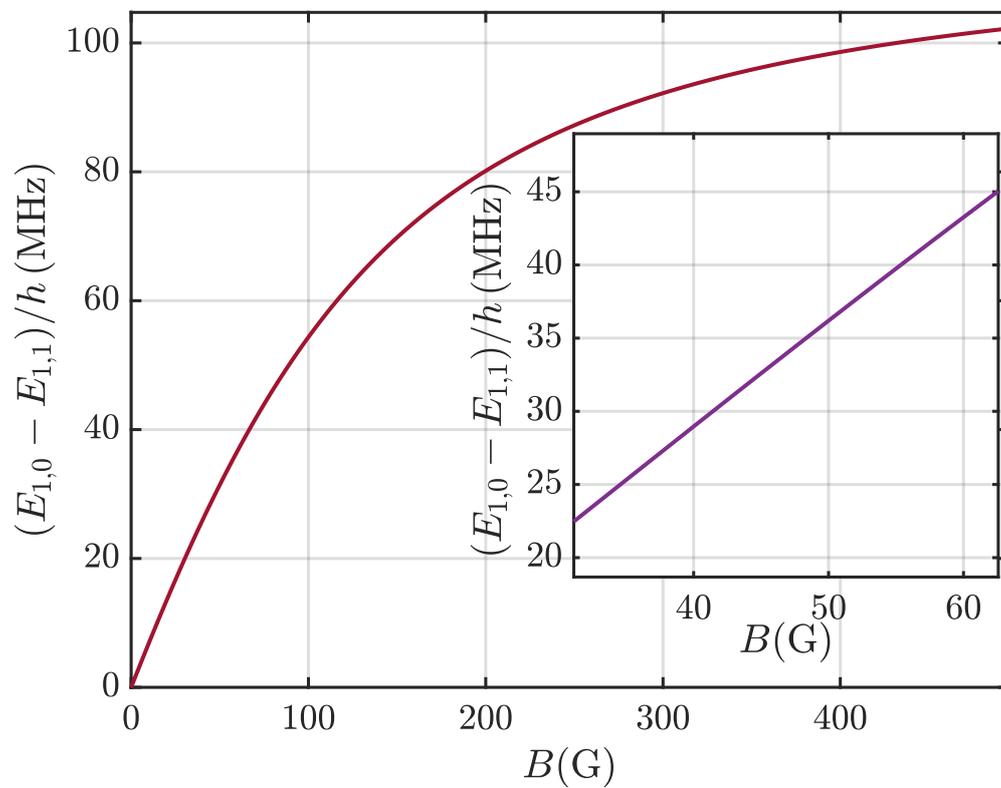


FIGURE B.2 – Différence d'énergie $(E_{1,0} - E_{1,1})$ entre les deux sous niveaux Zeeman $|F = 1, m_F = 0\rangle$ et $|F = 1, m_F = 1\rangle$ en fonction du champ magnétique B .

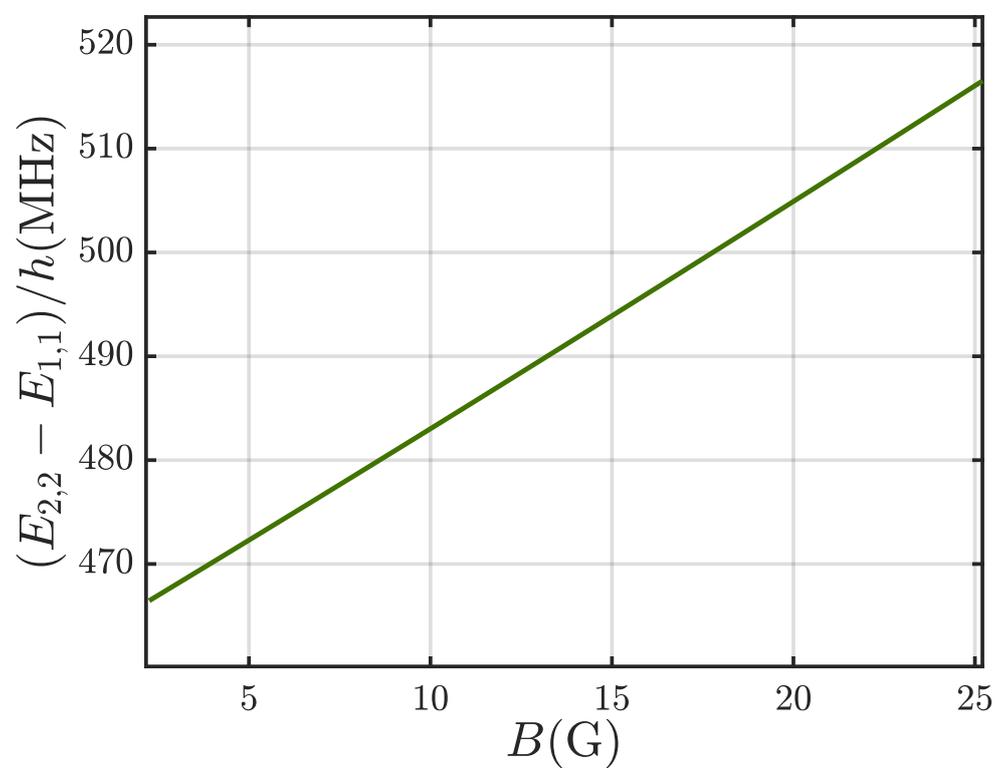


FIGURE B.3 – Différence d'énergie $(E_{2,2} - E_{1,1})$ entre les deux sous niveaux Zeeman $|F = 2, m_F = 2\rangle$ et $|F = 1, m_F = 1\rangle$ en fonction du champ magnétique B .

Annexe C

Oscillations de Ramsey

Considérons un atome à deux niveaux $|a\rangle$ et $|b\rangle$, d'énergie $-\hbar\omega_0/2$ et $+\hbar\omega_0/2$ respectivement. Le vecteur d'état s'écrit :

$$|\psi(t)\rangle = c_a(t)e^{i\omega_0 t/2}|a\rangle + c_b(t)e^{-i\omega_0 t/2}|b\rangle \quad (\text{C.1})$$

Le champ radio-fréquence interagissant avec l'atome est de pulsation ω , de phase ϕ et de fréquence Ω . À partir de l'équation (4.13) on peut écrire :

$$i\frac{dc_b}{dt} = \frac{\Omega}{2}c_a(t)e^{-i(\delta t+\phi)} \quad (\text{C.2})$$

$$i\frac{dc_a}{dt} = \frac{\Omega}{2}c_b(t)e^{+i(\delta t+\phi)} \quad (\text{C.3})$$

où δ est le désaccord à la résonance. En connaissant les valeurs de $c_a(0)$ et $c_b(0)$, on peut résoudre de manière analytique ces deux équations [120]. Pour $c_a(0) = 1$ et $c_b(0) = 0$:

$$c_a(t) = e^{i\delta t} \left(\cos(\tilde{\Omega}t/2) - i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right) \quad (\text{C.4})$$

$$c_b(t) = -ie^{-i\delta t - i\phi} \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right) \quad (\text{C.5})$$

avec $\tilde{\Omega} = \sqrt{\delta^2 + \Omega^2}$ la pulsation de Rabi généralisée. Pour $c_a(0) = 0$ et $c_b(0) = 1$:

$$c_b(t) = e^{-i\delta t} \left(\cos(\tilde{\Omega}t/2) + i\frac{\delta}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right) \quad (\text{C.6})$$

$$c_a(t) = -ie^{i\delta t + i\phi} \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \sin(\tilde{\Omega}t/2) \right) \quad (\text{C.7})$$

Une séquence de Ramsey (figure C.1) consiste à appliquer un premier pulse de durée τ , suivi d'un temps d'attente T arbitraire, et enfin un dernier pulse de durée

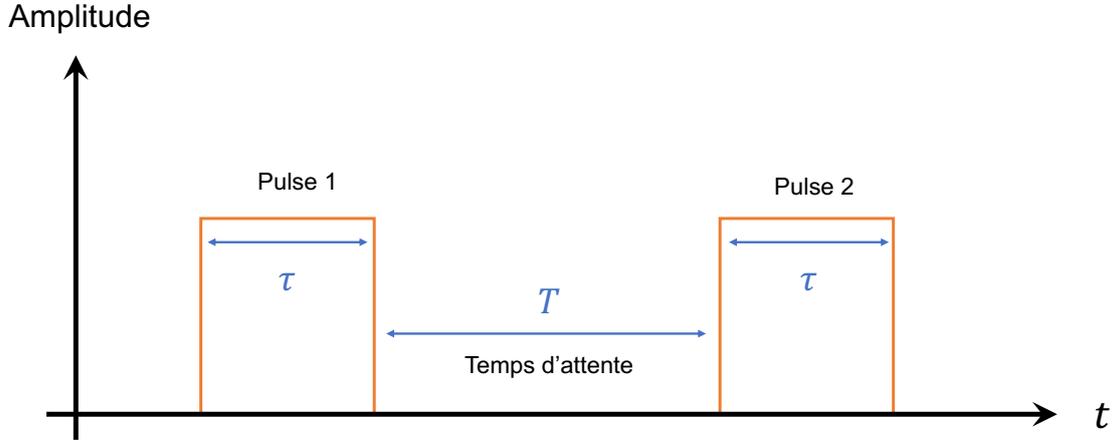


FIGURE C.1 – Schéma de la séquence Ramsey. On représente l'amplitude du champ RF en fonction du temps. Un premier pulse de durée τ permet de créer la superposition d'états. On laisse ensuite le système évoluer en absence de champ pendant une durée T . On interroge finalement le système avec un dernier pulse de durée τ .

τ . Durant le temps d'attente le champ RF est coupé, l'atome évolue donc librement. Dans la suite on peut supposer que $\delta \approx 0$. En effet, les pulses sont suffisamment courts et vérifient $\delta\tau \ll 1$. La matrice de transfert associée au pulse s'écrit :

$$\begin{pmatrix} c_a(t) \\ c_b(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega\tau/2) & -ie^{i\phi} \sin(\Omega\tau/2) \\ -ie^{-i\phi} \sin(\Omega\tau/2) & \cos(\Omega\tau/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_a(0) \\ c_b(0) \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

On pose également $\phi = 0$ pour le premier pulse. À la fin de celui-ci nous avons :

$$c_b(t) = \cos(\Omega t/2) \quad (\text{C.9})$$

$$c_a(t) = -i \sin(\Omega t/2) \quad (\text{C.10})$$

Durant le temps d'évolution libre, le champ évolue à la pulsation ω et les atomes à la pulsation ω_0 . Le déphasage accumulé, entre le champ et l'atome, est donc $\phi = \delta T$. On applique le dernier pulse, on utilise donc la matrice de transfert (avec $\phi = \delta T$) et on obtient :

$$c_b(2\tau + T) = -ie^{i\phi/2} \sin(\Omega\tau) \cos(\Omega T/2) \quad (\text{C.11})$$

$$|c_b(2\tau + T)|^2 = \sin^2(\Omega\tau) \cos^2(\delta T/2) \quad (\text{C.12})$$

On maximise le contraste si on applique des $\pi/2$ -pulse ($\Omega\tau = \pi/2$). On observe donc des oscillations de la probabilité P_b de trouver l'atome dans l'état $|b\rangle$ à la fréquence δ . Cette oscillation nous permet donc de connaître précisément le désaccord à la

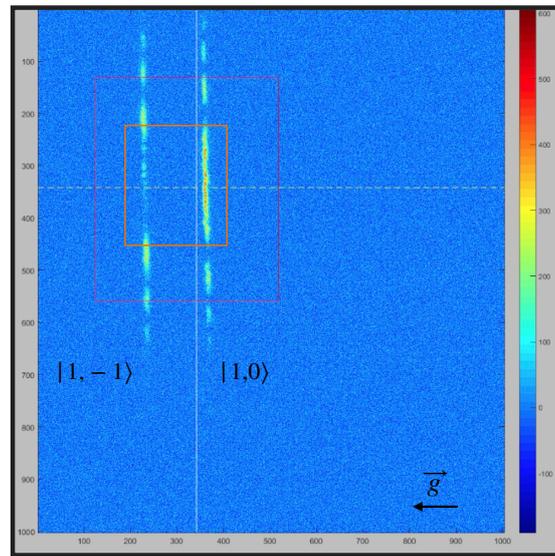


FIGURE C.2 – Nombre d’atomes en fausses couleurs après une séquence de Ramsey. Les atomes à gauche sont dans l’état $|1, -1\rangle$, ceux à droite dans l’état $|1, 0\rangle$. L’axe longitudinal du FORT1D est l’axe vertical sur l’image. L’échelle est en pixel où $1 \text{ px} = 1.75 \mu\text{m}$. L’encadré orange correspond à la zone où le champ peut être considéré comme constant.

résonance.

Interprétation physique

Le premier pulse crée une superposition quantique des deux états $|a\rangle$ et $|b\rangle$ et une magnétisation transverse sur la sphère de la Bloch. Une fois le champ éteint, les atomes sont soumis à l’évolution libre et sur la sphère de Bloch, le vecteur tourne autour de l’axe z à la pulsation ω_0 . Le champ RF continue à osciller à la pulsation ω . Lorsque qu’on rallume le champ RF au niveau des atomes, le champ et l’atome ont accumulé une différence de phase $(\omega - \omega_0)T$. Si celle-ci est égale à 2π , alors l’atome et le champ sont en phase, et le deuxième pulse va se superposer de manière cohérente au premier, comme si le premier pulse, était doublé. Dans le cas où le déphasage est égal à π , alors l’atome est ramené a son état initial [56].

Homogénéité du champ magnétique

La figure C.2 montre un exemple de la méthode pour caractériser l’homogénéité du champ. On prépare un condensat dans l’état $|1, -1\rangle$ dans un piège allongé (FORT1D). Les deux niveaux correspondent dans l’expérience à $|1, -1\rangle$ et $|1, 0\rangle$. Après avoir appliqué la séquence Ramsey, on sépare les deux niveaux à l’aide d’un

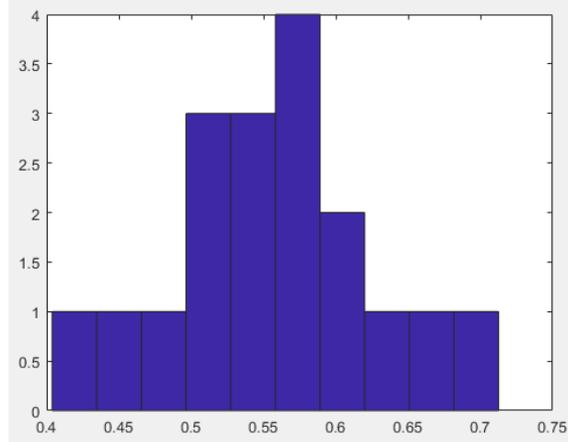


FIGURE C.3 – Exemple de distribution expérimentale de la probabilité d’être dans l’état $|1, 0\rangle$ pour $T = 50 \mu\text{s}$ et $\delta T \approx \pi/2$ (Voir texte).

gradient magnétique vertical (séparation de Stern et Gerlach) et on image les atomes par fluorescence. Dans cette séquence, nous avons appliqué un pulse- $\pi/2$ suivi d’un temps d’attente de 1 ms. L’intersection entre les deux lignes blanches correspond à la position initial du nuage. L’encadré orange correspond à la zone de travail, où les expériences sont réalisées. La taille longitudinale de cette zone est d’environ $450 \mu\text{m}$, lors de nos expérience la taille des nuages n’excède jamais $200 \mu\text{m}$. On peut, par conséquent, considéré que le champ est homogène le long du nuage. En dehors de cette zone, les atomes sont dans l’état $|1, -1\rangle$, il y a donc un déphasage longitudinalement de π ce qui correspond à $\delta \approx 1.5 \text{ kHz}$, avec une susceptibilité magnétique de 0.7 MHz/G cela donne un changement de champ magnétique de l’ordre de 2 mG .

Mesure des fluctuations de champ magnétique

Les oscillations de Ramsey sont un moyen de mesurer les fluctuations du champ magnétique dans notre expérience. Considérons le cas où nous souhaitons transférer la moitié des atomes de l’état $|a\rangle = |F = 1, m_F = -1\rangle$ dans l’état $|b\rangle = |F = 1, m_F = 0\rangle$, dans ce cas $\delta T = \pi/2$. La probabilité de trouver un atome dans l’état $|1, 0\rangle$ est :

$$P_b = \frac{(1 + \cos(\delta T))}{2} \quad (\text{C.13})$$

Lorsque $\delta T \approx \pi/2$, on peut réécrire Eq. (C.13) :

$$P_b = \frac{1 + \delta T}{2} \quad (\text{C.14})$$

L’écart type (std) de la probabilité donne la valeur des fluctuations de δ , et par conséquent du champ magnétique :

$$\text{std}(\delta) = \frac{2 \text{std}(P_b)}{T} \quad (\text{C.15})$$

La figure C.3 montre un exemple de la distribution de la probabilité P_b dans la configuration expliquée plus haut. Expérimentalement, on réalise un transfert Ramsey 50–50% vers l'état $|1, -1\rangle$ en $50 \mu\text{s}$ avec $\delta T \approx \pi/2$. On répète ici l'expérience 18 fois et on trace le poids obtenue pour chaque probabilité. L'écart type de la distribution nous donne ainsi les fluctuations de δ dans notre expérience, on trouve $\text{std}(\delta) = 0.56(14) \text{ kHz}$. La fluctuations du champ magnétique est donc $\text{std}(B) = 0.8(2) \text{ mG}$. Nous trouvons des fluctuations du champ magnétique similaires à la mesure avec les transducteurs de courant (Voir partie 4.2.4), plus précisément, nous avons mesuré 1.4 mG (largeur à mi-hauteur) sur 1 ms .

Annexe D

Discussion sur l'énergie au-delà du champ-moyen pour un mélange de spin couplé

Pour un mélange de condensats de Bose-Einstein couplé de manière cohérente, à température nulle, la densité d'énergie au-delà du champ-moyen, dans le régime de couplage fort ($1/y = -2g_{\uparrow\downarrow}n/\hbar\tilde{\Omega} \rightarrow 0$) et sous les conditions (6.7), s'écrit :

$$\frac{E_{\text{BMF}}}{V} = \frac{m^{3/2}}{2\sqrt{2}\pi\hbar^3} \sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} g_{\uparrow\downarrow}^2 \frac{n^2}{2} + \frac{3m^{3/2}}{4\pi\sqrt{2}\hbar^3} \frac{|g_{\uparrow\downarrow}|^3 n^3}{\sqrt{\hbar\tilde{\Omega}} 6}, \quad (\text{D.1})$$

Les deux termes peuvent être interprétés comme une renormalisation au-delà du champ-moyen de la longueur de diffusion a_{--} et d'une interaction à trois corps émergente du couplage, chacun avec une dépendance en $\tilde{\Omega}$ spécifique. Notamment, le terme à deux corps $\propto a_{\uparrow\downarrow}^2 \sqrt{\tilde{\Omega}}$ dérivé dans une approche à N-corps coïncide avec la résolution exacte du problème à deux corps dans la limite $a_{\uparrow\downarrow} \sqrt{m\tilde{\Omega}/\hbar} \ll 1$ [176]. Plus précisément, ce terme provient de la correction au second ordre du développement de Born à la longueur de diffusion. La structure du terme du deuxième ordre de l'expansion de Born $a = a^{(1)} + a^{(2)}$ (dans notre cas $a^{(1)} = a_{--} = 0$) est de la forme¹ :

$$a^{(2)} \propto \int \frac{\tilde{V}_{\mathbf{k}}^2 d^3k}{k^2 + \tilde{\Omega}} \quad (\text{D.2})$$

avec

$$\tilde{V}_{\mathbf{k}} = \int V_{\text{int}}(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3r \quad (\text{D.3})$$

la transformée de Fourier du potentiel d'interaction interatomique $V_{\text{int}}(r)$. La présence de $\tilde{\Omega}$ dans l'intégrale provient du fait qu'il faut payer l'énergie $\hbar\tilde{\Omega}$ pour trans-

1. Nous omettons ici les constantes \hbar et m ($\hbar = m = 1$).

féler un atome de l'état $|-\rangle$ dans l'état $|+\rangle$ avec le moment k . Avec le changement de variable suivant $q = k/\sqrt{\tilde{\Omega}}$ et en remplaçant $\tilde{V}_{\mathbf{k}}$ par la constante de couplage g l'intégrale se réécrit simplement [177] :

$$a^{(2)} \propto g^2 \sqrt{\tilde{\Omega}} \int \frac{d^3q}{q^2 + 1} \quad (\text{D.4})$$

L'intégrale divergente est régularisée de la manière habituelle en remplaçant les constantes de couplages $g_{\sigma\sigma'}$ par [11, 178] :

$$g_{\sigma\sigma'} \longrightarrow g_{\sigma\sigma'} \left(1 + \frac{g_{\sigma\sigma'}}{V} \sum_{\mathbf{p} \neq \mathbf{0}} \frac{m}{p^2} \right) \quad (\text{D.5})$$

Le terme obtenu en (D.4) provient de transitions virtuelles induites par les interactions. Les deux atomes dans l'état non perturbé à deux particules $|--\rangle$ avec une impulsion nulle sont excités vers les états ($|--\rangle$, $|+-\rangle$, $|++\rangle$) avec une impulsion \mathbf{p} et $-\mathbf{p}$. Comme nous pouvons le constater dans l'expression (D.4), même si les canaux de diffusion $|+-\rangle$ et $|++\rangle$ possèdent un gap en énergie, la valeur de l'intégrale augmente en $\sqrt{\tilde{\Omega}}$. En effet, le nombre des états d'impulsion non nulle contribuant à l'intégrale augmente plus rapidement que le gap en énergie $\propto \tilde{\Omega}$. Toutefois, les termes d'ordres supérieurs ne sont pas présents dans l'approche à N-corps avec l'hamiltonien de Bogoliubov, car cela nécessite de prendre en compte les interactions entre les atomes excités hors du condensat de la déplétion quantique. C'est pour cela que la correction à l'ordre trois dans le développement de Born $a^{(3)} \propto a_{\uparrow\downarrow}^3 \tilde{\Omega}$ n'est pas retrouvé dans (D.1). Pour la même raison, l'équation (D.1) ne contient pas de terme $\propto n^{5/2}$, une dépendance qui devrait être induite par la renormalisation de l'interaction à deux corps. Ce terme proportionnel à $(\sqrt{\tilde{\Omega}} g_{\uparrow\downarrow}^2 n)^{5/2}$ est négligeable dans notre expérience. De plus, la constante de couplage à trois corps de l'expression (D.1) correspond également à celle obtenue lors de la résolution exacte du problème à trois corps en présence d'un couplage cohérent [158].

Table des figures

1	Équation d'état d'un condensat de Bose-Einstein homogène à température nulle. Pression h normalisée en fonction du paramètre du gaz ν . La courbe rouge correspond à l'équation d'état avec le correction de Lee-Huang et Yang. La courbe en tirets rouge représente l'équation d'état dans l'approximation de champ-moyen. Figure issue de [38].	13
1.1	Potentiel inter-atomique $V_{\text{VdW}}(\mathbf{r})$ et la fonction d'onde ψ d'atome dans la limite des basses énergies. La longueur de De Broglie λ_{dB} est plus grande que la portée R_{VdW}	22
1.2	Schéma du potentiel singulet et triplet. Une résonance à lieu lorsque l'écart d'énergie δE entre l'énergie d'un état moléculaire et l'énergie de collision tend vers 0.	24
1.3	Longueur de diffusion a en unité de a_0 en fonction du champ magnétique en G . Les résonances de Feshbach en onde s pour les mêmes états $m_F = -1, 0, +1$ sont représentées en bleues, rouges et vertes respectivement. Figure provenant de [54].	25
1.4	Positions des résonances de Feshbach en onde s expérimentales B_{exp} et théoriques B_{th} , largeurs Δ , longueurs de diffusions a_{bg} pour différents sous-états Zeeman m_{F_a} et m_{F_b} . Tableau provenant de [55].	26
1.5	Spectre de Bogoliubov $\omega(k)$ en fonction du vecteur d'onde k . On distingue deux régimes : le régime phononique en noir et le régime des particules libres en orange	28
1.6	(a) Le système est composé de deux condensats dans les états de spin $ \uparrow\rangle$ et $ \downarrow\rangle$. (b) Longueurs de diffusion permettant de définir les interactions inter- et intra-spin.	31
1.7	Diagramme des phases pour un mélange de condensats de Bose-Einstein. Le système peut subir une transition de phase miscible-non miscible lorsque $a_{\uparrow\downarrow} \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. Lorsque $-a_{\uparrow\downarrow} \gg \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$, une instabilité dynamique a lieu, et le système implose.	32

1.8	Schéma des excitations de Bogoliubov pour un mélange. (a) Mode de densité, les condensats oscillent en phase. (b) Mode de spin, les condensats oscillent en opposition de phase. (c) (<i>resp.</i> (d)) Relation de dispersion du mode de spin et de densité proche du régime non-miscible ($a_{\uparrow\downarrow} > 0$) (<i>resp.</i> du collapse ($a_{\uparrow\downarrow} < 0$)).	34
2.1	Schéma issu de [73]. (a) Schéma d'une gouttelette classique dense, stabilisée par la compétition entre l'attraction longue portée de Van der Waals (rayon bleu) et la répulsion de Pauli à courte portée (boule rouge). (b) Schéma d'une gouttelette quantique diluée faites à partir d'un mélange de spin bosonique ultra-froid (billes rouge et bleu). L'interaction de contact attractive inter-espèce (interaction rouge-bleue) légèrement supérieure à la répulsion intra-espèce (interaction rouge-rouge et bleue-bleue), est compensée par les fluctuations quantiques phononiques du système.	38
2.2	Énergie par particule en fonction de la densité. Schéma du mécanisme de stabilisation formant la gouttelette quantique à la densité d'équilibre n_{eq} . L'interaction attractive de champ-moyen dominante à basse densité est compensée par le terme Lee-Huang-Yang répulsif dominant à haute densité formant ainsi un minimum d'énergie pour la densité n_{eq}	40
2.3	Figure issue de [71]. (a) Fonction d'onde normalisée en fonction de la composante radiale en absence de piégeage. (b) Spectre des excitations pour une gouttelette quantique isotrope (en absence de piégeage) en fonction de $(\tilde{N} - \tilde{N}_c)^{1/4}$, où \tilde{N} et \tilde{N}_c sont respectivement le nombre d'atomes et le nombre d'atomes critique renormalisés. Seuil d'émission de particule $-\tilde{\mu}$ (courbe bleue). Le mode de respiration $\tilde{\omega}_0$ (courbe rouge). Les autres modes d'excitations sont en tirets noirs. En pointillés fins sont représentés les modes de surface (ripples).	41
2.4	Figure issue de [44]. (a) Images typiques d'un condensat (haut) et d'une gouttelette quantique dipolaire (bas) en l'absence de piégeage en fonction du temps. (b) Diagramme des phases entre gaz (zone blanche) et gouttelettes quantiques (zone mauve) et nombres d'atomes critiques mesurés pour le ^{164}Dy [80] et ^{162}Dy [81].	44
2.5	Longueurs de diffusions ($a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$, $a_{\uparrow\downarrow}$) intra et inter espèces dans le cas d'un mélange de spin $ 1, -1\rangle$ et $ 1, 0\rangle$ pour le ^{39}K , ainsi que la longueur de diffusion effective δa	47
2.6	Figure issue de [44]. (a) Images typique d'un condensat (haut) et d'une gouttelette quantique (bas) en l'absence de piégeage en fonction du temps. (b) Nombre d'atomes critique en fonction de la longueur de diffusion effective δa . Les données en rouge (<i>resp.</i> bleue) proviennent de [45] (<i>resp.</i> [46]).	48

3.1	Simulations numériques de gouttelettes quantiques unidimensionnels (LHY 1D). Comparaison de nos résultats avec les résultats analytiques de [106] (voir texte). Les petites différences proviennent du temps de calcul, qui n'est pas suffisamment long dans nos profils affichés.	69
4.1	Niveaux d'énergie du potassium 39. Les transitions de la ligne D2 sont représentées en rouge, δ_{2R} et δ_{2P} sont les désaccords respectivement du faisceau repompeur et du principal. En bleu, les transitions de la ligne D1, δ_{1R} et δ_{1P} sont les désaccords associés.	75
4.2	Taux de collisions élastiques pour le potassium 39 en fonction de l'énergie de collision pour des atomes dans l'état $ F = 1, m_F = -1\rangle$ [113].	76
4.3	Schéma simplifié de la séquence expérimental permettant l'obtention d'un condensat de Bose-Einstein de ^{39}K en 7 secondes. Les bobines sur l'axe verticale permettent de réaliser le piégeage magnétique et le champ Feshbach. Les bobines sur l'axe horizontal sont utilisées pour le piège magnéto-optique. Après le chargement du piège optique, la configuration des bobines passe de quadrupôle à dipôle (Voir partie 4.2.3). À la fin de la séquence, on utilise de l'imagerie par fluorescence.	77
4.4	Schéma réalisé sur Solidworks de la chambre à vide. À gauche, vue de dessus de l'expérience. Les cellules en verre (en rose) sont placées à chaque extrémité de l'enceinte métallique, la cellule de gauche est la chambre de science, celle de droite est la chambre de collection utilisée pour le MOT 2D. À droite, vue de côté de l'expérience. La source de potassium est placée dans un four (en rose). Le chauffage permet de faire migrer les atomes de ^{39}K dans la chambre de collection.	78
4.5	Schéma de la cellule en verre avec les dimension en mm (Vue de dessus). La géométrie des pièges dipolaires utilisés dans l'expérience est représentée. Le piège optique initial est (1) nommé FORT1. Le (2) est le FORT2. Le piège final (3) est nommé le FORT1D.	79
4.6	a) Schéma Solidworks de la chambre de science entourée des bobines coniques permettant de former le champ Feshbach. b) Les faisceaux du MOT 3D sont représentés en rouge. La troisième paire de faisceaux est perpendiculaire au plan de la feuille	81
4.7	Schéma électrique du switch (fabriqué par F. Moron) permettant la commutation de la configuration dipôle à quadrupôle. Les grosses bobines sont représentées en rouge par L_1 et L_2 . Le courant dans L_2 peut être inversé en utilisant les IGBT A et D ou B et C en mode passant. Le circuit de décharge est composé d'un condensateur $C = 360 \mu\text{F}$ (800 V) et d'une résistance $R = 470 \Omega$ (50 W). Les composants internes au switch sont refroidis par un circuit d'eau indépendant.	82

