

Construire avec les surfaces développables : Géométrie et mécanique du rapiéçage courbe

Nicolas Leduc

▶ **To cite this version:**

Nicolas Leduc. Construire avec les surfaces développables : Géométrie et mécanique du rapiéçage courbe. Structures. École des Ponts ParisTech, 2023. Français. ⟨NNT : 2023ENPC0005⟩. ⟨tel-04085132⟩

HAL Id: tel-04085132

https://pastel.hal.science/tel-04085132v1

Submitted on 28 Apr 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

École des Ponts ParisTech

THÈSE DE DOCTORAT
de l'École des Ponts ParisTech

CONSTRUIRE AVEC LES SURFACES DEVELOPPABLES
Géométrie et mécanique du rapiéçage courbe

École doctorale N° 531 Sciences, Ingénierie et Environnement

Structures et Matériaux

Thèse préparée au sein du laboratoire Navier (UMR 8205),
Equipe de recherche MSA (Matériaux et Structures Architecturées)

Thèse soutenue le 30 janvier 2023, par
Nicolas LEDUC

Composition du jury :

Pierre, LATTEUR Prof, UCLouvain	*Président*
Benoît, ROMAN Prof, ESPCI	*Rapporteur*
Julian, LIENHARD Prof, Kassel	*Rapporteur*
Stéphanie, HAHMANN Prof, ENSIMAG	*Examinatrice*
Laurent, HAUSWIRTH Prof, UGE	*Examinateur, conseiller scientifique*
Cyril, DOUTHE Dr, UGE	*Examinateur, conseiller scientifique*
Olivier, BAVEREL Prof, ENSA Grenoble	*Examinateur, directeur de thèse*
Bernard, VAUDEVILLE T/E/S/S	*Invité*
Karine, LEEMPOELS Viry	*Invitée*

THÈSE

en vue de l'obtention du grade de

Docteur de l'Ecole des Ponts ParisTech

École Doctorale n°531 Sciences, Ingénierie et Environnement (SIE)
Discipline : **Structures et Matériaux**

Laboratoire Navier
Équipe : **Matériaux et Structures Architecturées (MSA)**

Présentée et soutenue publiquement le 30 janvier 2023
par **Nicolas LEDUC**

Construire avec les surfaces développables

Géométrie et mécanique du rapiéçage courbe

Convention CIFRE 2016/0653

Encadrement :

M.	Olivier Baverel[a,b]	Directeur
M.	Cyril Douthe[a]	Conseiller scientifique
M.	Laurent Hauswirth[c]	Conseiller scientifique
M.	Simon Aubry[d]	Responsable scientifique
M.	Karine Leempoels[e]	Responsable scientifique

(a) Laboratoire Navier, Ecole des Ponts ParisTech
6/8 avenue Blaise Pascal, Champs-sur-Marne, 77455 Marne la Vallée, France

(b) École Nationale Supérieure d'Architecture de Grenoble
60 avenue de Constantine, 38000 Grenoble, France

(c) Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA), Université Gustave Eiffel
5 boulevard Descartes, Champs-sur-Marne, 77455 Marne la Vallée, France

(d) T/E/S/S atelier d'ingénierie
7 Cité Paradis, 75010 Paris, France

(e) Viry
5, ZI de la Plaine - Eloyes, 88214 Remiremont Cedex, France

Remerciements

A Jean-François Caron et Olivier Baverel, mes directeurs de thèse successifs. Jean-François, pour sa confiance et son accueil au sein de l'équipe MSA du laboratoire Navier, pour ses précieux conseils qui ont orienté la thèse dans une direction fertile. Olivier, pour la richesse des discussions alimentées par son enthousiasme toujours en ébullition, pour sa capacité à canaliser le foisonnement des réflexions vers l'idée la plus porteuse.

A Cyril Douthe, mon conseiller scientifique « méca », pour sa disponibilité sans faille, sa passion communicative de l'ingénierie des structures, pour le temps passé à la relecture du mémoire qui a bénéficié de ses nombreux apports.

A Laurent Hauswirth, mon conseiller scientifique « math », pour ses cours au sein du laboratoire (et ses nombreux cours particuliers !), pour son accompagnement rigoureux dans le monde des mathématiques.

A Bernard Vaudeville et Simon Aubry, responsables scientifiques de T/E/S/S, et à travers eux toute l'équipe du bureau (Tom Gray, Florian Kobryn, Lorenzo Ponzo, Jérôme Papaphotiou, Ruby Trinh, Africa Garcia...), pour leur implication qui a permis de cadrer, contextualiser et finalement donner du sens à ce travail de recherche.

A Karine Leempoels et Jean-Pierre Tahay, responsables scientifiques de Viry, et à travers eux, toute l'équipe de l'entreprise (Dimitri Durand, Sébastien Frémiot...), pour l'accueil et l'expérience partagée dans leurs ateliers pour fabriquer les prototypes, mais également pour l'intérêt sincère, dans toutes les strates de l'entreprise vis-à-vis de ce travail de thèse.

A Benoît Roman et Julian Lienhard, rapporteurs, ainsi que Stéphanie Hahmann et Pierre Latteur, membres du jury, pour l'intérêt que vous avez porté à ce travail et pour la richesse des échanges qui ont animé la soutenance.

A l'ensemble des équipes du laboratoire Navier, à Arthur Lebée, pour ses conseils sur la théorie des plaques, Marie-Françoise Kaspi et à tous les doctorants croisés pendant ces années, en particulier Nicolas Ducoulombier, Robin Oval, Romain Boulaud, Kateryna Kuzmenko, Nicolas Montagne et Xavier Tellier.

A Alain Leduc, Jean-Marie Delarue et Jacques Raynaud pour m'avoir guidé dans l'apprentissage de la géométrie.

A Mathieu Fauvel pour le support technique sur Latex.

A Colette Leduc et Hubert Laharie pour leur relecture opiniâtre.

A Claire, Léonie et Félix pour tout le reste.

Table des matières

Introduction **1**

1 Géométrie constructive et structurale : État de l'art **5**
1.1 Petit précis illustré de géométrie différentielle . . . 7
1.1.1 Géométrie différentielle des courbes . . . 8
1.1.2 Géométrie différentielle des surfaces . . . 12
1.2 Champs d'études des surfaces développables . . . 25
1.2.1 Éclairages historiques . . . 25
1.2.2 Développements contemporains . . . 26
1.2.3 Cas d'étude : les pavillons de la Tour Eiffel . . . 29
1.3 Morphologie structurale des surfaces développables . . . 33
1.3.1 Forme . . . 34
1.3.2 Force . . . 42
1.3.3 Structure . . . 44
1.3.4 Matériau . . . 45
1.3.5 Technologie . . . 49
1.4 Processus de conception . . . 55
1.4.1 Rationalisation géométrique . . . 55
1.4.2 Morphogenèse . . . 56
1.4.3 Outils de conception . . . 64
1.5 Prototype Metal Euplectella Folie . . . 65
1.5.1 Contexte et objectifs . . . 65
1.5.2 État de l'art . . . 66
1.5.3 Morphogenèse . . . 69
1.5.4 Mise au point technologique . . . 75
1.5.5 Fabrication et montage . . . 80
1.5.6 Prolongements . . . 85
1.6 Conclusion . . . 86

2 Géométrie du rapiéçage courbe **89**
2.1 État de l'art . . . 91
2.2 Couplage géométrique du rapiéçage courbe . . . 95
2.2.1 Géométrie différentielle du pli courbe . . . 95
2.2.2 Géométrie différentielle du rapiéçage courbe . . . 109
2.3 Courbures gaussienne et moyenne du rapiéçage courbe . . . 124
2.3.1 Formule de Steiner . . . 124
2.3.2 Interprétation des résultats . . . 129

2.4 dForms à courbure gaussienne constante . . . 131
2.4.1 Considérations topologiques . . . 131
2.4.2 dForms à patrons de découpe symétriques . . . 134
2.4.3 dForms à patrons de découpe asymétriques . . . 144
2.5 Conclusion . . . 172

3 Mécanique du rapiéçage courbe : Etude d'une structure spatiale à modules de cisaillement développables 175
3.1 Conception et fabrication du prototype *SSDSC* . . . 176
3.1.1 État de l'art . . . 176
3.1.2 Objectifs du prototype . . . 180
3.1.3 Agencement spatial de la grille modulaire . . . 182
3.1.4 Etudes à l'échelle du module . . . 184
3.1.5 Optimisation de la structure . . . 196
3.1.6 Fabrication et montage . . . 202
3.1.7 Mesures expérimentales . . . 211
3.1.8 Conclusion . . . 218
3.2 Modèle équivalent de plaque épaisse . . . 220
3.2.1 État de l'art . . . 220
3.2.2 Principes d'homogénéisation . . . 223
3.2.3 Contribution des membrures . . . 231
3.2.4 Contribution des tétraèdres . . . 270
3.2.5 Composition des raideurs . . . 289
3.2.6 Comparaison du modèle équivalent et du modèle complet . . . 292
3.2.7 Conclusion . . . 298
3.3 Optimisation et pré-dimensionnement pour une structure à grande échelle . . . 299
3.3.1 Stratégie d'optimisation . . . 299
3.3.2 Comparaison des approches globales et séquentielle . . . 300
3.3.3 Application à une structure en porte-à-faux . . . 302
3.3.4 Conclusion . . . 312

Conclusion 315

A Tableaux de cas du rapiéçage courbe 321

Table des figures 339

Liste des tableaux 348

Bibliographie 351

Introduction

La recta es del hombre ;
La curva es de Dios.

Antoni Gaudì

Si la courbe est l'apanage de Dieu, comme l'affirme Antoni Gaudì, l'architecte catalan incarne alors la figure du Titan Prométhée en dérobant dans le « grand livre de la Nature » [1] les formes ondulantes de l'Art Nouveau barcelonais. Quand il s'agit de construire, Gaudì reprend sa condition humaine en introduisant presque systématiquement la droite dans la description de ses ouvrages : il s'appuie sur une formulation mathématique basée sur les surfaces réglées qui permet à la fois de communiquer sans ambiguïté la géométrie des édifices aux entreprises, mais surtout d'y associer des processus constructifs [2–4] (Fig. 1). C'est bien l'alliance de la géométrie et de la technique qui permet de donner vie aux projets de l'architecte.



FIGURE 1 – Façonnage d'une maquette en plâtre grâce à un gabarit réglé
Extraits vidéo de l'exposition *Gaudì Unseen : Completing the Sagrada Famìlia* [5]

Cent ans plus tard, la démocratisation des outils numériques de modélisation tridimensionnelle entraîne une émergence croissante des formes libres architecturales. En 2004, douze architectes (Prométhée 2.0) prennent part à l'exposition *Architectures non standard* au Centre Pompidou [6] et affichent des projets d'architecture virtuelle aux surfaces courbes et immatérielles. La question constructive de ces visions prospectives se pose à nouveau et la réponse, quoique de même nature qu'un siècle plus tôt, est d'une autre ampleur. La même année est crée l'unité de recherche *Applied Geometry* [7] à l'université technique de Vienne en Autriche, au sein de laquelle émerge le champ d'étude *Architectural Geometry* [8] qui s'intéresse à la rationalisation constructive d'enveloppes et structures à géométrie complexe. Une communauté

de mathématiciens, infographistes, architectes, ingénieurs se constitue et produit une recherche active qu'elle partage dans des conférences comme *Fabricate* [9], *SIGGRAPH* [10] ou encore *AAG* [11]. Basée sur la géométrie différentielle (discrète) et sur l'optimisation numérique, cette discipline se fonde sur la connaissance de la géométrie des courbes et des surfaces pour les traduire en propriétés constructives.

Il serait toutefois simplificateur de réduire le travail de Gaudì, comme celui d'architectes contemporains de formes complexes à une approche purement plastique. Il est bien connu que l'architecte de la Sagrada Famìlia a su tirer parti de formes funiculaires pour améliorer l'efficacité de ses structures et les exemples de constructions aux morphologies sophistiquées motivées par leurs performances mécaniques ne manquent pas (Fig. 2). La malléabilité des formes complexes peut aussi être mise à contribution pour améliorer les performances environnementales de l'enveloppe par des dispositifs de protection [12] ou de captation solaire [13].



(a) Viaduc dell'Industria
Sergio Musmeci (Italie)

(b) Passerelle Trumpf
Schlaich Bergermann & Partners (Allemagne)

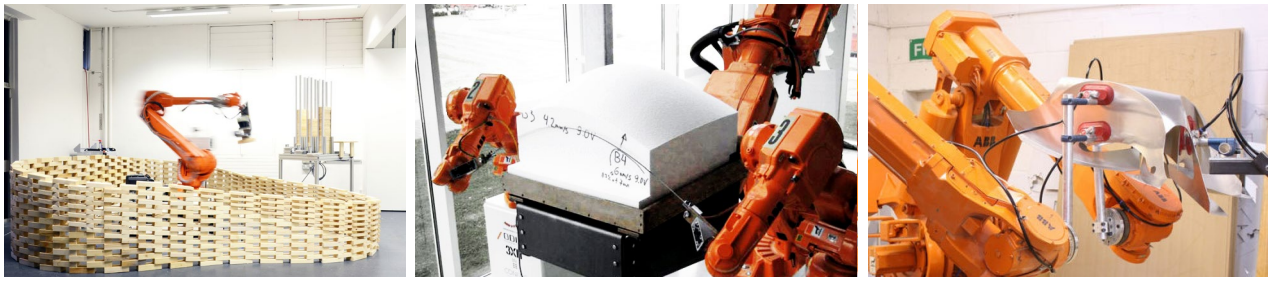
FIGURE 2 – Franchissements sculptés par la recherche de performances mécaniques

Comment alors profiter des vertus de la forme sans être pénalisé par sa complexité constructive ? Ici l'inspiration biomimétique de Gaudì trouve certaines limites, car, selon la formule bien célèbre de Julian Vincent, les mécanismes qui président à la fabrication de la forme sont différents en biologie et en ingénierie : « dans la nature, la matière est chère et la forme bon marché (et inversement pour la technologie) » [14]. Alors que la nature synthétise ses matériaux aux propriétés sur mesure à partir de seulement deux types de polymères dont l'agencement est piloté par l'information contenue toute entière dans la molécule d'ADN, l'acte de bâtir dépend de nombreux acteurs, de centaines de plans et de matériaux aux propriétés hétérogènes. Elle repose sur une industrie standardisée dont les outils de production et les produits semi-finis sont généralement dépourvus de courbure pour faciliter la série, le transport, le stockage et la mise en œuvre.

Il est donc nécessaire d'agir sur cette matière pour lui donner forme. Trois catégories, aux combinaisons multiples, qualifient cette action. La première, additive, consiste à agréger des éléments d'une granulométrie inférieure à l'objet final pour produire la forme désirée. Les procédés les plus courants sont l'impression 3d de divers matériaux (béton, acier, polymères...), la maçonnerie, le moulage (Fig. 3a). La seconde, soustractive, consiste à enlever de la matière à l'objet initial par découpe, usinage, perçage (Fig. 3b). Enfin la dernière, formative, consiste à déformer l'objet initial sans ajout ni retrait de matière. Des procédés comme l'emboutissage,

l'extrusion, le pliage, le roulage ou le cintrage font partie de cette dernière catégorie (Fig. 3c).

L'objet de notre étude, les surfaces développables, s'inscrivent dans cette logique formative, car elles peuvent être obtenues par déformation isométrique du plan, ou, formulé d'un point de vue mécanique, c'est la forme que prennent naturellement les plaques minces soumises à de grands déplacements en flexion. Même si cette cinématique de déformation contraint le domaine des morphologies possibles, elle offre aux produits bidimensionnels du commerce, généralement vendus en plaques ou en bobines, la capacité d'accéder à la liberté formelle recherchée.



(a) Fabrication additive
Dépôt de briques de bois [15]

(b) Fabrication soustractive
Découpe à la lame chaude [16]

(c) Fabrication formative
Pliage de tôle [17, 18]

FIGURE 3 – Mises en forme robotisées

Le travail de recherche mené ici est réalisé dans le cadre d'une Convention Industrielle de Formation par la REcherche (CIFRE) impliquant trois partenaires : l'équipe MSA (Matériaux et Structures Architecturés) du laboratoire Navier, l'atelier d'ingénierie T/E/S/S et l'entreprise de construction métallique Viry. Ces trois entités, qui ont déjà collaboré par le passé [19–21] sont impliquées dans leur production, dans l'élaboration de structures innovantes et apportent des contributions complémentaires dans les domaines de la recherche, de la conception et de la construction.

Ce contexte est propice à questionner les processus de projet traditionnels reposant sur une séparation assumée depuis Alberti [22, 23] entre concepteur et constructeur. La vision descendante (Top-Down) classique, où les principes de conception généraux sont déclinés vers la matérialisation dans les détails, pourra avantageusement être complétée par une vision ascendante (Bottom-Up) où les principes d'assemblage de composants issus de l'exploration technique des moyens de fabrication prennent part à la formulation du projet. L'implication d'une entreprise, de son savoir-faire et de ses outils de production permet d'accorder une place centrale à l'expérimentation constructive dans le processus de réflexion ; à contre-courant de son utilisation habituelle comme preuve de concept, le prototype à échelle 1 interviendra de façon inductive, en amont des développements théoriques. Nous verrons plus tard qu'Euler a découvert les surfaces développables après avoir manipulé une bande de papier pliée et non le contraire !

L'objectif de la thèse est le développement de principes et de systèmes constructifs tirant parti des propriétés géométriques, mécaniques et constructives des surfaces développables. Afin de tendre vers ce but, plusieurs développements intermédiaires sont nécessaires et structurent ce manuscript.

Le premier chapitre, consacré à l'état de l'art, s'attache à déterminer les caractéristiques des surfaces développables mobilisables pour des applications constructives et identifie les verrous théoriques ou pratiques qui s'opposent à une utilisation plus large dans le domaine de la construction. Pour cela, les notions fondamentales de géométrie différentielle des courbes et surfaces sont rappelées afin de définir précisément les propriétés des surfaces développables.

Ces propriétés, en particulier celle de pouvoir générer des formes complexes à partir de formes planes, intéressent de nombreux champs d'études ; une attention particulière est accordée au domaine de la construction par une analyse morpho-structurelle et un examen des processus de conception. Un prototype à échelle 1 complète et confirme les pistes envisagées par l'étude bibliographique : un défaut de connaissance apparaît sur la question du rapiéçage courbe, raccordement de deux surfaces développables selon des bords quelconques.

Le second chapitre aborde le rapiéçage courbe selon un point de vue géométrique. Les théories relatives à la géométrie différentielle lisse et discrète sont bien définies alors que celle des surfaces semi-discrètes est lacunaire. Dans un premier temps, la question est traitée localement avec la définition des courbures moyenne et gaussienne situées dans les coutures entre deux surfaces. Puis le problème est abordé par la géométrie différentielle globale : le corpus théorique développé est mobilisé pour la génération de formes fermées, développables par morceaux et pourvues de propriétés géométriques remarquables.

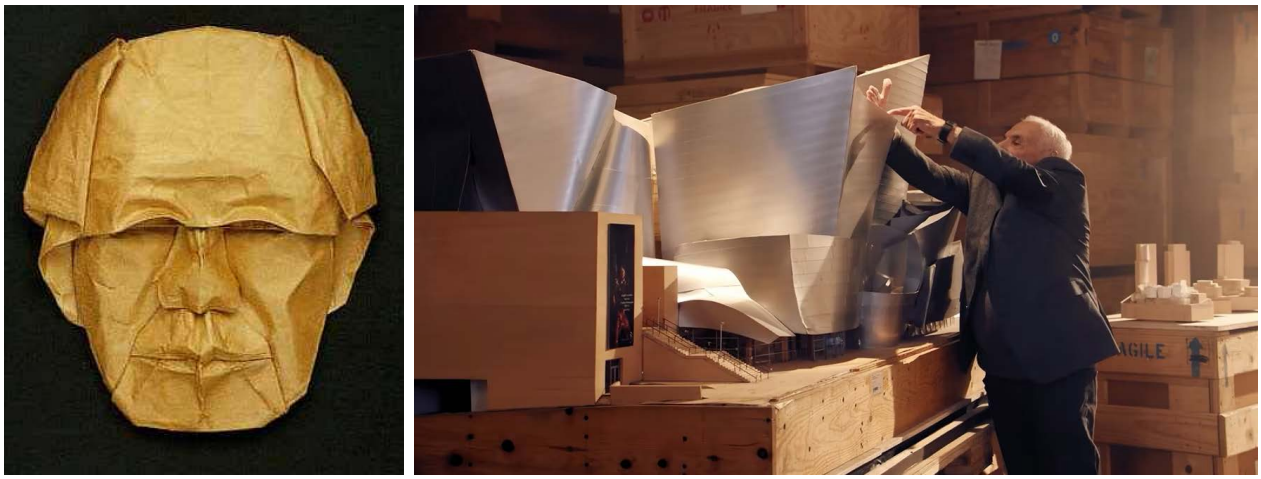
Le troisième chapitre examine le rapiéçage courbe du point de vue mécanique par l'étude d'un système constructif mettant en situation des surfaces rapiécées fermées. La structure spatiale proposée s'appuie tout d'abord sur une approche expérimentale par la conception et la fabrication d'un prototype à échelle 1. L'étude de cette structure est approfondie par la formulation d'un modèle de plaque équivalent via des techniques d'homogénéisation. Enfin, un outillage de prédimensionnement couplé à des techniques d'optimisation est développé pour permettre la transposition de la démarche à des structures de plus grande complexité.

Le dernier chapitre rappelle les principaux résultats et conclut sur le potentiel des surfaces développables au sein de systèmes constructifs. Quelques pistes d'amélioration des modèles et algorithmes sont proposées ainsi que plusieurs développements exploratoires.

CHAPITRE 1

Géométrie constructive et structurale : État de l'art

Le manuscript que vous tenez entre les mains (si vous disposez de la version papier) comporte environ 380 pages, soit 190 surfaces développables, $210 \times 297\,\text{mm}$. Peut-être l'avez vous emporté dans votre sac pour le consulter dans les transports en commun et profiter des $23\,\text{m}^2$ de surface de lecture qu'il offre. Ensuite, il est possible que vous le conserviez ; il n'occupera alors que 1.9 cm du linéaire de votre étagère. Ou vous lui donnerez une seconde vie en transformant ses pages en œuvre d'art d'origami si vous êtes Akira Yoshizawa, en maquette pour votre prochain musée si vous êtes Frank O. Gehry (Fig. 1.1) ou en simple cornet de frites si vous avez des projets plus pragmatiques...



(a) Akira Yoshizawa, autoportrait

(b) Frank O. Gehry manipulant la maquette du Walt Disney Hall

FIGURE 1.1 – Surfaces développables : de l'origami à l'architecture

Ces quelques considérations donnent un aperçu des potentialités des surfaces développables : grandes surfaces développées malgré un stockage et un transport très compacts, univers formel riche, usages variés, mise en forme avec une grande économie de moyens.

Mais cette illustration de papier est transposable à d'autres matériaux, d'autres échelles, d'autres applications. Regarder du côté de la construction navale et aéronautique est édifiant. On remarque qu'une part très significative de la coque d'un bateau ou du fuselage d'un avion est constituée de surfaces développables, alors que les contraintes hydro/aérodynamiques et la résistance mécanique requise indiqueraient plus naturellement l'usage des surfaces à double courbure. Pourtant, celles-ci sont utilisées avec beaucoup de parcimonie, témoignant ainsi de l'avantage constructif (et économique) des surfaces développables. La voiture, véhicule aux courbures plus prononcées et produites en plus grandes séries, semble aujourd'hui échapper à cette règle ; mais il suffit de remontrer un peu dans le temps pour retrouver les premiers véhicules fabriqués en petit nombre et voir réapparaître les surfaces développables (Fig. 1.2).



(a) Paquebot Harmony of the Seas STX

(b) Avion A321 LR Airbus

(c) Voiture 24h du Mans Chenard & Walcker 1923

FIGURE 1.2 – Surfaces développables : construction navale, aéronautique et automobile

A fortiori, la production architecturale, par essence unique dans les artefacts qu'elle fabrique ne semble-t-elle pas un terreau fertile pour l'utilisation de ce type de surfaces ? C'est à cette question que nous allons essayer de répondre dans ce premier chapitre en établissant un état de l'art général sur les surfaces développables qui sera complété dans les chapitres qui suivront par un état de l'art plus spécifique selon les questions abordées.

La partie 1.1 rappelle les notions fondamentales de géométrie différentielle des courbes et des surfaces qui seront utilisées tout au long de ce travail de recherche. Cela permet de définir précisément les surfaces développables et d'en souligner les propriétés géométriques les plus importantes. Nous recenserons, dans la partie 1.2, les différents champs d'études liés aux surfaces développables, tout d'abord par une rapide incursion historique, puis par une approche thématique des développements contemporains. Le cas d'étude des pavillons du premier étage de la Tour Eiffel illustrera l'usage de ce type de surfaces dans un projet de façade. Nous cadrerons plus particulièrement le domaine de la construction des structures et d'enveloppes dans la partie 1.3 par une analyse morpho-structurelle où chaque paramètre de conception sera considéré individuellement. Une approche plus synthétique des processus de conception est proposée en partie 1.4 par l'étude de la question de la rationalisation et des couplages entre les différents paramètres de conception identifiés dans la partie précédente. Le prototype *Metal Euplectella Folie*, conçu à partir des connaissances bibliographiques acquises, complète ces sources dans une réflexion par le projet ; la conception et fabrication de cette structure à échelle 1 sont décrites dans la partie 1.5. Enfin, la partie 1.6 conclut sur les pistes dégagées conjointement par l'étude de la littérature et celles suscitées par le prototype ainsi que sur les directions à prendre pour la suite de nos recherches.

1.1 Petit précis illustré de géométrie différentielle

Une technique traditionnelle de mise en forme de main courante tubulaire d'escalier hélicoïdal fait usage d'une simple cintreuse à trois galets. Une fois le profilé engagé dans la machine qui lui imprimera son rayon de courbure, l'opérateur, à l'aide d'une poignée située en extrémité, va faire tourner le tube autour de son axe à vitesse constante, créant ainsi le « débillardage » de la main courante (Fig. 1.3). Cette technique de fabrication traduit directement les propriétés géométriques de l'hélice circulaire qui est la seule courbe présentant des rayons de courbure et de torsion constants, en un processus de fabrication adapté. De façon plus générale, pour les enveloppes et structures à formes complexes, la compréhension fine des propriétés géométriques des différents composants permet d'y associer les procédés industriels qui rendront leur construction techniquement et financièrement viable.

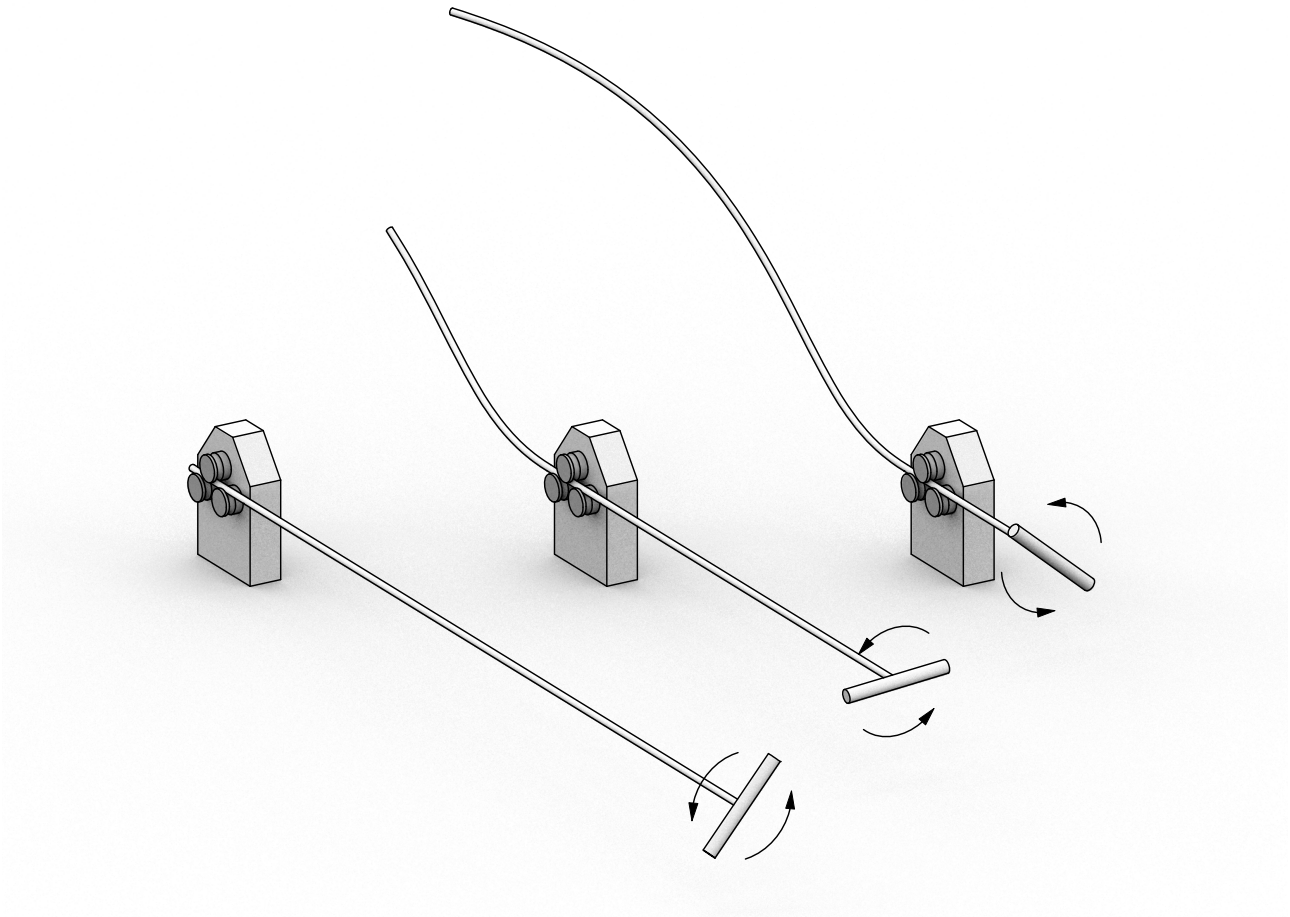


FIGURE 1.3 – Processus de débillardage à la cintreuse

Cette description des propriétés locales des courbes et des surfaces relève du domaine de la géométrie différentielle, dont les bases ont été posées par les pionniers Euler, Monge et Gauss. Les ouvrages plus récents de Do Carmo [24], Pressley [25], Farin [26], Pottmann et Wallner [27] et Brossard [28] ont servi de support à ce mémento de géométrie qui a également pour ambition de poser un système de notations et de conventions de signes qui ne fait pas consensus dans la littérature.

1.1.1 Géométrie différentielle des courbes

1.1.1.1 Equation paramétrique

On définit une courbe paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ comme l'application

$$\gamma : [t^-, t^+] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.1}$$

avec t^- et t^+ tels que $-\infty \leqslant t^- < t^+ \leqslant +\infty$ et l'intervalle $[t^-, t^+]$ représente un intervalle fermé tel que $[t^-, t^+] = \{t \in \mathbb{R} \,|\, t^- \leqslant t \leqslant t^+\}$.

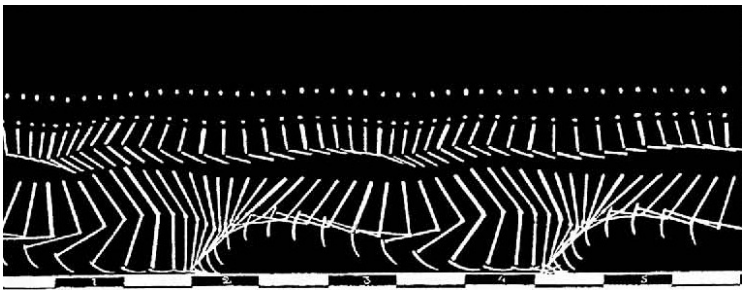
Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, les coordonnées du point p appartenant à γ sont définies par trois fonctions :

$$\overrightarrow{Op} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Une même courbe peut posséder plusieurs paramétrisations. Si le paramètre représente la longueur de la courbe, on parle alors de paramétrisation normale par abscisse curviligne ou par longueur d'arc ; il est généralement noté s et la dérivée de la courbe γ est notée $\gamma' = {}^{d\gamma}/_{ds}$ (Fig. 1.4). Pour un paramétrage quelconque (comme le temps), le paramètre est noté t et la dérivée de la courbe γ est notée $\dot{\gamma} = {}^{d\gamma}/_{dt}$.



(a) Les bornes kilométriques marquent un paramétrage par abscisse curviligne



(b) La chronophotographie crée des courbes paramétrées par le temps
Course de l'homme, Etienne-Jules Marey (1886)

FIGURE 1.4 – Paramétrages de courbes

Par la suite, on se restreint aux courbes régulières, soit :

$$\frac{d\gamma}{dt} \neq 0 \tag{1.3}$$

Soit ds un petit élément de longueur de la courbe γ entre les points $\gamma(t)$ et $\gamma(t+dt)$. Quand $dt \to 0$, on a dans le repère orthonormé $\mathcal{R}$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{1.4}$$

L'abscisse curviligne de la courbe γ, dont le point de départ est $p^- = \gamma(t^-)$, vaut :

$$s(t) = \int_{t^-}^{t} ds = \int_{t^-}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt \tag{1.5}$$

1.1.1.2 Repère de Frenet

1.1.1.2.1 Courbes spatiales

L'introduction du repère de Frenet permet l'étude du comportement local des courbes planes et spatiales. Il est associé au point p décrivant la courbe γ.

Pour une courbe spatiale, il est constitué des vecteurs $\overrightarrow{T_F}$ (vecteur tangent), $\overrightarrow{N_F}$ (vecteur normal) et $\overrightarrow{B_F}$ (vecteur binormal), base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ obtenue par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt des vecteurs $\dot{\gamma}(t)$, $\ddot{\gamma}(t)$ et $\dot{\gamma}(t) \wedge \ddot{\gamma}(t)$, dans cet ordre. Pour un paramétrage quelconque, les vecteurs de la base valent :

$$\overrightarrow{T_F} = \frac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|} \qquad \overrightarrow{N_F} = \overrightarrow{B_F} \wedge \overrightarrow{T_F} \qquad \overrightarrow{B_F} = \frac{\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|} \tag{1.6}$$

Les plans suivants sont définis par la combinaison de deux vecteurs parmi trois :

— $(\overrightarrow{T_F}, \overrightarrow{N_F})$: plan osculateur
— $(\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{B_F})$: plan normal
— $(\overrightarrow{T_F}, \overrightarrow{B_F})$: plan rectifiant

On suppose maintenant que la courbe est bi-régulière, c'est-à-dire que les vecteurs $\dot{\gamma}$ et $\ddot{\gamma}$ sont linéairement indépendants. Le vecteur $\overrightarrow{T_F}$ étant de norme constante, sa dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s est un vecteur non-unitaire, normal à $\overrightarrow{T_F}$. Sa norme, par convention toujours positive, est appelée courbure, notée κ, et son inverse est appelé rayon de courbure, noté R :

$$\frac{d\overrightarrow{T_F}}{ds} = \kappa \overrightarrow{N_F} = \frac{\overrightarrow{N_F}}{R} \tag{1.7}$$

De même, $\overrightarrow{N_F}$ est un vecteur de norme constante et sa dérivée par rapport à l'abscisse curviligne s est un vecteur non-unitaire, normal à $\overrightarrow{N_F}$. Sa norme est appelée torsion, notée τ. La littérature n'est pas unanime sur la convention de signe de la torsion. Nous choisissons celle qui donne une torsion positive quand le trièdre tourne dans le sens trigonométrique autour du vecteur $\overrightarrow{T_F}$ dans le sens de l'abscisse curviligne croissante :

$$\frac{d\overrightarrow{B_F}}{ds} = -\tau \overrightarrow{N_F} \tag{1.8}$$

En dérivant le vecteur $\overrightarrow{N_F} = \overrightarrow{B_F} \wedge \overrightarrow{T_F}$ par rapport à l'abscisse curviligne, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{N_F}}{ds} = -\kappa \overrightarrow{T_F} + \tau \overrightarrow{B_F} \tag{1.9}$$

Les résultats précédents sont résumés sous forme matricielle :

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_F} \\ \overrightarrow{N_F} \\ \overrightarrow{B_F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_F} \\ \overrightarrow{N_F} \\ \overrightarrow{B_F} \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

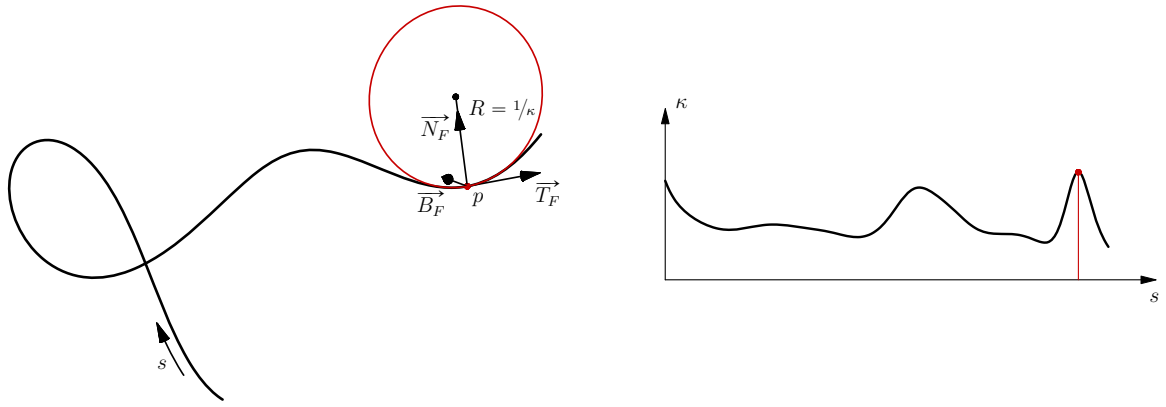
Les expressions de la courbure et de la torsion sont alors déduites des expressions précédentes dans le cas d'un paramétrage par l'abscisse curviligne :

$$\kappa = |\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}| \qquad \tau = \frac{(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{\kappa^2} \tag{1.11}$$

et dans le cas d'un paramétrage quelconque :

$$\kappa = \frac{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|}{|\dot{\gamma}|^3} \qquad \tau = \frac{(\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}) \cdot \dddot{\gamma}}{|\dot{\gamma} \wedge \ddot{\gamma}|^2} \tag{1.12}$$

Sur la figure 1.5 est représentée une courbe spatiale munie d'un repère de Frenet à l'endroit de courbure maximale (rayon de courbure minimal). Cette représentation est accompagnée du diagramme de courbure, tracé en fonction de l'abscisse curviligne.



(a) Courbe spatiale (b) Diagramme de courbure

FIGURE 1.5 – Description d'une courbe spatiale par le trièdre de Frenet

Soient $d\alpha$ et $d\beta$, angles entre les vecteurs $\overrightarrow{T_F}(s)$ et $\overrightarrow{T_F}(s+ds)$ d'une part et $\overrightarrow{B_F}(s)$ et $\overrightarrow{B_F}(s+ds)$ d'autre part. Alors la courbure et la torsion qualifient les vitesses angulaires de $\overrightarrow{T_F}$ et $\overrightarrow{B_F}$ quand le repère de Frenet parcourt la courbe γ selon son abscisse curviligne s : $\kappa = {}^{d\alpha}/_{ds}$, $\tau = {}^{d\beta}/_{ds}$. Si on exprime le vecteur rotation du repère de Frenet $\overrightarrow{\Omega_F}$ par rapport à lui-même, on obtient :

$$\overrightarrow{\Omega_F} = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \\ \kappa \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

La courbure est donc la tendance de la courbe à quitter la ligne droite et la torsion celle à s'éloigner du plan. Une courbe à torsion nulle est une courbe plane.

C'est bien comme cela qu'agit le métallier quand il forme la main courante de l'escalier : la poignée est la binormale à laquelle il impose une vitesse de rotation (torsion) constante pendant que la cintreuse se charge de modifier la direction de la tangente (courbure).

1.1.1.2.2 Courbes planes

Pour une courbe plane deux fois différentiable, la construction du repère de Frenet est légèrement différente. Le vecteur $\overrightarrow{T_F}$ est introduit comme pour le cas spatial, vecteur unitaire porté par la tangente dans le sens du paramétrage croissant. Le vecteur $\overrightarrow{N_F}$ est le vecteur unitaire porté par la normale principale, défini par la rotation de $+\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{T_F}$.

Il existe alors un scalaire κ_s tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{T_F}}{dt} = \kappa_s \, |\dot{\gamma}| \, \overrightarrow{N_F} \tag{1.14}$$

avec κ_s, courbure signée de γ au point $p(t)$. La courbure signée est positive si $\overrightarrow{N_F}$ pointe vers le centre de courbure et négative dans le cas contraire.

La figure 1.6 montre une courbe plane accompagnée de son diagramme de courbure exprimé en fonction de l'abscisse curviligne. La partie noire de la courbe est une ligne droite (courbure nulle), puis la partie rouge est un raccord clothoïdal (variation de courbure linéaire), souvent utilisé pour le tracé routier et ferroviaire ; elle opère une transition avec la partie verte, en arc de cercle (courbure constante). Enfin, le tracé de la partie bleue est plus libre et présente trois points d'inflexions (changement de signe de la courbure).

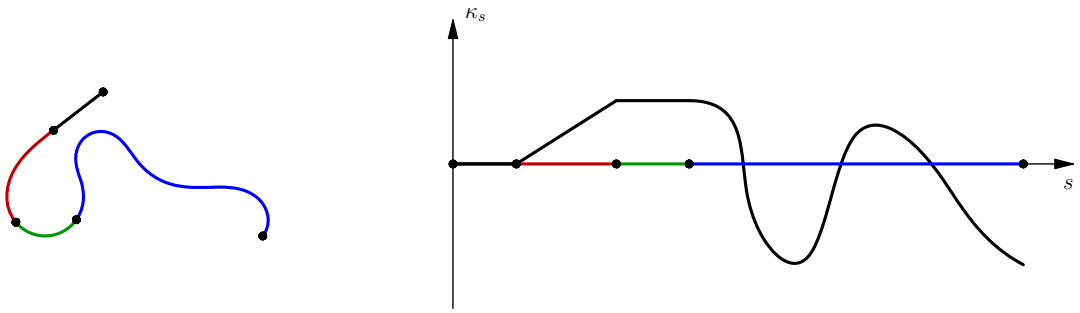


FIGURE 1.6 – Courbe plane et diagramme de courbure signée

1.1.2 Géométrie différentielle des surfaces

1.1.2.1 Equation paramétrique

On définit une surface paramétrée dans $\mathbb{R}^3$ comme l'application

$$\sigma : [u^-, u^+] \times [v^-, v^+] \to \mathbb{R}^3 \tag{1.15}$$

avec u^-, u^+ et v^-, v^+ tels que $-\infty \leqslant u^- < u^+ \leqslant +\infty$ et $-\infty \leqslant v^- < v^+ \leqslant +\infty$. Les intervalles $[u^-, u^+]$ et $[v^-, v^+]$ représentent des intervalles fermés : $[u^-, u^+] = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u^- \leqslant u \leqslant u^+\}$ et $[v^-, v^+] = \{v \in \mathbb{R} \,|\, v^- \leqslant v \leqslant v^+\}$.

Dans le repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$, les coordonnées du point p appartenant à σ sont définies par trois fonctions :

$$\overrightarrow{Op} = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

Cette partie est illustrée par une surface d'Enneper dont l'équation paramétrique est :

$$\overrightarrow{Op} = \begin{bmatrix} u - \dfrac{u^3}{3} + uv^2 \\ v - \dfrac{v^3}{3} + vu^2 \\ u^2 - v^2 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

Une courbe peut être définie implicitement sur la surface en liant les deux paramètres u et v (Fig. 1.7).

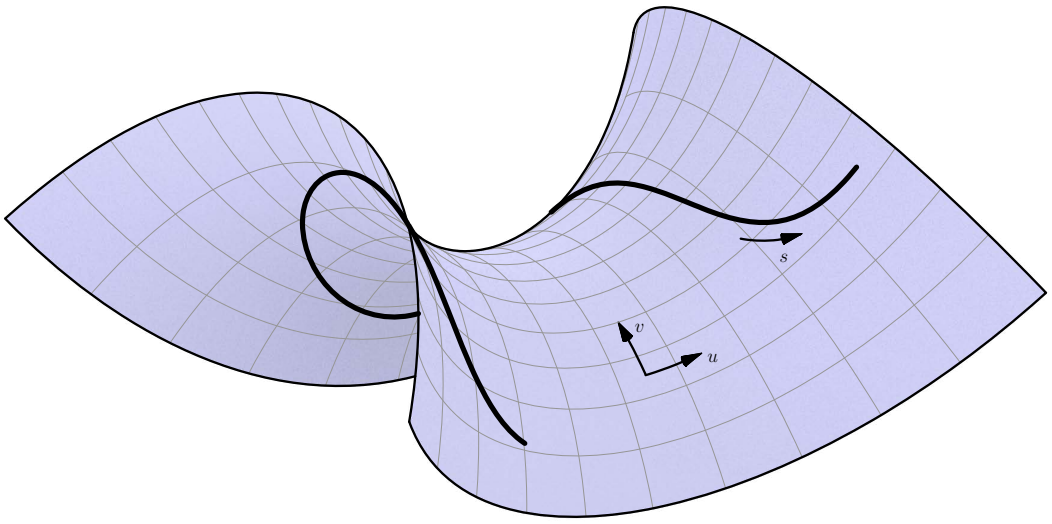


FIGURE 1.7 – Surface d'Enneper, courbes isoparamétriques et courbe quelconque définie sur la surface

Si nous fixons un des deux paramètres, alors le vecteur $\overrightarrow{Op}$ ne dépend que d'un paramètre et décrit une courbe sur la surface appelée courbe isoparamétrique. La surface est décrite par deux

réseaux de courbes à un paramètre $(u, v = cste)$ et $(v, u = cste)$ et les dérivées partielles par rapport aux deux paramètres $\partial\sigma/\partial u$ et $\partial\sigma/\partial v$ définissent les tangentes des courbes isoparamétriques dans la direction du paramètre variable. Un déplacement élémentaire sur la surface est alors donné par :

$$d\overrightarrow{p} = d\sigma(u, v) = \frac{\partial\sigma}{\partial u}du + \frac{\partial\sigma}{\partial v}dv \tag{1.18}$$

Pour alléger l'écriture, on adopte les notations suivantes pour les vecteurs de dérivées partielles de σ :

- $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} = \sigma_u$: dérivée partielle de σ par rapport à u ;
- $\dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = \sigma_v$: dérivée partielle de σ par rapport à v ;
- $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u^2} = \sigma_{uu}$: dérivée partielle seconde de σ par rapport à u ;
- $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial v^2} = \sigma_{vv}$: dérivée partielle seconde de σ par rapport à v ;
- $\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial u\partial v} = \sigma_{uv}$: dérivée partielle croisée de σ par rapport à u et v.

On suppose que la surface est dépourvue de point singulier, soit $\sigma_u \wedge \sigma_v \neq 0$, ou encore que u et v sont indépendants. Comme nous le verrons par la suite, cette hypothèse nous garantit que la normale à la surface est toujours bien définie.

1.1.2.2 Première forme fondamentale

La première forme fondamentale est une caractéristique locale de la surface σ et traduit la métrique de la surface. Elle peut être interprétée comme le produit scalaire euclidien en restriction au plan tangent [29]. Elle est notée par le chiffre romain I et intervient dans le calcul des longueurs et des aires sur les surfaces. Soit ds une longueur d'arc élémentaire. La grandeur ds^2 est appelée première forme fondamentale :

$$I = ds^2 = (\sigma_u du + \sigma_v dv)^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{1.19}$$

avec $E = \sigma_u^2$, $F = \sigma_u\sigma_v$, $G = \sigma_v^2$, les coefficients de la première forme fondamentale, que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\mathcal{F}_I = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

Dans le cas de la surface d'Enneper, la première forme fondamentale est égale à :

$$I_{En} = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2 \left(du^2 + dv^2\right) \tag{1.21}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\mathcal{F}_{I_{En}} = \left(1 + u^2 + v^2\right)^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

Le coefficient $F = 0$ signifie que les courbes isoparamétriques se croisent à angle droit puisque $\sigma_u \cdot \sigma_v = 0$. L'égalité des coefficients $E = G$ signifie que le point p évolue à la même vitesse pour les deux paramètres. Le tenseur métrique est conforme à la métrique euclidienne, cette paramétrisation de la surface d'Enneper est dite isothermale.

1.1.2.3 Repère de Darboux

Nous avons vu précédemment que les dérivées partielles σ_u et σ_v définissent les tangentes au point p des deux courbes isoparamétriques qui y passent. Ces deux vecteurs, non unitaires et non orthogonaux dans les cas général, mais non colinéaires selon nos hypothèses, engendrent le plan tangent à σ en p. La normale, non unitaire, est donnée par :

$$\overrightarrow{N} = \sigma_u \wedge \sigma_v \tag{1.23}$$

Nous introduisons un autre repère mobile, complémentaire à celui de Frenet, cette fois-ci pour étudier le comportement des courbes tracées sur une surface. Supposons maintenant que la courbe γ appartient à la surface σ.

Le premier vecteur de ce repère est identique à celui du repère de Frenet, car ils sont tous deux tangents à la courbe γ au point p. Le vecteur tangent n'est donc plus indicé par la suite :

$$\overrightarrow{T} = \overrightarrow{T_D} = \overrightarrow{T_F} \tag{1.24}$$

Le troisième vecteur adopte la normale à la surface σ et est noté $\overrightarrow{N_D}$ après normalisation :

$$\overrightarrow{N_D} = \frac{\overrightarrow{N}}{\left|\overrightarrow{N}\right|} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\sqrt{EG - F^2}} \tag{1.25}$$

Enfin, le second vecteur est un vecteur unitaire du plan tangent appelé normale géodésique qui, par analogie au repère de Frenet, est noté $\overrightarrow{B_D}$:

$$\overrightarrow{B_D} = \overrightarrow{N_D} \wedge \overrightarrow{T_D} \tag{1.26}$$

Le repère de Darboux est en général différent de celui de Frenet, mais ces deux repères partagent le vecteur tangent. Il est donc possible de définir la position relative des deux repères par un unique angle $\theta = (\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{N_D}) = (\overrightarrow{B_F}, \overrightarrow{B_D})$:

$$\begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N_D} \\ \overrightarrow{B_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T_F} \\ \overrightarrow{N_F} \\ \overrightarrow{B_F} \end{bmatrix} \tag{1.27}$$

A l'aide des équations de Frenet et en procédant aux changements de repères adéquats, on peut exprimer les dérivées des vecteurs du repère de Darboux sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} &= +\kappa \sin\theta \ \overrightarrow{B_D} \quad +\kappa \cos\theta \ \overrightarrow{N_D} \\ \frac{d\overrightarrow{B_D}}{ds} &= -\kappa \sin\theta \ \overrightarrow{T} \quad -\left(\frac{d\theta}{ds} + \tau\right) \ \overrightarrow{N_D} \\ \frac{d\overrightarrow{N_D}}{ds} &= -\kappa \cos\theta \ \overrightarrow{T} \quad -\left(\frac{d\theta}{ds} + \tau\right) \ \overrightarrow{B_D} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Les résultats précédents sont résumés sous forme matricielle :

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{B_D} \\ \overrightarrow{N_D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ -\kappa_g & 0 & \tau_g \\ -\kappa_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{B_D} \\ \overrightarrow{N_D} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

avec $\kappa_g = \kappa \sin\theta$, courbure géodésique, $\kappa_n = \kappa \cos\theta$, courbure normale et $\tau_g = ({}^{d\theta}/_{ds} + \tau)$, torsion géodésique.

Selon ces formules, les courbures géodésique et normale sont respectivement les courbures au point p des projections de la courbe γ sur les plans $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_D})$ et $(\overrightarrow{N_D}, \overrightarrow{T})$. Comme pour le repère de Frenet, si on exprime le vecteur rotation du repère de Darboux $\overrightarrow{\Omega_D}$ par rapport à lui-même, on obtient :

$$\overrightarrow{\Omega_D} = \begin{bmatrix} \tau_g \\ \kappa_n \\ \kappa_g \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Cela signifie que la torsion géodésique a tendance à faire tourner le repère autour de la tangente, la courbure normale autour de la normale géodésique et la courbure géodésique autour de la normale. En termes d'aviation ou de marine, la torsion géodésique correspond à la notion de roulis, la courbure normale à celle de tangage et la courbure géodésique correspond au lacet (Fig. 1.8).

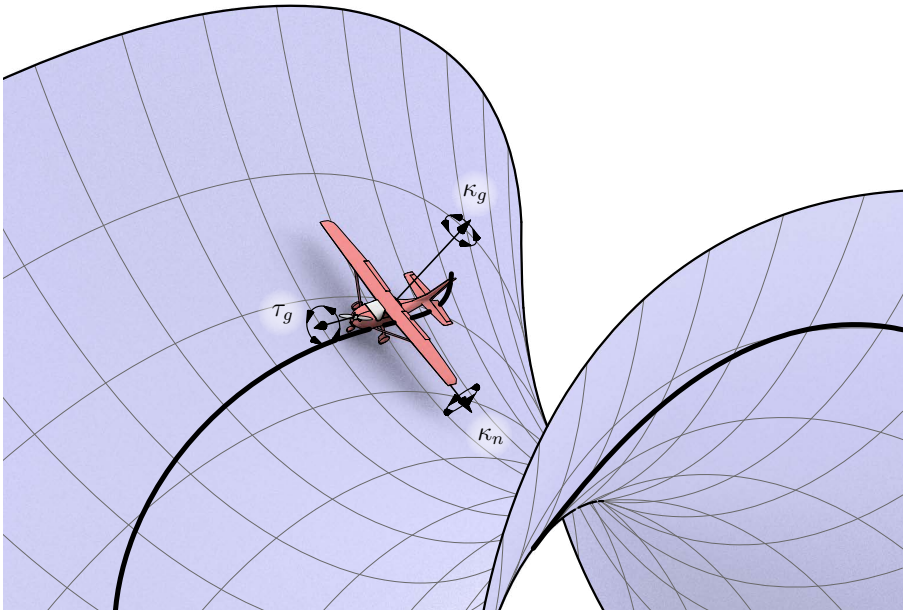


FIGURE 1.8 – Courbures de Darboux illustrées par les rotations d'un avion

1.1.2.4 Seconde forme fondamentale et application de Gauss

Alors que la première forme fondamentale décrit la géométrie intrinsèque de la surface qui peut être déterminée depuis la surface elle-même, la seconde forme fondamentale dépend du plongement de la surface dans $\mathbb{R}^3$. Elle intervient en particulier dans le calcul des courbures et est notée par le chiffre romain II [30].

L'expression de la courbure normale est obtenue par la projection de la troisième formule de Darboux sur le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ et fait apparaître la première forme fondamentale :

$$\kappa_n = -\frac{d\overrightarrow{N_D}}{ds} \cdot \overrightarrow{T} = \frac{\sigma_{uu}du^2 + 2\sigma_{uv}dudv + \sigma_{vv}dv^2}{I} \cdot \overrightarrow{N_D} \tag{1.31}$$

Le numérateur est appelé seconde forme fondamentale :

$$II = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \tag{1.32}$$

avec $L = \sigma_{uu} \cdot \overrightarrow{N_D}$, $M = \sigma_{uv} \cdot \overrightarrow{N_D}$, $N = \sigma_{vv} \cdot \overrightarrow{N_D}$ les coefficients de la seconde forme fondamentale, que l'on peut écrire sous forme matricielle :

$$\mathcal{F}_{II} = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

Dans le cas de la surface d'Enneper, la seconde forme fondamentale est égale à :

$$II_{En} = 2(du^2 - dv^2) \tag{1.34}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\mathcal{F}_{II_{En}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \tag{1.35}$$

L'application de Gauss est une application différentiable sur une surface σ de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans la sphère unité S^2 :

$$\mathcal{G} : \sigma \to S^2 \tag{1.36}$$

Elle associe à chaque point de la surface la valeur de son vecteur normal unitaire $\overrightarrow{N_D}$ (Fig. 1.9). Il existe alors une identification naturelle entre le plan tangent à σ en p et le plan tangent à S^2 au point correspondant :

$$T_p\sigma = T_{\mathcal{G}(p)}S^2 \tag{1.37}$$

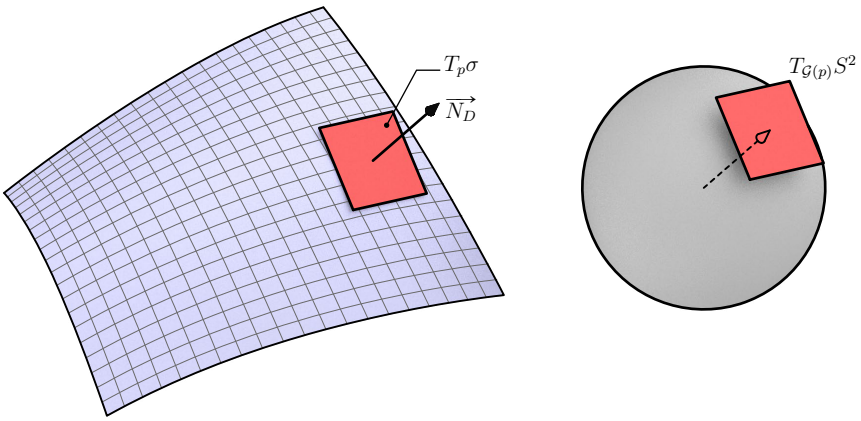


FIGURE 1.9 – Application de Gauss

La différentielle de l'application de Gauss mesure la variation du vecteur normal $\overrightarrow{N_D}$ quand p se déplace sur la surface. C'est une application linéaire du plan tangent vers lui-même :

$$d_p\mathcal{G} : T_p\sigma \to T_p\sigma \tag{1.38}$$

On appelle endomorphisme de Weingarten de la surface σ au point p l'application définie par :

$$\mathcal{W}_{p,\sigma} = -d_p\mathcal{G} \tag{1.39}$$

Il s'écrit sous forme matricielle en fonction des deux formes fondamentales :

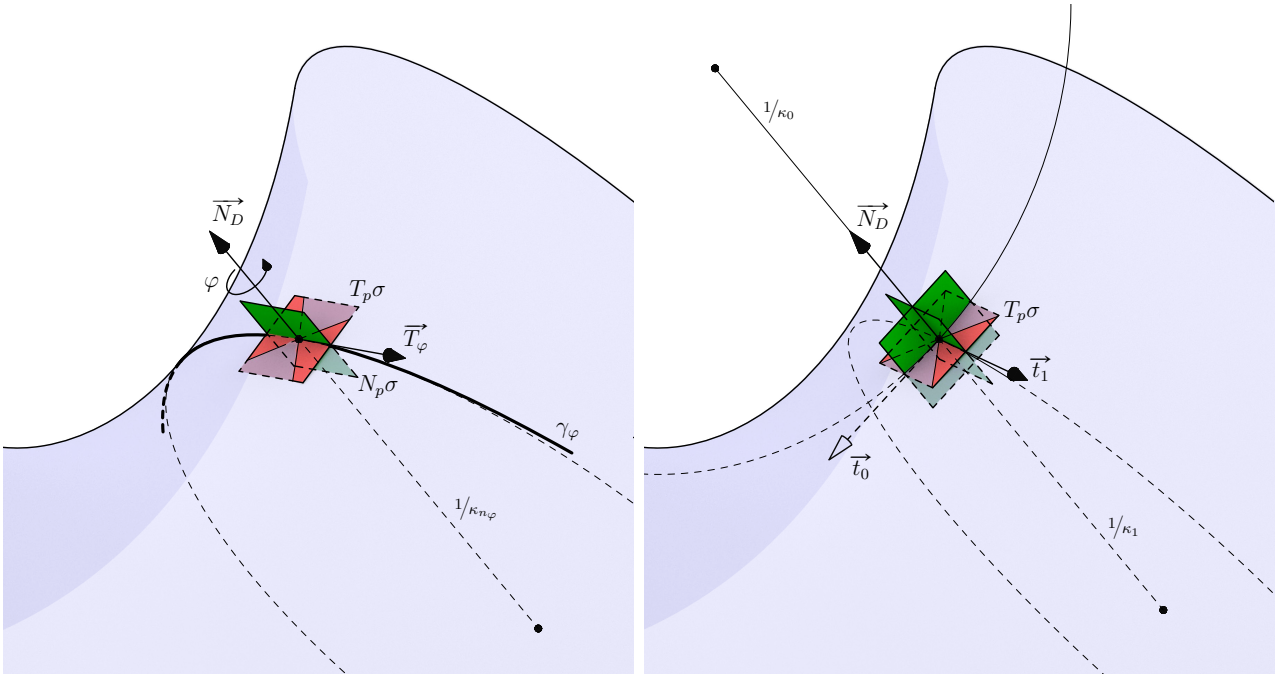
$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}} = \mathcal{F}_I^{-1}\mathcal{F}_{II} \tag{1.40}$$

Dans le cas de la surface d'Enneper, l'expression matricielle de l'application de Weingarten est :

$$\mathcal{F}_{\mathcal{W}_{En}} = \frac{2}{\left(1+u^2+v^2\right)^2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.41}$$

Les valeurs propres de l'endomorphisme de Weingarten sont appelées courbures principales et sont notées κ_0 et κ_1 avec comme convention $\kappa_0 \leqslant \kappa_1$. A ces valeurs propres sont associés deux vecteurs propres appelés directions principales, notés $\overrightarrow{t_0}$ et $\overrightarrow{t_1}$; ces derniers constituent alors une base orthogonale du plan tangent.

Imaginons un plan $N_p\sigma$, défini au point p par la normale à la surface $\overrightarrow{N_D}$ et un vecteur $\overrightarrow{T_\varphi}$ appartenant au plan tangent $T_p\sigma$ et effectuant une rotation d'angle $\varphi \in [0, 2\pi[$. La courbe d'intersection γ_φ entre $N_p\sigma$ et σ présente une courbure κ_{n_φ} au point p égale à la courbure normale de toutes les courbes appartenant à σ et ayant pour vecteur tangent $\overrightarrow{T_\varphi}$ (Fig. 1.10a). Les courbures principales κ_0 et κ_1 sont alors les deux valeurs extrêmes que peut prendre $\overrightarrow{T_\varphi}$ et les vecteurs $\overrightarrow{t_0}$ et $\overrightarrow{t_1}$ sont les positions correspondantes du vecteur $\overrightarrow{T_\varphi}$ (Fig. 1.10b).



(a) Courbure normale (b) Courbures principales

FIGURE 1.10 – Définition des courbures principales par un plan normal mobile

Si l'angle φ est choisi tel que $\varphi = (\overrightarrow{t_0}, \overrightarrow{T_\varphi})$, alors le théorème d'Euler donne l'expression de la courbure normale en fonction des courbures principales :

$$\kappa_n = \kappa_0 \cos^2 \varphi + \kappa_1 \sin^2 \varphi \tag{1.42}$$

Nous en profitons pour fournir une formule alternative (formule d'Ossian-Bonnet) de la torsion géodésique en fonction des courbures principales et de l'angle φ :

$$\tau_g = (\kappa_1 - \kappa_0) \cos \varphi \sin \varphi \tag{1.43}$$

Le déterminant et la demi-trace de l'application de Weingarten sont appelés respectivement courbures gaussienne et moyenne de la surface σ au point p et s'expriment en fonction des courbures principales et des coefficients des première et seconde formes fondamentales :

$$\begin{array}{rclcrcl} K & = & \det(\mathcal{F}_\mathcal{W}) & = & \kappa_0\kappa_1 & = & \dfrac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ H & = & \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}(\mathcal{F}_\mathcal{W}) & = & \dfrac{1}{2}(\kappa_0 + \kappa_1) & = & \dfrac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)} \end{array} \tag{1.44}$$

Les courbures gaussienne K et moyenne H sont indépendantes du paramétrage de la surface.