4.8	Schéma de la boucle d'asservissement du courant de l'alimentation SM70-AR-24 pour la production du champ Feshbach. Le signal est amplifié par l'augmentation du nombre de tours au niveau des transducteurs de courant. L'encadré orange schématise grossièrement le contrôleur PID. V_m est la valeur mesurée, V_{ref} est la valeur de référence (provenant de l'ordinateur), ε est le signal d'erreur multiplié par un gain et V_c est le signal corrigé allant vers l'alimentation de courant. L'alimentation de courant SM18-220 est uniquement stabilisée via sa boucle d'asservissement interne. I_1 et I_2 correspondent respectivement au relais mécanique permettant le changement d'alimentation de courant et I_3 correspond au switch IGBT.	84
4.9	Niveaux d'énergies en fonction du champ magnétique pour l'état électronique $^2S_{1/2}$	89
4.10	Pompage optique sur la transition D1 des atomes vers l'état $ F = 2, m_F = 2\rangle$	90
4.11	À gauche : Énergies des états habillés $ -\rangle$ et $ +\rangle$ en fonction de δ/Ω . Le dégradé de couleur donne la population des états non couplés $ a\rangle$ et $ b\rangle$ pour chaque états habillés. À droite : les populations normalisées des états $ a\rangle$ et $ b\rangle$ en fonction de δ/Ω pour $ -\rangle$	93
4.12	À gauche : probabilité $P_b(t)$ que le système soit dans l'état $ b\rangle$ en fonction du temps pour différentes valeurs de δ/Ω . À droite : probabilité $P_b(t)$ que le système soit dans l'état $ b\rangle$ en fonction du désaccord à la résonance δ/Ω pour $t/\Omega = \pi$	94
4.13	Schéma explicatif du transfert adiabatique par balayage de fréquence.	95
4.14	Schéma du circuit radiofréquence	97
4.15	Schéma de la configuration géométrique des différents pièges dipolaires, issu de [48]. En orange, les deux pièges à 1550 nm, croisent la cellule avec un angle d'incidence élevé, afin de maximiser la transmission de l'intensité. En bleu, le FORT1D à 1064 nm traverse la cellule à faible incidence. Des lames dichroïques permettent le passage de ce piège dans l'axe des faisceaux MOT horizontaux.	100
4.16	Schéma des étapes d'évaporations à partir du chargement du FORT1. Les puissances des lasers sont données en pourcentage de leur puissance maximale. Les différentes étapes sont numérotées de 1 à 4.	101
4.17	a) Image par fluorescence des trois pièges optiques. Image prise dans la direction verticale. L'axe longitudinale du FORT1D est perpendiculaire aux deux axes d'imagerie, il est donc au focus des deux caméras, dans tout le champ de vue. b) Schéma des deux axes d'imageries.	103
5.1	Longueurs de diffusions décrivant les interactions entre deux atomes dans un des états habillés $\{ -\rangle, +\rangle\}$	109

- 5.2 Figures issues de [72]. Processus de changement d'états par collisions à deux corps inélastiques. (a) États à deux particules et leurs énergies internes associées. (b) Dispersion de l'énergie d'une particule en fonction du moment $k/k_{\tilde{\Omega}}$ où $k_{\tilde{\Omega}} = \sqrt{2m\tilde{\Omega}/\hbar}$ et $\tilde{\Omega}$ est la fréquence de Rabi généralisée. Les processus 1 et 2 correspondent respectivement à $|++\rangle \rightarrow |--\rangle$ et $|++\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle + |+-\rangle)$ 111
- 5.3 (a) Distribution atomique en fausses couleurs. (b) Profil de densité longitudinale de (a). Le condensat est initialement transféré adiabatiquement dans l'état $|+\rangle$. Nous appliquons 63.8 ms d'expansion dans le piège longitudinale. $\Omega = 20$ kHz. 112
- 5.4 Schéma des constantes de couplages pour l'interaction à deux corps g_2 et pour l'interaction à trois corps g_3 en fonction de δ/Ω (en unités arbitraires). Les trois pulsations Rabi vérifient $\Omega_1 > \Omega_2 > \Omega_3$ 115
- 5.5 Longueur de diffusion $a_2 = a_{--}$ dans notre configuration expérimentale en fonction de δ/Ω 116
- 5.6 Fréquence du mode de respiration radiale en fonction de δ/Ω pour $\Omega/2\pi = 25.4$ kHz. Les points correspondent aux données expérimentales. Les barres d'erreurs verticales correspondent à une incertitude de 1.5% sur la fréquence mesurée. Les barres d'erreurs horizontales sont liées aux 0.8(2) mG de fluctuations du champ magnétique. La zone grisée correspond à l'estimation théorique de la fréquence pour $2.3 \times 10^9 \text{ m}^{-1} < n_{1D} < 2.65 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$ prenant ainsi en compte notre incertitude sur le nombre d'atomes provenant des fluctuations de l'expérience et la détectivité. En insertion : taille du condensat en fonction du temps après un balayage inverse de δ jusqu'à 7.5Ω et d'un temps de vol de 9.7 ms. 118
- 5.7 Nombre d'atomes en fonction du temps. Chaque point correspond à une seule itération de l'expérience. 121
- 5.8 (a) Densité 1D en fonction du désaccord final δ/Ω . \times : $\Omega/2\pi = 7.6$ kHz, \circ : $\Omega/2\pi = 29.8$ kHz. Les courbes sont ajustées avec la fonction $n_{\text{coll}} + (n_{1D} - n_{\text{coll}})\text{erf}[(|\delta| - \delta_c)/(W\Omega)]$, où n_{coll} , n_{1D} , W et δ_c sont des paramètres libres. (b) Longueur de diffusion a_{--} en fonction de δ/Ω 122

- 5.9 Seuil du collapse δ_c/Ω en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Les points expérimentaux sont représentés par des carrés. La courbe en pointillé bleue à $\delta/\Omega = 0.47$ correspond à $a_{--} = 0$. La courbe violette (*resp.* en tirée rouge) correspond à la prédiction théorique en prenant en compte les effets de champ moyen sur l'état interne plus (*resp.* sans) la renormalisation de l'interaction à deux corps (voir texte). En insertion : Potentiel effectif V pour $\Omega/2\pi = 30$ kHz pour (de haut en bas) $\delta/\Omega = 0.54$, $\delta/\Omega = \delta_c/\Omega = 0.49$, $\delta/\Omega = 0.44$. La courbe en pointillée orange est l'énergie initiale pour la courbe de potentiel au milieu et correspondant à $s(0) = 1.7$ 123
- 6.1 Spectre des excitations pour un mélange couplé dans le régime où $-a_{\uparrow\downarrow} < \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$. $E_d(k)$ et $E_s(k)$ correspondent respectivement à l'énergie des modes de densité et de spin. 131
- 6.2 Intégrale $I(y)$ en fonction du paramètre $y = \hbar\tilde{\Omega}/-2g_{\uparrow\downarrow}n$. La courbe rouge correspond à l'expression exacte de $I(y)$. Pour $1/y \rightarrow 0$, il est possible de développer l'intégrale, on obtient ainsi un terme à deux corps et un terme à trois corps dans l'équation d'état. La courbe noire représente le terme de $I(y)$ associé au terme à deux corps. La courbe bleue est la somme des terme de $I(y)$ associés à l'interaction à deux et à trois corps. 133
- 6.3 Longueurs de diffusions ($a_{\uparrow\uparrow}$, $a_{\downarrow\downarrow}$, $a_{\uparrow\downarrow}$) intra et inter espèces dans le cas d'un mélange de spin $|1, -1\rangle$ et $|1, 0\rangle$ pour le ^{39}K , ainsi que la longueur de diffusion effective δa 135
- 6.4 Longueur de diffusion a_{--} à $B = 56.830(1)$ G avec $a_{\uparrow\uparrow} = 33.4 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 83.4 a_0$ et $a_{\uparrow\downarrow} = -53.2 a_0$, le minimum a_{--}^{\min} vaut $-0.2 a_0$ lorsque $\delta/\Omega = 0.23$ 136
- 6.5 Schéma de l'expérience. Le condensat est initialement à $t=0$ dans l'état $|-\rangle$, et de taille initiale dans la direction longitudinale $R_{\text{ini}} \approx 33 \mu\text{m}$. Le piège longitudinale est coupé et les atomes sont libres d'évoluer unidimensionnellement pendant 75 ms. L'énergie d'interaction est répulsive, le système minimise son énergie en diminuant sa densité et va donc s'étendre. L'énergie initiale d'interaction est convertie en énergie cinétique. Dans le régime balistique, la taille finale du condensat $\sigma_f \propto \sqrt{E_{\text{BMF}}}$ 137
- 6.6 Schéma de la procédure expérimentale, juste après la condensation dans l'état $|F = 1, m_F = -1\rangle$ 138
- 6.7 Rayon de Thomas-Fermi expérimental après une expansion de 75 ms en fonction de δ/Ω pour $\Omega/2\pi = 12.29$ kHz. La courbe orange parabolique permet de schématiser la tendance des points expérimentaux. 139

6.8	Rayon de Thomas Fermi minimal (pour $\delta = 0.23$) du condensat après 75 ms d'expansion en fonction de la fréquence de Rabi $\Omega/2\pi$. Chaque point est obtenue en moyennant 15 images et les barres d'erreurs correspondent à l'écart-type des mêmes mesures. Les courbes correspondent aux simulations de l'équation de Gross-Pitaevskii avec ou sans ajout du bruit magnétique et pour différentes expression de E_{BMF} (voir texte). La courbe noire : expression exacte avec bruit magnétique. La courbe noire en tiret : expression exacte sans bruit magnétique. La courbe verte en pointillée : uniquement le terme à deux corps de E_{BMF} sans bruit. La courbe rouge en tiret-pointillé : somme du terme à deux et à trois corps sans bruit.	141
6.9	Longueur de diffusion a_{--} en fonction de delta (courbe noire). La zone surlignée en rouge schématise l'effet des fluctuations de champ. Pendant l'expansion, le changement de δ induit un scan de la zone parabolique de a_{--}	142
6.10	Pourcentage d'atomes dans l'état $ +\rangle$ après l'expansion de 75 ms en fonction de la fréquence Rabi $\Omega/2\pi$. Les barres d'erreurs correspondent aux fluctuations sur le nombre d'atomes à chaque itérations de l'expérience.	144
6.11	Exemple de simulation numérique de l'état interne des atomes par résolution de l'équation de Schrödinger avec l'hamiltonien de Rabi en présence d'un terme imaginaire pour l'énergie de l'état $ \downarrow\rangle$. Dans cette simulation, le taux de perte dans l'état $ \downarrow\rangle$ vaut 25 s^{-1} . (a) Désaccord à la résonance en fonction du temps, la valeur initiale est équivalente à 10Ω . (b) La courbe bleue (respectivement orange) correspond à la probabilité que les atomes soit dans l'état $ \uparrow\rangle$ (respectivement $ \downarrow\rangle$) en fonction du temps.	146
6.12	Fonction χ^2 en fonction du nombre d'atomes N et de η pour $\Delta B = 560\text{ Hz}$	149
6.13	Profils de densité pour les atomes dans $ \uparrow\rangle$ (courbe noire) et $ \downarrow\rangle$ (courbe rouge) après une expansion de 75 ms pour $\Omega = 0$. La courbe en tirets bleue correspond à un fit Thomas-Fermi unidimensionnel du profil de densité de l'état $ \downarrow\rangle$	151
B.1	Différence d'énergie ($E_{1,-1} - E_{1,0}$) entre les deux sous niveaux Zeeman $ F = 1, m_F = -1\rangle$ et $ F = 1, m_F = 0\rangle$ en fonction du champ magnétique B	162
B.2	Différence d'énergie ($E_{1,0} - E_{1,1}$) entre les deux sous niveaux Zeeman $ F = 1, m_F = 0\rangle$ et $ F = 1, m_F = 1\rangle$ en fonction du champ magnétique B	163
B.3	Différence d'énergie ($E_{2,2} - E_{1,1}$) entre les deux sous niveaux Zeeman $ F = 2, m_F = 2\rangle$ et $ F = 1, m_F = 1\rangle$ en fonction du champ magnétique B	164

C.1	Schéma de la séquence Ramsey. On représente l'amplitude du champ RF en fonction du temps. Un premier pulse de durée τ permet de créer la superposition d'états. On laisse ensuite le système évoluer en absence de champ pendant une durée T . On interroge finalement le système avec un dernier pulse de durée τ	166
C.2	Nombre d'atomes en fausses couleurs après une séquence de Ramsey. Les atomes à gauche sont dans l'état $ 1, -1\rangle$, ceux à droite dans l'état $ 1, 0\rangle$. L'axe longitudinal du FORT1D est l'axe vertical sur l'image. L'échelle est en pixel où $1 \text{ px} = 1.75 \mu\text{m}$. L'encadré orange correspond à la zone où le champ peut être considéré comme constant.	167
C.3	Exemple de distribution expérimentale de la probabilité d'être dans l'état $ 1, 0\rangle$ pour $T = 50 \mu\text{s}$ et $\delta T \approx \pi/2$ (Voir texte).	168

Bibliographie

- [1] Bernard Diu, Claudine Guthmann, Danielle Lederer, Bernard Roulet, *Physique statistique*, édition Hermann (1997).
- [2] L. De Broglie. *Recherches sur la théorie des Quanta*. Theses, Nov. 1924.
- [3] P. W. Anderson, More is different, Volume 177, Number 4047, *Science* (1972).
- [4] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. *Int. J. Theor. Phys.* 21 467 (1982).
- [5] W. D. Phillips. Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Rev. Mod. Phys.* 70 721 (1998).
- [6] C. N. Cohen-Tannoudji. Manipulating atoms with photons. *Rev. Mod. Phys.* 70 707 (1998).
- [7] S. Chu. The manipulation of neutral particles. *Rev. Mod. Phys.* 70 685 (1998).
- [8] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor, *Science* 269, 198 (1995).
- [9] K. B. Davis, M.-O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms, *Phys. Rev. Lett.* 75, 3969 (1995).
- [10] B. DeMarco and D. S. Jin, Onset of Fermi Degeneracy in a Trapped Atomic Gas, *Science* 285, 1703 (1999).
- [11] Lev Pitaevskii and Sandro Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*, Oxford Science Publications.
- [12] V. Bretin, S. Stock, Y. Seurin and J. Dalibard, Fast rotation of an ultra-cold Bose gas, *Phys. Rev. Lett.* 92, 050403 (2004).
- [13] S. Stock, B. Battelier, V. Bretin, Z. Hadzibabic, and J. Dalibard, Bose-Einstein condensates in fast rotation, *Laser Phys. Lett.* 2, 275 (2005).
- [14] Jean Dalibard, *Cohérence quantique et superfluidité dans les gaz atomiques*, cours au Collège de France, 2015-2016.
- [15] Zoran Hadzibabic, Peter Krüger, Marc Cheneau, Baptiste Battelier and Jean Dalibard, Berezinskii–Kosterlitz–Thouless crossover in a trapped atomic gas, *Nature* volume 441, pages 1118–1121 (2006).

-
- [16] Jean Dalibard, *Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless*, cours au Collège de France, 2016-2017.
- [17] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect and C. I. Westbrook, Hanbury Brown Twiss Effect for Ultracold Quantum Gases, *Science* Vol 310, Issue 574 (2005).
- [18] R. Lopes, A. Imanaliev, A. Aspect, M. Cheneau, D. Boiron and C. I. Westbrook, Atomic Hong–Ou–Mandel experiment, *Nature* volume 520, pages 66–68 (2015).
- [19] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hansch, and I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature* 415, 39 (2002).
- [20] Juliette Billy, Vincent Josse, Zhanchun Zuo, Alain Bernard, Ben Hambrecht, Pierre Lugan, David Clément, Laurent Sanchez-Palencia, Philippe Bouyer and Alain Aspect, Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder, *Nature* volume 453, pages 891–894 (2008).
- [21] Cheng Chin, Rudolf Grimm, Paul Julienne, and Eite Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* 82, 1225.
- [22] E. Timmermans, P. Tommasini, M. Hussein, and A. Kerman, Feshbach resonances in atomic Bose-Einstein condensates, *Phys. Reports* 315, 199 (1999).
- [23] S. Burger, K. Bongs, S. Dettmer, W. Ertmer, K. Sengstock, A. Sanpera, G. V. Shlyapnikov, and M. Lewenstein, Dark Solitons in Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 83, 5198 (1999).
- [24] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, “Formation of a matter-wave bright soliton,” *Science* 296, 1290 (2002).
- [25] K. E. Strecker, G. B. Partridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, “Formation and propagation of matter-wave soliton trains,” *Nature* 417, 150 (2002).
- [26] U. A. Khawaja, H. T. C. Stoof, R. G. Hulet, K. E. Strecker, and G. B. Partridge, “Bright Soliton Trains of Trapped Bose-Einstein Condensates,” *Phys. Rev. Lett.* 89, 200404 (2002).
- [27] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6, *Phys. Rev. Lett.* 93, 050401 (2004).
- [28] Marvin Holten, Luca Bayha, Keerthan Subramanian, Sandra Brandstetter, Carl Heintze, Philipp Lunt, Philipp M. Preiss and Selim Jochim, Observation of Cooper pairs in a mesoscopic two-dimensional Fermi gas, *Nature* volume 606, pages 287–291 (2022).

-
- [29] R. Gati, M. Albiez, J. Fölling, B. Hemmerling and M.K. Oberthaler, Realization of a single Josephson junction for Bose–Einstein condensates, *Applied Physics B* volume 82, pages 207–210 (2006).
- [30] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Fölling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler, Direct Observation of Tunneling and Nonlinear Self-Trapping in a Single Bosonic Josephson Junction, *Phys. Rev. Lett.* 95, 010402 (2005).
- [31] T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, and M. K. Oberthaler, Classical bifurcation at the transition from rabi to Josephson dynamics, *Phys. Rev. Lett.* 105 204101 (2010).
- [32] E. Nicklas, H. Strobel, T. Zibold, C. Gross, B. A. Malomed, P. G. Kevrekidis, and M. K. Oberthaler, Rabi Flopping Induces Spatial Demixing Dynamics, *PRL* 107, 193001 (2011).
- [33] E. Nicklas, W. Muessel, H. Strobel, P. G. Kevrekidis, and M. K. Oberthaler, Nonlinear dressed states at the miscibility-immiscibility threshold, *Phys. Rev. A* 92, 053614 (2015).
- [34] Christian-Marcel Schmied, Maximilian Prüfer, Markus K. Oberthaler, and Thomas Gasenzer, Bidirectional universal dynamics in a spinor Bose gas close to a nonthermal fixed point, *Phys. Rev. A* 99, 033611 (2019).
- [35] Maximilian Prüfer, Philipp Kunkel, Helmut Strobel, Stefan Lannig, Daniel Linnemann, Christian-Marcel Schmied, Jürgen Berges, Thomas Gasenzer and Markus K. Oberthaler, Observation of universal dynamics in a spinor Bose gas far from equilibrium, *Nature* volume 563, pages 217–220 (2018).
- [36] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, *Phys. Rev.* 106, 1135 (1957).
- [37] N. Bogoliubov, On the theory of superfluidity Mathematical Institute, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR and Moscow State University (1947).
- [38] N. Navon, S. Piatecki, K. Günter, B. Rem, T. C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* 107, 135301 (2011).
- [39] A. Bulgac, Dilute quantum droplet, *Phys. Rev. Lett.* 89 050402 (2002).
- [40] P. Naidon and S. Endo, Efimov physics : A review, *Rep. Prog. Phys.* 80, 056001 (2017).
- [41] D.S. Petrov, Three-Body Interacting Bosons in Free Space, *Phys. Rev. Lett.* 112, 103201 (2014).
- [42] D. S. Petrov, Quantum Mechanical Stabilization of a Collapsing Bose-Bose Mixture, *PRL* 115, 155302 (2015).
- [43] I. Ferrier-Barbut *et al.*, Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas, *Phys. Rev. Lett* 116, 215301 (2016).
- [44] Fabian Böttcher *et al.* 2021 *Rep. Prog. Phys.* 84 012403.

- [45] C.R. Cabrera *et al.*, Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates. *Science* 359 301 (2018).
- [46] G. Semeghini *et al.*, Self-Bound Quantum Droplets of Atomic Mixtures in Free Space, *PRL* 120, 235301 (2018).
- [47] G. Berthet, L. Lavoine, M. K. Parit, A. Brolis, A. Boissé, and T. Bourdel, Observation of the algebraic localization-delocalization transition in a one-dimensional disordered potential with a bias force, *Phys. Rev. Research* 2, 013386, 2020.
- [48] Guillaume Berthet, *Désordre et interaction dans les gaz quantiques bosoniques*, 2019.
- [49] M. Zaccanti. *et al*, Observation of an Efimov spectrum in an atomic system, *Nature Physics* volume 5, pages 586–591 (2009).
- [50] J. Dalibard, *Les interactions entre particules dans les gaz quantiques*, cours au Collège de France 2021.
- [51] H. B. G. Casimir and D. Polder. The influence of retardation on the london-van der waals forces. *Phys. Rev.*, 73 :360–372, Feb 1948.
- [52] Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Lalœe, *Mécanique quantique Tome II*, CNRS éditions, edp sciences.
- [53] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger, Many-body physics with ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* 80, 885.
- [54] Manuele Landini, *A tunable Bose-Einstein condensate for quantum interferometry*, PhD thesis, University of Trento, 2012.
- [55] Chiara D’Errico, Matteo Zaccanti, Marco Fattori, Giacomo Roati, Massimo Inguscio¹, Giovanni Modugno, and Andrea Simoni, Feshbach resonances in ultracold ³⁹K, *New Journal of Physics* 9.7, p. 223.
- [56] Claude Cohen-Tannoudji et David Guéry-Odelin, *Avancées en Physique Atomique : Du pompage optique aux gaz quantiques*, édition Hermann.
- [57] S. B. Papp, J. M. Pino, R. J. Wild, S. Ronen, C. E. Wieman, D. S. Jin, and E. A. Cornell, Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting ⁸⁵Rb Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 101, 135301 (2008).
- [58] Raphael Lopes, Christoph Eigen, Nir Navon, David Clément, Robert P. Smith, and Zoran Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* 119, 190404 (2017).
- [59] Antoine Tenart, Gaétan Hercé, Jan-Philipp Bureik, Alexandre Dureau and David Clément, *Nature Physics* volume 17, pages 1364–1368 (2021).
- [60] Tin-Lun Ho and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* 77, 3276 (1996).
- [61] D. S. Hall, M. R. Matthews, J. R. Ensher, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* 81, 1539 (1998).
- [62] E. Timmermans *Phys. Rev. Lett.* 81, 5718 (1998).

- [63] Papp, S. B., Pino, J. M. and Wieman, C. E. Tunable Miscibility in a Dual-Species Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.* 101, 040402 (2008).
- [64] Modugno, G., Roati, G., Riboli, F., Ferlaino, F., Brecha, R. J. and Inguscio, M. Collapse of a Degenerate Fermi Gas. *Science* 297, 2240–2243 (2002).
- [65] Adhikari, S. K. Mean-field description of a dynamical collapse of a fermionic condensate in a trapped boson-fermion mixture. *Phys. Rev. A* 70, 043617 (2004).
- [66] Abad, M. and Recati, A. A study of coherently coupled two-component Bose-Einstein condensates. *The European Physical Journal D* 67, 148 (2013).
- [67] Tom Bienaimé, Eleonora Fava, Giacomo Colzi, Carmelo Mordini, Simone Serafini, Chunlei Qu, Sandro Stringari, Giacomo Lamporesi, and Gabriele Ferrari, *Phys. Rev. A* 94, 063652 (2016).
- [68] Eleonora Fava, Tom Bienaimé, Carmelo Mordini, Giacomo Colzi, Chunlei Qu, Sandro Stringari, Giacomo Lamporesi, and Gabriele Ferrari, *Phys. Rev. Lett.* 120, 170401 (2018).
- [69] D. M. Larsen, *Ann. Phys. (Berlin)* 24, 89 (1963).
- [70] Thomas G. Skov, Magnus G. Skou et al., Observation of a Lee-Huang-Yang Fluid, *Phys. Rev. Lett.* 126, 230404, (2021).
- [71] C.R. Cabrera, Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates, Doctoral thesis 2018.
- [72] Julio Sanz Sánchez, Two-component Bose-Einstein condensates with competing interactions, Doctoral thesis 2020.
- [73] D. S. Petrov, Liquid beyond the van der Waals paradigm, *Nature Physics* volume 14, pages 211–212 (2018).
- [74] D.S.Petrov and G.E.Astrakharchik, Ultradilute Low-Dimensional Liquids, *PRL* 117, 100401 (2016).
- [75] Marek Tylutki, Grigori E. Astrakharchik, Boris A. Malomed, and Dmitry S. Petrov, Collective excitations of a one-dimensional quantum droplet, *Phys. Rev. A* 101, 051601 (R) (2020).
- [76] Tobias Ilg *et al.*, Dimensional crossover for the beyond-mean-field correction in Bose gases, *PRA* 98, 051604(R) (2018).
- [77] P. Zin *et al.*, Quantum Bose-Bose droplets at a dimensional crossover, *Phys. Rev. A* 98, 051603(R) (2018).
- [78] Lauriane Chomaz, Igor Ferrier-Barbut, Francesca Ferlaino, Bruno Laburthe-Tolra, Benjamin L. Lev, Tilman Pfau, Dipolar physics : A review of experiments with magnetic quantum gases, arxiv :2201.02672 (2022).
- [79] H.Kadau *et al.* Observing the Rosensweig instability of a quantum ferrofluid. *Nature* 530, 194 EP-(2019).

- [80] Schmitt, M., Wenzel, M., Böttcher, F. et al. Self-bound droplets of a dilute magnetic quantum liquid. *Nature* 539, 259–262 (2016).
- [81] F. Böttcher *et al.*, Dilute dipolar quantum droplets beyond the extended Gross-Pitaevskii equation, *Phys. Rev. Res* 1 033088 (2019).
- [82] L. Chomaz *et al.*, Quantum-Fluctuation-Driven Crossover from a Dilute Bose-Einstein Condensate to a Macrodroplet in a Dipolar Quantum Fluid, *PRX* 6, 041039 (2016).
- [83] I. Ferrier-Barbut *et al.*, Scissors Mode of Dipolar Quantum Droplets of Dysprosium Atoms, *PRL* 120, 160402 (2018).
- [84] C. D’Errico *et al.*, Observation of quantum droplets in a heteronuclear bosonic mixture, *PRR* 1, 033155 (2019).
- [85] Z. Guo *et al.*, Lee-Huang-Yang effects in the ultracold mixture of ^{23}Na and ^{87}Rb with attractive interspecies interactions, *PRR* 3, 033247 (2021).
- [86] L. Tanzi *et al.*, Feshbach resonances in potassium Bose-Bose mixtures, *Phys. Rev. A* 98, 062712 (2018).
- [87] V. Cikojević *et al.*, Ultradilute quantum liquid drops, *Phys. Rev. B* 97, 140502(R) (2018).
- [88] V. Cikojević *et al.*, Universality in ultradilute liquid Bose-Bose mixtures, *Phys. Rev. A* 99, 023618 (2019).
- [89] G. Ferioli, G. Semeghini et al., Dynamical formation of quantum droplets in a ^{39}K mixture, *Phys. Rev. Research* 2, 013269, (2020).
- [90] G. Ferioli *et al.*, Collisions of Self-Bound Quantum Droplets, *Phys. Rev. Lett.* 122, 090401 (2019).
- [91] P. Cheiney *et al.*, Bright Soliton to Quantum Droplet Transition in a Mixture of Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 120, 135301 (2018).
- [92] M. Guo, F. Böttcher, J. Hertkorn, J-N. Schmidt, M. Wenzel, H-P. Büchler, T. Langen and Tilman Pfau, The low-energy Goldstone mode in a trapped dipolar supersolid, *Nature* volume 574, pages 386–389 (2019).
- [93] M. Norcia, C. Politi, L. Klaus, E. Poli, M. Sohmen, M.J. Mark, R.N. Bisset, L.Santos and F. Ferlaino, Two-dimensional supersolidity in a dipolar quantum gas, *Nature* volume 596, pages 357–361 (2021).
- [94] Clemens Staudinger, Ferran Mazzanti, and Robert E. Zillich, Self-bound Bose mixtures, *Phys. Rev. A* 98, 023633 (2018).
- [95] V. Cikojević *et al.*, Finite-range effects in ultradilute quantum drops, *New J. Phys.* 22 053045 (2020).
- [96] Hui Hu and Xia-Ji Liu, Consistent Theory of Self-Bound Quantum Droplets with Bosonic Pairing, *Phys. Rev. Letter*, 125, 195302 (2020).
- [97] Miki Ota and Grigori E. Astrakharchik, Beyond Lee-Huang-Yang description of self-bound Bose mixtures, *SciPost Phys.* 9, 020 (2020).