Pour la surface d'Enneper, la matrice de l'application de Weingarten présente une forme diagonale selon le paramétrage choisi, ce qui signifie que les lignes isoparamétriques suivent les directions principales de courbure et que les courbures principales peuvent être lues directement sur les termes diagonaux. Elles sont égales et opposées :

$$\kappa_0 = -\kappa_1 = -\frac{2}{(1 + u^2 + v^2)^2} \tag{1.45}$$

Les courbures gaussienne et moyenne valent :

$$K = -\frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^4} \qquad H = 0 \tag{1.46}$$

Une des découvertes les plus importantes de Gauss à propos des propriétés des surfaces est que la courbure gaussienne reste inchangée quand la surface se courbe sans changer d'aire (déformation isométrique). Nous verrons plus tard que cet énoncé, connu sous le nom de *Theorema Egregium*, sera d'importance fondamentale pour les surfaces développables.

1.1.2.5 Classification des surfaces

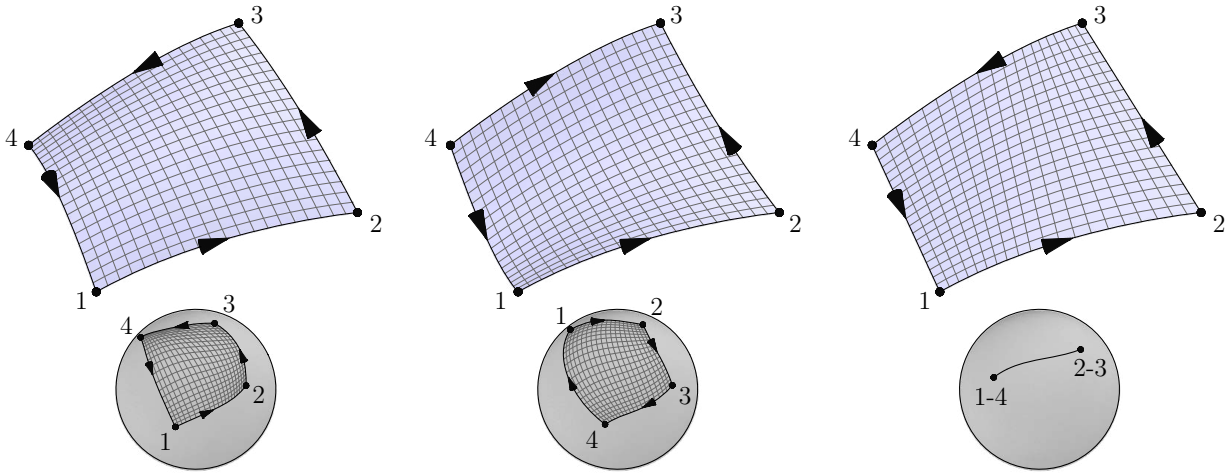
Les points d'une surface peuvent être classés selon le signe de la courbure gaussienne en ce point.

$K > 0$: point elliptique. Si tous les points de la surface sont de cette nature, la surface est à double courbure positive ou synclastique. C'est le cas par exemple de la sphère, de l'ellipsoïde ou d'un hyperboloïde à deux nappes. Cette morphologie correspond aux structures travaillant principalement en compression comme les coques, dômes, gridshells. L'image de Gauss de la surface (ensemble des points images de l'application de Gauss d'une surface) est une portion de sphère dont le contour possède la même orientation que la surface antécédente (Fig. 1.11a).

$K < 0$: point hyperbolique. S'il en est ainsi pour tous les points de la surface, elle est dite à double courbure inverse ou anticlastique. C'est le cas par exemple d'un hyperboloïde à une nappe ou un paraboloïde hyperbolique. Cette morphologie correspond aux structures travaillant principalement en traction comme les architectures textiles. L'image de Gauss de la surface est une portion de sphère dont le contour possède une orientation opposée à celle de la surface antécédent (Fig. 1.11b).

$K = 0$: point parabolique. Si c'est le cas de tous les points de la surface, elle est dite à simple courbure ou développable. Des exemples bien connus sont le cylindre ou le cône. L'image de Gauss se réduit à une courbe sur la sphère unité : le cylindre est représenté par un grand cercle, le cône par un petit cercle et une surface développable par une courbe quelconque. L'orientation du contour ne peut être définie puisque deux bords de l'image de Gauss, de sens opposés fusionnent en cette courbe (Fig. 1.11c).

Il est également courant d'identifier des surfaces particulières selon leur courbure moyenne. Les surfaces à courbure moyenne constante (CMC) possèdent de nombreuses propriétés dont celle d'être funiculaire sous un chargement de pression normale, avec des contraintes membranaires uniformes isotropes ; elle sont souvent utilisées pour les architectures gonflables. Les surfaces à courbure moyenne nulle sont une sous-classe des CMC ; ce sont des surfaces minimales utilisées dans le cas de structures tendues.



(a) Surface synclastique (b) Surface anticlastique (c) Surface développable

FIGURE 1.11 – Classification des surfaces selon leur courbure gaussienne

Une surface est dite de Weingarten s'il existe une relation indépendante des paramètres entre la courbure moyenne et la courbure gaussienne. De récents travaux ont été publiés sur les surfaces de Weingarten linéaire [31] qui sont caractérisées par la constance de la combinaison linéaire entre courbures moyenne et gaussienne :

$$aH + bK = c \mid \{a, b, c\} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.47}$$

Les courbures principales de la surface d'Enneper étant égales et opposées en tous points, la courbure gaussienne est toujours négative et la courbure moyenne nulle ; il s'agit d'une surface anticlastique minimale.

1.1.2.6 Classification des courbes sur les surfaces

Parmi les nombreuses courbes aux propriétés remarquables tracées sur une surface, nous identifions celles qui présentent une des courbures de Darboux (κ_g, κ_n, τ_g) nulle sur toute sa longueur.

Les lignes à courbure géodésique nulle sont appelées lignes géodésiques. Elles ont la propriété de relier deux points de la surface par le chemin le plus court sur la surface (à quelques exceptions près, comme sur le cylindre). Ces courbes ne « tournent » ni à gauche, ni à droite et peuvent être représentées comme la trajectoire d'observateurs se déplaçant droit devant eux [32].

Les lignes à courbure normale nulle sont appelées lignes asymptotiques. En chaque point hyperbolique d'une surface, passent deux lignes asymptotiques et une seule par un point parabolique. Il n'en passe pas par un point elliptique, car la courbure normale ne s'y annule jamais [33].

Enfin, les lignes à torsion géodésique nulle sont appelées lignes de courbure, car elles suivent en tous points les directions de courbure principale. Étant donné les résultats rappelés précédemment, les lignes de courbure se développent sur la surface en un double réseau de lignes orthogonales [34].

Ces trois types de lignes présentent des aptitudes différentes à générer des bandes développables à partir de leur tracé [35]. Tang *et al.* établissent l'équation du vecteur r de la règle d'une bande développable générée à partir de la courbe γ tracée sur la surface σ. La règle est comprise dans le plan $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_\alpha})$ du repère $(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_\alpha}, \overrightarrow{N_\alpha})$, lui-même tourné d'un angle α autour de $\overrightarrow{T}$ par rapport au repère de Darboux $(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_D}, \overrightarrow{N_D})$ de la courbe γ, tel que $\alpha = (\overrightarrow{B_D}, \overrightarrow{B_\alpha})$ (Fig. 1.12). La formule générale, exprimée en fonction du trièdre et des courbures de Darboux, ainsi que de l'angle α, donne l'expression du vecteur de la règle :

$$r^\alpha = \tau_g \overrightarrow{T} + (\kappa_g \sin\alpha + \kappa_n \cos\alpha)(\sin\alpha \overrightarrow{N_D} - \cos\alpha \overrightarrow{B_D}) \tag{1.48}$$

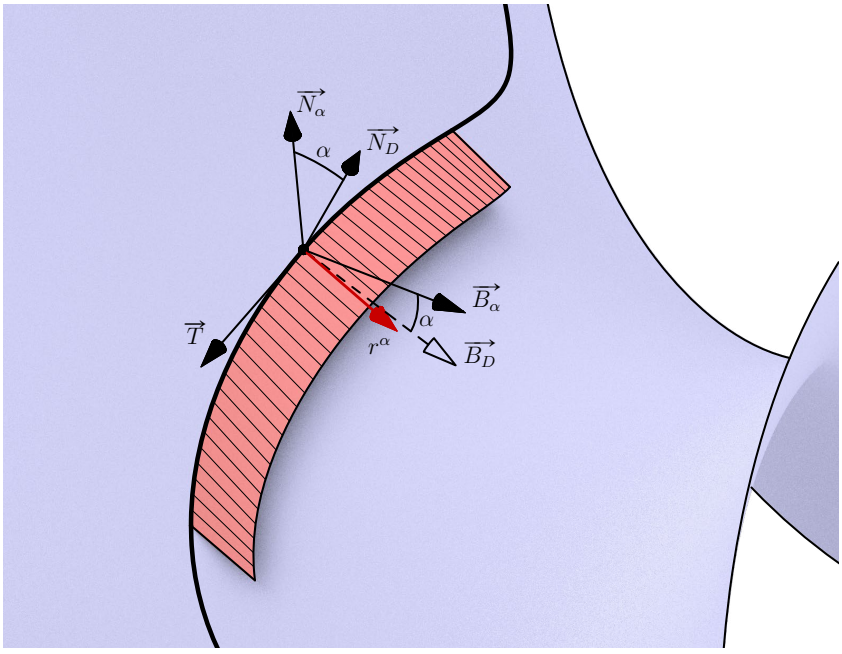


FIGURE 1.12 – Repères de définition d'une bande développable

Les auteurs concluent sur le conditionnement de la bande développable selon l'angle α et le type de ligne support. Un mauvais conditionnement signifie que les deux vecteurs de dérivée partielle σ_u et σ_v de la bande développable, ici $\overrightarrow{T}$ et r^α, deviennent colinéaires et rendent imprécise la définition de la normale à la surface (Eq. 1.23 et voir plus loin Eq. 1.51). Au contraire, des vecteurs σ_u et σ_v proches de l'orthogonalité génèrent une bonne distribution des règles.

Par exemple, une bande développable suivant une ligne de courbure ($\tau_g = 0$) sera toujours bien conditionnée, quel que soit l'angle α. En effet, dans ce cas :

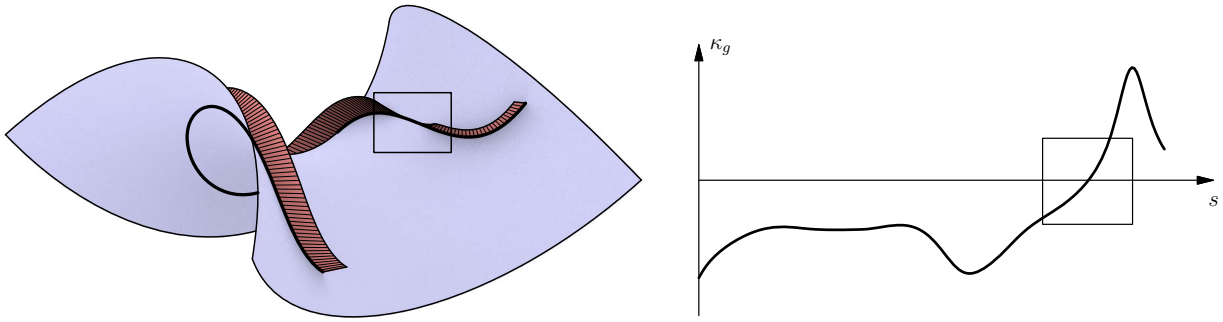
$$r^\alpha = (\kappa_g \sin\alpha + \kappa_n \cos\alpha)(\sin\alpha\overrightarrow{N_D} - \cos\alpha\overrightarrow{B_D}) \tag{1.49}$$

La règle sera toujours positionnée dans le plan $(\overrightarrow{B_D}, \overrightarrow{N_D})$, normal à la courbe γ ; $\overrightarrow{T}$ et r^α sont orthogonaux. En revanche, la qualité de la bande développable suivant une ligne géodésique ou asymptotique dépend fortement de l'angle α. A titre d'exemple, une bande développable tangente ($\alpha = 0$) suivant une ligne asymptotique est mal conditionnée, car la règle est colinéaire à la tangente : $r^0 = \tau_g \overrightarrow{T}$. Les résultats croisant type de courbe et angle α sont résumés dans le tableau 1.1

TABLE 1.1 – Conditionnement de la bande développable en fonction du type de courbe suivie et de l'angle α

		$\alpha = 0$	$\alpha = \pi/2$
Ligne géodésique	$\kappa_g = 0$	+	−
Ligne asymptotique	$\kappa_n = 0$	−	+
Ligne de courbure	$\tau_g = 0$	+	+

La figure 1.13 montre les règles de la bande développable normale ($\alpha = \pi/2$) s'appuyant sur la courbe quelconque γ. On observe bien le mauvais conditionnement des règles à l'endroit de courbure géodésique nulle.



(a) Distribuition des règles (b) Diagramme de courbure géodésique

FIGURE 1.13 – Bande développable normale

1.1.2.7 Propriétés et paramétrisation des surfaces développables

Les surfaces développables sont caractérisées par une courbure gaussienne nulle en tous points de la surface. Cela signifie qu'au moins une des deux courbures principales est nulle : $K = \kappa_0\kappa_1 = 0$.

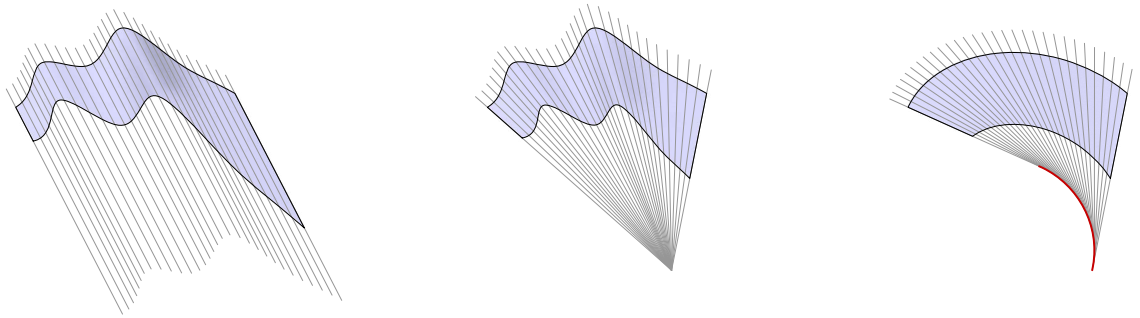
Si les deux courbures s'annulent simultanément en un point, nous sommes en présence d'un méplat ; si elles s'annulent simultanément en tous points, nous sommes en présence du plan euclidien.

Si une et une seule courbure s'annule, la direction de courbure principale correspondante est représentée par une droite (règle). Il est alors courant de classer les surfaces développables selon la distribution de ces règles :

— règles parallèles : surface cylindrique (Fig. 1.14a) ;

— règles concourantes en un point : surface conique (Fig. 1.14b) ;

— règles tangentes à une courbe spatiale : surface développable des tangentes (Fig. 1.14c).



(a) Surface cylindrique (b) Surface conique (c) Surface tangente

FIGURE 1.14 – Classification des surfaces développables selon la distribution des règles

Par le *Theorema Egregium*, nous notons que les surfaces développables sont isométriques au plan euclidien, car tous deux possèdent une courbure gaussienne nulle. C'est cette propriété de déformation sans changement métrique qui confère aux surfaces développables l'essentiel de leurs qualités constructives : toute surface développable peut être générée à partir d'un patron de découpe plan et, à l'inverse, toute surface développable peut être remise à plat sans pli ni déchirure.

En contrepartie, cela a pour conséquence l'impossibilité de former des surfaces à double courbure avec une unique surface développable, sujet bien connu des cartographes qui doivent représenter la géographie terrestre (proche de la sphère) sur un support développable : cylindre (projection de Mercator, Peters…), conique (projection de Lambert, d'Albers…), plan ou azimutale (projection stéréographique, gnomonique…).

Konaković *et al.* [36,37] proposent d'inciser une plaque de façon périodique pour permettre la déformation métrique (auxétique) de la surface et atteindre des formes à double courbure à partir d'éléments plans. Le sculpteur et designer Haresh Lalvani fait usage d'un procédé similaire dans ses œuvres : la double courbure variable de ses surfaces en acier est révélée par l'ouverture variable des incisions qui dénotent du changement de métrique nécessaire pour atteindre ces géométries (Fig. 1.15).

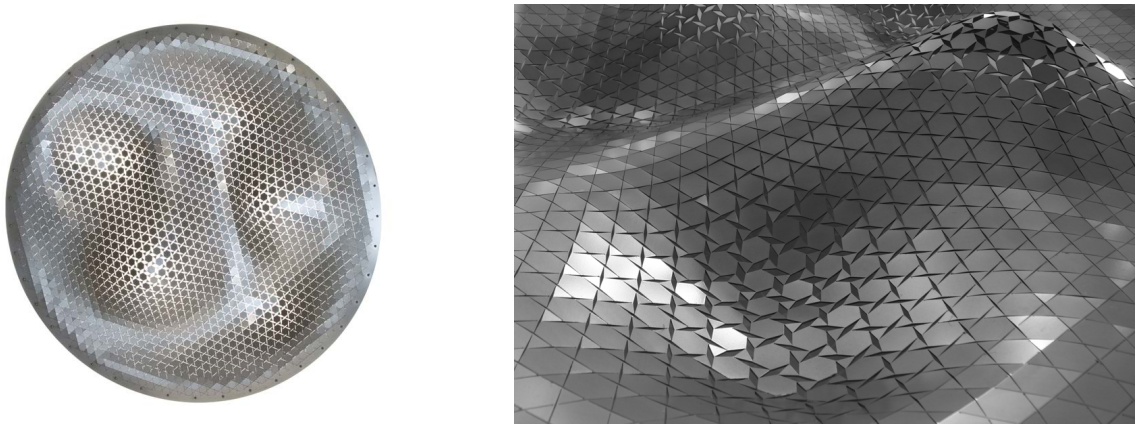


FIGURE 1.15 – Eros, Haresh Lalvani (2007)

Les surfaces développables sont des surfaces régulières et peuvent être décrites par deux paramétrisations équivalentes [38].

La première, appelée paramétrisation directe, s'appuie sur le fait que l'une des deux directions de courbure principale se trouve le long d'une droite. D'après Pottmann et Wallner [27], cela est satisfait si la double condition suivante est remplie :

— en tous points passe une droite incluse dans la surface ;

— le plan tangent à la surface est identique le long de cette droite.

La première condition implique que les surfaces développables appartiennent à la famille des surfaces réglées, surfaces générées par le déplacement d'une droite dans l'espace. La paramétrisation d'une surface réglée $\sigma(u, v)$ s'écrit :

$$\sigma(u, v) = \gamma(u) + vr(u) \tag{1.50}$$

avec $\gamma(u)$, courbe gauche et $r(u)$ un champ de vecteurs le long de $\gamma(u)$.

Pour une valeur donnée du paramètre u, cette paramétrisation représente les lignes droites sur σ. Le vecteur normal $N(u, v)$ est calculé à partir du produit vectoriel des dérivées partielles σ_u et σ_v :

$$N(u, v) = \dot{\gamma}(u) \wedge r(u) + v\dot{r}(u) \wedge r(u) \tag{1.51}$$

Or, d'après la seconde condition, le plan tangent (le vecteur $N(u, v)$) est constant le long d'une règle, donc les vecteurs $\dot{\gamma}(u) \wedge r(u)$ et $v\dot{r}(u) \wedge r(u)$ sont linéairement dépendants, ce qui peut être exprimé par la condition équivalente :

$$\det(\dot{\gamma}, r, \dot{r}) = 0 \tag{1.52}$$

Cette seconde condition distingue les surfaces développables en les définissant comme un sous-ensemble des surfaces réglées.

La seconde paramétrisation est appelée paramétrisation duale. L'expression du vecteur normal (Eq. 1.51) montre qu'il ne dépend que du paramètre u. L'ensemble des plans d'une surface développable est donc une famille de plans à un paramètre qui peut s'écrire sous la forme :

$$a(u)x + b(u)y + c(u)z + d(u) = 0 \tag{1.53}$$

Nous avons défini précédemment les lignes géodésiques comme les courbes de courbure géodésique nulle. Les surfaces développables étant isométriques au plan, elles entretiennent avec les lignes géodésiques une relation identique à celle du plan euclidien avec les droites. En effet, les surfaces développables sont les seules surfaces sur lesquelles la distance entre deux géodésiques peut rester constante. Sur une surface synclastique, les courbes seront nécessairement amenées à se croiser alors qu'on peut trouver une infinité de géodésiques sans intersection sur une surface anticlastique.

La représentation discrète d'une surface développable la plus couramment utilisée [27], appelée D-strip pour *Developable strip*, se base sur la génération des développables des tangentes. La méthode de génération part de l'observation qu'une bande de quadrangles plans peut être développée sur le plan. Un raffinement de la géométrie, tout en conservant la planéité des quadrangles, génère à la limite, une bande développable. Les arêtes partagées par deux quadrangles successifs deviennent les règles et sont tangentes à une courbe de régression polygonale [39] (Fig. 1.16)

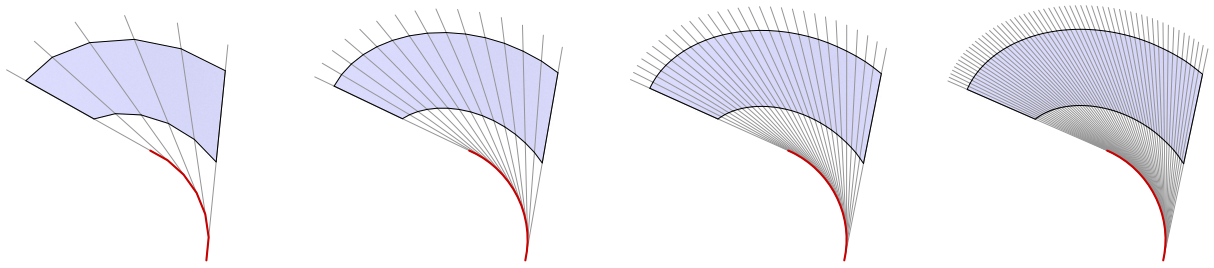


FIGURE 1.16 – Raffinement de quadrangles plans vers une bande développable

Rabinovitch *et al.* [40] proposent une nouvelle représentation discrète des surfaces développables en se basant sur un double réseau orthogonal de lignes géodésiques contraint par des relations d'angles à chaque sommet (Fig. 1.17). Notons que ce type de paramétrisation peut être relié à celui des surfaces de Voss, définies par un réseau conjugué de lignes géodésiques, mais dont l'absence de contraintes sur les angles permet de générer des surfaces à double courbure [41].

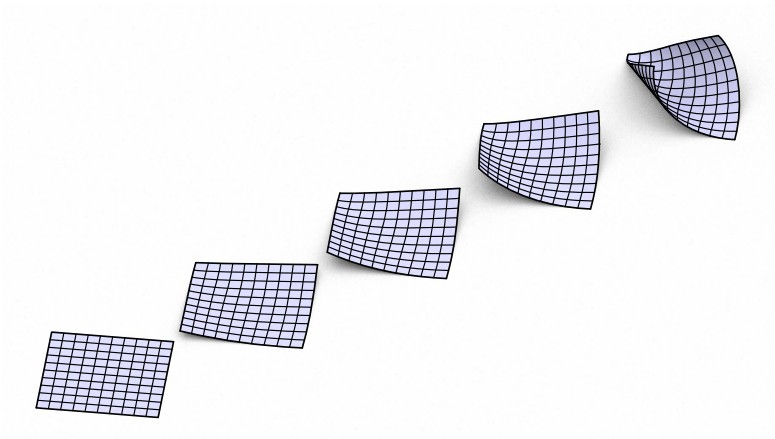


FIGURE 1.17 – Paramétrage par un double réseau orthogonal de lignes géodésiques

1.2 Champs d'études des surfaces développables

1.2.1 Éclairages historiques

L'histoire des origines des surfaces développables est instructive dans le contexte de notre recherche, car elle raconte la découverte de ces surfaces par l'expérimentation, en réponse à des problèmes concrets, un savant dosage entre théorie et applications [42].

Aristote affirme dans *De Anima (I,4)* qu'une ligne, par son déplacement, génère une surface. Sans définir la notion de surface réglée (et *a fortiori* développable), cette vision influencera durablement la façon de concevoir une surface par la cinématique d'une courbe [43–45]. Les premières propriétés remarquables de surfaces développables particulières ont été identifiées par William Hawney en 1717 et Amédée-François Frézier en 1737. Tous deux, auteurs respectivement d'ouvrages sur l'arpentage et la taille de pierre, observèrent la capacité du cylindre et du cône à rouler sur un plan et à être en contact avec celui-ci sur toute sa longueur.

L'étude mathématique des surfaces développables débute environ cinquante ans plus tard avec des contributions presque contemporaines de Léonard Euler et Gaspard Monge [46]. Euler devança légèrement Monge par la publication en 1772 de *De solidis quorum superficiem in planum explicare licet* que l'on peut traduire par *Des solides dont la surface peut se déployer sur le plan*, une réflexion qu'il a développée dans le cadre de son travail sur la cartographie. Pour répondre à cette question, Euler fait l'expérience suivante. Sur une feuille de papier, il trace trois lignes non-sécantes, non parallèles et non-concourantes, puis plie la feuille selon ces lignes ; il se place donc dans le cas général des surfaces développables, excluant ainsi le cylindre et le cône (Fig. 1.18). Euler vient de fabriquer une surface développable discrète !

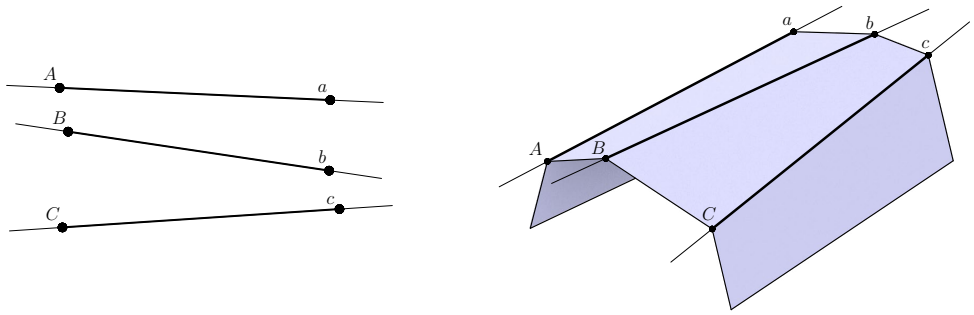


FIGURE 1.18 – Premières intuitions de Léonard Euler

Dans un processus similaire à celui décrit dans la partie précédente, il propose de densifier les lignes pour donner forme à une surface développable continue (traduction de l'auteur d'après [46]) :

> « Augmentons maintenant à l'infini le nombre de ces lignes Aa, Bb, Cc etc. de telle façon à ce que la surface de notre solide devienne courbe en tous points [...]. Alors, il apparaît que de chaque point constituant la surface de tels corps, on peut dessiner au moins une ligne droite totalement contenue dans sa surface ; cependant, cette condition ne suffit pas à satisfaire les données de notre problème, pour lequel il est nécessaire que deux droites proches appartiennent au même plan et par conséquent elles se rencontrent sans quoi elles seraient parallèles. »

Ainsi cette définition correspond-elle parfaitement aux deux conditions de la paramétrisation directe des surfaces développables décrite précédemment.

A la même époque et après avoir lu les travaux d'Euler, Gaspard Monge est confronté à quatre sujets qui occupent une partie du cursus de l'Ecole du génie de Mézières où il travaille en tant que dessinateur : le défilement, la coupe de pierre, les ombres, les déblais et remblais [42]. La résolution de ces quatre problèmes le mène vers le concept de surface développables et il publie ses travaux en 1780 et 1785.

1.2.2 Développements contemporains

En écho aux problèmes concrets et de leurs tracés auxquels a été confronté Monge, les problématiques actuelles autour des surfaces développables se situent souvent autour de leur matérialité et de leur représentation, avec une intensité accrue par l'avènement de l'outil informatique.

Le modèle mathématique des NURBS et les modèles qui ont précédé (courbes de Béziers, B-Splines) ont émergé dans le domaine automobile pour simplifier la description de formes courbes complexes, puis se sont répandus dans tout le domaine de l'industrie. Une partie importante de la recherche a été consacrée à définir les jeux de contraintes à imposer au paramétrage NURBS pour qu'il représente une surface développable. En 1991, Aumann publie *Interpolation with developable Bézier patches* [47], article fondateur qui aura une riche filiation dans ce domaine [48–54].

Pour l'infographie, une représentation discrète des surfaces développables est souvent préférée au modèle NURBS. Plus rapide en temps de calcul et moins contrainte dans la topologie du paramétrage, certains formats de maillages présentent l'avantage d'accueillir nativement le texturage pour le rendu des images. Ainsi, les objets aux caractéristiques mécaniques pouvant être représentées par des surfaces développables (feuilles, tissus, tôles...) ont été le sujet de recherches dans le domaine des images de synthèse [55,56]. La simulation de vêtements, dans leur forme ou leurs mouvements, est étudiée sous l'angle de la contrainte géométrique (conservation des angles et/ou des arêtes du maillage) [57–60] ou de la contrainte mécanique (minimisation de l'énergie de flexion du maillage) [61–64] (Fig. 1.19).



FIGURE 1.19 – Simulation d'un drapeau flottant au vent basée sur un modèle de surface inextensible [63]

Un pan de la recherche sur les surfaces développables est dédié à la reconstruction 3d d'objets dont la surface est théoriquement développable grâce à l'approximation de nuages de points [65] acquis par laserométrie ou photogrammétrie [38, 66, 67]. L'objectif est souvent la remise à plat

virtuelle de l'objet considéré afin de reconstituer l'image sans déformation, par exemple celle d'un parchemin qui ne supporte plus d'être déplié.

De nombreux domaines de l'industrie s'intéressent aux surfaces développables pour leur propriétés constructives, c'est-à-dire leur relative facilité à être mises en forme à partir d'éléments plans.

La construction navale, artisanale ou industrielle, possède un savoir-faire et un outillage pour la mise en forme des tôles de la coque des navires. Cette mise en forme est grandement facilitée si la forme objectif est la plus proche possible d'une surface développable [68–70]. S'appuyant largement sur le travail des NURBS développables, le processus de conception est considéré en intégrant certaines caractéristiques mécaniques des matériaux utilisés [71] ou des propriétés hydrodynamiques des surfaces [72].

Dans la construction aéronautique, de nombreux dispositifs mobiles (volets de bords de fuite, becs de bord d'attaque, gouvernes) ont un rôle essentiel dans le décollage et l'atterrissage ainsi que dans le pilotage des avions. Afin d'impacter au minimum l'aérodynamisme, ces dispositifs sont conçus comme des mécanismes compatibles avec la géométrie développable de l'aile dans laquelle ils prennent place [73, 74].

La conception et la construction de bâtiments à géométrie complexe suivent souvent le procédé suivant [75] : la forme globale du bâtiment, possiblement à double courbure, désignée par le terme *surface de référence*, est subdivisée par un double réseau de courbes appartenant à cette surface. La portion de la surface comprise entre quatre courbes est approchée par un élément d'enveloppe simplifié, d'une géométrie compatible avec les contraintes de fabrication [76–78] (Fig. 1.20). La structure support de l'enveloppe se place généralement selon l'une ou les deux directions du réseau de courbes [35].

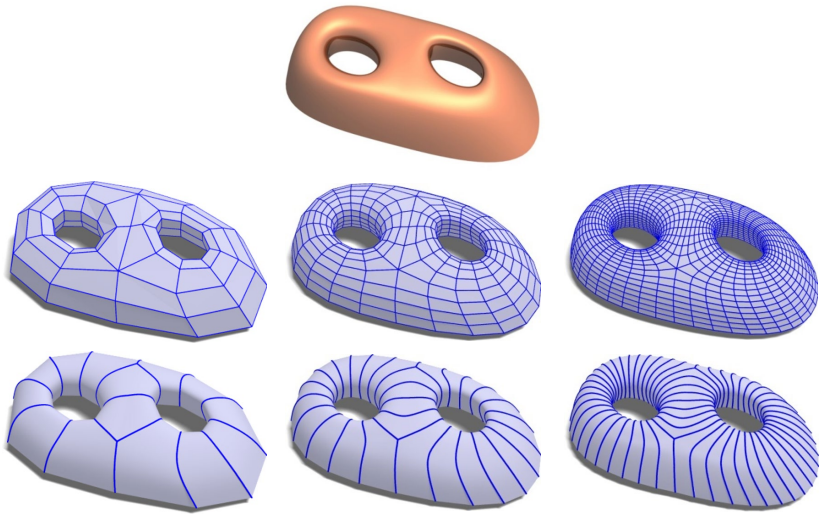
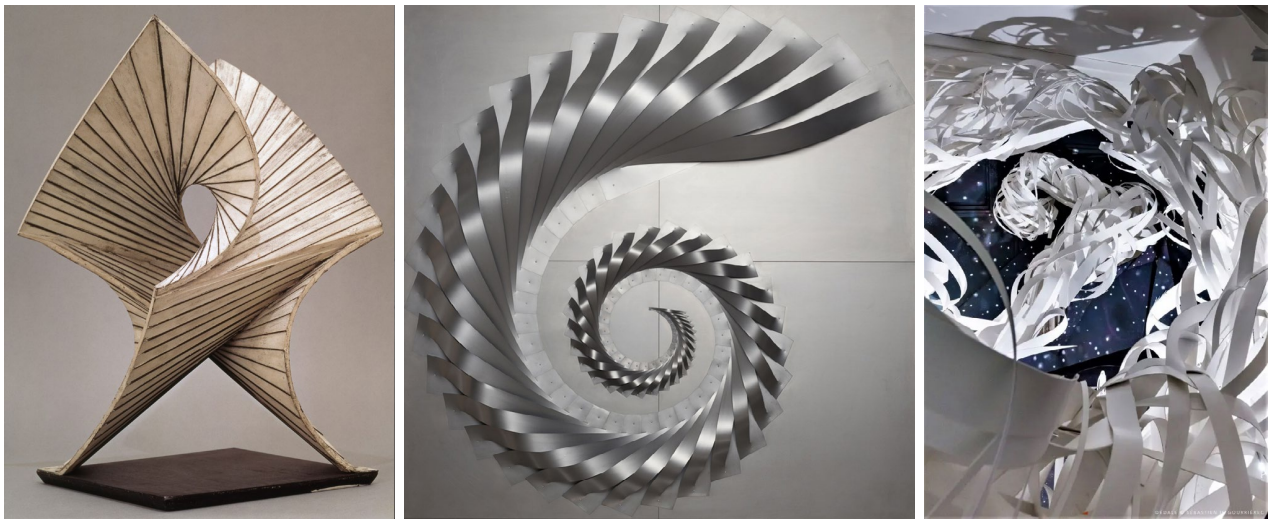


FIGURE 1.20 – Discrétisation d'une forme à double courbure selon le type de panneaux (plan ou développable) et la densité de maillage [39]

L'article de revue *Architectural Geometry* [8] identifie justement ces deux pistes (enveloppe et structure) comme thématiques de recherche. Cependant, alors que le couplage géométrie/mécanique est évoqué par les auteurs pour les structures en compression, les surfaces développables sont uniquement convoquées pour leurs avantages constructifs sans évoquer de recherches sur la dimension structurelle. Nous verrons d'ailleurs dans le paragraphe suivant,

consacré à un état de l'art plus détaillé dans le domaine du bâtiment, que les systèmes constructifs sollicitant la collaboration structurelle des surfaces développables sont assez rares.

Les œuvres d'Antoine Pevsner (1861-1962), sculpteur constructiviste d'origine russe revendiquant ses inspirations scientifiques, offrent une transition entre le domaine que nous venons de traiter et l'utilisation des surfaces développables dans le domaine de l'art et du design. Plusieurs de ses sculptures montrent des surfaces à double nappe formées par les tangentes à une courbe tridimensionnelle [79] (Fig. 1.21a). La beauté plastique de ces surfaces a été également explorée par des artistes comme Ilhan Koman [80, 81] (Fig. 1.21b) ou Matthieu Dagorn (Fig. 1.21c) qui organisent de façon rigoureuse ou chaotique des spirales de bandes de papier (Fig. 1.21). Les œuvres monumentales de Carlo Borer et de Richard Serra structurent l'espace par des surfaces développables réfléchissantes ou mates, minces ou épaisses (Fig. 1.22).



(a) Surface développable
Antoine Pevsner (1939)

(b) Shell
Ilhan Koman (2006 Posthume)

(c) Dédale-level 0
Matthieu Dagorn (2018)

FIGURE 1.21 – L'art des surfaces développables



(a) Torqued Ellipses
Richard Serra (1998)

(b) 424 (Loop)
Carlo Borer (2012)

FIGURE 1.22 – Œuvres monumentales développables

Les designers se sont aussi emparés de ces surfaces pour concevoir des objets du quotidien, comme cette chaise de conception danoise en contreplaqué moulé de Grete Jalk ou encore la série *The Big Easy* de Ron Arad en acier poli (Fig. 1.23).



(a) Chaise GJ Bow
Grete Jalk (1963)

(b) Chaise de la série *The Big Easy*
Ron Arad (2010)

FIGURE 1.23 – Surfaces développables dans le design

1.2.3 Cas d'étude : les pavillons de la Tour Eiffel

Pour illustrer notre propos sur les propriétés géométriques et constructives des surfaces développables, nous rentrons plus en détail dans la conception et fabrication des façades des pavillons du premier étage de la Tour Eiffel (Fig. 1.24). Ce projet a fait l'objet de plusieurs publications [82–84].

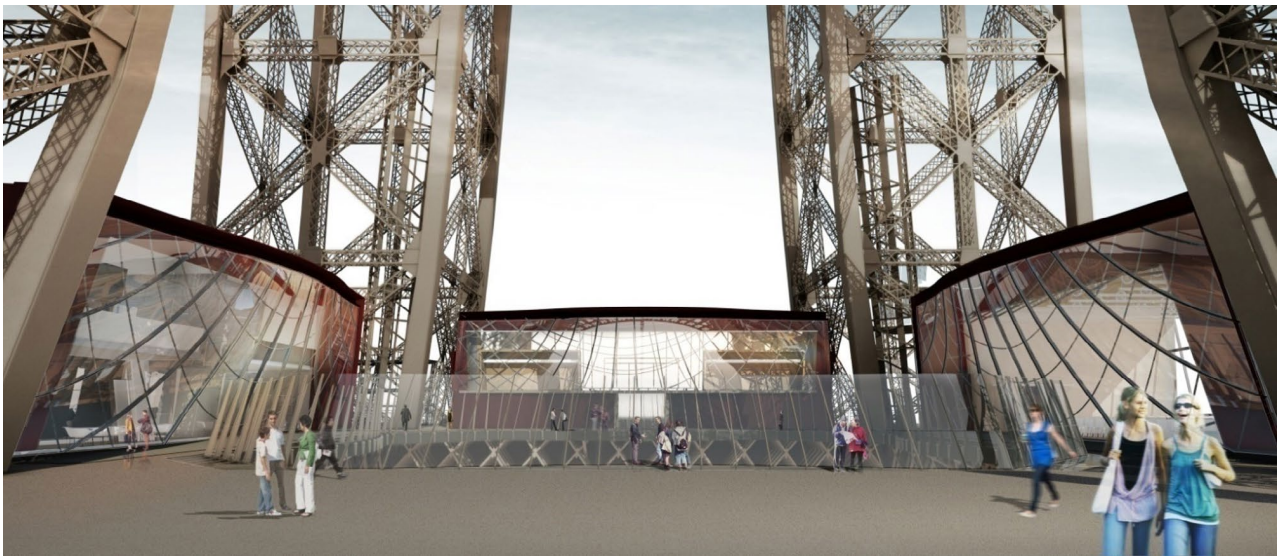


FIGURE 1.24 – Vue générale sur le premier étage de la Tour Eiffel

Il s'agit de la rénovation globale du premier étage du monument. Elle consiste en le remplacement complet des pavillons Gustave Eiffel et Ferrié, de la façade du restaurant 58, de la construction de nouveaux édicules pour les ascenseurs ainsi que la mise en place d'un grand garde-corps vitré et d'un plancher de verre. Le projet a été mené par l'agence Moatti-Rivière, en collaboration dès la phase concours avec le bureau d'études RFR pour les réflexions techniques et géométriques, puis avec le cabinet d'expert Evolute pour l'optimisation géométrique des façades des pavillons.

Toutes les structures font écho à la morphologie de la Tour Eiffel en suivant la direction inclinée des piliers. Cette déformation est exacerbée dans les façades vitrées des pavillons dont la géométrie est à double courbure. Très en amont du projet, il a été décidé de profiter des nombreuses propriétés constructives offertes par la subdivision d'une surface par le double réseau de lignes de courbures principales. Une telle subdivision est toujours possible, mais la distribution de ces lignes est totalement déterminée par la géométrie de la surface et échappe en partie au concepteur. De plus, il est impossible de modifier ces lignes indépendamment de la surface sans perdre les propriétés constructives recherchées. Le processus de projet engagé a donc été de modifier la surface de référence (Fig. 1.25) et les lignes de courbure associées (Tab. 1.2) jusqu'à ce que celles-ci satisfassent les critères architecturaux, structurels et techniques.

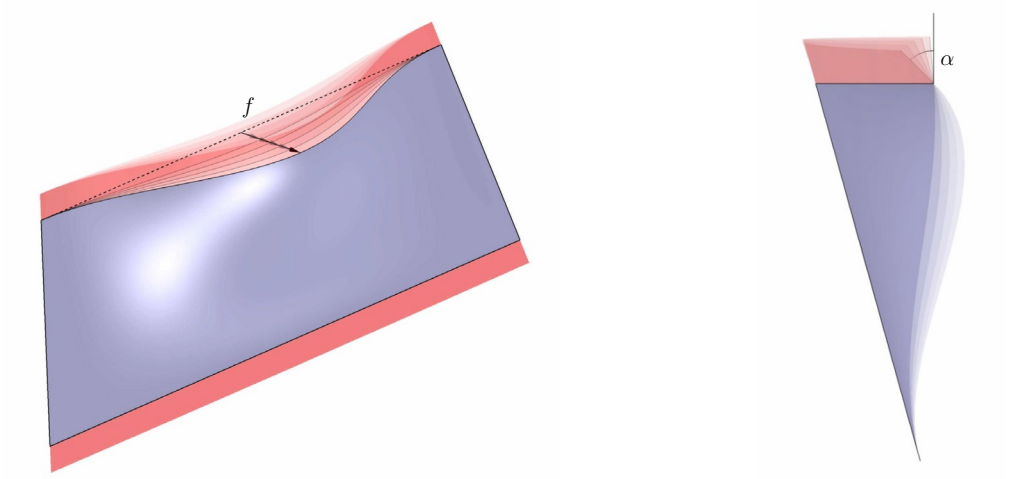
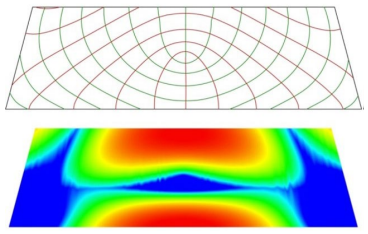
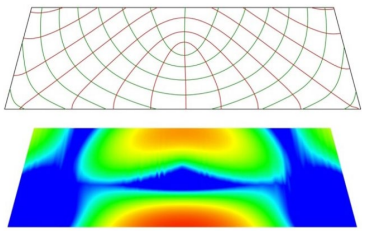
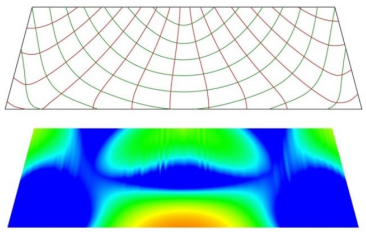


FIGURE 1.25 – Paramétrisation de la surface de la façade en fonction de deux variables : flèche centrale (f) et angle de tangence (α)

TABLE 1.2 – Lignes de courbure et distribution des courbures maximales évoluant en fonction de la forme de la surface [82]

$\alpha = 10°$	$\alpha = 10°$	$\alpha = 10°$
		

Le système de façade développé sur la base des lignes de courbure a su profiter des propriétés des surfaces dévelopapbles qui s'appuient sur un tel réseau. Rappelons que, quel que soit l'angle α formé entre le repère de construction de la bande développable et le repère de Darboux de la ligne de courbure (§1.1.2.6), la bande développable sera bien conditionnée avec des règles incluses dans le plan normal à la courbe.

Les panneaux de la façade en verre s'approchent d'une surface développable tangente à la surface de référence ($\alpha = 0$), ce qui facilitera, dans un second temps, leur discrétisation en portions de cylindre pour des raisons de fabrication (Fig. 1.26 et 1.27a). Quant à la structure, les montants « verticaux » qui reprennent les charges de poids propre et de vent, ont un axe géométrique qui suit une des directions de courbure principale et une section rectangulaire en caisson (Fig. 1.27b).

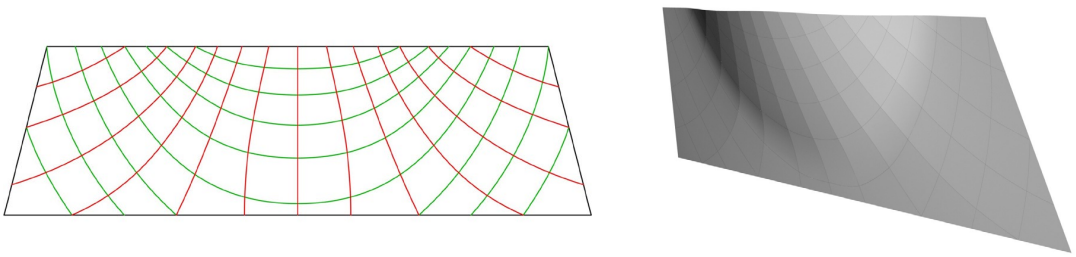


FIGURE 1.26 – Calepinage final et discrétisation de la façade en bandes développables



(a) Panneaux en double vitrage

(b) Montants à section rectangulaire reconstituée

FIGURE 1.27 – Éléments constructifs de la façade

Leur fabrication est grandement facilitée par la disposition selon les lignes de courbures principales puisque les deux semelles sont constituées de surfaces développables tangentes ($\alpha = 0$) et les deux âmes de surfaces développables normales ($\alpha = \pi/2$). Sur la figure 1.28, on voit la séquence d'assemblage d'une maquette en polyéthylène suivant ces principes, mais avec une courbure amplifiée. A noter qu'aucun gabarit de formage n'est nécessaire pour atteindre la géométrie voulue, l'inertie forte des semelles étant disposée perpendiculairement à l'inertie faible des âmes (et *vice versa*), agissant ainsi comme un gabarit mutuel. Un simple dispositif pour maintenir les tôles en contact lors du soudage est mis en place pour l'assemblage des montants.

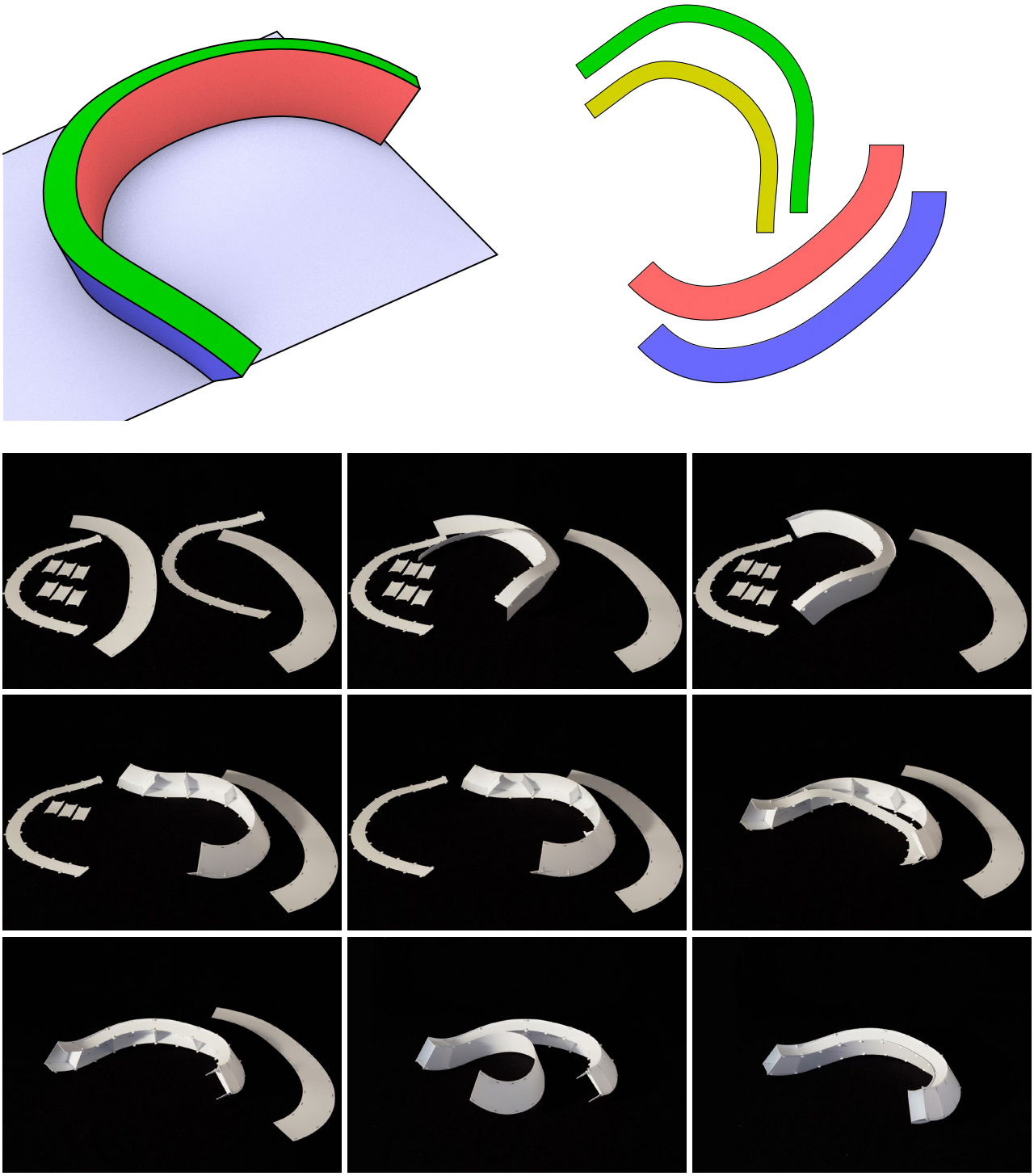


FIGURE 1.28 – Principe de géométrie et d'assemblage pour un montant de façade

1.3 Morphologie structurale des surfaces développables

En 1991, lors du colloque de l'IASS (International Association for Shell and Space Structures) à Copenhague, un nouveau groupe de travail mené par Ture Wester, Pieter Huybers, Jean-François Gabriel et René Motro se constitue autour de la question de la morphologie structurale, dans l'objectif de positionner la démarche de conception structurelle face aux nouveaux enjeux des outils numériques [85]. Le terme *Morphologie Structurale* désigne le processus de conception des systèmes constructifs en interrogeant l'interaction entre les cinq paramètres : *Forme*, *Force*, *Structure*, *Matériau* et *Technologie* [86]

Malgré les quelques lacunes que peut représenter cette classification [87, 88], nous nous appuyons sur celle-ci pour présenter l'état de l'art sur les surfaces développables pour le domaine du bâtiment, dans leur usage actuel pour la pratique de projet et dans la recherche. Les différents paramètres répondent aux définitions suivantes [87–89] (Fig. 1.29).

Forme : terme désignant la géométrie de chaque composant ou de l'ensemble du système.

Force : notion générale regroupant les caractéristiques mécaniques de chargements, contraintes, précontraintes, déplacements, déformations.

Structure : terme décrivant la distribution spatiale et relationnelle des différents éléments constitutifs de l'édifice.

Matériau : ensemble des données caractérisant le comportement mécanique des différents matériaux employés : rigidité, fragilité, rhéologie...

Technologie : terme désignant les processus de fabrication et de construction.

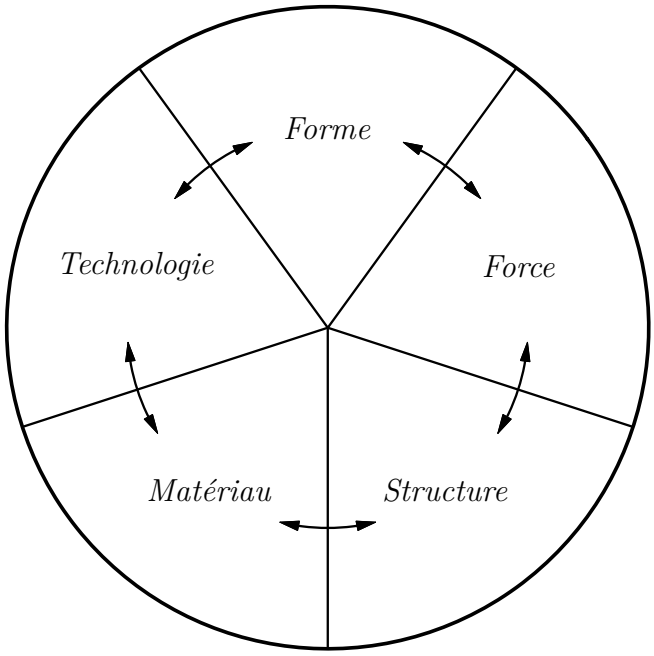
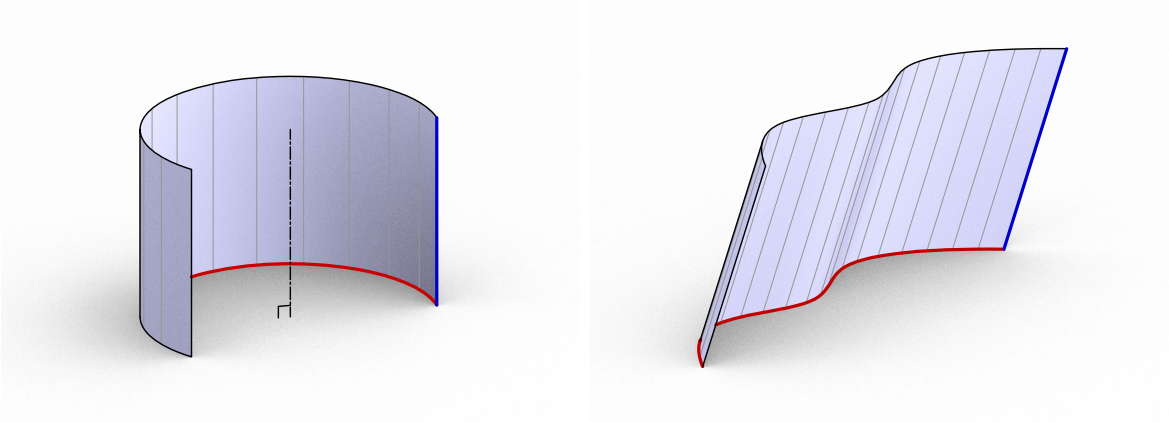


FIGURE 1.29 – Diagramme des paramètres morpho-structurels

1.3.1 Forme

Dans le cadre de nos recherches, le paramètre de *Forme* est évidemment focalisé autour des surfaces développables dont on inventorie certaines propriétés remarquables et modes génératifs.

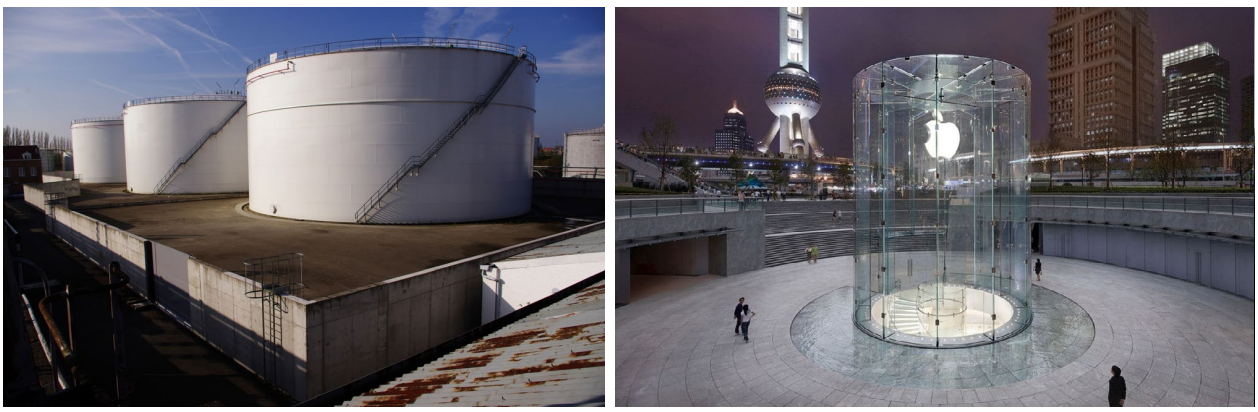
Un cylindre est une surface développable définie par une droite, appelée génératrice (en bleu), décrivant une courbe appelée directrice (en rouge) tout en restant parallèle à elle-même. Si cette courbe est un cercle situé dans un plan perpendiculaire aux génératrices, il s'agit d'un cylindre circulaire droit (Fig. 1.30a). C'est la seule surface développable à courbures gaussienne et moyenne constantes.



(a) Cylindre circulaire droit (b) Cylindre quelconque

FIGURE 1.30 – Surfaces cylindriques

Ce type de surface est couramment utilisé pour sa facilité de représentation, mais également pour les propriétés de répétitivité qu'elle confère aux éléments constructifs qui lui sont relatifs. C'est particulièrement le cas pour les enveloppes vitrées dont les moules représentent une part significative du coût de fabrication [78]. Du domaine industriel comme les réservoirs à hydrocarbure aux ouvrages les plus sophistiqués comme les magasins d'exposition Apple Store (Fig. 1.31), il existe de nombreux exemples bâtis.



(a) La forme cylindrique des réservoirs répond à la pression hydrostatique

(b) Apple Store Shanghai
Bohlin Cywinski Jackson (Chine)

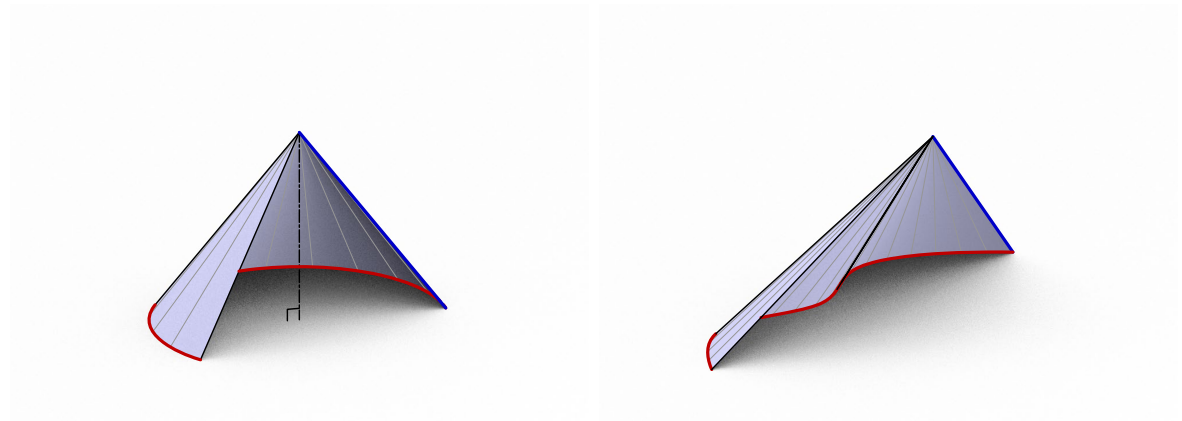
FIGURE 1.31 – Réalisations à géométries cylindriques circulaires

Si la génératrice est une courbe quelconque et/ou que la direction d'extrusion n'est pas perpendiculaire au plan de la directrice, la surface demeure cylindrique, mais perd en répétition (Fig. 1.30b). Seuls les panneaux situés le long d'une même génératrice sont identiques, à moins que ne soit trouvée une période dans la direction de la directrice, comme c'est le cas pour la façade vitrée du nouveau bâtiment de la Samaritaine (Fig. 1.32).



FIGURE 1.32 – Façade vitrée de la Samaritaine
SANAA (France)

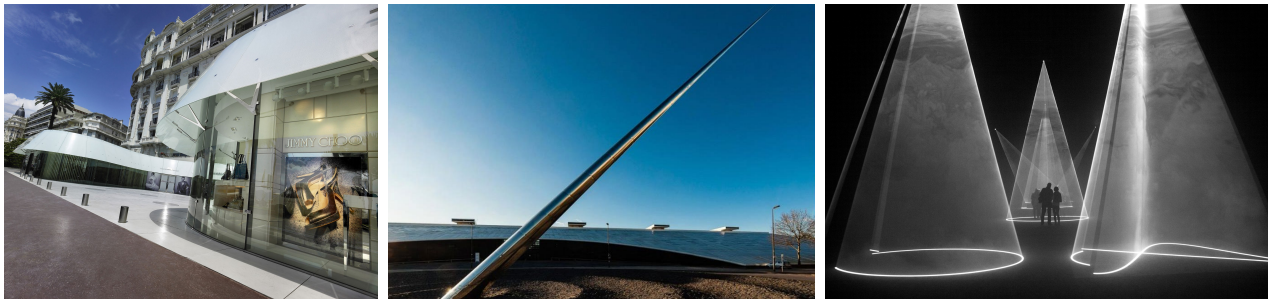
Un cône est une surface développable définie par une droite, appelée génératrice passant par un point fixe (sommet) et un point variable décrivant une courbe appelée directrice. Si cette courbe est un cercle situé dans un plan perpendiculaire à une droite issue du sommet, il s'agit d'un cône de révolution (Fig. 1.33a).



(a) Cône de révolution (b) Cône quelconque

FIGURE 1.33 – Surfaces coniques

Ce dernier présente donc des sections circulaires dans un plan perpendiculaire à l'axe et les panneaux situés le long de ces sections ont des courbures identiques. Les figures 1.34a et 1.34b montrent quelques réalisations architecturales réalisées avec une géométrie de cône circulaire. Si la directrice est une courbe quelconque, alors il n'existe pas de répétition particulière sur la surface (Fig. 1.33b). Cette remarque concerne peu l'artiste Antony McCall, connu pour ses installations aux parois coniques de lumière (Fig. 1.34c).



(a) 65 Croisette
Moatti-Rivière (France)

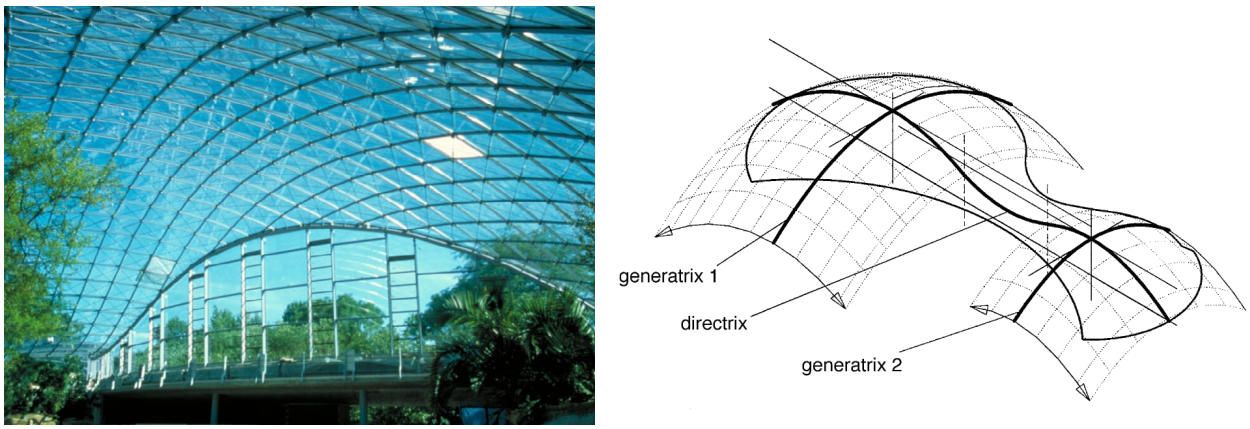
(b) L'Axe de la Terre
Piotr Kowalski (1992)

(c) Vertical Works
Anthony McCall (2017)

FIGURE 1.34 – Réalisations à géométries coniques

Les surfaces de translation, homothétiques et de rotation sont des surfaces à double courbure, mais dont la discrétisation présente des propriétés constructives remarquables [90]. Le tableau 1.3 montre ces trois types de surfaces selon leur géométrie lisse ou leur discrétisation par des bandes développables ou des facettes planes.

Les surfaces de translation sont définies par la translation d'une courbe (génératrice) le long d'une autre courbe (directrice). Si la génératrice et la directrice sont des lignes polygonales, alors la surface de translation devient un maillage de parallélogrammes plans, car chaque face possède des arêtes opposées parallèles. Le bureau d'ingénieurs Schlaich Bergermann & Partners a été pionnier dans l'usage de telles surfaces pour la réalisation de couvertures vitrées de grande portée [91] (Fig. 1.35).

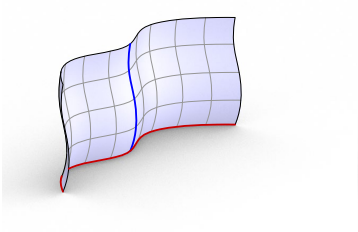
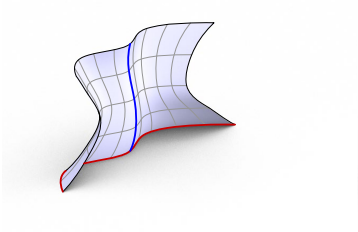
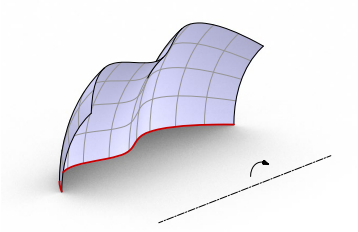
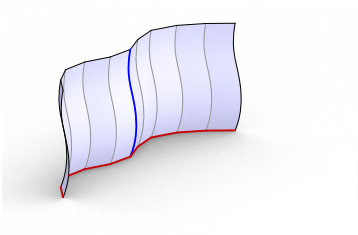
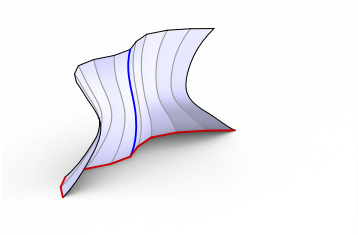
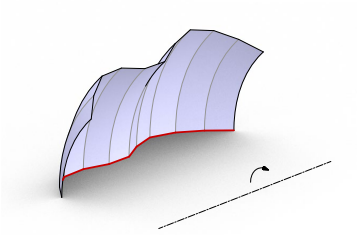
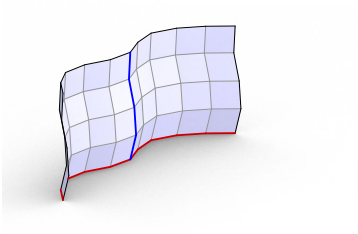
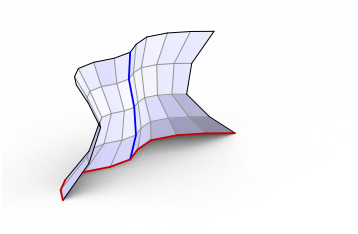
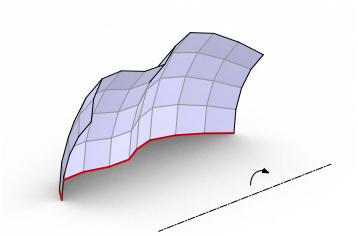


(a) Vue intérieure

(b) Principe géométrique d'après [91]

FIGURE 1.35 – Surfaces de translation : l'enclos des Hippopotames, zoo de Berlin [91]
J. Gribl & Schlaich Bergermann & Partners (Allemagne)

TABLE 1.3 – Discrétisation des surfaces de translation, homothétiques et de rotation

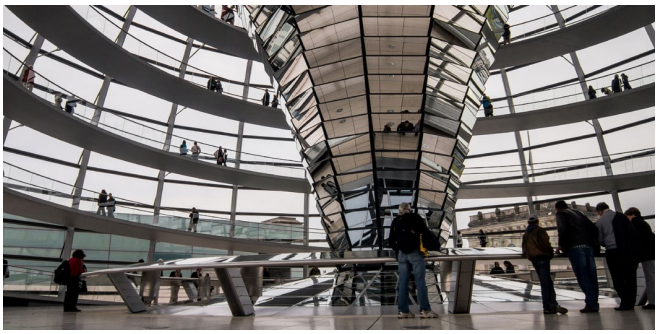
	Surface de translation	Surface homothétique	Surface de révolution
Double courbure			
Simple courbure			
Facettes planes			

Si la génératrice subit, en plus de sa translation le long de la directrice, une homothétie, alors on génère une surface homothétique qui, dans sa représentation discrète, possède cette fois des faces trapézoïdales planes. Le bâtiment de la Sage Gatehead (Fig. 1.36a) de l'architecte Norman Foster [92] s'appuie sur ce type de surface pour unifier les parties opaques et vitrées de l'enveloppe.

Les surfaces de rotation, générées par la révolution d'une courbe autour d'un axe, peuvent être également considérées comme des surfaces homothétiques particulières, constituées de génératrices circulaires centrées sur une directrice rectiligne, géométrie couramment utilisée pour la construction de dômes vitrés (Fig. 1.36b).



(a) The Sage Gateshead
Foster + Partners (Royaume-Uni)



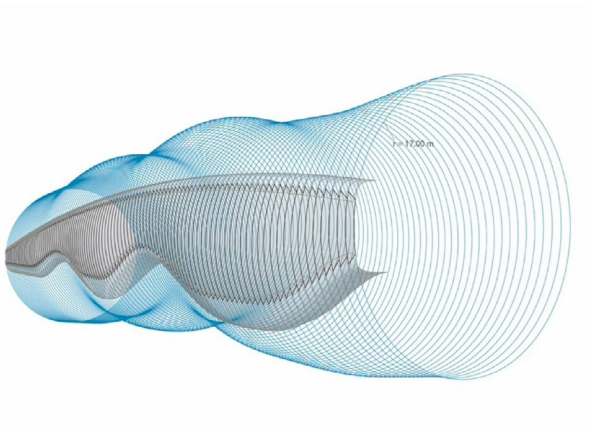
(b) Coupole du Bundestag de Berlin
Foster + Partners (Allemagne)

FIGURE 1.36 – Réalisations à géométries homothétiques et de rotation

Si maintenant la discrétisation de la génératrice est raffinée jusqu'à converger vers une courbe lisse, le maillage de quadrangles se transforme en un assemblage de bandes développables qui s'appuient sur deux génératrices consécutives. Dans le cas de surfaces de translation, les bandes développables sont des cylindres quelconques et dans celui des surfaces homothétiques, il s'agit de cônes quelconques. On peut citer, pour les surfaces de translation à section cerclée, la façade vitrée de la gare de Belfort (Fig. 1.37a), dont la génératrice des cylindres peut être lue dans la direction des traverses de vitrage ou encore la façade mobile du pavillon One Ocean de l'exposition internationale de Yeosu en Corée du Sud (Fig. 1.37b).



(a) Gare TGV de Belfort
Jean-Marie Duthilleul, AREP et Jean-François Blassel (France)



(b) One Ocean Thematic Pavilion
SOMA (2012)

FIGURE 1.37 – Surfaces de translation développables

La gare TGV de Strasbourg qui sera décrite plus en détail dans la partie suivante et le siège social du groupe Cesbron sont des réalisations basées sur les surfaces de rotation et homothétiques semi-discrètes (Fig. 1.38a). Le bâtiment de la soufflerie BMW à Munich montre un assemblage des surfaces développables planes, cylindriques et coniques (Fig. 1.38b).



(a) Salle polyvalente, siège social Cesbron
Agence Bodreau (France)



(b) Soufflerie BMW
Ackermann und Partner (Allemagne)

FIGURE 1.38 – Surfaces homothétiques et de rotation développables

Le lien que nous venons d'illustrer pour les surfaces de translation et homothétiques entre maillage quadrangulaire plan et surfaces développables est généralisable à des familles beaucoup plus larges tant que la planéité des faces est maintenue à mesure du raffinement dans la direction souhaitée : Liu *et al.* [93] examinent le cas des maillages coniques et Mesnil [94] établit les maillages en quadrangles plan sur les surfaces moulure et de Monge.

Afin d'élargir le panel de génération des surfaces développables, on peut aussi identifier quelles transformations conservent la propriété de développabilité [88, 95]. Par exemple, la transformation de Möbius, qui conserve la cocyclicité, transforme un maillage circulaire (tous les points d'une face appartiennent au même cercle) en un autre maillage circulaire ; ce qui est équivalent à dire qu'elle conserve la propriété de développabilité pour un maillage circulaire raffiné.

Une surface d'égale pente est une surface dont la pente par rapport à un plan de référence reste en tout point constante [96]. Elle peut être générée par le balayage, le long d'une courbe plane (directrice), d'une droite (génératrice) contenue dans un plan normal à la directrice et avec un angle constant avec le plan de la directrice (Fig. 1.39).

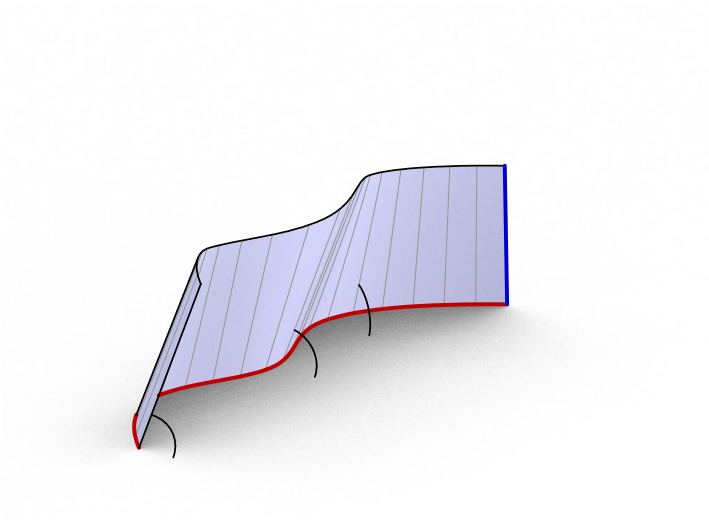
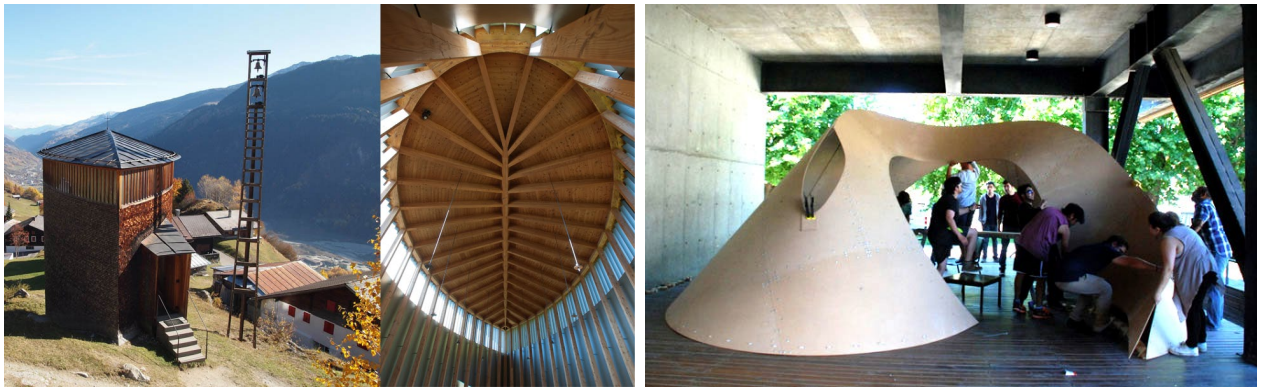


FIGURE 1.39 – Surface d'égale pente

Elle peut également être obtenue par le dépôt de sable sec sur un support polygonal ou courbe. L'angle au repos, caractéristique propre du matériau utilisé, déterminera la pente du tas [97]. Les lignes de pente sont rectilignes et le plan tangent est constant. Ce sont donc des surfaces développables [98] (Fig. 1.40b). Ces surfaces trouvent naturellement leur place dans les formes de toiture, garantissant la pente minimale en tous points pour le bon écoulement de l'eau, l'inclinaison dépendant du matériau de couverture choisi. On en trouve une parfaite intégration dans le projet de la chapelle Saint-Benoît de Peter Zumthor. Sur un plan basé sur la géométrie d'une demi-lemniscate, il pose une toiture à égale pente où les poutres rectilignes s'alignent sur les directions de courbure nulle et les feuilles de zinc de la couverture profitent de la développabilité de la surface (Fig. 1.40a).

Tous les exemples de projets cités précédemment présentent une surface de référence développable et les panneaux de la peau du bâtiment sont de la même nature. Pour les enveloppes à double courbure, il se pose deux questions, éminemment couplées : quelle est la nature géométrique des panneaux matérialisant cette surface et quelles sont les directions de subdivision de la surface à choisir ?



(a) Chapelle de Saint-Benoît
Peter Zumthor (Suisse)

(b) Bio-Dune Pavilion
Université de Séville (Espagne)
& de Bìo-Bìo (Chili) [98]

FIGURE 1.40 – Réalisations à géométrie d'égale pente

Pour répondre tout d'abord à la première question, pour des raisons techniques et financières, les panneaux pouvant être confectionnés facilement à partir de produits du commerce, généralement sous forme de plaques ou de bobines, sont de bons candidats. Plusieurs articles traitent du type de géométrie de panneau à mettre en œuvre selon différents critères [76–78, 99, 100], du plus simple au plus complexe : panneau plan (triangulaire ou quadrangulaire), cylindrique, conique, développable...

A l'exception des panneaux triangulaires, les autres géométries de panneaux nécessitent de traiter la seconde question simultanément. Pottmann *et al.* [8] mettent en évidence que la qualité de l'approximation par des quadrangles plans et *a fortiori* par des surfaces développables, cylindres et cônes sera d'autant meilleure que le réseau de courbes de subdivision s'approche d'un réseau conjugué. Ceci est équivalent à dire que la seconde forme fondamentale pour les deux vecteurs suivant les deux directions du réseau s'annule [93, 101, 102]. Nous avons vu que le double réseau de lignes de courbure est une des configurations possibles de réseaux conjugués orthogonaux (§1.2.3). Pour son installation *Minima/Maxima* à l'exposition internationale d'Astana en 2017, Marc Fornes s'appuie sur les lignes de courbure pour créer une surface constituée de trois épaisseurs de bandes d'aluminium croisées et rivetées (Fig. 1.41).

Cependant, cette approche n'est pas toujours possible et produit des patrons de découpe courbes ; le taux de chute des plaques à partir desquelles sont découpées les bandes peut être important. Wallner *et al.* se sont donc interrogés sur la possibilité de paver des formes libres à partir de bandes développables géodésiques [103]. Le cas d'étude du plafond du lobby de la tour Burj Khalifa [104] donne une illustration des problématiques constructives du sujet (Fig. 1.42a).

Toujours dans l'optique de construire avec de simples bandes droites, suivre les lignes asymptotiques permet d'obtenir, si le plan tangent de la bande développable est normal à la surface de référence ($\alpha = \pi/2$), des patrons de découpe rectilignes. Ainsi est constituée la structure de gridshell asymptotique d'Eike Schling *et al.* [105] (Fig. 1.42b).

Pour l'approximation de surfaces discrètes à double courbure, la technique de la segmentation de maillage décompose une surface en partitions optimales de portions développables, soit sans présupposé sur la forme des patrons de découpe [106–108], soit en guidant l'algorithme vers une forme en bande des développés [109].

Les études que nous venons d'évoquer considèrent généralement la surface développable

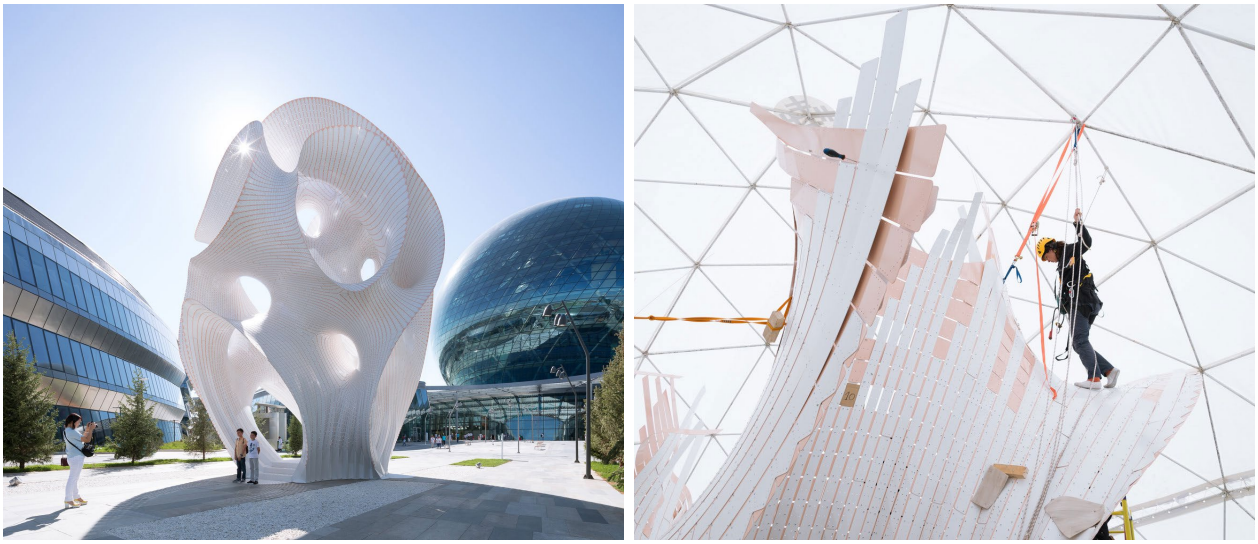


FIGURE 1.41 – Pavillon Minima|Maxima de l'exposition internationale d'Astana
Marc Fornes (2017)

comme un objet dont la géométrie est déterminée isolément ou en relation avec une surface de référence à approximer. Au contraire, les études consacrées au pli courbe s'interrogent sur le lien particulier qu'entretiennent deux surfaces développables couplées par une charnière curviligne. Ces études prennent pour hypothèse que, par déformation isométrique, les deux surfaces peuvent, tout en restant connectées, se développer sur le plan [110, 111]. Une bibliographie détaillée sur le pli courbe est fournie dans le chapitre 2. En revanche, à notre connaissance, le traitement du rapiéçage courbe, connection quelconque entre deux surfaces développables ne faisant pas l'hypothèse du développement sur le plan, n'est pas traité dans la littérature.



(a) Plafond, lobby de la tour Burj Khalifa
SOM, IWA, ICON & GT (E.A.U.)

(b) The Asymptotic Gridshell
Eike Schling (2017)

FIGURE 1.42 – Réalisations à partir de bandes développables rectilignes

1.3.2 Force

Deux questions principales se posent lorsqu'un système structurel sollicite des coques développables.

La première est celle de la caractérisation du comportement mécanique linéaire (déformations et contraintes en petits déplacements) ou non-linéaire (flambement) d'une coque développable présentant un état de contrainte initial nul. La littérature est assez riche pour les primitives géométriques simples telles que le cylindre circulaire ou à rayon variable et les surfaces coniques [112–114]. L'analyse mécanique de surfaces développables plus complexes (développable des tangentes) est le plus souvent abordée numériquement par une analyse aux éléments finis, quoique quelques approches analytiques aient été formulées [115, 116].

La seconde question est relative à la prédiction de la forme et de l'état de contrainte pour un chargement occasionnant de grands déplacements. Pour cela, suivons le raisonnement énergétique de Cerda et Mahadevan [117] et Boudaoud [118] qui explique pourquoi les plaques minces prennent naturellement la forme de surfaces développables en grands déplacements.

Ce qui rend complexe l'étude du comportement des solides en grande déformation tient des effets combinés des non-linéarités géométriques et matérielles, et la possibilité de considérer séparément les deux effets simplifie souvent grandement le problème. Le découplage se produit naturellement dans le cas de plaques minces élastiques qui, malgré de grands déplacements, restent dans le régime linéaire élastique des petites déformations. Il est bien connu que la flexion circulaire d'une plaque rectangulaire génère, en petits déplacements, une déformation en double courbure inverse due à l'effet Poisson occasionné par le raccourcissement de la fibre inférieure et l'allongement de la fibre supérieure. Or ce type de déformation n'est pas celui que nous observons lorsque nous fléchissons de façon plus prononcée une plaque mince (Fig. 1.43).



FIGURE 1.43 – Flexion en grand déplacement d'une carte magnétique

Pour une plaque mince, homogène, isotrope, il existe deux modes principaux de déformation : la déformation membranaire (dans le plan) et la déformation flexionnelle (hors plan). Dans le cas d'un cintrage cylindrique d'une plaque rectangulaire (Fig. 1.44a), les énergies membranaire $\mathcal{W}_M$ et flexionnelle $\mathcal{W}_F$ suivent respectivement les ordres de grandeur :

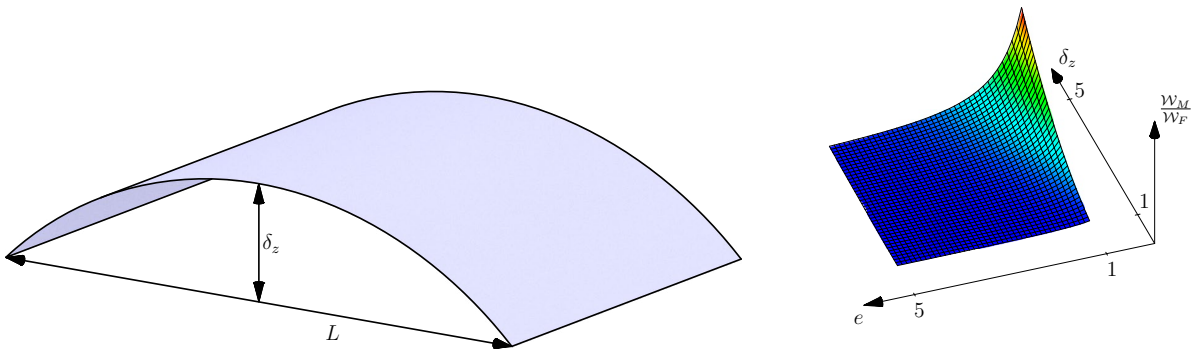
$$\mathcal{W}_M \sim Ee\frac{\delta_z^4}{L^2} \qquad \mathcal{W}_F \sim Ee^3\frac{\delta_z^2}{L^2} \tag{1.54}$$

avec L et e, longueur et épaisseur de la plaque, E, module d'Young et δ_z, déplacement au centre.

Soit un rapport entre l'énergie de membrane et celle de flexion :

$$\frac{\mathcal{W}_M}{\mathcal{W}_F} \sim \left(\frac{\delta_z}{e}\right)^2 \tag{1.55}$$

La formule 1.55 et la figure 1.44b mettent en évidence la prédominance de l'énergie membranaire à partir du moment où le déplacement (la courbure) devient grand devant l'épaisseur de la plaque. Étant donné que les déformations membranaires sont énergétiquement très pénalisantes, la plaque, soumise à un chargement en force ou en déplacement, essaiera de répondre aux conditions imposées sans modifier l'aire de son feuillet moyen, mais en se courbant dans une seule direction dans la géométrie d'une surface développable.



(a) Paramètres de la plaque rectangulaire

(b) Graphe du rapport des énergies

FIGURE 1.44 – Considérations énergétiques pour une plaque rectangulaire

Si les bandes développables sont suffisamment étroites et la courbure suffisamment modérée, alors l'effet Poisson peut être négligé et l'évaluation des contraintes induites par la mise en forme est approchée par un modèle de poutre de type Euler-Bernoulli [119] :

$$\sigma = \frac{eE\kappa}{2} \tag{1.56}$$

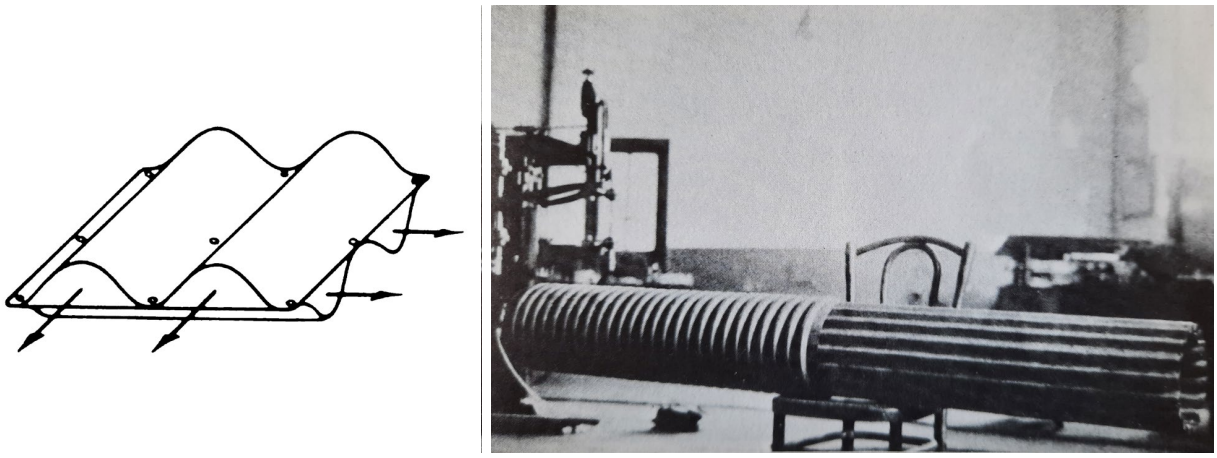
avec κ courbure principale non-nulle de la surface développable au point considéré.

Un modèle plus riche, basé sur l'hypothèse que le feuillet moyen reste une surface développable lors de la déformation de la plaque, est proposé par la théorie inextensionnelle formulée pour la première fois en 1955 par Mansfield et Kleeman [120], Ashwell [121] deux ans plus tard, puis complétée en 1979 par Simmonds et Libai [122]. Selon les conditions d'appui, il peut apparaître une couche limite sur le bord de la plaque afin de concilier les efforts internes (en particulier générés par l'effet Poisson contrarié) et les conditions limites. Elle est perceptible sur la figure 1.43 par la déviation du reflet à proximité des bords (double courbure locale). Cette question de la couche limite, déjà identifiée par Mansfield et Ashley lors de l'établissement de la théorie a été complétée par la suite par Fung et Wittrick [123]. De Véricourt s'appuie sur la théorie inextensionnelle pour l'appliquer au calcul des contraintes lors du cintrage à froid du verre [124] et confronte les résultats théoriques à un banc d'essais numérique par une analyse aux éléments finis. Seereeram et Seffen [125] confirment la théorie inextensionnelle par un volet expérimental.

1.3.3 Structure

La propension des plaques minces à prendre naturellement la forme de surfaces développables par pure flexion informe, en négatif, sur leur faible capacité structurelle quand elles sont soumises à ce type d'effort. Il n'est donc pas étonnant que les systèmes structurels impliquant des surfaces développables distribuent la matière de telle façon à ce qu'elles soient sollicitées en effort axial.

Une première réponse consiste à modifier le profil de la tôle dans une direction afin d'écarter la matière du feuillet moyen de la plaque. Selon la forme, la hauteur et la largeur de l'onde, ce dispositif peut prendre plusieurs appellations : tôles ondulées et bacs nervurés pour une utilisation essentiellement en bardage ou en toiture, ou encore palplanches pour la constitution de murs de soutènement. Norman *et al.* [126] proposent une étude paramétrique concernant la géométrie et la mécanique des tôles à profils ondulés et dégagent des potentiels morphologiques de la déformation isométrique de telles géométries. Robert Le Ricolais s'intéresse également aux tôles ondulées pour leur grande efficacité structurelle dans son article *Les tôles composées et leurs applications aux constructions légères* [127]. Pour porter dans deux directions perpendiculaires, il invente le système *Isoflex* composé de deux feuilles de tôles ondulées rivetées et croisées qu'il applique à des panneaux plans ou à des tubes [128](Fig. 1.45).



(a) Principe d'assemblage plan (b) Disposition en tube

FIGURE 1.45 – Système Isoflex [128]

Les structures à parois contraintes constituent une autre approche pour augmenter la raideur en flexion des plaques minces. Cela consiste à faire collaborer deux parois minces (planes ou courbes) constituées d'un matériaux à haute résistance écartées l'une de l'autre par une âme de moindre performance. Encore une fois, selon l'échelle et les matériaux utilisés, ce principe peut recouvrir différentes appellations : carton ondulé, panneau composite constitué de deux feuilles métalliques et d'un noyau en polymère, panneau sandwich en nid d'abeille si l'âme prend la forme d'un réseau de cellules creuses [129]. A une échelle encore supérieure, les structures à parois contraintes peuvent remplir la fonction d'éléments structurels de grande portée en faisant collaborer deux tôles d'acier écartées par un bac nervuré [130]. Dans son brevet déposé en 1983, Amde M. Wolde-Tinsae propose une méthode pour la mise en forme de structures à parois contraintes courbes [131] : la peau inférieure et le noyau sont solidarisés en atelier, mais ne possèdent pas de rigidité flexionnelle tant que la peau supérieure peut glisser librement.

Après cintrage de l'ensemble, le tout est liaisonné par fixation mécanique pour acquérir son intégrité structurelle (Fig. 1.46).

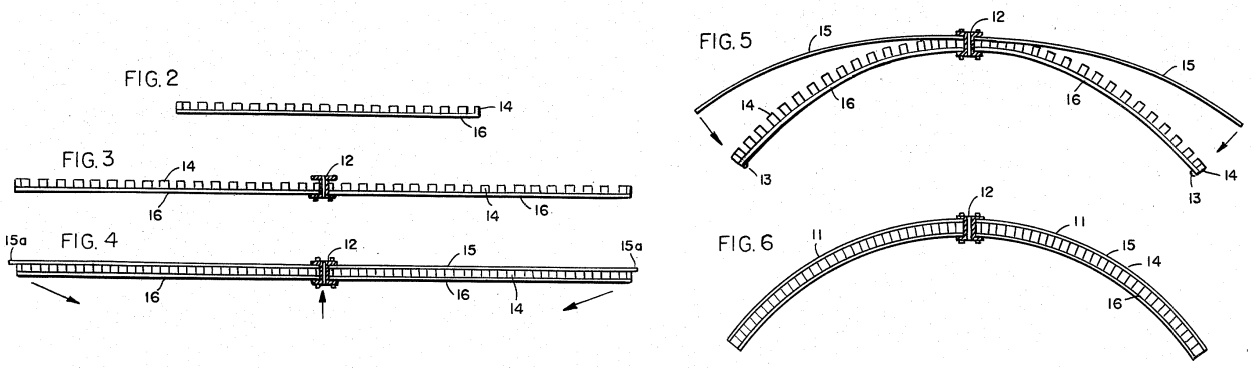


FIGURE 1.46 – Extraits du brevet de Amde M. Wolde-Tinsae [131]
Method of forming a skeletal dome structure in situ

Une autre approche consiste à recomposer des éléments de structure dont les différents composants ont une géométrie de surface développable. La faible raideur de chaque composant pris individuellement facilite sa mise en forme et ce n'est qu'après assemblage de l'ensemble que la pleine capacité structurelle est atteinte. Les éléments de structure linéaires prennent souvent la forme de PRS (Profilé Reconstitué Soudé) de section rectangulaire. Nous avons déjà vu l'exemple des pavillons de la Tour Eiffel (§1.2.3), citons également les poutres du « nid d'oiseau » du stade de Pékin des architectes Herzog et de Meuron [132] et la sculpture monumentale *Band Shell* de Frank Stella (Fig. 1.47).

Les éléments de structure surfaciques reconstitués prennent la forme de caissons ou de surfaces raidies et se rapprochent du fonctionnement des structures à parois contraintes décrites précédemment. La figure 1.48 montre les caissons développables en aluminium, support de la vêture en BFUP de la Fondation Louis Vuitton de Frank O. Gehry.

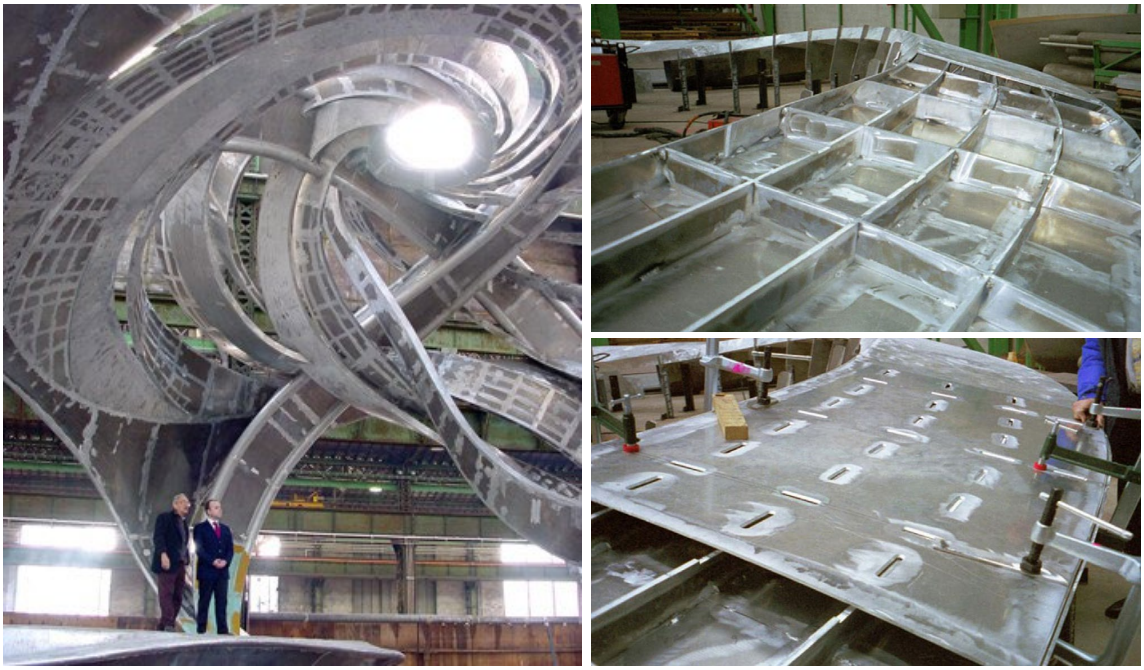
Les systèmes constructifs mis en forme élastiquement sont également des configurations structurelles pouvant tirer parti des propriétés géométriques et mécaniques des surfaces développables. Le principe consiste à cintrer les plaques dans leur domaine élastique, puis à les verrouiller dans une configuration donnée par auto-contrainte ou par des appuis extérieurs. Le *Plydome* [133, 134] de Richard Buckminster Fuller est souvent considéré comme un exemple précurseur en la matière. Une bibliographie plus approfondie est fournie dans la partie suivante.

1.3.4 Matériau

Dans une certaine mesure, tous les matériaux se présentant sous forme de plaques ou de bobines sont susceptibles de prendre la forme de surfaces développables.

Douthe [135, 136], La Magna [137] et Lienhard [138] identifient les enjeux principaux quant au choix des matériaux éligibles pour une structure, en particulier aux composants de géométrie développable.

Évacuons tout d'abord le cas d'une structure dont le processus de mise en forme des composants laisse un état de contrainte initial faible dans le matériau (cintrage à chaud du verre, pièce métallique recuite, bois étuvé...). Cette structure devrait alors remplir les mêmes critères de résistance et de service qu'un système traditionnel.



(a) Vue d'ensemble (b) Assemblage par soudure bouchon

FIGURE 1.47 – Band Shell
Frank Stella (2001)



FIGURE 1.48 – Caissons raidis en aluminium de la Fondation Louis Vuitton
Frank O. Gehry (France)

Dans une structure dont tout ou partie des éléments est cintré élastiquement, le matériau est le lieu de contraintes permanentes dues à la mise en forme élastique de la plaque en même temps que de contraintes induites par les chargements extérieurs. Les éléments structurels semblent alors devoir répondre à deux objectifs contradictoires. A géométrie fixée (épaisseur et rayon de courbure), l'équation 1.56 nous indique en première approximation que la contrainte de cintrage dépend linéairement du module d'élasticité E. Le matériau doit donc être suffisamment souple (Module de Young modéré) d'une part pour permettre une mise en forme aisée, mais surtout pour éviter de générer un état de contrainte trop important. Cela mobiliserait excessivement la réserve mécanique du matériau et diminuerait d'autant sa capacité à répondre aux sollicitations

extérieures pendant la vie de l'ouvrage. La contrepartie du choix d'un matériau relativement souple pour des raisons de mise en forme est la réduction des performances en raideur, quelles soient locales dans le cas d'un panneau de façade, voire globales si l'ensemble du système repose sur le principe de cintrage élastique.

Pour répondre à cette contradiction intrinsèque, La Magna évoque deux pistes. La première envisage un choix adéquat du matériau en fonction de l'analyse de ses caractéristiques mécaniques. La qualité essentielle recherchée est sans doute une haute résistance à la flexion qui permet de concilier les sollicitations internes dues à la mise en forme et celles induites par les actions extérieures. Les diagrammes d'Ashby [139] cartographient les matériaux en fonction de leurs caractéristiques mécaniques. Le diagramme de la figure 1.49, exprimé en fonction du module d'élasticité (en abscisse) et de la contrainte maximale admissible (en ordonnée) est recentré autour des matériaux de construction utilisés dans ce type d'application : métaux en gris (acier, aluminium, zinc, titane), bois de divers essences et contreplaqué en marron ainsi que les polymères renforcés, en fibre de verre ou de carbone en vert et produits verriers en bleu. Notons que pour ce dernier, la contrainte de rupture théorique a été réduite aux contraintes de travail habituellement retenues pour tenir compte de la nature fragile du matériau.

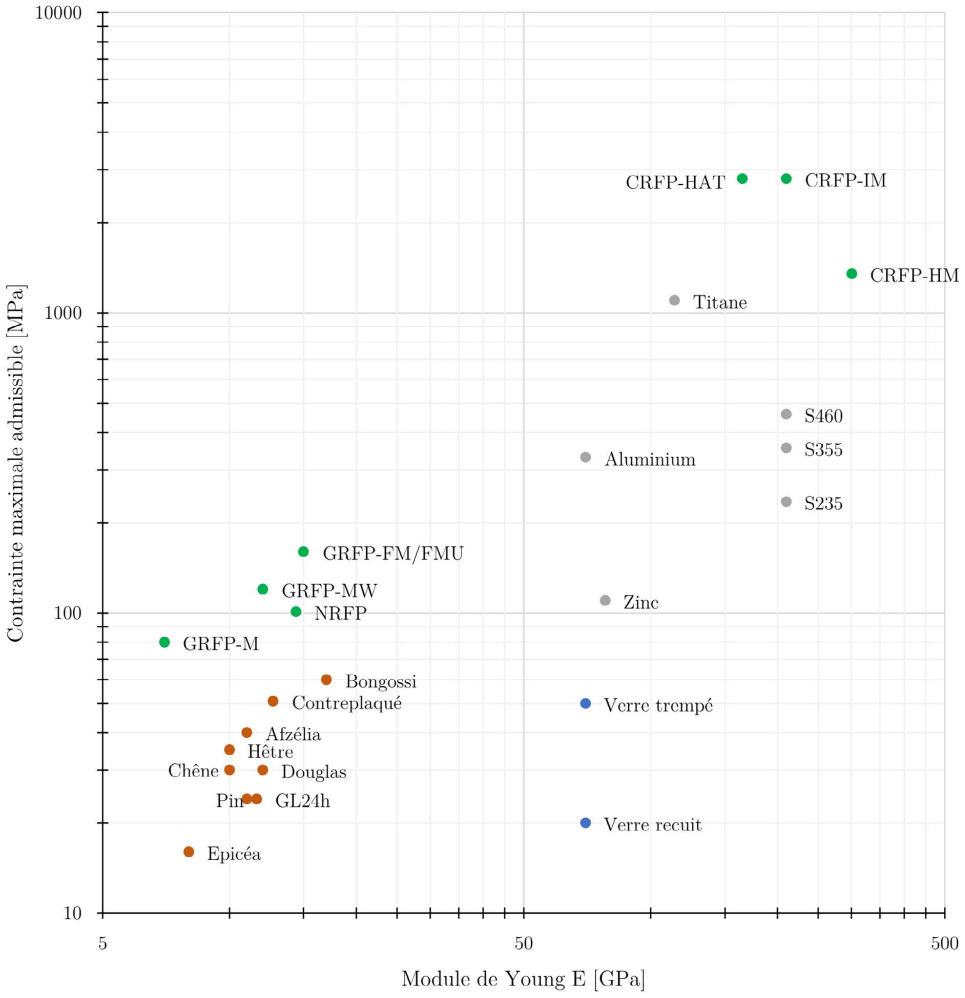
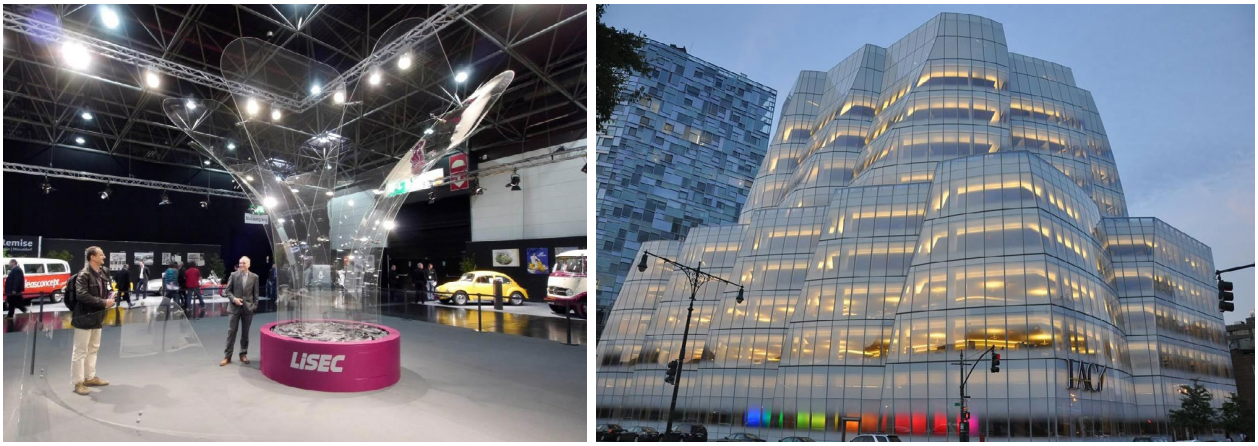


FIGURE 1.49 – Diagramme d'Ashby autour des matériaux utilisés pour le cintrage élastique

Les matériaux les plus adaptés à une mise en forme élastique, c'est-à-dire présentant simultanément une bonne capacité de déformabilité et une haute résistance, se rapprochent de la partie supérieure gauche du diagramme d'Ashby. Rares sont les matériaux qui remplissent cette double exigence, car la propriété de haute résistance va souvent de pair avec celle d'une forte rigidité (partie diagonale du diagramme). On peut cependant observer que la famille des polymères renforcés, qui se scinde en deux groupes selon qu'ils sont renforcés en fibre de verre ou de carbone, est celle qui se rapproche le plus de nos exigences ; le premier groupe favorise davantage la déformabilité au dépens de la résistance, à l'opposé du second. Une observation similaire, avec des performances légèrement inférieures, peut être formulée pour les familles des bois et des métaux : le bois est relativement souple à défaut d'être résistant alors que les métaux possèdent les caractéristiques inverses. Enfin le verre, pénalisé par les coefficients de sécurité imposés par sa nature fragile, possède un module d'élasticité relativement important et reste un matériau d'exception pour une application de mise en forme élastique.

Le choix du matériau se situe donc dans un juste équilibre entre résistance et rigidité, mais aussi selon les caractéristiques géométriques (courbure) et les conditions de chargements de la structure. Ainsi une installation artistique en intérieur pourra consacrer l'essentiel de la résistance mécanique de ses matériaux à leur mise en forme (Fig. 1.50a), alors qu'une façade vitrée devra limiter sa courbure pour dédier une part importante de sa résistance mécanique en réponse aux charges de vent (Fig. 1.50b).



(a) Sculpture en verre ultra fin 2×2 mm
Arup (*Glasstec* 2012)

(b) Siège social IAC
Frank O. Gehry (Etats-Unis)

FIGURE 1.50 – Réalisations en verre cintré à froid

La seconde piste remet en question ce raisonnement purement matériel en faisant intervenir la résistance de forme ou certains dispositifs constructifs comme réponse à la contradiction relevée précédemment. Les contraintes internes peuvent alors être significativement diminuées en même temps que l'épaisseur de la plaque et la raideur reconstituée par l'assemblage de plusieurs éléments au sein de PRS ou de caissons décrits précédemment.

Enfin, d'autres problématiques matérielles sont à considérer comme le fluage, en particulier pour le bois et les polymères renforcés étant donné la charge permanente due au cintrage ou encore la fatigue des matériaux qui intervient plus spécifiquement dans le cadre de dispositifs cinétiques [140, 141] (Fig. 1.51).



FIGURE 1.51 – One Ocean Thematic Pavilion
SOMA (Corée du Sud)

1.3.5 Technologie

Dans sa thèse *Repetitive Structure*, Schling [75] recherche les dispositions à mettre en œuvre pour concevoir et construire des formes à géométrie complexe en ayant recours à un maximum de répétition. Il identifie trois stratégies constructives pour éviter la pièce unique : les déformations, les tolérances, les rotations. Nous nous appuyons sur cette classification pour aborder la question technologique des surfaces développables.

1.3.5.1 Variabilité

Lorsqu'aucune des trois stratégies n'est possible ou souhaitée, les pièces constitutives du système sont uniques, c'est-à-dire que leur patron de découpe et/ou leur forme tridimensionnelle (voir paragraphe suivant) ne présentent pas de répétition. Ceci advient nécessairement si on approxime une surface à double courbure sans symétrie particulière.

Les pièces sont découpées à plat à l'aide de machines à commande numérique après mise en tôle (nesting) par un algorithme d'optimisation de chutes. Le choix de la technologie de découpe dépend essentiellement du matériau et de son épaisseur. On trouve principalement le découpage laser [142], plasma et oxycoupage [143], à jet d'eau [144] et le fraisage. La géométrie des bords de la pièce détermine le nombre d'axes de la machine : une machine trois axes pourra découper une pièce de forme libre en plan, mais les champs resteront perpendiculaires au plan de la plaque (Fig. 1.52a). En revanche, les machines cinq axes et robots six axes donnent plus de liberté dans la géométrie de la découpe (Fig. 1.52b).

Les systèmes industriels de couverture en bac aluminium ou acier à joints debouts de type Kalzip® ou Bemo® ont développé des outils de façonnage afin de pouvoir couvrir des géométries complexes de toiture [145] (Fig. 1.53).

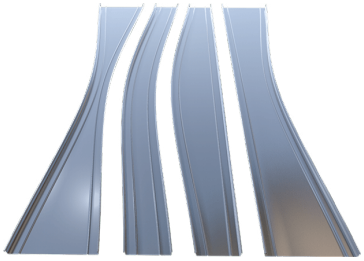


(a) Oxycoupage trois axes des nœuds d'assemblage de la coupole du British Museum Foster + Partners (Royaume-Uni)

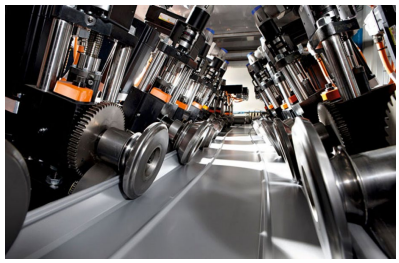


(b) Usinage cinq axes des assemblages à queue droite du pavillon ICD/ITKE 2011

FIGURE 1.52 – Découpe de pièces uniques



(a) Forme des bacs en plan



(b) Façonnage des rives et mise en forme



(c) Zénith de Châteauroux Blond et Roux (France)

FIGURE 1.53 – Système de couverture Bemo®

1.3.5.2 Déformations

Nous nous limitons ici aux déformations développables, qui peuvent être effectuées à moindre énergie, sans déformation métrique et à partir d'un patron de découpe plan. Cette mise en œuvre économe s'oppose à celle en double courbure qui nécessite un outillage important et donc de plus grandes séries pour en amortir le coût [146]. Des pièces développables possédant un même plan de découpe sont toutes identiques à une déformation isométrique près, ce qui peut présenter des économies d'échelle au niveau de la fabrication, de la logistique et du transport.

On distingue deux types de mise en forme. Le premier est élastique, réversible et nous l'avons déjà évoqué dans les parties concernant les paramètres de conception *Structure* et *Matériau*.

Le second type de mise en forme est irréversible et prend diverses modalités selon le matériau considéré.

Le verre est chauffé au-delà de la température de transition vitreuse soit environ 620 °C. Il peut être mis en forme sur un moule métallique fixe puis refroidi lentement et de façon contrôlée pour donner un verre recuit ou refroidi rapidement dans une machine de cintrage à rayon variable pour donner un verre trempé [82, 99].

Le bois cintré fait souvent l'objet d'un laminage/collage/étuvage sous presse en forme pour

lui donner sa géométrie définitive [147]. Pour éviter l'usage du moule, les consultants en fabrication digitale Design-to-Production inventent un principe de cintrage du bois appelé *Zip Shape* [148–150]. Ils programment la forme de la surface dans les dentelures à géométrie variable de deux plaques assemblées sous vide (Fig. 1.54).

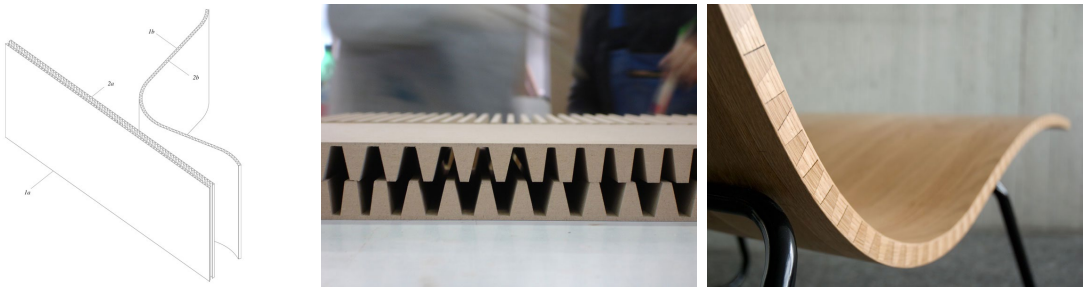


FIGURE 1.54 – Système *Zip Shape* [148]
Design-to-Production (2007)

Pour l'acier, les tôles sont entraînées dans une rouleuse à trois ou quatre rouleaux qui appliquent un effort continu de flexion au-delà de la limite élastique du matériau. Selon le type de rouleau dont est équipée la machine, il est possible de former des portions de cylindres et des troncs de cônes lisses (Fig. 1.55a). Une autre technique consiste à former la tôle par croquage, c'est-à-dire par plis successifs le long des règles de la surface. On obtient alors une géométrie d'aspect facetté (Fig. 1.55b).



(a) Roulage (b) Croquage

FIGURE 1.55 – Mise en forme de cônes métalliques [151]

Les panneaux composites se mettent en forme de façon relativement similaire, soit par roulage, soit par pliage. Dans la deuxième hypothèse, le pli est facilité par l'usinage d'une des deux peaux et de l'âme du panneau (Fig. 1.56)

Enfin, les surfaces développables peuvent avantageusement être employées comme moules variables. C'est le cas pour les panneaux de béton haute performance de la Fondation Louis Vuitton [153]. La surface de référence étant développable et le calepinage constitué d'un double réseau de lignes géodésiques parallèles, tous les panneaux, à l'exception de ceux de rive, ont pour forme développée un rectangle d'environ $1500 \times 400\,\text{mm}$. La conception tire parti de cette régularité afin de limiter le nombre de moules en les réutilisant dans différentes configurations



(a) Usinage du panneau [152]

(b) Technoid Tower M-CDC Workshop Université de sciences appliquées TH OWL (Allemagne)

FIGURE 1.56 – Mise en forme par pliage de panneaux composites type Alucobond®

de courbure. Les panneaux en Ductal® sont formés dans des moules flexibles en silicone sous vide et sont déposés sur un support en polystyrène usiné qui leur donne leur géométrie. Le support, qui reste propre pendant le processus de moulage, est ensuite recyclé et réinjecté dans le processus (Fig. 1.57).



(a) Coulage

(b) Mise sous vide, dépôt sur la forme

(c) Véture mise en œuvre

FIGURE 1.57 – Mise en forme des panneaux en BFUP de la Fondation Louis Vuitton [153] Frank O. Gehry (France)

1.3.5.3 Tolérances

La stratégie constructive des tolérances consiste à accepter et à intégrer dans le système certaines discontinuités géométriques afin de permettre la répétition des composants. Ces discontinuités peuvent être de deux types.

Le premier type de discontinuité se situe dans le plan de la surface et peut engendrer des espacements variables [154] (Fig. 1.58a) ou des superpositions au niveau de la jonction entre deux panneaux. Cette disposition offre une alternative à une découpe variable des panneaux,

cette variabilité étant absorbée dans la largeur du joint ou dans la zone de superposition. La couverture du stade Olympique à Munich de Frei Otto et celle du bâtiment Weatherhead School de Frank O. Gehry s'appuient sur ce principe pour un format unique des tuiles en acrylique pour le premier et en acier inoxydable pour le deuxième (Fig. 1.58b).

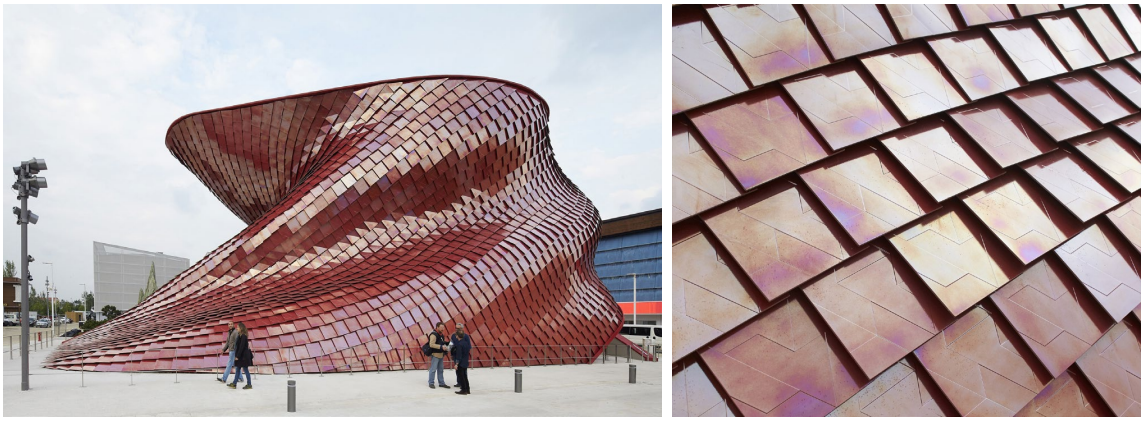


(a) Musée Soumaya
Fernando Romero (Mexique)

(b) Weatherhead School of Management
Frank O. Gehry (Royaume-Uni)

FIGURE 1.58 – Discontinuité des panneaux dans le plan

Le second type de discontinuité se situe perpendiculairement à la surface de référence. Ce type de tolérance apparaît typiquement lors de l'approximation de surfaces complexes par des panneaux à géométrie plus contrainte. Les divergences hors-plan doivent alors être suffisamment faibles pour être absorbées dans le système d'accroche des façades, comme c'est le cas pour les façades vitrées des pavillons de la Tour Eiffel [82] ou les voiles de la Fondation Louis Vuitton [99], toutes deux approchées par des cylindres circulaires de différents rayons. Au contraire, cette divergence peut être assumée d'un point de vue architectural et l'enveloppe prendra l'aspect d'écailles (Fig. 1.59), à la manière de poses traditionnelles de couverture en ardoise par recouvrement.



(a) Vanke Pavilion
Studio Libeskind (Italie)

(b) Vue de détail

FIGURE 1.59 – Discontinuité des panneaux hors plan

1.3.5.4 Rotations

Alors que la stratégie constructive des tolérances supposait une discontinuité en position (dans le plan ou hors-plan), celle des rotations suppose plutôt une discontinuité en tangence entre deux éléments adjacents. Mécaniquement, ces deux éléments sont libres de tourner l'un par rapport à l'autre autour d'un point fixe. Ce concept est plutôt observé sur des éléments de structure linéaire : la variabilité angulaire entre deux membrures est reprise dans ce degré de liberté de la structure.

On peut tenter une extrapolation de ce principe aux éléments surfaciques en supposant une articulation linéaire le long de la jonction entre deux surfaces développables. Le pli courbe, déjà évoqué dans le paragraphe dédié au paramètre de conception *Forme*, répond à cette définition et ses potentialités morphologiques ont suscité beaucoup d'intérêts, en particulier dans le cadre de structures déployables [155, 156] (Fig. 1.60). Cependant, comme déjà souligné, le pli courbe n'est qu'un cas particulier de la configuration d'articulation linéaire et l'étude du cas général du rapiéçage courbe fait actuellement défaut.

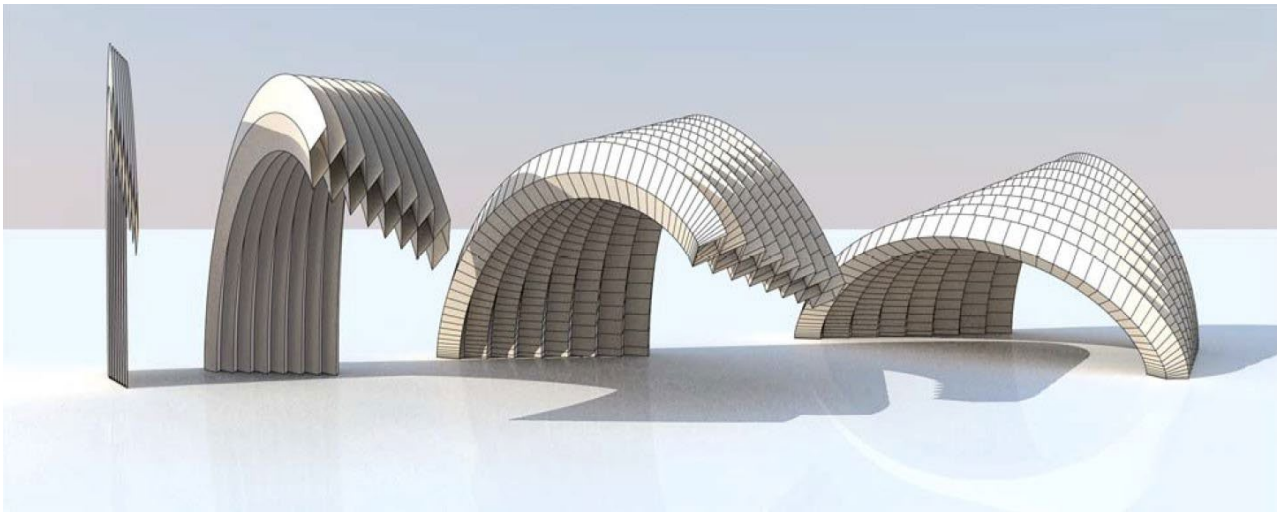


FIGURE 1.60 – Plusieurs formes atteignables par la cinématique du pli courbe [155]

1.4 Processus de conception

1.4.1 Rationalisation géométrique

Selon Mitrović [157], avec Alberti (1404-1472) vient la différenciation entre l'acte de concevoir et l'acte de construire (traduction de l'auteur) :

> « Alberti suppose [...] une forte séparation entre l'architecte en tant qu'auteur, qui détermine les linéaments ou formes immatérielles de l'édifice, un travail qui s'effectue dans l'esprit, et la main de l'artisan qui impose ces formes à la matière. »

Loin d'affirmer que l'architecte conçoit sans considérations constructives, ce découplage polarise cependant le temps du projet [158]. Pour un projet conventionnel, la matérialité de l'édifice peut être considérée relativement indépendamment de la morphologie et intervenir plus tardivement. En revanche, la rationalisation, c'est-à-dire le processus visant à rendre une intention architecturale faisable aussi bien d'un point de vue économique, technique ou même normatif en adoptant sa morphologie, est un moment crucial de la conception pour une enveloppe à géométrie complexe et doit prendre part au processus dès les phases amont. La littérature s'accorde pour identifier trois catégories selon le moment où intervient ce processus au cours du projet [82, 159–161].

Le principe de *pré-rationalisation* consiste à restreindre volontairement l'espace de conception à certaines classes de surfaces dont les propriétés constructives sont bien connues, ce qui suppose de figer le système constructif très en amont du projet. L'avantage de cette méthode est la possibilité d'explorer, en temps réel, de multiples solutions [31] étant donné la nature bien définie de la géométrie. En contrepartie, les latitudes laissées par cet espace de conception peuvent être trop restreintes pour satisfaire les contraintes du projet, comme l'a constaté le bureau d'ingénierie Schlaich Bergermann & Partners en essayant de générer des surfaces homothétiques pour couvrir la cour du Palacio Comunicaciones [162].

A l'opposé, le principe de *post-rationalisation* laisse libre cours à la définition d'une surface répondant au mieux aux contraintes et aux intentions architecturales. Ce n'est que dans un second temps que la surface et le calepinage sont ajustés afin de les rendre compatibles avec une faisabilité technique et financière. Cette approche a bénéficié d'une recherche assez active récemment [8, 76, 77].

A mi-chemin entre les deux approches précédentes, la *co-rationalisation* s'appuie largement sur la définition paramétrique des projets avec des logiciels tels que *Grasshopper* ou *Digital Projet/CATIA*. Ceccato [163] décrit la possibilité d'adapter la conception à mesure que les différentes contraintes de fabrication sont identifiées grâce à la flexibilité propre aux outils paramétriques. Cette approche est souvent une combinaison *ad hoc* d'hypothèses de pré-rationalisation et d'optimisation relevant plutôt de la post-rationalisation. La littérature à cet égard décrit davantage les stratégies mises en place pour un projet spécifique que des méthodes génériques.

Austern *et al.* [22], dans leur article *Rationalization methods in computer aided fabrication : A critical review*, couvrant plus de 500 articles, relèvent des biais assez marqués selon le contexte où sont menés les projets : académique, pratique professionnelle ou collaboration des deux (Fig. 1.61). Le contexte académique favorise largement la pré-rationalisation, alors que les co et post-rationalisations prennent une part plus importante dans le contexte de la pratique professionnelle. Les auteurs expliquent cette tendance par un contexte académique dans lequel le concepteur est également souvent le constructeur, maîtrisant ainsi à la fois un

domaine d'étude ciblé et l'ensemble du processus, alors que le contexte professionnel fait intervenir plus tardivement les décisions concernant la matérialité du projet et en conséquence sa rationalisation.