-
- [98] L. Lavoine and T. Bourdel, Beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions in quantum droplets of binary mixtures, *Phys. Rev. A* 103, 033312 (2021).
- [99] M. Olshanii, Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons, *Phys. Rev. Lett.* 81, 938 (1998).
- [100] Hongen Jia, Kaitai Li, A third accurate operator splitting method, *Mathematical and Computer Modelling* 53 387–396, (2011).
- [101] X. Antoine, R. Duboscq, GPELab, a Matlab Toolbox to solve Gross-Pitaevskii Equations II : dynamics and stochastic simulations, *Computer Physics Communications* 00 (2015) 1–29.
- [102] Thiab R.Taha, Mark I.Ablowitz, Analytical and numerical aspects of certain nonlinear evolution equations. II. Numerical, nonlinear Schrödinger equation, *Journal of Computational Physics*, Volume 55, Issue 2, August 1984, Pages 203-230.
- [103] X. Antoine, R. Duboscq, GPELab, a Matlab Toolbox to solve Gross-Pitaevskii Equations I : computation of stationary solutions, *Computer Physics Communications* 00 (2014) 1–38.
- [104] M. Chiofalo, S. Succi and M. Tosi, Ground state of trapped interacting Bose-Einstein condensates by an explicit imaginary-time algorithm, *Phys. Rev. E*, 62, 7438-7444 (2000).
- [105] V. S. Popov *et al.*, Imaginary-Time Method in Quantum Mechanics and Field Theory, *Physics of Atomic Nuclei* volume 68, pages 686–708 (2005).
- [106] G. E. Astrakharchik and B. A. Malomed, Dynamics of one-dimensional quantum droplets, *Phys. Rev. A* 98, 013631 (2018).
- [107] Fabian Böttcher, Matthias Wenzel *et al.*, Dilute dipolar quantum droplets beyond the extended Gross-Pitaevskii equation, *PRR* 1, 033088 (2019).
- [108] Giulia De Rosi, Pietro Massignan, Maciej Lewenstein, and Grigori E. Astrakharchik, Beyond-Luttinger-liquid thermodynamics of a one-dimensional Bose gas with repulsive contact interactions, *Phys. Rev. Research* 1, (2019).
- [109] Giulia De Rosi, Grigori E. Astrakharchik, and Pietro Massignan, Thermal instability, evaporation, and thermodynamics of one-dimensional liquids in weakly interacting Bose-Bose mixtures, *Phys. Rev. A* 103, 043316 (2021).
- [110] Guillaume Salomon, Production tout optique de condensats de Bose-Einstein de 39K : des interactions contrôlables pour l'étude de gaz quantiques désordonnés en dimensions réduites, 2014.
- [111] Lauriane Fouché, Gaz quantiques de potassium 39 à interactions contrôlables, 2015.
- [112] Ramsauer, Carl, “Ueber den Wirkungsquerschnitt der Gasmolekuele gegeneinander langsamen Elektronen”. In : *Annalen der Physik* 369.6, pp. 513–540, (1921).

-
- [113] M. Landini, S. Roy, G. Roati, A. Simoni, M. Inguscio, G. Modugno, and M. Fattori, *Phys. Rev. A* 86, 033421 (2012).
- [114] Keshet, Aviv (2008). Cicero Word Generator. Technical and User Manual.
- [115] G. Salomon et al., Gray-molasses cooling of ^{39}K to a high phase-space density, *EPL* 104 63002 (2013).
- [116] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* 61, 826 (1988).
- [117] Dalibard J. et Cohen-Tannoudji C., *J. Opt. Soc. Am. B* 6 (1989) 2023.
- [118] Wing, William H. (Jan. 1984). "On Neutral Particle Trapping in Quasistatic Electromagnetic Fields". In : *Progress in Quantum Electronics* 8.3, pp. 181–199. ISSN : 0079-6727. DOI : 10.1016/0079-6727(84)90012-0.
- [119] Hélène Perrin, Lecture 1 : Spin and fields, Les Houches lectures on adiabatic potentials 2013.
- [120] Daniel Adam Steck, *Quantum and Atom Optics*, 2007.
- [121] J. Dalibard, *La matière topologique et son exploration avec les gaz quantiques*, cours au Collège de France 2017-2018.
- [122] J. Dalibard, *Champ magnétique artificiel*, cours au Collège de France 2013-2014.
- [123] Hélène Perrin, Barry M. Garraway, *Trapping atoms with radio-frequency adiabatic potentials*, arXiv :1706.08063, 2017.
- [124] Rudolf Grimm, Matthias Weidem uller, Yurii B. Ovchinnikov, *Optical dipole traps for neutral atoms*, *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Academic Press, Volume 42, 2000, Pages 95-170.
- [125] Lepoutre, S. et al, "Production of strongly bound ^{39}K bright solitons", *Physical Review A* (2016).
- [126] Billy, Juliette et al. (2008). "Direct observation of Anderson localization of matter waves in a controlled disorder". In : *Nature* 453.7197, pp. 891–894.
- [127] Mira Maiw oger, et al., *Observation of Light-Induced Dipole-Dipole Forces in Ultracold Atomic Gases*, arXiv :2202.00562 (2022).
- [128] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, *Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs*, *Phys. Rev. Lett.* 92, 040403 (2004).
- [129] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance*, *Phys. Rev. Lett.* 92, 120403 (2004).
- [130] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, *Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas*, *Phys. Rev. Lett.* 92, 120401 (2004).

-
- [131] A. Schirotzek *et al.*, Observation of Fermi Polarons in a Tunable Fermi Liquid of Ultracold Atoms, *Phys. Rev. Lett.* 102, 230402 (2009).
- [132] Marco Koschorreck, Daniel Pertot, Enrico Vogt, Bernd Fröhlich, Michael Feld and Michael Köhl, Attractive and repulsive Fermi polarons in two dimensions, *Nature* volume 485, pages 619–622 (2012).
- [133] Nils B. Jørgensen *et al.*, Observation of Attractive and Repulsive Polarons in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 117, 055302 (2016).
- [134] Magnus G. Skou, Thomas G. Skov, Nils B. Jørgensen, Kristian K. Nielsen, Arturo Camacho-Guardian, Thomas Pohl, Georg M. Bruun and Jan J. Arlt, Non-equilibrium quantum dynamics and formation of the Bose polaron, *Nature Physics* volume 17, pages 731–735 (2021).
- [135] A. Boissé, G. Berthet, L. Fouché, G. Salomon, A. Aspect, S. Lepoutre, T. Bourdel, Non-linear scattering of atomic bright solitons in disorder, *EPL*, 117 10007 (2017).
- [136] D. M. Bauer, M. Lettner, C. Vo, G. Rempe, and S. Dürr. Control of a magnetic Feshbach resonance with laser light. *Nat. Phys.* 5 339 (2009).
- [137] N. Arunkumar, A. Jagannathan, and J. E. Thomas. Designer spatial control of interactions in ultracold gases. *Phys. Rev. Lett.* 122 040405 (2019).
- [138] A. J. Moerdijk, B. J. Verhaar, and T. M. Nagtegaal, Collisions of dressed ground-state atoms, *Phys. Rev. A* 53, 4343 (1996).
- [139] C. P. Search and P. R. Berman, Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* 63 1 (2001).
- [140] J. Sanz *et al.*, Interaction Control and Bright Solitons in Coherently Coupled Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 128, 013201 (2022).
- [141] T. T. Wu, Ground state of a Bose system of hard spheres, *Phys. Rev.* 115, 1390 (1959).
- [142] T. Köhler, Three-Body Problem in a Dilute Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 89, 210404 (2002).
- [143] H. W. Hammer, A. Nogga, and A. Schwenk, Colloquium : Three-body forces : From cold atoms to nuclei, *Rev. Mod. Phys.* 85, 197 (2013).
- [144] A. Gammal, T. Frederico, L. Tomio, and P. Chomaz, Atomic Bose-Einstein condensation with three-body interactions and collective excitations, *J. Phys. B* 33, 4053 (2000).
- [145] K. G. Zlochastiev, Stability and Metastability of Trapless Bose-Einstein Condensates and Quantum Liquids, *Z. Naturforsch. A* 72, 677 (2017).
- [146] A. Gammal, T. Frederico, L. Tomio, and F. K. Abdullaev, Stability analysis of the D-dimensional nonlinear Schrödinger equation with trap and two- and three-body interactions, *Phys. Lett. A* 267, 305 (2000).

-
- [147] P. M. A. Mestrom, V. E. Colussi, T. Secker, G. P. Groeneveld, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, van der Waals Universality near a Quantum Tricritical Point, *Phys. Rev. Lett.* 124, 143401 (2020).
- [148] S. Tan, Three-boson problem at low energy and implications for dilute Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. A* 78, 013636 (2008).
- [149] P. M. A. Mestrom, V. E. Colussi, T. Secker, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, Scattering hypervolume for ultracold bosons from weak to strong interactions, *PRA* 100, 050702(R) (2019).
- [150] Shangguo Zhu, Shina Tan, Three-body scattering hypervolumes of particles with short-range interactions, *arXiv* :1710.04147 (2017).
- [151] J. P. D’Incao, Few-body physics in resonantly interacting ultracold quantum gases, *J. Phys. B* 51, 043001 (2018).
- [152] W. Zwerger, Quantum-unbinding near a zero temperature liquid-gas transition, *J. Stat. Mech.* 103104 (2019).
- [153] Z. Shotan, O. Machtey, S. Kokkelmans, and L. Khaykovich, Three-Body Recombination at Vanishing Scattering Lengths in an Ultracold Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* 113, 053202 (2014).
- [154] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl and R. Grimm, Evidence for Efimov quantum states in an ultracold gas of caesium atoms, *Nature* volume 440, pages 315–318 (2006).
- [155] Yujun Wang and Paul S. Julienne, Universal van der Waals physics for three cold atoms near Feshbach resonances, *Nature Physics* volume 10, pages 768–773 (2014).
- [156] A. J. Daley, J. M. Taylor, S. Diehl, M. Baranov, and P. Zoller, Atomic Three-Body Loss as a Dynamical ThreeBody Interaction, *Phys. Rev. Lett.* 102, 040402 (2009).
- [157] M. J. Mark, S. Flannigan, F. Meinert, J. P. D’Incao, A. J. Daley, and H.-C. Nägerl, Interplay between coherent and dissipative dynamics of bosonic doublons in an optical lattice, *Phys. Rev. Research* 2, 043050 (2020).
- [158] D. S. Petrov, Elastic multibody interactions on a lattice, *Phys. Rev. A* 90, 021601(R) (2014).
- [159] A. Muryshev, G. V. Shlyapnikov, W. Ertmer, K. Sengstock, and M. Lewenstein, Dynamics of Dark Solitons in Elongated Bose- Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 89, 110401 (2002).
- [160] I. E. Mazets, T. Schumm, and J. Schmiedmayer, Breakdown of Integrability in a Quasi-1D Ultracold Bosonic Gas, *Phys. Rev. Lett.* 100, 210403 (2008).
- [161] K. Merloti, R. Dubessy, L. Longchambon, M. Olshanii, and H. Perrin, Breakdown of scale invariance in a quasi-twodimensional Bose gas due to the presence of the third dimension, *Phys. Rev. A* 88, 061603(R) (2013).

-
- [162] A. Hammond, L. Lavoine, and T. Bourdel, Tunable Three-Body Interactions in Driven Two-Component Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* 128, 083401 (2022).
- [163] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential, *Phys. Rev. A* 54, R1753 (1996).
- [164] L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Breathing modes and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions, *Phys. Rev. A* 55, R853 (1997).
- [165] F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K. W. Madison, and J. Dalibard, Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 88, 250402 (2002).
- [166] C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, England, (2008).
- [167] N. B. Jørgensen, G. M. Bruun, and J. J. Arlt, Dilute Fluid Governed by Quantum Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* 121, 173403 (2018).
- [168] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, M. J. Holland, J. E. Williams, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Watching a Superfluid Untwist Itself : Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 83, 3358 (1999).
- [169] E. V. Goldstein and P. Meystre, Quasiparticle instabilities in multicomponent atomic condensates, *Phys. Rev. A* 55, 2935 (1997).
- [170] Alessio Recati and Sandro Stringari, Coherently Coupled Mixtures of Bose-Einstein Condensed Gases, *arXiv :2108.10159* (2021).
- [171] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. A. Cornell, and M. Holland, Excitation of a dipole topological state in a strongly coupled two-component Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* 61, 033612 (2000).
- [172] E. Nicklas, M. Karl, M. Höfer, A. Johnson, W. Muessel, H. Strobel, J. Tomkovic, T. Gasenzer, and M. K. Oberthaler, Observation of Scaling in the Dynamics of a Strongly Quenched Quantum Gas, *Phys. Rev. Lett.* 115, 245301 (2015).
- [173] A. Farolfi, A. Zenesini, D. Trypogeorgos, C. Mordini, A. Gallemí, A. Roy, A. Recati, G. Lamporesi and G. Ferrari, Quantum-torque-induced breaking of magnetic interfaces in ultracold gases, *Nature Physics* volume 17, pages 1359–1363 (2021).
- [174] A. Cappellaro, F. Macri, G. Bertacco, and L. Salasnich, Equation of state and self-bound droplet in Rabi-coupled Bose mixtures, *Sci. Rep.* 7, 13358 (2017).
- [175] L. Lavoine, A. Hammond, A. Recati, D. S. Petrov, and T. Bourdel, Beyond-Mean-Field Effects in Rabi-Coupled Two Component Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* 127, 203402 (2021).

- [176] Voir le *Supplemental Material* à <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.127.203402> pour la dérivation du terme au delà du champ moyen et pour la solution du problème à deux corps en présence du couplage cohérent.
- [177] J. Dalibard, Interactions entre particules dans les gaz quantiques (II) : de 2 à N corps, cours au Collège de France 2022.
- [178] Christoph Weiss, Martin Block, Dave Boers, André Eckardt and Martin Holthaus, Ground-State Energy of a Weakly Interacting Bose Gas : Calculation Without Regularization, *Z. Naturforsch.* 59a, 1 – 13 (2004).
- [179] R. Cominotti, A. Berti, A. Farolfi, A. Zenesini, G. Lamporesi, I. Carusotto, A. Recati, and G. Ferrari, Observation of Massless and Massive Collective Excitations with Faraday Patterns in a Two-Component Superfluid, *Phys. Rev. Lett.* 128, 210401 (2022).
- [180] Carey Witkov, Keith Zengel, *Chi-Squared Data Analysis and Model Testing for Beginners*, Oxford University Press (2019).
- [181] R. P. Smith, R. L. D. Campbell, N. Tammuz, and Z. Hadzibabic, Effects of Interactions on the Critical Temperature of a Trapped Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* 106, 250403 (2011).
- [182] T. Mithun, K. Porsezian, and B. Dey, Vortex dynamics in cubic-quintic Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. E* 88, 012904 (2013).
- [183] A. M. Kamchatnov and M. Salerno, Dark soliton oscillations in Bose-Einstein condensates with multibody interactions, *J. Phys. B* 42,185303 (2009).
- [184] M. Crosta, S. Trillo, and A. Fratalocchi, Crossover dynamics of dispersive shocks in Bose-Einstein condensates characterized by two and three-body interactions, *Phys. Rev. A* 85, 043607 (2012).
- [185] M. Crosta, S. Trillo, and A. Fratalocchi, The Whitham approach to dispersive shocks in systems with cubic-quintic nonlinearities, *New J. Phys.* 14, 093019 (2012).
- [186] Y. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons* (Academic Press, San Diego 2003).
- [187] Y. Sekino and Y. Nishida, Quantum droplet of one-dimensional bosons with a three-body attraction, *Phys. Rev. A* 97, 011602(R) (2018).
- [188] Y. Nishida, Universal bound states of one-dimensional bosons with two- and three-body attractions, *Phys. Rev. A* 97, 061603(R) (2018).
- [189] G. Guijarro, A. Pricoupenko, G.E. Astrakharchik, J. Boronat, and D. S. Petrov, One-dimensional three-boson problem with two- and three-body interactions, *Phys. Rev. A* 97, 061605(R) (2018).
- [190] H. Hu, Z.-Q. Yu, J. Wang, and X.-J. Liu, First-order Bose-Einstein condensation with three-body interacting bosons, *Phys. Rev. A* 104, 043301 (2021).

-
- [191] Article non publié de D.S. Petrov et A. Recati.
 - [192] T. A. Yoğurt, A. Keleş, and M. Ö. Oktel, Spinor boson droplets stabilized by spin fluctuations, *Phys. Rev. A* 105, 043309 (2022).
 - [193] A. Frölian, C. S. Chisholm, E. Neri, C. R. Cabrera, R. Ramos, A. Celi, and L. Tarruell, Realising a one-dimensional topological gauge theory in an optically dressed Bose-Einstein condensate, *arXiv :2204.05380* (2022).
 - [194] C. S. Chisholm, A. Frölian, E. Neri, R. Ramos, L. Tarruell, and A. Celi, Encoding a one-dimensional topological gauge theory in a Raman-coupled Bose-Einstein condensate, *arXiv :2204.05386* (2022).
 - [195] E. J. Halperin and J. L. Bohn, Quench-produced solitons in a box-trapped Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. Research* 2, 043256 (2020).
 - [196] Li-Chung Ha, Logan W. Clark, Colin V. Parker, Brandon M. Anderson, and Cheng Chin, Roton-Maxon Excitation Spectrum of Bose Condensates in a Shaken Optical Lattice, *Phys. Rev. Lett.* 114, 055301 (2015).

Publications

- G. Berthet, L. Lavoine, M. K. Parit, A. Brolis, A. Boissé, and T. Bourdel, **Observation of the algebraic localization-delocalization transition in a one-dimensional disordered potential with a bias force**, Phys. Rev. Research 2, 013386 – Published 31 March 2020.
- L. Lavoine and T. Bourdel, **Beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions in quantum droplets of binary mixtures**, Phys. Rev. A 103, 033312 – Published 15 March 2021.
- L. Lavoine, A. Hammond, A. Recati, D.S. Petrov, and T. Bourdel, **Beyond-Mean-Field Effects in Rabi-Coupled Two-Component Bose-Einstein Condensate**, Phys. Rev. Lett. 127, 203402 – Published 12 November 2021
- A. Hammond, L. Lavoine, and T. Bourdel, **Tunable Three-Body Interactions in Driven Two-Component Bose-Einstein Condensates**, Phys. Rev. Lett. 128, 083401 – Published 23 February 2022

Observation of the algebraic localization-delocalization transition in a one-dimensional disordered potential with a bias force

G. Berthet, L. Lavoine, M. K. Parit , A. Brolis , A. Boissé, and T. Bourdel 

Laboratoire Charles Fabry, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Université Paris-Saclay, 2 avenue A. Fresnel, 91127 Palaiseau Cedex, France



(Received 2 August 2019; accepted 30 January 2020; published 31 March 2020)

One-dimensional (1D) Anderson localization phenomena are strongly affected by a bias force or equivalently a voltage in electronic systems. We experimentally study this case, launching a noninteracting ^{39}K Bose-Einstein condensate in a 1D disordered potential induced by a far-off-resonance laser speckle, while controlling a bias force. In agreement with theoretical predictions, we observe a transition between algebraic localization and delocalization as a function of our control parameter that is the relative strength of the disorder against the bias force. We also demonstrate that the transition is intrinsically energy independent and that the initial velocity of the wave packet only plays a role through an effective disorder strength due to the correlation of the disorder.

DOI: [10.1103/PhysRevResearch.2.013386](https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.013386)

I. INTRODUCTION

Adding a bias force is a quite natural way to probe the transport properties of quantum systems, a subject of broad interest. In particular, electronic systems are probed through the current response to an applied voltage that is equivalent to a force. The study of transport with atomic quantum gases is of specific interest because of their high degree of control and versatility. They do not suffer from dissipation or decoherence effects, such as the ones induced by phonons in condensed-matter materials [1]. For example, Bloch oscillations have been measured through the addition of a constant force to atoms in a periodic potential induced by an optical lattice [2]. A force applied to a harmonic trap is equivalent to a trap displacement. The response to such a displacement reveals the fluid or insulating behavior of atomic systems. In one-dimensional (1D) interacting Bose gases, the pinning transition by an optical lattice [3,4] or the insulating transition in quasidisordered optical lattice [5,6] have been studied in this manner. More recently, transport in quantum gases is also studied in biased junction-type setup more analogous to condensed-matter systems [7,8].

In our work, we focus on the transport of noninteracting particles in disordered media. Without a bias force, quantum interferences between multiple paths lead to Anderson localization [9] whose signature is an exponential decay in the space of single-particle wave functions [10]. This phenomenon is ubiquitous in wave and quantum physics and it has been observed in many physical contexts [11] including condensed matter [12] and ultracold atoms [13–15]. One-dimensional truly disordered systems are always localized

[16], unlike the three-dimensional (3D) cases where a localization transition takes place [17–20].

The localization properties of 1D disordered systems are strongly modified in the presence of a bias force. At infinite time, theoretical studies predict a sharp localization-delocalization transition as a function of a single dimensionless parameter α which is the ratio of the force to the disorder strength [21,22]. The transition remarkably does not depend on the energy of the particles for a white noise disorder. In addition, the usual exponential decay associated to the localization is replaced by a much weaker algebraic decay. Related phenomena such as a nonlinear current-voltage response could be relevant in 1D condensed-matter systems such as nanowires [23] or nanotubes [12].

Realistic disorders can be correlated with possible important effects. For particles at momentum k , only disorder Fourier components around $2k$ are relevant in the weak disorder limit (Born approximation). For example, our disorder produced from a far-off-resonance laser speckle [24] has no Fourier component beyond a spatial frequency k_c and back-scattering and localization are thus not expected for atoms with wave vectors $k > k_c/2$ (effective mobility edge) [13,25]. Since localized wave functions always have a small fraction at long distances corresponding to large energies and momenta, in the presence of a bias force, we thus expect correlation-induced delocalization at very long times. However, at transient times, sufficiently fine disorder correlations are expected to play little role [22].

In this paper, we report on the observation of the algebraic localization-delocalization transition with ultracold atoms propagating in a one-dimensional disordered potential in the presence of a controlled bias force. We experimentally show that the dimensionless ratio of the force to the disorder strength α is the only relevant parameter to describe the transition. We notice that the initial velocity of the quantum wave packet only plays a role through the correlation of the disordered potential, showing that the transition is intrinsically energy independent. In the localized regime, we

Published by the American Physical Society under the terms of the [Creative Commons Attribution 4.0 International license](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/). Further distribution of this work must maintain attribution to the author(s) and the published article's title, journal citation, and DOI.

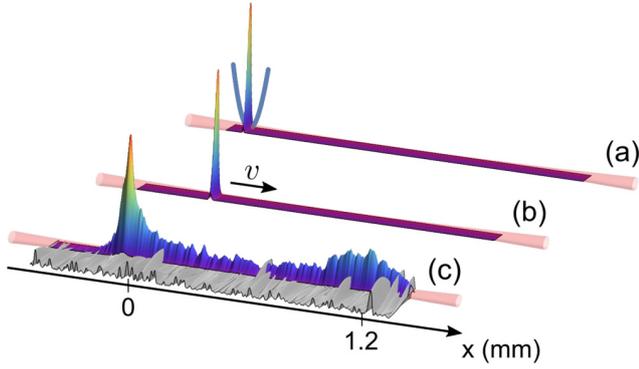


FIG. 1. Schematic of the experimental sequence. A noninteracting atomic Bose-Einstein condensate is produced in a crossed trap (a). The cloud is then launched into a 1D tube with a controlled force (b). The cloud can be accelerated to a velocity v . A constant force is then applied for a time τ to the system while a 1D speckle at 532 nm is shone on the atoms (c). An average density profile over eight disorder realizations is shown.

demonstrate an algebraic decay of the density and measure the corresponding decay exponent as a function of α , revealing features due to the speckle disorder correlation.

II. EXPERIMENTAL SETUP

We first produce a ^{39}K Bose-Einstein condensate. In contrast to our previous works [26–28], after optical cooling, we pump the atoms to the $|F = 2, m_F = 2\rangle$ state and load a magnetic trap which serves as a reservoir for loading a tightly confining optical trap [29]. The evaporation is then pursued in the $|F = 1, m_F = 1\rangle$ state in the vicinity of the 403.4(7) G Feshbach resonance [30] until condensation is reached. The magnetic field is then ramped down close to the scattering length zero crossing at 350.4(4) G in order to be in a noninteracting regime. The scattering length is then $-0.2 \pm 0.2 a_0$ with a_0 being the Bohr radius. The final trap is made of two horizontal far-detuned laser beams at 1064 and 1550 nm. Its trapping frequencies are $18 \times 124 \times 124$ Hz. When the 1550-nm beam is turned off, the longitudinal confinement (along \hat{x}) is removed and the atoms are free to evolve in the 1064-nm trap whose radial frequencies are $\omega_{\perp}/2\pi = 124$ Hz [31] (see Fig. 1). The residual trapping frequency in the longitudinal direction is precisely canceled to 0.0(5) Hz by using the magnetic field curvature induced by two pairs of magnetic coils. We also control a longitudinal force, characterized by an acceleration a , through a magnetic field gradient produced by an off-centered additional coil.

A 1D disorder potential is shone on the atoms for a time τ while they propagate in the one-dimensional trap under the action of the constant force. The atoms are finally imaged by resonant fluorescence imaging at zero magnetic field. For a strong disorder, the atoms do not move much from their initial position, whereas, for small disorder, they behave ballistically. We adjust the propagation time τ as a function of the constant force such that in the ballistic regime the atoms travel about 1 mm and are still in the camera field of view. In this case, the velocity spread of the atomic cloud is measured to be $\Delta v = 0.37(6)$ mm s $^{-1}$. In Fig. 1(c), we show

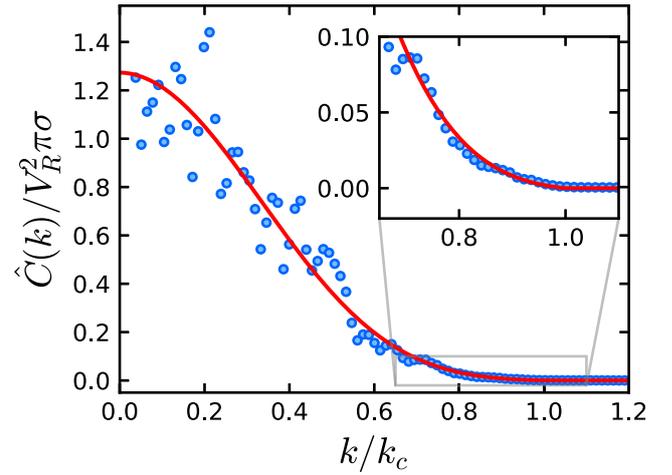


FIG. 2. Power spectral function $\hat{C}(k)$ of a single realization of the disorder measured in a square of $175 \times 175 \mu\text{m}$. The dispersal of points at low spacial frequencies is due to the speckle randomness. The curve is a fit with the autoconvolution of a truncated Gaussian as can be experimentally expected from a truncated Gaussian entering the optical system. The fitted function is used in the rest of the paper. The inset shows an enlargement around $k/k_c = 1$.

a density profile observed at intermediate disorder strength where both localized and ballistic atomic fraction are visible. We define the localized fraction by integrating over a window extending by $300 \mu\text{m}$ in the propagation direction. This value is chosen somewhat arbitrarily to include most atoms in the localized decaying peak while not including atoms that are in the process of escaping. We have checked that our experimental results do not strongly depend on the chosen value [32].

The disorder is produced from a laser speckle at 532 nm, and its effect on the atoms is the one of a conservative potential. The 532-nm laser beam propagates along the \hat{z} axis and passes through a diffusing plate. The amplitude V_R of the speckle potential is proportional to the laser intensity and corresponds to both its mean value and its standard deviation [24]. On the diffusing plate, the intensity distribution is elliptical with the major axis along \hat{x} and the minor axis along \hat{y} . This produces an anisotropic disorder that we have imaged for characterization. The autocorrelation widths are $4.7 \mu\text{m}$ along \hat{y} and $4.3 \mu\text{m}$ along \hat{z} (half-width at $1/\sqrt{e}$). Both values largely exceeds the ground-state extension of the harmonic oscillator $\sqrt{\hbar/2m\omega_{\perp}} = 1.0 \mu\text{m}$, where m is the atomic mass and \hbar is the reduced Planck constant. The disordered potential can thus be considered as one dimensional for the atoms propagating along \hat{x} . In this direction, the power spectral density $\hat{C}(k)$ is shown in Fig. 2. It takes zero values for wave vectors larger than $k_c = 2/\sigma$ with $\sigma = 0.34(1) \mu\text{m}$. The power spectral density at zero momentum is $\hat{C}(k=0) = cV_R^2\pi\sigma$, where $c = 1.26(5)$. It would be 1 for a uniform intensity on the diffusing plate.

Let us now discuss the relevant energy scales of our experiment. The correlation length of the disorder gives the correlation energy $E_{\sigma} = \hbar^2/2m\sigma^2 = (2\pi\hbar) \times 1.1$ kHz. In order for the correlation of the disorder to play little role, it has to be the largest energy scale. By dimensional analysis,

one can construct an energy scale $E_a = \hbar^{2/3} m^{1/3} a^{2/3}$ associated with the acceleration a . Experimentally, E_a takes values between $(2\pi\hbar) \times 7$ Hz and $(2\pi\hbar) \times 33$ Hz. The disorder strength is characterized by V_R , which is varied between 0 and $(2\pi\hbar) \times 200$ Hz. A more relevant parameter when comparing with a white noise potential is rather $V^* = \hbar^{-2/3} m^{1/3} \hat{C}(0)^{2/3}$, which is lower than V_R . The dimensionless parameter α is then defined as $\alpha = (E_a/V^*)^{3/2} = \hbar^2 a / \hat{C}(0)$ such that the localization-delocalization transition is expected for $\alpha = 1$ [22]. Another energy scale, $E_\tau = \hbar/\tau$, can be associated to the propagation time τ . Its value is chosen to be below the value of E_a by a factor of the order of 15 to 20, such that propagation, scattering, and localization phenomena have enough time to set in. Note that in a correlated speckle disorder, the very long time limit is complete delocalization [22] and we thus work at intermediate time where the localization-delocalization transition is smoothed.

III. RESULTS

We first study the case of atoms entering the disorder without initial velocity. The localized fraction are measured for four different values of the acceleration $a = 9.3(6)$, $a = 19(1)$, $a = 32(2)$, and $a = 81(4)$ mm s⁻² respectively associated with propagation times $\tau = 460$, $\tau = 320$, $\tau = 280$, $\tau = 90$ ms [see Fig. 3(a)]. For small values of the speckle amplitude V_R , the system is mostly delocalized whatever the acceleration. On the contrary, all the atoms are localized when the speckle strength is high. One notes slower acceleration is correlated with faster localized fraction increases with V_R .

Rescaling the horizontal axis with the dimensionless parameter $1/\sqrt{\alpha}$, which is proportional to V_R/\sqrt{a} , leads to a clear collapse of the data within the error bars [see Fig. 3(b)]. This indicates that α , which compares the acceleration to the disorder strength, is the relevant parameter driving the localization-delocalization transition. If the transition point is defined for a localized fraction equal to 0.5, this corresponds to $\alpha = 1.0(3)$. We can compare these results with disorder-averaged numerical simulations of the 1D Schrödinger equation for our parameters [Fig. 3(b)]. We use these simulations to calibrate V_R as a function of the optical power with a 15% uncertainty, matching estimations from scattering experiments in the absence of a force.

We now consider the case of atoms entering the disorder with an initial positive velocity. The initial velocity v is first set by applying an acceleration to the atoms during 10 ms without disorder (see Fig. 1). The acceleration is then changed to its final value $a = 19$ mm s⁻² and the speckle is shone on the atoms for 280 ms. The measured localized fractions are presented in Fig. 4 [28]. For the highest velocity ($v = \hbar k/m = 2.9$ mm s⁻¹), $k\sigma_x \simeq 0.6$, and the value of the disorder potential's power spectrum $\hat{C}(2k) = 0.17\hat{C}(0)$ is greatly reduced. This correlation effect is responsible for the noncollapsing behavior when the localized fractions are plotted as a function of $1/\sqrt{\alpha}$ [see Fig. 4(a)]. Plotting as a function of $1/\sqrt{\alpha^*}$, where $\alpha^* = \hbar^2 a / \hat{C}(2k)$ takes into account an effective disorder strength at the atomic initial momentum k , leads to a much better collapse of the data on the curve at zero velocity for which $\alpha^* = \alpha$ [see Fig. 4(b)]. This indicates that α^* is

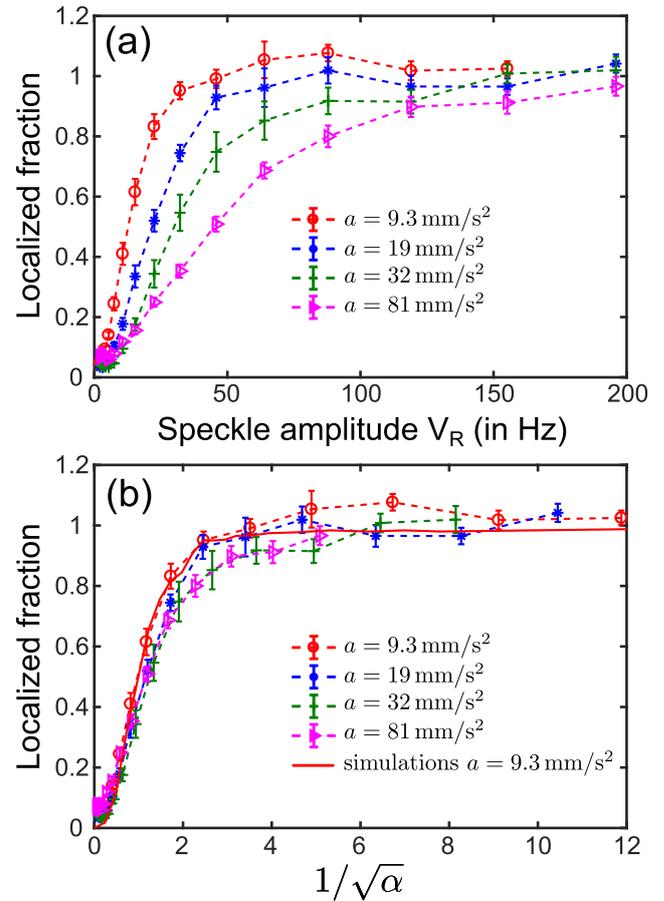


FIG. 3. Localized atomic fraction as a function of the speckle amplitude V_R (a) and $1/\sqrt{\alpha} \propto V_R/\sqrt{a}$ (b) obtained for four different values of the applied acceleration and $v = 0$. Each curve is averaged over eight realizations of the disorder potential. The error bars are the standard deviations of the measured localized fractions. Experimental values above 1 are due to small errors in background subtraction. The continuous red line is the average of numerical simulations of the 1D Schrödinger equation.

the most relevant parameter and that the initial velocity only plays a role through the correlation of the disorder [22]. The transition point corresponding to a localized fraction of 0.5 is obtained for $\alpha^* = 1.0(4)$ [Fig. 4(b)].

Finally, we perform a more careful analysis of the localized profiles for the specific case of $a = 19$ mm s⁻². We find that singles profiles are quite noisy with modulations that are stable for a given speckle realization. This shows that the localization profile is not a self-averaging quantity. We thus average results for eight different realizations of the speckle in order to obtain smooth localization profiles (Fig. 5). An algebraic scaling is visible for distances between 40 and 300 μ m (a straight line in log-log scale), whereas an exponential decay in this region does not fit the data. It is expected that the algebraic dependence is only valid at sufficiently large distances [22,33]. Above 300 μ m, the signal-to-noise ratio is low.

We now study the algebraic decay coefficient β as a function of the disorder strength or equivalently as a function of α^* (see Fig. 6). The coefficient is found to increase

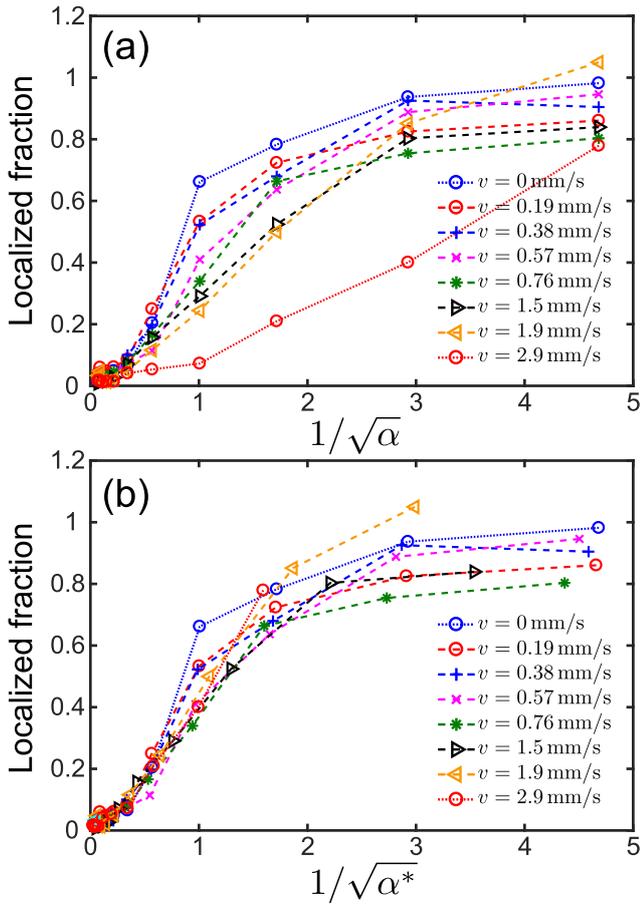


FIG. 4. Localized fractions of the noninteracting cloud of atoms as a function of $1/\sqrt{\alpha}$ (a) and $1/\sqrt{\alpha^*}$ (b) for different values of the initial velocity and $a = 19 \text{ mm s}^{-2}$.

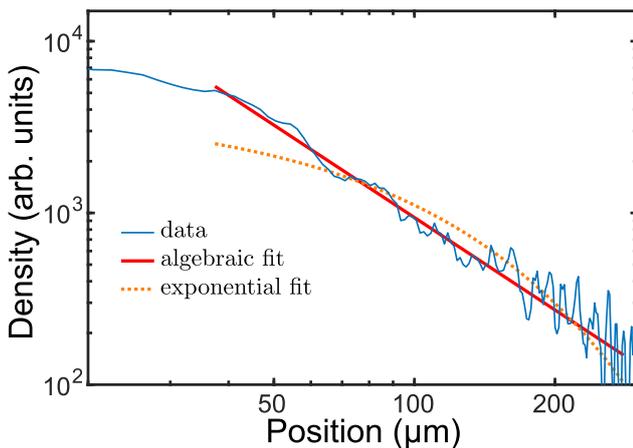


FIG. 5. Averaged localized density profile as a function of the atom displacement in log-log scale for $a = 19 \text{ mm s}^{-2}$, $\alpha = 0.03$, and $v = 0$. Log-log scale permits us to show the algebraic dependence as a straight line. The algebraic (red continuous line) and exponential (orange dotted line) fits are displayed. The fit with the power law $1/x^\beta$ leads to $\beta = 1.79 \pm 0.10$, where the error bar is evaluated from reduced data sets of four speckle realizations.

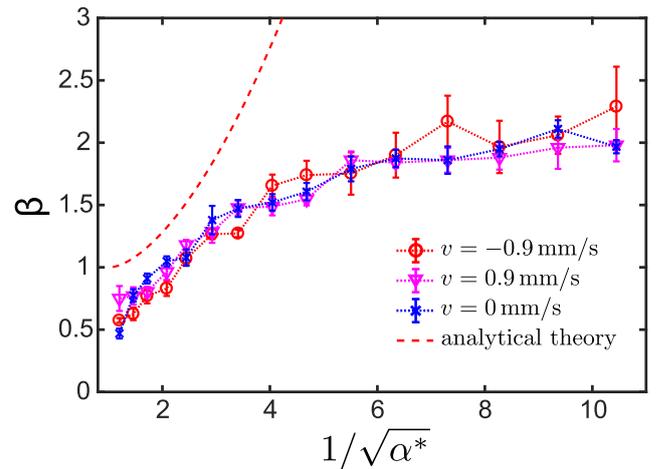


FIG. 6. Values of β , obtained by fitting to the localized density profile with a power law, as a function of $1/\sqrt{\alpha^*}$ for three different values of the initial velocity and $a = 19 \text{ mm s}^{-2}$.

with increasing disorder as can be expected for stronger localization effects. Moreover, we show that the behavior is not modified by a small positive or negative initial velocity ($v = \pm 0.9 \text{ mm s}^{-1}$) as expected theoretically. However, our results do not match with the infinite time white-noise analytical exponents from Ref. [22] (dashed line in Fig. 6). For small disorder, the small mismatch can be due to the fact that the measurement of β is sensitive to the wings of the density distribution up to distances of $300 \mu\text{m}$, where the atom momentum k has significantly increase and $\hat{C}(2k)$ cannot be considered constant at this scale. The observed saturation of β at large disorder is a striking deviation that we interpret as a consequence of a strong and correlated disorder. A strong disorder ($V_R \sim E_\sigma$) broadens the initial wave-vector distribution such that k vectors around $1/\sigma$ are populated as can be understood from the broad width of the spectral functions [34,35]. In this case, even in the absence of a force, the diverging behavior of the localization length close to the effective mobility edge $1/\sigma$ is responsible for an algebraic decay of the localized density profiles with a coefficient 2 [13], in agreement with our measured value. In this regime, the acceleration plays little role as the dominant energy scales are V_R and E_σ .

IV. CONCLUSION

In conclusion, we have reported on the observation of the algebraic localization-delocalization transition with ultracold matter waves in the presence of a controlled bias force. The localized fraction of atoms only depends on a dimensionless parameter which is the ratio of the force to the disorder strength. The initial velocity only plays a role through a rescaling of the disorder strength due the correlation of the disordered potential and the localization-delocalization transition appears as an energy-independent phenomenon. Algebraic localization is observed. The observed saturation of the algebraic decay exponents at large disorder is interpreted as a consequence of a correlated and strong disorder.

Whereas adding a bias force is a natural tool to study transport in both condensed-matter and ultracold atomic disorder systems, our results show that it can have important consequences. A straightforward extension of our work can be the study of 1D *interacting* bosons in the presence of disorder, when modifying the scattering length. For example, a finite-temperature localization-delocalization phase transition has been predicted due to many-body localization effects [36]. The study of the phase diagram of 1D strongly interacting disordered Bose systems is also of interest [6,37]. Other extensions of our work could be the study of fermionic mixtures, with possibly spin-dependent forces in connection to spintronics or the response of the system to an alternating bias force

in connection with the ac conductivity in condensed-matter [38,39].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank L. Sanchez-Palencia and A. Aspect for useful discussions. This research has been supported by CNRS, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Labex PALM, ERC Senior Grant Quantatop, Region Ile-de-France, in the framework of DIM Nano-K (IFRAF) and DIM Sirteq, EU-H2020 research and innovation program (Grant No. 641122-QUIC), Paris-Saclay, in the framework of IQUPS, Simons foundation (Award No. 563916: localization of waves).

-
- [1] C.-C. Chien, S. Peotta, and M. Di Ventra, *Nat. Phys.* **11**, 998 (2015).
- [2] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
- [3] E. Haller, R. Hart, M. J. Mark, J. G. Danzl, L. Reichsöllner, M. Gustavsson, M. Dalmonte, G. Pupillo, and H.-C. Nägerl, *Nature (London)* **466**, 597 (2010).
- [4] G. Boéris, L. Gori, M. D. Hoogerland, A. Kumar, E. Lucioni, L. Tanzi, M. Inguscio, T. Giamarchi, C. D'Errico, G. Carleo, G. Modugno, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **93**, 011601(R) (2016).
- [5] L. Tanzi, E. Lucioni, S. Chaudhuri, L. Gori, A. Kumar, C. D'Errico, M. Inguscio, and G. Modugno, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 115301 (2013).
- [6] C. D'Errico, E. Lucioni, L. Tanzi, L. Gori, G. Roux, I. P. McCulloch, T. Giamarchi, M. Inguscio, and G. Modugno, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 095301 (2014).
- [7] S. Krinner, D. Stadler, J. Meineke, J.-P. Brantut, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 100601 (2013).
- [8] S. Krinner, D. Stadler, D. Husmann, J.-P. Brantut, and T. Esslinger, *Nature (London)* **517**, 64 (2015).
- [9] P. Anderson, *Phys. Rev.* **109**, 1492 (1958).
- [10] L. Sanchez-Palencia, D. Clément, P. Lugan, P. Bouyer, G. V. Shlyapnikov, and A. Aspect, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 210401 (2007).
- [11] A. Lagendijk, B. van Tiggelen, and D. Wiersma, *Phys. Today* **62**(8), 24 (2009).
- [12] C. Gomez-Navarro, P. J. De Pablo, J. Gomez-Herrero, B. Biel, F. J. Garcia-Vidal, A. Rubio, and F. Flores, *Nat. Mater.* **4**, 534 (2005).
- [13] J. Billy, V. Josse, Z. Zuo, A. Bernard, B. Hambrecht, P. Lugan, D. Clément, L. Sanchez-Palencia, P. Bouyer, and A. Aspect, *Nature (London)* **453**, 891 (2008).
- [14] J. Chabé, G. Lemarié, B. Grémaud, D. Delande, P. Szriftgiser, and J.-C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 255702 (2008).
- [15] G. Roati, C. D'Errico, L. Fallani, M. Fattori, C. Fort, M. Zaccanti, G. Modugno, M. Modugno, and M. Inguscio, *Nature (London)* **453**, 895 (2008).
- [16] E. Abrahams, P. W. Anderson, D. C. Licciardello, and T. V. Ramakrishnan, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 673 (1979).
- [17] M. Lopez, J.-F. Clément, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 095701 (2012).
- [18] F. Jendrzejewski, A. Bernard, K. Müller, P. Cheinet, V. Josse, M. Piraud, L. Pezze, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, *Nat. Phys.* **8**, 392 (2012).
- [19] S. S. Kondov, W. R. McGehee, J. J. Zirbel, and B. DeMarco, *Science* **334**, 66 (2011).
- [20] G. Semeghini, M. Landini, P. Castilho, S. Roy, G. Spagnolli, A. Trenkwalder, M. Fattori, M. Inguscio, and G. Modugno, *Nat. Phys.* **11**, 554 (2015).
- [21] C. Crosnier de Bellaistre, A. Aspect, A. Georges, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. B* **95**, 140201(R) (2017).
- [22] C. Crosnier de Bellaistre, C. Trefzger, A. Aspect, A. Georges, and L. Sanchez-Palencia, *Phys. Rev. A* **97**, 013613 (2018).
- [23] M. Hasan, M. F. Huq, and Z. H. Mahmood, *SpringerPlus* **2**, 151 (2013).
- [24] D. Clément, A. F. Varón, J. A. Retter, L. Sanchez-Palencia, A. Aspect, and P. Bouyer, *New J. Phys.* **8**, 165 (2006).
- [25] P. Lugan, A. Aspect, L. Sanchez-Palencia, D. Delande, B. Grémaud, C. A. Müller, and C. Miniatura, *Phys. Rev. A* **80**, 023605 (2009).
- [26] G. Salomon, L. Fouché, S. Lepoutre, A. Aspect, and T. Bourdel, *Phys. Rev. A* **90**, 033405 (2014).
- [27] S. Lepoutre, L. Fouché, A. Boissé, G. Berthet, G. Salomon, A. Aspect, and T. Bourdel, *Phys. Rev. A* **94**, 053626 (2016).
- [28] A. Boissé, G. Berthet, L. Fouché, G. Salomon, A. Aspect, S. Lepoutre, and T. Bourdel, *Europhys. Lett.* **117**, 10007 (2017).
- [29] M. Landini, S. Roy, G. Roati, A. Simoni, M. Inguscio, G. Modugno, and M. Fattori, *Phys. Rev. A* **86**, 033421 (2012).
- [30] C. D'Errico, M. Zaccanti, M. Fattori, G. Roati, M. Inguscio, G. Modugno, and A. Simoni, *New J. Phys.* **9**, 223 (2007).
- [31] Because of its normal incidence to the science chamber and its large coherence length, the 1064-nm laser beam produces a sub-nano-Kelvin residual periodic lattice on the atoms that can lead to Bloch oscillations [2]. We thus limit the propagation time of our experiment so that the atoms never reach the necessary velocity of 9.6 mm s^{-1} corresponding to half of the lattice wave vector.
- [32] More precisely, for reasonable integration windows extending by 200 to 500 μm along x , we still observe a sharply increasing localized fraction from 0 to 1 as a function of the disorder strength. An offset of the disorder strength corresponding to the localization transition (of the order of 10% per 100 μm)

- is observed but remains below our uncertainty (≈ 0.3) in the determination of the critical value of α .
- [33] The algebraic scaling is expected for distances $\ell \gg \ell_0$, with $\ell_0 = E/F$ and $E = mv^2/2$ the initial energy of the atoms [22]. When $v = 0$, the approximations in [22] are not valid but a sensible ℓ_0 can be estimated taking $E = V^*$. In all cases, ℓ_0 amounts to a few tens of microns in agreement with our observations.
- [34] T. Prat, N. Cherroret, and D. Delande, *Phys. Rev. A* **94**, 022114 (2016).
- [35] V. V. Volchkov, M. Pasek, V. Denechaud, M. Mukhtar, A. Aspect, D. Delande, and V. Josse, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 060404 (2018).
- [36] I. L. Aleiner, B. L. Altshuler, and G. V. Shlyapnikov, *Nat. Phys.* **6**, 900 (2010).
- [37] T. Giamarchi and H. J. Schulz, *Phys. Rev. B* **37**, 325 (1988).
- [38] P. A. Lee and T. V. Ramakrishnan, *Rev. Mod. Phys.* **57**, 287 (1985).
- [39] R. Anderson, F. Wang, P. Xu, V. Venu, S. Trotzky, F. Chevy, and J. H. Thywissen, *Phys. Rev. Lett.* **122**, 153602 (2019).

Beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions in quantum droplets of binary mixtures

L. Lavoine and T. Bourdel 

Laboratoire Charles Fabry, UMR 8501, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Saclay,
Avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau CEDEX, France

 (Received 24 November 2020; revised 29 January 2021; accepted 26 February 2021; published 15 March 2021)

The existence of quantum droplets in binary Bose-Einstein condensate mixtures relies on beyond-mean-field effects, competing with mean-field effects. Interestingly, the beyond-mean-field effects change from repulsive in three dimensions (3D) to attractive in 1D leading to drastically different behaviors. We quantitatively model quantum droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D in the relevant case of an elongated harmonic trap and give realistic numbers for experimental realizations. We identify and quantify two main limiting factors: three-body losses and tiny energy scales. The crossover region is appealing as it offers a trade-off between these two main limitations opening the possibility of observing stable flat-top density profiles, a yet unobserved, characteristic feature of quantum droplets. It would permit testing of beyond-mean-field theories to an unprecedented precision.

DOI: [10.1103/PhysRevA.103.033312](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.033312)

I. INTRODUCTION

Ultracold quantum gases are uniquely well controlled many-body systems [1]. Their diluteness permits accurate *ab initio* theoretical treatment using zero-range interaction. They are thus good candidates for tests of many-body theories. As an example, the energy of a zero-temperature Bose gas can be calculated within the Bogoliubov theory beyond the usual mean-field approximation [2,3]. Experimentally, there has been a quest for the measurement of these beyond-mean-field corrections mostly by increasing na^3 , where n is the density and a is the scattering length [4–7].

Recently, it was discovered that quantum mixtures of two Bose-Einstein condensates with repulsive intraspecies interaction and attractive interspecies interactions permit a cancellation of the global mean-field interaction without a reduction in the magnitude of the beyond-mean-field effects [8]. They can then play a dominant role in the dynamics of the system and compete with the reduced mean-field energy. In this context, quantum droplets, i.e., self-bound Bose-Einstein condensates, due to beyond-mean-field effects have been predicted [8] and experimentally observed [9–12]. The name “droplet” is given in analogy to liquid droplets, which have similar properties such as a constant density profile although their stabilization mechanism is different. Quantum droplets were also observed in dipolar condensates where the magnetic interaction competes with the usual contact interaction [13] (see Refs. [14,15] and references therein for recent reviews on quantum droplets). Experimentally, the droplets are observed at high densities (typically $\sim 10^{21} \text{ m}^{-3}$). Three-body losses thus play an important role in the droplet dynamics [16] and have hindered the observation of the predicted characteristic flat-top density profile of a stable droplet.

Interestingly, the beyond-mean-field energy, which originates from the summation of the zero-point energies of the Bogoliubov modes in the Lee-Huang-Yang description [17], strongly depends on the dimension of the systems with important consequences [18]. For example, the three-dimensional (3D) beyond-mean-field energy density is positive and scales as $n^{5/2}$, whereas the 1D beyond-mean-field energy density is negative and scales as $n^{3/2}$. In the 1D case, a dominant beyond-mean-field energy is obtained at low density in contrast to the 3D case. Quantum droplets thus exist in both cases in, however, quite different conditions, requiring, in particular, an opposite sign of the mean-field interaction [19]. The beyond-mean-field energy density in the 1D-3D crossover was calculated predicting the existence of quantum droplets for any value and sign of the mean-field interaction term in elongated geometries [20,21].

Experimentally, droplets in Bose-Bose mixtures have been observed not only in free space [10] but also in cigar and pancake traps corresponding to quasi-1D [11] and quasi-2D situations [9], where the motion of particles is frozen in one or two directions. Nevertheless, the beyond-mean-field effects were still in a 3D regime. This possibility of hybrid dimension comes from the different energy scales associated with the two excitation branches, which are relevant in droplets of binary mixtures, i.e., the low energy density branch (the two condensates oscillate in phase) and the high energy spin branch (the two condensates oscillate out of phase). The latter is responsible for the main beyond-mean-field effects [21].

In this paper, we study the 1D-3D crossover for quasi-1D quantum droplets in the experimentally relevant case of a cigar-shaped harmonic trap. Our work crucially uses a calculation of the beyond-mean-field energy density, in which the radial wave function is fixed to the radial harmonic oscillator one [20]. There is a smooth 1D-3D crossover where the spin mode excitations and thus also the Lee-Huang-Yang energy density are progressively modified by the radial trapping. In

*thomas.bourdel@institutoptique.fr

the whole crossover, we study important experimental parameters such as the droplet density, size, binding energy, or three-body loss rate as a function of the relevant dimensionless parameters. The paper first describes bulk droplet properties and second introduces finite-size effects within an extended Gross-Pitaevskii equation formalism. We study the ground-state droplets with and without longitudinal trapping and find the conditions in which a flat-top density profile is expected. We also study the breathing mode frequency which gives the relevant time scale for an adiabatic preparation of quantum droplets. We find that the crossover regime offers an experimentally favorable trade-off between high three-body losses close to the 3D regime and tiny energy scales in the 1D regime.

II. QUANTUM DROPLETS IN THE BULK

We consider a mixture of two atomic Bose-Einstein condensates in states $|1\rangle$ and $|2\rangle$ (of equal mass m for simplicity) and radially harmonically trapped with a frequency $\omega_{\perp}/2\pi$. We assume that we are in the quasi-1D regime such that the radial condensate wave functions are Gaussian characterized by the harmonic oscillator size $a_{oh} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$, where \hbar is the reduced Planck constant. The three relevant scattering lengths are $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{12} < 0$ associated with the 1D coupling constants $g_{ij} = 2\hbar\omega_{\perp}a_{ij}$. We first consider the homogenous case with the two 1D densities n_1 , n_2 and the total density $n = n_1 + n_2$.

The mean-field energy density can be written as

$$\begin{aligned} E_{MF} &= g_{11}n_1^2/2 + g_{22}n_2^2/2 + g_{12}n_1n_2, \\ E_{MF} &= \frac{(\sqrt{g_{11}}n_1 - \sqrt{g_{22}}n_2)^2}{2} \\ &\quad + \frac{g\delta g(\sqrt{g_{11}}n_2 + \sqrt{g_{22}}n_1)^2}{(g_{11} + g_{22})^2} \end{aligned} \quad (1)$$

with $\delta g = g_{12} + \sqrt{g_{11}g_{22}}$ and $g = \sqrt{g_{11}g_{22}}$.

In the vicinity of the mean-field collapse $\delta g/g \ll 1$, the first term is much larger than the second one. The system thus minimizes its mean-field energy by locking the two densities such that $\sqrt{g_{11}}n_1 = \sqrt{g_{22}}n_2$. In this situation, the mean-field energy density reduces to

$$\frac{E_{MF}}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{2a\delta a}{(\sqrt{a_{11}} + \sqrt{a_{22}})^2} n^2 \quad (2)$$

with

$$\delta a = a_{12} + \sqrt{a_{11}a_{22}} \text{ and } a = \sqrt{a_{11}a_{22}}. \quad (3)$$

This equation can be written in a more convenient form,

$$\frac{E_{MF}}{\hbar\omega_{\perp}} = \delta a' \lambda \kappa^2 / 2a, \quad (4)$$

with $\kappa = na$, $\lambda = a/a_{oh}$, and $\delta a' = \frac{4\delta a}{\lambda(a_{11}^{1/2} + a_{22}^{1/2})^2}$ being a dimensionless parameter characterizing the mean-field interaction.

The beyond-mean-field energy density has been calculated in two limits depending on the value of κ . For $\kappa \gg 1$ corresponding to large densities such that the spin healing length is smaller than a_{oh} , one can make a local density approximation

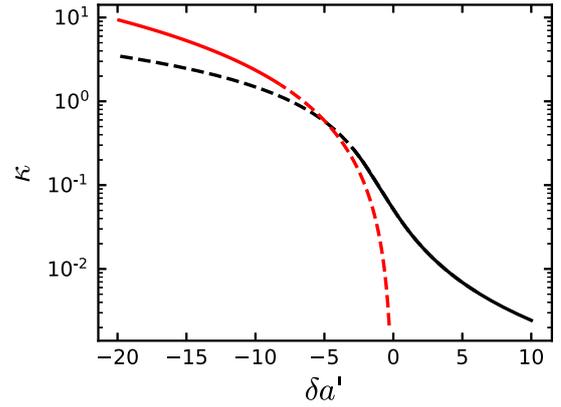


FIG. 1. Dimensionless density κ in a bulk quantum droplet as a function of the mean-field parameter $\delta a'$. The black (red) curve corresponds to the 1D-3D-crossover (3D) beyond-mean-field model. The curves are dashed in the regions where the theory is expected not to be valid.

along the radial Gaussian density profile and integrate the usual 3D beyond-mean-field expression [20]:

$$\frac{E_{BMF}^{3D}}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} \frac{512}{75\pi} \kappa^{5/2}. \quad (5)$$

In the opposite limit $\kappa \lesssim 1$, the summation over the radial oscillation modes has been performed in order to calculate the beyond-mean-field energy density of a quasi-1D Bose-Einstein condensate in the 1D-3D crossover [20]. Interestingly, the result can also be used for the spin modes in a Bose-Bose mixture, giving the following beyond-mean-field contribution:

$$\frac{E_{BMF}^c}{\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\lambda}{a} f(\kappa), \quad (6)$$

with

$$f(\kappa) = \frac{C_{1D}^h}{\sqrt{2}} \kappa^2 - \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} \kappa^{3/2} + \frac{4\sqrt{2} \ln(\frac{4}{3})}{\pi} \kappa^{5/2} + B_{1D}^h \kappa^3. \quad (7)$$

The first term in $f(\kappa)$ is a mean-field correction due to the confinement-induced resonance ($C_{1D}^h \approx 1.4603$). The second term is the beyond-mean-field contribution of a purely one-dimensional system [18], which dominates at small κ . The third and fourth terms are corrections for higher values of κ ($B_{1D}^h \approx 1.13$ [22]). For $\kappa \sim 1$, the beyond-mean-field energy density cannot be written in a simple form, but one can interpolate between the two previous expressions with a relatively good accuracy.