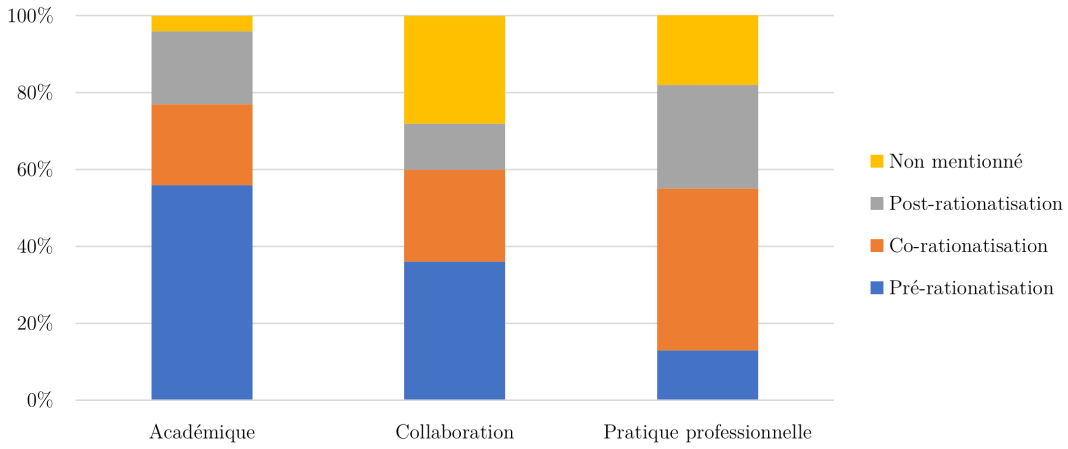


FIGURE 1.61 – Type de rationalisation pratiquée selon le contexte de projet
Graphique établi à partir des données de [22]

1.4.2 Morphogenèse

Bagnéris *et al.* [86] analysent les couplages entre les paramètres de conception de la morphologie structurale pour dégager des familles de formes possédant des dénominateurs communs dans leur démarche de conception. Trois classes de formes sont proposées : les formes *analytiques*, les formes *mécaniques* et les formes *flexibles*. Williams [164] parvient à des catégories similaires : les formes *géométriques*, les formes *physiques* et les formes *sculpturales*. Cette grille de lecture, qui se superpose partiellement avec celle de la stratégie de rationalisation exposée précédemment, nous servira de support pour compléter notre état de l'art, plus orienté sur les exemples construits.

1.4.2.1 Formes analytiques

Les formes analytiques sont générées par une définition géométrique qui possède des propriétés remarquables (symétrie, régularité de la courbure...). Elles sont souvent basées sur les figures élémentaires du plan : la droite, les polygones réguliers, le cercle. Selon la façon de mouvoir ces figures dans l'espace, on peut générer nombre de surfaces bien connues comme le cylindre, le tore, le cône, la sphère, les surfaces réglées et développables. Les quadriques complètent le vocabulaire formel des surfaces analytiques employées en architecture.

Les formes analytiques témoignent d'un fort couplage entre les paramètres de conception *Forme* et *Technologie*, car leur description rigoureuse et la régularité géométrique dont elles font preuve, sont exploitables à des fins constructives. Ce type de forme correspond généralement à une approche de pré-rationalisation, éventuellement co-rationalisation.

Certaines de ces géométries sont nativement développables et nous les avons déjà rencontrées dans le paramètre de conception *Forme* de la partie précédente. Il s'agit du plan, du cylindre, du cône et de surfaces développables particulières comme les surfaces d'égale pente

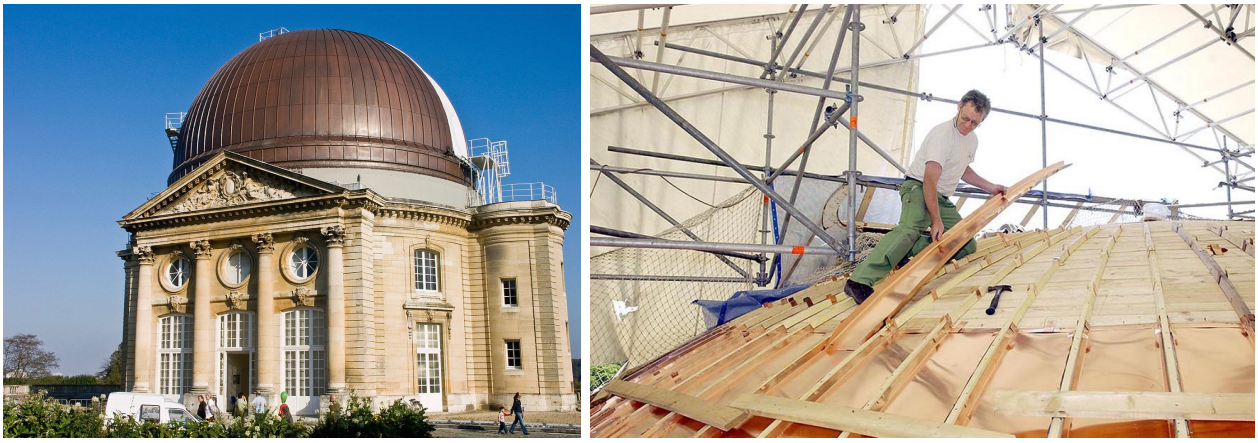


FIGURE 1.62 – La Grande Coupole de l'Observatoire de Meudon
Contant Noyaux (France)

ou celles obtenues à partir de surfaces de translation ou homothétique. Pour les surfaces à double-courbure comme la sphère (Fig. 1.62) ou le tore, il s'agit de surfaces de révolution qui, discrétisées respectivement selon une paramétrisation polaire ou torique, génèrent naturellement des panneaux développables dans les deux directions de paramétrisation. Le musée de la préhistoire à Jeongok en Corée du Sud (architecte XTU) présente un intéressant exemple de rationalisation géométrique par un panachage de surfaces analytiques. La coupe, comme la ligne équatoriale de la peau extérieure en acier inoxydable poli sont composés d'arcs de cercles tangents (§ 2.4.3.1). La surface de référence de la peau est ainsi constituée de tronçons de surfaces de translation, rotation et homothétique, à l'exception de la façade principale qui est d'une classe plus générale.

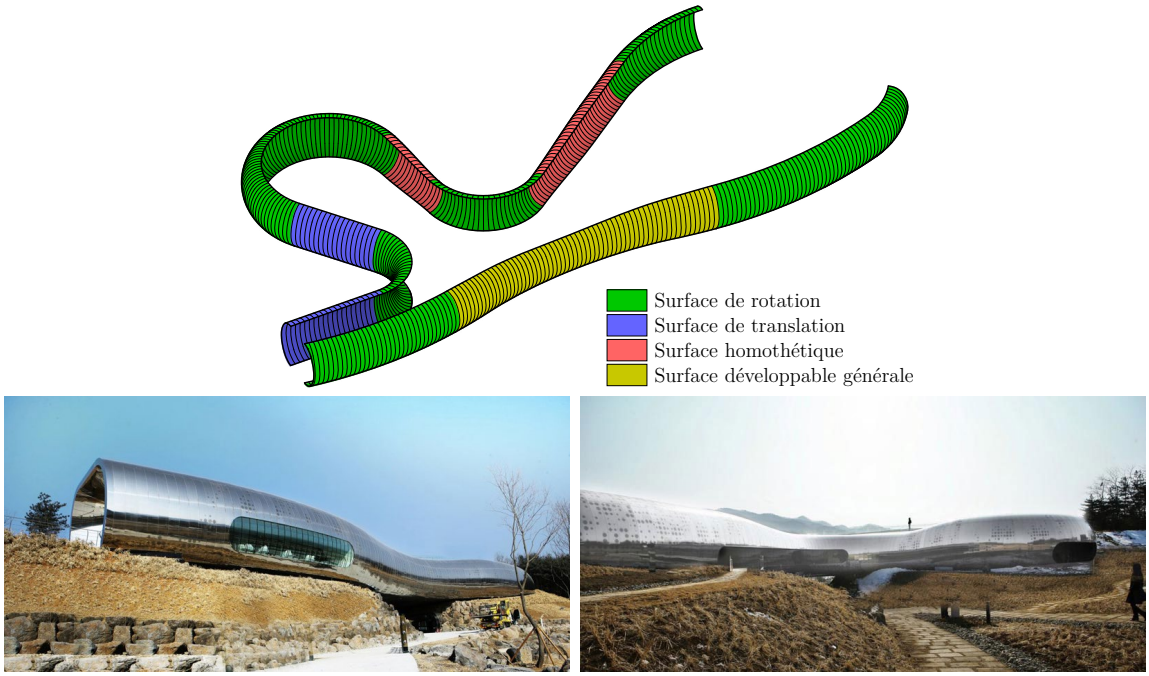


FIGURE 1.63 – Musée de la Préhistoire de Jeonjok
XTU (Corée du Sud)

Pour les formes analytiques, nous détaillons davantage le cas d'étude de la verrière de la gare TGV de Strasbourg [165] (Fig. 1.64) qui présente une géométrie toroïdale composée de cinq surfaces toriques tangentes avec des rayons de courbure minima allant de 36 à 12 m (Fig. 1.65) et un axe de révolution incliné de 17° par rapport à la verticale. L'enveloppe a été réalisée grâce à une technique de fabrication innovante basée sur le cintrage à froid du verre [78, 166].



FIGURE 1.64 – Gare TGV de Strasbourg
Jean-Marie Duthilleul (France)

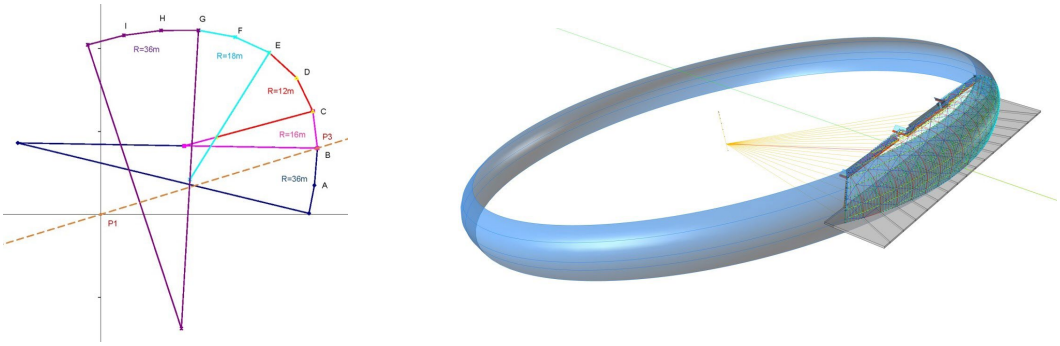
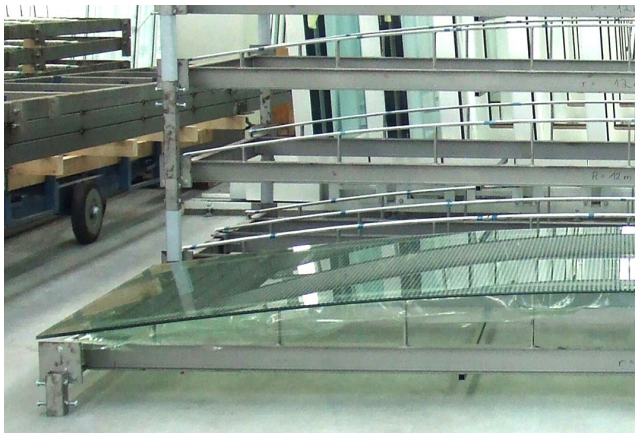


FIGURE 1.65 – Géométrie de la verrière

Le vitrage est composé de deux feuilles de verre trempé de 6mm chacune, laminées par deux films de PVB. L'innovation tient en ce que, pour éviter des contraintes trop importantes lors du cintrage, chaque feuille de verre est courbée indépendamment l'une de l'autre, mais en superposition sur un même cintre. Celui-ci est constitué d'éléments linéaires (Fig. 1.66a), contrairement au verre cintré à chaud qui a besoin d'un support surfacique. Ce système de mise en forme est très économique, en particulier grâce à l'extrême répétitivité de la géométrie qui ne demande en théorie que cinq cintres différents. Préalablement au cintrage (Fig. 1.66b), les deux films de PVB sont intercalés entre les panneaux vitrés, ce qui permet, après mise sous sac à vide (Fig. 1.66c) de placer l'ensemble dans un autoclave (Fig. 1.66d) sous haute pression à 130 °C pour le feuilletage. A court terme, le PVB retient le verre en forme par sa résistance au cisaillement (Fig. 1.66e et 1.66f), mais le fluage à long terme de ce type d'intercalaire implique de maintenir en forme le verre sur l'ouvrage par des fixations mécaniques.



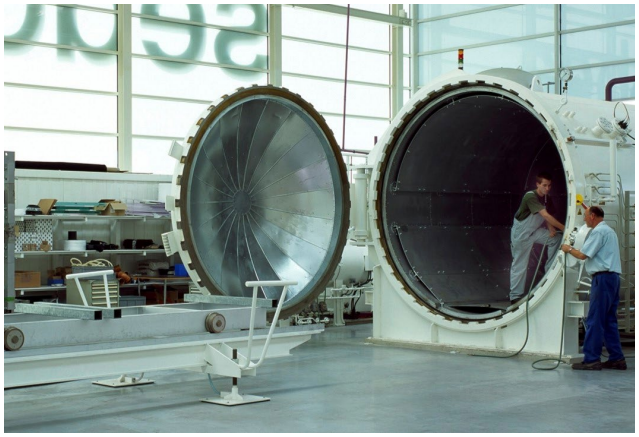
(a) Cintre linéaire



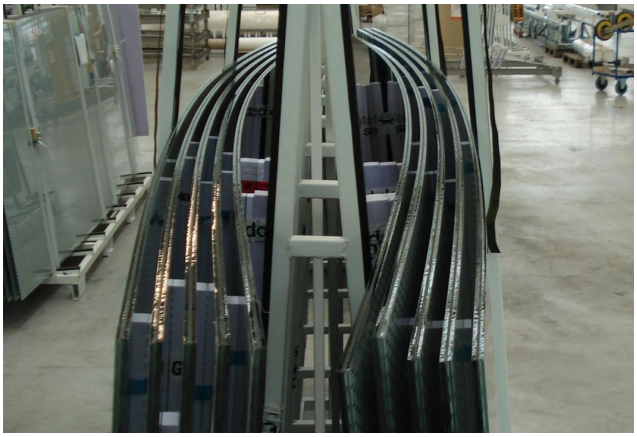
(b) Cintrage élastique



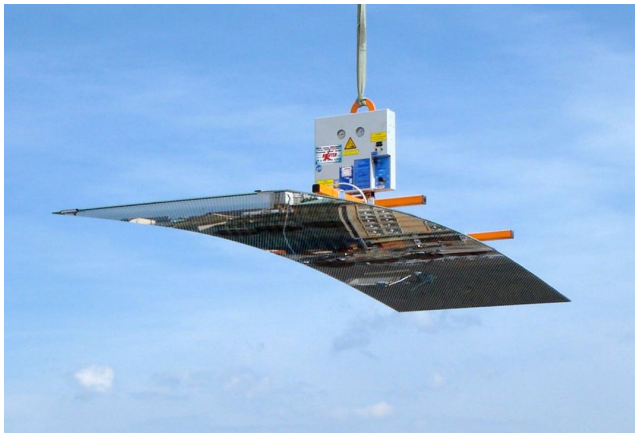
(c) Mise sous sac à vide



(d) Feuilletage en autoclave



(e) Stockage

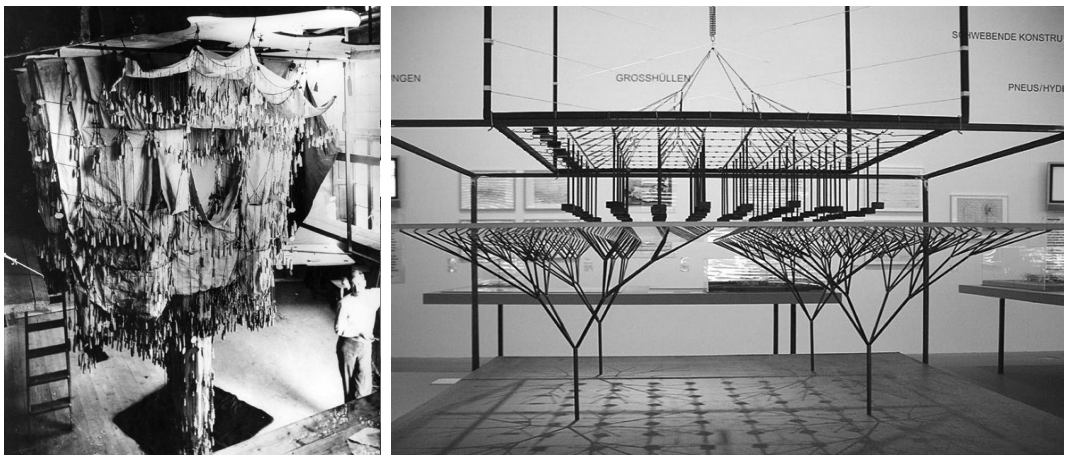


(f) Grutage

FIGURE 1.66 – Processus de fabrication du verre cintré

1.4.2.2 Formes mécaniques

Les formes mécaniques sont générées par un processus physique, comme celui des bulles de savon ou des chaînes pendantes. Des exemples bien connus de conception architecturale usant de ce type d'approche peuvent être trouvés, entre autres références chez Gaudì pour la crypte de la Colonie Güell (Fig. 1.67a) ou chez Frei Otto pour le terminal 1 de l'aéroport de Stuttgart [167] (Fig. 1.67b). Le processus physique est ici simulé au moyen de maquettes, mais d'autres approches favorisent les modèles mathématiques (analytiques ou numériques) [168].



(a) Maquette pour la crypte de la Colonie Güell Antoni Gaudí (1898-1906)

(b) Maquette pour le Terminal 1, aéroport de Stuttgart Frei Otto (2005 réalisée *a posteriori*)

FIGURE 1.67 – Maquettes pendantes de formes funiculaires [167]

Les formes mécaniques font preuve d'un fort couplage entre les paramètres de conception *Forme* et *Force*, mais également implicitement avec les paramètres *Technologie* et *Matériau* [88], car le cheminement des forces au sein de la structure est fortement dépendant de sa matière et de son mode d'assemblage. Ainsi les arches funiculaires en maçonnerie traduisent-elles aussi bien la moindre capacité des pierres à résister aux efforts de traction que celle du jointoiement. Ce type de forme correspond donc généralement à l'approche de pré-rationalisation, car les typologies formelles, ainsi que les principes constructifs sont connus d'avance.

Le mode de déformation des surfaces développables en flexion façonnent les formes mécaniques soumises à ce type d'efforts. La question de la forme prise à l'équilibre par des structures élastiques soumises à de grandes déformations est connue depuis les travaux de Bernoulli et Euler qui lui donna le nom d'*elastica* [169]. Bernoulli et Euler déterminèrent, entre autres contributions, la forme d'équilibre post-flambé d'une poutre sur appuis simples, qui est l'une des rares solutions analytiques exactes d'une poutre en grandes transformations [170]. Cependant, le registre de formes alors généré est relativement limité et plusieurs stratégies se sont développées afin d'enrichir l'univers morphologique de ce type de structures. Lienhard *et al.* [171] recensent, dans leur article de revue, plusieurs approches concernant les structures cintrées élastiquement (active bending) formées à partir de réseaux de poutres [172,173] ou d'assemblages de plaques minces.

Dans cette seconde configuration, le principe généralement retenu est un système d'auto-contrainte entre les surfaces afin d'une part, de contrarier le retour élastique des plaques (dû à la minimisation de l'énergie élastique emmagasinée) et d'autre part, de constituer une structure

capable de résister aux charges extérieures durant la vie de l'ouvrage [137,138,174]. Les pavillons conçus conjointement par les écoles ICD/ITKE de Stuttgart en 2010 [175,176] et 2015-2016 [177] constituent deux cas d'études intéressants de ce principe constructif.



(a) Pavillon 2010 (b) Pavillon 2015-2016

FIGURE 1.68 – Pavillons réalisés par cintrage élastique
Collaboration des départements ICD et ITKE de l'université de Stuttgart (Allemagne)

La forme de l'*elastica* est pilotée par les conditions aux limites de la plaque et par sa raideur. Brütting *et al.* [178] jouent sur le second paramètre afin de programmer la forme de la bande développable en se donnant un module de Young variable. La piste envisagée pour mettre en œuvre le principe est de profiter des propriétés anisotropes du bois ou des matériaux composites grâce à un laminage à orientation variable.

Enfin, un dernier cas de forme prise par un processus physique est celle du bilame. Il s'agit d'un dispositif mécanique constitué de deux plaques minces laminées, de matériaux différents. Cette différence le rend sensible aux variations thermique ou hygrométrique du fait de leur dilatation différentielle. On trouve quelques exemples d'applications architecturales dans des principes de régulation passive des ambiances [179–181] (Fig. 1.69)

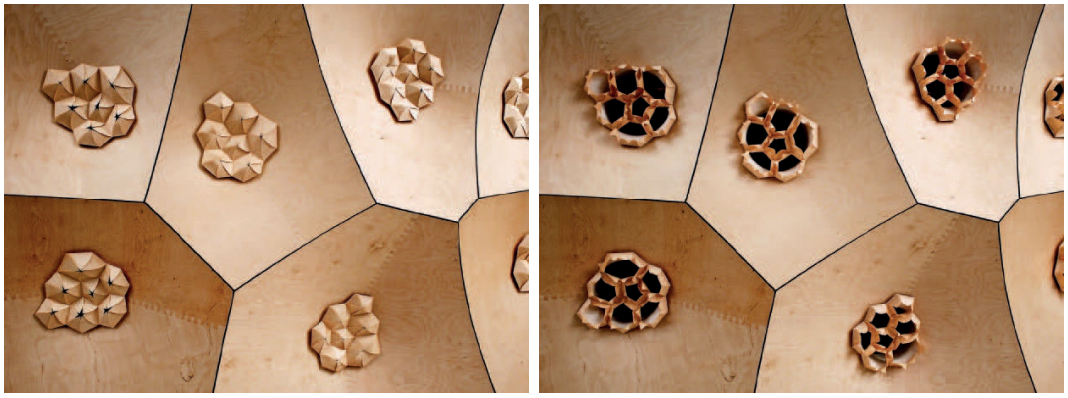
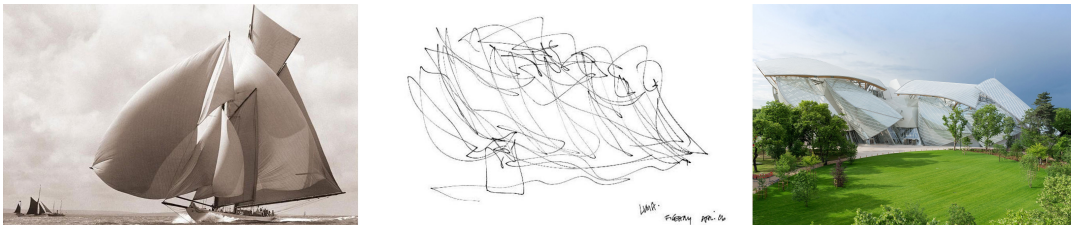


FIGURE 1.69 – Détail du pavillon Hygroskin [180]
Université de Stuttgart - ICD (2012)

1.4.2.3 Formes flexibles

La dernière catégorie identifiée est nommée forme flexible, car souvent caractérisée par une grande liberté morphologique. La forme générale de l'édifice est développée *a priori* et relativement indépendamment des quatre autres paramètres de conception. On assiste plutôt alors à un découplage au sein des paramètres de morphologie structurale. Les principes constructifs et géométriques arrivent logiquement en aval du processus de définition formelle et les formes flexibles correspondent souvent à une approche de post-rationalisation. Modelées initialement grâce à des maquettes physiques puis numérisées [182, 183] ou directement générées par des outils infographiques et/ou algorithmiques, ces morphologies se fondent sur des questions fonctionnelles, plastiques ou symboliques [184] (Fig. 1.70).



(a) Fondation Louis Vuitton, vaisseau de verre flottant sur le bois de Boulogne
Frank O. Gehry (France)



(b) China Wood Sculpture Museum
MAD Architects (Chine)

FIGURE 1.70 – Inspirations formelles de bâtiments à formes complexes

Dans cette démarche, les surfaces développables sont mobilisées pour approcher au mieux la surface à double courbure de l'intention architecturale. Un choix adéquat du calepinage ainsi que de la direction de la discrétisation permettra de retranscrire fidèlement la continuité de la forme. Sur la figure 1.71, on voit le projet du musée *Oct Design* pour lequel le studio d'architecture Pei-Zhu choisit de cintrer les panneaux métalliques selon leur grande dimension dans la direction de courbure maximale. La discontinuité en tangence se trouve alors sur le grand bord et alignée dans la direction de courbure minimale, ce qui diminue son impact visuel.



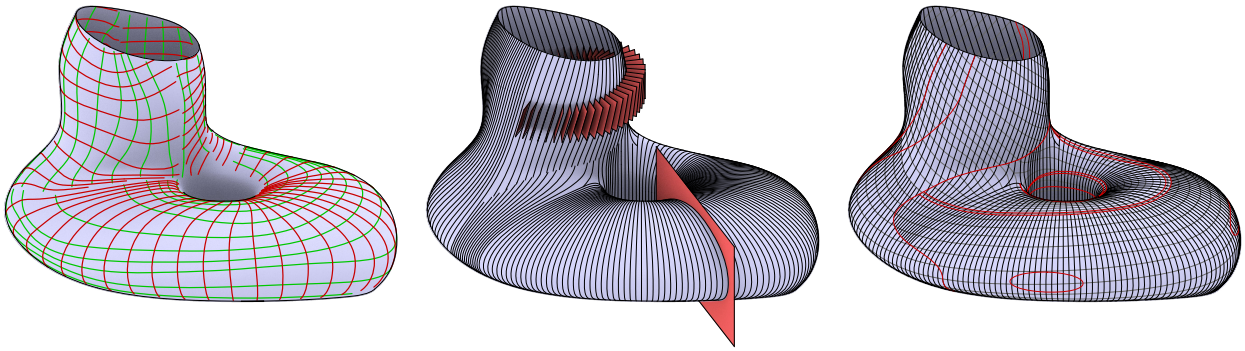
FIGURE 1.71 – Oct Design Museum
Studio Pei-Zhu (Chine)

Pour les formes flexibles, nous nous attardons sur le cas d'étude du projet de la Cité du Vin à Bordeaux dont le concours est remporté sur esquisse par l'agence XTU [185] (Fig. 1.72).



FIGURE 1.72 – Cité du Vin
XTU (France)

La forme générale du bâtiment est figée dès le début du projet et la réflexion sur les problématiques structurelles et constructives émerge avec l'arrivée des bureaux d'études en phase APS. D'autre part, pour des questions environnementales, le choix de la structure principale se porte sur des poutres courbes, mais planes, en bois lamélé-collé. Ces décisions concernant les paramètres de conception, prises indépendamment, doivent malgré tout donner lieu à une enveloppe conciliant les différentes contraintes. Les lignes de courbure principale (Fig. 1.73a), qui présentent de bonnes propriétés pour une approximation par bandes développables, sont approchées par des faisceaux de plans (Fig. 1.73b) dont l'intersection avec la surface de référence sont des courbes planes qui donnent la géométrie des panneaux de vêture et des poutres en lamélé-collé (Fig. 1.73c). Selon la localisation et le matériau utilisé, le calepinage ainsi dessiné servira de base à une approximation en surfaces développables (partie tore métallique), en cylindre circulaire (partie tore vitrée) ou en facettes planes (partie tour).



(a) Lignes de courbure principale

(b) Approximation planaire

(c) Calepinage final

FIGURE 1.73 – Démarche de rationalisation géométrique

1.4.3 Outils de conception

Afin d'intégrer pleinement les surfaces développables dans une démarche morpho-structurelle, l'équipe de conception doit être équipée d'outils infographiques, de recherche de forme et d'analyse structurelle pouvant intégrer les spécificités de telles géométries.

Alors qu'il existe de nombreux articles proposant des méthodes génératives de surfaces développables, on constate que les implémentations dans les logiciels grand public sont rares et relativement récentes. *Digital Project*, logiciel orienté bâtiment développé à partir de la plateforme *CATIA*, possède un module assez rudimentaire de modélisation de ces surfaces et il faut attendre la version 7 pour que le logiciel *Rhinoceros* intègre cette fonctionnalité de façon native. Enfin, les consultants en géométrie Evolute [186] proposent l'outil *D.LOFT*, un module payant sur le logiciel *Rhinoceros* qui constitue à ce jour la meilleure offre commerciale pour la modélisation des surfaces développables. A noter que, quel que soit l'outil, les données d'entrées sont deux courbes tridimensionnelles ; les autres modes génératifs, tels que nuages de points ou courbes multiples, ne sont pas implémentés. Aucune des solutions proposées ne peut actuellement être intégrée dans un processus paramétrique, l'interface n'étant pas prévue à cet effet.

D'un point de vue mécanique, la principale problématique liée aux surfaces développables est la recherche de forme et l'analyse non-linéaire en grande déformation des structures. Les deux méthodes les plus utilisées sont décrites par Douthe [170] et Lienhard [138]. La première est la méthode de la relaxation dynamique qui procède à la résolution d'un système d'équations non-linéaires par un processus dynamique d'amortissement [187]. Pour les objets bidimensionnels, cette méthode repose souvent sur un système masse-ressort disposés dans un maillage triangulaire et sur des hypothèses simplifiées qui ne permettent pas l'accès à la description mécanique complète du système. En revanche, la seconde méthode, basée sur l'analyse aux éléments finis, le permet grâce à la méthode de chargement incrémental. Lienhard relève cependant que les logiciels sur le marché sont peu adaptés à une utilisation intuitive pour ce type d'analyse et qu'une programmation poussée de l'interface est souvent nécessaire. Pour les cas les plus complexes, par exemple pour les géométries auto-contraintes, le principe du chargement incrémental montre ses limites ; il est alors nécessaire de recourir à des modélisations plus sophistiquées comme celle de câbles virtuels élastiques reliant les surfaces à mettre en contact, progressivement rétractés au cours des étapes de simulation [188].

1.5 Prototype Metal Euplectella Folie

1.5.1 Contexte et objectifs

Du 17 au 20 septembre 2017, l'Ecole Nationale Supérieure d'Architecture de Versailles accueille la conférence internationale *Design Modeling Symposium*. Ce colloque, tourné vers la question de la modélisation et de ses récents développements dans le domaine académique ou de la pratique professionnelle (Architecture/Ingénierie/Art) offre des espaces d'exposition pour des travaux réalisés par des étudiants ou des doctorants.

C'est dans ce cadre que le laboratoire Navier, le bureau d'ingénierie T/E/S/S et le constructeur métallique Viry, les trois partenaires de cette thèse, ont décidé de lancer la fabrication d'un prototype à échelle architecturale. Conçu et fabriqué en début de thèse avec les connaissances acquises de l'état de l'art, cette structure expérimentale rassemble les différents acteurs autour d'un exemple construit et sert de matière à réflexion pour dégager les pistes de recherche à venir. Ce prototype a fait l'objet de la publication *An innovative fabrication process from rolled helicoidal strips* [189].

La fabrication à échelle 1 convoque nécessairement les cinq paramètres de conception morpho-structurelle. Nous nous concentrons dans l'exposé qui suit sur le rapport entre les paramètres *Forme*, *Structure* et *Technologie*. L'acier pour le paramètre *Matériau* a été choisi *a priori*, étant donné les moyens de production mis à disposition par l'entreprise Viry, et le paramètre *Force* n'a fait l'objet que d'une vérification *a posteriori* par les moyens traditionnels d'analyse aux éléments finis.

Le délai imparti pour concevoir et mettre en œuvre le prototype (quatre mois dont le mois d'août !) est en lui-même un défi qui met à l'épreuve l'objectif de construire rapidement une forme complexe, exclusivement constituée de surfaces développables, dans une économie de matière et de moyens. Pour cela, nous expérimentons la mise en forme élastique auto-contrainte dans un processus de mise en œuvre continu de géométries tubulaires (Fig. 1.74).

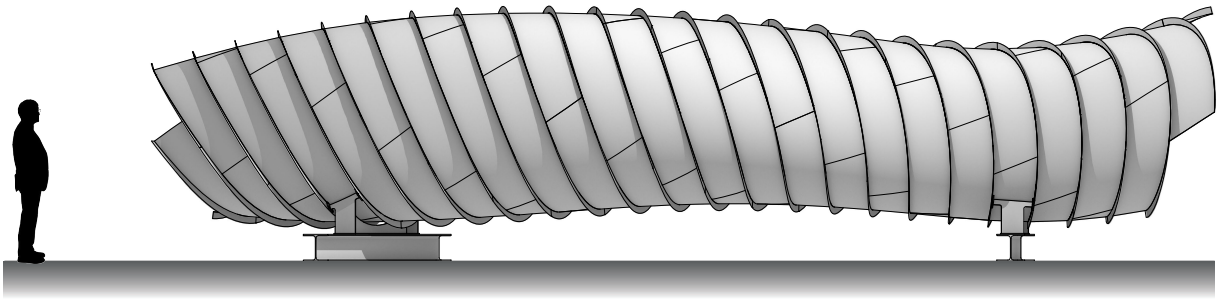


FIGURE 1.74 – Élévation

1.5.2 État de l'art

La méthode de fabrication du prototype est basée sur le procédé industriel de production de tubes hélicoïdaux qui consiste à enrouler sur elle-même une unique bande continue rectiligne et de largeur constante. Après un tour, le premier bord est raccordé au second pour former une hélice circulaire (Fig. 1.75). Pour ces tubes, le diamètre peut être très variable, mais l'épaisseur est souvent faible devant le rayon (tubes à paroi mince).

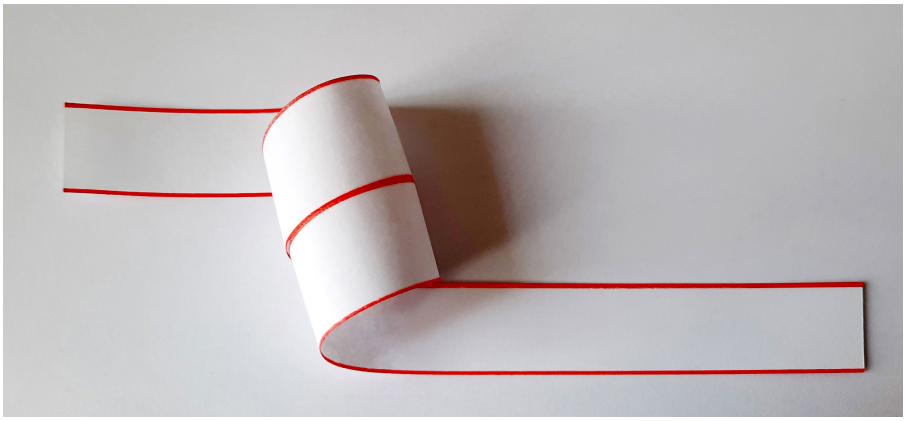
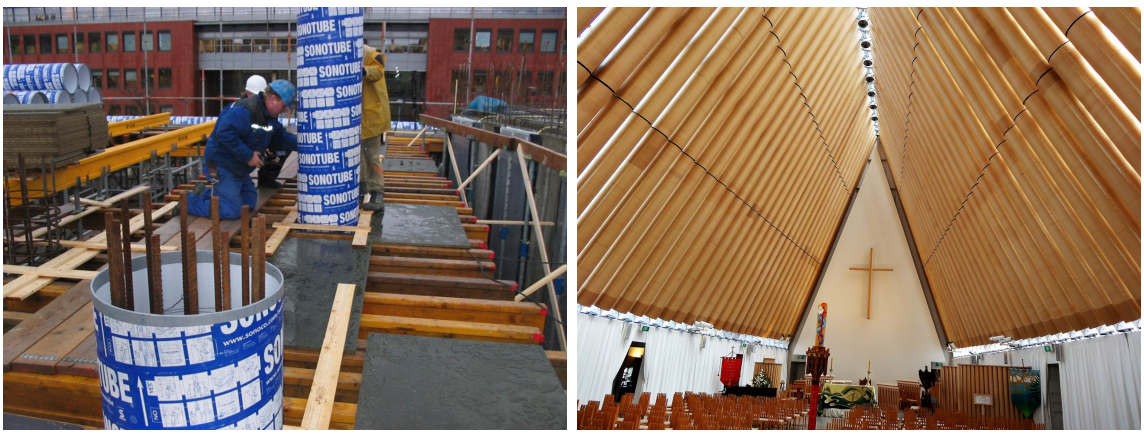


FIGURE 1.75 – Maquette illustrant le principe du tube hélicoïdal

On retrouve les tubes hélicoïdaux dans principalement trois domaines d'application. Le premier se trouve dans les tubes en carton encollés pour l'emballage ou l'enroulage. En plus forts diamètres, il existe des utilisations de ces tubes en carton dans le domaine du bâtiment pour le coffrage de poteaux en béton (Fig. 1.76a) ou même pour des applications architecturales avec les célèbres structures de carton de Shigeru Ban [190] (Fig. 1.76b).



(a) Système de coffrage Sonotube®

(b) Cardboard cathedral de Christchurch Shigeru Ban (Nouvelle-Zélande)

FIGURE 1.76 – Applications architecturales de tubes spiralés en carton

La seconde application se manifeste dans les tubes en tôles fines serties en aluminium ou en acier, utilisés couramment en conduite de ventilation. Enfin, la dernière application se trouve dans les tubes de très grands diamètres (jusque 2 m) avec des tôles d'acier soudées d'épaisseur

modérée (environ 10 mm) [191] pour des conduites de fluide ou des utilisation en génie civil, en particulier pour les fondations.



(a) Petit diamètre en tôle sertie (b) Fort diamètre en tôle soudée

FIGURE 1.77 – Tubes métalliques spiralés

Le mode de fabrication industriel est caractérisé par une ligne de production continue et permet d'atteindre une grande production de tubes de longueur importante. Le processus de fabrication se compose des étapes suivantes (Fig. 1.78) :

1. débobinage de la tôle (et raccord en extrémité de bobine) ;
2. Préparation des rives (chanfreinage, façonnage...) ;
3. Cintrage de la bande au diamètre voulu / cintrage élastique ;
4. Liaison des bandes (collage, sertissage, soudage...) ;
5. Découpe du tube.

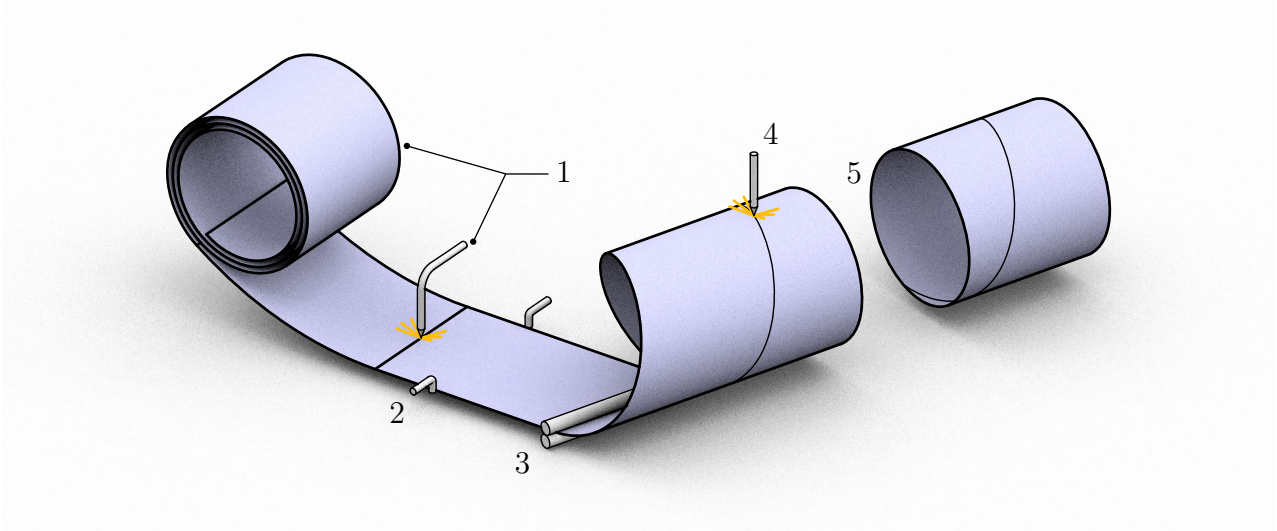
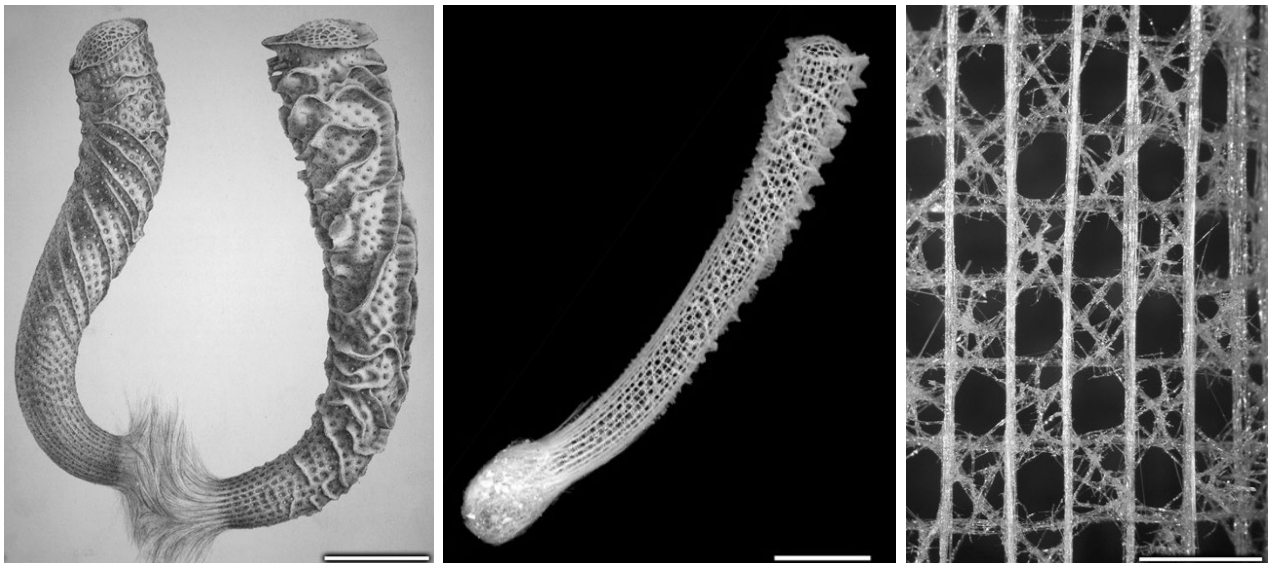


FIGURE 1.78 – Processus de fabrication d'un tube hélicoïdal

Sous forme réversible, le principe devient un tube hélicoïdal télescopique utilisé comme dispositif de levage pour tables élévatrices, système breveté [192] et commercialisé sous le nom de Spiralift® [193].

Schüller *et al.* proposent une méthode de discrétisation de formes complexes en une unique bande développable [194]. Après segmentation du maillage en parties à topologie cylindrique et subdivision grâce à une paramétrisation en spirale [195], la bande développable qui s'appuie sur cette courbe est assemblée par une fermeture éclair. Le prototype construit n'a cependant pas pu bénéficier des développements de cet article, car sa publication en est postérieure.

L'observation de la nature, dans une inspiration davantage conceptuelle que formelle [89], nous offre quelques exemples intéressants de formes tubulaires raidies. Le bambou dispose de diaphragmes régulièrement espacés pour garantir l'indéformabilité de sa section [196], alors que l'os du fémur passe d'une structure tubulaire à paroi épaisse (partie centrale) à une structure spongieuse (tête de l'os) pour répondre au mieux au type d'effort appliqué [89, 197, 198]. Le modèle qui nous intéresse particulièrement ici et qui prête son nom au prototype, est celui de l'*Euplectella Aspergillum*, éponge de mer de grande profondeur du Pacifique Ouest dont le squelette siliceux est formé par l'agrégation ordonnée de spicules de verre biologique. L'organisation structurelle hiérarchisée à six niveaux [199] lui confère des propriétés mécaniques remarquables, en particulier en raideur flexionnelle [200]. C'est essentiellement les deux niveaux macroscopiques constitués d'une coque à paroi mince (triple réseau vertical, horizontal et diagonal de spicules) renforcé par des raidisseurs hélicoïdaux qui seront réinterprétés dans le prototype avec un matériau métallique.



(a) Illustration de Max Schulze, 1887 (b) Photographie d'ensemble (c) Détail sur la structure en grille

FIGURE 1.79 – Euplectella Aspergillum [199]
Échelle graphique : (a) 5 cm, (b) 5 cm, (c) 5 mm

1.5.3 Morphogenèse

1.5.3.1 Principe géométrique

En autorisant une plus grande liberté dans le dessin de la bande qui constitue le tube, la forme tridimensionnelle enroulée ne s'assemble plus dans une géométrie cylindrique à base circulaire et un nouveau champ de possibilités morphologiques est à explorer (Fig. 1.80).

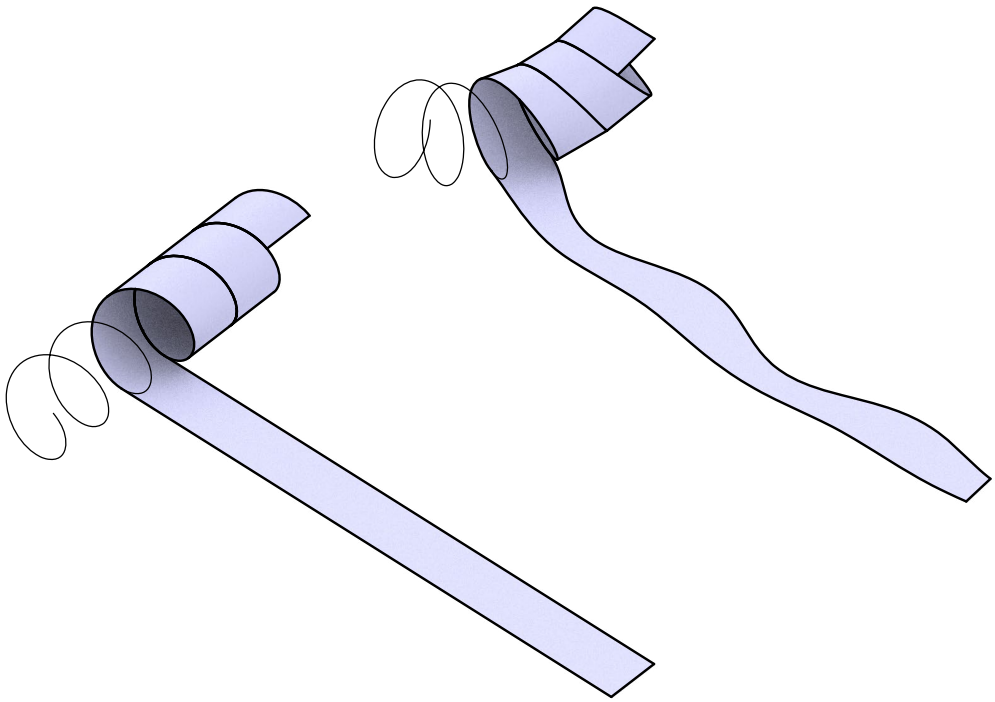
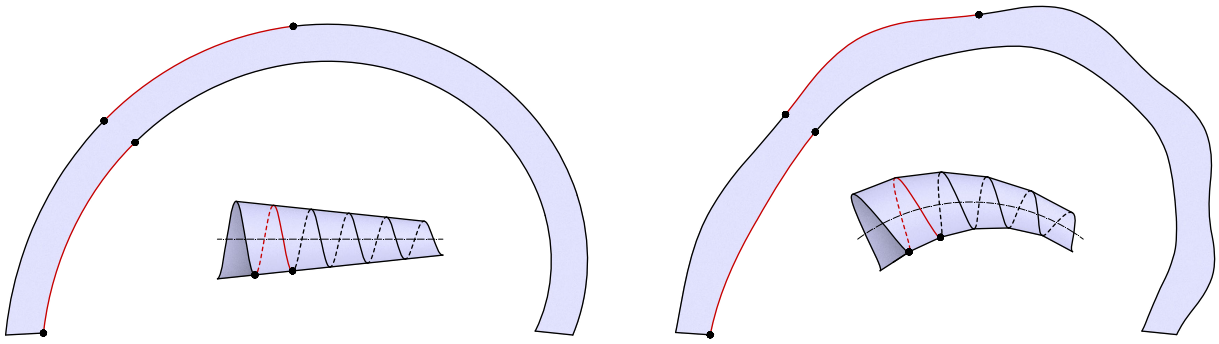


FIGURE 1.80 – Principe du tube hélicoïdal à forme libre

Dans une démarche inverse, comme le feront par la suite Schüller *et al.* [194], il est possible de partir d'une forme tridimensionnelle, d'y inscrire une hélice qui partitionne sa surface, puis de générer une surface développable s'appuyant sur cette hélice. Une fois développée, cette bande devient le patron de découpe de la forme semi-discrétisée.

Plusieurs essais empiriques ont été menés à ce stade pour tenter de comprendre le lien entre la forme tridimensionnelle et celle du patron de découpe. Les tests réalisés sur des formes à simple et double courbure ont permis de formuler de premières hypothèses.

Les formes à double courbure, une fois semi-discrétisées, sont constituées de surfaces développables sans courbure gaussienne alors qu'apparaissent des discontinuités de tangence au niveau des hélices de raccord entre deux spires. La courbure gaussienne est donc « concentrée » dans les coutures de la surface. L'observation de la forme des bords développés est riche d'enseignement. Pour les surfaces tridimensionnelles initialement développables, les deux bords en regard le long de l'hélice sont identiques, tandis qu'ils sont différents pour les surfaces à double courbure (Fig. 1.81).



(a) Surface de référence développable (b) Surface de référence à double courbure

FIGURE 1.81 – Comparaison des formes tridimensionnelles et de leur développé

1.5.3.2 Contraintes

Dès le début de la conception, trois contraintes principales ont été identifiées et ont largement contribué à la morphogenèse du projet.

Un objectif architectural de ce prototype est de pouvoir le parcourir dans toute sa longueur ; on retient une ergonomie minimum de passage de 1.8 m de haut et de 0.5 m de large mesuré à 1.5 m de hauteur.

La seconde contrainte est mécanique. Pour tester la capacité de mise en forme élastique par auto-contrainte et limiter le recours à une machinerie lourde, les contraintes de cintrage doivent rester en deçà de la limite élastique de l'acier employé. Selon l'approche simplifiée d'Euler-Bernoulli (Eq. 1.56) pour les bandes développables de faible largeur, on obtient les rayons de cintrage limites, tabulés (Tab. 1.4) selon la gamme d'épaisseur et la nuance de l'acier.

TABLE 1.4 – Rayon minimum selon l'épaisseur et la nuance de l'acier avant plastification

	S235	S355
ep 1.0 mm	0.45 m	0.30 m
ep 1.5 mm	0.67 m	0.44 m
ep 2.0 mm	0.89 m	0.59 m
ep 2.5 mm	1.34 m	0.89 m

Dans notre cas, les panneaux on été réalisés en acier S235 d'épaisseur 1.5 mm, soit un rayon de 0.67 m avant plastification.

Enfin, les délais à tenir et la difficulté d'intervenir de façon prolongée sur le site d'accueil orientent fortement vers un prototype entièrement assemblé dans les ateliers de l'entreprise Viry, puis transporté et installé tel quel. Cette forte contrainte de transport impose un parallélogramme englobant au prototype correspondant à une remorque classique de camion à triple-essieux, soit 13.70 m de long, 2.48 m de large et 2.76 m de haut.

1.5.3.3 Etapes de construction géométrique

La démarche de projet relève clairement de l'approche de co-rationalisation, puisque l'élaboration de la géométrie repose sur un modèle paramétrique global dont le rôle s'étend de la définition de la surface de référence jusqu'aux plans d'exécution des patrons de découpe des tôles. Ce modèle permet d'exploiter les potentialités formelles du principe de structure tubulaire spiralée à géométrie libre tout en s'assurant du respect des contraintes identifiées.

Étape 1 : Surface de référence

La surface de référence est décrite par une surface NURBS, interpolation de six sections successives. Ces sections sont disposées le long d'un axe horizontal de 12 m, longueur maximale du prototype. Les quatre sections intermédiaires se situent dans un plan vertical alors que les sections d'extrémités sont définies sur un plan de rotation libre. Chaque section est une courbe de Bézier fermée dont les points de contrôle sont les sommets de quadrangles quelconques (Fig. 1.82).

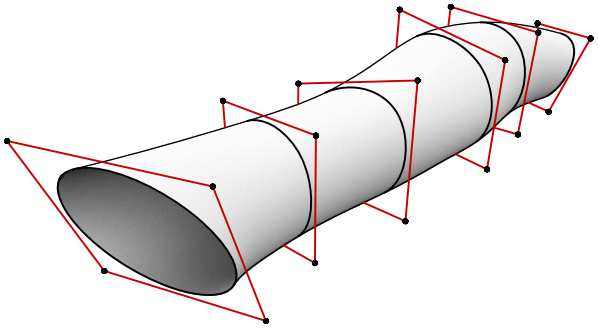


FIGURE 1.82 – Surface de référence

Étape 2 : Double réseau d'hélices

La surface de référence est le support de deux réseaux d'hélices qui serviront de guide pour la modélisation des différents éléments constructifs : quatre hélices dextres (en rouge) et vingt-quatre hélices senestres (en vert). Pour des raisons principalement architecturales, le tube est parcouru dans la première direction par quatre hélices plutôt qu'une seule pour rendre le pas de celles-ci plus important et la nature hélicoïdale de la géométrie plus lisible (Fig. 1.83 et 1.100).

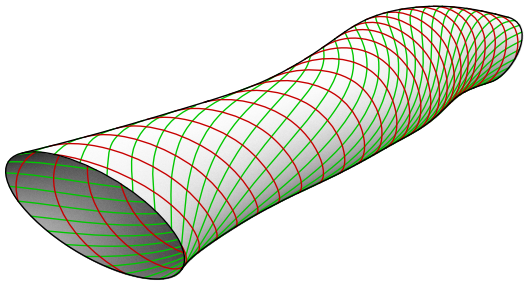
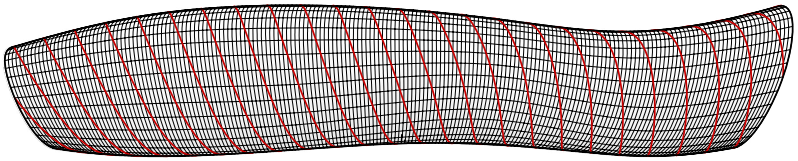
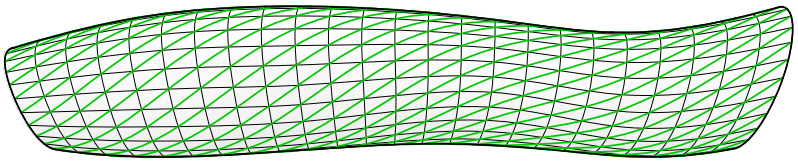


FIGURE 1.83 – Double réseau d'hélices

La génération des deux réseaux d'hélices repose sur la subdivision du domaine de paramétrage de la surface de référence selon ses deux paramètres u et v : les hélices sont tracées selon la diagonale des sous-domaines. Pour les quatre hélices dextres (en rouge), l'espacement entre deux hélices consécutives se traduira en largeur de panneau et pilote le nombre de subdivisions longitudinales et transversales. L'espacement maximum doit être inférieur à 500 mm pour des questions de manutention et de raideur lors de la mise en forme. Pour les vingt-quatre hélices senestres (en vert), l'espacement entre deux hélices consécutives, mais également les angles entre les deux réseaux, déterminent le nombre d'hélices ainsi que le nombre de subdivisions longitudinales et transversales. Cet espacement se traduira en distance entre fixations et en longueur de panneau.



(a) Hélices dextres



(b) Hélices senestres

FIGURE 1.84 – Subdivision du domaine pour la définition des hélices

Pour la conception technique des détails, l'idéal est de se rapprocher au maximum d'intersections à angle droit. La figure 1.85 montre sous forme d'histogramme la distribution des angles par classes de 5°.

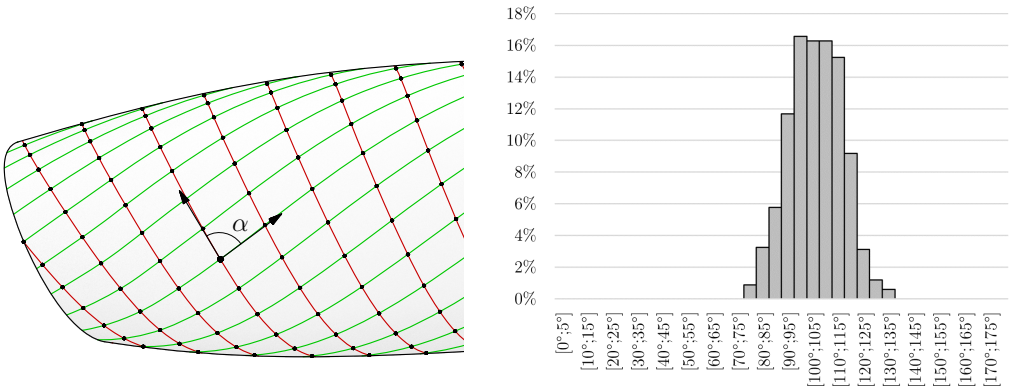


FIGURE 1.85 – Etude des angles entre les deux réseaux

Étape 3 : Quatre bandes développables
La semi-discrétisation de la surface de référence est réalisée à partir des quatre hélices dextres (Fig. 1.86). Les quatre bandes, d'environ 40 m de long chacune, sont générées par paramétrisation directe, c'est-à-dire en recherchant un plan tangent constant le long des règles. Plusieurs articles [70, 201, 202] traduisent cette condition lorsque la surface développable s'appuie sur deux courbes.

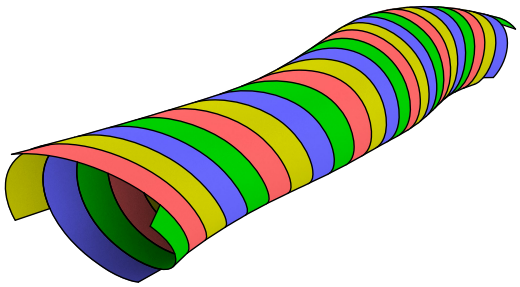


FIGURE 1.86 – Quatre bandes développables

Soient $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$ deux courbes spatiales et A un point de $\mathcal{C}_A$ d'où est issue une règle à définir de la surface développable. On cherche à déterminer le point B de la courbe $\mathcal{C}_B$ où passe cette règle. Pour cela, il suffit de trouver la plan simultanément tangent aux courbes $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$, respectivement aux points A et B. Cette condition se traduit par la coplanéité des vecteurs $\overrightarrow{t_A}$, tangent à $\mathcal{C}_A$ en A et $\overrightarrow{t_B}$, tangent à $\mathcal{C}_B$ en B, soit :

$$\det(\overrightarrow{t_A}, \overrightarrow{t_B}, \overrightarrow{AB}) = 0 \tag{1.57}$$

La figure 1.87 trace la forme du déterminant pour un point A fixé et un point B parcourant $\mathcal{C}_B$ (domaine normalisé).

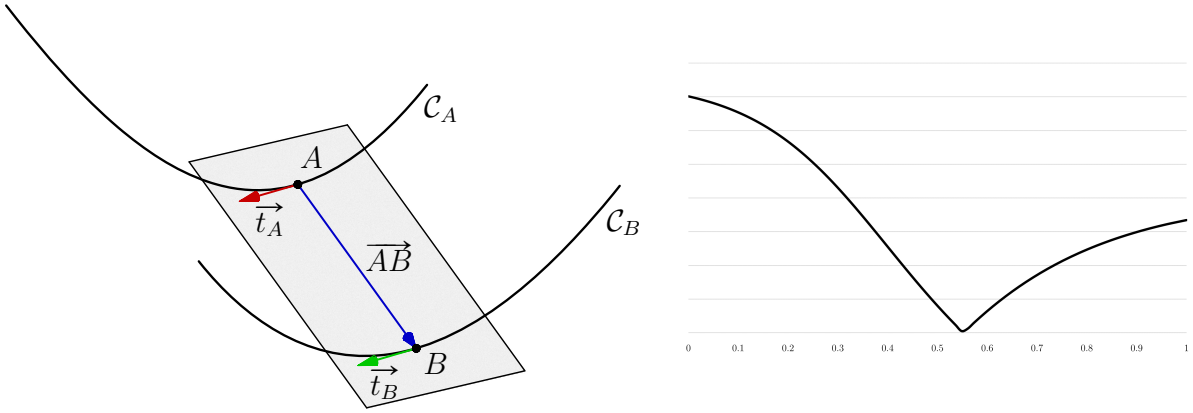


FIGURE 1.87 – Forme du déterminant pour deux courbes simples

Dans le cas de deux courbes spatiales hélicoïdales, les principes expliqués ci-dessus s'appliquent également, mais pour un point A fixé, le déterminant s'annule à plusieurs reprises quand B parcours $\mathcal{C}_B$ (à chaque spire). Le point cherché est sélectionné par détection de proximité (Fig. 1.88).



FIGURE 1.88 – Forme du déterminant pour deux hélices

Étape 4 : Quatre normalies quasi-développables

Les quatre hélices dextres génèrent également quatre normalies, surfaces réglées dont les génératrices sont perpendiculaires à la surface de référence (Fig. 1.89).

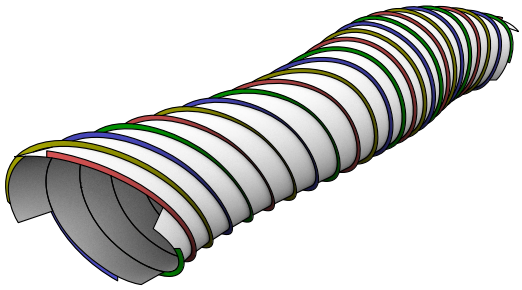


FIGURE 1.89 – Quatre normalies quasi-développables

Les hélices n'étant pas situées selon les directions de courbures principales, les surfaces ne sont pas strictement développables [35]. Schling *et al.* [105] sont confrontés à une situation similaire lors de la génération de surfaces développables selon les lignes asymptotiques et doivent appliquer une torsion au profil pour obtenir la géométrie souhaitée. Dans notre cas, nous nous autorisons aussi cette liberté, car d'une part les hélices sont relativement proches des directions orthoradiales des lignes de courbure et d'autre part la section du raidisseur (plat de $65 \times 4\,\text{mm}$) présente peu de raideur en torsion.

Étape 5 : Éléments constructifs
Les vingt-quatre hélices senestres sont utilisées pour subdiviser bandes et raidisseurs en éléments constructifs compatibles avec les produits du commerce (dimensions standard des tôles) et permettre une manutention aisée (Fig. 1.90 et 1.96).

Chaque composant trouve ainsi sa place au sein du calepinage dessiné par le double réseau de courbes :

— un panneau occupe neuf divisions ;
— les panneaux sont décalés de trois divisions entre deux spires consécutives ;
— un raidisseur courant occupe neuf divisions ;
— un raidisseur d'extrémité occupe 7.5 divisions ;
— les raidisseurs sont décalés de trois divisions entre deux spires consécutives ;
— les fixations mécaniques sont présentes toutes les divisions.

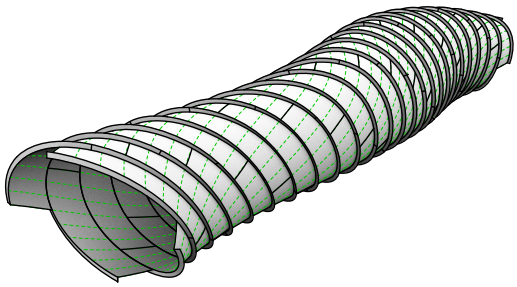


FIGURE 1.90 – Éléments constructifs

Cette référence systématique au double réseau d'hélices garantit la bonne répartition des aboutages et dessine de nouvelles hélices, comme celle, en escalier, des petits bords ds panneaux.

1.5.4 Mise au point technologique

Pour tester la cinématique de montage et les détails d'assemblages, deux prototypes intermédiaires ont été réalisés. Nous exposons rapidement les éléments testés, les résultats et les enseignements pour chacun d'eux.

1.5.4.1 Prototype n°1 : portion torique

Étant donné les délais très serrés, un premier prototype testant les principales hypothèses est lancé en parallèle de la conception du prototype final. Ce prototype, à échelle 1 mais de dimensions réduites, est réalisé sur une géométrie simplifiée, mais représentative des courbures de l'objet final.

La géométrie du prototype correspond à celle d'une tore ayant pour section une ellipse définie par un grand axe égal à 2 m et un petit axe égal à 1.5 m. Cette forme est décomposée en quatre anneaux développables, chacun constitué de deux tôles (en rouge et en bleu). Aux extrémités sont positionnés deux raidisseurs éclissés (Fig. 1.91).

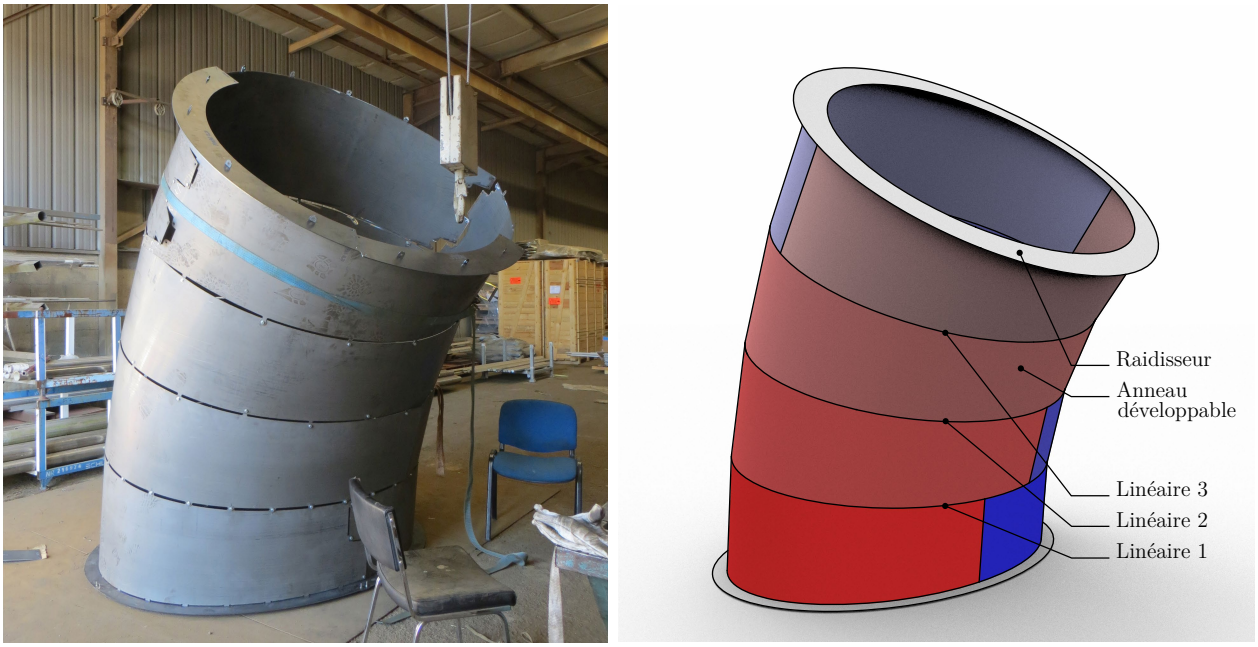


FIGURE 1.91 – Prototype n°1 : modélisation et réalisation, ateliers de l'entreprise Viry

Sur ce prototype sont testés principalement le maintien de la forme par cintrage et assemblage des tôles ainsi que les différents paramètres des détails de fixation. Pour cela, nous avons mis au point un banc d'essai, profitant des trois linéaires intermédiaires de liaison (Fig. 1.92).

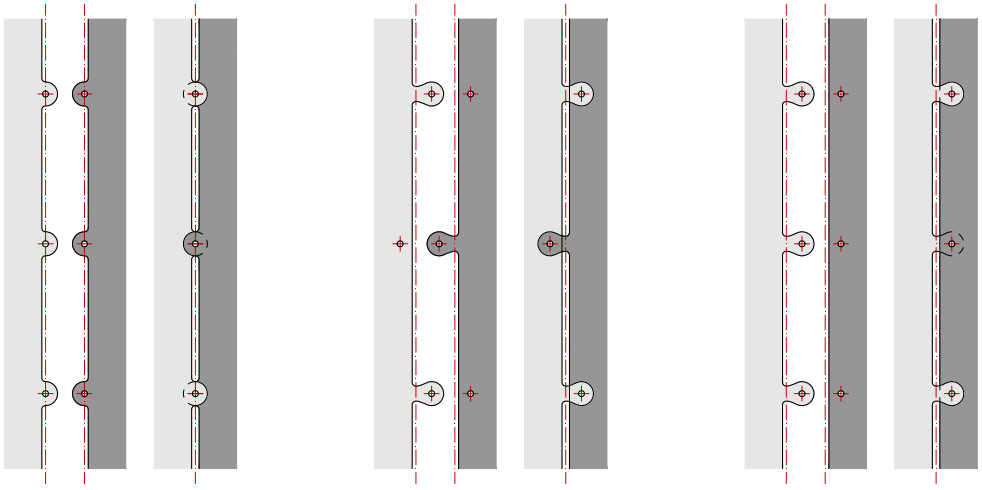
TABLE 1.5 – Banc d'essais des détails de fixation : prototype n°1

	Localisation des pattes de fixation	Espacement
Linéaire 1	2 côtés	200 mm
Linéaire 2	1 côté alterné	300 mm
Linéaire 3	1 côté uniquement	400 mm

Chaque tronçon étant constitué de deux tôles, on teste également une disposition de connexion différente sur chaque tôle. La première disposition superpose toutes les pattes de la première tôle sur celle de la seconde alors que la seconde disposition alterne les pattes dans une séquence dessus/dessous comme représenté en figure 1.92.

Le prototype est réalisé en six heures à deux personnes et les enseignements suivants en ont été tirés.

Le montage a été très aisé pour les deux premiers anneaux et la difficulté a été croissante par la suite jusqu'à ne plus être en mesure de mettre en place le dernier raidisseur. Il est bien connu que les structures à double courbure tirent leur raideur du couplage membrane-flexion. C'est d'ailleurs l'hypothèse que nous faisons pour maintenir la géométrie par auto-contrainte : la forte raideur membranaire des tôles s'oppose au retour élastique provoqué par le cintrage. Or la difficulté d'assemblage grandissante témoigne d'une dérive de la géométrie à mesure que nous nous éloignons de la géométrie nominale imposée par le raidisseur inférieur. Les déformations membranaires cumulées proviennent probablement de l'élasticité de la matière, sans doute dans



(a) Linéaire 1 : 2 côtés

(b) Linéaire 2 : 1 côté alterné

(c) Linéaire 3 : 1 côté uniquement

FIGURE 1.92 – Banc d'essai des fixations dans la disposition alternée dessus/dessous

une moindre mesure, mais surtout des jeux d'assemblages indispensables pour toute fixation mécanique. Il a donc été décidé de placer un raidisseur à chaque jonction entre deux surfaces. Sa première utilité sera de faciliter l'assemblage en contrôlant la géométrie au cours du montage, mais il prendra également part au comportement structurel d'ensemble.



(a) Découpe au plasma

(b) Meulage des rives

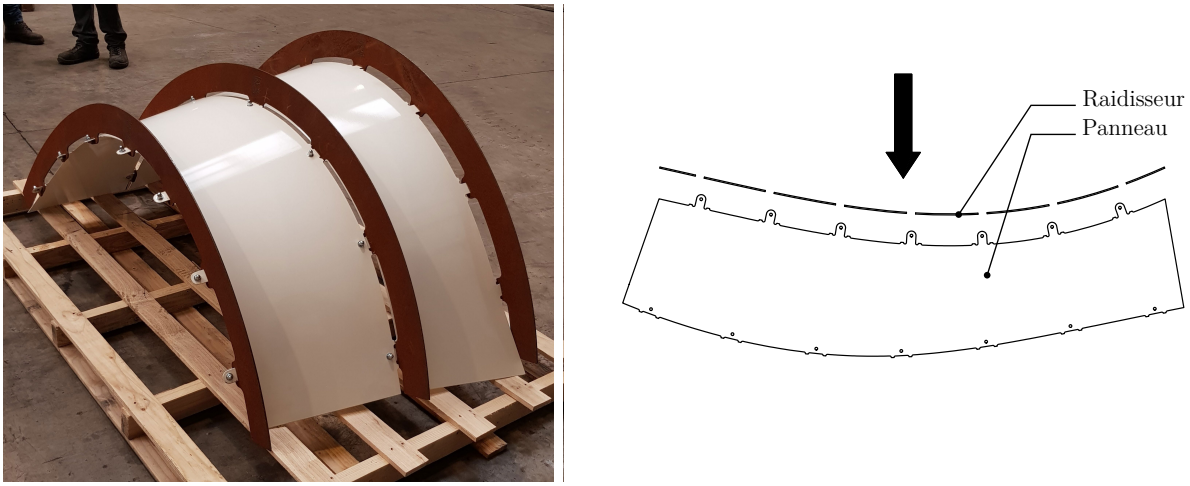
(c) Vue de détail du linéaire 1

FIGURE 1.93 – Etapes de fabrication du prototype n°1

Concernant les pattes de fixation, on constate de légères plastifications dues à des concentrations de contraintes pour les espacements supérieurs à 300 mm. L'espacement visé sera alors inférieur à cette valeur. La localisation des pattes de fixation testées sur le linéaire n°3 a été jugé le plus satisfaisant, essentiellement pour des raisons d'aspect ; il est plus discret que le premier qui est localisé dans la lumière du joint ouvert (Fig. 1.93) et plus compact que le second qui se trouve de part et d'autre du joint. Enfin, la disposition en superposition n'a pas pu être mise en œuvre sur le premier prototype, car l'épaisseur de la tôle a été négligée dans la modélisation géométrique. Or la superposition des deux tôles génère un décalage longitudinal d'environ 10 mm sur un anneau complet : la valeur de l'épaisseur de la tôle devra être intégrée dans la modélisation de la géométrie des panneaux développables.

1.5.4.2 Prototype n°2 : portion du prototype final

Il s'agit également d'un prototype à échelle 1, mais de taille très réduite et correspond à la portion la plus courbe du prototype final dont la géométrie a été fixée (Fig. 1.94a).



(a) Assemblé en atelier (b) Incompatibilité cinématique

FIGURE 1.94 – Prototype n°2

Il est essentiellement destiné à tester le nouveau détail de fixation conçu pour accueillir un raidisseur, positionné à l'axe de chaque joint ouvert et en liaison avec les panneaux par insertion de la patte de fixation par une boutonnière pratiquée dans le raidisseur (voir plus loin pour la description détaillée du principe de fixation final).

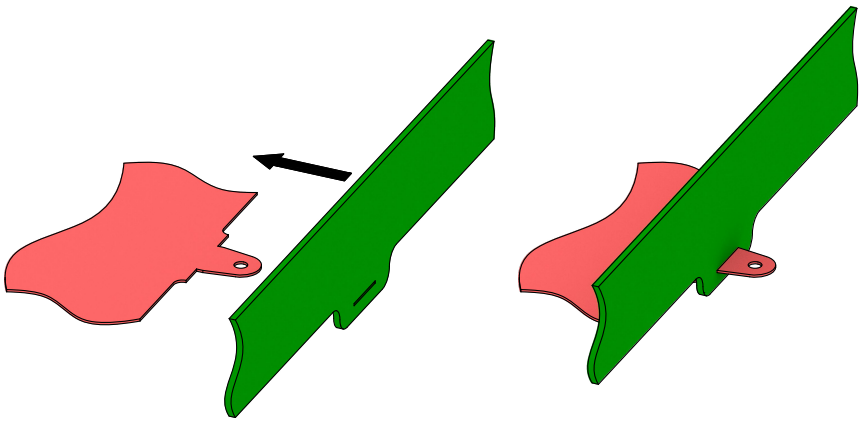
Tous les choix technologiques sont validés. Un dernier ajustement est pratiqué suite à la difficulté d'insertion du panneau dans le raidisseur. Dans les zones de courbure géodésique importante de l'hélice, qui se traduit par la courbure en plan des rives du panneau, la forme des pattes de fixation est incompatible avec la cinématique de montage (Fig. 1.94b). Pour palier ce problème, on introduit un biseau qui guide et facilite l'insertion.

1.5.4.3 Détail final

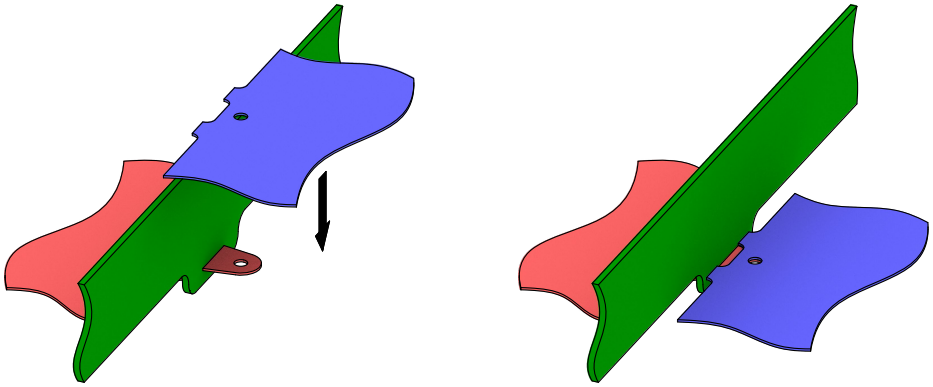
Le principe final retenu est proche d'un assemblage tenon-mortaise traversant avec clé. Le panneau n°1 (en rouge) avec un tenon est inséré dans la mortaise du raidisseur (en vert). Le panneau n°2 (en bleu) se superpose au tenon. Enfin, l'assemblage est verrouillé par la clé (boulon hexagonal M8, écrou borgne et rondelles) (Fig. 1.95).

Les bords des panneaux ne sont mis en contact que ponctuellement par les épaulements qui moisent le raidisseur. Ces joints ouverts permettent à la lumière de rentrer et mettent en avant la géométrie hélicoïdale de la structure (Fig. 1.100).

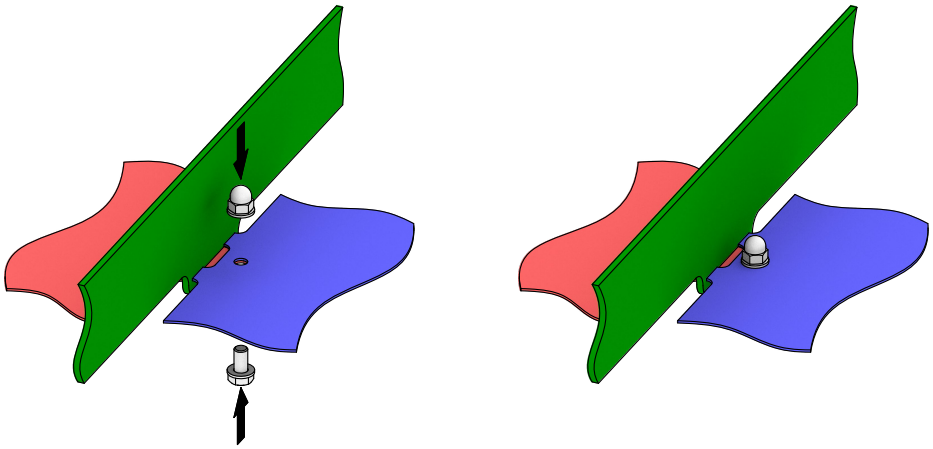
Dans une configuration traditionnelle, les raidisseurs sont souvent encastrés en pied sur la surface à raidir afin d'éviter leur déversement. Ce n'est pas le cas ici puisque le raidisseur a localement la possibilité de tourner autour de la tangente de l'hélice. Cependant, la courbure de l'axe du raidisseur donne la stabilité en torsion nécessaire. Il a tout de même été observé, lors de chargements importants de la structure, une amorce de déversement de certains raidisseurs.



(a) Insertion tenon-mortaise



(b) Positionnement du second panneau



(c) Verrouillage de l'assemblage

FIGURE 1.95 – Cinématique d'assemblage

1.5.5 Fabrication et montage

L'ensemble du prototype, à l'exception des deux berceaux support et de la quincaillerie, n'est composé que de deux types de pièces : les panneaux et les raidisseurs. Les 72 panneaux sont découpés au laser dans des tôles d'acier galvanisé d'épaisseur 1.5 mm, alors que les 76 raidisseurs, de plus forte épaisseur (4 mm) sont découpés au plasma dans des tôles d'acier brut par manque de disponibilité de la finition galvanisée dans les délais imposés. Sur la figure 1.96, on remarque bien que les bandes développables des panneaux, tangentes à la surface de référence et proches des lignes géodésiques, donnent lieu à des développés relativement rectilignes alors que les raidisseurs, qui suivent les mêmes lignes mais dans une configuration orthogonale, possèdent des développés courbes (§ 1.1.2.6).

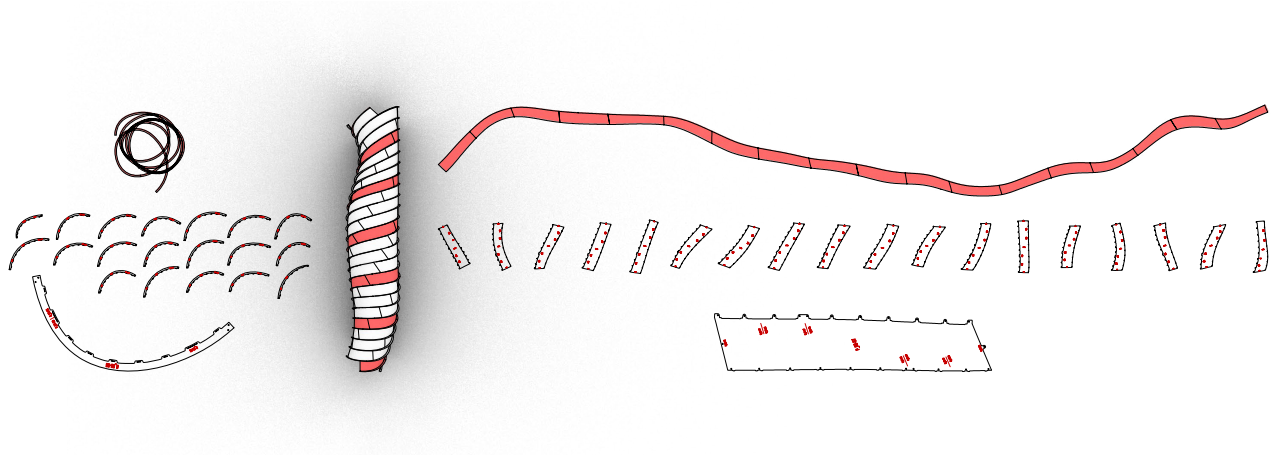


FIGURE 1.96 – Patrons de découpe montrant une des quatre bandes de dix-huit panneaux et une des quatre bandes de dix-neuf raidisseurs

L'assemblage en atelier a suivi les étapes suivantes. Tout d'abord, un travail de classement des pièces, mises en désordre par l'opération d'optimisation des chutes, est nécessaire. L'ensemble des pièces du pavillon, suffisamment compact pour être contenu sur deux palettes, est ordonné selon une nomenclature établie : chaque pièce est gravée de son numéro de bande (00-03) et de sa position sur la bande (00-17 pour les panneaux et 00-18 pour les raidisseurs). En plus de leur numéro gravé au centre, les numéros des deux panneaux latéraux et de ceux qui précédent et suivent au sein de la bande, sont également indiqués (Fig. 1.96). Ainsi il n'est nul besoin de plans de montage, l'intégralité de l'information étant contenue sur les pièces à assembler. L'étape suivante, sans doute la plus « musclée », consiste à fermer le premier anneau, constitué des quatre premières tôles et de leurs raidisseurs, et ainsi y enfermer l'énergie élastique générée par le cintrage. Ensuite, la structure est montée à la verticale jusqu'au premier berceau support, puis installée horizontalement. Il ne reste plus qu'à ajouter les panneaux et les raidisseurs un à un à la structure (Fig. 1.97). Le temps nécessaire à l'assemblage complet est d'environ quatre jours à deux personnes.

La structure a été transportée de nuit par camion, puis grutée en plusieurs fois jusqu'à destination, dans la cour de la Maréchalerie de l'École d'Architecture de Versailles (Fig. 1.98). Après la fin de l'exposition, la structure a été déplacée à son emplacement actuel, sur le campus de l'École des Ponts (Fig. 1.99 et 1.100)



FIGURE 1.97 – Séquence de montage du prototype



FIGURE 1.98 – Installation dans la cour de la Maréchalerie de l'École d'Architecture de Versailles



FIGURE 1.99 – *Metal Euplectella Folie* sur le campus de l'École des Ponts

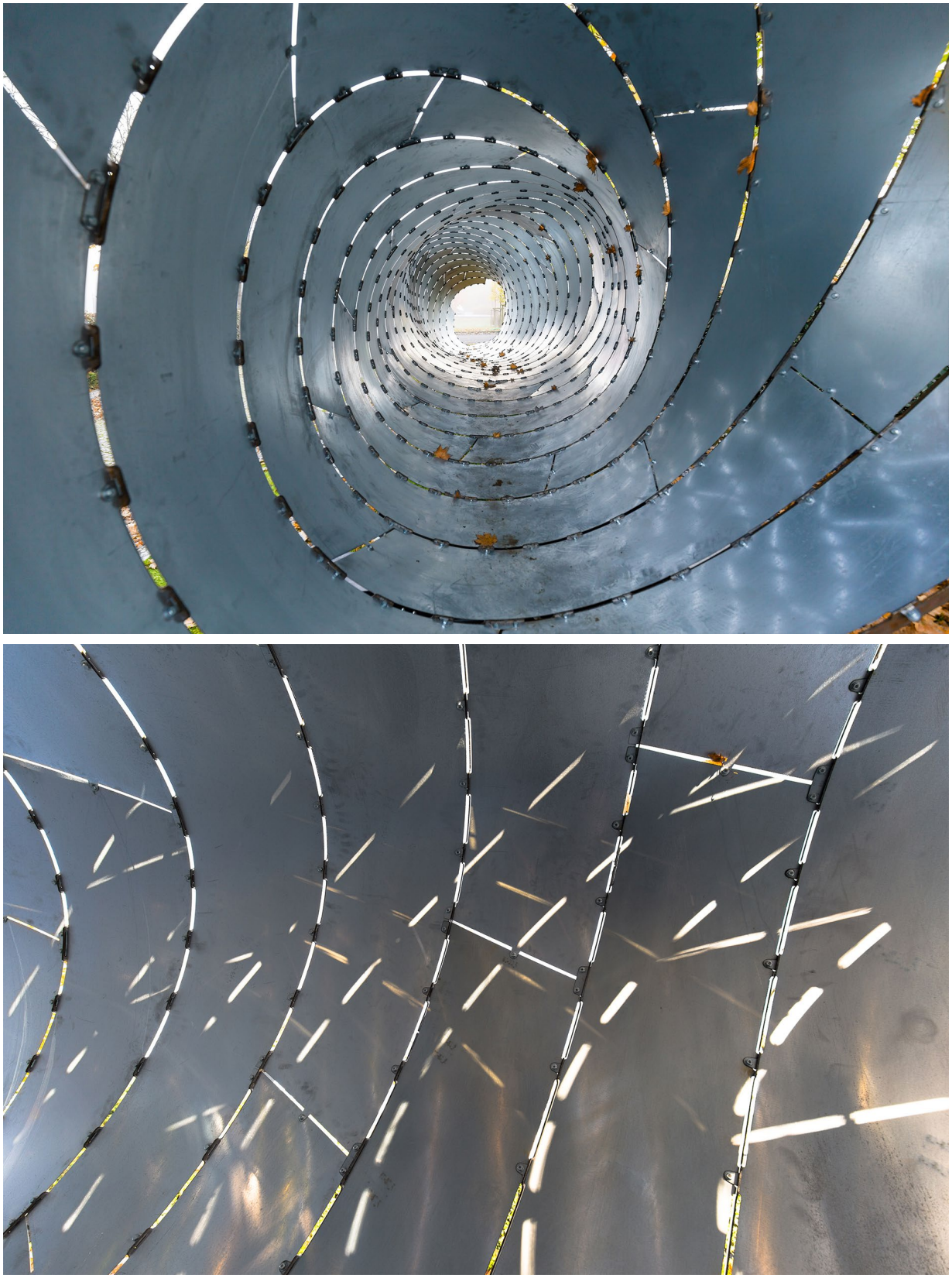


FIGURE 1.100 – Vues intérieures

1.5.6 Prolongements

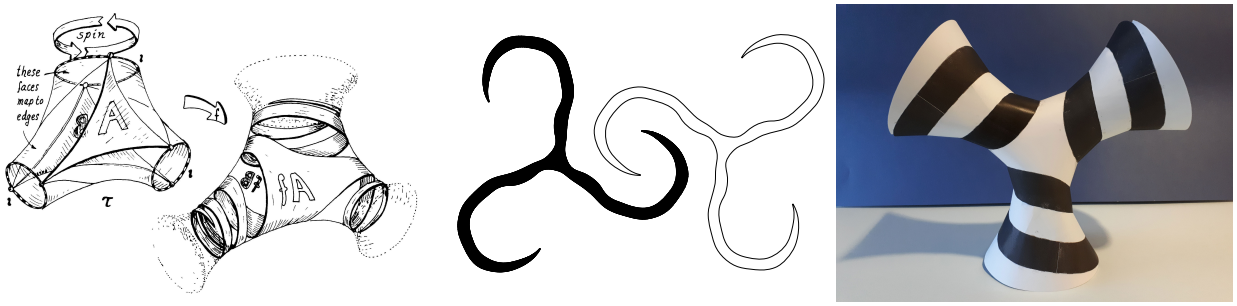
Le prototype *Metal Euplectella Folie* a montré, par le projet, la pertinence des surfaces développables pour la conception et la fabrication d'enveloppes structurelles à géométrie complexe. Il a été conçu afin d'accorder les cinq paramètres de conception morpho-structurelle dans une proposition synthétique et cohérente. Néanmoins, plusieurs pistes d'approfondissement sont à envisager pour prolonger la réflexion autour de ce sujet.

La complexité du paramètre de *Forme* a été délibérément limitée pour des questions de calendrier et de transport. Il serait intéressant de comprendre le spectre de variabilité géométrique que le système, une fois libéré de ces contraintes, est en mesure de couvrir avant d'atteindre ses limites technologiques ou mécaniques. Au delà de la géométrie, c'est la topologie que l'on peut également interroger avec les tubes à embranchements multiples. Des premiers essais ont été réalisés dans ce sens : une surface de trinoïde dont le découpage en deux bandes à trois branches a été inspiré par les dessins de Francis [203] (Fig. 1.101) et une topologie intégrant une structure de boucle .

Le paramètre *Matériau* pourrait faire l'objet d'investigations en s'accompagnant d'une interrogation sur l'échelle et la technologie associée. Par exemple, l'architecture textile gonflable pourrait être une application tirant parti du processus d'assemblage continu, basée sur de grandes longueurs de laizes.

Concernant le paramètre *Technologie*, le prototype a été réalisé sans réglage, sans plan et sans gabarit. Même si l'objet construit semble correspondre fidèlement au modèle tridimensionnel, une étude métrologique nous éclairerait sur d'éventuelles divergences dues à l'élasticité des matériaux sous charges extérieures, au retour élastique dû à la précontrainte par cintrage ou encore à cause des jeux dans les fixations mécaniques.

Enfin, le prototype semble présenter de bonnes performances mécaniques : il porte sur une dizaine de mètres avec une masse surfacique de coque d'environ $22\,\mathrm{kg/m^2}$. Les paramètres de *Force* et *Structure* pourraient être avantageusement renseignés par une étude paramétrique plus poussée du comportement mécanique des tubes spiralés raidis pour déduire des principes de recherche de forme et de distribution des raidisseurs.



(a) Spinning a Pair of Pants [203] Francis (1987)

(b) Patrons de découpe et trinoïde en bande développables

FIGURE 1.101 – Structure spiralée à trois branches

1.6 Conclusion

Les outils de géométrie différentielle introduits en début de chapitre permettent de positionner les surfaces développables dans la classification des surfaces et d'identifier les propriétés géométriques pouvant se traduire en avantages constructifs. En particulier, la propriété d'isométrie au plan euclidien, c'est-à-dire la capacité de former la surface à partir de son patron de découpe plan par simple flexion sans déformation métrique, implique de nombreux champs d'applications. Formulées par Euler et Monge à la fin du XVIIIe siècle pour répondre à des problèmes de génie civil, les surfaces développables sont l'objet de développements mathématiques ou algorithmiques pour mieux trouver de nouvelles applications concrètes, particulièrement dans les domaines industriels de la construction navale, aéronautique ou le BTP.

Dans ce dernier champ, une analyse morpho-structurelle indique la présence des surfaces développables dans tous les paramètres de conception, mais souvent dans un usage confiné à un seul paramètre, et met en évidence leur faible implication dans le processus global de conception. Les projets à cintrage élastique auto-contraints (active bending) font exception à cette remarque, mais restent essentiellement l'apanage de travaux de recherche, avec des exemples construits de dimension limitée et impliquant un nombre réduit d'éléments.

On peut expliquer ce manque de transversalité entre les différents paramètres de conception tout d'abord par la faible intégration des outils de modélisation géométrique des surfaces développables dans les logiciels commerciaux et en particulier dans leurs modules paramétriques.

La fabrication du prototype *Metal Euplectella Folie* est l'occasion de placer les surfaces développables au cœur d'un processus de co-rationalisation grâce à l'élaboration d'outils paramétriques et personnalisés de génération qui permettent de contrôler l'intégration de différentes contraintes (usage, technologie, mécanique, transport...) pendant la formulation de la morphologie. Les réflexions autour du prototype ont amené à s'interroger sur la relation entre la forme tridimensionnelle et celle de son patron de découpe. Alors que le chemin de la 3d à la 2d (développement des surfaces) est bien couvert par la littérature, le sens inverse laisse beaucoup de problèmes ouverts et pose la question de la nature géométrique de l'assemblage de deux bords de deux surfaces développables. Les études bibliographiques montrent que le cas particulier du pli courbe est bien référencé, mais que le cas général du rapiéçage courbe est peu traité. Le chapitre 2 en propose une description par les outils de géométrie différentielle ainsi que la formulation de processus génératifs de formes basées sur cette théorie.

On peut évoquer une seconde raison au manque de transversalité entre les différents paramètres de conception morpho-structurel. Les outils d'analyse mécanique mobilisés par l'étude de structures comportant des surfaces développables sont peu agiles dans les phases amont du projet : le concepteur doit choisir entre une modélisation simplifiée pour la recherche de forme, qui permet une approche itérative mais donne un accès limité à la description mécanique du système, et une modélisation complète, cette fois-ci plus précise, mais coûteuse en temps de calcul et plutôt utilisée à titre de vérification. Le chapitre 3 traite la question mécanique du rapiéçage courbe à travers l'étude d'une structure spatiale et propose d'accorder une fois encore une place centrale aux surfaces développables dans le processus de conception. Pour cela, nous aurons recours à diverses techniques d'optimisation sous contraintes et à la formulation d'un modèle équivalent de plaque épaisse permettant de s'affranchir d'une modélisation détaillée de la structure dans les phases préliminaires du projet.

CHAPITRE 2

Géométrie du rapiéçage courbe

La géométrie différentielle est un outil utilisé depuis près de deux siècles (Carl Friedrich Gauss formule le *Theorema Egregium* en 1827) pour décrire localement les courbes et surfaces lisses [24]. Plus récemment, de nombreuses recherches ont été menées pour définir des notions équivalentes pour les maillages en s'appuyant sur la géométrie différentielle discrète [204].

A mi-chemin entre ces deux théories, nous avons vu dans le chapitre précédent que la géométrie semi-discrète, qui consiste en l'assemblage de portions de surfaces développables, a fait l'objet de développements importants dans le domaine de la construction. Même si quelques précédents architecturaux peuvent être identifiés [205] (Fig. 2.1), ces recherches interviennent essentiellement depuis la publication en 2008 de l'article fondateur *Freeform surfaces from single curved panels* [39].



(a) Centre International des Foires et des Congrès
Santiago Calatrava (Tenerife)

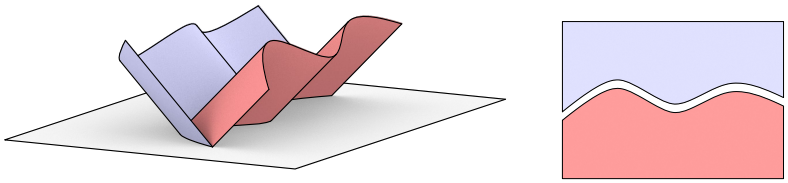
(b) Neueur Zollhof
Frank Gehry (Allemagne)

FIGURE 2.1 – Architectures pionnières dans l'utilisation des surfaces développables

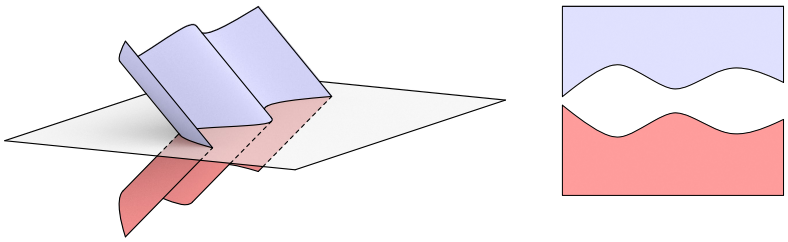
Une approche répandue de rationalisation d'enveloppes à géométrie complexe (post-rationalisation décrite en partie 1.4.1) consiste à subdiviser une surface de référence à double courbure par un double-réseau de courbes, puis à déterminer la meilleure approximation locale de chaque portion de surface par un panneau de géométrie plus simple (plan, cylindre...). Dans cette démarche, la nature de la relation entre deux panneaux adjacents (position, angle) est davantage considérée comme une conséquence du processus plutôt qu'un moteur de génération géométrique.

Les recherches autour du pli courbe font exception à cette approche puisqu'elles envisagent le problème du point de vue de la jonction particulière entre deux surfaces développables. Prendre comme point de départ deux surfaces planes partageant un bord commun courbe engendre des propriétés de couplage cinématique qui ont donné lieu à des thématiques de recherches riches et des applications concrètes.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au rapiéçage courbe, type d'assemblage de surfaces développables plus général que le pli courbe. Il se distingue de ce dernier (Fig. 2.2a) par le fait que les bords raccordés possèdent des géométries (courbures) développées différentes tout en conservant des longueurs identiques (Fig. 2.2b). Malgré des propriétés relativement comparables à celles du pli courbe, la géométrie du rapiéçage n'a pas fait l'objet d'une description spécifique et les processus de morphogenèse qui s'appuie sur ce type d'assemblage sont rares.



(a) Pli courbe



(b) Rapiéçage courbe

FIGURE 2.2 – Réflexions d'un cylindre général par rapport à un plan générant, selon les cas, pli ou rapiéçage courbe

Dans la partie 2.1, la proximité des questions du pli et du rapiéçage nous invite à établir un état de l'art sur les deux sujets. Puis, dans la partie 2.2, la formulation de la géométrie différentielle du rapiéçage courbe sera traitée par une démarche similaire à celle, déjà établie, du pli courbe ; elle permettra de prédire la forme que prendra une surface développable connectée à une surface de géométrie connue. Ensuite, en s'appuyant sur la formule de Steiner, les définitions des courbures gaussienne et moyenne localisées dans les coutures des surfaces développables rapiécées seront données dans la partie 2.3. Enfin nous étudierons, dans la partie 2.4, la génération morphologique de surfaces développables par morceaux fermées (dForms) en imposant des contraintes particulières sur la nature géométrique du rapiéçage.

2.1 État de l'art

Le pli courbe est évoqué en premier lieu dans cet état de l'art, car il est à la fois un cas particulier du rapiéçage courbe mais également le point de départ de la réflexion que nous mènerons par la suite.

Le pli courbe peut être considéré comme la généralisation du pli classique en substituant une ligne de pli droite reliant deux surfaces planes par une ligne de pli courbe reliant deux surfaces développables. Les articles de revue de Demaine *et al.* [206] et Lebée [207] ainsi que le livre de vulgarisation de Mitani [208] donnent un panorama assez complet sur le sujet.

Pionnier dans le domaine, David Huffman [209] explore par l'expérimentation les potentialités du pli courbe (Fig. 2.3). Demaine *et al.* [210] revisitent ces explorations en inventoriant de nombreux patrons de pliage et Koschitz [211] relate les premiers principes géométriques développés par Huffman en 1977.

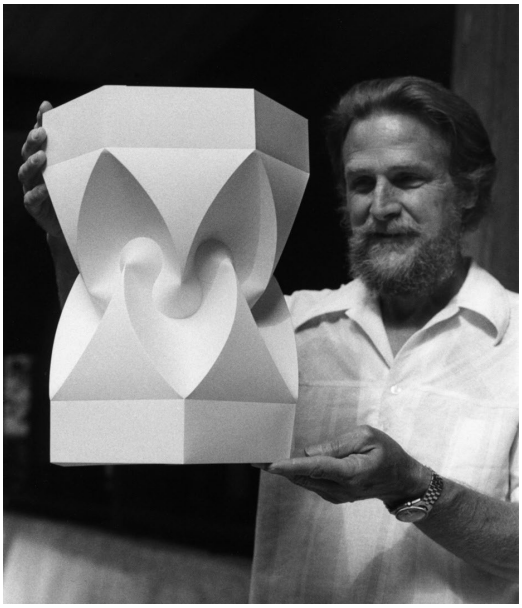


FIGURE 2.3 – David Huffman et son pliage courbe [210]
Hexagonal column with cusps

Cinq ans plus tard, Duncan et Duncan [110] donnent une description complète de la géométrie différentielle du pli courbe ; ces résultats sont repris et complétés par Pottmann et Wallner [27], puis mis en application dans les structures plus complexes par Jiang *et al.* [212]. Seffen [213, 214] illustre et confirme les résultats de Duncan et Duncan au moyen de la représentation du pliage courbe sur la sphère de Gauss.

Koschitz [211] dénombre plusieurs méthodes de générations directes/analogiques dont la plus connue est la méthode de réflexion [215] (Fig. 2.2a) : elle consiste à considérer une surface développable et son image par réflexion par rapport à un plan. Les deux surfaces coïncident le long d'une courbe plane, intersection de la surface et du plan de réflexion [216]. Les principales méthodes de générations numériques sont décrites par Kilian *et al.* [111] et Tachi et Epps [156] ; elles procèdent par optimisation sous la contrainte géométrique identifiée par Duncan et Duncan.

L'utilisation du pliage courbe trouve toute sa pertinence lorsqu'une pièce unique plane est

mise en forme par un processus continu. Cette remarque explique son usage extensif dans le domaine de l'art et du design (Fig. 2.4 et 2.5) ou de l'industrie [110, 217], mais limite la dimension des composants architecturaux dans le domaine de la construction. On peut recenser plusieurs applications comme celle d'éléments architecturaux mobiles [218], déployables [155], voire structurels [207,219,220]. Les panneaux de façades sont également de bons candidats pour la mise en œuvre du pli courbe [221, 222].



(a) Computational Origami
Erik & Martin Demaine (2008)

(b) Icosahedron II
Richard Sweeney (2006)

FIGURE 2.4 – Œuvres d'art faisant usage du pli courbe

La description du rapiéçage courbe, c'est-à-dire le couplage géométrique liant deux surfaces développables le long d'un bord commun dans une configuration quelconque, a bénéficié de moins de développements que celle du pli.

D'un point de vue géométrique, Carl [223] et Müller [224] explorent les familles de surfaces semi-discrètes à courbure moyenne constante en construisant une théorie de la courbure dans les coutures du rapiéçage grâce à une approche discrète de maillage quadrangulaire. Stein [225] propose une nouvelle caractérisation de la courbure gaussienne au niveau des courbes de rapiéçage pour des maillages triangulaires ; cette caractérisation est mise à contribution dans une méthode de flot pour localiser les courbes de rapiéçage sur une surface à double courbure afin de segmenter celle-ci en portions développables.

D'un point de vue mécanique, Norman *et al.* [126] simule le comportement de tôles ondulées à double courbure en simplifiant le profil d'ondes sinusoïdal par un assemblage de bandes développables rapiécées.

La seconde partie de ce chapitre est consacrée à la mise en œuvre du rapiéçage courbe au sein de surfaces semi-discrètes fermées. Les dForms offrent un cas d'étude pertinent, car ils permettent d'aborder la question dans une configuration minimale de rapiéçage de deux portions développables reliées par une unique courbe de couture. Introduites pour la première fois par le designer Wills [226] (Fig. 2.6), il s'agit tout d'abord d'un processus ludique : deux disques (au sens topologique) de même périmètre et possiblement de formes différentes sont découpés dans une feuille de matériau rigide en plan, mais flexible. Un point sur le périmètre de chaque patron est choisi, puis les deux formes sont assemblées à l'avancement. L'incompatibilité en plan des patrons de découpe fait émerger par auto-contrainte une forme tridimensionnelle fermée.



(a) Lampe Le Klint 172
Poul Christiansen (1971)

(b) Algo Columns
Lalvani Studio (1999-2002)

FIGURE 2.5 – Design et pli courbe

La figure 2.7 montre une simulation numérique de l'assemblage de deux patrons elliptiques réalisée à l'aide de l'extension de simulation physique Kangaroo2 intégré dans l'environnement de programmation Grasshopper 3D au sein du logiciel Rhinoceros 3D.



FIGURE 2.6 – Tony Wills présentant plusieurs modèles de dForms [226]

L'existence et unicité de cette forme tridimensionnelle fermée convexe, obtenue à partir de deux formes planes, également convexes, est démontrée par Alexandrov et Pogorelov [227] sur des modèles polygonaux avant même l'invention des dForms.

La nature inconnue de la forme émergente a suscité de nombreuses approches empiriques de génération, relayées dans la littérature scientifique [228–230] ou grand public [231]. Différentes méthodes de fabrication sont aussi proposées, du béton coulé [232] au crochet [233] !

Les dForms deviennent un objet de recherche quand Pottmann et Wallner [27] identifient comme un problème ouvert la prédiction de la forme tridimensionnelle par d'autres moyens que sa fabrication physique ; selon les auteurs, cette question est rendue difficile par la nature globale du problème. Erik Demaine [234] théorise plusieurs propriétés des dForms et dédie à ce sujet trois séances de son cours *Geometric Folding algorithms : linkage, origami, polyhedra* [235]. Actuellement, deux approches différentes peuvent être identifiées dans la littérature pour la prédiction de la forme tridimensionnelle. La première est basée sur un algorithme d'optimisation qui minimise l'énergie au sein d'un maillage triangulaire, comme le logiciel Surface Evolver [236] utilisé par Paul Bourke [237] pour modéliser les dForms. La seconde approche est un algorithme géométrique basé sur le théorème d'Alexandrov développé par Bobenko et Izmestiev [238] ainsi que par Kane *et al.* [239]. En marge de ces approches, Mayerhofer [240] propose une méthode approchée dans le cas particulier de patrons de découpe elliptiques.

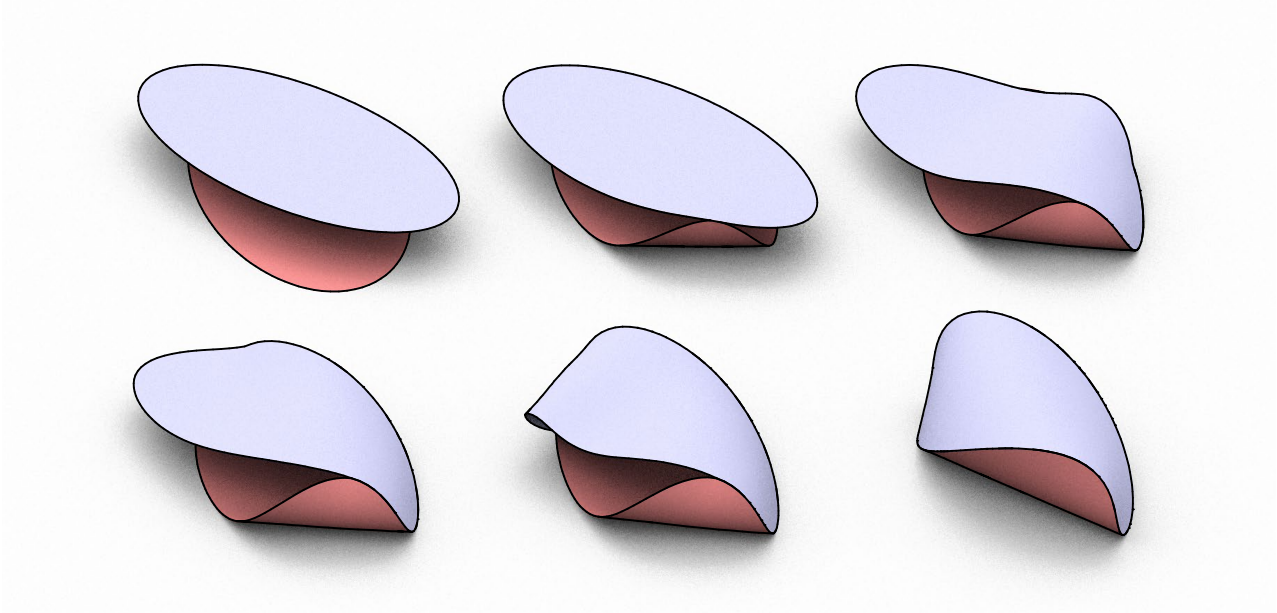


FIGURE 2.7 – Assemblage numérique de deux ellipses orientées à 45°

Avant de proposer nous-mêmes de nouvelles méthodes génératives de dForms, il est nécessaire de revenir sur les définitions et propriétés locales d'assemblage de deux surfaces développables selon leurs bords, tout d'abord par la compréhension du pli courbe, puis par son extension au cas général du rapiéçage courbe. Ces éléments permettront alors d'appréhender, en complément de considérations topologiques, les conditions de fermeture des dForms.

2.2 Couplage géométrique du rapiéçage courbe

Duncan et Duncan posent les bases de la géométrie différentielle du pli en 1982 avec leur article *Folded developables* [110]. Dans cette publication, les auteurs identifient les contraintes cinématiques entre deux surfaces développables reliées par un pli courbe ; plus précisément, il s'agit de déterminer la géométrie de la seconde surface, connaissant la géométrie tridimensionnelle de la première surface et du bord à relier.

Dans cette partie, nous proposons de reprendre la démarche proposée dans l'article et de l'étendre à la notion plus large de rapiéçage courbe. Ainsi, dans un premier temps (§ 2.2.1) nous rappelons l'approche des auteurs sur la question et l'illustrons par une figure classique du pliage courbe : l'ensacheuse à col de cygne. Nous reprenons dans un second temps la trame développée dans l'article (§ 2.2.2) pour l'appliquer au cas du rapiéçage qui sera également illustré par une étude de cas.

2.2.1 Géométrie différentielle du pli courbe

Dans un souci de cohérence concernant les notations et les conventions de signe dans ce manuscrit, nous nous permettons d'adapter certaines formules de l'article de Duncan et Duncan. Les rappels faits ci-dessous sont l'occasion de procéder à cette mise à jour.

2.2.1.1 Rappel sur la théorie

Les auteurs procèdent en trois étapes principales auxquelles nous ajoutons une dernière pour une description complète du processus. Dans une première étape, ils décrivent la géométrie en plan de la surface à plier. Dans une seconde étape, ils explicitent la géométrie tridimensionnelle de la première surface (σ_1) via les formules analytiques classiques de la géométrie différentielle et un diagramme liant les différentes courbures. Dans une troisième étape, la géométrie de la seconde surface (σ_2) est décrite par la mise en évidence d'un couplage géométrique entre les deux surfaces sur le diagramme des courbures. Enfin, dans une quatrième étape, nous donnons deux méthodes pour calculer les règles de la seconde surface. Par la suite, les différents éléments géométriques recevront un indice 1 ou 2 selon leur rapport aux surfaces σ_1 et σ_2. L'absence d'indice signifie que l'élément est indépendant ou commun aux deux surfaces.

Etape 1 : Description de la géométrie en plan

On considère deux surfaces σ_1 et σ_2 appartenant au plan xy et partageant un bord courbe noté γ_{2d}. Cette courbe est ici paramétrée par longueur d'arc afin de simplifier les formules. Dans l'exemple de l'ensacheuse qui suivra, nous traiterons le cas plus général d'une courbe définie par un paramétrage quelconque.

Associés au point $p(s)$ de la courbe de rapiéçage, nous identifions les entités géométriques suivantes (Fig. 2.8) :

- le vecteur tangent $\overrightarrow{T}$, orienté dans le sens positif du paramétrage ;
- le vecteur normal $\overrightarrow{N}$, obtenu par la rotation de $\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{T}$ dans le sens trigonométrique ;
- le centre de courbure O de γ_{2d} tel que $Op = 1/|\kappa_{2d}|$, où κ_{2d} est la courbure signée de γ_{2d} ;
- la direction G de la génératrice le long de laquelle la surface développable σ_1 sera courbée ;
- l'angle entre la génératrice et la tangente $\overrightarrow{T}$, noté α.

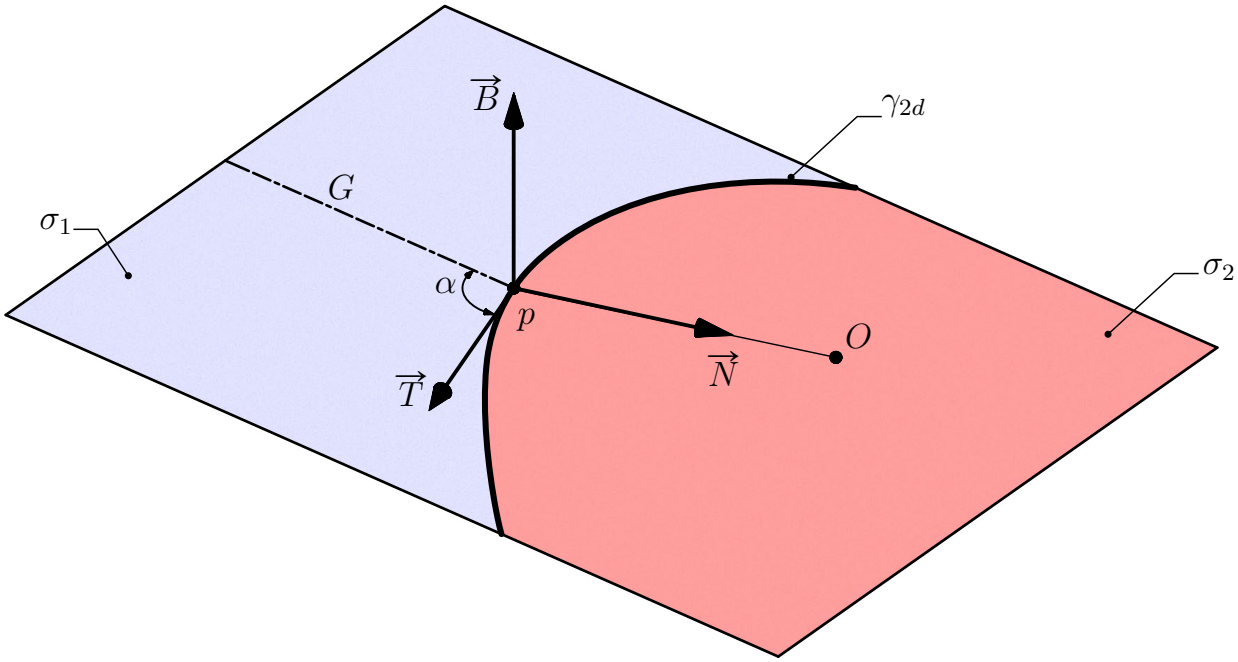


FIGURE 2.8 – Description de la géométrie en plan

Etape 2 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_1
Lors de la mise en forme de la surface σ_1 selon une surface développable, la courbe γ_{2d} quitte le plan xy pour devenir la courbe tridimensionnelle γ_{3d} à laquelle on attache le repère de Frenet $\mathcal{R}_F(p, \vec{T}, \overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{B_F})$ et le repère de Darboux $\mathcal{R}_{D_1}(p, \vec{T}, \overrightarrow{B_{D_1}}, \overrightarrow{N_{D_1}})$ dans sa relation avec la surface σ_1. On note β, l'angle entre le plan xy et la normale principale $\overrightarrow{N_F}$ (Fig. 2.9). Les auteurs rappellent les propriétés bien connues et déjà décrites dans le chapitre précédent (§ 1.1.2.3) sur les courbures relatives au repère de Darboux. Notons que la convention de signe de la torsion géodésique dans l'article de Duncan et Duncan est opposée à celle prise dans ce manuscrit. L'équation 2 de l'article devient selon nos conventions :

$$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \vec{T} \\ \overrightarrow{B_{D_1}} \\ \overrightarrow{N_{D_1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_{g_1} & \kappa_{n_1} \\ -\kappa_{g_1} & 0 & \tau_{g_1} \\ -\kappa_{n_1} & -\tau_{g_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{T} \\ \overrightarrow{B_{D_1}} \\ \overrightarrow{N_{D_1}} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

avec κ_{g_1}, κ_{n_1} et τ_{g_1}, courbure géodésique, courbure normale et torsion géodésique de γ_{3d} par rapport à σ_1.

La figure 2.10 montre le diagramme des courbures défini par les auteurs. Attaché au point p, ce diagramme lie la courbure κ de la courbe tridimensionnelle γ_{3d} avec les courbures géodésique et normale par rapport à σ_1. Situé dans le plan normal à la courbe γ_{3d} engendré par le couple de vecteurs $(\overrightarrow{B_{D_1}}, \overrightarrow{N_{D_1}})$, ce diagramme des courbures s'appuie sur le théorème de Meusnier dont une expression est $\kappa^2 = \kappa_n^2 + \kappa_g^2$. Il montre l'alignement de trois centres de courbure : O, centre de courbure de la courbe tridimensionnelle γ_{3d}, O_{g_1}, centre de courbure géodésique et O_{n_1},

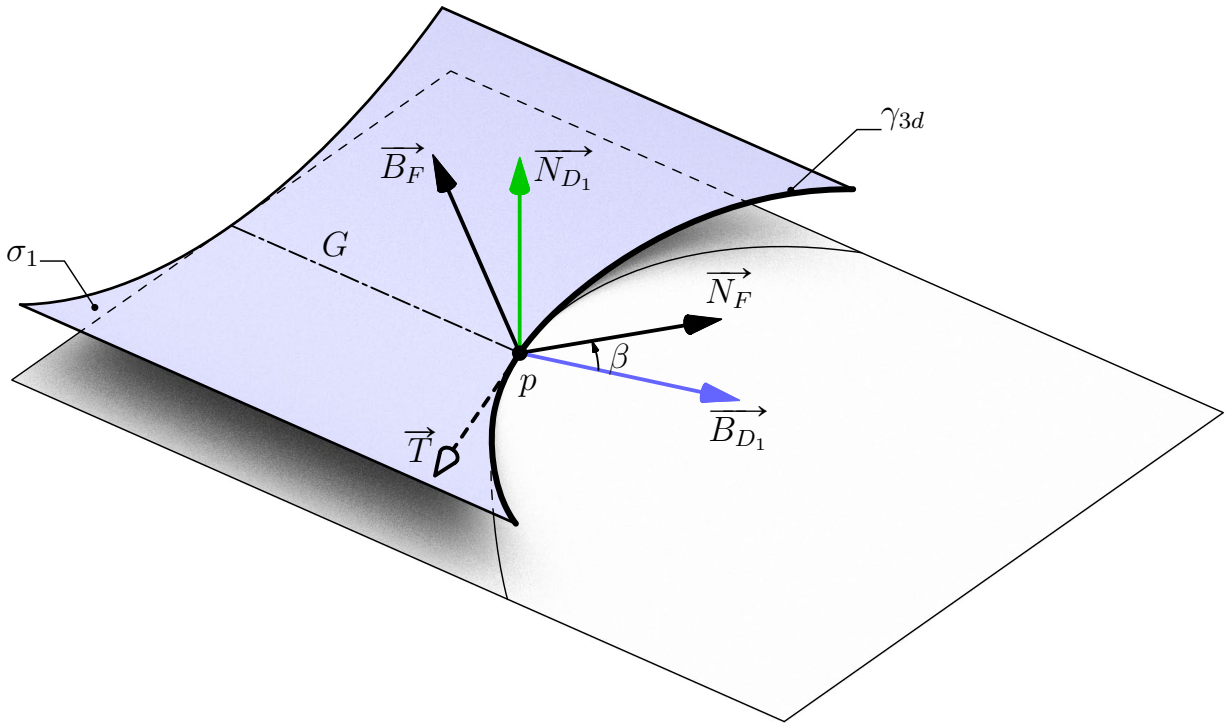


FIGURE 2.9 – Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_1

centre de courbure normale. Ces trois points se situent sur une droite $\mathcal{D}$ perpendiculaire à la direction de la normale $\overrightarrow{N_F}$. L'angle entre les repères de Frenet $\mathcal{R}_F$ et de Darboux $\mathcal{R}_{D_1}$ est complémentaire de l'angle β et est noté $\theta = (\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{N_{D_1}})$.

Il est alors possible, à partir du diagramme des courbures et des relations classiques de géométrie différentielle, d'établir les expressions suivantes pour les courbures du repère de Darboux $\mathcal{R}_{D_1}$. Selon nos conventions :

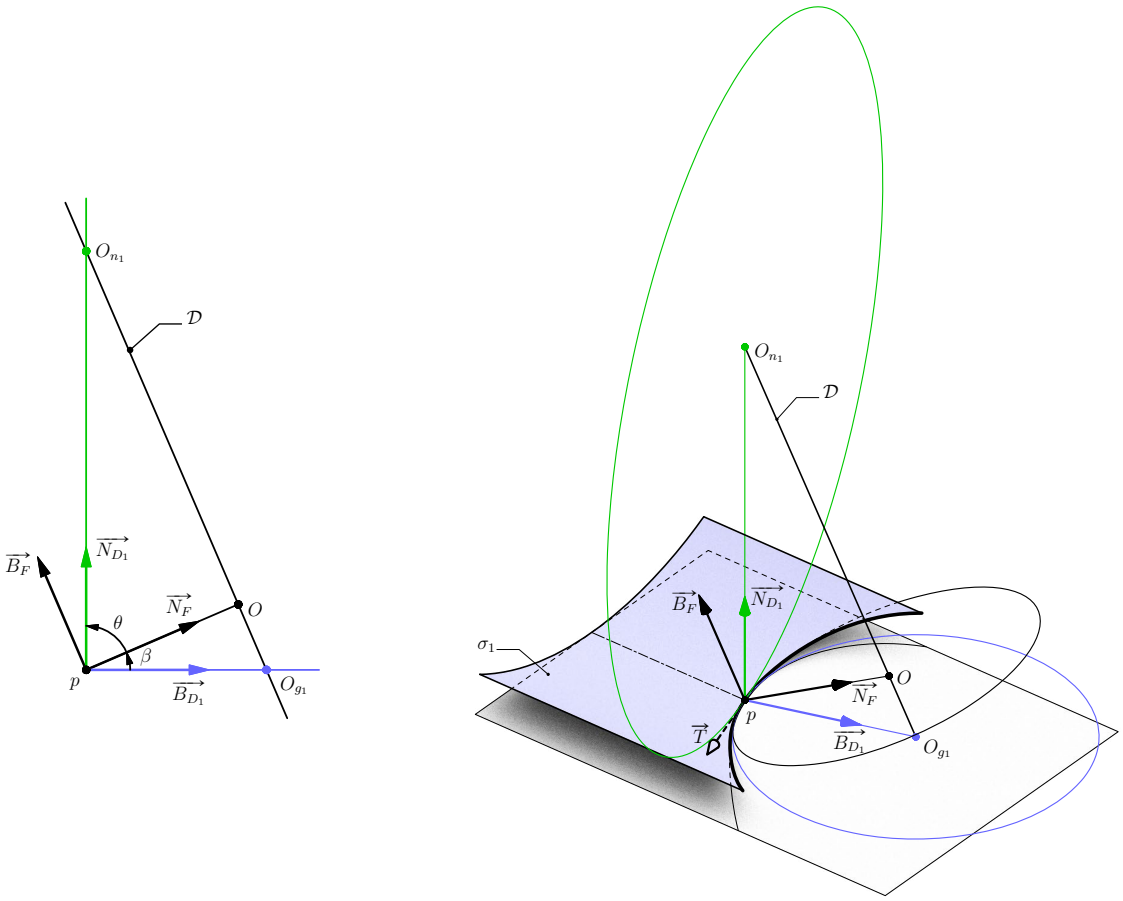
$$\kappa_{g_1} = \kappa_{2d} \tag{2.2}$$
$$\kappa_{n_1} = \kappa_1 \sin^2 \alpha \tag{2.3}$$
$$\tau_{g_1} = \kappa_1 \cos \alpha \sin \alpha \tag{2.4}$$

avec κ_1, courbure principale non-nulle de la surface σ_1 au point p.

La courbure et la torsion de la courbe sont de la forme :

$$\kappa = \frac{\kappa_{g_1}}{\sin \theta} \tag{2.5}$$
$$\tau = \frac{\kappa_{g_1} \kappa'_{n_1} - \kappa_{n_1} \kappa'_{g_1}}{\kappa^2} + \tau_{g_1} \tag{2.6}$$

avec κ'_{g_1} et κ'_{n_1}, dérivées des courbures géodésique et normale par rapport à l'abscisse curviligne s.



(a) Vue dans le plan normal à γ_{3d} (b) Vue axonométrique

FIGURE 2.10 – Diagramme des courbures par rapport à σ_1

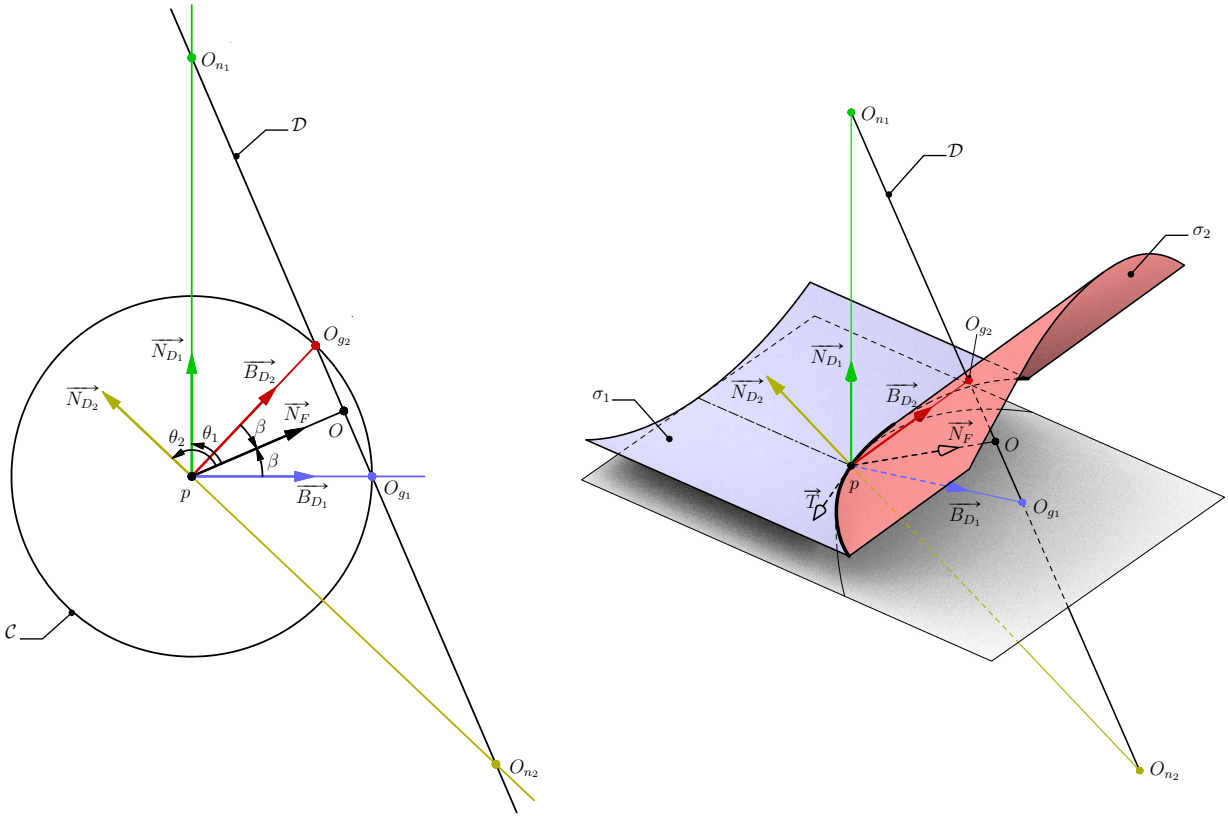
Etape 3 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_2
Lors de la mise en forme de la surface σ_1 et du pliage selon la courbe γ_{3d}, la surface σ_2 prend la forme d'une surface développable. Étant donné que la courbe γ_{3d} est commune aux surfaces σ_1 et σ_2, en s'appuyant d'une part sur les relations identifiées à l'étape 2 et d'autre part sur le diagramme des courbures, il est possible de déterminer entièrement les relations régissant le pliage courbe et donc la géométrie de la surface σ_2.