In the two cases, one can simply minimize the energy per particle $E = (E_{MF} + E_{BMF})/n$ as a function of κ in order to find the equilibrium density in the bulk, i.e., neglecting the kinetic energy. We plot the resulting value of κ as a function of the mean-field parameter $\delta a'$ (see Fig. 1). Note that in the 3D beyond-mean-field case, the minimization leads to a nonzero density only for attractive mean-field interaction which compensates a repulsive beyond-mean-field term (red curve). In contrast, the crossover expression leads to the existence of a finite density droplet for any value of the

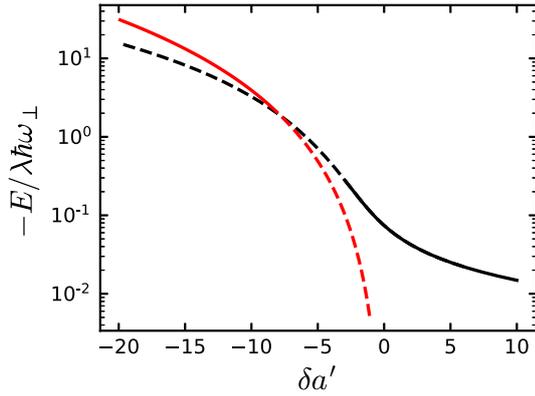


FIG. 2. Energy per particle in the bulk. The black (red) curve corresponds to the energy minimization using the 1D-3D-crossover (3D) formula. The curves are dashed in the regions where the corresponding theory is expected not to be valid.

mean-field parameter (black curve). For a large and negative mean-field parameter $\delta a'$, we find $\kappa \gg 1$, and the 3D expression is the valid one. For $\delta a' \gtrsim -3$, the crossover expression finds $\kappa \lesssim 1$, and it is thus valid. By interpolating the two results from their validity region, we find droplets for any value of the mean-field interaction and an approximated value of κ in the whole crossover. The equilibrium density is drastically reduced when increasing the mean-field interaction parameter.

We also plot the energy per particle in Fig. 2. It is negative as a droplet is a self-bound object. One can interpolate between the two solid curves in order to find its behavior for any parameter $\delta a'$. The binding energy of the droplet significantly decreases as one goes toward the 1D regime. The relevant scaling for the binding energy $\lambda \hbar \omega_{\perp} \propto \omega_{\perp}^{3/2}$ shows the influence of the radial confinement.

In this context, we can thus wonder whether the increased lifetime of the droplet due to reduced densities and three-body loss rates is sufficient to counterbalance its reduced energy scale and thus increased time scale. The three-body loss rate is characterized by a three-body loss coefficient K_3 . By integration over the Gaussian radial profile, we find the loss rate $\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial t} = -\Gamma = -K_3 \frac{\kappa^2}{3\pi^2 a_{oh}^4 a^2}$. We then plot the dimensionless ratio of the droplet binding energy to the three-body loss rate, which is a measure of the relative importance of losses as compared with the droplet intrinsic time scale (see Fig. 3). Small values imply that losses play an important role in the droplet dynamics [16]. We find that it is indeed favorable to move toward $\delta a' > 0$ in order to minimize the relative effect of losses. Note that the ratio is plotted in units of the dimensionless quantity $\hbar a^3 a_{oh} / (m K_3)$, which reveals the importance of the different parameters. In particular, we find that reducing the confinement ω_{\perp} is favorable to reduce the relative role of losses in the droplet dynamics despite the reduction in the droplet binding energy.

We now discuss experimentally realistic numbers. We consider droplets made of potassium-39 in the second and third spin states around 56.8 G as used in previous experiments. In this case, $a_{11} \approx 33 a_0$, $a_{22} \approx 84 a_0$, and $a_{12} \approx 53 a_0$, where a_0 is the Bohr radius. The mean-field parameters δa and $\delta a'$ can

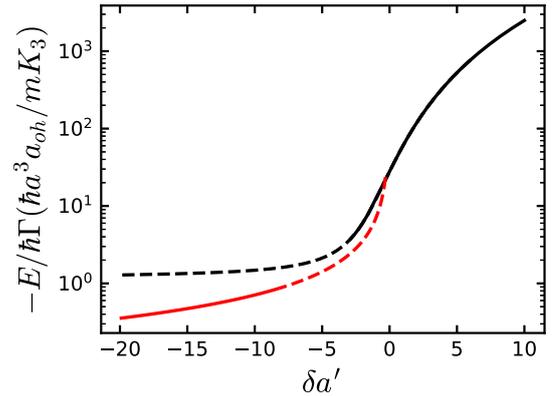


FIG. 3. Ratio of the binding energy per particle to the three-body loss rate in the beyond-mean-field 1D-3D crossover. Larger ratios are favorable to minimize the relative effect of losses.

be varied around zero by slight adjustment of the magnetic field. As an example, we take $\omega_{\perp}/2\pi = 500$ Hz, and the energy scale $\lambda \hbar \omega_{\perp} \approx (2\pi \hbar) \times 2$ Hz is relatively low. For $\delta a = -5 a_0$, a value close to the experimental ones [9–11], $\delta a' = -20$, and the binding energy per particle $\sim (2\pi \hbar) \times 60$ Hz is such that droplet physics can be observed on a time scale of tens of milliseconds [11]. With an effective three-body loss rate coefficient $K_3 = 1.4 \times 10^{-40}$ m⁶/s that can be assumed to be constant in the relevant region of the magnetic field [11,23], the loss rate is ~ 80 s⁻¹, and losses play a significant role in the droplet dynamics.

When one goes toward the 1D regime, the energy scale decreases rapidly. Nevertheless, the loss rate decreases even more rapidly, and the crossover regime is an adequate region to look for more stable droplets. For example, at $\delta a' = 0$, where the droplet is solely stabilized by the peculiar density dependence of the beyond-mean-field energy as a function of density [20], the droplet density is reduced by a factor of ~ 100 , and three-body losses are then negligible. The energy per particle is then of the order of $\sim (2\pi \hbar) \times 0.2$ Hz. Note that such a low energy scale implies long experimental times as well as a control of the trap parameters such as its longitudinal flatness to an extreme precision.

III. QUANTUM DROPLETS IN A FINITE SYSTEM

Whereas the above discussion focused on the properties of droplets in the bulk, we now turn to the question of finite atom numbers and finite sizes in quasi-1D droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D. One of our goals is to identify realistic parameters where a stable flat-top droplet density profile could be observed.

A. Extended Gross-Pitaevskii equation

In the same spirit as before, we suppose that the spin modes are unpopulated such that the ratio of densities between the two spin states is fixed. Within this assumption the system can be described by a single wave-function $\psi(x, t)$ solution of the following extended Gross-Pitaevskii

equation:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \hbar \omega_{\perp} [\delta a' \lambda |\psi|^2] + \lambda g(\kappa) \psi + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x^2 \psi, \quad (8)$$

where $g(\kappa) = \frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa}$ is the beyond-mean-field interaction potential.

This equation can be written in dimensionless units using the following scalings:

$$t = t_0 t' = \frac{1}{\lambda \omega_{\perp}} t', \quad (9)$$

$$x = x_0 x' = \frac{a_{\perp}}{\lambda^{1/2}} x', \quad (10)$$

$$\psi = \psi_0 \psi' = \frac{1}{a^{1/2}} \psi', \quad (11)$$

$$i \frac{\partial \psi'}{\partial t'} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x'^2} + [\delta a' |\psi'^2| + g(|\psi'^2|)] \psi' + \frac{1}{2} \frac{\omega_{\parallel}^2}{\omega_{\perp}^2 \lambda^2} x'^2 \psi', \quad (12)$$

with the normalization condition $\int |\psi'^2| dx' = N' = N \lambda^{3/2}$. In addition to this rescaled atom number, there are two dimensionless parameters: $\delta a'$ for the mean-field interaction and $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp} \lambda}$ for the trapping potential.

B. Ground-state solutions

We find the droplet ground state using the split-step Fourier method and imaginary time evolution. We first study the solution with no longitudinal trapping ($\omega_{\parallel} = 0$). Remarkably, we always find a self-bound solution for all parameters. This is in contrast to the 3D situation, where a minimal atom number is needed to form a droplet. We now plot the ground-state density profiles for two different atom numbers $N' = 0.3$ and $N' = 3$ and mean-field interaction parameters in the crossover $\delta a' = -6.7, 0$, and 6.7 (corresponding to $\delta a/a_0 = -1.6, 0$, and 1.6 , for the previously given experimental parameters) in Fig. 4. For large atom numbers $N' \geq 3$, the droplet profile exhibits a flat-top profile corresponding to the bulk solution whose edges are rounded because of the kinetic-energy term. The droplet density gets smaller and its size gets larger as $\delta a'$ goes from negative to positive values. For small atom numbers $N' \leq 0.3$, the droplets do not show an extended flat region, and the kinetic energy plays a dominant role.

For the realistic experimental parameters chosen previously, $N' = 1$ corresponds to 3800 atoms, and the quasi-1D situation offers the possibility of saturating a droplet with realistic atom numbers. This is in contrast to the quasi-2D and, even more, the 3D droplets, where the critical atom number to reach a flat top can be too high especially for low values of $|\delta a|$, which are favorable to reduce the role of three-body losses [8].

Another way to get an idea of the density profiles is to minimize the energy of an ansatz wave function. Here, an appropriate choice for the density

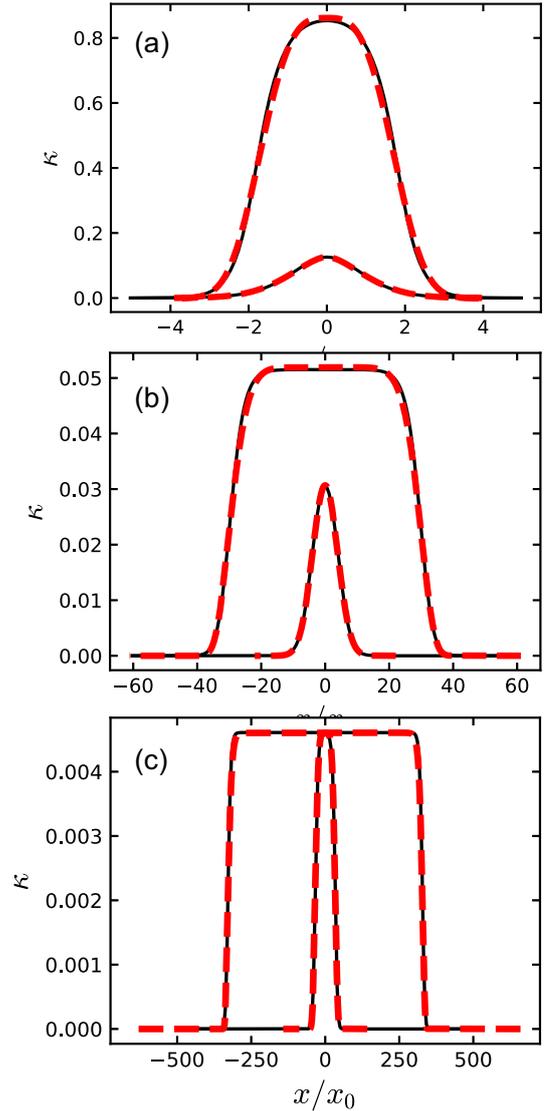


FIG. 4. Quantum droplet density profiles in the absence of a longitudinal trap ($\omega_{\parallel} = 0$) for $N' = 0.3$ and $N' = 3$ for three values of $\delta a'$. (a) $\delta a' = -6.7$. (b) $\delta a' = 0$. (c) $\delta a' = 6.7$. Please note the different scales both in x and in κ in (a)–(c). The solid black curves correspond to the exact minimization of the extended Gross-Pitaevskii equation in the 1D-3D crossover using imaginary time evolution. The superimposed dashed red curves are the results using the two-parameter ansatz presented in the text.

profile is

$$n(\sigma, r) = \frac{N}{2\sigma\Gamma(1 + 1/2r)} \exp \left[-\left(\frac{x^2}{\sigma^2} \right)^r \right]. \quad (13)$$

This two-parameter function has the ability to interpolate between a peaked density profile for low values of r , a Gaussian density profile for $r = 1$, and a flat-top density profile for $r \gg 1$. Its typical width is given by σ . It has the great advantage that the different energy terms are analytical and can be simply written in terms of the Γ function. The energy minimization is then straightforward. In Fig. 4, it is obvious that the ansatz

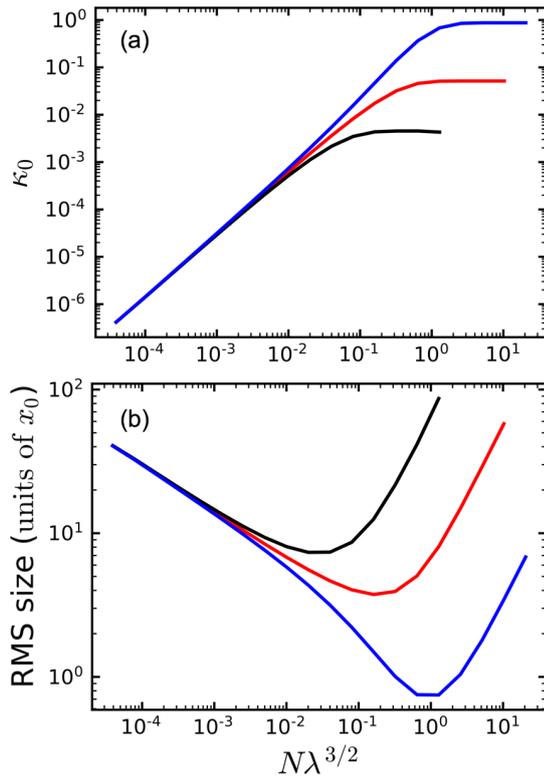


FIG. 5. Maximum rescaled density κ_0 (a) and rms size (b) of a droplet as a function of the atom number in the absence of a longitudinal trap ($\omega_{\parallel} = 0$). The three curves correspond to three values of the mean-field parameters $\delta a'$: black [(a) bottom curve, (b) top curve], $\delta a' = 6.7$; red (middle curve), $\delta a' = 0$; blue [(a) top curve, (b) bottom curve], $\delta a' = -6.7$.

minimization method is able to approximate the exact ground state.

C. Maximum density and rms size: Scalings

We now plot the maximum rescaled density κ_0 and the root-mean-square (rms) size of the ground-state profile as a function of the atom number for $\delta a' = -6.7, 0$, and 6.7 (see Fig. 5). In all cases, the density increases with the atom number until it reaches a saturation value corresponding to the bulk density, when the droplet exhibits a flat-top profile. It also appears that a lower atom number is necessary to reach a flat-top droplet as one moves toward the 1D regime. The ground-state size first decreases as the atom number increases and then increases when a flat-top droplet is formed.

For the above figures, one can extract scalings in different regimes. For low atom numbers, all three curves are superimposed, and $\kappa_0 \ll 1$. The dominant energy terms are the 1D beyond-mean-field attractive terms and the kinetic energy. The mean-field term is negligible. In this case, the size scales as $N^{-1/3}$, and the density scales as $N^{2/3}$. For a large atom number, the ground state is a flat-top quantum droplet. The dominant energies are then the mean-field and beyond-mean-field terms. The kinetic energy can be neglected in the analysis. In this case, the size simply scales as N' as the density is fixed. For attractive mean-field $\delta a' < 0$, there exists

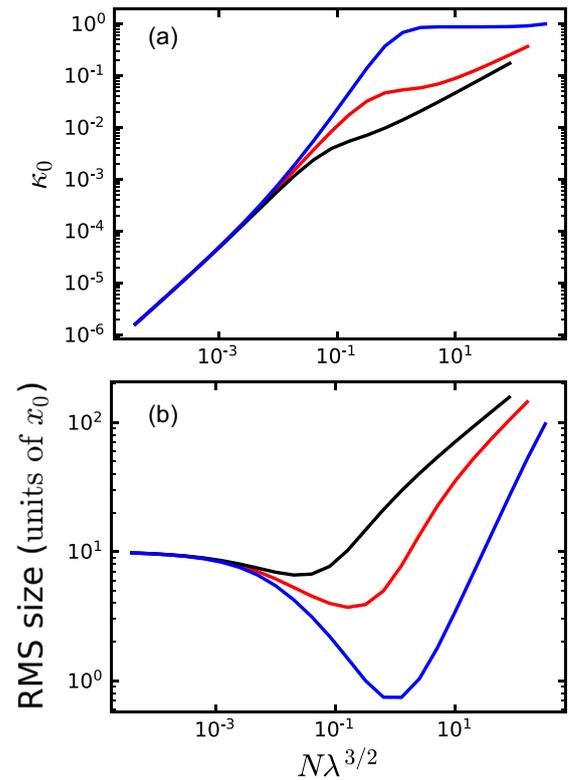


FIG. 6. Maximum rescaled density κ_0 (a) and rms size (b) as a function of the atom number in the presence of a longitudinal harmonic trap $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}\lambda} = 5 \times 10^{-3}$. The curves follow the same coding as in Fig. 5.

an intermediate-atom-number region in which the solution corresponds to a standard mean-field bright soliton [11,24,25] for which the size scales as N'^{-1} and the density scales as N'^2 .

D. Trapped case

We now turn to the trapped case. As an example, we choose $\frac{\omega_{\parallel}}{\omega_{\perp}\lambda} = 5 \times 10^{-3}$ (which corresponds to $w_{\parallel}/2\pi = 0.01$ Hz, for the previously chosen parameters) and find the ground state by imaginary time evolution (see Fig. 6). For intermediate atom number, the trap has no effect. It corresponds to a regime where the trap potential energy is negligible as compared with the other energy scales. For low atom number, the size reaches a plateau in contrast to the untrapped case. This corresponds to a situation where the gas can be considered as noninteracting and the condensates occupy the ground state of the longitudinal harmonic trap.

At high atom numbers, the trap prevents the droplet from growing in size at a constant density as observed in the absence of a longitudinal trap. In this regime, the kinetic energy can be neglected, and the density profile can be found in an approximation analogous to the Thomas-Fermi approximation. A local chemical potential is then directly linked to the density through the homogenous equation of state. In the 3D case, this was presented in Ref. [26]. The entrance in this last regime can be simply estimated by comparing the bulk energy per particle to the potential energy given by the rms size of the droplet. The value of N' where this happens

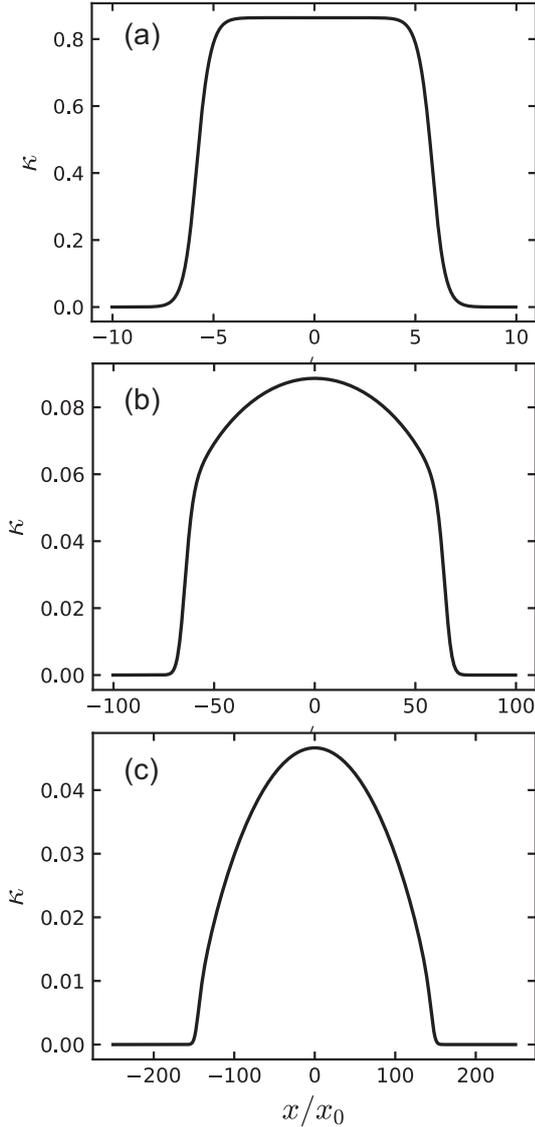


FIG. 7. Droplet profiles in the presence of a longitudinal confinement $\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\perp,\lambda}} = 5 \times 10^{-3}$ for $N' = 10$ and three different values of $\delta a'$. (a) $\delta a' = -6.7$. (b) $\delta a' = 0$. (c) $\delta a' = 6.7$.

drastically depends on $\delta a'$. As an example, density profiles for $N' = 10$ are plotted in Fig. 7 for different values of $\delta a'$. The profile indeed resembles a Thomas-Fermi profile for $\delta a' = 6.7$ with dominant mean-field and potential energies. Oppositely, a flat-top droplet profile with negligible trap influence is found for $\delta a' = -6.7$. For $\delta a' = 0$, the situation is intermediate. Our results show that even a minute axial confinement can greatly affect the droplet shape, in particular for $\delta a \gtrsim 0$, where the droplet energy scale is especially low.

E. Breathing mode

We now turn to the study of excitations of the quasi-1D droplets in the absence of a longitudinal trap. They can be studied by real-time integration of the extended Gross-Pitaevskii equation. More specifically, we start from a situation close to equilibrium by rescaling the first computed

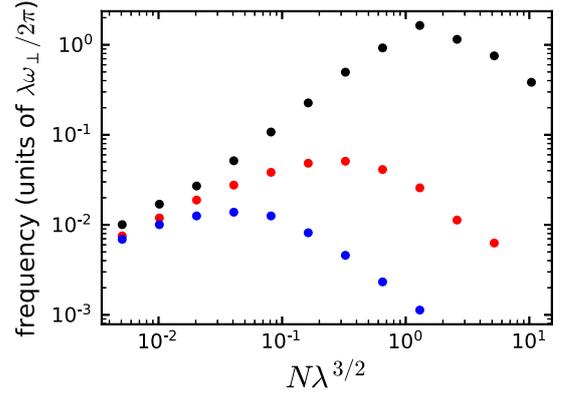


FIG. 8. Frequency of the breathing mode as a function of the rescaled atom number for three values of the mean-field parameter $\delta a'$: black, top points, $\delta a' = -6.7$; red, middle points, $\delta a' = 0$; blue, lower points, $\delta a' = 6.7$.

ground-state wave function by a coefficient of 1.01 [19]. After this modification, we study, in particular, the evolution of the rms size of the droplet as a function of time and extract its main (lowest) oscillation frequency, which is plotted in Fig. 8. Interestingly, we find that these small breathing oscillations are essentially undamped. This can be expected as their frequency remains below the particle emission threshold for all parameters. High frequency modes can evaporate, but there are only weakly excited in our excitation scheme [8]. This behavior is in contrast to the 3D situation, where there is a region just above the critical atom number where the droplets quickly evaporate to their ground state [8]. Importantly, the excitation mode period gives a time scale in which a droplet can be prepared in an adiabatic (quasistatic) way by time variation of the experimental parameters.

We find that the breathing mode frequency first increases with the atom number as can be expected from an increasing binding energy. It then reaches a maximum close to the point where the droplet becomes flat topped. Then, it decreases when the droplet size increases. This observed behavior is qualitatively similar to the behavior previously predicted in the pure 1D regime ($\delta a' > 0$) [19] but quantitatively differs. For an increasing value of $\delta a'$, the maximum frequency takes significantly lower values. For the above mentioned parameters in potassium-39 mixtures, the frequency scale $\lambda \omega_{\perp} / 2\pi = 2$ Hz is already quite low, and the droplet breathing mode frequency appears to be reasonably large only in the attractive mean-field region. In this condition, even an adiabatic preparation of a ground-state (unexcited) flat-top density droplet by a slow sweep of the parameters seems challenging. Creating the droplet already close to its stable shape by releasing the gas from a longitudinal box potential appears to be a more realistic solution to avoid too strong excitations.

IV. CONCLUSIONS

In a mixture of two Bose-Einstein condensates with repulsive intraspecies interaction and attractive interspecies interaction, we have studied quantum droplets in the 1D-3D crossover for the beyond-mean-field energy, which changes from positive in 3D to negative in 1D. The equilibrium

density is found to decrease rapidly when moving toward the 1D regime, which would be experimentally favorable in order to reduce the role of three-body losses. This reduction comes with a reduction in the typical energy scale of the droplets imposing severe experimental constraints on the control of the residual potential such as the longitudinal trapping or the preparation of the droplets close to their ground state. Nevertheless, stable quasi-1D quantum droplets with a characteristic flat-top profile should be realistically observable with a $\delta a'$ that is negative and of the order of a few units in potassium-39 experiments [9–11]. The conditions would be even more favorable for low-loss mixtures such as Rb-K [12].

The realization of quasi-1D droplets in the beyond-mean-field crossover from 1D to 3D would allow precise studies of the beyond-mean-field effects in Bose gases.

Effects beyond the standard Lee-Huang-Yang energy used in this paper will appear [27], either because of higher-order terms in the density expansion [28], because of finite-range interacting potentials [29,30], or because of temperature effects [31].

ACKNOWLEDGMENTS

We thank D. Petrov for inspiring discussions and A. Hammond for careful rereading. This research has been supported by CNRS, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Labex PALM, Région Île-de-France in the framework of DIM Sirteq, Université Paris-Saclay in the framework of IQUPS, ANR Droplets Project No. 19-CE30-0003-01, and the Simons Foundation (Award No. 563916: Localization of Waves).

-
- [1] I. Bloch, J. Dalibard, and S. Nascimbène, *Nat. Phys.* **8**, 267 (2012).
- [2] T. D. Lee and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **105**, 1119 (1957).
- [3] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity* (Oxford University Press, Oxford, 2016).
- [4] S. B. Papp, J. M. Pino, R. J. Wild, S. Ronen, C. E. Wieman, D. S. Jin, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 135301 (2008).
- [5] Y. I. Shin, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 070404 (2008).
- [6] N. Navon, S. Piatecki, K. Günter, B. Rem, T. C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 135301 (2011).
- [7] R. Lopes, C. Eigen, N. Navon, D. Clément, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 190404 (2017).
- [8] D. S. Petrov, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 155302 (2015).
- [9] R. Cabrera, L. Tanzi, J. Sanz, B. Naylor, P. Thomas, P. Cheiney, and L. Tarruell, *Science* **359**, 301 (2018).
- [10] G. Semeghini, G. Ferioli, L. Masi, C. Mazzinghi, L. Wolswijk, F. Minardi, M. Modugno, G. Modugno, M. Inguscio, and M. Fattori, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 235301 (2018).
- [11] P. Cheiney, C. R. Cabrera, J. Sanz, B. Naylor, L. Tanzi, and L. Tarruell, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 135301 (2018).
- [12] C. D'Errico, A. Burchianti, M. Prevedelli, L. Salasnich, F. Ancilotto, M. Modugno, F. Minardi, and C. Fort, *Phys. Rev. Research* **1**, 033155 (2019).
- [13] I. Ferrier-Barbut, H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, and T. Pfau, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 215301 (2016).
- [14] Z.-H. Luo, W. Pang, B. Liu, Y.-Y. Li, and B. A. Malomed, *Front. Phys.* **16**, 32201 (2021).
- [15] F. Böttcher, J.-N. Schmidt, J. Hertkorn, K. S. H. Ng, S. D. Graham, M. Guo, T. Langen, and T. Pfau, *Rep. Prog. Phys.* **84**, 012403 (2021).
- [16] G. Ferioli, G. Semeghini, S. Terradas-Briansó, L. Masi, M. Fattori, and M. Modugno, *Phys. Rev. Research* **2**, 013269 (2020).
- [17] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, *Phys. Rev.* **106**, 1135 (1957).
- [18] D. S. Petrov and G. E. Astrakharchik, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 100401 (2016).
- [19] G. E. Astrakharchik and B. A. Malomed, *Phys. Rev. A* **98**, 013631 (2018).
- [20] T. Ilg, J. Kumlin, L. Santos, D. S. Petrov, and H. P. Büchler, *Phys. Rev. A* **98**, 051604(R) (2018).
- [21] P. Zin, M. Pylak, T. Wasak, M. Gajda, and Z. Idziaszek, *Phys. Rev. A* **98**, 051603(R) (2018).
- [22] There is a misprint in Ref. [20] for the value of B_{1D}^h ; L. Santos (private communication).
- [23] The given effective value of K_3 takes into account a 1/6 factor due to the absence of Bose enhancement as compared with the thermal loss coefficient and also includes the fact that only a fraction of the atoms are in the lossy state $|2\rangle$.
- [24] L. Khaykovich, F. Schreck, G. Ferrari, T. Bourdel, J. Cubizolles, L. D. Carr, Y. Castin, and C. Salomon, *Science* **296**, 1290 (2002).
- [25] K. E. Strecker, G. B. Patridge, A. G. Truscott, and R. G. Hulet, *Nature (London)* **417**, 150 (2002).
- [26] N. B. Jørgensen, G. M. Bruun, and J. J. Arlt, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 173403 (2018).
- [27] F. Böttcher, M. Wenzel, J.-N. Schmidt, M. Guo, T. Langen, I. Ferrier-Barbut, T. Pfau, R. Bombin, J. Sánchez-Baena, J. Boronat, and F. Mazzanti, *Phys. Rev. Research* **1**, 033088 (2019).
- [28] M. Ota and G. E. Astrakharchik, *SciPost Phys.* **9**, 020 (2020).
- [29] V. Cikojević, L. V. Markić, G. E. Astrakharchik, and J. Boronat, *Phys. Rev. A* **99**, 023618 (2019).
- [30] V. Cikojević, L. V. Markić, M. Pi, M. Barranco, and J. Boronat, *Phys. Rev. A* **102**, 033335 (2020).
- [31] G. De Rosi, P. Massignan, M. Lewenstein, and G. E. Astrakharchik, *Phys. Rev. Research* **1**, 033083 (2019).