Tout d'abord, la courbure géodésique étant un invariant intrinsèque, elle est conservée par déformation isométrique et est égale à la courbure de la courbe plane κ_{2d} :

$$\kappa_{g_2} = \kappa_{g_1} = \kappa_{2d} \tag{2.7}$$

La figure 2.11 reprend le diagramme de la figure précédente et le complète avec les données relatives à la surface σ_2. La courbe tridimensionnelle γ_{3d} étant commune aux surfaces σ_1 et σ_2, la droite $\mathcal{D}$ passant par le centre de courbure O, perpendiculaire à la normale $\overrightarrow{N_F}$ et qui contient O_{g_1} et O_{n_1}, contient également O_{g_2} et O_{n_2}. Le point O_{g_2} se trouve donc à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ de centre p et de rayon $1/|\kappa_{g_1}|$ avec la droite $\mathcal{D}$, étant donné l'égalité des courbures géodésiques (Eq. 2.7).

Par cette construction, on constate que le plan osculateur de γ_{3d} engendré par les vecteurs $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N_F})$ est bissecteur des deux plans tangents à σ_1 et σ_2, respectivement définis par les



(a) Vue dans le plan normal à γ_{3d} (b) Vue axonométrique

FIGURE 2.11 – Diagramme des courbures par rapport à σ_1 et σ_2

couples de vecteurs $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_{D_1}})$ et $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_{D_2}})$.

En choisissant, comme les auteurs, un vecteur tangent $\overrightarrow{T}$ identique pour les deux surfaces et des normales $\overrightarrow{N_{D_1}}$ et $\overrightarrow{N_{D_2}}$ orientées sur les mêmes faces, on peut alors placer le repère de Darboux $\mathcal{R}_{D_2}(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_{D_2}}, \overrightarrow{N_{D_2}})$ sur le diagramme des courbures et identifier le point O_{n_2} comme l'intersection de la droite support de $\overrightarrow{N_{D_2}}$ passant par p et la droite $\mathcal{D}$. On observe alors que les courbures normales de la courbe de pli γ_{3d} relatives aux surfaces σ_1 et σ_2 sont systématiquement égales et opposées, car les centres de courbure normale O_{n_1} et O_{n_2} sont symétriques par rapport à la droite (pO) :

$$\kappa_{n_2} = -\kappa_{n_1} \tag{2.8}$$

Enfin, puisque $\kappa_{n_2} = -\kappa_{n_1}$, $\kappa'_{n_2} = -\kappa'_{n_1}$ et d'après l'équation 2.6, on déduit que :

$$\tau_{g_2} = -\tau_{g_1} + 2\tau \tag{2.9}$$

Pour le pliage courbe, on note que certaines valeurs de β, correspondant à des cas dégénérés, sont exclues de l'étude :

— $\beta = \{0, \pi\}$ implique que $\kappa_{n_1} = \kappa_{n_2} = 0$: les surfaces σ_1 et σ_2 restent planes ;

— $\beta = \{-\pi/2, \pi/2\}$ implique que la ligne de pli est une géodésique. Dans ce cas, la surface se superpose localement à elle-même après avoir effectué un pli à 180°.

Etape 4 : Calcul des règles de la surface développable σ_2

Selon Pottmann et Wallner [27], la direction $\overrightarrow{r}(s)$ d'une règle d'une surface développable peut être calculée à partir de la normale de la famille à un paramètre des plans tangents (paramétrisation indirecte) :

$$\overrightarrow{r}(s) = \overrightarrow{N_{D_2}} \wedge \overrightarrow{N'_{D_2}} \tag{2.10}$$

avec $\overrightarrow{N'_{D_2}}$, dérivée du vecteur normal par rapport à l'abscisse curviligne de la surface développable à calculer.

A cette méthode, nous lui préférons celle de Tang *et al.* [35] qui formule la direction des règles d'une surface développable à partir des courbures de Darboux d'une courbe dont elle est issue. Dans notre cas :

$$\overrightarrow{r}(s) = \tau_{g_2}\overrightarrow{T_{D_2}} - \kappa_{n_2}\overrightarrow{B_{D_2}} \tag{2.11}$$

2.2.1.2 Application : Pliage de l'ensacheuse à col de cygne

Pour illustrer l'article de Duncan et Duncan nous choisissons l'exemple de l'ensacheuse à col de cygne. Les ensacheuses verticales sont des machines industrielles qui permettent le conditionnement de produits dans des sacs thermo-soudés dans un processus continu (Fig. 2.12). La feuille en plastique de l'emballage, disposée en rouleau, est guidée par une pièce de géométrie développable appelée « col de cygne » autour d'un cylindre qui assure l'acheminement du produit à ensacher. Finalement, le sac est soudé et découpé à la sortie du cylindre. Des géométries relativement proches ont été décrites par Boersma et Molenaar [217] et Robert Ferréol [241].

Etape 1 : Description de la géométrie en plan

Nous proposons d'étudier la cinématique de pliage d'une surface plane scindée en deux parties σ_1 et σ_2 par une courbe munie d'un paramétrage quelconque. La forme de la surface σ_1 et celle de la courbe paramétrée sont prescrites ; la forme de la seconde partie σ_2 est l'inconnue du problème. La partie σ_1 est déformée selon un cylindre de rayon variable R_c et la courbe paramétrée est une arche sinusoïdale.

On définit un repère cartésien $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ et un point de la surface plane à plier est paramétré par :

$$\sigma_{2d}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

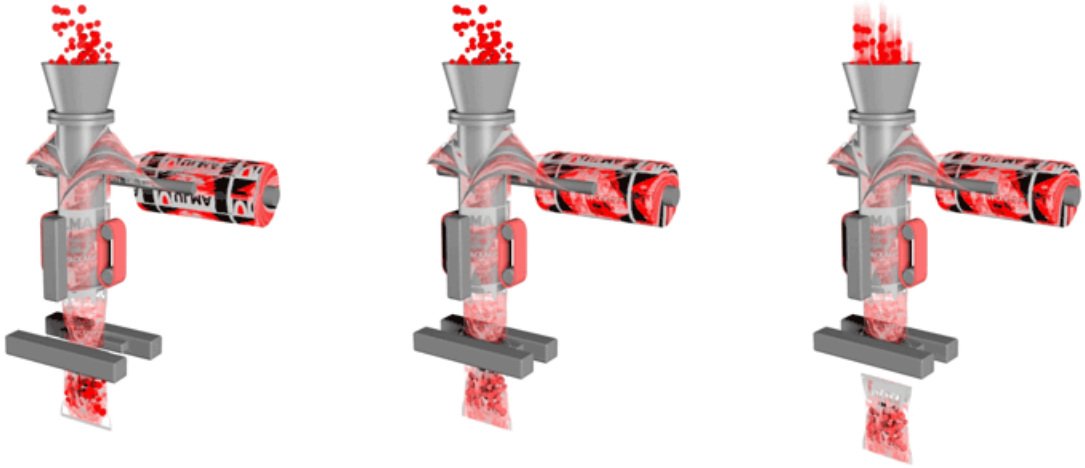
avec $u \in \left[-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}\right]$ et $v \in \left[-\frac{B}{2}, \frac{B}{2}\right]$

La surface plane de dimension $A \times B$ est donc centrée sur le repère $\mathcal{R}$ (Fig. 2.13). Pour définir la courbe paramétrée selon laquelle le pli sera pratiqué, on définit trois fonctions dépendant d'un seul paramètre t. Pour l'arche sinusoïdale étudiée :

$$\gamma_{2d}(t) = \begin{bmatrix} t \\ a\cos(bt) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$



(a) Dévidage du rouleau et acheminement du produit



(b) Soudure et découpe du sachet

FIGURE 2.12 – Procédé industriel d'ensachage vertical

Si on pose $a = 2R_v$ et $b = \frac{1}{2R_v}$ avec $R_v = \frac{A}{2\pi}$, alors l'arche sinusoïdale γ_{2d} est constituée d'une demi-période centrée sur le domaine de la variable v. Quand la surface σ_1 se transforme en un cylindre fermé, c'est-à-dire quand $R_c = R_v = \frac{A}{2\pi}$, alors l'arche sinusoïdale devient une courbe tridimensionnelle appelée fenêtre de Viviani (Fig. 2.14). Cette courbe est habituellement construite comme l'intersection d'une sphère de rayon R_v et d'un cylindre de révolution de diamètre R_v dont une génératrice passe par le centre de la sphère [242]. Dans la suite de l'illustration, nous conservons ces valeurs de a et b.

$$\gamma_{2d}(t) = \begin{bmatrix} t \\ 2R_v \cos\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

La courbure signée κ_{2d} de γ_{2d}, utile dans les étapes ultérieures, est un scalaire tel que (§ 1.1.1.2) :

$$\frac{d\overrightarrow{T_{2d}}}{dt} = \kappa_{2d}|\dot{\gamma}_{2d}|\overrightarrow{N} \tag{2.15}$$

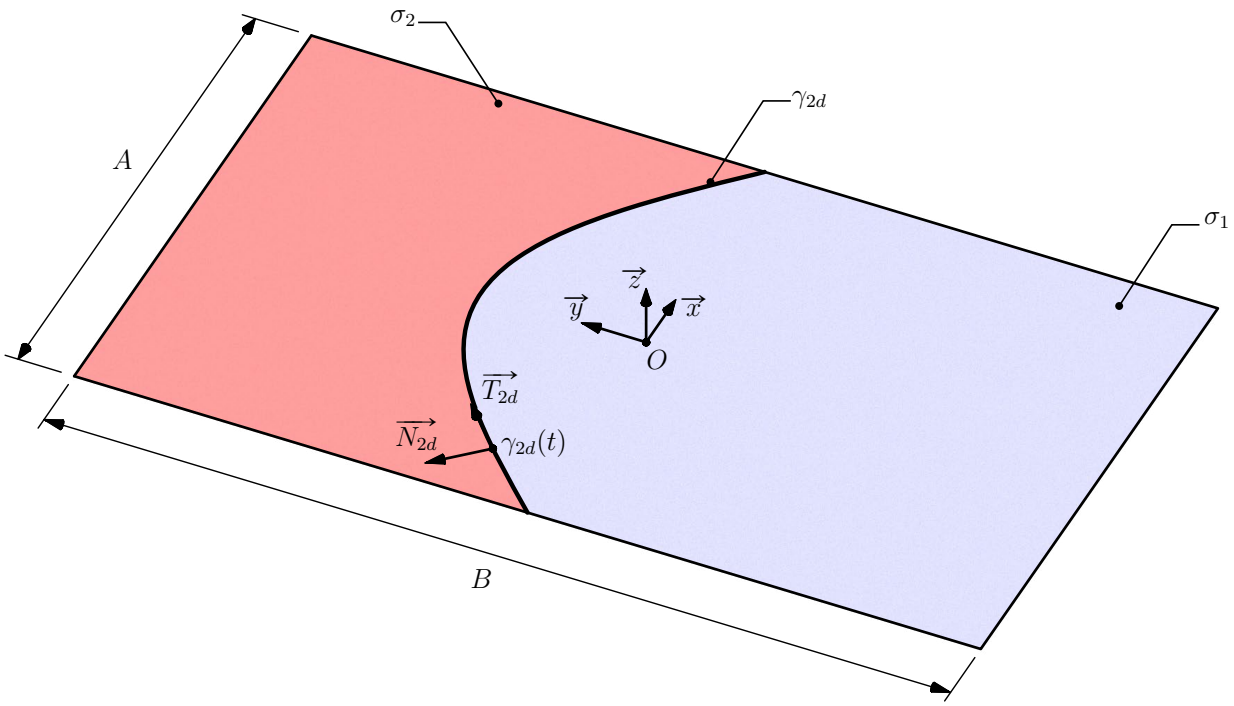


FIGURE 2.13 – Description de la géométrie en plan



(a) Construction géométrique [242]

(b) Floating sculpture
Marta Pan (1973)

FIGURE 2.14 – Courbe de Viviani [242]

D'après l'équation de l'arche sinusoïdale on établit les éléments suivants :

$$
\begin{aligned}
\dot{\gamma}_{2d} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\
|\dot{\gamma}_{2d}| &= \sqrt{1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)} \\
\overrightarrow{T_{2d}} &= \frac{\dot{\gamma}_{2d}}{|\dot{\gamma}_{2d}|} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \\
\frac{d\overrightarrow{T_{2d}}}{dt} &= -\frac{1}{2R_v} \frac{\cos\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)}{\left(1+\sin^2\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)\right)^{3/2}} \begin{bmatrix} \sin\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{N_{2d}} &= \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)}} \begin{bmatrix} \sin\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{2.16}
$$

On déduit la valeur de la courbure signée d'après les équations 2.15 et 2.16 :

$$
\kappa_{2d} = -\frac{1}{2R_v} \frac{\cos\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)}{\left(1+\sin^2\left(\dfrac{t}{2R_v}\right)\right)^{3/2}} \tag{2.17}
$$

Etape 2 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_1

La paramétrisation du cylindre est choisie de telle façon à ce qu'un point parcourant la courbe γ_{2d} dans le plan xy, parcoure à la même vitesse la courbe γ_{3d} positionnée sur un cylindre vertical de rayon R_c et d'axe $\overrightarrow{z}$ (Fig. 2.15).

$$
\sigma_{3d}(u,v) = \begin{bmatrix} R_c \sin\left(\dfrac{t}{R_c}\right) \\ R_c \cos\left(\dfrac{t}{R_c}\right) \\ v \end{bmatrix} \tag{2.18}
$$

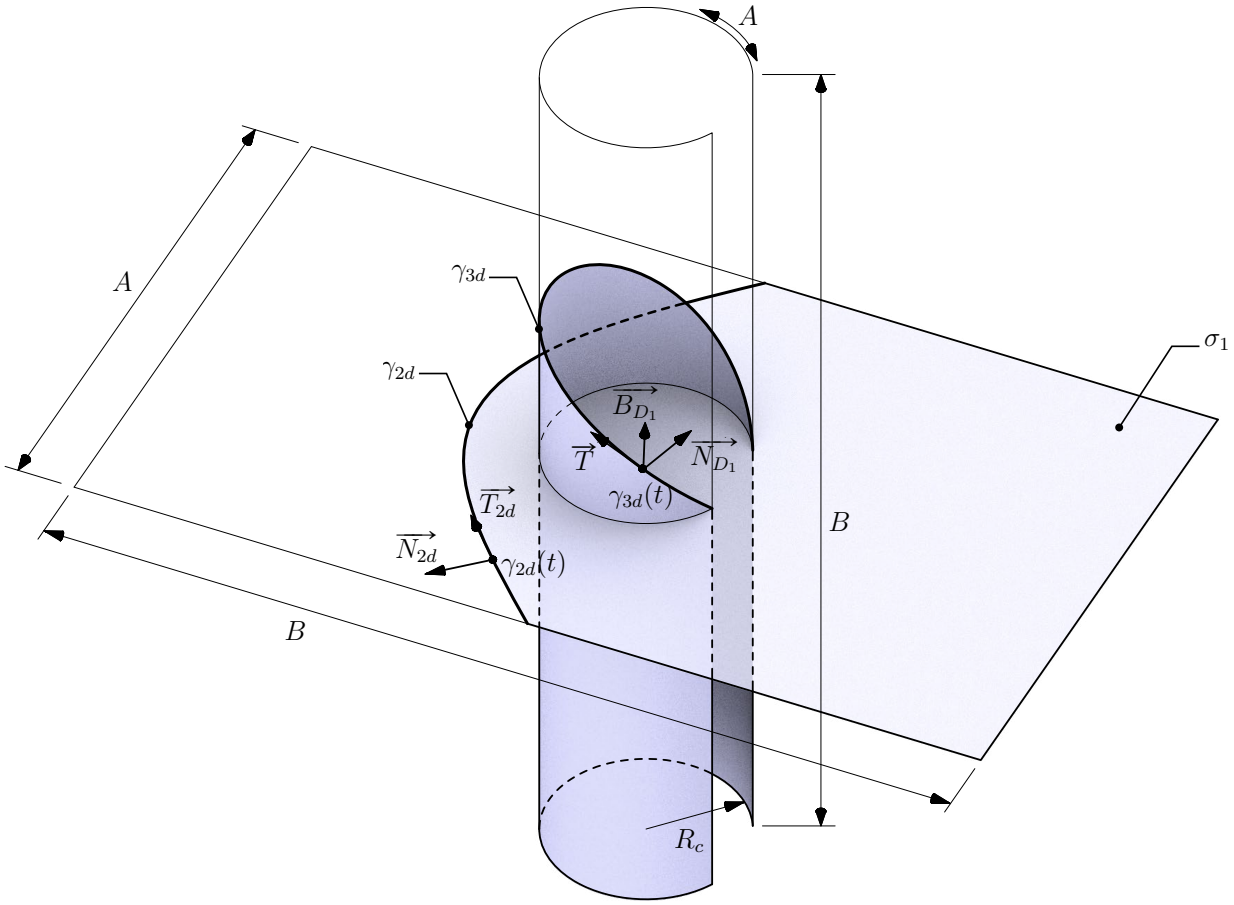


FIGURE 2.15 – La surface σ_1, définie en plan, s'enroule autour d'un cylindre d'axe vertical

La surface σ_1 peut prendre les deux configurations extrêmes suivantes :

— la surface est un cylindre fermé, $R_c = \frac{A}{2\pi}$

— la surface est plane, $R_c = +\infty$;

Afin d'enrouler la courbe γ_{2d} autour du cylindre, on injecte les fonctions de la courbe dans le paramétrage du cylindre :

$$\gamma_{3d}(t) = \begin{bmatrix} R_c \sin\left(\dfrac{t}{R_c}\right) \\ R_c \cos\left(\dfrac{t}{R_c}\right) \\ 2R_v \cos\left(\dfrac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

Nous déterminons à présent les différentes caractéristiques géométriques de la surface σ_1 et

de sa courbe de rive γ_{3d}. Les dérivées successives de γ_{3d} jusqu'à l'ordre 3 valent :

$$\begin{aligned}
\gamma_{3d}(t) &= \begin{bmatrix} R_c \sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ R_c \cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ 2R_v \cos\left(\frac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix} & \dot{\gamma}_{3d}(t) &= \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix} \\
\ddot{\gamma}_{3d}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_c}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ -\frac{1}{R_c}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ -\frac{1}{2R_v}\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix} & \dddot{\gamma}_{3d}(t) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_c^2}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ \frac{1}{R_c^2}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ \frac{1}{(2R_v)^2}\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Il est alors possible de déterminer les vecteurs du repère de Frenet $\mathcal{R}_F(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{B_F})$:

$$\overrightarrow{T} = \frac{\dot{\gamma}_{3d}}{|\dot{\gamma}_{3d}|} \qquad \overrightarrow{B_F} = \frac{\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}}{|\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}|} \qquad \overrightarrow{N_F} = \overrightarrow{B_F} \wedge \overrightarrow{T} = \frac{\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}}{|\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}|} \wedge \frac{\dot{\gamma}_{3d}}{|\dot{\gamma}_{3d}|} \tag{2.21}$$

$$\overrightarrow{T} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)}} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.22}$$

$$\overrightarrow{B_F} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2R_v}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right)\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right) - \frac{1}{R_c}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ \frac{1}{R_c}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{2R_v}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right)\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ -\frac{1}{R_c} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$\overrightarrow{N_F} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}\right)\left(1 + \sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right)}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_c}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right)\left(1 + \sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right) - \frac{1}{2R_v}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right)\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ -\frac{1}{R_c}\cos\left(\frac{t}{R_c}\right)\left(1 + \sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right) + \frac{1}{2R_v}\sin\left(\frac{t}{R_c}\right)\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ -\frac{1}{2R_v}\cos\left(\frac{t}{2R_v}\right) \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

La courbure et la torsion de γ_{3d} se calculent également à partir des dérivées successives :

$$\kappa = \frac{|\ddot{\gamma}_{3d} \wedge \dot{\gamma}_{3d}|}{|\dot{\gamma}_{3d}|^3} = \frac{\sqrt{\frac{1}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c^2}}}{\left(1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right)^{3/2}} \tag{2.25}$$

$$\tau = \frac{(\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}) \cdot \dddot{\gamma}_{3d}}{|\dot{\gamma}_{3d} \wedge \ddot{\gamma}_{3d}|^2} = \frac{\left(\frac{1}{R_c^2} - \frac{1}{(2R_v)^2}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right)}{\frac{R_c}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right) + \frac{1}{R_c}} \tag{2.26}$$

Ensuite, on détermine les courbures de Darboux de la courbe γ_{3d} grâce au repère $\mathcal{R}_{D_1}(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{B_{D_1}}, \overrightarrow{N_{D_1}})$. De façon cohérente avec le paramétrage du plan, l'orientation de la normale est choisie vers l'intérieur du cylindre.

$$\overrightarrow{T_{D_1}} = \overrightarrow{T} \tag{2.27}$$

$$\overrightarrow{N_{D_1}} = \begin{bmatrix} -\sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ -\cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

$$\overrightarrow{B_{D_1}} = \overrightarrow{N_{D_1}} \wedge \overrightarrow{T_{D_1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)}} \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{t}{R_c}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ -\sin\left(\frac{t}{R_c}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

La courbure géodésique est égale à la courbure de la courbe plane γ_{2d} :

$$\kappa_{g_1} = \kappa_{2d} \tag{2.30}$$

Avec les conventions choisies, les courbures et directions de courbures principales sur le cylindre sont :

$$\kappa_0 = 0 \qquad \overrightarrow{t_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{R_c} \qquad \overrightarrow{t_1} = \begin{bmatrix} -\cos\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ \sin\left(\frac{t}{R_c}\right) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

La courbure normale se calcule à partir de l'équation 2.3 :

$$\kappa_{n_1} = \kappa_1 \sin^2\alpha = \kappa_1\left(1-\cos^2\alpha\right) = \kappa_1\left(1-\left(\overrightarrow{t_0}\cdot\overrightarrow{T}\right)^2\right)$$

$$\kappa_{n_1} = \frac{1}{R_c\left(1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right)} \tag{2.33}$$

Enfin, nous obtenons la torsion géodésique à partir de l'équation 2.4 :

$$\begin{aligned}\tau_{g_1} &= \kappa_1 \cos\alpha \sin\alpha = \kappa_1 \left(\overrightarrow{t_0}\cdot\overrightarrow{T}\right)\left(\overrightarrow{t_0}\wedge\overrightarrow{T}\right)\cdot\overrightarrow{N_{D_1}} \\ \tau_{g_1} &= \frac{1}{R_c}\frac{\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right)}{1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)}\end{aligned} \tag{2.34}$$

Etape 3 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_2
Le trièdre de Darboux $\mathcal{R}_{D_2}(p,\overrightarrow{T_{D_2}},\overrightarrow{B_{D_2}},\overrightarrow{N_{D_2}})$ de la courbe γ_{3d} en relation à σ_2 se détermine par la propriété de bissection du plan osculateur de la courbe γ_{3d} par rapport aux deux plans tangents aux surfaces σ_1 et σ_2, respectivement définis par les couples de vecteurs $(\overrightarrow{T_{D_1}},\overrightarrow{B_{D_1}})$ et $(\overrightarrow{T_{D_2}},\overrightarrow{B_{D_2}})$. Le vecteur tangent est commun aux deux repères de Darboux et à celui de Frenet :

$$\overrightarrow{T_{D_2}} = \overrightarrow{T_{D_1}} = \overrightarrow{T} \tag{2.35}$$

La binormale du trièdre de Darboux est calculée à partir des vecteurs des repères établis à l'étape 2 :

$$\overrightarrow{B_{D_2}} = \overrightarrow{B_{D_1}} - 2\overrightarrow{N_F}\left(\overrightarrow{N_F}\cdot\overrightarrow{B_{D_1}}\right) \tag{2.36}$$

Enfin, la normale est définie de façon à ce que le trièdre de Darboux $\mathcal{R}_{D_2}$ soit direct :

$$\overrightarrow{N_{D_2}} = \overrightarrow{T}\wedge\overrightarrow{B_{D_2}} \tag{2.37}$$

Les courbures de Darboux de γ_{3d} en relation à σ_2 sont calculées à partir des équations 2.7, 2.8 et 2.9 :

$$\begin{aligned}\kappa_{g_2} &= \frac{\sqrt{\frac{1}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)+\frac{1}{R_c^2}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)+\frac{1}{R_c^2}}}{\left(1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right)^{3/2}} \\ \kappa_{n_2} &= -\frac{1}{R_c\left(1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)\right)} \\ \tau_{g_2} &= -\frac{1}{R_c}\frac{\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right)}{1+\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)} + \frac{2\left(\frac{1}{R_c^2}-\frac{1}{(2R_v)^2}\right)\sin\left(\frac{t}{2R_v}\right)}{\frac{R_c}{(2R_v)^2}\cos^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)+\frac{1}{R_c}\sin^2\left(\frac{t}{2R_v}\right)+\frac{1}{R_c}}\end{aligned} \tag{2.38}$$

Etape 4 : Calcul des règles de la surface développable σ_2
Sans détailler le calcul, les règles sont obtenues à partir de l'équation 2.10 et la surface obtenue est représentée en figure 2.16. Plus précisément, nous montrons la cinématique de pliage quand la surface σ_1 passe d'une configuration plane ($\kappa_{n_1} = 0$) à celle d'un cylindre fermé ($\kappa_{n_1} = \frac{1}{R_c}$). La surface σ_2 est représentée par des règles de longueurs constantes issues de la courbe γ_{3d} et ne modélise donc pas les bords de la feuille rectangulaire présentée à l'étape 1, comme le souligne Ferréol [241].

En guise de vérification, nous comparons la géométrie du bord de la surface σ_2 consécutivement à son développement sur le plan xy et la courbe de pliage prescrite γ_{2d} initialement. Les deux courbes correspondent parfaitement.

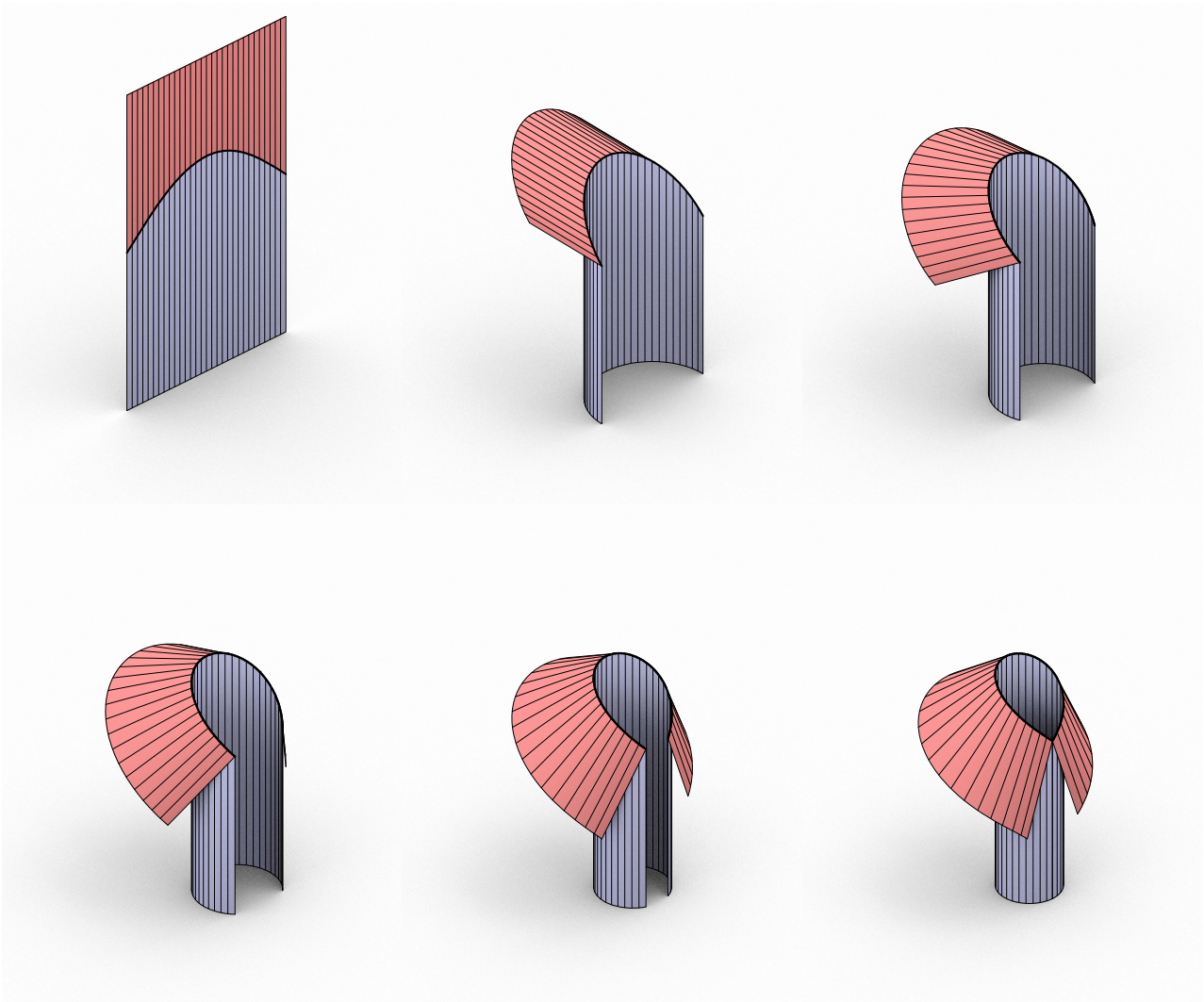


FIGURE 2.16 – Cinématique de pliage selon une courbe de Viviani

2.2.2 Géométrie différentielle du rapiéçage courbe

Dans une démarche proche de celle menée pour le pli courbe, nous décrivons la géométrie du rapiéçage courbe en quatre temps. La première et la troisième étapes, quoique basées sur les mêmes principes, en diffèrent par le caractère plus général des résultats auxquels elles mènent ; la deuxième et la quatrième étapes, très proches de celles décrites précédemment, feront l'objet de quelques précisions.

2.2.2.1 Théorie

Il s'agit d'identifier les contraintes cinématiques entre deux surfaces développables reliées par une courbe spatiale quelconque ; plus exactement, connaissant la géométrie tridimensionnelle de la première surface (distribution de sa courbure et de la courbure de son bord à relier), ainsi que la courbure en plan du bord à relier de la seconde surface, nous déterminons la géométrie complète de cette dernière.

Etape 1 : Description de la géométrie en plan
On considère deux surfaces σ_1 et σ_2 appartenant au plan xy. Contrairement au pli courbe pour lequel les surfaces σ_1 et σ_2 partageaient une courbe commune en plan, la courbe de raccord dans le cas du rapiéçage courbe n'est partagée qu'une fois les surfaces raccordées dans l'espace tridimensionnel (Fig. 2.2). Dans le plan xy, les bords en contact des surfaces σ_1 et σ_2 sont décrits par deux courbes γ_{2d_1} et γ_{2d_2}, de géométries distinctes, mais de longueurs égales pour permettre le raccordement. Un point situé à l'abscisse curviligne s_1 (resp. s_2) sur la courbe γ_{2d_1} (resp. γ_{2d_2}) est repéré par le point $p_1(s_1)$ (resp. $p_2(s_2)$). Alors, pour un rapiéçage correct des deux surfaces, les deux points en regard possèdent la même abscisse curviligne ($s_1 = s_2 = s$) et sont appliqués dans le même sens, c'est-à-dire celui des abscisses curvilignes croissantes.

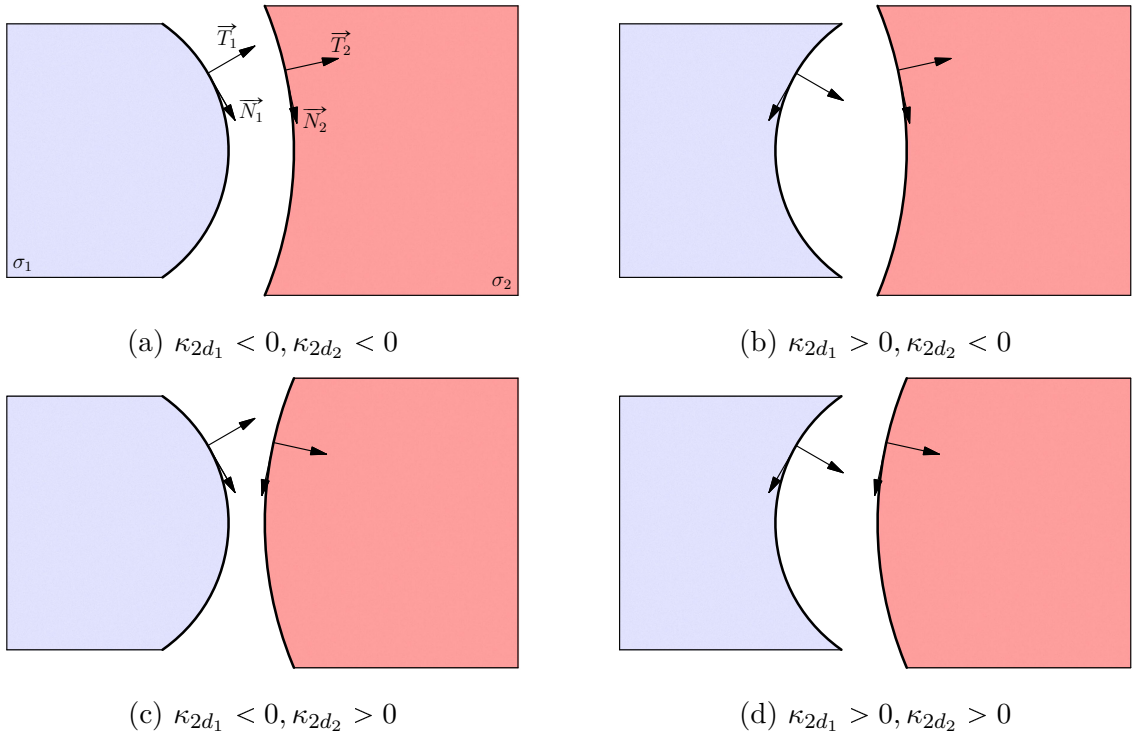
Pour la surface σ_1, nous identifions les éléments suivants pour un point $p_1(s_1)$ appartenant à γ_{2d_1} :

- le vecteur tangent $\overrightarrow{T_1}$, orienté dans le sens positif du paramétrage ;
- le vecteur normal $\overrightarrow{N_1}$, obtenu par la rotation de $\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{T_1}$ dans le sens trigonométrique ;
- le centre de courbure O_1 de γ_{2d_1} tel que $O_1p_1 = 1/|\kappa_{2d_1}|$, où κ_{2d_1} est la courbure signée de γ_{2d_1} ;
- la direction de la génératrice le long de laquelle la surface développable σ_1 sera courbée ;
- l'angle entre la génératrice et la tangente $\overrightarrow{T_1}$, noté α_1.

Pour la surface σ_2, nous identifions uniquement les éléments en rapport avec la courbure en plan de γ_{2d_2}, les autres éléments étant les inconnues du problème :

- le vecteur tangent $\overrightarrow{T_2}$, orienté dans le sens positif du paramétrage ;
- le vecteur normal $\overrightarrow{N_2}$, obtenu par la rotation de $\pi/2$ du vecteur $\overrightarrow{T_2}$ dans le sens trigonométrique ;
- le centre de courbure O_2 de γ_{2d_2} tel que $O_2p_2 = 1/|\kappa_{2d_2}|$;

La figure 2.17 représente quatre configurations de rapiéçages en fonction du signe des courbures à raccorder. Dans cette illustration, les bords à rapiécer sont montrés avec une valeur de courbure signée constante (arcs de cercles). Ceci est un cas particulier de notre étude qui traite le problème dans sa généralité dans la suite.



(a) $\kappa_{2d_1} < 0, \kappa_{2d_2} < 0$ (b) $\kappa_{2d_1} > 0, \kappa_{2d_2} < 0$

(c) $\kappa_{2d_1} < 0, \kappa_{2d_2} > 0$ (d) $\kappa_{2d_1} > 0, \kappa_{2d_2} > 0$

FIGURE 2.17 – Configurations de rapiéçages selon le signe de la courbure

Etape 2 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_1
Cette étape est presque en tout point similaire à celle du pli courbe, car, dans un cas comme dans l'autre, la géométrie de la surface σ_1 et de son bord fait partie des données initiales du problème. De la même façon, la courbe γ_{2d_1} devient la courbe γ_{3d} après mise en forme de la surface σ_1, puis les repères de Frenet $\mathcal{R}_F$ et de Darboux $\mathcal{R}_{D_1}$ sont attachés à la courbe tridimensionnelle. On note β_1, l'angle $(\overrightarrow{B_{D_1}}, \overrightarrow{N_F})$, θ_1, l'angle $(\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{N_{D_1}})$ et $\beta_1 + \theta_1 = \pi/2$.

Le diagramme des courbures représente, par une unique droite $\mathcal{D}$, la géométrie locale de la surface σ_1, au niveau du point $p_1(s)$. La courbure géodésique κ_{g_1} est connue grâce à la position du point O_{g_1} à l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe des abscisses (direction de la normale géodésique $\overrightarrow{B_{D_1}}$. La courbure normale κ_{n_1} est renseignée par la position du point O_{n_1}, intersection de la droite $\mathcal{D}$ et de l'axe des ordonnées (direction de la normale). Le diagramme des courbures, rappelé en figure 2.18, permet d'établir les relations trigonométriques suivantes pour la surface σ_1, en considérant les différents triangles :

$$\begin{aligned}
\text{Triangle}(pO_{g_1}O_{n_1}) : \quad & \tan\beta_1 = \tan\frac{1}{\theta_1} = \frac{R_{g_1}}{R_{n_1}} = \frac{\kappa_{n_1}}{\kappa_{g_1}} \\
\text{Triangle}(pOO_{n_1}) : \quad & \sin\beta_1 = \cos\theta_1 = \frac{R}{R_{n_1}} = \frac{\kappa_{n_1}}{\kappa} \\
\text{Triangle}(pO_{g_1}O_{n_1}) : \quad & \cos\beta_1 = \sin\theta_1 = \frac{R}{R_{g_1}} = \frac{\kappa_{g_1}}{\kappa}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Nous avions exclu de l'étude du pli courbe les valeurs $\beta = \{-\pi/2, 0, \pi/2, \pi\}$, car elles représentaient des cas dégénérés du problème. Elles sont réintroduites dans notre étude, car pertinentes dans le cas général du rapiéçage courbe. On dénombre alors huit cas possibles selon que les

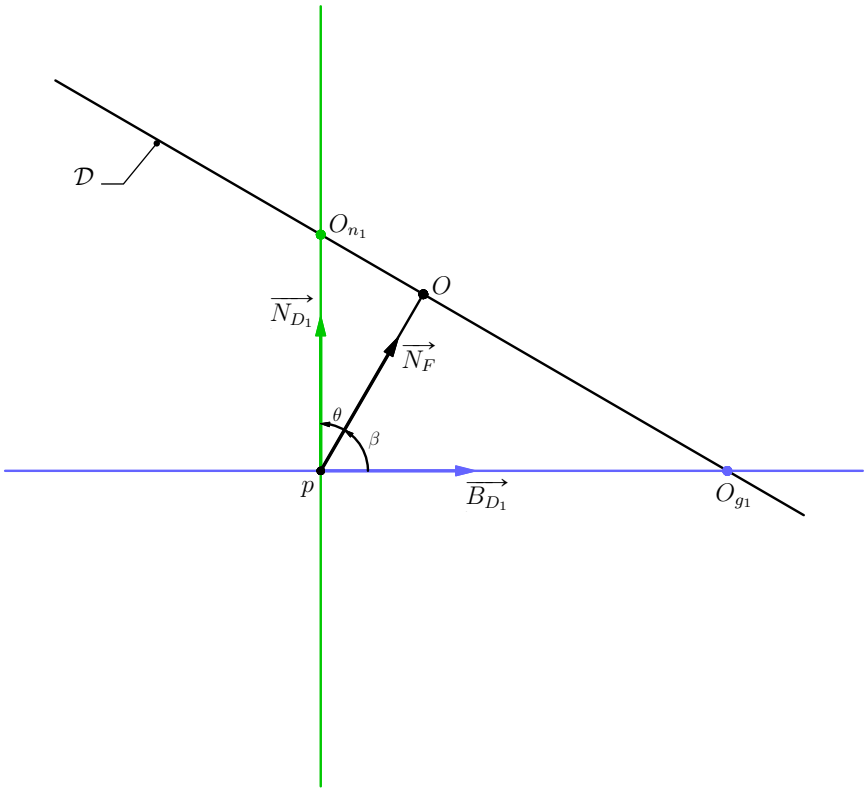


FIGURE 2.18 – Diagramme des courbures par rapport à σ_1

courbures géodésiques et normales sont positives, négatives ou nulles et chacun de ces cas peut être caractérisé par une valeur de $\beta_1 \in]-\pi, \pi]$.

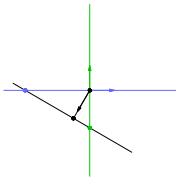
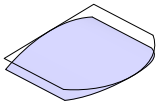
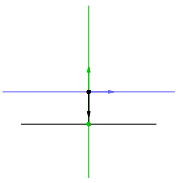
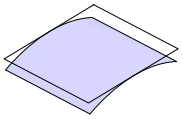
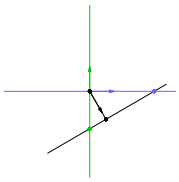
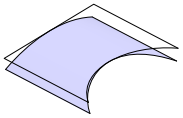
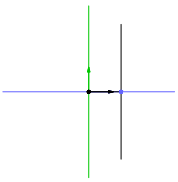
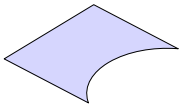
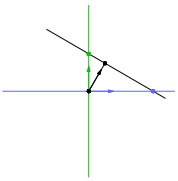
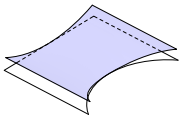
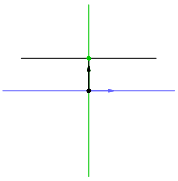
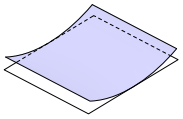
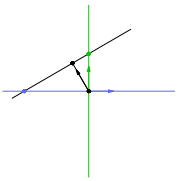
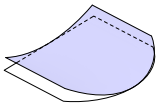
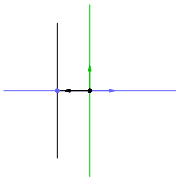
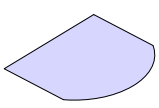
Le tableau 2.1 représente de façon synthétique ces huit types de géométries pour la surface σ_1. Nous insistons sur le fait que le diagramme des courbures est une représentation locale des courbures. La visualisation en axonométrie est donc donnée afin de représenter qualitativement la typologie de surface impliquée, mais ne saurait être réduite à l'unique diagramme des courbures en regard.

Etape 3 : Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_2
Lors du rapiéçage et de la mise en forme de la surface σ_1, la surface σ_2 prend la forme d'une surface développable et les points p_1 et p_2, respectivement sur les courbes γ_{2d_1} et γ_{2d_2}, viennent se confondre en un unique point p sur la courbe γ_{3d}.

Contrairement au pliage courbe, les courbures géodésiques κ_{g_1} et κ_{g_2} de γ_{3d} par rapport aux surfaces σ_1 et σ_2 sont différentes et sont respectivement égales à κ_{2d_1} et κ_{2d_2}. De plus, la courbe γ_{3d} est commune aux deux surfaces et la droite $\mathcal{D}$, à qui appartiennent O_{g_1} et O_{n_1} contient également O_{g_2} et O_{n_2}. Or la courbure géodésique κ_{g_2} est connue puisque γ_{2d_2}, courbe de rive de la surface σ_2, est prescrite. On recherche donc le(s) centre(s) de courbure géodésique O_{g_2} en tant qu'ensemble I des points d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$ de centre p et de rayon $\left|1/\kappa_{g_2}\right|$:

$$I = \mathcal{D} \cap \mathcal{C}\left(p, \left|\frac{1}{\kappa_{g_2}}\right|\right) \tag{2.40}$$

TABLE 2.1 – Configuration de la surface σ_1 selon la valeur de l'angle β_1

	Diagramme	Surface σ_1
Configuration 1 : $\beta_1 \in]-\pi, -\pi/2[$		
Configuration 2 : $\beta_1 = -\pi/2$		
Configuration 3 : $\beta_1 \in]-\pi/2, 0[$		
Configuration 4 : $\beta_1 = 0$		
Configuration 5 : $\beta_1 \in]0, \pi/2[$		
Configuration 6 : $\beta_1 = \pi/2$		
Configuration 7 : $\beta_1 \in]\pi/2, \pi[$		
Configuration 8 : $\beta_1 = \pi$		

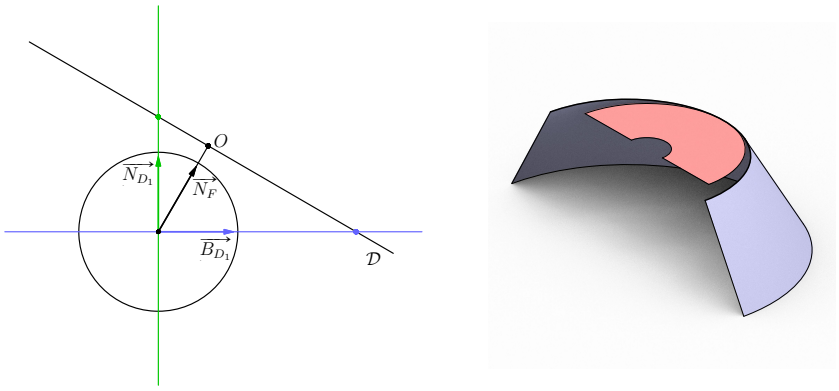
On dénombre trois ensembles de solutions possibles selon les valeurs respectives de la courbure de γ_{3d} et de la courbure géodésique $\kappa_{g_2} = \kappa_{2d_2}$.

i $\kappa < |\kappa_{g_2}| : I = \varnothing$ Pas de rapiéçage possible

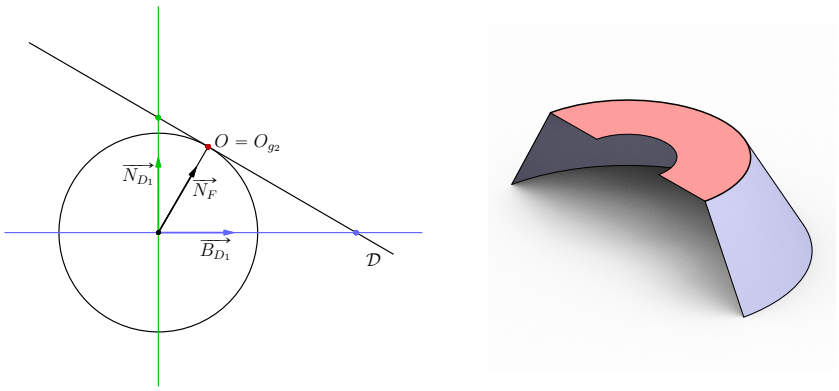
ii $\kappa = |\kappa_{g_2}| : I = \{O_{g_2}\}$ Un seul rapiéçage possible

iii $\kappa > |\kappa_{g_2}| : I = \{O_{g_2}, O'_{g_2}\}$ Deux rapiéçages possibles

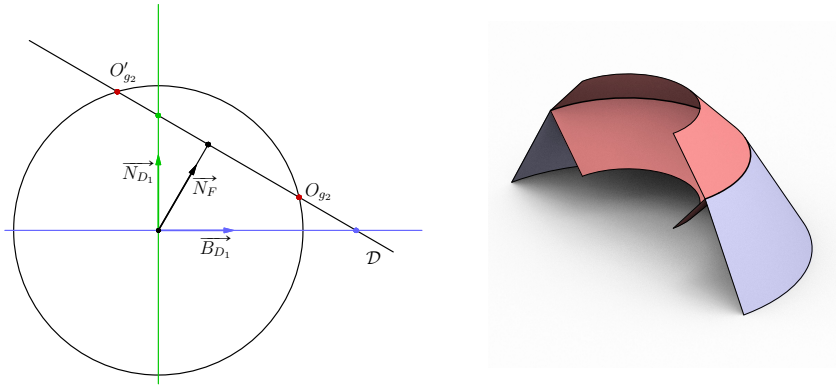
La figure 2.19 montre en parallèle le diagramme des courbures et le rapiéçage correspondant pour les différentes configurations identifiées ci-dessus.



(a) Pas de rapiéçage possible



(b) Un seul rapiéçage possible



(c) Deux rapiéçages possibles

FIGURE 2.19 – Nature des solutions possibles selon les valeurs de courbures prescrites

Le repère de Darboux $\mathcal{R}_{D_2}(p, \overrightarrow{T_{D_2}}, \overrightarrow{B_{D_2}}, \overrightarrow{N_{D_2}})$ de la surface σ_2 peut être entièrement déterminé à partir des données d'entrées prescrites et du diagramme des courbures en suivant les étapes ci-dessous (Fig. 2.20).

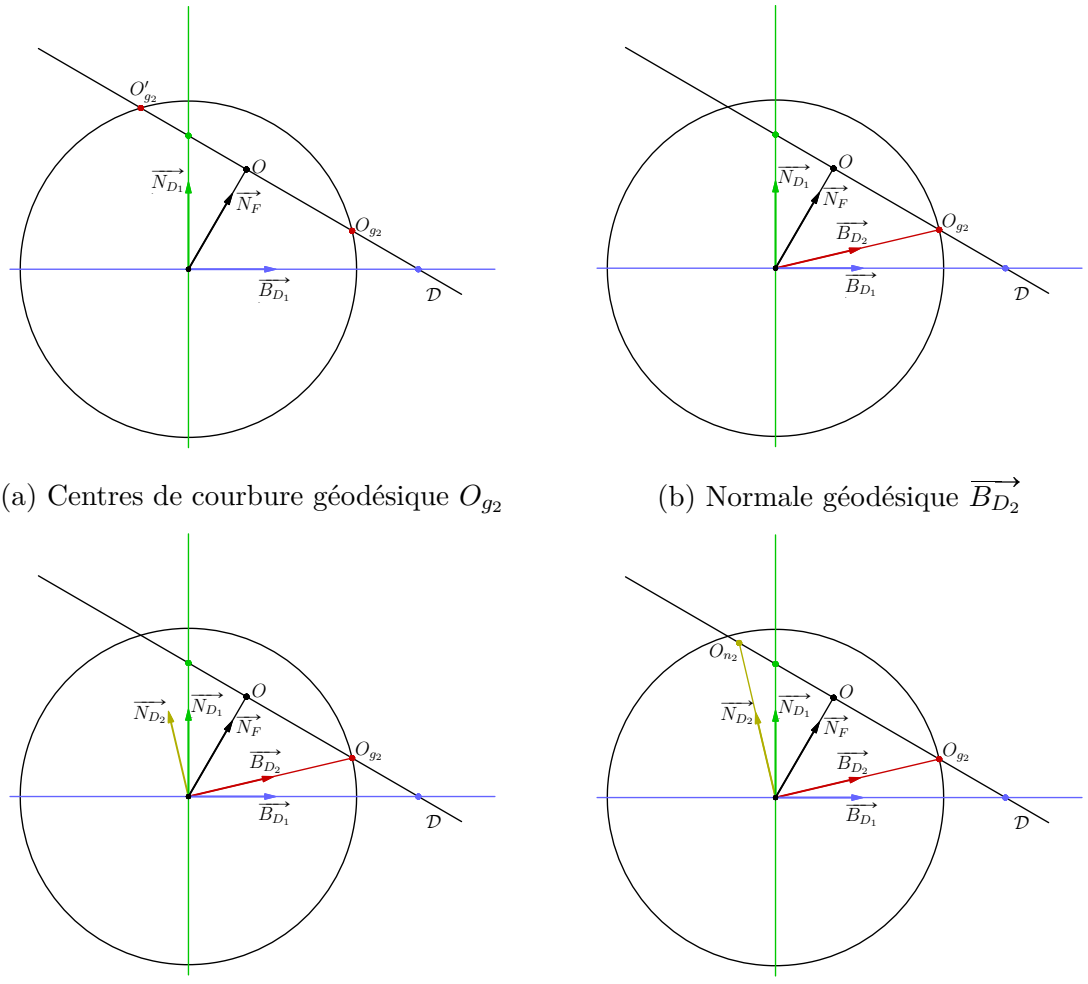
i Détermination de(s) centre(s) de courbure géodésique O_{g_2}. Ils sont situés à l'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$ (Fig. 2.20a). En cas de double point, choix d'une solution de rapiéçage.

ii Détermination de la normale géodésique $\overrightarrow{B_{D_2}}$ en fonction du signe de κ_{g_2}. Le vecteur $\overrightarrow{B_{D_2}}$ pointe vers O_{g_2} si $\kappa_{g_2} > 0$ et pointe dans le sens opposé si $\kappa_{g_2} < 0$ (Fig. 2.20b).

iii Détermination de la normale $\overrightarrow{N_{D_2}}$. Le vecteur $\overrightarrow{N_{D_2}}$ est un vecteur unitaire tel que le repère de Darboux $\mathcal{R}_{D_2}$ soit direct (Fig. 2.20c).

iv Détermination du centre de courbure normal O_{n_2}. Il est situé à l'intersection de la droite support de $\overrightarrow{N_{D_2}}$ et de la droite $\mathcal{D}$ (Fig. 2.20d).

v Détermination du signe de la courbure normale κ_{n_2}. Le vecteur $\overrightarrow{N_{D_2}}$ pointe vers O_{n_2} si $\kappa_{n_2} > 0$ et pointe dans le sens opposé si $\kappa_{n_2} < 0$.



(a) Centres de courbure géodésique O_{g_2}

(b) Normale géodésique $\overrightarrow{B_{D_2}}$

(c) Normale $\overrightarrow{N_{D_2}}$

(d) Centre de courbure normale O_{n_2}

FIGURE 2.20 – Détermination des caractéristiques géométriques de σ_2

On note β_2, l'angle $(\overrightarrow{B_{D_2}}, \overrightarrow{N_F})$, θ_2, l'angle $(\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{N_{D_2}})$ et $\beta_2 + \theta_2 = \pi/2$. Le diagramme des courbures permet alors d'établir des relations trigonométriques analogues à celles de la surface σ_1 pour la surface σ_2 (Fig. 2.21) :

$$\begin{aligned}
&\text{Triangle}(pO_{g_2}O_{n_2}) : && \tan\beta_2 = \tan\frac{1}{\theta_2} = \frac{R_{g_2}}{R_{n_2}} = \frac{\kappa_{n_2}}{\kappa_{g_2}} \\
&\text{Triangle}(pOO_{n_2}) : && \sin\beta_2 = \cos\theta_2 = \frac{R}{R_{n_2}} = \frac{\kappa_{n_2}}{\kappa} \\
&\text{Triangle}(pO_{g_2}O_{n_2}) : && \cos\beta_2 = \sin\theta_2 = \frac{R}{R_{g_2}} = \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa}
\end{aligned} \tag{2.41}$$

Les angles β_1 et β_2, déterminant la position angulaire des plans tangents de σ_1 et σ_2 par rapport au plan osculateur de la courbe γ_{3d} sont donc liés par la relation suivante :

$$\frac{\cos\beta_1}{\kappa_{g_1}} = \frac{\cos\beta_2}{\kappa_{g_2}} \tag{2.42}$$

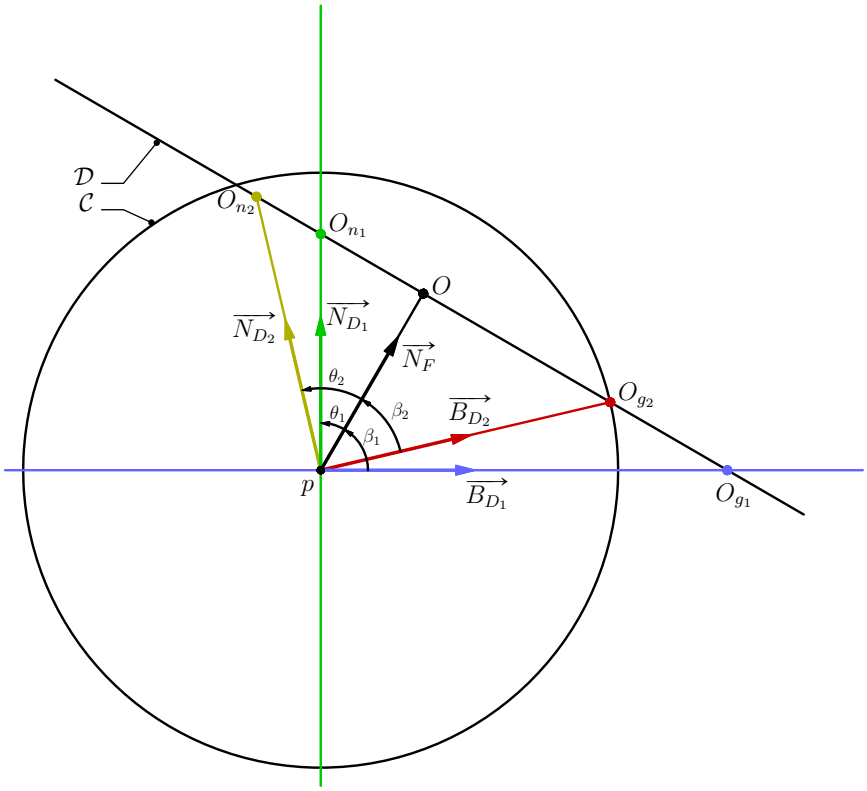


FIGURE 2.21 – Diagramme des courbures de σ_1 et σ_2

On peut alors simplement exprimer κ_{n_2} en fonction des données connues du problème :

$$\kappa_{n_2} = \kappa_{g_2} \tan \beta_2 = \pm \kappa_{g_2} \tan \left(\arccos \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa} \right) = \pm \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa_{g_2}}{\kappa} \right)^2} \tag{2.43}$$

$$\kappa_{n_2} = s_{\beta_2} \frac{\kappa_{g_1}}{\cos \beta_1} \sqrt{1 - \left(\cos \beta_1 \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa_{g_1}} \right)^2} \tag{2.44}$$

où $s_{\beta_2} = \{-1, 0, 1\}$ est un coefficient qui dépend de la valeur de β_2 et qui qualifie les configurations de rapiéçages possibles.

Dans le cas particulier où $\beta_1 = \pm \pi/2$, on recourt à la formule :

$$\kappa_{n_2} = \pm \kappa \sqrt{1 - \left(\frac{\kappa_{g_2}}{\kappa} \right)^2} = \pm \frac{\kappa_{g_1}}{\sin \beta_1} \sqrt{1 - \left(\sin \beta_1 \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa_{g_1}} \right)^2} \tag{2.45}$$

$$\kappa_{n_2} = s_{\beta_2} \sqrt{\kappa_{n_1}^2 - \kappa_{g_2}^2} \tag{2.46}$$

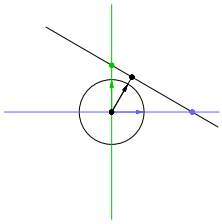
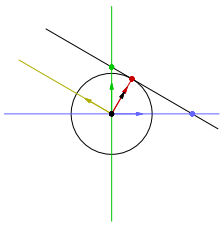
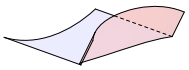
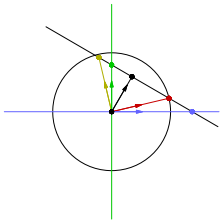
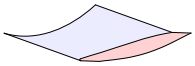
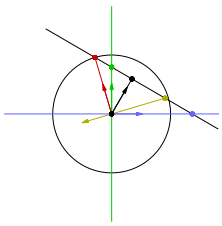
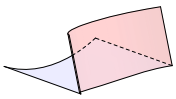
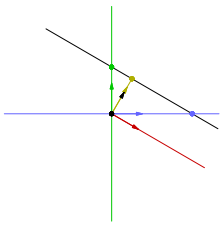
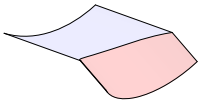
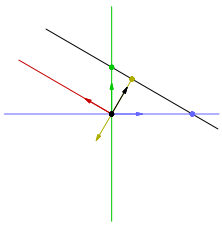
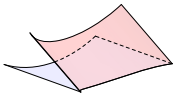
Si $\kappa < |\kappa_{g_2}|$, le radicande de l'expression de la courbure normale (Eq. 2.43 et 2.45) prend une valeur négative. Cela confirme l'absence de solution de rapiéçage courbe dans cette configuration, précédemment mis en évidence par l'absence d'intersection entre la droite $\mathcal{D}$ et le cercle $\mathcal{C}$.

Si $\kappa = |\kappa_{g_2}|$, le radicande de l'expression de la courbure normale s'annule et $\kappa_{n_2} = 0$ (surface localement plane). Nous avons affaire à un unique rapiéçage possible, précédemment mis en évidence par la tangence de la droite $\mathcal{D}$ et du cercle $\mathcal{C}$. D'après les relations trigonométriques 2.41, $\sin \beta_2 = 0$, soit $\beta_2 = \{0, \pi\}$. Dans ce cas, la valeur de s_{β_2} n'a pas d'influence sur la valeur de la courbure normale, aussi posons-nous $s_{\beta_2} = 0$.

Si $\kappa > |\kappa_{g_2}|$, le radicande de l'expression de la courbure normale est positif et le coefficient s_{β_2} peut prendre la valeur $+1$ si $\beta_2 \in]0, \pi[$ ou la valeur -1 si $\beta_2 \in]-\pi, 0[$, désignant le choix entre les deux rapiéçages possibles, précédemment mis en évidence par la double intersection de la droite $\mathcal{D}$ avec le cercle $\mathcal{C}$.

Le tableau 2.1 de l'étape 2 recense les huit configurations possibles de la surfaces σ_1 selon la valeur de l'angle β_1 qui traduit la combinaison de signes de κ_{g_1} et κ_{n_1}. Si nous croisons maintenant ces configurations avec le signe de κ_{g_2}, dernière donnée du problème, nous dénombrons seize configurations, qui sont présentées en intégralité en annexe A selon les trois cas identifiés précédemment. Le tableau 2.2 montre ici l'exemple de la configuration $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$. La première ligne (cas 1) illustre le cas du rapiéçage impossible, la seconde (cas 2), celle du rapiéçage unique et les quatre suivantes (cas 3a, 3b, 4a, 4b) celles des rapiéçages doubles. Dans cette dernière configuration, les cas 3a et 3b montrent le cas courant où le cercle $\mathcal{C}$, de rayon fini, possède deux intersections avec la droite $\mathcal{D}$, donnant lieu à deux rapiéçages possibles. Les cas 4a et 4b montrent un rapiéçage avec une surface σ_2 de bord droit ($\kappa_{g_2} = 0$, $\mathcal{R}_{g_2} = +\infty$) : les intersections entre le cercle $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont alors rejetées à l'infini, mais la construction géométrique reste valable pour autant.

TABLE 2.2 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	s_{β_2}= 0		
Cas 3a	s_{β_2}= +1		
Cas 3b	s_{β_2}= -1		
Cas 4a	s_{β_2}= +1		
Cas 4b	s_{β_2}= -1		

Enfin, d'après Duncan et Duncan et avec les conventions de signes choisies, la torsion géodésique est donnée par :

$$\tau = \frac{\kappa_{g_1}\kappa'_{n_1} - \kappa_{n_1}\kappa'_{g_1}}{\kappa^2} + \tau_{g_1} = \frac{\kappa_{g_2}\kappa'_{n_2} - \kappa_{n_2}\kappa'_{g_2}}{\kappa^2} + \tau_{g_2}$$
$$\tau_{g_2} = \frac{\kappa_{g_2}\kappa'_{n_2} - \kappa_{n_2}\kappa'_{g_2}}{\kappa^2} + \tau \tag{2.47}$$

Nous vérifions par la suite que les relations que nous venons d'établir sont bien compatibles avec celles du pli courbe, cas particulier de rapiéçage où $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_2}$.

Sous cette condition, $\kappa \geqslant |\kappa_{g_1}|$, qui est toujours vérifié pour une courbe spatiale, implique également $\kappa \geqslant |\kappa_{g_2}|$. Le pli est donc une configuration à double rapiéçage. Le premier rapiéçage est celui identifié par Duncan et Duncan où le plan osculateur est bissecteur des deux surfaces pliées. Le second est le rapiéçage trivial où les deux surfaces sont raccordées en continuité : $\mathcal{R}_{D_1}$ et $\mathcal{R}_{D_2}$ sont confondus selon un pli à 0°.

Les équations de la courbure normale sont bien cohérentes avec le pli courbe. Si $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_2}$, l'équation 2.43 devient :

$$\kappa_{n_2} = s_{\beta_2}\frac{\kappa_{g_1}}{\cos\beta_1}\sqrt{1-\cos^2\beta_1} = s_{\beta_2}\kappa_{g_1}\tan\beta_1 \tag{2.48}$$
$$\kappa_{n_2} = s_{\beta_2}\kappa_{n_1} \tag{2.49}$$

Si $s_{\beta_2} = -1$, les courbures normales sont égales et opposées, résultat classique établi par Duncan et Duncan. Si $s_{\beta_2} = +1$, les courbures normales sont identiques ; c'est le cas trivial des deux surfaces raccordées en continuité.

Dans le cas particulier où $\beta_1 = \pm\pi/2$, nous sommes en présence d'un pli géodésique et $\kappa_{g_1} = \kappa_{g_2} = 0$. L'équation 2.45 se réduit également sous une forme identique à l'équation 2.49. Si $s_{\beta_2} = -1$, la surface est repliée sur elle-même (pli à 180°) et si $s_{\beta_2} = +1$, on retrouve une fois de plus le cas trivial des deux surfaces raccordées en continuité.

Etape 4 : Calcul des règles de la surface développable σ_2

Etape similaire à celle du pli courbe (§ 2.2.1.1)

2.2.2.2 Cas particulier des rapiéçages circulaires

Les conditions de couplage cinématique du rapiéçage courbe établies précédemment sont des conditions locales et se trouvent modifiées dès que la géométrie de la surface σ_1 varie le long de la courbe de raccord ou que le rapport entre les courbures géodésiques κ_{g_1} et κ_{g_2} change.

Afin de vérifier et d'illustrer notre étude, nous nous intéressons au cas particulier des rapiéçages circulaires ($\kappa_{g_1}, \kappa_{g_2} = cste$). Si, de plus, la surface σ_1 est déformée de telle sorte que la courbe γ_{3d} présente des courbures de Darboux constantes, alors l'intégralité du rapiéçage courbe peut se réduire à un unique diagramme des courbures.

Nous construisons deux séries d'exemples et, pour chacune d'elles, sept configurations sont testées. Chaque série prend pour point de départ une surface σ_1 identique, aux caractéristiques suivantes.

— Série 1, surface plane : $\kappa_{g_1} = 40\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\kappa_{n_1} = 0\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\tau_{g_1} = 0\,\mathrm{mm}^{-1}$,
— Série 2, surface conique : $\kappa_{g_1} = 120\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\kappa_{n_1} = 120\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\tau_{g_1} = 0\,\mathrm{mm}^{-1}$

La courbe γ_{3d} est caractérisée par les valeurs de courbure et torsion :

— Série 1 : $\kappa = 40\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\tau = 0\,\mathrm{mm}^{-1}$
— Série 2 : $\kappa = 35\,\mathrm{mm}^{-1}$, $\tau = 0\,\mathrm{mm}^{-1}$

En revanche, quoique constante au sein de chaque configuration, la courbure géodésique κ_{g_2} varie d'une configuration à l'autre pour couvrir l'intervalle maximal des rapiéçages possibles $-\kappa \leqslant \kappa_{g_2} \leqslant \kappa$.

Dans les deux séries d'exemples, les hypothèses sur la géométrie de la surface σ_1 et des bords à raccorder apportent les simplifications suivantes :

$$\kappa_{g_2} = cste \qquad \Rightarrow \kappa'_{g_2} = 0 \tag{2.50}$$

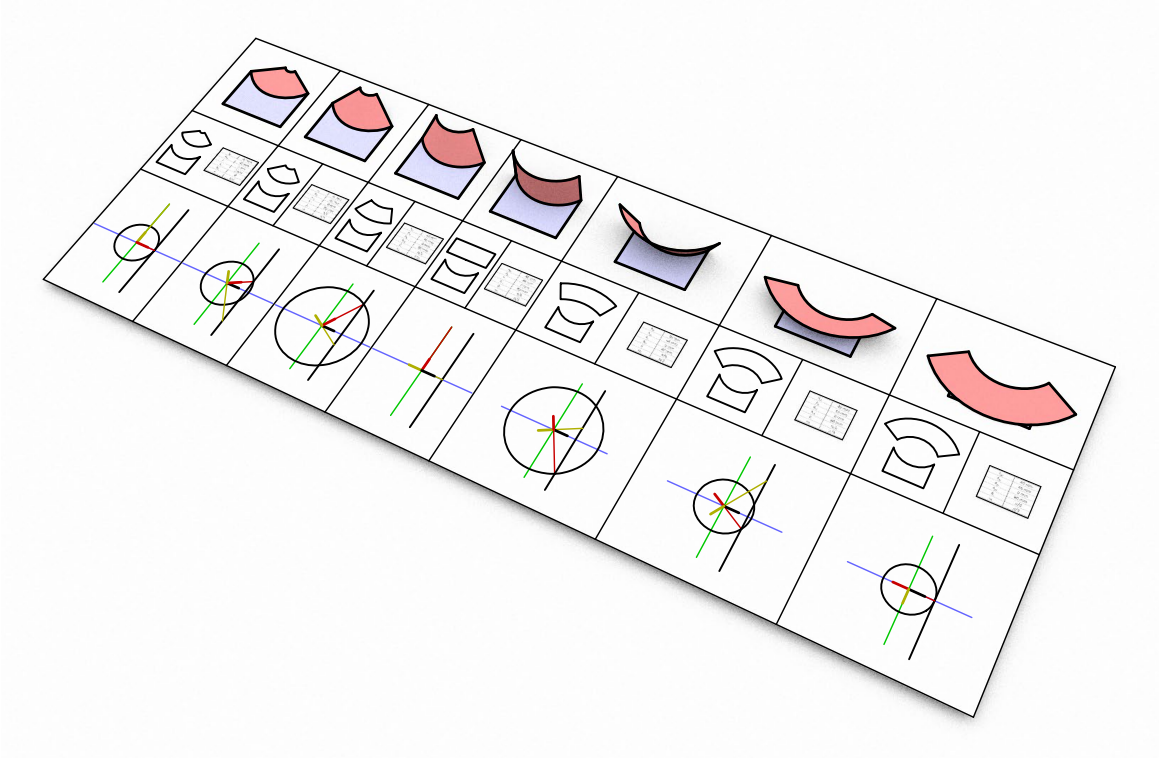
$$\kappa_{n_2} = s_{\beta_2} \frac{\kappa_{g_1}}{\cos\beta_1} \sqrt{1 - \left(\cos\beta_1 \frac{\kappa_{g_2}}{\kappa_{g_1}}\right)^2} = cste \qquad \Rightarrow \kappa'_{n_2} = 0 \tag{2.51}$$

$$\tau_{g_2} = \frac{\kappa_{g_2}\kappa'_{n_2} - \kappa_{n_2}\kappa'_{g_2}}{\kappa^2} + \tau \qquad \Rightarrow \tau_{g_2} = 0 \tag{2.52}$$

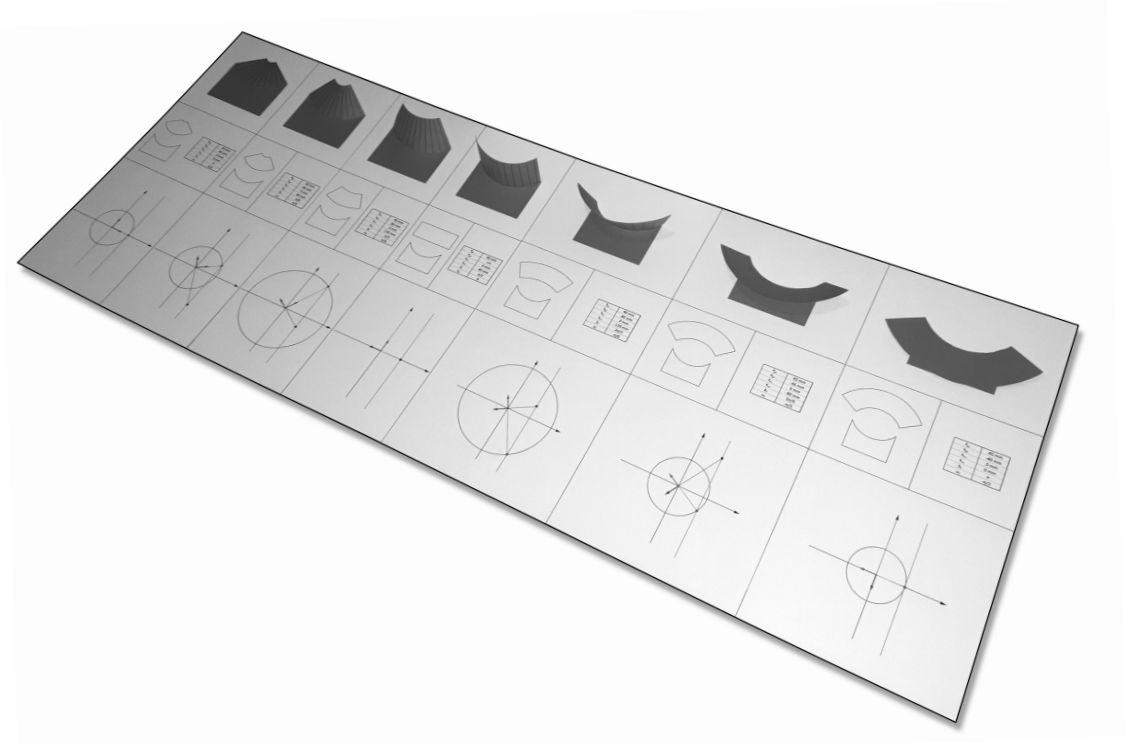
Les conclusions que nous pouvons tirer sont similaires, que le rapiéçage soit effectué sur une surface plane ou sur une surface conique.

Les équations 2.50 à 2.52 nous indiquent que la surface σ_2 est un cône circulaire droit formant un angle diédral constant avec la surface σ_1. Les configurations extrêmes pour lesquelles $|\kappa = \kappa_{g_2}|$, le rapiéçage est unique et la surface σ_2 est plane, comme prédit par l'équation 2.44. Pour les configurations intermédiaires ($\kappa \geqslant |\kappa_{g_2}|$), deux rapiéçages sont possibles : il s'agit de deux cônes symétriques par rapport au plan de la courbe γ_{3d} dont la géométrie varie continûment d'un cas extrême à l'autre.

La figures 2.22 et 2.23 comparent les maquettes physiques aux prédictions numériques des rapiéçages circulaires sur des surfaces planes et coniques. Dans le cas des rapiéçages doubles, seul le cône se situant au-dessus du plan de rapiéçage est représenté.

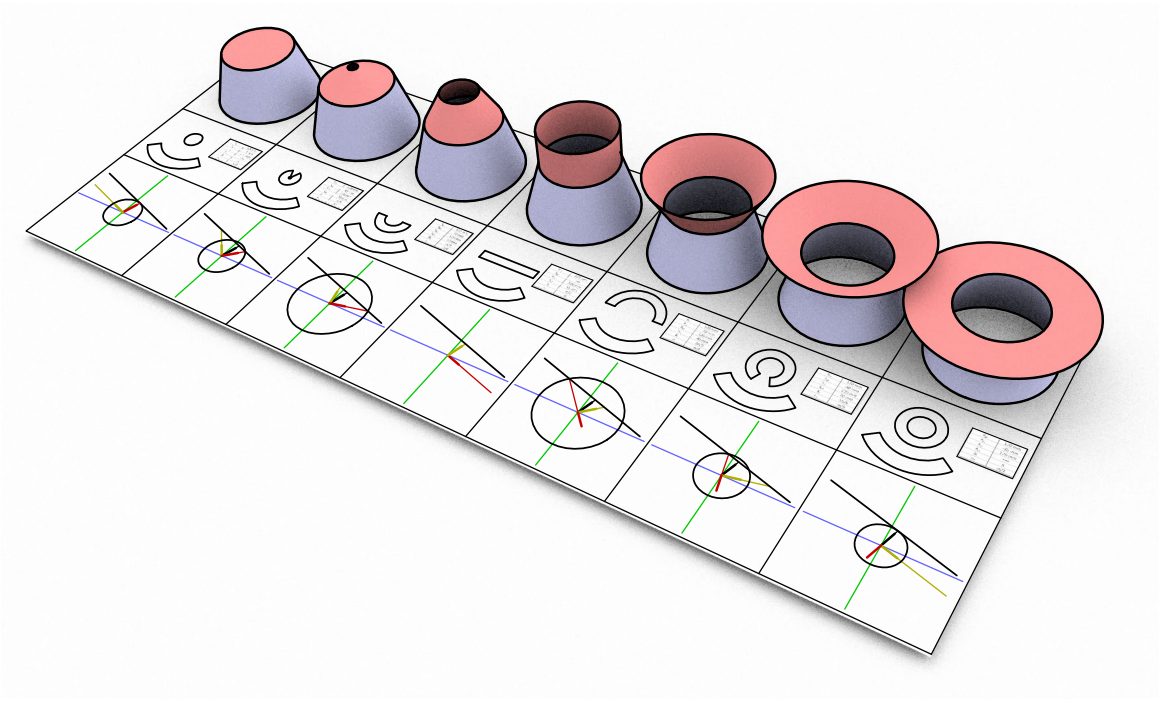


(a) Modèle tridimensionnel

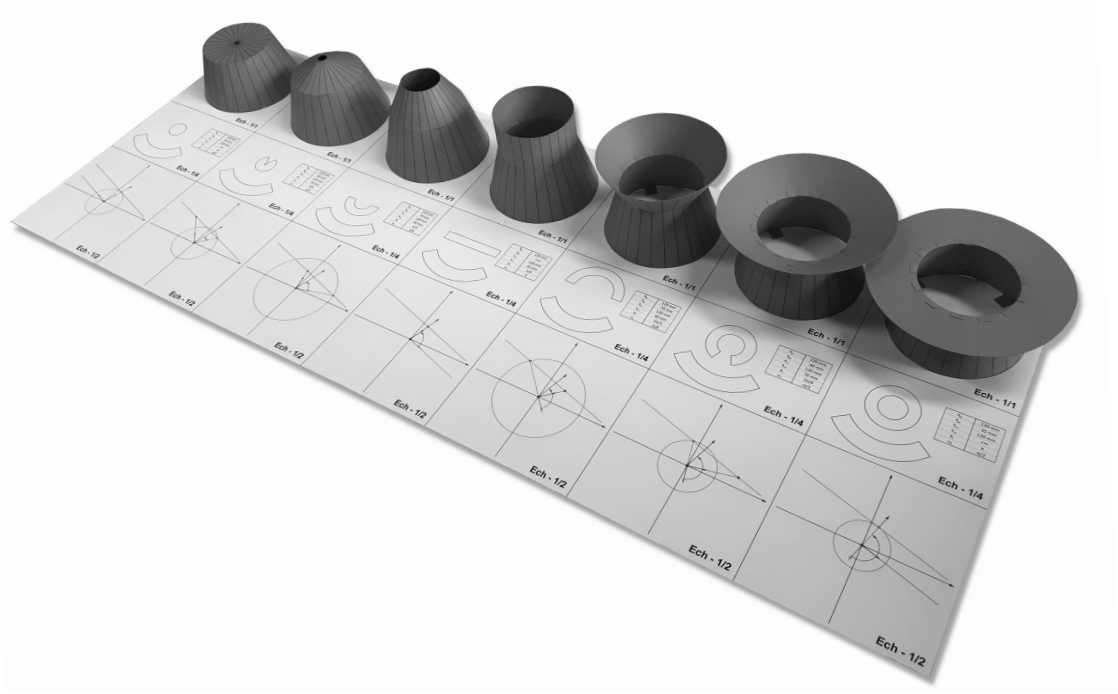


(b) Maquette physique

FIGURE 2.22 – Rapiéçages circulaires plans



(a) Modèle tridimensionnel



(b) Maquette physique

FIGURE 2.23 – Rapiéçages circulaires coniques

2.2.2.3 Application : Rapiéçage selon la fenêtre de Viviani

En illustration du rapiéçage courbe, nous proposons de considérer deux surfaces σ_1 et σ_2 dont les bords à raccorder sont définis par une première courbe γ_{2d_1} correspondant à l'arche sinusoïdale décrite au § 2.2.1.2 et par une famille de courbes quelconques γ_{2d_2} modélisées par des NURBS pour la seconde surface. Par quelconque, on entend que les courbes γ_{2d_2} ne possèdent pas de propriété géométrique remarquable autre que le fait d'être raccordable, c'est-à-dire qu'en tout point p décrivant l'arête de raccordement, la relation $\kappa > |\kappa_{g_2}|$ est vérifiée. Comme dans le cas illustratif de l'ensacheuse, la surface σ_1 est déformée selon un cylindre circulaire de rayon R_c. Cependant, le rayon demeure fixe et est choisi de telle façon à générer un cylindre fermé : $R_c = \frac{A}{2\pi}$, avec A, largeur de la feuille. La courbe γ_{3d} est donc en configuration de la fenêtre de Viviani.

Contrairement au cas d'application du pli courbe où une approche analytique a été favorisée, les calculs relatifs à la surface σ_2 (repère de Darboux et valeurs des différentes courbures) sont menés de façon numérique et ne sont donc pas détaillés ici.

Afin de mieux visualiser les effets du rapiéçage courbe par rapport au pli courbe, nous considérons la rive de la surface σ_2 comme une famille de courbes γ_{2d_2} se déformant continûment d'une courbe initiale $\gamma_{2d_{2i}}$ identique à celle définissant la rive de σ_1 (arche sinusoïdale, cas du pli courbe) jusqu'à une courbe finale $\gamma_{2d_{2f}}$ de forme arbitraire (cas du rapiéçage courbe). La figure 2.24 illustre le principe de « morphing » de la courbe γ_{2d_2}.

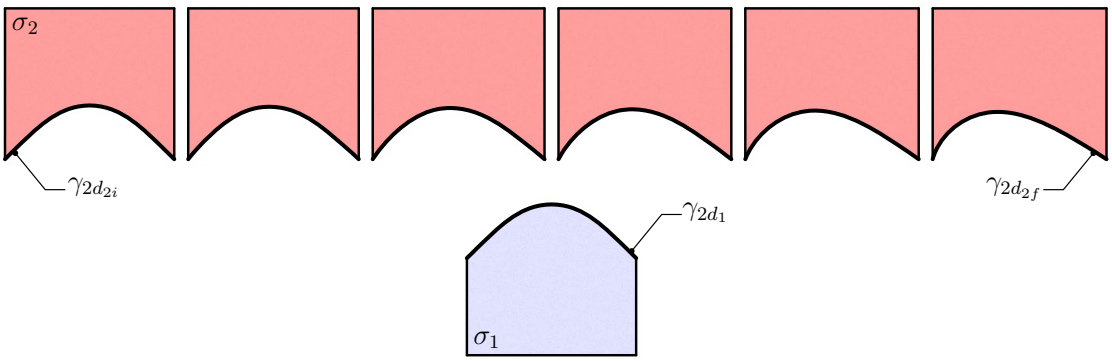
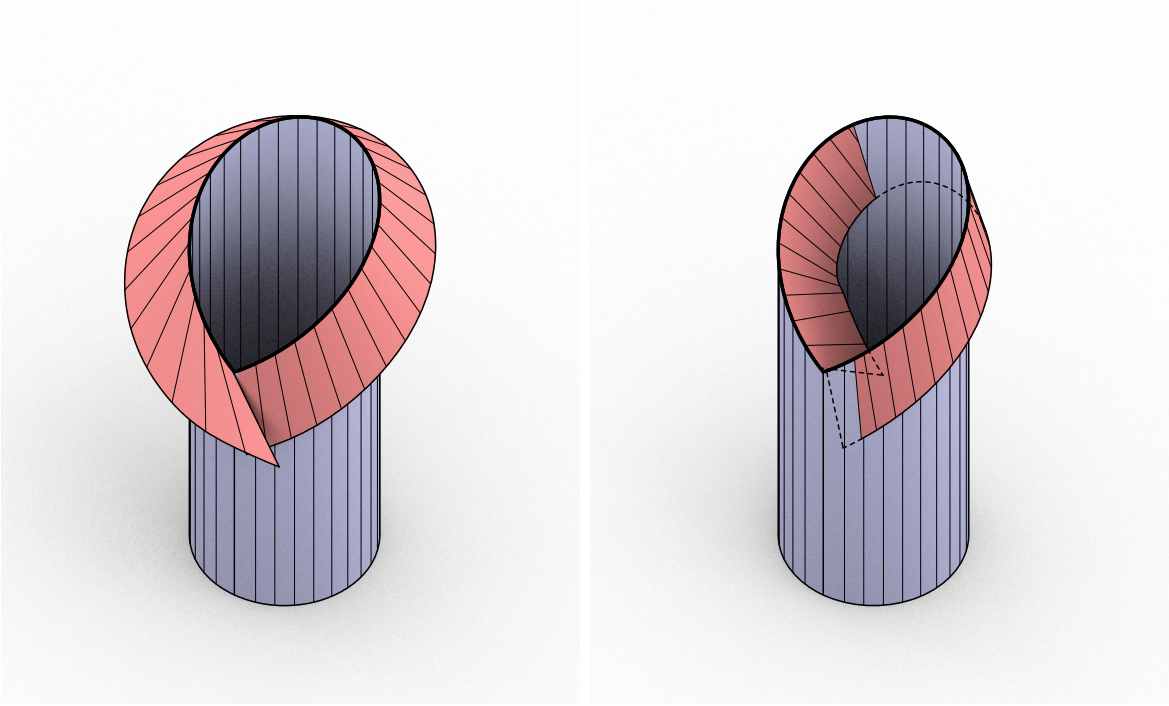


FIGURE 2.24 – Morphing de la courbe γ_{2d_2}

La figure 2.25 montre les deux rapiéçages possibles pour la courbe de rive $\gamma_{2d_{2f}}$. Comme dans l'exemple de l'ensacheuse, la surface σ_2 est représentée par des règles de longueurs constantes issues de la courbe γ_{3d} et ne modélise donc pas les bords de la feuille rectangulaire présentée à la figure 2.24. La surface σ_2 du premier rapiéçage se situe entièrement à l'extérieur du cylindre alors que celle du second montre une intersection avec la surface σ_1. Pour la suite de l'illustration nous sélectionnons donc le premier rapiéçage.

Ce rapiéçage est modélisé numériquement pour six représentants de la famille de courbes γ_{2d_2}, de $\gamma_{2d_{2i}}$ à $\gamma_{2d_{2f}}$ (Fig. 2.26). On reconnaît bien, dans le premier cas, le pliage courbe de l'ensacheuse verticale, puis on le voit se déformer progressivement sur la partie gauche essentiellement. En effet, c'est dans cette zone que les plus grandes différences de courbure entre les courbes γ_{2d_1} et $\gamma_{2d_{2f}}$ apparaissent. En vérification, nous comparons à nouveau la géométrie de la rive de la surface σ_2 suite à son développement sur le plan xy et la courbe γ_{2d_2} prescrite initialement. Les deux courbes se superposent parfaitement.



(a) Premier rapiéçage
$s_{\beta_2} = +1$

(b) Second rapiéçage
$s_{\beta_2} = -1$

FIGURE 2.25 – Les deux rapiéçages possibles pour la courbe de rive $\gamma_{2d_{2f}}$

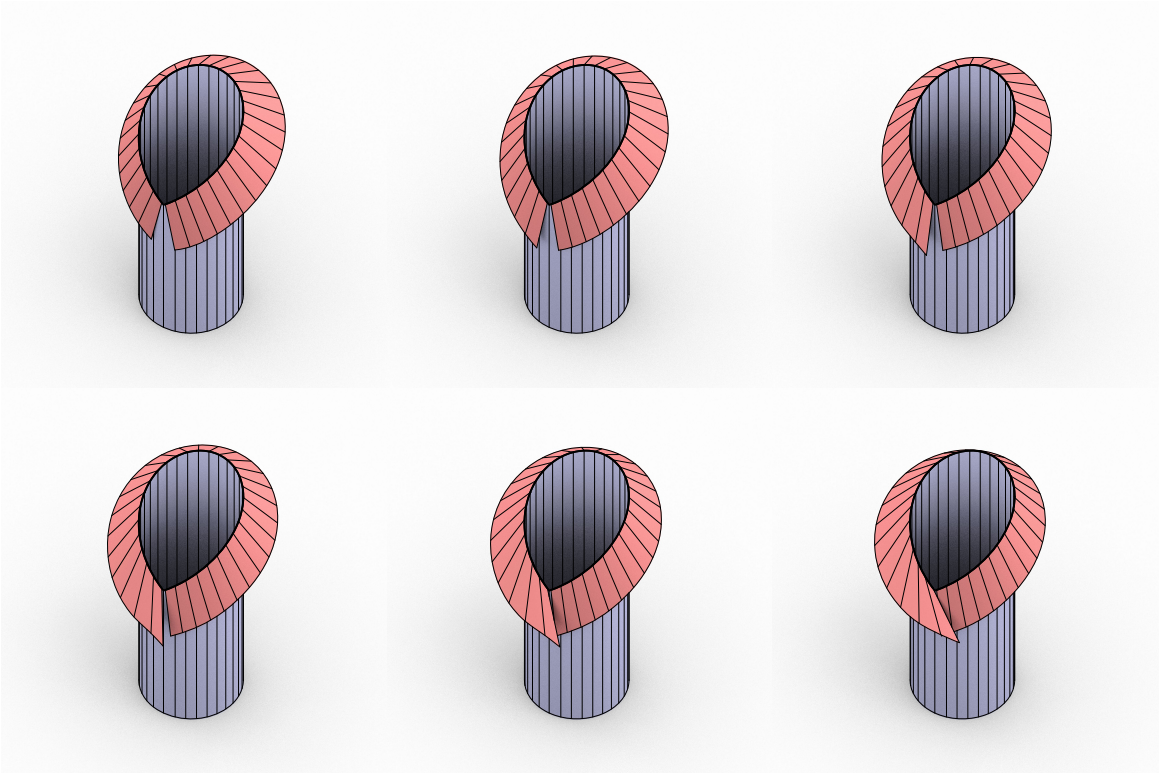


FIGURE 2.26 – Du pliage au rapiéçage courbe

2.3 Courbures gaussienne et moyenne du rapiéçage courbe

Nous venons de montrer qu'il est possible de déterminer complètement la géométrie d'une surface rapiécée à une première à condition de connaître la géométrie tridimensionnelle de la première surface et du bord à relier. Ce couplage cinématique a été établi en s'appuyant sur la courbure κ de la courbe de rapiéçage ainsi que des courbures de Darboux κ_g, κ_n et τ_g en regard aux deux surfaces à assembler.

Nous allons montrer, grâce à la formule de Steiner, que la courbe de rapiéçage est également le lieu de courbures propres aux surfaces, ici semi-discètes : les courbures gaussienne et moyenne.

La suite de ce chapitre a fait l'objet de la publication *dForms with Constant Discrete Gaussian Curvature* [243].

2.3.1 Formule de Steiner

La formule de Steiner quantifie la variation de la mesure du décalage orthogonal d'un compact dans l'espace euclidien sous la forme d'un polynôme exprimé en fonction de la valeur du décalage et de la courbure du compact considéré. Appliquée aux surfaces semi-discrètes, nous allons nous appuyer sur cette formule pour définir la notion de courbure au sein du rapiéçage courbe. Nous examinerons tout d'abord les implications de la formule de Steiner en dimension un, avant de passer à la dimension supérieure.

2.3.1.1 Dimension 1

Soit γ une courbe plane, deux fois dérivable et paramétrée par longueur d'arc. Elle est dotée d'un repère mobile $R(p, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ où $\overrightarrow{T}$ désigne un vecteur unitaire porté par la tangente dans le sens de l'abscisse curviligne croissante et $\overrightarrow{N}$ le vecteur porté par la normale tel que $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}) = \pi/2$. On peut alors définir un scalaire κ tel que :

$$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \kappa \overrightarrow{N} \tag{2.53}$$

Le scalaire κ est la courbure signée de γ. Elle est positive si $\overrightarrow{N}$ pointe vers le centre de courbure et négative dans le cas contraire.

Soit γ_δ, le décalage orthogonal de γ selon le vecteur normal $\delta\overrightarrow{N}$ (Fig. 2.27a). Alors, la longueur de γ_δ est une fonction linéaire en δ (formule de Steiner) :

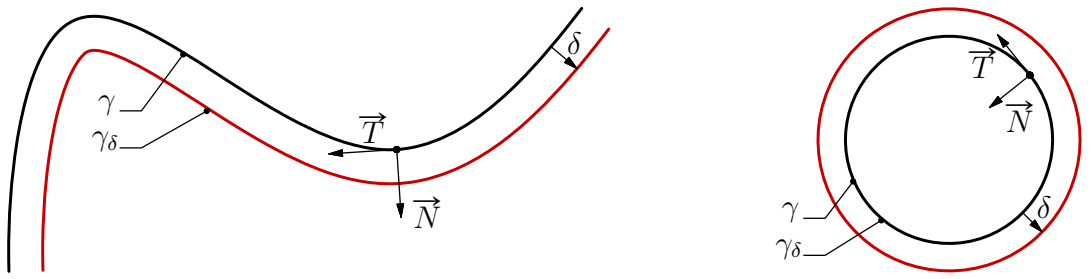
$$\ell(\gamma_\delta) = \ell(\gamma) - \delta\kappa(\gamma) \tag{2.54}$$

avec $\kappa(\gamma) = \int_\gamma \kappa d\ell$, courbure totale de γ.

Dans le cas d'un cercle (Fig. 2.27b où $\kappa > 0$ et $\delta < 0$), on vérifie bien que :

$$\ell(\gamma_\delta) = 2(R+\delta)\pi = 2R\pi + 2\delta\pi = \ell(\gamma) - \delta \int_\gamma \kappa d\ell \tag{2.55}$$

Cette formule aide à résoudre la célèbre devinette dont l'énoncé est le suivant. On assimile le globe terrestre à une sphère parfaite et on enroule une corde autour de l'équateur. Puis on ajoute un mètre à la corde et on dispose encore la corde allongée autour de l'équateur avec une distance constante avec la surface terrestre. Quelle est cette distance ?



(a) Appliquée à une courbe (b) Appliquée à une cercle

FIGURE 2.27 – Formule de Steiner

La courbure totale de l'équateur est $\kappa(eq) = 2\pi$ et on cherche δ dans la formule de Steiner $\ell(\gamma) + 1 = \ell(\gamma) - 2\pi\delta$. On trouve alors que la valeur de δ est indépendante du rayon de la terre et vaut $|\delta| = 1/2\pi \sim 16\,\text{cm}$! En réalité, l'hypothèse de sphéricité de la Terre n'est pas nécessaire puisque la courbure totale de toute courbe plane fermée d'indice 1 est égal à 2π. On peut donc choisir d'enrouler la corde autour de n'importe quelle astéroïde, voire de la planète Shadok (Fig. 2.28) !

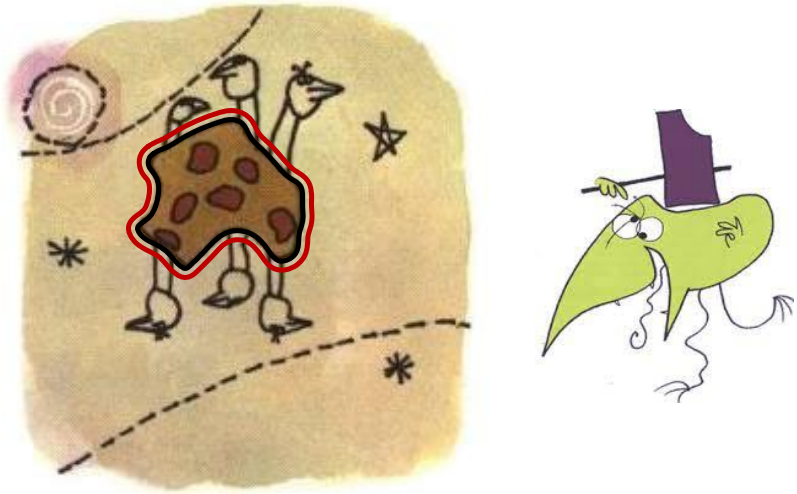


FIGURE 2.28 – Steiner chez les Shadok

La figure 2.29 montre l'œuvre monumentale d'Eric Manhes-Malmon et Yvan Mathis et sa mise en œuvre peut être vue comme une manifestation de la formule de Steiner. Les artistes entaillent le profilé métallique d'un côté avec une densité variable selon la courbure à donner afin d'imposer une longueur différente sur les deux courbes de rive.

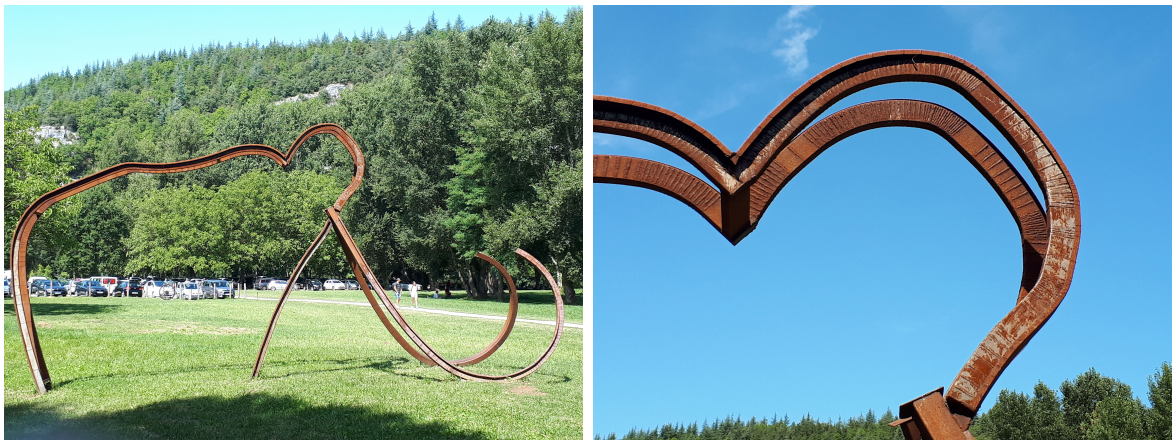


FIGURE 2.29 – M Le Mammouth - Le Fabuleux Voyage
Eric Manhes-Malmon et Yvan Mathis (2013)

2.3.1.2 Dimension 2 : géométries lisse et discrète

La formule de Steiner s'applique aussi aux surfaces et implique les courbures gaussienne et moyenne. Soit σ_δ, le décalage orthogonal d'une surface lisse σ selon le vecteur normal $\delta\overrightarrow{N}$. Alors, l'aire de σ_δ est une fonction polynomiale quadratique en δ :

$$A(\sigma_\delta) = A(\sigma) - 2\delta H(\sigma) + \delta^2 K(\sigma) \tag{2.56}$$

avec $K(\sigma) = \int_\sigma K dA$ et $H(\sigma) = \int_\sigma H dA$, courbures totales gaussienne et moyenne de la surface σ.

Bobenko *et al.* [204] se sont appuyés sur cette définition pour définir les notions de courbures gaussienne et moyenne pour la géométrie différentielle discrète. A un sommet p d'une surface polyédrique fermée σ, la courbure gaussienne est définie comme le défaut angulaire :

$$K(p) = 2\pi - \sum \alpha_i \tag{2.57}$$

avec α_i, angles entre les arêtes adjacentes et concourantes au point p.

Pour une arête e d'une surface polyédrique fermée σ, la courbure moyenne est définie par :

$$H(p) = \frac{1}{2}\theta(e)\ell(e) \tag{2.58}$$

avec $\ell(e)$, la longueur de l'arête e et $\theta(e)$, l'angle entre les normales des faces adjacentes et partageant l'arête e ($\theta(e) > 0$ dans le cas convexe et $\theta(e) < 0$ dans le cas contraire).

Les courbures gaussienne et moyenne sont contenues dans des entités géométriques différentes pour les surfaces polyédriques : la courbure gaussienne est située dans les sommets du maillage alors que la courbure moyenne se trouve dans les arêtes. Les faces n'ont pas de courbure.

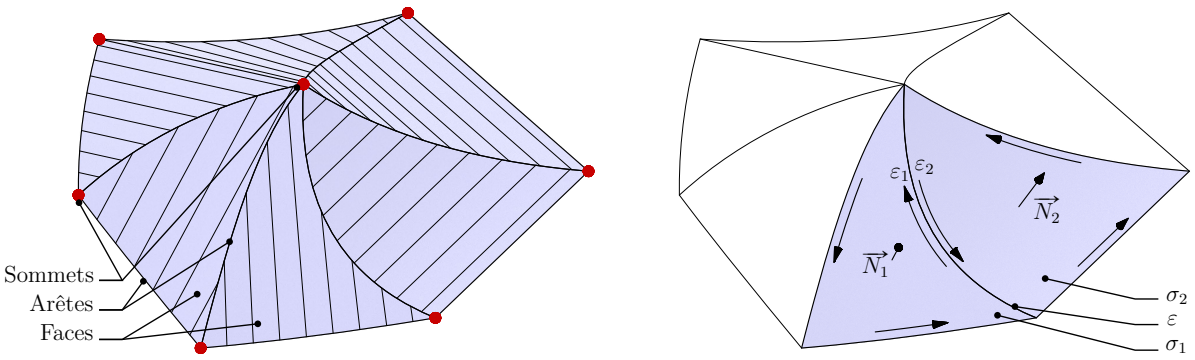
2.3.1.3 Dimension 2 : géométrie semi-discrète

Dans le cas de surfaces développables par morceaux, nous recherchons la nature des courbures gaussienne et moyenne localisées dans les sommets, les arêtes et les faces (Fig. 2.31) qui sont définies par analogie aux surfaces discrètes (Fig. 2.30a) comme suit :

— une face est constituée d'une unique surface développable ;

— une arête est définie comme l'intersection de deux faces (à l'exception des bords) ;

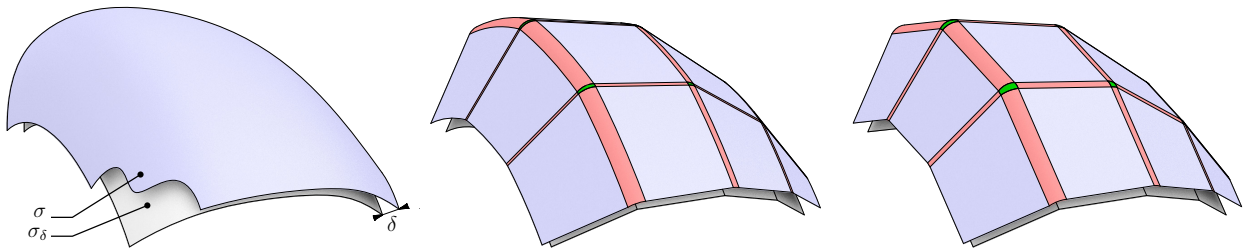
— un sommet est défini comme l'intersection d'au moins trois arêtes (à l'exception des coins).



(a) Terminologie

(b) Nomenclature et conventions d'orientation

FIGURE 2.30 – Définition géométrique des surfaces développables par morceaux



(a) Surfaces lisses

(b) Surfaces semi-discrètes

(c) Maillages

FIGURE 2.31 – Formule de Steiner :
contribution des faces (bleu), arêtes (rouge) et sommets (vert)

Aux sommets, la courbure gaussienne peut être définie comme le défaut angulaire par une approche similaire à celle menée par Bobenko *et al.* [204] sur les surfaces polyédriques.

Les faces étant développables, elle ne contiennent pas de courbure gaussienne, mais seulement de la courbure moyenne et la courbure moyenne totale vaut :

$$H(\sigma) = \int_\sigma H dA = \frac{1}{2} \int_\sigma \kappa_1 dA \tag{2.59}$$

avec κ_1, courbure principale non nulle de σ.

La question des arêtes est plus délicate, mais une approche qualitative donne de premières indications. En considérant la surface développable rapiécée comme le cas limite d'un maillage quadrangulaire plan raffiné dans une direction [93], les sommets et les arêtes situés dans cette direction fusionnent dans la courbe de couture (Fig. 2.32). Cette courbe doit donc contenir les courbures qui étaient localisées dans les éléments la constituant, à savoir de la courbure gaussienne et de la courbure moyenne.

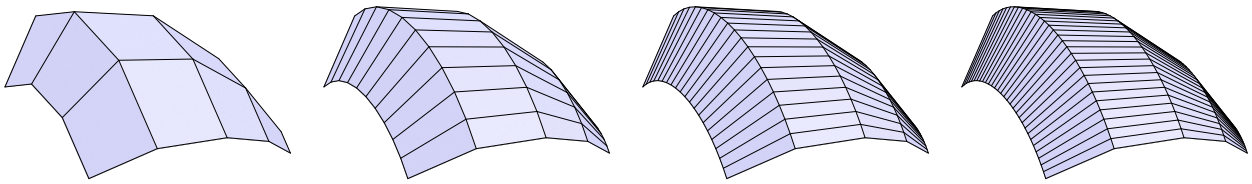


FIGURE 2.32 – Fusion des sommets et des arêtes dans la courbe de rapiéçage lors du raffinement dans une direction du maillage

Pour quantifier la valeur de chacune de ces courbures, on peut faire appel à la formule de Steiner en évaluant l'aire de la surface issue du décalage orthogonal de la surface rapiécée et plus précisément celle correspondant aux arêtes courbes. Elle est définie comme une portion de surface tubulaire dont le cercle générateur est centré sur la courbe de couture (Fig. 2.33).

Soit p, un point situé sur le bord courbe ε partagé par les faces σ_1 et σ_2. Cette couture commune ε est appelée ε_1 quand on la considère du point de vue de σ_1 et ε_2 du point de vue de σ_2. Les orientations de ε_1 et ε_2 correspondent au sens trigonométrique selon les normales $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ et on choisit la même orientation pour ε et ε_1. Les orientations des courbes ε_1 et ε_2 sont donc opposées (Fig. 2.30b).

On définit les repères de Darboux $R_{D_1}(p, \overrightarrow{T_{D_1}}, \overrightarrow{B_{D_1}}, \overrightarrow{N_{D_1}})$ et $R_{D_2}(p, \overrightarrow{T_{D_2}}, \overrightarrow{B_{D_2}}, \overrightarrow{N_{D_2}})$ relatifs aux courbes ε_1 et ε_2 attachées respectivement aux surfaces σ_1 et σ_2. $R_F(p, \overrightarrow{T_F}, \overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{B_F})$ est le repère de Frenet de la courbe ε. Les angles θ_1 et $-\theta_2$ sont alors définis comme les angles orientés entre $\overrightarrow{N_F}$ d'une part et respectivement les normales $\overrightarrow{N_{D_1}}$ et $\overrightarrow{N_{D_2}}$ d'autre part. L'angle d'ouverture de la surface tubulaire de rayon δ est variable et égal à $\theta(p) = \theta_2 - \theta_1$ (Fig. 2.33).

La surface tubulaire peut être approchée localement par un tore de rayon mineur δ et dont l'âme est le cercle osculateur de rayon R de la courbe de couture. L'aire partielle d'un tore est donnée par la formule :

$$A_{tore} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\delta R + \delta^2 \cos\theta\right) \, d\theta d\varphi \tag{2.60}$$

avec δ, rayon mineur du tore et valeur du décalage orthogonal, R, rayon majeur du tore et rayon de courbure de ε en p. θ décrit l'angle d'ouverture de la portion de surface du tore selon le cercle mineur et φ selon le cercle majeur.

La surface élémentaire dA_{tore} correspondant à la longueur d'arc élémentaire $ds = Rd\varphi$ est déduite de la formule précédente :

$$dA_{tore} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left(\delta R + \delta^2 \cos\theta\right) \, d\theta \, \frac{ds}{R} \tag{2.61}$$

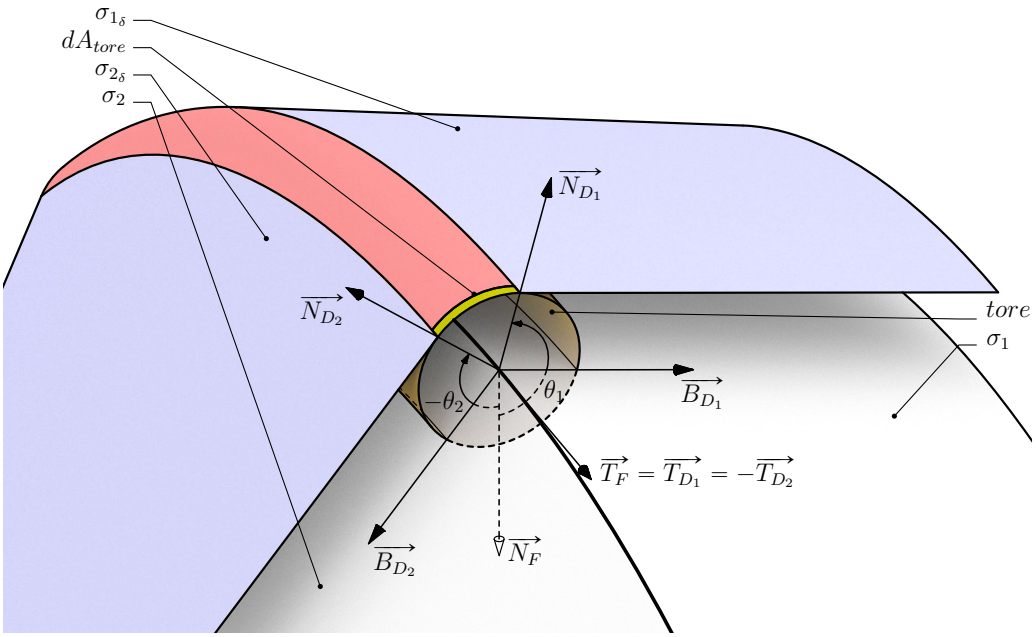


FIGURE 2.33 – Définition des repères de Darboux et Frenet au point p de la courbe de rapiéçage

Puis en intégrant, on obtient :

$$dA_{tore} = \left(\delta[\theta_2 - \theta_1] + \delta^2 \left[\frac{\sin\theta_1}{R} - \frac{\sin\theta_2}{R}\right]\right) ds \tag{2.62}$$

Avec l'introduction de κ_{g_1} et κ_{g_2}, courbures géodésiques de ε_1 and ε_2 en p :

$$dA_{tore} = \left(\delta[\theta_2 - \theta_1] + \delta^2[\kappa_{g_1} + \kappa_{g_2}]\right) ds \tag{2.63}$$

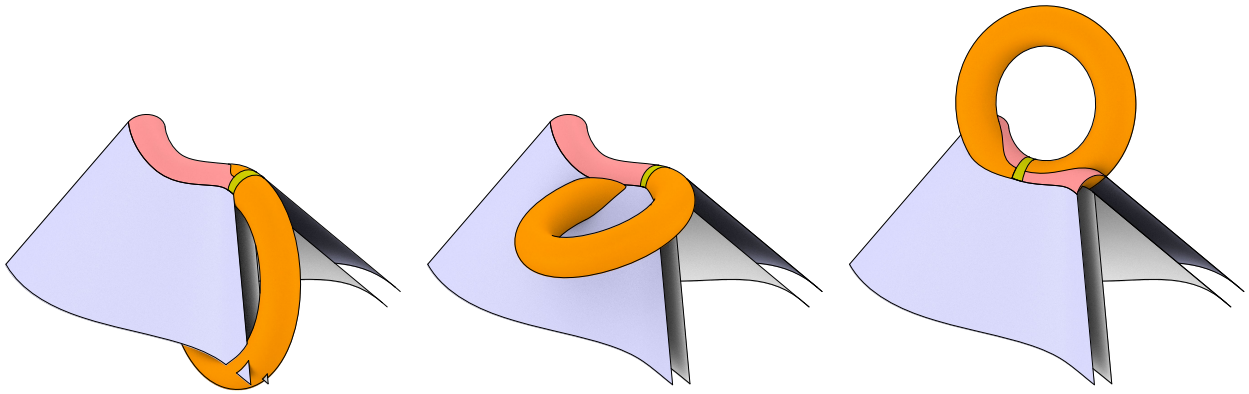
Enfin, en identifiant les termes linéaire et quadratique de la formule de Steiner, les courbures gaussienne et moyenne sont déduites des équations 2.56 et 2.63 :

$$K(p) = \kappa_{g_1}(p) + \kappa_{g_2}(p) \tag{2.64}$$

$$H(p) = \frac{1}{2}\theta(p) \tag{2.65}$$

2.3.2 Interprétation des résultats

L'équation 2.64 permet d'évaluer quantitativement la valeur de la courbure gaussienne à un point donné du rapiéçage courbe. Graphiquement et qualitativement, la localisation de l'aire élémentaire dA_{tore} sur le tore osculateur renseigne sur la nature de la courbure gaussienne (Fig. 2.34) : selon que la portion d'aire est située « à l'extérieur » ou « à l'intérieur » du tore, celle-ci se trouve dans une zone à double courbure positive ou négative et la courbure gaussienne du rapiéçage sera de même nature. Si la portion d'aire est située équitablement « à cheval » sur les deux zones, alors le plan du cercle majeur du tore est bissecteur des plans tangents des faces et nous sommes en présence d'une surface localement pliée.



(a) $K(p) > 0$ (b) $K(p) = 0$ (c) $K(p) < 0$

FIGURE 2.34 – Lecture de la nature de la courbure gaussienne du rapiéçage par sa localisation sur le tore osculateur

L'équation 2.65 s'interprète assez intuitivement comme une courbure discrète représentée par un angle d'ouverture situé dans le plan normal à la courbe de rapiéçage ; plus l'angle entre les normales est important, plus la courbure moyenne est forte.

Ces définitions de la courbure gaussienne et moyenne pour les surfaces semi-discrètes sont compatibles avec celles établies par la géométrie différentielle discrète. Pour les arêtes rectilignes d'une surfaces polyédriques, la courbure géodésique est nulle, ce qui entraîne, selon l'équation 2.64 la nullité de la courbure gaussienne pour tout point p appartenant à l'arête. D'autre part, pour les faces planes d'un maillage, les normales présentent un angle constant de part et d'autre de l'arête commune ; l'équation 2.65 est alors identique à l'équation 2.58.

Ces définitions sont aussi compatibles avec les propriétés du pliage courbe que nous avons vues en partie 2.2. Les plis courbes, comme les plis simples, possèdent la propriété d'être applicables au plan euclidien, ce qui implique une courbure gaussienne nulle en tout point des faces et de la courbe de pli. Ceci est bien vérifié par l'équation 2.64 puisque dans le cas du pli courbe, les courbures géodésiques κ_{g_1} et κ_{g_2} sont égales et opposées : elles sont relatives à la même courbe avec des orientations contraires. Enfin, nous vérifions la compatibilité des résultats avec ceux décrits dans Duncan et Duncan [110] et énonçant que le plan osculateur de la courbe de pli est le plan bissecteur des deux plans locaux tangents aux surfaces σ_1 et σ_2. Pour vérifier cela, nous observons que les deux plans tangents sont engendrés par les couples de vecteurs $(\overrightarrow{T_{D_1}}, \overrightarrow{B_{D_1}})$, $(\overrightarrow{T_{D_2}}, \overrightarrow{B_{D_2}})$ et que les angles qu'ils décrivent avec le plan osculateur $(\overrightarrow{T_F}, \overrightarrow{N_F})$ sont $\beta_1 = \theta_1 - \pi/2 = (\overrightarrow{N_F}, \overrightarrow{B_{D_1}})$ et $\beta_2 = -\theta_2 - \pi/2 = (\overrightarrow{N_F}, -\overrightarrow{B_{D_2}})$. En supposant qu'il s'agit d'un pli courbe et en observant l'équation 2.62, on déduit que $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$, car le terme représentant la courbure gaussienne est nul (terme quadratique). Les angles β_1 et β_2 sont bien égaux et opposés, et les formulations du rapiéçage courbe sont bien compatibles avec les celles du cas particulier du pli courbe.

2.4 dForms à courbure gaussienne constante

Les notions développées jusqu'alors traitent des propriétés locales du rapiéçage courbe des surfaces développables par morceaux. La dernière partie de ce chapitre est l'occasion de mobiliser ce corpus théorique et de le relier à des aspects de géométrie différentielle globale.

La sphère, pour la géométrie lisse, et les polyèdres platoniciens, pour la géométrie discrète, sont des formes géométriques à courbure gaussienne constante. Il est légitime de s'interroger sur l'existence de figures équivalentes pour la géométrie semi-discrète. Sans prétention d'exhaustivité, nous identifions, après un rapide préliminaire topologique des familles de formes répondant à cette propriété.

2.4.1 Considérations topologiques

La géométrie différentielle globale traite des relations entre les propriétés locales et globales (en général topologiques) des courbes et des surfaces [24]. En particulier, la formule de Gauss-Bonnet établit un lien entre la géométrie d'une surface (au sens de la courbure gaussienne K) et sa topologie (au sens de la caractéristique d'Euler χ).

Dans le cas simple d'une surface compacte (sans bord), la formule de Gauss-Bonnet s'exprime par :

$$2\pi\chi = \int_{\sigma} K dA \tag{2.66}$$

Dans le cas d'une surface lisse par morceaux dont les arêtes des faces peuvent elles-mêmes être constituées de courbes lisses par morceaux, alors la contribution des arêtes et des sommets de chaque face doit être considérée. Selon Raffaelli *et al.* [244], pour une surface rapiécée constituée de N_f faces nommées σ_i, N_{e_i} arêtes par faces σ_i nommées ε_{ij}, N_v sommets avec N_{α_k} angles nommés α_{k_m} entre arêtes adjacentes, la formule de Gauss-Bonnet devient :

$$\begin{aligned} 2\pi\chi &= K_f + K_e + K_v \\ 2\pi\chi &= \sum_{i=1}^{N_f} \int_{\sigma_i} K dA + \sum_{i=1}^{N_f} \sum_{j=1}^{N_{e_i}} \int_{\varepsilon_{ij}} \kappa_g ds + \sum_{k=1}^{N_v} \left(2\pi - \sum_{m=1}^{N_{\alpha_k}} \alpha_{km} \right) \end{aligned} \tag{2.67}$$

avec K_f, K_e, K_v les courbures totales localisées respectivement dans les faces, les arêtes et les sommets. $\int_{\varepsilon_{ij}} \kappa_g ds$ est la courbure géodésique totale de l'arête ε_{ij} relativement à la face σ_i.

Dans le cas des surfaces développables par morceaux, la courbure gaussienne est nulle en tout point des faces et l'équation 2.67 se simplifie en supprimant le premier terme ($K_f = 0$).

La formule de Gauss-Bonnet appliquée aux surfaces développables par morceaux est illustrée par la surface obtenue par le pliage du symbole géométrique Vesica Piscis, utilisé ici pour son tracé et non ses significations mystiques (Fig. 2.35) ! Cette forme a l'avantage de présenter plusieurs des configurations évoquées dans ce chapitre : deux sommets, deux arêtes courbes pliées et une arête courbe rapiécée (Fig. 2.36a). Le patron de découpe est constitué de deux cercles sécants de même rayon. La figure originale indique que le centre de chacun des cercles fait partie de la circonférence de l'autre [245]. Mundilova et Wills [246] introduisent un paramètre supplémentaire en modifiant la distance entre les deux centres afin d'en étudier l'influence sur la forme tridimensionnelle.

En considérant cette paramétrisation plus générale et en excluant déplacements et homothéties, il s'agit d'une figure géométrique à un degré de liberté. Avec les variables liées définies en figures 2.36a et 2.36b, on trouve :

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma \\ L_1 = L_3 &= (2\pi - \theta)R \\ \ell_1 = \ell_{21} = \ell_{23} = \ell_3 &= \theta R \end{aligned} \tag{2.68}$$

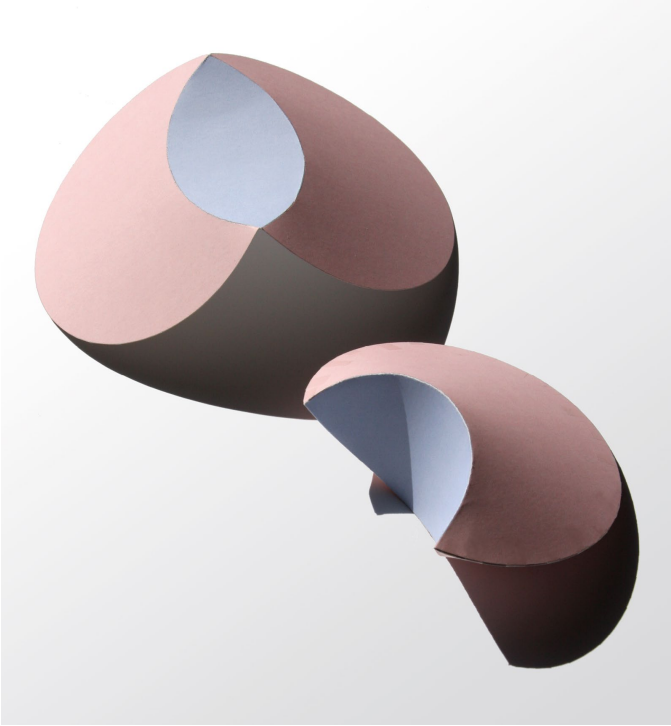


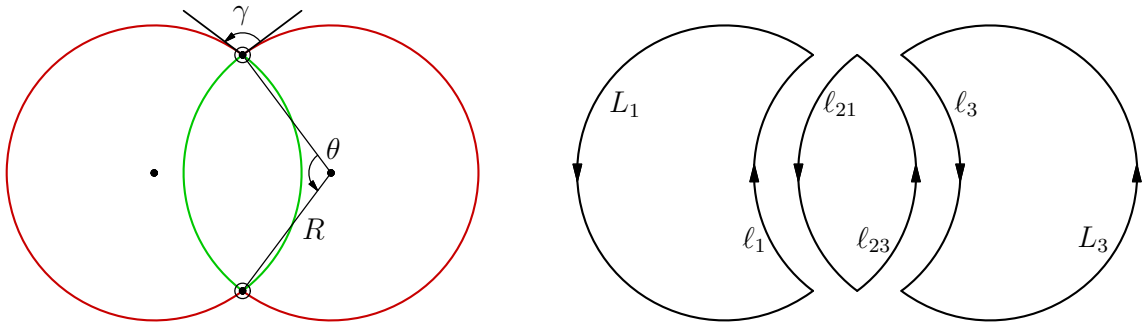
FIGURE 2.35 – dForm basé sur la figure du Vesica Piscis : maquette physique

En prenant soin de considérer le signe de la courbure géodésique indiqué par l'orientation des courbes sur le patron de découpe de la figure, les trois termes de la formule de Gauss-Bonnet, définie par l'équation 2.67, s'écrivent :

$$\begin{aligned} K_f &= 0 \\ K_e &= \frac{1}{R}(L_1 + L_3) + \frac{1}{R}(\ell_{21} + \ell_{23}) - \frac{1}{R}(\ell_1 + \ell_3) = 2(2\pi - \theta) \\ K_v &= 2\theta \end{aligned} \tag{2.69}$$

L'addition des contributions respectives des faces, des arêtes et des sommets, aboutit à une valeur indépendante de la paramétrisation de la géométrie : $K_f + K_e + K_v = 4\pi$. Cette courbure totale correspond à une caractéristique d'Euler $\chi = 2$, qualifiant les surfaces homéomorphes à la sphère.

Ghys [247] analyse la morphologie du Brazuca, ballon officiel de la coupe du monde de football 2014, et assimile cette sphère constituée de plusieurs pièces à un cube dont on aurait fait disparaître la courbure gaussienne des sommets ($\sum \alpha_i = 2\pi$) pour la redistribuer le long des arêtes (Fig. 2.37a). Dans une approche comparable, Delp et Thurston [248] proposent une



(a) Patron de découpe montrant la nature des raccords (point, pli (vert), rapiéçage (rouge))

(b) Nomenclature et conventions d'orientation

FIGURE 2.36 – Définition paramétrique du dForm basé sur la figure du Vesica Piscis

méthode de génération de formes en prenant la relation de Gauss-Bonnet comme point de départ : la courbure gaussienne contenue localement dans les sommets de formes polyédriques est répartie le plus uniformément possible le long des arêtes grâce à des courbes remplissantes (Fig. 2.37b). Sharp et Crane [249] utilisent également, par une méthode de flot, les courbes remplissantes pour segmenter les surfaces à double courbure afin de minimiser la déformation métrique lors du développement sur le plan (Fig. 2.37c).



(a) Sphère cubique Brazuca [247]

(b) Sphère octaédrique Delp et Thurston [248]

(c) Sphère icosaédrique Sharp et Crane [249]

FIGURE 2.37 – Découpage de la sphère selon des polyèdres à bords courbes

Nous étudions plus loin les surfaces développables par morceaux dont la courbure gaussienne est constante. Excluant *a priori* les formes possédant des sommets de notre étude, cette courbure est donc contenue exclusivement dans les courbes de rapiéçage, comme dans les trois références décrites précédemment. Pour cette raison, nous focalisons notre recherche sur le cas des dForms homéomorphes à la sphère et composés de deux disques topologiques bordés par une courbe d'indice 1. Pour les dForms et en considérant l'équation 2.64, la formule de Gauss-Bonnet prend la forme simplifiée suivante :

$$4\pi = \int_{\varepsilon} (\kappa_{g_1} + \kappa_{g_2}) ds \tag{2.70}$$

avec ε, unique courbe de rapiéçage reliant les deux disques topologiques.