Beyond-Mean-Field Effects in Rabi-Coupled Two-Component Bose-Einstein CondensateL. Lavoine,¹ A. Hammond,¹ A. Recati,² D. S. Petrov³, and T. Bourdel^{1,*}¹*Laboratoire Charles Fabry, UMR 8501, Institut d'Optique, CNRS, Université Paris-Saclay, Avenue Augustin Fresnel, 91127 Palaiseau CEDEX, France*²*INO-CNR BEC Center and Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Trento, 38123 Povo, Italy and Trento Institute for Fundamental Physics and Applications, INFN, 38123 Trento, Italy*³*Université Paris-Saclay, CNRS, LPTMS, 91405 Orsay, France*

(Received 21 May 2021; revised 9 August 2021; accepted 15 October 2021; published 12 November 2021)

We theoretically calculate and experimentally measure the beyond-mean-field (BMF) equation of state in a coherently coupled two-component Bose-Einstein condensate (BEC) in the regime where averaging of the interspecies and intraspecies coupling constants over the hyperfine composition of the single-particle dressed state predicts the exact cancellation of the two-body interaction. We show that with increasing the Rabi-coupling frequency Ω , the BMF energy density crosses over from the nonanalytic Lee-Huang-Yang scaling $\propto n^{5/2}$ to an expansion in integer powers of density, where, in addition to a two-body BMF term $\propto n^2\sqrt{\Omega}$, there emerges a repulsive three-body contribution $\propto n^3/\sqrt{\Omega}$. We experimentally evidence these two contributions, thanks to their different scaling with Ω , in the expansion of a Rabi-coupled two-component ³⁹K condensate in a waveguide. By studying the expansion with and without Rabi coupling, we reveal an important feature relevant for observing BMF effects and associated phenomena in mixtures with spin-asymmetric losses: Rabi coupling helps preserve the spin composition and thus prevents the system from drifting away from the point of the vanishing mean field.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.127.203402](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.127.203402)

Vacuum effects are among the most striking features of quantum field theories. The high degree of control of cold gases has made these systems ideal candidates to identify and measure the role of quantum fluctuations in matter fields. For instance, using Bose gases, quantum phonon fluctuations [1], phononic Lamb shift [2], dynamical phononic Casimir effect [3], as well as evidence of Hawking-like radiation from analog gravity configurations [4] have been reported.

For a weakly interacting Bose gas quantum fluctuations cause the BEC depletion [5,6] and lead to the so-called Lee-Huang-Yang (LHY) correction to the mean-field (MF) equation of state [7]. This beyond-mean-field (BMF) correction found experimental verification a few years ago [8,9]. More recently, self-trapped quantum droplets were stabilized against collapse by BMF effects in single component dipolar BECs [10,11] and in two-component BEC mixtures [12–15]. In the latter case, the MF interaction is greatly reduced by the compensation between intraspecies repulsion and interspecies attraction while the BMF energy originating from quantum fluctuations remains finite.

In this Letter we consider a Bose gas formed by atoms with two internal levels, which are coherently coupled [16]. The BEC order parameter is then a two-component vector and the relative phase excitations are gapped due to the coherent drive. Such systems have been thoroughly analyzed on the MF level and used in a variety of experiments on coherent Rabi oscillations [17,18], internal self-trapping

effects [19], ferromagnetic classical bifurcation [20], Kibble-Zurek mechanism [21], control of the two-body interaction [22–24], and magnetic domain wall dynamics [25]. For sufficiently attractive interspecies interaction such Rabi-coupled BECs are predicted to sustain droplets in the symmetric case, where the Rabi coupling is resonant and the intraspecies coupling constants are equal to each other. The stabilization mechanism is interpreted from the few-body perspective as an emergent three-body repulsion [23] or as a many-body BMF effect due to a structural change in the excitation spectrum [26].

Here, we analytically calculate the BMF energy density in the experimentally relevant case of an asymmetric Rabi-coupled Bose mixture in the whole range of Rabi frequencies Ω . We show that the BMF energy crosses over from the LHY law $\propto n^{5/2}$ for small Ω to the regular expansion in integer powers of n for large Ω . The quadratic term in the latter limit can be understood as a renormalization of the two-body interaction, the cubic term as an emergent three-body interaction, each term having a different scaling with Ω . In the large Ω limit, we experimentally evidence these two contributions by preparing a condensed ³⁹K spin mixture at the point of vanishing mean field [27] and by quantitatively measuring its expansion in a waveguide as a function of Ω . In the absence of Rabi coupling, we observe that asymmetric losses between the two spin states drive the spin composition away from the point of zero MF interaction and thus strongly affect the expansion.

We consider a Bose gas of N atoms possessing two internal states, $\sigma = \uparrow, \downarrow$, coherently coupled with the Rabi frequency Ω and detuning δ . In the rotating wave approximation the Hamiltonian of the mixture reads [16,28]

$$\hat{H} = \int \left(\sum_{\sigma} -\hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger} \frac{\nabla^2}{2} \hat{\Psi}_{\sigma} + \sum_{\sigma\sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger} \xi_{\sigma\sigma'} \hat{\Psi}_{\sigma'} + \sum_{\sigma,\sigma'} \frac{g_{\sigma\sigma'}}{2} \hat{\Psi}_{\sigma}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma'}^{\dagger} \hat{\Psi}_{\sigma} \hat{\Psi}_{\sigma'} \right) d\mathbf{r}, \quad (1)$$

where $\hat{\Psi}_{\sigma}$ is the annihilation Bose field operator, $\xi = -(\delta\sigma_z + \Omega\sigma_x)/2$ is the single particle spin Hamiltonian written in terms of the Pauli matrices acting in the $|\uparrow\rangle$ - $|\downarrow\rangle$ space, and $g_{\sigma\sigma'} = 4\pi a_{\sigma\sigma'}$ are the coupling constants for the σ - σ' interaction with the scattering lengths $a_{\sigma\sigma'}$. In Eq. (1) and in the rest of the Letter we adopt the units $\hbar = m = 1$, where m is the mass of the particles.

Assuming zero temperature and weak interactions, we follow the usual Bogoliubov procedure by separating the dominant condensate contribution and writing the field operator as $\hat{\Psi}_{\sigma} = \sqrt{n_{\sigma}} + \hat{\phi}_{\sigma}$, where n_{σ} are the condensate densities and $\hat{\phi}_{\sigma}$ annihilate particles with nonzero momenta. Neglecting $\hat{\phi}$ and substituting $\hat{\Psi}_{\sigma} = \sqrt{n_{\sigma}}$ into Eq. (1) we obtain the MF energy density

$$E_{\text{MF}} = \frac{\delta(1 - \alpha^2) - 2\Omega\alpha}{2(1 + \alpha^2)} n + \frac{g_{\uparrow\uparrow}\alpha^4 + g_{\downarrow\downarrow} + 2g_{\uparrow\downarrow}\alpha^2 n^2}{(1 + \alpha^2)^2} \frac{n^2}{2}, \quad (2)$$

where $n = n_{\uparrow} + n_{\downarrow}$ and $\alpha = \sqrt{n_{\uparrow}/n_{\downarrow}}$. In the limiting case of vanishing density (or interactions), E_{MF} gets minimized for $\alpha = \alpha_0 = \delta/\Omega + \sqrt{1 + \delta^2/\Omega^2}$, consistent with the condensation in the dressed state $|\rightarrow\rangle = (\alpha_0|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)/\sqrt{1 + \alpha_0^2}$, which is the ground state of ξ . The coefficient in front of $n^2/2$ in Eq. (2) is then the MF coupling constant corresponding to the scattering length $a_{--} = (a_{\uparrow\uparrow}\alpha_0^4 + a_{\downarrow\downarrow} + 2a_{\uparrow\downarrow}\alpha_0^2)/(1 + \alpha_0^2)^2$ [24,29]. For $a_{\uparrow\uparrow} > 0$, $a_{\downarrow\downarrow} > 0$, and $a_{\uparrow\downarrow} < 0$, a_{--} exhibits a minimum as a function of δ (or α_0). We are interested in the particular configuration of the scattering lengths (controlled by the magnetic field) and the drive parameters where this minimum touches zero. This translates into two conditions:

$$\delta a = 0 \quad \text{and} \quad \alpha_0 = \beta, \quad (3)$$

where we have introduced the scattering length detuning $\delta a = a_{\uparrow\downarrow} + \sqrt{a_{\uparrow\uparrow}a_{\downarrow\downarrow}}$ and the interaction asymmetry parameter $\beta = (a_{\downarrow\downarrow}/a_{\uparrow\uparrow})^{1/4}$. Note that for finite n the energy E_{MF} , upon minimization with respect to α , is not, in general, a quadratic function of n since the optimal polarization parameter α does depend on n . In particular, the system can feature a three-body attraction already on

the MF level [30]. However, the minimum of a_{--} is a special point where both terms on the right-hand side of Eq. (2) are minimized at $\alpha = \alpha_0$ independent of n . At this point E_{MF} is thus quadratic in n . If, in addition, we tune δa to zero [configuration (3)], the minimum of a_{--} also vanishes and the condensate becomes noninteracting on the MF level.

We shall now discuss the influence of BMF effects on the equation of state. In the Bogoliubov approach the leading BMF term is obtained by expanding the Hamiltonian (1) up to quadratic terms in $\hat{\phi}_{\sigma}$ and by summing the zero point energies of the corresponding Bogoliubov modes. In the symmetric case ($a_{\uparrow\uparrow} = a_{\downarrow\downarrow}$ and $\delta = 0$) the calculation has been performed in Ref. [26]. The general asymmetric case is technically more difficult because of cumbersome expressions for the Bogoliubov modes [31]. However, under the conditions (3), these expressions simplify and read

$$E_{p,-} = p^2/2, \\ E_{p,+} = \sqrt{(p^2/2 + \tilde{\Omega})(p^2/2 + \tilde{\Omega} - 2g_{\uparrow\downarrow}n)},$$

where p is the momentum and $\tilde{\Omega} = \Omega(\alpha_0 + 1/\alpha_0)/2$. The BMF energy density can then be reduced to the form [31]

$$E_{\text{BMF}} = \frac{8(-g_{\uparrow\downarrow}n)^{5/2}}{15\pi^2} I\left(\frac{\tilde{\Omega}}{-2g_{\uparrow\downarrow}n}\right), \quad (4)$$

where $I(y) = (15/4) \int_0^1 \sqrt{x(1-x)(x+y)} dx$. Equation (4) remains a good approximation for the BMF energy density as long as $|\delta a/a_{\uparrow\downarrow}| \ll 1$ and $|\alpha_0 - \beta| \ll 1$. The function $I(y)$ is a monotonically growing function, which tends to 1 for $y = \tilde{\Omega}/(-2g_{\uparrow\downarrow}n) \rightarrow 0$. This is the limit of two uncoupled condensates where Eq. (4) reduces to the LHY form, responsible for the BMF stabilization of quantum droplets in binary mixtures [12]. In the opposite limit $I(y)$ can be expanded in powers of $1/y \ll 1$, the first two leading terms being $I(y) \approx (15\pi/128)(4\sqrt{y} + 1/\sqrt{y})$. The substitution of this expansion into Eq. (4) gives

$$E_{\text{BMF}} \approx \frac{\sqrt{\tilde{\Omega}}}{2\sqrt{2}\pi} g_{\uparrow\downarrow}^2 \frac{n^2}{2} + \frac{3}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{\tilde{\Omega}}} |g_{\uparrow\downarrow}|^3 \frac{n^3}{6}, \quad (5)$$

which is qualitatively different from the LHY $n^{5/2}$ scaling. The two terms in Eq. (5) can be interpreted as a BMF-renormalized two-body interaction and an emergent three-body term, both with a specific scaling with Ω . Interestingly, both these terms agree with exact two-body [31] and three-body calculations [32] in the limit $\sqrt{\tilde{\Omega}}|g_{\uparrow\downarrow}| \ll 1$. Higher-order terms require taking into account interactions between excited (noncondensed) atoms and are thus not captured by the quadratic Bogoliubov Hamiltonian. For the same reason, Eq. (5) contains no LHY term $\propto n^{5/2}$, expected to be

“induced” by the BMF-renormalized two-body interaction. This term, however, is of very high order $\propto (\sqrt{\Omega}g_{\uparrow\downarrow}^2 n)^{5/2}$ and is negligible for our experimental parameters.

In our experiment we directly measure the BMF energy at the point of vanishing MF through the released energy in a one-dimensional expansion. We work with the second and third lowest Zeeman states of the lowest manifold of ^{39}K , namely, $|\uparrow\rangle = |F=1, m_F=-1\rangle$ and $|\downarrow\rangle = |F=1, m_F=0\rangle$. At a magnetic field of 56.830(1) G, the three relevant scattering lengths are $a_{\uparrow\uparrow} = 33.4a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 83.4a_0$, and $a_{\uparrow\downarrow} = -53.2a_0$, where a_0 is the atomic Bohr radius [33]. The minimum of a_{--} is then $-0.2a_0$. We have checked that the corresponding residual MF energy is a small correction as compared to the BMF energy for our parameters. The experiment starts with a quasi pure BEC in state $|\uparrow\rangle$. The atoms are optically trapped in an elongated harmonic potential with frequencies $(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (137, 137, 25.4)$ Hz.

The coherent mixture in $|-\rangle$ is prepared in an adiabatic passage, in which the radio-frequency (rf) detuning is swept from $\delta = 7.5 \Omega$ to its final value $\delta \approx 0.23 \Omega$, for which $\alpha_0 \approx \beta$. During the rf sweep, a_{--} decreases from $33.3a_0$ to a value close to 0. Its shape and duration of 9 ms are chosen in order to be adiabatic not only with respect to the internal-state dynamics but also with respect to the radial evolution of the wave function, which progressively shrinks and approaches the ground state of the radial harmonic confinement. We have checked that we cannot detect any residual oscillations of the radial size after the rf sweep. In addition, the axial trap frequency is progressively turned off during the sweep and adjusted such that the gas is neither axially expanding nor shrinking in a three-dimensional expansion after the sweep. The radially confined condensate is then free to expand in the axial direction for a time of 75 ms. During the final stage of the expansion, we sweep back the rf frequency to its initial value to map the dressed states $|-\rangle$ and $|+\rangle$ back onto $|\uparrow\rangle$ and $|\downarrow\rangle$, which we independently detect by fluorescent imaging after a short Stern-Gerlach separation.

Interestingly, we observe that the atoms remain in state $|-\rangle$ [34], which might be surprising as losses are known to take place mostly in state $|\downarrow\rangle$ [14,35] and thus could lead to the creation of $|+\rangle$. In order to understand the spin dynamics, we can model the losses by adding $-i\Gamma/2$ to the second diagonal term in ξ . Diagonalizing the resulting matrix, we see that for $\Gamma \ll \Omega$ the initial state $|-\rangle$ remains essentially unchanged, except that it decays with the rate $\approx \Gamma|\langle -|\downarrow\rangle|^2 = \Gamma/(1 + \alpha_0^2)$. In our experiment Γ is at most $\sim 20 \text{ s}^{-1}$, which is much lower than Ω . We thus conclude that the spin-dependent loss in our case reduces to an effective loss in the dressed state, with Γ weighted by the fraction of the lossy component.

For each value of the Rabi frequency Ω , we first measure the condensate density profile after expansion and extract

the condensate sizes from fits with 1D Thomas-Fermi density profiles $\propto 1 - (z/R_{\text{TF}})^2$ (see inset of Fig. 1). As a function of the detuning δ , a clear minimum in size appears at $\delta/\Omega \approx 0.23$, i.e., a position where we expect a_{--} , and thus also the MF energy to be minimized [36]. As explained above, under the conditions (3), the MF term vanishes at its minimum ($a_{--} \approx 0$) and the expansion of the cloud is governed by the BMF term. In Fig. 1, we plot the measured minimal size as a function of the Rabi frequency $\Omega/2\pi$. For Rabi frequencies $\Omega/2\pi$ between 6 kHz and 38 kHz, we observe a slow increase of the measured size as a function of Ω , which corresponds to an increase of the BMF energy as predicted previously. More precisely, the size after a long time of flight is expected to scale with $\sqrt{E_{\text{LHY}}} \propto \Omega^{1/4}$ for a dominant two-body term at large Ω , in qualitative agreement with our observed behavior. At low Rabi frequencies, below 6 kHz, we observe an increase of the size which we attribute to low frequency magnetic field noise. In a 50 μs Ramsey sequence, we have measured a standard deviation of the magnetic field $\Delta B \sim 0.8(2)$ mG corresponding to $\Delta\delta \sim 560(140)$ Hz. These fluctuations lead to an increased average value of the scattering length $\Delta a_{--} \approx 48(\Delta\delta/\Omega)^2 a_0$, which can explain our observed increasing sizes for low values of Ω [37].

In order to precisely model our experiment we solve the wave-function evolution through a single component

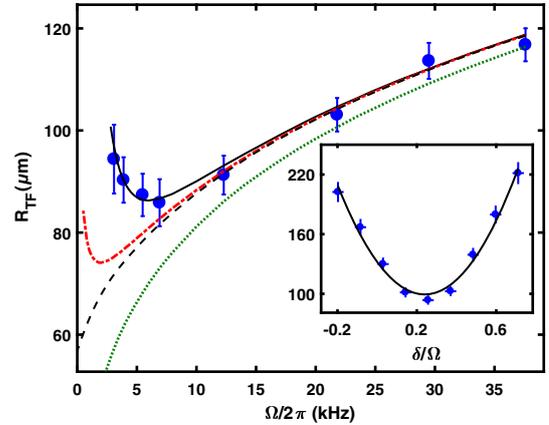


FIG. 1. Minimal Thomas-Fermi radius of the condensate after 75 ms of expansion as a function of the Rabi coupling strength (for $\delta/\Omega = 0.23$). Each point is obtained by averaging 15 fluorescence images and the error bars correspond to the single shot standard deviation. The curves correspond to quasi-1D extended Gross-Pitaevskii simulations (see text) with or without magnetic field noise and assuming different forms of the BMF term. Black solid curve: full BMF term with noise; black dashed curve: full BMF without noise; green dotted curve: two-body BMF term without noise; red dash-dotted curve: two-body plus three-body BMF term without noise. Inset: Experimental Thomas-Fermi radius of the condensate after 75 ms of expansion as a function of δ/Ω , for a Rabi frequency $\Omega/2\pi = 12.29$ kHz. The curve is a parabolic guide to the eye.

one-dimensional nonlinear Schrödinger equation in which we properly account for the BMF energy E_{BMF} [38]. The axial initial wave function is taken to be $\propto 1 - (z/R_{\text{TF}})^2$, such that the axial density profile is the one of the initial 3D Thomas-Fermi condensate before the rf sweep. The spin healing length is smaller than the radial cloud size and the BMF energy is treated in a local density approximation in the radial direction [39]. Since the chemical potential can be of order of the radial confinement energy ω_{\perp} (especially at large Ω), we take into account, as a function of the 1D density, the correction to the Gaussian radial profile due to the dominant two-body BMF contribution. The 1D energy density is then found by radial integration, and the chemical potential entering the Schrödinger equation by partial derivation with respect to the 1D density. The magnetic field noise is accounted for by an increase of a_{--} entering the MF term.

As can be seen from Fig. 1 this model quantitatively reproduces our experimental data. The black curves are generated by using Eq. (4) and assuming the measured finite ΔB (solid) and $\Delta B = 0$ (dashed). For this calculation the initial atom number 1.05×10^5 has been adjusted to match the experimental data and corresponds within 5% to a calibration using the condensation temperature (determined with $\sim 20\%$ accuracy). The initial peak density is $n \sim 5 \times 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ and the three-body loss coefficient $K_{---}/3! = 4 \times 10^{-28} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$ has been adjusted to match our observed $\sim 30\%$ atom loss during the expansions [40].

The other curves in Fig. 1 are obtained by running the same code with $\Delta B = 0$ using Eq. (5) (red dash-dotted) or restricting it only to the two-body term (green dotted). They show that in our explored range $\Omega/2\pi > 3 \text{ kHz}$ the BMF energy is very well approximated, at least theoretically, by the sum of the dominant two-body contribution $E_{\text{BMF}} \propto \sqrt{\Omega}$ and a smaller three-body term $\propto 1/\sqrt{\Omega}$. To give concrete numbers, for $\Omega/2\pi = 10 \text{ kHz}$, $\tilde{\Omega}/(-2g_{\uparrow\downarrow}n) \approx 1$ and the initial two-body and three-body energies per particle are calculated to be 20 and 3.2 Hz, respectively.

In order to better understand how much of this theory is experimentally tested, we first note that the scaling $E_{\text{BMF}} \propto \sqrt{\Omega}$ is clearly evidenced in our data for $\Omega/2\pi > 6 \text{ kHz}$. Assuming that the next-order term scales as $\propto 1/\sqrt{\Omega}$ we try to verify if the corresponding coefficients are consistent with Eq. (5). To this end we fit the data with the prediction of our dynamical model based on Eq. (5) with two free parameters: the total atom number and a prefactor η , inserted by hand in Eq. (5) in front of the three-body term. Repeating this fitting procedure for different values of ΔB we find $\eta = 0.85(35)$, where the error bar is dominated by the uncertainty in our determination of the magnetic field noise. Our measurements as a function of Ω are thus in quantitative agreement with Eq. (5). The two terms, named two-body and three-body according to their predicted

density scalings, are independently measured from their specific Ω dependence.

Finally, we can also repeat the expansion measurement while removing the rf coupling field at the end of the sweep such that we are left with two uncoupled condensates. The losses then dominantly take place in state $|\downarrow\rangle$ and contrary to the coupled case, α quickly deviates from its initial value β . Moreover, we observe after a Stern-Gerlach separation that the two clouds behave differently in the expansion (see Fig. 2). The $|\downarrow\rangle$ condensate does not expand much whereas the $|\uparrow\rangle$ condensate exhibits a double structure with a low energy central part. This behavior is reminiscent of previous observations in droplet configuration where excess $|\uparrow\rangle$ atoms are expelled from the droplet region [13,14,41]. In addition, we find that the condensate 1D Thomas-Fermi radius in state $|\downarrow\rangle$ is $31 \mu\text{m}$, a value that is significantly lower than the expected radius of $57 \mu\text{m}$ for our parameters in the single component simulation with $\Omega \rightarrow 0$, i.e., with the BMF energy density scaling with $n^{5/2}$. This difference indicates a significant role of transient MF effects in the expansion dynamics of the central region. Here, $|\uparrow\rangle$ atoms, which are more abundant than expected and which require some time to escape, create an excessive effective trapping for $|\downarrow\rangle$ atoms forcing their slower expansion.

In conclusion, we have studied both theoretically and experimentally, the BMF equation of state of a coherently coupled two-component BEC in the asymmetric case. The BMF correction is most manifest when the spin polarization and interactions are tuned to the special point given by Eqs. (3) where MF effects are minimized. The BMF energy density as a function of n then interpolates between the usual $\propto n^{5/2}$ LHY form in the uncoupled limit to a qualitatively different behavior in the strong-coupling regime where one can introduce effective BMF two-body and three-body interactions with specific scalings as a function of the Rabi coupling strength Ω . The experimentally measured condensate expansions are governed by the

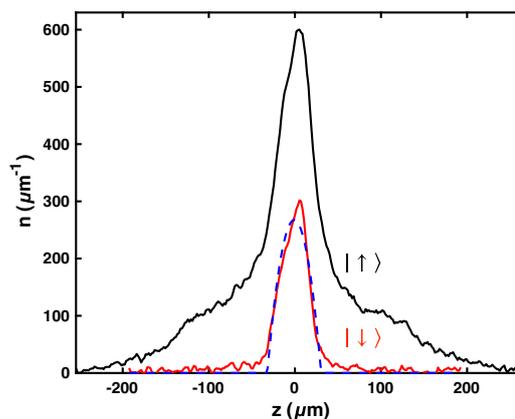


FIG. 2. Density profiles for $|\uparrow\rangle$ (black) and $|\downarrow\rangle$ (red) atoms after 75 ms of expansion at $\Omega = 0$. The blue dashed curve is a 1D Thomas-Fermi fit of the density profile in state $|\downarrow\rangle$.

BMF energy and are in good agreement with the theory at large Ω . We detect not only the dominant two-body BMF term $\propto \sqrt{\Omega}$, but also evidence the smaller three-body term $\propto 1/\sqrt{\Omega}$, opening the path to the creation of coherently coupled quantum droplets in which the two-body interaction (MF + BMF) is compensated by BMF three-body effects [23,42]. Exploration of the small Ω regime will require a further reduction of the magnetic field fluctuations. Interestingly, a coherent Rabi coupling helps to preserve the spin composition and thus prevents the system from dynamically drifting away from the point of vanishing mean field facilitating direct measurements of the BMF equation of state.

We thank L. Tarruell for useful discussions. This research has been supported by CNRS, Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, Labex PALM, Region Ile-de-France in the framework of Domaine d'Intérêt Majeur Sirteq, Ingénierie Quantique à l'Université Paris-Saclay, ANR Droplets (19-CE30-0003), Simons Foundation (Grant No. 563916: localization of waves). A.R. acknowledge financial support from Provincia Autonoma di Trento, the FISh project of the Istituto Nazionale di Fisica Nucleare, and the Italian MIUR under the PRIN2017 project CEnTraL.

*Corresponding author.

thomas.bourdel@institutoptique.fr

- [1] J. Armijo, Direct Observation of Quantum Phonon Fluctuations in a One-Dimensional Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **108**, 225306 (2012).
- [2] T. Rentrop, A. Trautmann, F. A. Olivares, F. Jendrzejewski, A. Komnik, and M. K. Oberthaler, Observation of the Phononic Lamb Shift with a Synthetic Vacuum, *Phys. Rev. X* **6**, 041041 (2016).
- [3] J.-C. Jaskula, G. B. Partridge, M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron, and C. I. Westbrook, Acoustic Analog to the Dynamical Casimir Effect in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **109**, 220401 (2012).
- [4] J. Steinhauer, Observation of quantum Hawking radiation and its entanglement in an analogue black hole, *Nat. Phys.* **12**, 959 (2016).
- [5] R. Chang, Q. Bouton, H. Cayla, C. Qu, A. Aspect, C. I. Westbrook, and D. Clément, Momentum-Resolved Observation of Thermal and Quantum Depletion in a Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **117**, 235303 (2016).
- [6] R. Lopes, C. Eigen, N. Navon, D. Clément, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, Quantum Depletion of a Homogeneous Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **119**, 190404 (2017).
- [7] T. D. Lee, K. Huang, and C. N. Yang, Eigenvalues and eigenfunctions of a bose system of hard spheres and its low-temperature properties, *Phys. Rev.* **106**, 1135 (1957).
- [8] S. B. Papp, J. M. Pino, R. J. Wild, S. Ronen, C. E. Wieman, D. S. Jin, and E. A. Cornell, Bragg Spectroscopy of a Strongly Interacting ^{85}Rb Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 135301 (2008).
- [9] N. Navon, S. Piatecki, K. Günter, B. Rem, T. C. Nguyen, F. Chevy, W. Krauth, and C. Salomon, Dynamics and Thermodynamics of the Low-Temperature Strongly Interacting Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 135301 (2011).
- [10] I. Ferrier-Barbut, H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, and T. Pfau, Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 215301 (2016).
- [11] L. Chomaz, S. Baier, D. Petter, M. J. Mark, F. Wächtler, L. Santos, and F. Ferlaino, Quantum-Fluctuation-Driven Crossover from a Dilute Bose-Einstein Condensate to a Macrodroplet in a Dipolar Quantum Fluid, *Phys. Rev. X* **6**, 041039 (2016).
- [12] D. S. Petrov, Quantum Mechanical Stabilization of a Collapsing Bose-Bose Mixture, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 155302 (2015).
- [13] R. Cabrera, L. Tanzi, J. Sanz, B. Naylor, P. Thomas, P. Cheiney, and L. Tarruell, Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates, *Science* **359**, 301 (2018).
- [14] G. Semeghini, G. Ferioli, L. Masi, C. Mazzinghi, L. Wolswijk, F. Minardi, M. Modugno, G. Modugno, M. Inguscio, and M. Fattori, Self-Bound Quantum Droplets of Atomic Mixtures in Free Space, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 235301 (2018).
- [15] Z. Guo, F. Jia, L. Li, Yi. Ma, J. M. Hutson, X. Cui, and D. Wang, Lee-Huang-Yang effects in the ultracold mixture of ^{23}Na and ^{87}Rb with attractive interspecies interactions, *Phys. Rev. Research* **3**, 033247 (2021).
- [16] E. V. Goldstein and P. Meystre, Quasiparticle instabilities in multicomponent atomic condensates, *Phys. Rev. A* **55**, 2935 (1997).
- [17] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, M. J. Holland, J. E. Williams, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Watching a Superfluid Untwist Itself: Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3358 (1999).
- [18] J. Williams, R. Walser, J. Cooper, E. A. Cornell, and M. Holland, Excitation of a dipole topological state in a strongly coupled two-component Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* **61**, 033612 (2000).
- [19] T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, and M. K. Oberthaler, Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204101 (2010).
- [20] E. Nicklas, H. Strobel, T. Zibold, C. Gross, B. A. Malomed, P. G. Kevrekidis, and M. K. Oberthaler, Rabi Flopping Induces Spatial Demixing Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **107**, 193001 (2011).
- [21] E. Nicklas, M. Karl, M. Höfer, A. Johnson, W. Muessel, H. Strobel, J. Tomkovic, T. Gasenzer, and M. K. Oberthaler, Observation of Scaling in the Dynamics of a Strongly Quenched Quantum Gas, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 245301 (2015).
- [22] T. M. Hanna, E. Tiesinga, and P. S. Julienne, Creation and manipulation of Feshbach resonances with radiofrequency radiation, *New J. Phys.* **12**, 083031 (2010).
- [23] D. S. Petrov, Three-Body Interacting Bosons in Free Space, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 103201 (2014).
- [24] J. Sanz, A. Frölian, C. S. Chisholm, C. R. Cabrera, and L. Tarruell, Interaction control and bright solitons in

- coherently-coupled Bose-Einstein condensates, [arXiv:1912.06041](https://arxiv.org/abs/1912.06041).
- [25] A. Farolfi, A. Zenesini, D. Trypogeorgos, C. Mordini, A. Gallemì, A. Roy, A. Recati, G. Lamporesi, and G. Ferrari, Quantum-torque-induced breaking of magnetic domain walls in ultracold gases, [arXiv:2011.04271](https://arxiv.org/abs/2011.04271).
- [26] A. Cappellaro, F. Macri, G. Bertacco, and L. Salasnich, Equation of state and self-bound droplet in Rabi-coupled Bose mixtures, *Sci. Rep.* **7**, 13358 (2017).
- [27] T. G. Skov, M. G. Skou, N. B. Jrgensen, and J. J. Arlt, Observation of a Lee-Huang-Yang Fluid, *Phys. Rev. Lett.* **126**, 230404 (2021).
- [28] M. Abad and A. Recati, A study of coherently coupled two-component Bose-Einstein condensates, *Eur. Phys. J. D* **67**, 148 (2013).
- [29] C. P. Search and P. R. Berman, Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* **63**, 043612 (2001).
- [30] A. Hammond *et al.* (to be published).
- [31] See Supplemental Material at <http://link.aps.org/supplemental/10.1103/PhysRevLett.127.203402> for the derivation of the BMF energy and for the solution of the two-body problem in the presence of Rabi coupling.
- [32] The exact three-body calculation in the symmetric case can be found in Ref. [23]. Curiously, the three-body coupling constant $g_3 = 3|g_{\uparrow\downarrow}|^3/(4\pi\sqrt{2\Omega})$, which we have obtained here by using the many-body Bogoliubov approach would be significantly more difficult to calculate in the asymmetric case by using the general three-body formalism of Ref. [23].
- [33] E. Tiemann, P. Gersema, K. K. Voges, T. Hartmann, A. Zenesini, and S. Ospelkaus, Beyond Born-Oppenheimer approximation in ultracold atomic collisions, *Phys. Rev. Research* **2**, 013366 (2020).
- [34] We have found that at low Rabi frequencies ($\Omega/2\pi \leq 7$ kHz), magnetic field noise around these frequencies transfers a small fraction of the atoms to state $|+\rangle$ during the condensate expansion (3% at $\Omega/2\pi = 6.9$, 4.5% at $\Omega/2\pi = 5.5$, 10% at $\Omega/2\pi = 3.9$, and 12% at $\Omega/2\pi = 3.1$ kHz).
- [35] P. Cheiney, C. R. Cabrera, J. Sanz, B. Naylor, L. Tanzi, and L. Tarruell, Bright Soliton to Quantum Droplet Transition in a Mixture of Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 135301 (2018).
- [36] In principle, the condensate expansion is governed by the total energy $E_{\text{MF}} + E_{\text{BMF}}$. However, the variation of the MF energy as a function of δ is much stronger than the corresponding variation of E_{BMF} such that the latter can be approximated by a constant. As a consequence, the variation of our measured size is dominated by the variation of a_{--} . We have checked that for our parameters including the δ dependence of E_{BMF} leads to shifts of the minimal energy below 1%.
- [37] This averaging dominantly takes place at the single shot level during the expansion for the dominant 50 Hz, 100 Hz noise frequencies.
- [38] X. Antoine and R. Duboscq, GPELab, a MATLAB toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations II: Dynamics and stochastic simulations, *Comput. Phys. Commun.* **193**, 95 (2015).
- [39] L. Lavoine and T. Bourdel, Beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions in quantum droplets of binary mixtures, *Phys. Rev. A* **103**, 033312 (2021).
- [40] If all losses are solely attributed to three-body losses in state $|\downarrow\rangle$, taking into account the lower fraction of atoms in this state, our value corresponds to $K_{\downarrow\downarrow\downarrow} = 4 \times 10^{-26} \text{ cm}^6 \text{ s}^{-1}$, which is ~ 7 times higher than previously measured values in thermal gases [14,35]. This indicates that other collision channels are probably important.
- [41] G. Ferioli, G. Semeghini, S. Terradas-Briansó, L. Masi, M. Fattori, and M. Modugno, Dynamical formation of quantum droplets in a ^{39}K mixture, *Phys. Rev. Research* **2**, 013269 (2020).
- [42] A. Bulgac, Dilute Quantum Droplets, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 050402 (2002).

Supplemental material: Beyond-mean-field effects in Rabi-coupled two-component Bose-Einstein condensate

L. Lavoine, A. Hammond, A. Recati, D.S. Petrov, and T. Bourdel

BOGOLIUBOV SPECTRUM AND BMF ENERGY IN COUPLED BINARY MIXTURES

The expansion of the Hamiltonian (1) (hereafter, equation numbers without prefix S refer to the main text) up to quadratic terms in the fields $\hat{\phi}_{\sigma,\mathbf{p}}$ (we switch to momentum space) can be written as $E_{\text{MF}} + E_0 + \hat{H}_2$, where E_{MF} is given by Eq. (2),

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p}} \left(-p^2 - \frac{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}}{\sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}}} \frac{\Omega}{2} - g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} - g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma\sigma'} g_{\sigma\sigma'}^2 n_{\sigma}n_{\sigma'} \right), \quad (\text{S1})$$

and

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} (\hat{\phi}_{\uparrow}^{\dagger} \hat{\phi}_{\downarrow}^{\dagger} \hat{\phi}_{\uparrow} \hat{\phi}_{\downarrow}) \begin{pmatrix} \frac{p^2}{2} + g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}}} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} & g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} \\ g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} & \frac{p^2}{2} + g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\uparrow}}{n_{\downarrow}}} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} & g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} \\ g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} & \frac{p^2}{2} + g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\downarrow}}{n_{\uparrow}}} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} \\ g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} & g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} & g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} & \frac{p^2}{2} + g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\uparrow}}{n_{\downarrow}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\uparrow} \\ \hat{\phi}_{\downarrow} \\ \hat{\phi}_{\uparrow}^{\dagger} \\ \hat{\phi}_{\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix}. \quad (\text{S2})$$

The first four terms in the brackets on the right-hand side of Eq. (S1) arise as a compensation for the ‘‘incorrectly’’ ordered terms added to the quadratic form (S2) in order to make it symmetric with respect the ordering of creation and annihilation operators. This symmetrized form is convenient since it stays symmetrized under the usual Bogoliubov transformation and diagonalizes into

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\pm} E_{p,\pm} (\hat{b}_{\mathbf{p},\pm}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p},\pm} + \hat{b}_{\mathbf{p},\pm} \hat{b}_{\mathbf{p},\pm}^{\dagger}) = \sum_{\mathbf{p},\pm} E_{p,\pm} \hat{b}_{\mathbf{p},\pm}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{p},\pm} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{p},\pm} E_{p,\pm}. \quad (\text{S3})$$

The last term in Eq. (S1) is due to the standard renormalisation of the coupling constant $g_{\sigma\sigma'} \rightarrow g_{\sigma\sigma'} (1 + g_{\sigma\sigma'} \sum_{\mathbf{p}} 1/p^2)$ in the MF term.

The dispersion relations $E_{p,\pm}$ of the Bogoliubov modes (created by operators $\hat{b}_{\mathbf{p},\pm}^{\dagger}$) can be written as

$$E_{p,\pm} = \sqrt{D_p \pm \sqrt{D_p^2 - \frac{p^2}{2} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\Omega}{2} \frac{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}}{\sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}}} \right) \left[\prod_{\sigma} \left(\frac{p^2}{2} + 2g_{\sigma\sigma}n_{\sigma} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\bar{\sigma}}}{n_{\sigma}}} \right) - \left(2g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} \right)^2 \right]}}, \quad (\text{S4})$$

where

$$D_p = \frac{1}{2} \sum_{\sigma} \left(\frac{p^2}{2} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\bar{\sigma}}}{n_{\sigma}}} \right) \left(\frac{p^2}{2} + 2g_{\sigma\sigma}n_{\sigma} + \frac{\Omega}{2} \sqrt{\frac{n_{\bar{\sigma}}}{n_{\sigma}}} \right) - \frac{\Omega}{2} \left(2g_{\uparrow\downarrow} \sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}} - \frac{\Omega}{2} \right). \quad (\text{S5})$$

From Eq. (S5) one sees that the mode $E_{p,-}$ is gapless, while $E_{p,+}$ has a gap $\sqrt{2D_0} \neq 0$. The former is just the Goldstone mode due to the breaking of the $U(1)$ symmetry in the condensed state, while the latter is related to the gap introduced by Ω in having a different phase for the two spinor components. The gap vanishes for $\Omega = 0$, since in this case there exist two Goldstone modes of the broken $U(1) \times U(1)$ symmetry.

The BMF energy is obtained by adding the vacuum part of Eq. (S3) to the constant energy E_0 . The BMF energy thus explicitly reads

$$E_{\text{BMF}} = \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E_{p,+} + E_{p,-} - p^2 - \frac{n_{\uparrow} + n_{\downarrow}}{\sqrt{n_{\uparrow}n_{\downarrow}}} \frac{\Omega}{2} - g_{\uparrow\uparrow}n_{\uparrow} - g_{\downarrow\downarrow}n_{\downarrow} + \frac{1}{p^2} \sum_{\sigma\sigma'} g_{\sigma\sigma'}^2 n_{\sigma}n_{\sigma'} \right), \quad (\text{S6})$$

where we have replaced the sum over momenta by the integral. Equation (4) is obtained from Eq. (S6) under the conditions (3) as follows. We switch to the integration variable $z = p^2$ and express the integral in Eq. (S6) as a contour integral around the branch cut of \sqrt{z} along the positive real semiaxis. We then deform this contour towards the negative semiaxis such that it now goes around the branch cut of $E_{p,+}$. This is a finite interval which we map onto $x \in [0, 1]$.

EXACT SOLUTION OF THE TWO-BODY PROBLEM IN THE ZERO-RANGE APPROXIMATION

In order to characterize the two-body scattering let us introduce the single-particle states (normalization will not be important) $|+\rangle = |\uparrow\rangle - \alpha_0 |\downarrow\rangle$ and $|-\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle/\alpha_0$, which are eigenstates of the operator ξ corresponding to eigenvalues $\pm\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}/2$. For two bosons we thus have three possible ‘‘total spin’’ states, which correspond to three scattering channels equally separated in energy by $\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$. We define these spin states by

$$|--\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle + (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\alpha_0 + |\downarrow\downarrow\rangle/\alpha_0^2, \quad (\text{S7})$$

$$|+-\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle - (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)\delta/\Omega - |\downarrow\downarrow\rangle, \quad (\text{S8})$$

$$|++\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle - \alpha_0(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) + \alpha_0^2|\downarrow\downarrow\rangle. \quad (\text{S9})$$

Consider the scattering of two ground-state $|-\rangle$ bosons at the collision energy q^2 below the gap $\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}$. Since the atoms interact only at zero separation, the orbital wave functions in the three channels correspond to free motion, respectively, at energies $q^2 > 0$ (open channel), $q^2 - \sqrt{\Omega^2 + \delta^2} < 0$, and $q^2 - 2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} < 0$ (these channels are therefore closed). In addition, only s waves are important. Accordingly, introducing $\kappa_1 = \sqrt{\Omega^2 + \delta^2 - q^2}$ and $\kappa_2 = \sqrt{2\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} - q^2}$ we write the two-body scattering state as

$$\left[\frac{\sin(qr)}{qr} - a \frac{\cos(qr)}{r} \right] |--\rangle + C_1 \frac{e^{-\kappa_1 r}}{r} |+-\rangle + C_2 \frac{e^{-\kappa_2 r}}{r} |++\rangle, \quad (\text{S10})$$

where the parameters a , C_1 , and C_2 are fixed by three zero-range Bethe-Peierls boundary conditions ensuring that for $r \rightarrow 0$ the projections of Eq. (S10) on the spin states $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$, and $|\downarrow\downarrow\rangle$ are proportional, respectively, to $1 - a_{\uparrow\uparrow}/r$, $1 - a_{\uparrow\downarrow}/r$, and $1 - a_{\downarrow\downarrow}/r$. Note that C_1 , C_2 , and the overall prefactor in Eq. (S10) absorb the normalization coefficients omitted in Eqs. (S7-S9). Performing the projection leads to the matrix equation

$$\begin{bmatrix} 1/a_{\downarrow\downarrow} & -\alpha_0^2(\kappa_1 - 1/a_{\downarrow\downarrow}) & \alpha_0^4(\kappa_2 - 1/a_{\downarrow\downarrow}) \\ 1/a_{\uparrow\downarrow} & -\alpha_0(\delta/\Omega)(\kappa_1 - 1/a_{\uparrow\downarrow}) & -\alpha_0^2(\kappa_2 - 1/a_{\uparrow\downarrow}) \\ 1/a_{\uparrow\uparrow} & \kappa_1 - 1/a_{\uparrow\uparrow} & \kappa_2 - 1/a_{\uparrow\uparrow} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{S11})$$

The energy-dependent scattering length $a(q)$ is related to the s -wave scattering amplitude by the equation

$$f(q) = -\frac{1}{1/a(q) + iq} \quad (\text{S12})$$

and can be obtained from Eq. (S11) by eliminating C_1 and C_2 . The corresponding explicit expression is analytic but bulky. However, in the limit of small $a_{\sigma\sigma'}$ one can recover the MF result $a(0) = a_{--}$, where a_{--} is defined in the main text. If one assumes $a_{\uparrow\downarrow} \sim a_{\downarrow\downarrow} \sim |a_{\uparrow\downarrow}|$ and $|\delta| \sim \Omega$, one can see from Eq. (S11) that $a(0)$ can be expanded in powers of the small parameter $|a_{\uparrow\downarrow}|\sqrt{\Omega} \ll 1$. The leading BMF correction to a is thus expected to be of order $a_{\uparrow\downarrow}^2\sqrt{\Omega}$. By solving Eq. (S11) exactly under the conditions Eq. (3) we obtain

$$a(0) = \sqrt{2}a_{\uparrow\downarrow}^2\sqrt{\Omega} \frac{1 + a_{\uparrow\downarrow}\sqrt{\Omega}}{1 + [1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2}(\alpha_0^2 + 1/\alpha_0^2)]a_{\uparrow\downarrow}\sqrt{\Omega} - \sqrt{2}(\alpha_0 - 1/\alpha_0)^2 a_{\uparrow\downarrow}^2\sqrt{\Omega}}, \quad (\text{S13})$$

the leading-order asymptote of which is indeed proportional to $a_{\uparrow\downarrow}^2\sqrt{\Omega}$ (since $a_{--} = 0$) and corresponds to the two-body coupling constant in Eq. (5).

The term $\propto a_{\uparrow\downarrow}^2\sqrt{\Omega}$ can be understood as the second-order Born correction to the scattering amplitude for small $a_{\sigma\sigma'}\sqrt{\Omega}$. This term accounts for virtual interaction-induced transitions of two atoms in the unperturbed ground $|--\rangle$ state with zero momenta to various spin states ($|--\rangle$, $|+-\rangle$, $|++\rangle$) and momenta \mathbf{q} and $-\mathbf{q}$. In spite of the fact that the channels $|+-\rangle$ and $|++\rangle$ are strongly gapped at large Ω the second-order integral actually grows as $\sqrt{\Omega}$. This

can be understood by looking at the structure of this integral, which behaves (qualitatively) as $\int g^2 d^3q/(q^2 + \Omega)$. Its diverging part $\int g^2 d^3q/q^2$ is regularized in the standard manner by replacing the bare coupling constants $g_{\sigma\sigma'}$ by $4\pi a_{\sigma\sigma'}$, and the remaining part indeed scales as $\sqrt{\Omega}$ as the number of momentum states essentially contributing to the integral grows faster than the gap.

Finally, we note that the Bogoliubov quadratic Hamiltonian, which leads to the BMF energy Eq. (4), does take into account the virtual two-body processes which we have just described. Equation (5) therefore exactly reproduces the second-order Born term. On the other hand, the third-order two-body correction $\propto a_{\uparrow\downarrow}^3 \Omega$ [present in Eq. (S13)] is not captured on the level of the Bogoliubov Hamiltonian [and we therefore do not see it in Eq. (5)] since it requires taking into account interactions between atoms excited from the condensate.

Tunable Three-Body Interactions in Driven Two-Component Bose-Einstein CondensatesA. Hammond, L. Lavoine, and T. Bourdel^{*}*Université Paris-Saclay, Institut d'Optique Graduate School, CNRS, Laboratoire Charles Fabry, 91127 Palaiseau, France* (Received 29 November 2021; revised 21 January 2022; accepted 7 February 2022; published 23 February 2022)

We propose and demonstrate the appearance of an effective attractive three-body interaction in coherently driven two-component Bose-Einstein condensates. It originates from the spinor degree of freedom that is affected by a two-body mean-field shift of the driven transition frequency. Importantly, its strength can be controlled with the Rabi-coupling strength and it does not come with additional losses. In the experiment, the three-body interactions are adjusted to play a predominant role in the equation of state of a cigar-shaped trapped condensate. This is confirmed through two striking observations: a downshift of the radial breathing mode frequency and the radial collapses for positive values of the dressed-state scattering length.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.128.083401](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.083401)

Thanks to their extreme diluteness, particles in ultracold gases dominantly interact pairwise. At low temperatures, the thermal de Broglie wavelength is larger than the range of the Van der Waals potential R_e , and the two-body interaction can accurately be replaced by a contact potential [1]. Moreover, the only parameter characterizing the interaction, i.e., the scattering length a , can be tuned via scattering resonances [2]. Thanks to these properties, ultracold gases are ideal candidates to quantitatively explore quantum many-body physics with pairwise interactions [3]. For example, the superfluid to Mott transition [4] or the BEC-BCS crossover [5–9] have been studied.

Although three-body interactions are usually a small correction compared to two-body interactions in dilute gases, their theoretical consideration has a long history [10–12]. They lead to interesting nonlinear dynamics [13–21] and to the appearance of droplets [22,23]. At low temperatures, a three-body interaction is characterized by a scattering hypervolume D [24]. D is a complex number whose real part is associated with an energy shift and its imaginary part with three-body losses. Enhancement of three-body interactions, i.e., of the real part of D , is expected close to resonances due to energy coincidence with weakly bound three-body states [22,24–28]. Unfortunately, typical interatomic interaction potentials possess numerous deeply bound two-body states and the enhancement of the real part of D comes together with a concomitant increase of its imaginary part due to three-body recombination toward these states [29]. For example, three-body Efimov resonances have been experimentally observed through the enhancement of losses [30,31]. In optical lattices, the engineering of three-body interactions was proposed via strong three-body losses and quantum Zeno effect [32,33] or via a coherent coupling between two spin states [34].

Alternatively, an effective three-body interaction can be induced through a density dependant two-body coupling

strength. This method requires an additional degree of freedom that rapidly adjusts to the local density and can be adiabatically eliminated. For a condensate in quasi-one-dimensional (1D) or quasi-2D geometries, the wave function in the confined direction provides this additional degree of freedom [35–37]; its size slightly increases (decreases) for repulsive (attractive) two-body interactions. This effect leads to an effective attractive three-body coupling constant $g_3 \propto -a^2$ in the equation of state in the reduced geometry. Note that it is a perturbative expansion, valid when the three-body energy is a small correction to the two-body energy. Manifestations of these three-body interactions were observed in frequency shifts of breathing oscillations in a quasi-2D geometry [37] and in the breaking of integrability in quasi-1D gases [36].

In this Letter, we demonstrate that the additional spinor degree of freedom in coherently driven two-component condensates can similarly induce effective three-body interactions after its adiabatic elimination. The method crucially relies on two facts: first, the scattering lengths in the dressed states depend on their spin composition [38,39]; second, the spin composition is affected by density-induced mean-field shifts of the driven transition [40,41]. In contrast to condensates in a reduced dimension, the two parameters in driven two-component condensates (the detuning frequency $\delta/2\pi$ and the Rabi-coupling frequency $\Omega/2\pi$) allow the independent control of the two-body and three-body coupling constants. The two-body interactions can thus be reduced such that the three-body interactions prevail in the equation of states. In addition, these three-body interactions appear at the mean-field level and can be made significantly larger in magnitude than the recently studied beyond mean-field three-body effects [42,43].

Experimentally, we study two consequences of the effective attractive three-body interactions that appear in the lowest energy dressed state of a driven two-component

^{39}K condensate. First, the radial breathing mode frequency of an elongated condensate, which is usually independent of the two-body interaction, exhibits a downshift. Second, we measure the detuning threshold for radial collapse as a function of Ω . We find that the condensate collapses despite a positive scattering length due to the attractive three-body interactions. Importantly, we detect no increase of losses associated with the introduction of the coherent coupling that enables the tuning of the two-body and three-body interactions.

Let us consider a Bose gas in a volume V consisting of N atoms of mass m with two coupled internal states, $\sigma = \uparrow, \downarrow$. For simplicity, we work with symmetric interactions, $g_{\uparrow\uparrow} = g_{\downarrow\downarrow} = g$, and we define $\bar{g} = (g_{\uparrow\uparrow} - g_{\downarrow\downarrow})/2$ (with $g_{\sigma\sigma'} = 4\pi\hbar^2 a_{\sigma\sigma'}/m$ and \hbar the reduced Planck constant). In a homogeneous system with density n , the mean-field energy for a condensate in the spinor state $(\phi_{\uparrow}, \phi_{\downarrow})$ reads

$$\frac{E_{\text{MF}}}{V} = -\frac{\hbar\Omega}{2}(\phi_{\uparrow}^*\phi_{\downarrow} + \phi_{\downarrow}^*\phi_{\uparrow}) + \frac{\hbar\delta}{2}(|\phi_{\uparrow}|^2 - |\phi_{\downarrow}|^2) + \sum_{\sigma\sigma'} \frac{g_{\sigma\sigma'}}{2} |\phi_{\sigma}|^2 |\phi_{\sigma'}|^2.$$

The ground state is found upon minimization of the energy with respect to the internal state. The first term fixes the relative phase of the spinor that we can thus write $(\phi_{\uparrow}, \phi_{\downarrow}) = \sqrt{n}[\sin(\theta/2), \cos(\theta/2)]$. The energy is

$$\frac{E_{\text{MF}}}{N} = -\frac{\hbar\Omega}{2}\sin(\theta) - \frac{\hbar\delta}{2}\cos(\theta) + \frac{gn}{2} - \frac{\bar{g}n}{2}\sin^2(\theta) \quad (1)$$

with $\theta \in [0, \pi]$ found upon minimization. Up to first order in the ratio $\gamma = [(\bar{g}n)/(\hbar\Omega)]$, which compares the differential mean-field shift to the Rabi frequency, we find

$$\theta \approx \theta_0 - 2\gamma \frac{\delta/\Omega}{(1 + \delta^2/\Omega^2)^{3/2}} \quad \text{with} \quad \cotan(\theta_0) = \frac{\delta}{\Omega}. \quad (2)$$

In the absence of interaction ($\gamma = 0$), $\theta = \theta_0$ corresponds to a condensate in the single particle eigenstate of lowest energy $|-\rangle = \sin(\theta_0/2)|\uparrow\rangle + \cos(\theta_0/2)|\downarrow\rangle$. In the presence of interaction, γ is the key parameter controlling the modification of the internal state away from $|-\rangle$. It results in the following mean-field energy per particle:

$$\frac{E_{\text{MF}}}{N} \approx \epsilon_- + g_2 \frac{n}{2} + g_3 \frac{n^2}{3} \quad (3)$$

$$\text{with} \quad g_2 = g - \frac{\bar{g}}{1 + \delta^2/\Omega^2} \quad (4)$$

$$\text{and} \quad g_3 = -\frac{3\bar{g}^2}{\hbar\Omega} \frac{\delta^2/\Omega^2}{(1 + \delta^2/\Omega^2)^{5/2}}. \quad (5)$$

The first term in Eq. (3) is the single particle eigenenergy $\epsilon_- = -\hbar\sqrt{\Omega^2 + \delta^2}/2$ of the $|-\rangle$ state. $g_2 = 4\pi\hbar^2 a_{--}/m$ corresponds to the two-body coupling constant for atoms in $|-\rangle$ [39]. It is solely determined by the ratio δ/Ω [see Fig. 2(b)]. g_3 is an attractive three-body coupling constant appearing due to the mean-field-induced change in θ [Eq. (2)]. It is zero both for large absolute value of δ/Ω when the two states are uncoupled and for $\delta = 0$ as the energy [Eq. (1)] is then always minimal for $\theta = \theta_0 = \pi/2$.

Interestingly, g_3 can be independently controlled from g_2 through the value of Ω . Nonetheless, there are some limitations. First, Ω can not be made arbitrarily small as the adiabatic following of the dressed state requires $\dot{\gamma} \ll \Omega$ when the density varies in time. Second, the energy expansion in powers of the density [Eq. (3)], i.e., the three-body approximation, is only valid for $\gamma \ll 1$. This second condition is more restrictive for our experimental conditions (see below) and taking $\gamma \approx 1$ or $\hbar\Omega \approx \bar{g}n$, we find that the maximum absolute value of the three-body energy per particle $g_3 n^2/3$ amounts to a significant fraction of $\bar{g}n$. It can thus compete with the two-body energy $g_2 n/2$. In the limit $\gamma \gg 1$ and $\bar{g}n \gg \hbar|\delta|$, $\theta \approx \pi/2$ and the energy [Eq. (1)] recovers a two-body behavior with $g_2 = (g - \bar{g})$.

We now turn to the experimental observation of the three-body interactions. We work with the second and third lowest Zeeman states of the lowest manifold of ^{39}K , namely $|\uparrow\rangle = |F=1, m_F=-1\rangle$ and $|\downarrow\rangle = |F=1, m_F=0\rangle$. At a magnetic field of 54.690(1) G, the three relevant scattering lengths are $a_{\uparrow\uparrow} = 37.9 a_0$, $a_{\downarrow\downarrow} = 36.9 a_0$ [44], and $a_{\uparrow\downarrow} = -54.2 a_0$, where a_0 is the atomic Bohr radius [45]. With these specific parameters, the scattering length a_{--} has a minimum $-8.4 a_0$ for $\delta \approx 0$ and zero crossings at $\delta/\Omega \approx \pm 0.47$ (see Fig. 3). Because of an experimental rms magnetic field noise of 0.8(2) mG corresponding to 0.56 (14) kHz, we choose to work with $\Omega/2\pi \geq 7$ kHz in order to keep a good control of the parameter δ/Ω . For this value of Ω and $\delta/\Omega \approx 0.8$, the maximum absolute value of the three-body coupling constant is $|g_3|/\hbar = 3 \times 10^{-38} \text{ m}^6 \text{ s}^{-1}$. This value is larger by a factor of ~ 100 compared to the dominant three-body loss coefficient $K_3^{\downarrow\downarrow\downarrow}/6 \approx 3 \times 10^{-40} \text{ m}^6 \text{ s}^{-1}$ in our potassium mixtures [46]. The hyper-volume D for our parameters is thus essentially real with $|\Re(D)| \gg \Im(D)$. $|g_3|$ is also larger than the three-body coupling constant emerging from beyond mean-field effects [43] by a factor of ~ 50 and the latter is neglected in the present work.

The experiment starts with a quasipure Bose-Einstein condensate with $\sim 1.4 \times 10^5$ atoms in state $|\uparrow\rangle$ in a cigar-shaped trap with frequencies $(\omega_{\perp}, \omega_{\parallel})/2\pi = (300, 16.4)$ Hz. The condensate in the ground state is then prepared in an adiabatic passage, in which the rf detuning is swept from 7.5Ω to its final value δ . Its shape and duration of 0.4 ms are chosen in order to be adiabatic with respect to the internal-state dynamics but it is short as compared to $2\pi/\omega_{\perp}$. As a

consequence, the rf sweep is equivalent to a quench of the interaction parameters and it induces some dynamics of the cloud. In the longitudinal direction, the evolution is slow and we neglect it on the 15 ms timescale of our experiment [47]. We focus our analysis on the radial dynamics of the condensate in its central part where the 1D density n_{1D} is approximately constant.

In a first series of experiments, we chose parameters ($\Omega/2\pi = 25.4$ kHz and $\delta/\Omega > 0.8$) for which, we observe small amplitude breathing oscillations of the radial size (see inset in Fig. 1) [48]. On the 15 ms timescale of the experiment, we find that the atom number is reduced by a maximum of 20%. Interestingly, we measure a reduction of the breathing mode frequency when δ/Ω is decreased from 1.4 to 0.8 (see Fig. 1), whereas, in the absence of three-body interaction, it is expected to be constant and equal to $2\omega_{\perp}$ independently of the two-body contact interaction due to a hidden symmetry of the Hamiltonian under scale transformation [49–51].

Let us now compare the measured frequencies to theoretical expectations for a condensate for which the equation of state is given by Eq. (3). In a variational and scaling approach [52,53], the frequency of small [48] breathing oscillations writes

$$\omega_b = 2\omega_{\perp} \sqrt{1 + E_3/E_{\text{pot}}}, \quad (6)$$

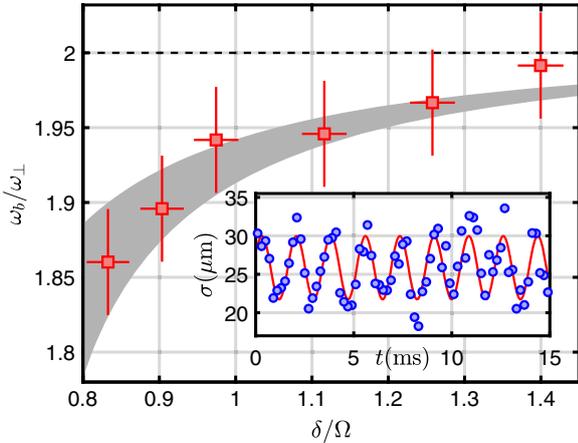


FIG. 1. Breathing frequency at Rabi frequency $\Omega = 25.4$ kHz as a function of the detuning δ/Ω . The points correspond to the experimental data. The vertical error bars correspond to a 1.5% uncertainty in the measured frequency. The horizontal error bars are linked to our 0.8(2) mG magnetic field fluctuations. The shaded area corresponds to the theoretical estimates for $2.3 \times 10^9 \text{ m}^{-1} < n_{1D} < 2.65 \times 10^9 \text{ m}^{-1}$ taking into account the uncertainty in the value of n_{1D} due to experimental fluctuations, losses, and uncertainty in the detection efficiency. Inset: radial breathing oscillations for $\delta/\Omega = 0.9$. The rms size σ of the gas is measured as a function of the wait time t after 9.7 ms of free expansion, including an initial 0.4 ms rf sweep back to $\delta = 7.5 \Omega$.

where $E_3 < 0$ and E_{pot} are the three-body and potential energy in the equilibrium state. We calculate these two quantities from imaginary time evolution of a 2D extended Gross-Pitaevskii equation [54] and deduce the value of the breathing mode frequency (see Fig. 1). Within the experimental error bars, we find a perfect agreement with the measured values and we thus attribute the breathing mode frequency downshift to the attractive three-body interactions. Note that in the explored range, decreasing δ/Ω corresponds both to a decrease of g_2 and to an increase of $|g_3|$.

By lowering further the value of δ/Ω , we observe large losses that rapidly occur around ~ 1 ms after the beginning of the rf sweep, i.e., when the condensate has shrunk to a high density. In order to study this behavior, we wait 3 ms after the sweep and plot the remaining central 1D density as a function of δ/Ω for two values of Ω [see Fig. 2(a)]. At large values of $|\delta/\Omega|$, there are few losses and the 1D density is close to the initial one. On the contrary, for low values of $|\delta/\Omega|$, the 1D density is observed to be reduced by a factor of ~ 3 . Interestingly, the losses appear sharply as a function of $|\delta/\Omega|$ and we interpret this behavior as originating from a radial collapse of the cloud, which is certainly expected for $\delta/\Omega \approx 0$ where the minimum scattering length is $a_{--} = -8.4 a_0 < 0$. In the following, we do not try to precisely understand the collapse dynamics, including the role of losses, but rather focus our analysis on the threshold values δ_c/Ω below which a collapse occurs.

The collapse thresholds δ_c/Ω are plotted as a function of Ω in Fig. 3 and are found to be larger for lower values of Ω . Such a behavior reveals the role of three-body interactions in the radial collapse as g_2 solely depends on the ratio δ/Ω . Moreover, for $\Omega/2\pi < 20$ kHz the collapse is observed for $\delta/\Omega > 0.47$, which corresponds to a positive scattering

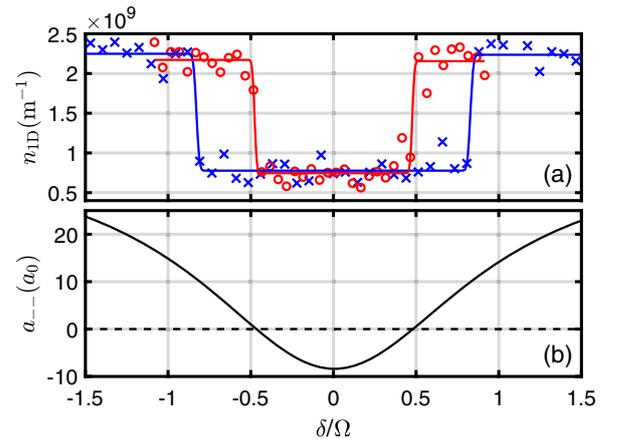


FIG. 2. (a) Remaining 1D density as a function of the final detuning δ/Ω . \times : $\Omega/2\pi = 7.6$ kHz, \circ : $\Omega/2\pi = 29.8$ kHz. The curves are fits with the function $n_{\text{coll}} + (n_{1D} - n_{\text{coll}})\text{erf}[(|\delta| - \delta_c)/(W\Omega)]$, where n_{coll} , n_{1D} , W , and δ_c are free parameters. (b) Scattering length a_{--} as a function of δ/Ω .

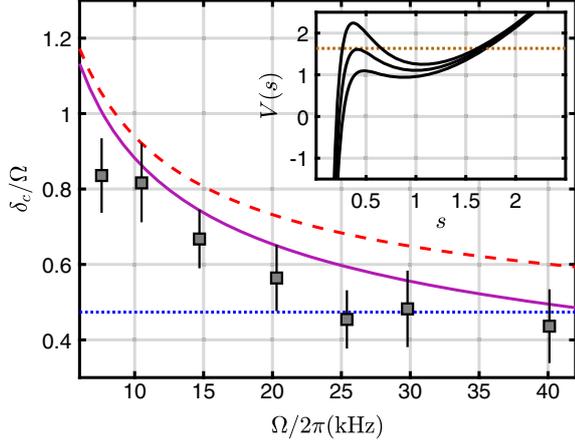


FIG. 3. Collapse threshold as a function of the Rabi frequency $\Omega/2\pi$. The squares are the experimental data. The dotted blue line at $\delta_c/\Omega = 0.47$ corresponds to $a_{--} = 0$. The solid purple (dashed red) line corresponds to the theoretical prediction taking into account the mean-field effect on the internal state with (and without) the renormalization of the two-body interaction (see text). Inset: Effective potentials V for $\Omega/2\pi = 30$ kHz for $\delta/\Omega = 0.54$ (top curve), $\delta/\Omega = 0.49 = \delta_c/\Omega$ (middle curve), $\delta/\Omega = 0.44$ (bottom curve). The dotted line is the initial energy for the middle curve corresponding to $s(0) = 1.7$.

length a_{--} , i.e., repulsive two-body interactions [see Fig. 2(b)]. As an example, for $\Omega = 7.6$ kHz, $\delta_c/\Omega = 0.82(5)$ corresponds to $a_{--} \approx 10 a_0$ (see Fig. 2).

In order to quantitatively interpret our findings, we develop a model that assumes a Gaussian radial density profile at all times t with a rms radius $\sqrt{\langle r^2 \rangle} = s(t)a_{\text{ho}}$, where $a_{\text{ho}} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ corresponds to the noninteracting equilibrium rms radius. The energy density is then calculated upon local minimization with respect to internal state according to Eq. (1). After integration over the radial profile, the total energy E can then be cast as

$$\frac{E}{N\hbar\omega_{\perp}} = \frac{\epsilon_{-}}{\hbar\omega_{\perp}} + \frac{\dot{s}^2}{2} + \underbrace{\frac{s^2}{2} + \frac{1}{2s^2} + \frac{E_{\text{int}}(s)}{N\hbar\omega_{\perp}}}_{V(s)}, \quad (7)$$

where the terms on the right-hand side respectively correspond to the single particle internal energy, the kinetic energy associated to particle flow, the harmonic potential energy, the zero-point kinetic energy [55], and the interaction energy [57]. In the limit $\gamma \ll 1$, the latter can be calculated from Eq. (3) and amounts to $[E_{\text{int}}(s)/N] = [(g_2 n_{1D})/(4\pi a_{\text{oh}}^2 s^2)] + [(g_3 n_{1D}^2)/(12\pi^2 a_{\text{oh}}^4 s^4)]$. Since we only see important losses when the collapse has occurred, we do not include a loss term in the initial dynamics. In our framework, the latter reduces to the one of a classical particle in an effective potential $V(s)$ given by the three last terms in Eq. (7).

Since $\gamma \sim 1$ for some of our parameters, we rely on numerical calculations of $E_{\text{int}}(s)$ [57]. Typical effective potentials $V(s)$ close to the collapse threshold are plotted in the inset of Fig. 3. They exhibit a local maximum for low value of s that may be overcome or not depending on the initial energy, which is given by the initial rms size of the cloud. The latter is numerically computed [54] to $1.1 \mu\text{m}$ corresponding to $s(0) = 1.7$. For each value of Ω , we find the collapse threshold δ_c/Ω for which the local maximum of $V(s)$ is equal to $V[s(0)]$. This model for the collapse threshold (dashed curve in Fig. 3) captures the trend of the threshold values δ_c/Ω but slightly overestimates them. As an improvement to our model, we take into account the main beyond mean-field two-body correction to a_{--} (see the supplemental material of [43]). A better match to the experimental data is then obtained (solid line in Fig. 3), strengthening our interpretation [58].

To conclude, we have shown that a Rabi-coupled two component Bose-Einstein condensate with different scattering lengths offers a way to induce an attractive three-body term in the equation of state. The latter appears, at the mean-field level, because of a density-dependent detuning of the drive. It is tunable through the Rabi-coupling strength and can be adjusted to play an important role in the condensate dynamics. The attractive three-body energy can also be made much larger than the energy associated with the three-body loss rate. Experimentally, we observe two striking consequences of the attractive three-body term: a shift of the radial breathing mode frequency and radial collapses despite repulsive two-body couplings $g_2 > 0$. Our findings can be easily generalized to the asymmetric case ($a_{\uparrow\uparrow} \neq a_{\downarrow\downarrow}$). In this case, there is experimentally much more freedom in the choice of the atomic species, of the specific spin states, and of the magnetic field such that optimal conditions, i.e., a large three-body coupling constant and a low three-body loss rate, could be found.

The presence of three-body interactions modifies the thermodynamical properties of quantum Bose gases with consequences such as a change of the condensation temperature [59] or frequency shifts of low energy excitation modes [19]. Stronger excitations such as vortices [60], dark solitons [15], or dispersive shock waves [17,18] will also have modified properties. In particular, the additional nonlinear term breaks the integrability in the soliton dynamics [61].

Finally, we discuss the possibility of creating a repulsive three-body term with a condensate in an internal state that maximizes the energy [Eq. (1)] [62]. In this case $\theta \in [-\pi, 0]$ and g_3 is positive. Unfortunately, a condensate in such a state suffers from large two-body losses [39]. The two-body loss rate is $\Gamma \sim \hbar n \bar{a}^2 / ml_{\Omega}$, where $\bar{a} = (a_{\uparrow\uparrow} - a_{\downarrow\downarrow})/2$ and $l_{\Omega} = \sqrt{\hbar/m\Omega}$ is a length scale associated with Ω . Reducing the value of Ω would open a window where the repulsive three-body energy $E_3 \propto g_3 n^2$ could dominate over the two-body loss rate for $E_3/\hbar\Gamma \propto nl_{\Omega}^3 \gg 1$.

Repulsive three-body interactions produced in this manner would offer an alternative way to create gaseous droplets compared to beyond mean-field effects [63–68]. Quantum droplets [69] and few-body bound states [70,71] were recently discussed in the case of 1D bosons with repulsive three-body interactions. With such nonlinear interactions, Bose-Einstein condensation in a harmonic trap is also predicted to become first order [72].

We thank D. Clément, D. Petrov, S. Kokkelmans, L. Tarruell, C. Westbrook, and W. Zwerger for useful discussions. This research has been supported by CNRS, Ministère de l’Enseignement Supérieur et de la Recherche, Labex PALM, Région Ile-de-France in the framework of Domaine d’Intérêt Majeur Sirteq, Paris-Saclay in the framework of IQUPS, ANR Droplets (19-CE30-0003), and Simons Foundation (Grant No. 563916: localization of waves).

*Corresponding author.

thomas.bourdel@institutoptique.fr

- [1] L. Pitaevskii and S. Stringari, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity* (Oxford University Press, New York, 2003).
- [2] C. Chin, R. Grimm, P. Julienne, and E. Tiesinga, Feshbach resonances in ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 1225 (2010).
- [3] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, Many-body physics with ultracold gases, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 885 (2008).
- [4] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. W. Hänsch, and I. Bloch, Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms, *Nature (London)* **415**, 39 (2002).
- [5] C. A. Regal, M. Greiner, and D. S. Jin, Observation of Resonance Condensation of Fermionic Atom Pairs, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 040403 (2004).
- [6] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, Condensation of Pairs of Fermionic Atoms near a Feshbach Resonance, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [7] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120401 (2004).
- [8] T. Bourdel, L. Khaykovich, J. Cubizolles, J. Zhang, F. Chevy, M. Teichmann, L. Tarruell, S. J. J. M. F. Kokkelmans, and C. Salomon, Experimental Study of the BEC-BCS Crossover Region in Lithium 6, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 050401 (2004).
- [9] W. Zwerger, Strongly Interacting fermi gases, *Proceedings of the International School of Physics “Enrico Fermi”*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, S. Stringari, and G. Roati (IOS Press, Amsterdam, SIF Bologna, 2016), pp. 63.
- [10] T. T. Wu, Ground state of a Bose system of hard spheres, *Phys. Rev.* **115**, 1390 (1959).
- [11] T. Köhler, Three-Body Problem in a Dilute Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 210404 (2002).
- [12] H. W. Hammer, A. Nogga, and A. Schwenk, Colloquium: Three-body forces: From cold atoms to nuclei, *Rev. Mod. Phys.* **85**, 197 (2013).
- [13] A. Gammal, T. Frederico, L. Tomio, and P. Chomaz, Atomic Bose-Einstein condensation with three-body interactions and collective excitations, *J. Phys. B* **33**, 4053 (2000).
- [14] A. Gammal, T. Frederico, L. Tomio, and F. K. Abdullaev, Stability analysis of the D-dimensional nonlinear Schrödinger equation with trap and two- and three-body interactions, *Phys. Lett. A* **267**, 305 (2000).
- [15] A. M. Kamchatnov and M. Salerno, Dark soliton oscillations in Bose-Einstein condensates with multi-body interactions, *J. Phys. B* **42**, 185303 (2009).
- [16] V. R. Kumar, R. Radha, and M. Wadati, Phase engineering and solitons of Bose-Einstein condensates with two- and three-body interactions, *J. Phys. Soc. Jpn.* **79**, 074005 (2010).
- [17] M. Crosta, S. Trillo, and A. Fratolocci, Crossover dynamics of dispersive shocks in Bose-Einstein condensates characterized by two and three-body interactions, *Phys. Rev. A* **85**, 043607 (2012).
- [18] M. Crosta, S. Trillo, and A. Fratolocci, The Whitham approach to dispersive shocks in systems with cubic-quintic nonlinearities, *New J. Phys.* **14**, 093019 (2012).
- [19] H. Al-Jibbouri, I. Vidanovic, A. Balaz, and A. Pelster, Geometric resonances in Bose-Einstein condensates with two- and three-body interactions, *J. Phys. B* **46**, 065303 (2013).
- [20] R. Killip, T. Oh, O. Pocovnicu, and M. Visan, Solitons and scattering for the cubic-quintic nonlinear Schrödinger equation on \mathbb{R}^3 , *Arch. Ration. Mech. Anal.* **225**, 469 (2017).
- [21] K. G. Zlochastiev, Stability and Metastability of Trapless Bose-Einstein Condensates and Quantum Liquids, *Z. Naturforsch. A* **72**, 677 (2017).
- [22] A. Bulgac, Dilute Quantum Droplets, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 050402 (2002).
- [23] P. M. A. Mestrom, V. E. Colussi, T. Secker, G. P. Groeneveld, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, van der Waals Universality near a Quantum Tricritical Point, *Phys. Rev. Lett.* **124**, 143401 (2020).
- [24] S. Tan, Three-boson problem at low energy and implications for dilute Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. A* **78**, 013636 (2008).
- [25] S. Zhu and S. Tan, Three-body scattering hypervolumes of particles with short-range interactions, [arXiv:1710.04147](https://arxiv.org/abs/1710.04147).
- [26] P. M. A. Mestrom, V. E. Colussi, T. Secker, and S. J. J. M. F. Kokkelmans, Scattering hypervolume for ultracold bosons from weak to strong interactions, *Phys. Rev. A* **100**, 050702(R) (2019).
- [27] J. P. D’Incao, Few-body physics in resonantly interacting ultracold quantum gases, *J. Phys. B* **51**, 043001 (2018).
- [28] W. Zwerger, Quantum-unbinding near a zero temperature liquid-gas transition, *J. Stat. Mech.* (2019) 103104.
- [29] Z. Shotan, O. Machtay, S. Kokkelmans, and L. Khaykovich, Three-Body Recombination at Vanishing Scattering Lengths in an Ultracold Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **113**, 053202 (2014).
- [30] T. Kraemer, M. Mark, P. Waldburger, J. G. Danzl, C. Chin, B. Engeser, A. D. Lange, K. Pilch, A. Jaakkola, H.-C. Nägerl, and R. Grimm, Evidence for Efimov quantum states

- in an ultracold gas of caesium atoms, *Nature (London)* **440**, 315 (2006).
- [31] P. Naidon and S. Endo, Efimov physics: A review, *Rep. Prog. Phys.* **80**, 056001 (2017).
- [32] A. J. Daley, J. M. Taylor, S. Diehl, M. Baranov, and P. Zoller, Atomic Three-Body Loss as a Dynamical Three-Body Interaction, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 040402 (2009).
- [33] M. J. Mark, S. Flannigan, F. Meinert, J. P. D’Incao, A. J. Daley, and H.-C. Nägerl, Interplay between coherent and dissipative dynamics of bosonic doublons in an optical lattice, *Phys. Rev. Research* **2**, 043050 (2020).
- [34] D. S. Petrov, Elastic multibody interactions on a lattice, *Phys. Rev. A* **90**, 021601(R) (2014).
- [35] A. Muryshv, G. V. Shlyapnikov, W. Ertmer, K. Sengstock, and M. Lewenstein, Dynamics of Dark Solitons in Elongated Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 110401 (2002).
- [36] I. E. Mazets, T. Schumm, and J. Schmiedmayer, Breakdown of Integrability in a Quasi-1D Ultracold Bosonic Gas, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210403 (2008).
- [37] K. Merloti, R. Dubessy, L. Longchambon, M. Olshanii, and H. Perrin, Breakdown of scale invariance in a quasi-two-dimensional Bose gas due to the presence of the third dimension, *Phys. Rev. A* **88**, 061603(R) (2013).
- [38] C. P. Search and P. R. Berman, Manipulating the speed of sound in a two-component Bose-Einstein condensate, *Phys. Rev. A* **63**, 043612 (2001).
- [39] J. Sanz, A. Frölian, C. S. Chisholm, C. R. Cabrera, and L. Tarruell, Interaction Control and Bright Solitons in Coherently-Coupled Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **128**, 013201 (2022).
- [40] The same differential mean-field shift is at the origin of the blockade of internal Josephson oscillations [41].
- [41] T. Zibold, E. Nicklas, C. Gross, and M. K. Oberthaler, Classical Bifurcation at the Transition from Rabi to Josephson Dynamics, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 204101 (2010).
- [42] D. S. Petrov, Three-Body Interacting Bosons in Free Space, *Phys. Rev. Lett.* **112**, 103201 (2014).
- [43] L. Lavoine, A. Hammond, A. Recati, D. Petrov, and T. Bourdel, Beyond-Mean-Field Effects in Rabi-Coupled Two-Component Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **127**, 203402 (2021).
- [44] We have checked that the slight imbalance between $a_{\uparrow\uparrow}$ and $a_{\downarrow\downarrow}$ does not quantitatively play a role in our experimental findings and we simply consider the average value in the analysis.
- [45] E. Tiemann, P. Gersema, K. K. Voges, T. Hartmann, A. Zenesini, and S. Ospelkaus, Beyond Born-Oppenheimer approximation in ultracold atomic collisions, *Phys. Rev. Research* **2**, 013366 (2020).
- [46] P. Cheiney, C. R. Cabrera, J. Sanz, B. Naylor, L. Tanzi, and L. Tarruell, Bright Soliton to Quantum Droplet Transition in a Mixture of Bose-Einstein Condensates, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 135301 (2018).
- [47] Actually, we adjust the longitudinal trapping frequency after the rf sweep in order to detect no longitudinal dynamics.
- [48] We have reduced the oscillation amplitude by applying a longer rf sweep and found no change in the breathing mode frequency.
- [49] Y. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov, Evolution of a Bose-condensed gas under variations of the confining potential, *Phys. Rev. A* **54**, R1753 (1996).
- [50] L. P. Pitaevskii and A. Rosch, Breathing modes and hidden symmetry of trapped atoms in two dimensions, *Phys. Rev. A* **55**, R853 (1997).
- [51] F. Chevy, V. Bretin, P. Rosenbusch, K. W. Madison, and J. Dalibard, Transverse Breathing Mode of an Elongated Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 250402 (2002).
- [52] C. Pethick and H. Smith, *Bose-Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 2008).
- [53] N. B. Jørgensen, G. M. Bruun, and J. J. Arlt, Dilute Fluid Governed by Quantum Fluctuations, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 173403 (2018).
- [54] X. Antoine and R. Duboscq, GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross-Pitaevskii equations I: Computation of stationary solutions, *Comput. Phys. Commun.* **185**, 2969 (2014).
- [55] We have checked that the energy associated with the gradient of θ [56] adds a negligible kinetic energy in our experimental configuration. This finding justifies our local density approximation in the calculation of the internal state.
- [56] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, M. J. Holland, J. E. Williams, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, Watching a Superfluid Untwist Itself: Recurrence of Rabi Oscillations in a Bose-Einstein Condensate, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3358 (1999).
- [57] $E_{\text{int}} = \int \min_{\theta}(E_{MF}/N)n(\mathbf{r})d^3\mathbf{r} - N\epsilon_{-}$, where E_{MF}/N is defined in Eq. (1).
- [58] Strictly, higher order beyond mean-field corrections will make $V(s)$ increase at low s and prevent the collapse. However, this would occur at such high densities that losses would occur anyway before reaching such a small size, leaving our conclusion unchanged.
- [59] R. P. Smith, R. L. D. Campbell, N. Tammuz, and Z. Hadzibabic, Effects of Interactions on the Critical Temperature of a Trapped Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 250403 (2011).
- [60] T. Mithun, K. Porsezian, and B. Dey, Vortex dynamics in cubic-quintic Bose-Einstein condensates, *Phys. Rev. E* **88**, 012904 (2013).
- [61] Y. Kivshar and G. Agrawal, *Optical Solitons* (Academic Press, San Diego 2003).
- [62] At the mean-field level, this solution is a stable fixed point of the internal state dynamics for $\gamma < 1$ [41].
- [63] D. S. Petrov, Quantum Mechanical Stabilization of a Collapsing Bose-Bose Mixture, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 155302 (2015).
- [64] I. Ferrier-Barbut, H. Kadau, M. Schmitt, M. Wenzel, and T. Pfau, Observation of Quantum Droplets in a Strongly Dipolar Bose Gas, *Phys. Rev. Lett.* **116**, 215301 (2016).
- [65] L. Chomaz, S. Baier, D. Petter, M. J. Mark, F. Wächtler, L. Santos, and F. Ferlaino, Quantum-Fluctuation-Driven Crossover from a Dilute Bose-Einstein Condensate to a Macrodroplet in a Dipolar Quantum Fluid, *Phys. Rev. X* **6**, 041039 (2016).

- [66] C. R. Cabrera, L. Tanzi, J. Sanz, B. Naylor, P. Thomas, P. Cheiney, and L. Tarruell, Quantum liquid droplets in a mixture of Bose-Einstein condensates, *Science* **359**, 301 (2018).
- [67] G. Semeghini, G. Ferioli, L. Masi, C. Mazzinghi, L. Wolswijk, F. Minardi, M. Modugno, G. Modugno, M. Inguscio, and M. Fattori, Self-Bound Quantum Droplets of Atomic Mixtures in Free Space, *Phys. Rev. Lett.* **120**, 235301 (2018).
- [68] Z. Guo, F. Jia, L. Li, Y. Ma, J. M. Hutson, X. Cui, and D. Wang, Lee-Huang-Yang effects in the ultracold mixture of ^{23}Na and ^{87}Rb with attractive interspecies interactions, *Phys. Rev. Research* **3**, 033247 (2021).
- [69] Y. Sekino and Y. Nishida, Quantum droplet of one-dimensional bosons with a three-body attraction, *Phys. Rev. A* **97**, 011602(R) (2018).
- [70] Y. Nishida, Universal bound states of one-dimensional bosons with two- and three-body attractions, *Phys. Rev. A* **97**, 061603(R) (2018).
- [71] G. Guijarro, A. Pricoupenko, G. E. Astrakharchik, J. Boronat, and D. S. Petrov, One-dimensional three-boson problem with two- and three-body interactions, *Phys. Rev. A* **97**, 061605(R) (2018).
- [72] H. Hu, Z.-Q. Yu, J. Wang, and X.-J. Liu, First-order Bose-Einstein condensation with three-body interacting bosons, *Phys. Rev. A* **104**, 043301 (2021).

Titre : Mélange de spin dans un condensat de Bose-Einstein : Gouttelette quantique et couplage cohérent.

Mots clés : Gaz quantiques, Mélanges de spin, Couplage cohérent

Résumé : Le degré élevé de contrôle des atomes ultra-froids a fait de ces systèmes des candidats idéaux pour identifier et mesurer le rôle des fluctuations quantiques. Pour un condensat de Bose-Einstein, les fluctuations quantiques causent la déplétion quantique et conduisent à la correction de Lee-Huang-Yang (LHY) dans l'équation d'état de champ moyen. Récemment, la formation de gouttelette quantique à l'aide de mélange de condensats a été théoriquement prédit et observé expérimentalement. Cette thèse de doctorat s'inscrit dans la continuité de ces études. Nous avons théoriquement étudié l'existence de gouttelette quantique dans le croisement unidimensionnel à tri-dimensionnel pour le terme LHY. Expérimentalement, nous utilisons un gaz quantique bosonique de potassium 39 qui offre la possibilité de modifier les interactions interatomiques à l'aide de résonances de Feshbach. Ce manuscrit présente deux

études expérimentales où nous avons exploré les mélanges de spin couplés de manière cohérente dont les interactions intra spin sont répulsives et inter spin attractives. La première analyse montre la possibilité d'engendrer une interaction attractive à trois corps importante ayant des conséquences importantes sur la dynamique du système. Cette interaction provient de l'affectation du degré de liberté du spineur par l'interaction à deux corps de champ-moyen. Nous étudions finalement dans une configuration expérimentale où les interactions de champ moyen sont annulées, l'équation d'état au-delà du champ moyen d'un condensat à deux composantes couplées de manière cohérente. Nous montrons que la présence du couplage change la dépendance en densité du terme des fluctuations quantiques par rapport au terme de LHY dans le cas non couplé.

Title : Spin mixture in Bose-Einstein condensate : Quantum droplet and coherent coupling.

Keywords : Quantum gases, Spin mixtures, Coherent coupling

Abstract : The high degree of control of ultracold atoms has made these systems ideal candidates to identify and measure the role of quantum fluctuations. For a Bose-Einstein condensate, quantum fluctuations cause quantum depletion and lead to the Lee-Huang-Yang (LHY) correction in the mean field equation of state. Recently, quantum droplets formation using spin mixtures has been theoretically predicted and observed experimentally. This doctoral thesis is part of these studies. We have theoretically studied the existence of quantum droplets in the beyond-mean-field crossover from one dimension to three dimensions. Experimentally, we use a quantum bosonic gas of potassium 39 which offers the possibility to tune interatomic interactions using Feshbach resonances. This manuscript

presents two experimental studies where we explored coherently coupled spin mixtures whose intra spin interactions are repulsive and inter spin attractive. The first analysis shows the possibility of engineering an attractive three-body interaction with important consequences on the system dynamics. It originates from the spinor degree of freedom that is affected by a two-body mean-field shift of the driven transition frequency. We finally study in an experimental configuration where the mean field interactions are canceled, the beyond-mean-field equation of state of a coherently coupled two-component condensates. We show that the presence of the coupling changes the density dependence of the quantum fluctuations term with respect to the LHY term in the uncoupled case.