2.4.2 dForms à patrons de découpe symétriques

Nous avons implicitement considéré dans l'équation 2.69 que le rayon d'un arc, en tant qu'inverse de la courbure signée, pouvait prendre une valeur négative. Par la suite, nous serons amenés à considérer, selon les cas, les valeurs algébriques ou absolues de certaines valeurs scalaires.

Ainsi, à partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce chapitre, le rayon de courbure d'un arc est une valeur algébrique dont le signe dépend du sens de parcours de l'arc par rapport au sens trigonométrique ; il est noté, comme précédemment R. En revanche, les longueurs (d'arc ou de segment de droite) sont par défaut des valeurs absolues notées ℓ. Nous serons cependant amené à définir la notion de longueur signée ou algébrique dans le paragraphe suivant ; dans ce cas, cette longueur est notée $\bar{\ell}$.

2.4.2.1 Famille de patrons de découpe à deux paramètres

Commençons par un cas trivial qui satisfait directement la contrainte de courbure gaussienne constante que nous nous sommes donnés. Il s'agit d'un dForm composé de deux patrons de découpe identiques, une sorte de balle de tennis développable [250] (Fig. 2.38). Chaque patron de découpe est composé de deux demi-cercles de rayon R et de deux segments de droite, tous de longueur égale $\ell = \pi R$. L'arc de cercle étant mis en regard du segment de droite, la courbure gaussienne $\kappa_{g_1} + \kappa_{g_2} = 1/R$ est constante. La forme résultant de l'assemblage des patrons de découpe est composée de deux demi-cylindres d'axes perpendiculaires et de deux demi-disques. La formule de Gauss-Bonnet est vérifiée et la courbure gaussienne totale vaut :

$$K(\sigma) = 4\ell(\kappa_{g_1} + \kappa_{g_2}) = 4\pi R\left(\frac{1}{R} + 0\right) = 4\pi \tag{2.71}$$



FIGURE 2.38 – dForm et patrons de découpe constitués de deux arcs de cercles et deux segments de droites

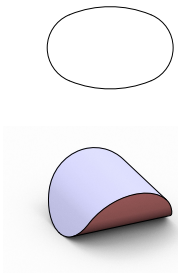
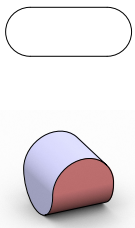
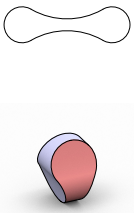
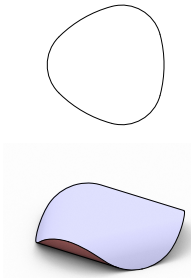
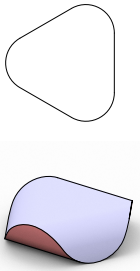
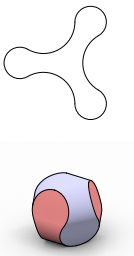
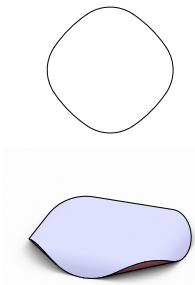
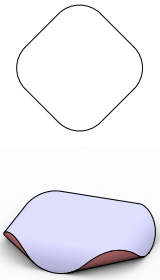
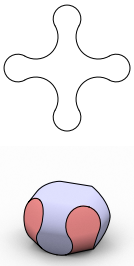
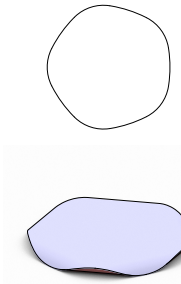
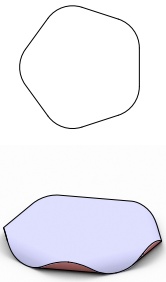
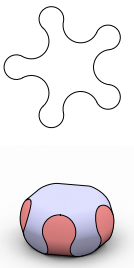
Ce type de patron de découpe est généralisable à une famille à deux paramètres.

Deux patrons de découpe identiques sont définis par un premier paramètre discret N, qui caractérise le groupe de symétrie auquel ils appartiennent : le groupe diédral D_N. Chaque patron

de découpe est donc constitué de N branches symétriques, soit $2N$ arcs de cercle raccordés en tangence et qui alternent deux rayons de courbures différents. Les deux patrons sont raccordés de façon à mettre en correspondance le premier rayon de courbure du premier patron avec le second rayon de courbure du second patron. De cette manière, la courbure gaussienne est constante tout au long de la courbe de rapiéçage (Fig. 2.40).

Un second paramètre continu α définit l'angle d'ouverture de l'arc situé en extrémité de la branche. Une valeur particulière de α, pour laquelle le second arc a une courbure nulle, délimite les deux domaines de convexité des patrons de découpe (Tab. 2.3).

TABLE 2.3 – Famille de dForms à deux paramètres

	Patron convexe	Cas limite : $\alpha = {}^{2\pi}/_{N}$	Patron non-convexe
$N = 2$			
$N = 3$			
$N = 4$			
$N = 5$			

2.4.2.2 Paramétrisation

Soit $\mathcal{C}_{3d}$, la courbe de rapiéçage du dForm et $\mathcal{C}_{2d}$, la même courbe développée sur le plan xy. Cette dernière définit le patron de découpe à N branches des deux parties à assembler. Chaque courbe est composée de $2N$ arcs : N arcs identiques notés $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ alternant avec N autres arcs, également identiques, notés $\mathcal{A}_{\beta_i}$ avec $i \in \{0 \dots N-1\}$.

La géométrie des arcs $(\mathcal{A}_{\alpha_i}, \mathcal{A}_{\beta_i})$ est définie par les trois paramètres couplés : angle d'ouverture (α, β), rayon de courbure (R_α, R_β) et longueur $(\ell_\alpha = \alpha R_\alpha, \ell_\beta = \beta R_\beta)$. La courbe $\mathcal{C}_{2d}$ étant orientée dans le sens trigonométrique, les angles et les rayons de courbure peuvent prendre un signe positif ou négatif selon leur propre orientation comparée à celle de $\mathcal{C}_{2d}$; les longueurs sont toujours positives. La figure 2.39 montre un exemple où les arcs $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ sont définis par un angle α et un rayon de courbure R_α positifs puisque les arcs et la courbe $\mathcal{C}_{2d}$ sont tous deux orientés dans le sens direct. En revanche β et R_β sont négatifs dans cette configuration.

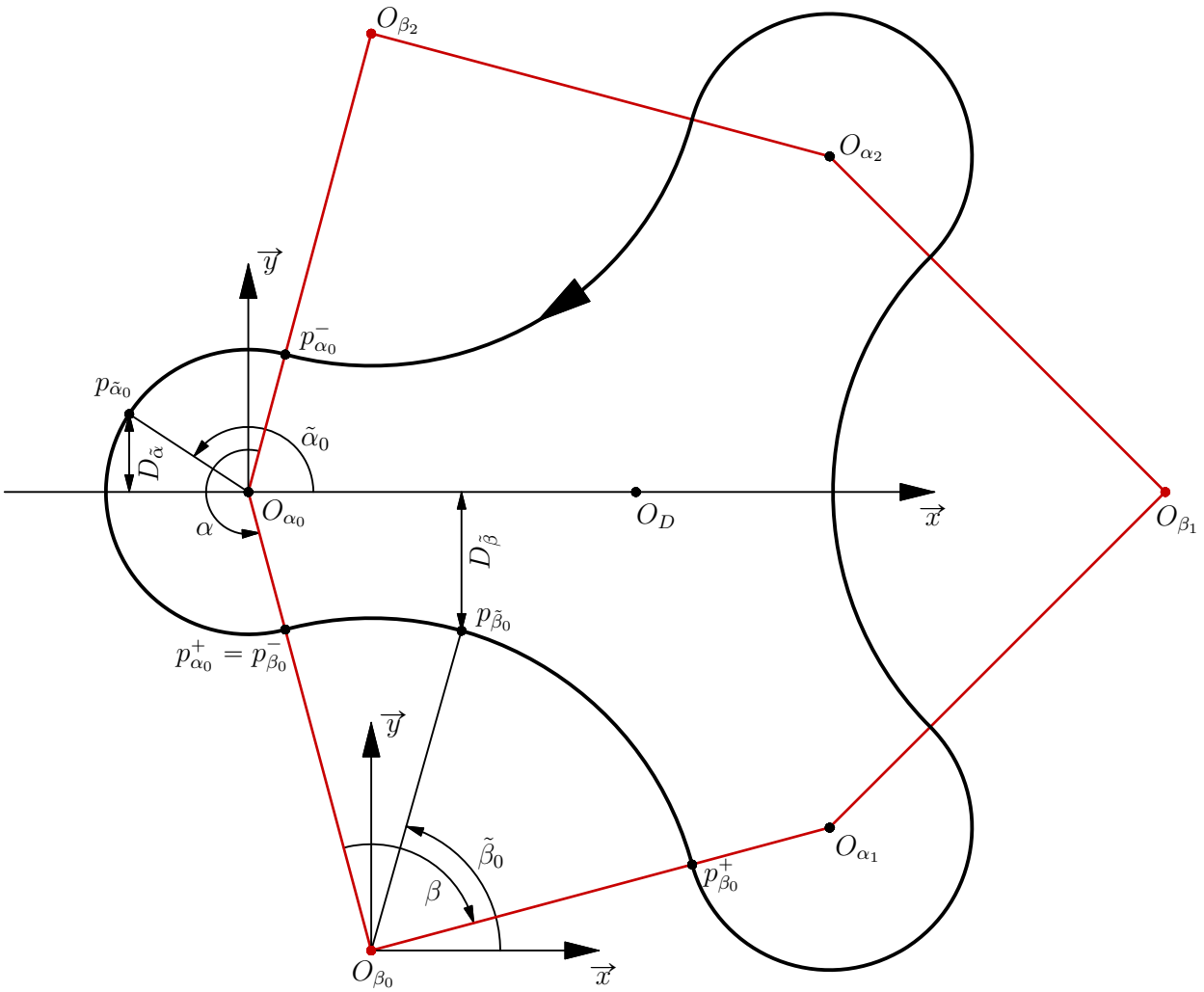


FIGURE 2.39 – Nomenclature des angles et des distances pour le patron de découpe $N = 3$ et $\alpha = {}^{7\pi}/_{6}$

Les paramètres des arcs $\mathcal{A}_{\beta_i}$ sont complètement définis par ceux des arcs $\mathcal{A}_{\alpha_i}$. Pour des raisons d'assemblage, les longueurs des arcs ℓ_β et ℓ_α sont égales. De plus, la condition sur la courbure (condition nécessaire) de la fermeture d'une courbe lisse, plane, d'indice 1 et de longueur L s'énonce par [251] :

$$\int_L \kappa_{2d} ds = 2\pi \tag{2.72}$$

avec κ_{2d} courbure signée de la courbe.

Cette relation se traduit dans notre cas par :

$$N\ell_\alpha \frac{1}{R_\alpha} + N\ell_\beta \frac{1}{R_\beta} = N(\alpha + \beta) = 2\pi \tag{2.73}$$

Le rayon R_β est alors obtenu via la relation $\ell_\beta = \beta R_\beta$:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{2\pi}{N} - \alpha \\ R_\beta = R_\alpha \dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{R_\alpha \alpha}{\frac{2\pi}{N} - \alpha} \\ \ell_\beta = \ell_\alpha \end{cases} \tag{2.74}$$

La valeur particulière de α introduite dans le précédent paragraphe et définissant la convexité du patron de découpe est donnée pour $R_\beta = \infty$ ou $\beta = 0$, soit $\alpha = {}^{2\pi}/_{N}$.

La figure 2.39 montre le patron de découpe repéré dans le repère $(O_{\alpha_0}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ dont l'origine et l'axe x sont le centre et l'axe de symétrie du premier arc $\mathcal{A}_{\alpha_0}$. Les positions des centres O_{α_i}, O_{β_i} des arcs $\mathcal{A}_{\alpha_i}$, $\mathcal{A}_{\beta_i}$ et O_D, centre de la symétrie de groupe diédral D_N de la courbe $\mathcal{C}_{2d}$ sont déterminées par des relations trigonométriques simples au sein de la figure. Les coordonnées des centres des arcs $\mathcal{A}_{\alpha_0}$ et $\mathcal{A}_{\beta_0}$ sont données ici, les autres centres sont déduits des premiers par rotation de O_{α_0} et O_{β_0} d'un angle ${}^{2i\pi}/_{N}$ autour du point O_D :

$$\begin{aligned} O_{\alpha_0} &= \begin{pmatrix} O_{\alpha_0 x} \\ O_{\alpha_0 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ O_{\beta_0} &= \begin{pmatrix} O_{\beta_0 x} \\ O_{\beta_0 y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R_\beta - R_\alpha)\cos\frac{\alpha}{2} \\ (R_\beta - R_\alpha)\sin\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Dans le cas général ($R_\beta \neq \infty$, $\beta \neq 0$), les coordonnées du centre de symétrie valent :

$$O_D = \begin{pmatrix} O_{Dx} \\ O_{Dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O_{\beta_0 x} - O_{\beta_0 y}\cot\frac{\pi}{N} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

Dans le cas particulier ($R_\beta = \infty$, $\beta = 0$), les arcs de cercle $\mathcal{A}_{\beta_i}$ deviennent des segments de droite raccordés tangentiellement aux arcs $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ et les centres de courbure O_{β_i} sont rejetés à l'infini. En s'appuyant sur les relations trigonométriques de la figure ou un développement limité à l'ordre 1 de l'expression 2.76, on obtient :

$$O_D = \begin{pmatrix} O_{Dx} \\ O_{Dy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{R_\alpha \pi}{N \sin\frac{\pi}{N}} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.77}$$

Nous vérifions que la formule de Gauss-Bonnet est bien vérifiée :

$$K(\sigma) = 2N\ell_\alpha \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{1}{R_\beta}\right) = 2N\ell_\alpha \left(\frac{1}{R_\alpha} + \frac{R_\alpha \alpha}{\frac{2\pi}{N} - \alpha}\right) = 4\pi \tag{2.78}$$

Lors de l'assemblage des deux patrons (Fig. 2.40), les longueurs et les extrémités des arcs $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ et $\mathcal{A}_{\beta_i}$ coincident. De cette façon, malgré le changement de courbure au sein de chaque patron, la somme de celles-ci, c'est-à-dire la courbure gaussienne, demeure constante. L'arc $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ est paramétré en coordonnées polaires dans le repère $(O_{\alpha_i}, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ et le point $p_{\tilde{\alpha}_i}(R_\alpha, \tilde{\alpha}_i)$ appartient à l'arc $\mathcal{A}_{\alpha_i}$; $\tilde{\alpha}_i$ désigne la valeur de l'angle $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{O_{\alpha_i} p_{\tilde{\alpha}_i}})$. A ce point, situé sur l'arc $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ du premier patron de découpe est associé un point $p_{\tilde{\beta}_i}(R_\beta, \tilde{\beta}_i)$ situé sur l'arc $\mathcal{A}_{\beta_i}$ du second patron de découpe avec $\tilde{\beta}_i$ désignant la valeur de l'angle $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{O_{\beta_i} p_{\tilde{\beta}_i}})$. Les angles $\tilde{\alpha}_i$ et $\tilde{\beta}_i$ appartiennent respectivement aux l'intervalles $[\alpha_i^-, \alpha_i^+]$ et $[\beta_i^-, \beta_i^+]$ de longueur α et β.

Le point p appartenant à la courbe de rapiéçage du dForm est le résultat de l'identification des points $p_{\tilde{\alpha}_i}$ et $p_{\tilde{\beta}_i}$. Par l'égalité des longueurs d'arc au point $p = p_{\tilde{\alpha}_i} = p_{\tilde{\beta}_i}$, la relation $R_\alpha(\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^-) = R_\beta(\tilde{\beta}_i - \beta_i^-)$ implique que :

$$\tilde{\beta}_i = \frac{R_\alpha}{R_\beta}(\tilde{\alpha}_i - \alpha_i^-) + \beta_i^- \tag{2.79}$$

Si on se place dans le cas particulier où $R_\beta = \infty$, $\beta = 0$, alors $\tilde{\beta}_i$ prend la valeur unique $\tilde{\beta}_i = \beta_i^- = \beta_i^+$.

2.4.2.3 Du patron de découpe à la forme tridimentionnelle

Comme souligné dans l'état de l'art, la prédiction de la forme tridimensionnelle à partir du patron de découpe plan est un problème non trivial en raison de sa nature globale. Cependant, dans notre cas, les conditions de symétries du patron de découpe nous permettent de donner une description complète de la forme dans l'espace.

Considérons tout d'abord la cinématique de déformation du patron de découpe plan vers la forme spatiale du dForm (Fig. 2.40). On note $(O_{D_1}, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_1})$ et $(O_{D_2}, \overrightarrow{x_2}, \overrightarrow{y_2}, \overrightarrow{z_2})$ les deux repères attachés aux deux patrons de découpe à assembler. Ces deux repères, liés par un déplacement de type vissage, sont positionnés dans un repère global $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}, \overrightarrow{z})$ tels que $O_{D_1}(0, 0, -h)$, $\overrightarrow{z_1} = \overrightarrow{z}$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_1}) = -\frac{\pi}{2N}$ et $O_{D_2}(0, 0, h)$, $\overrightarrow{z_2} = \overrightarrow{z}$, $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x_2}) = \pi/2N$.

Chaque point d'une branche se déplace dans un plan parallèle à son plan de symétrie. La surface développable de cette branche prend alors la forme d'un cylindre quelconque dont les règles restent parallèles au plan xy et perpendiculaire au plan de symétrie.

Considérons maintenant le dForm une fois assemblé (Fig. 2.41a). Étant donné que toutes les règles sont parallèles au plan xy, l'intersection d'un plan d'équation $z = t$ avec le dForm est un polygone à $2N$ côtés appartenant au groupe de symétrie D_N, centré sur l'axe $(O, \overrightarrow{z})$. Ce polygone est régulier pour $t = 0$ et dégénère en un polygone régulier à N côtés pour $t = \{-h, h\}$. Décrire la géométrie du dForm est donc équivalent à déterminer la géométrie des polygones formés des règles des faces développables ainsi que leur position dans l'espace. Les conditions de symétrie nous indiquent la position et la rotation des polygones dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$. Les inconnues à déterminer sont les longueurs des côtés et la position des polygones le long de l'axe $(O, \overrightarrow{z})$.

Les demi-longueurs $D_{\tilde{\alpha}}$ et $D_{\tilde{\beta}}$ des côtés des polygones, c'est-à-dire les distances séparant le point p des plans de symétrie des deux branches entre lesquelles se situe ce point, peuvent être

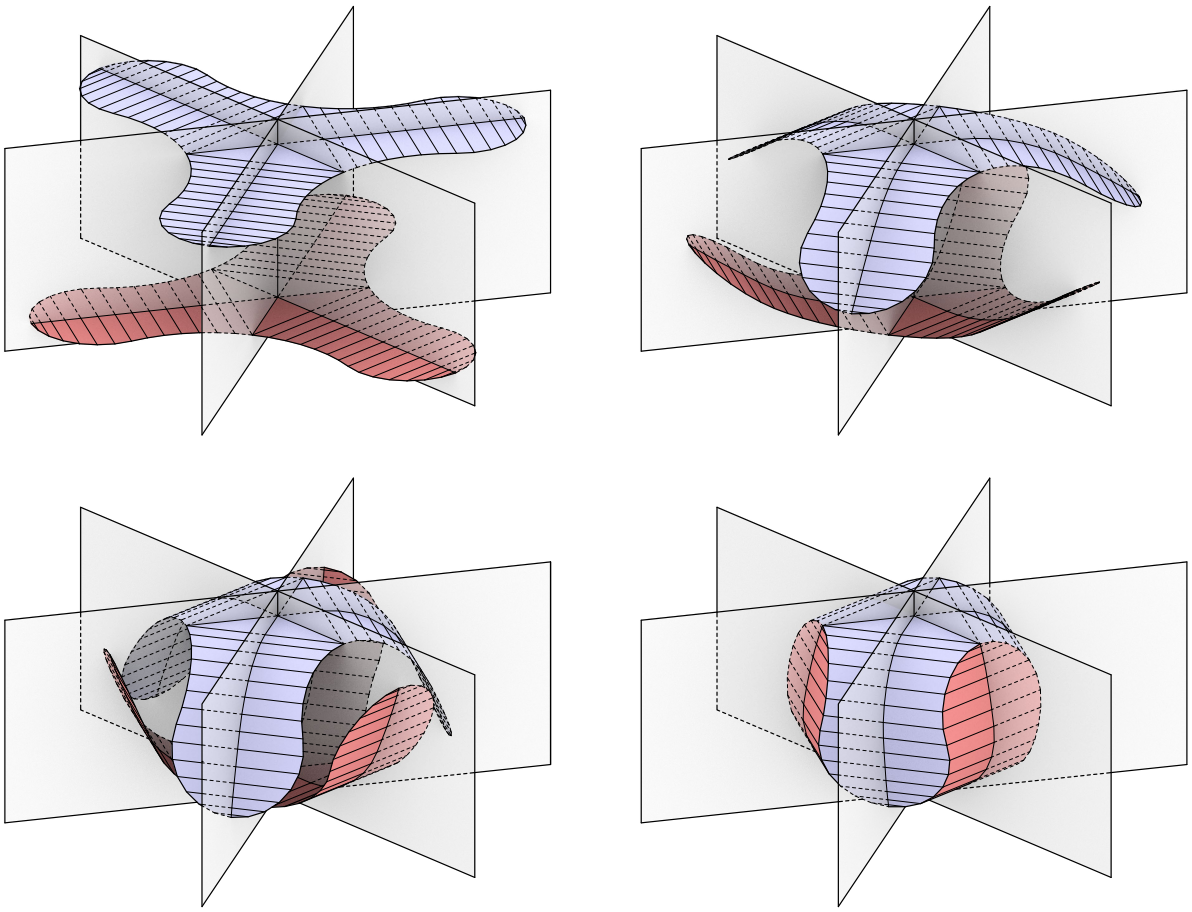


FIGURE 2.40 – Cinématique d'assemblage

mesurées directement sur les patrons de découpe. Pour des raisons de symétrie, il est simplement nécessaire de considérer les premiers arcs $\mathcal{A}_{\alpha_0}$ and $\mathcal{A}_{\beta_0}$. Dans le cas général ($R_\beta \neq \infty$, $\beta \neq 0$), les distances valent :

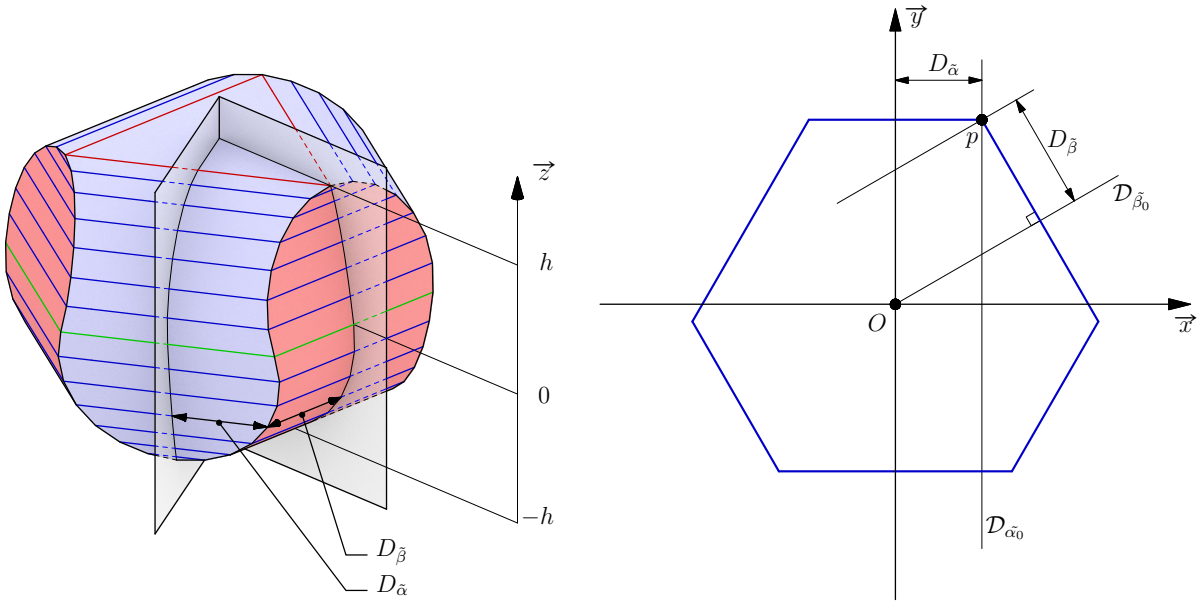
$$\begin{array}{rcl} D_{\tilde{\alpha}} & = & R_\alpha \sin \tilde{\alpha}_0 \\ D_{\tilde{\beta}} & = & -O_{\beta_0 y} - R_\beta \sin \tilde{\beta}_0 \end{array} \tag{2.80}$$

Dans le cas particulier ($R_\beta = \infty$, $\beta = 0$), en s'appuyant sur les relations trigonométriques de la figure ou un développement limité à l'ordre 1 de l'expression 2.80 donnent :

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\alpha}} &= R_\alpha \sin \tilde{\alpha}_0 \\ D_{\tilde{\beta}} &= R_\alpha \left(\sin \frac{\pi}{N} + (\tilde{\alpha}_0 - \alpha_0^-) \cos \frac{\pi}{N} \right) \end{aligned} \tag{2.81}$$

Les distances $D_{\tilde{\alpha}}$ et $D_{\tilde{\beta}}$ sont toujours positives selon les conventions de signes pour les rayons et les angles. Par exemple, sur la figure 2.39, l'ordonnée du point $O_{\beta_0 y}$ est négative, ainsi que le rayon R_β.

Connaissant les plans de symétrie du polygone, il est possible de déterminer les coordonnées p_x et p_y du point p dans le plan $(O, \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ (Fig. 2.41b). Pour cela, nous cherchons le point d'intersection des droites $\mathcal{D}_{\tilde{\alpha_0}}$ et $\mathcal{D}_{\tilde{\beta_0}}$ qui représentent, en projection sur le plan, les décalages



(a) Polygone régulier (vert), polygone symétrique D_N (bleu), polygone dégénéré (rouge)

(b) Nomenclature d'une section horizontale

FIGURE 2.41 – dForm défini par ses sections horizontales polygonales

orthogonaux des plans de symétrie des deux branches entre lesquelles se situe le point p cherché (Fig. 2.41b). Les décalages orthogonaux ont pour valeurs $D_{\tilde{\alpha}}$ et $D_{\tilde{\beta}}$ (Eq. 2.80 et 2.81). Pour déterminer les équations des droites $\mathcal{D}_{\tilde{\alpha_0}}$ et $\mathcal{D}_{\tilde{\beta_0}}$, on utilise la forme de Hesse :

$$ax + by + c = 0 \tag{2.82}$$

avec $\overrightarrow{n}_{\mathcal{D}}(a, b)$, vecteur normal unitaire de la droite $\mathcal{D}$ et c, distance à l'origine.

Les équations de $\mathcal{D}_{\tilde{\alpha_0}}$ et $\mathcal{D}_{\tilde{\beta_0}}$ sont déduites des expressions précédentes :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\tilde{\alpha_0}} : \quad & x = R_\alpha \sin\tilde{\alpha}_0 \\ \mathcal{D}_{\tilde{\beta_0}} : \quad & y = -\cos\left(\frac{\pi}{N}\right) x + \sin\left(\frac{\pi}{N}\right) y - D_{\tilde{\beta}} \end{aligned} \tag{2.83}$$

Finalement, le point p a pour coordonnées dans le plan :

$$p = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{\tilde{\alpha}} \\ \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{N}} D_{\tilde{\beta}} + \cot\frac{\pi}{N} D_{\tilde{\alpha}} \end{pmatrix} \tag{2.84}$$

Pour déterminer la troisième coordonnée p_z, la déformation isométrique de la courbe du patron de découpe garantit la conservation de la paramétrisation par longueur d'arc $s(\tilde{\alpha}_0)$ donnée par :

$$s(\tilde{\alpha}_0) = \int_{\alpha_0^-}^{\tilde{\alpha}_0} ds = \int_{\alpha_0^-}^{\tilde{\alpha}_0} \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = R_\alpha(\tilde{\alpha}_0 - \alpha_0^-) \tag{2.85}$$

La symétrie de la forme permet de restreindre le domaine angulaire à $\tilde{\alpha}_0 \in [\alpha_{s_0}, \pi]$ et :

$$p(p_x, p_y, p_z) = \begin{pmatrix} D_{\tilde{\alpha}} \\ \frac{1}{\sin\frac{\pi}{N}} D_{\tilde{\beta}} + \cot\frac{\pi}{N} D_{\tilde{\alpha}} \\ \int_{\alpha_0^-}^{\tilde{\alpha}_0} \sqrt{ds^2 + dx^2 + dy^2} \end{pmatrix} \tag{2.86}$$

avec $\bar{\alpha}$ comme variable d'intégration :

$$\begin{aligned} ds &= R_\alpha \, d\bar{\alpha} \\ dx &= R_\alpha \cos\bar{\alpha} \, d\bar{\alpha} \\ dy &= \frac{R_\alpha}{\sin\frac{\pi}{N}} \left(\cos\frac{\pi}{N} \cos\bar{\alpha} - \cos\left(\frac{R_\alpha}{R_\beta}(\bar{\alpha} - \alpha_0^-) + \beta_0^- \right) \right) \, d\bar{\alpha} \end{aligned} \tag{2.87}$$

Si on considère le problème d'un point de vue discret, la courbe de rapiéçage devient une courbe polygonale spatiale résultant de la déformation isométrique des patrons de découpe discrétisés. Chaque arc $\mathcal{A}_{\alpha_i}$ et $\mathcal{A}_{\beta_i}$ est subdivisé en n arcs de même longueur ; les points de subdivision sont notés p_{α_k} et p_{β_k} avec $k = \{0 \dots n\}$. Après assemblage, ces points fusionnent par paires en un point unique noté $p_k(p_{k_x}, p_{k_y}, p_{k_z})$ situé sur la courbe de rapiéçage.

Dans une démarche comparable à l'approche continue, les valeurs p_{k_x} et p_{k_y} sont directement définies à partir des patrons de découpe. La coordonnée p_{k_z} est calculée par intégration discrète à partir du point initial p_0 dont la position est connue sur le plan médian ($z = 0$) à partir de l'équation 2.84 :

$$p_0 = \begin{pmatrix} R_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \\ \frac{1}{\tan\frac{\pi}{2N}} R_\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.88}$$

Pour une discrétisation suffisamment fine et pour une approximation de premier ordre, on considère que la longueur d'arc peut être assimilée à la celle de la corde : $\widehat{p_{k-1}p_k} = \frac{R_\alpha \alpha}{n}$. Le point p_k est alors à l'intersection d'une sphère $\mathcal{S}$ de centre p_{k-1} et de rayon $\frac{R_\alpha \alpha}{n}$ avec les plans $\mathcal{P}_x(x = p_{k_x})$ et $\mathcal{P}_y(y = p_{k_y})$:

$$p_k = \mathcal{S}\left(p_{k-1}, \frac{R_\alpha \alpha}{n} \right) \cap \mathcal{P}_x(x = p_{k_x}) \cap \mathcal{P}_y(y = p_{k_y}) \tag{2.89}$$

Des considérations précédentes, on peut déduire les coordonnées de p_k comme la suite récurrente :

$$p_k(p_{k_x}, p_{k_y}, p_{k_z}) = \begin{pmatrix} D_{\alpha_k} \\ \frac{1}{\sin\frac{\pi}{N}} D_{\beta_k} + \cot\frac{\pi}{N} D_{\alpha_k} \\ \sqrt{\left(\frac{R_\alpha \alpha}{n}\right)^2 - (p_{k_x} - p_{(k-1)_x})^2 - (p_{k_y} - p_{(k-1)_y})^2} + p_{(k-1)_z} \end{pmatrix} \tag{2.90}$$

2.4.2.4 Courbure et torsion des courbes de rapiéçage

Nous avons vu au paragraphe précédent qu'il était nécessaire d'exprimer l'equation paramétrique de $\mathcal{C}_{3d}$ sous la forme d'une intégrale de Riemann. En revanche, il est possible d'obtenir une expression explicite de la courbure et de la torsion en calculant les dérivées successives à partir de l'équation 2.86. Elles sont données ci-dessous en prenant les conventions de notations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{C}}_{3d} = \frac{dp}{ds}, \qquad \ddot{\mathcal{C}}_{3d} = \frac{d^2p}{ds^2}, \qquad \dddot{\mathcal{C}}_{3d} = \frac{d^3p}{ds^3} \\ C = \cos\frac{\pi}{N} \qquad S = \sin\frac{\pi}{N} \end{aligned} \tag{2.91}$$

Dérivée première de la fonction $\mathcal{C}_{3d}$:

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{C}}_{3d_x} = \cos\tilde{\alpha} \\ \dot{\mathcal{C}}_{3d_y} = \dfrac{1}{S}\left(C\cos\tilde{\alpha} - \cos\tilde{\beta}\right) \\ \dot{\mathcal{C}}_{3d_z} = \left(1 - \cos^2\tilde{\alpha} - \dfrac{\left(C\cos\tilde{\alpha} - \cos\tilde{\beta}\right)^2}{S^2}\right)^{1/2} \end{cases} \tag{2.92}$$

Dérivée seconde de la fonction $\mathcal{C}_{3d}$:

$$\begin{cases} \ddot{\mathcal{C}}_{3d_x} = -\dfrac{\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} \\ \ddot{\mathcal{C}}_{3d_y} = \dfrac{1}{S}\left(-\dfrac{C\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} + \dfrac{\sin\tilde{\beta}}{R_\beta}\right) \\ \ddot{\mathcal{C}}_{3d_z} = \dfrac{\dfrac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} - \dfrac{1}{S^2}\left(C\cos\tilde{\alpha} - \cos\tilde{\beta}\right)\left(-\dfrac{C\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} + \dfrac{\sin\tilde{\beta}}{R_\beta}\right)}{\left(1 - \cos^2\tilde{\alpha} - \dfrac{\left(C\cos\tilde{\alpha} - \cos\tilde{\beta}\right)^2}{S^2}\right)^{1/2}} \end{cases} \tag{2.93}$$

Dérivée troisième de la fonction $\mathcal{C}_{3d}$:

$$\begin{cases} \dddot{\mathcal{C}}_{3d_x} = -\dfrac{\cos\tilde{\alpha}}{R_\alpha^2} \\ \dddot{\mathcal{C}}_{3d_y} = \dfrac{1}{S}\left(-\dfrac{C\cos\tilde{\alpha}}{R_\alpha^2} + \dfrac{\cos\tilde{\beta}}{R_\beta^2}\right) \\ \dddot{\mathcal{C}}_{3d_z} = -\dfrac{\left(\frac{\cos\tilde{\alpha}\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} - \frac{1}{S^2}\left(C\cos\tilde{\alpha}-\cos\tilde{\beta}\right)\left(-\frac{C\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} + \frac{\sin\tilde{\beta}}{R_\beta}\right)\right)^2}{\left(1-\cos^2\tilde{\alpha} - \frac{\left(C\cos\tilde{\alpha}-\cos\tilde{\beta}\right)^2}{S^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \qquad + \dfrac{-\frac{\sin^2\tilde{\alpha}}{R_\alpha^2} + \frac{\cos^2\tilde{\alpha}}{R_\alpha^2} - \frac{1}{S^2}\left(-\frac{C\sin\tilde{\alpha}}{R_\alpha} + \frac{\sin\tilde{\beta}}{R_\beta}\right)^2 - \frac{1}{S^2}\left(C\cos\tilde{\alpha}-\cos\tilde{\beta}\right)\left(-\frac{C\cos\tilde{\alpha}}{R_\alpha^2} + \frac{\cos\tilde{\beta}}{R_\beta^2}\right)}{\left(1-\cos^2\tilde{\alpha} - \frac{\left(C\cos\tilde{\alpha}-\cos\tilde{\beta}\right)^2}{S^2}\right)^{1/2}} \end{cases} \tag{2.94}$$

Les courbes $\mathcal{C}_{2d}$ et $\mathcal{C}_{3d}$ étant paramétrées par longueur d'arc, la courbure et la torsion prennent les expressions suivantes à partir des dérivées successives calculées précédemment [24] :

$$\begin{aligned} \kappa &= \|\ddot{\mathcal{C}}_{3d}\| \\ \tau &= \frac{\left(\dot{\mathcal{C}}_{3d} \wedge \ddot{\mathcal{C}}_{3d}\right) \cdot \dddot{\mathcal{C}}_{3d}}{\kappa^2} \end{aligned} \tag{2.95}$$

On illustre le cas de la courbure en traçant les graphiques de trois dForms différents (Fig. 2.42). Ces derniers appartiennent tous trois au groupe diédral D_3, mais diffèrent par leur paramètre α qui prend les valeurs $\alpha_j = \{\pi/2, 2\pi/3, 4\pi/3\}$ avec $j = 1, 2, 3$. Ces trois angles représentent respectivement les cas convexe, limite et non-convexe.

Les graphiques sont exprimés en fonction de l'abscisse curviligne de la courbe de rapiéçage qui prend son origine au point p_0. Afin de pouvoir superposer les trois courbes dans le sens des abscisses, la longueur des arcs $\mathcal{A}_{\alpha_j}$ et $\mathcal{A}_{\beta_j}$ est normalisée : $\ell_{\alpha_j} = \ell_{\beta_j} = 1$. Pour cela, nous considérons dans les formules précédentes la valeur du rayon modifiée $\check{R}_{\alpha_j} = {}^{R_{\alpha_j}}/_{\ell_{\alpha_j}}$. Dans le sens des ordonnées, la valeur affichée de la courbure $\check{\kappa}_j$ est normalisée par le rayon de l'arc $\mathcal{A}_{\alpha_j}$: $\check{\kappa}_j = \kappa_j \cdot \check{R}_{\alpha_j}$.

Ce graphique nous permet de vérifier que la courbure de la courbe de rapiéçage est toujours supérieure à celle du patron de découpe et lui est égale en extrémité des branches (plans de symétrie) : $\check{\kappa}_j \geqslant 1$. On observe également que la discontinuité de courbure présente dans le patron de découpe au niveau de la jonction entre les arcs $\mathcal{A}_{\alpha_j}$ et $\mathcal{A}_{\beta_j}$ est reconduite dans la courbe de rapiéçage au même endroit.

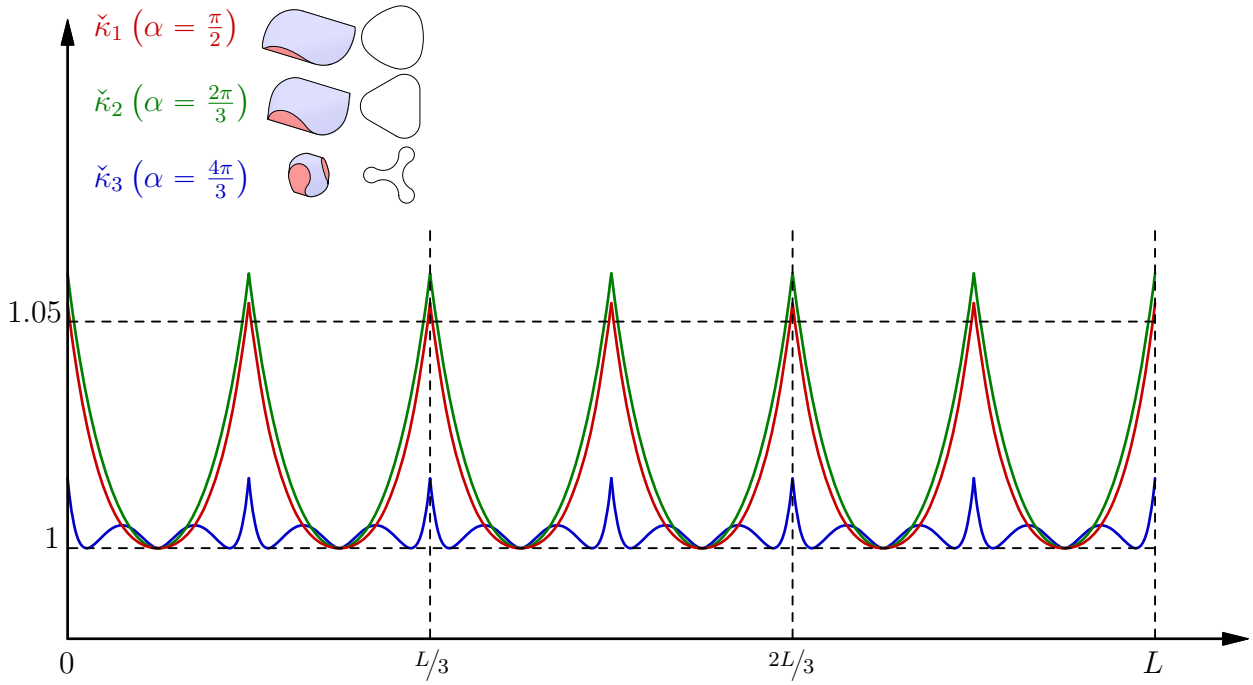


FIGURE 2.42 – Courbure de la courbe de rapiéçage en fonction de la longueur d'arc

2.4.3 dForms à patrons de découpe asymétriques

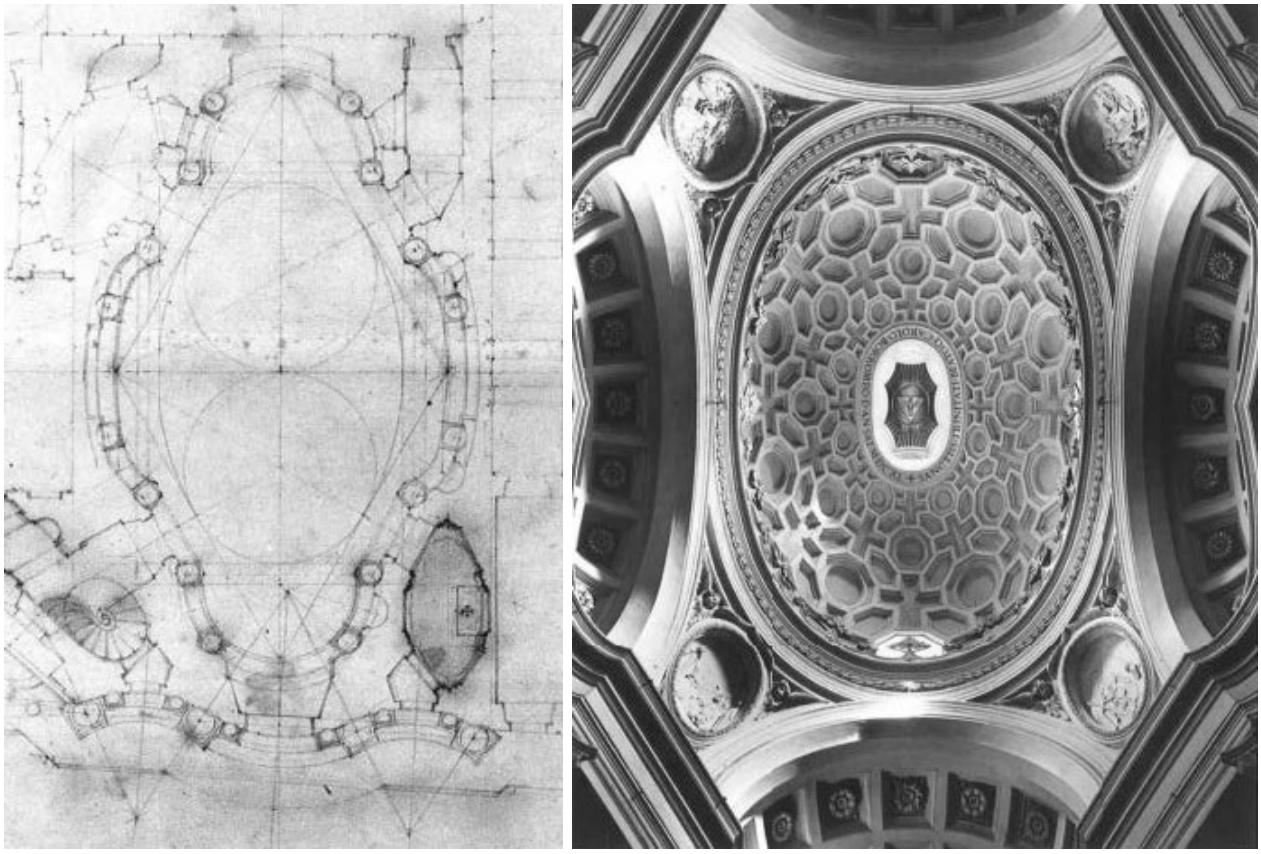
Sans prétendre à une description exhaustive, nous cherchons à identifier des dForms dont la courbe de rapiéçage présente une courbure gaussienne constante sans que ses patrons de découpe ne possèdent de propriétés de symétries particulières. Comme dans la partie précédente, les courbes des patrons sont constituées d'arcs raccordés en tangence, appelées habituellement dans la littérature « Courbes Circulaires par Morceaux » et notées CCM par la suite.

La difficulté principale de cet exercice relève du problème global de satisfaire simultanément la fermeture des deux patrons de découpe et la contrainte de courbure gaussienne constante. Pour cela, nous nous penchons plus avant sur les propriétés de l'évolute des CCM sur laquelle nous allons imposer un certain nombre de contraintes afin d'atteindre le but recherché.

2.4.3.1 Courbes circulaires par morceaux

2.4.3.1.1 Discrétisation constructive

On peut trouver de nombreux exemples historiques de l'utilisation de CCM dans le domaine de la construction [252], le plus célèbre étant celui de l'approximation de l'ellipse par quatre arcs de cercles [253] (Fig. 2.43).

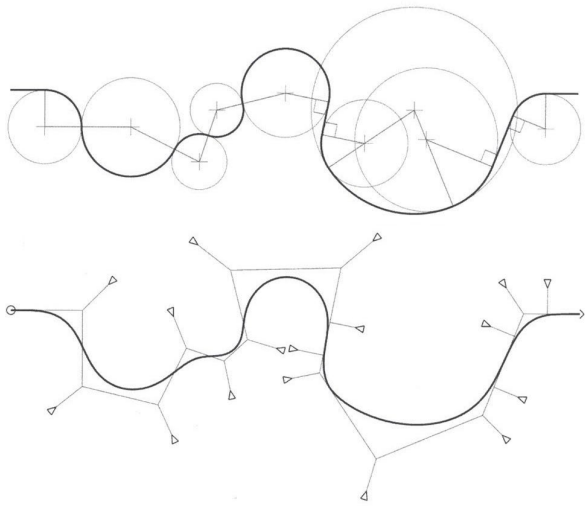


(a) Tracés régulateurs du dôme

(b) Photographie cadrée sur l'ovale central

FIGURE 2.43 – Église Saint-Charles-aux-Quatre-Fontaines [253]
Francesco Borromini (Italie)

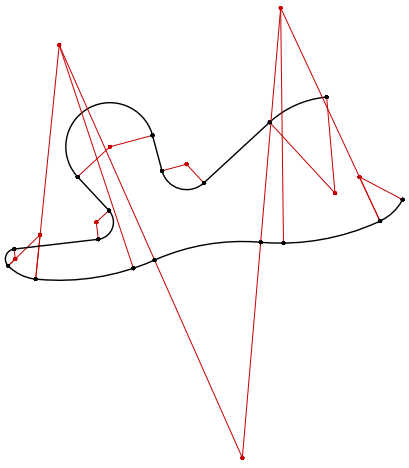
Puis, avec l'avènement de machines à commandes numériques, ce type de courbe a fait l'objet d'une étude plus systématique à partir des années 70, car il permet de réduire la complexité d'objets à courbure continue et de la représenter avec un nombre fini de paramètres [254]. On comprend pourquoi ces courbes sont étudiées pour des raisons constructives puisque le nombre de pièces différentes est réduit et leur fabrication grandement facilitée (taille de pierre identique, cintrage à rayon constant...). Par exemple, les bi-arcs, familles de courbes constituées de deux arcs raccordés en tangence, capables de satisfaire des conditions d'extrémités en position et en tangence, ont été inventés pour la rationalisation géométrique des coques de bateaux [255]. Architectes et designers se sont également emparés du principe des CCM aussi bien pour des raisons théoriques [256] (Fig. 2.44a), formelles et ergonomiques (Fig. 2.44b) ou encore constructives (Fig. 2.44c).



(a) Courbe « baraque » obtenue par géométrie discrète (CCM) et continue (spline)
Greg Lynn [257]



(b) Lampe PizzaKobra
Ron Arad (2007)





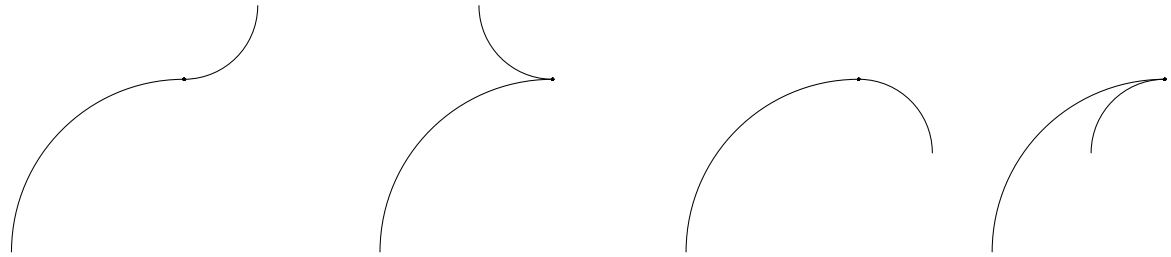
(c) Musée de la Préhistoire de Jeonjok
XTU (Corée du Sud)

FIGURE 2.44 – Quelques courbes circulaires par morceaux en architecture et en design

2.4.3.1.2 Définitions

Les CCM sont définies par un nombre fini d'arc de cercles ou de segments de droite dont les extrémités sont reliées deux à deux (raccord C_0). Les CCM sont dites « lisses » si la tangente orientée à chaque point de raccord est partagée par les deux arcs ou segments qui s'y relient (raccord C_1).

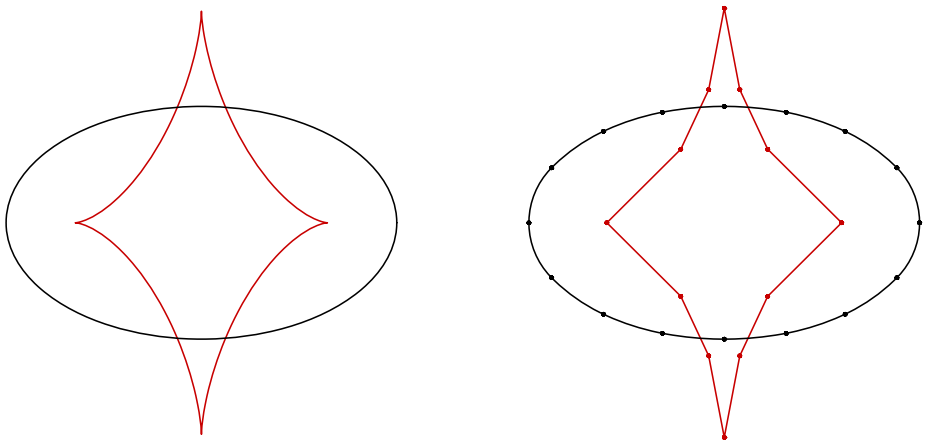
Banchoff et Giblin [258] décrivent dans l'article intitulé « On the geometry of piecewise circular curves » un grand nombre de propriétés caractérisant les CCM. Ils identifient plusieurs typologies en s'appuyant sur le nombre d'arcs en jeu et les quatre types de raccords possibles entre deux arcs consécutifs (Fig. 2.45). Dans le cas des dForms, nous nous intéressons exclusivement aux courbes lisses et excluons *a priori* les raccords avec points de rebroussement de type b et d.



(a) Point d'inflexion (b) Rebroussement de 1re espèce (c) Localement convexe (d) Rebroussement de 2e espèce

FIGURE 2.45 – Les quatre types de jonction entre deux arcs

Les auteurs étendent la définition de l'évolute aux CCM, notion habituellement consacrée aux courbes deux fois dérivables. La courbe évolute est le lieu des centres de courbure d'une courbe plane. Pour une CCM, l'évolute se réduit à une collection de points, séquence des centres des arcs de cercles et définissant l'évolute polygonale de la courbe (Fig. 2.46).



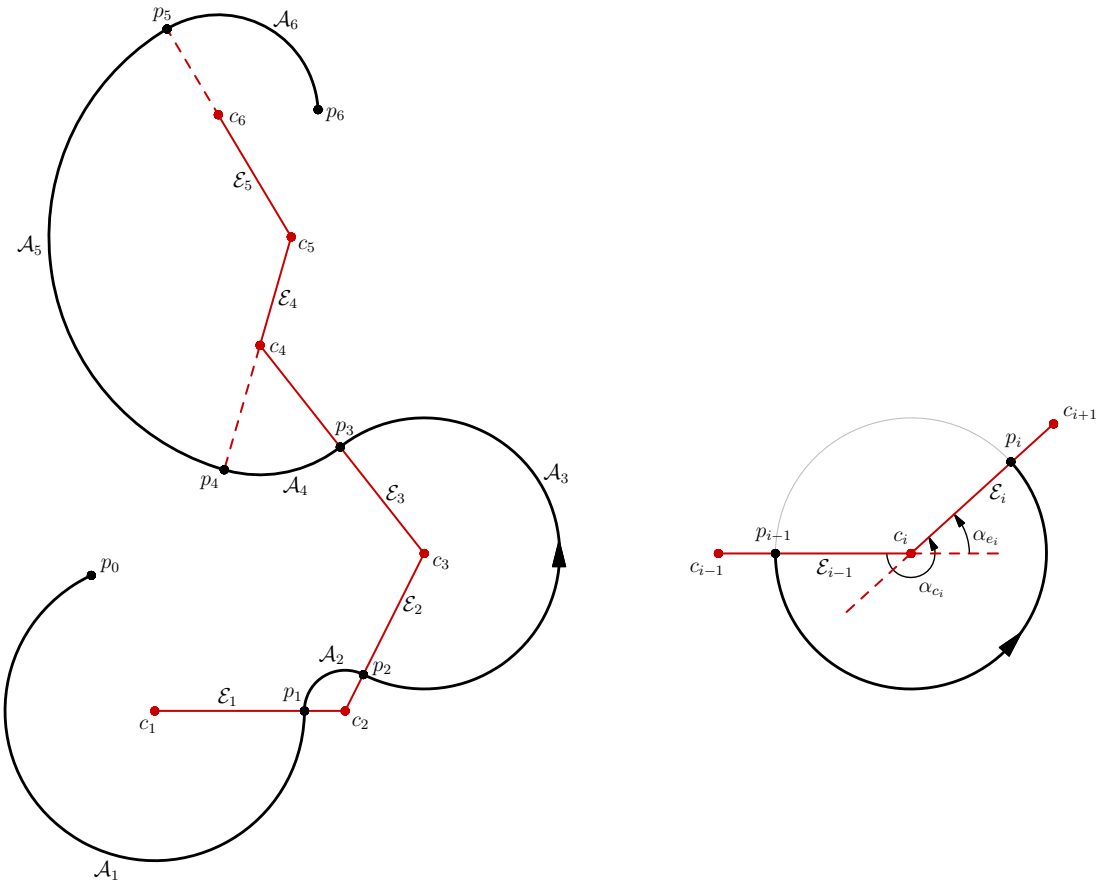
(a) Géométrie lisse (b) Géométrie discrète (16 arcs tangents)

FIGURE 2.46 – Ellipses et évolutes

Définissons quelques notations qualifiant le cas général d'une CCM ouverte.

Soit $\mathcal{C}$ une CCM, constituée de n arcs $\mathcal{A}_i$ numérotés $i \in \{1 \dots n\}$ et de rayons R_i. Les centres des arcs $\mathcal{A}_i$ sont nommés c_i et forment l'évolute polygonale $\mathcal{E}$ de la courbe $\mathcal{C}$. Les arêtes de l'évolute sont appelées $\mathcal{E}_i$ et relient le sommet c_i au sommet c_{i+1}. Les points de raccord en tangence entre les arcs $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{i+1}$ sont appelés p_i.

Sur la figure 2.47a, nous représentons une CCM à $n = 6$ arcs et son évolute. Nous observons les différentes configurations identifiées par Banchoff et Giblin : les points p_1, p_2, et p_3 sont de type « points d'inflection » et les points p_4, et p_5 sont de type « localement convexe ». On remarquera alors que les points d'inflexion se situent à l'intérieur du segment $[c_i c_{i+1}]$, alors que les points localement convexes se situent bien sur la ligne support du segment $[c_i c_{i+1}]$, mais à l'extérieur de celui-ci.



(a) CCM ouverte et évolute associée (b) Relations angulaires

FIGURE 2.47 – Nomenclature des CCM

La condition de tangence entre deux arcs consécutifs implique une relation entre la longueur de l'arête de l'évolute $\mathcal{E}_i$ et les rayons R_i et R_{i+1} des arcs $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}_{i+1}$. Banchoff et Giblin avaient déjà identifié cette relation comme étant « la somme ou la différence des rayons ». Cette indétermination est due à la définition en valeur absolue des longueurs des arêtes de l'évolute ainsi que des rayons des arcs de la CCM et limite la systématisation de l'approche.

Au lieu de cela, nous proposons une définition algébrique des rayons et des longueurs des

arêtes de l'évolute. Après s'être muni d'un sens de parcours de la courbe $\mathcal{C}$ (sens des i croissants), les rayons sont considérés positifs si l'arc est parcouru dans le sens trigonométrique et négatif dans le cas contraire. Alors, il est possible d'affecter une longueur algébrique aux arêtes de l'évolute :

$$\bar{\ell}_{e_i} = R_{i+1} - R_i \tag{2.96}$$

On peut donc déduire du signe de $\bar{\ell}_{e_i}$, que l'on note $s_{\bar{\ell}_{e_i}}$, le sens de variation du rayon de courbure :

$$\begin{aligned} s_{\bar{\ell}_{e_i}} &= 1 \iff R_{i+1} > R_i \\ s_{\bar{\ell}_{e_i}} &= -1 \iff R_{i+1} < R_i \end{aligned} \tag{2.97}$$

On définit également les vecteurs $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{c_i c_{i+1}}$ qui définissent les côtés orientés de l'évolute et ont pour norme $|\overrightarrow{e_i}| = \ell_{e_i}$. Le vecteur unitaire associé est noté $\overrightarrow{\hat{e}_i}$. Sans perte de généralité, c'est-à-dire en empêchant seulement les déplacements, on peut poser :

$$\begin{cases} c_1 = (0,0) \\ \overrightarrow{\hat{e}_1} = \overrightarrow{x} \end{cases} \tag{2.98}$$

Définissons maintenant les angles intervenant dans la construction de la CCM et de son évolute autour du centre de l'arc $\mathcal{A}_i$ (Fig. 2.47b).

L'angle α_{e_i} de l'évolute $\mathcal{E}$ définit l'angle tournant entre les arêtes $\mathcal{E}_{i-1}$ et $\mathcal{E}_i$:

$$\alpha_{e_i} = (\overrightarrow{e_{i-1}}, \overrightarrow{e_i}), \qquad \alpha_{e_i} \in \left]-\pi, \pi\right] \tag{2.99}$$

L'angle α_{c_i} décrit l'angle de l'arc $\mathcal{A}_i$ de la courbe $\mathcal{C}$ et est défini sur l'intervalle $]-2\pi, 2\pi[$, les arcs de cercle pouvant adopter la configuration d'angles nuls à un cercle quasi-complet (les valeurs extrêmes sont exclues) en tournant dans un sens ou dans l'autre. La mesure principale $\tilde{\alpha}_{c_i}$ de l'arc $\mathcal{A}_i$ est donnée par :

$$\tilde{\alpha}_{c_i} = s_{Det(\overrightarrow{\hat{v}_{i-1}}, \overrightarrow{\hat{v}_i}, \overrightarrow{z})} \arccos(\overrightarrow{\hat{v}_{i-1}}, \overrightarrow{\hat{v}_i}), \qquad \tilde{\alpha}_{c_i} \in \left]-\pi, \pi\right] \tag{2.100}$$

avec $\overrightarrow{\hat{v}_{i-1}} = \frac{\overrightarrow{c_i p_{i-1}}}{|\overrightarrow{c_i p_{i-1}}|}$ et $\overrightarrow{\hat{v}_i} = \frac{\overrightarrow{c_i p_i}}{|\overrightarrow{c_i p_i}|}$, vecteurs unitaires dirigés du centre de l'arc c_i vers respectivement les points de raccord en tangence p_{i-1}, p_i. $s_{Det(\overrightarrow{\hat{v}_{i-1}}, \overrightarrow{\hat{v}_i}, \overrightarrow{z})}$ est le signe du déterminant des vecteurs $\overrightarrow{\hat{v}_{i-1}}$, $\overrightarrow{\hat{v}_i}$ et $\overrightarrow{z}$.

On obtient finalement la valeur de l'angle α_{c_i} en affectant la mesure principale au bon intervalle selon le signe du rayon R_i :

$$\begin{aligned} R_i > 0 &\iff \alpha_{c_i} = \tilde{\alpha}_{c_i} \mod 2\pi && \alpha_{c_i} \in [0, 2\pi[\\ R_i < 0 &\iff \alpha_{c_i} = \tilde{\alpha}_{c_i} \mod -2\pi && \alpha_{c_i} \in \left]-2\pi, 0\right] \end{aligned} \tag{2.101}$$

2.4.3.1.3 Relations entre la courbe $\mathcal{C}$ et son évolute polygonale $\mathcal{E}$

Essayons tout d'abord de construire la courbe à partir de l'évolute. Dans ce cas, la séquence des centres c_i est une donnée d'entrée : les longueurs des arêtes ℓ_{e_i} et les angles α_{e_i} peuvent être aisément calculés à partir des coordonnées des centres c_i. Nous avons vu précédemment (Eq. 2.96) que les arêtes de l'évolute et les rayons étaient liés par la relation $\bar{\ell}_{e_i} = R_{i+1} - R_i$. L'ensemble des rayons des arcs $\mathcal{A}_i$ peut donc être déterminé à condition de se donner un rayon (par exemple R_1) et le signe des longueurs de l'évolute ($s_{\bar{\ell}_{e_i}}$) qui peuvent être choisis arbitrairement. On notera que la variation du rayon choisi génère une famille de CCM obtenue par décalage orthogonal (Fig. 2.48).

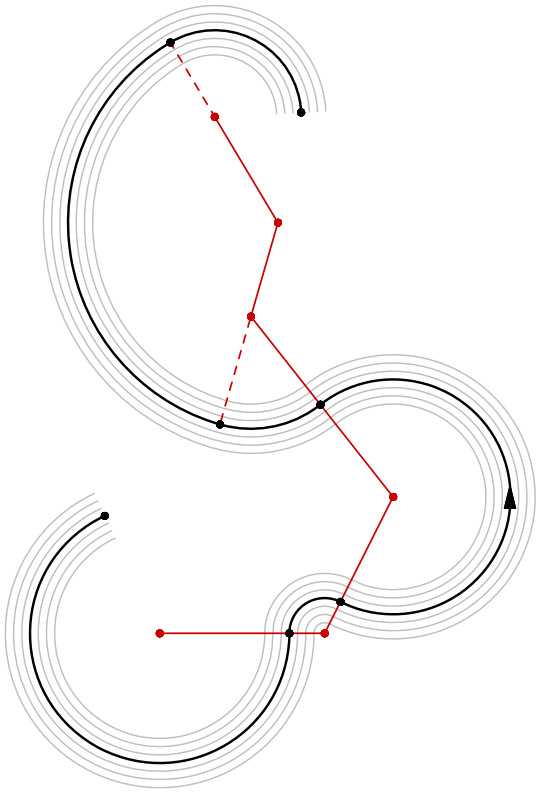


FIGURE 2.48 – Famille de CCM obtenue à partir de décalages orthogonaux

Une fois les rayons définis, il s'agit maintenant de localiser les points de raccord en tangence p_i.

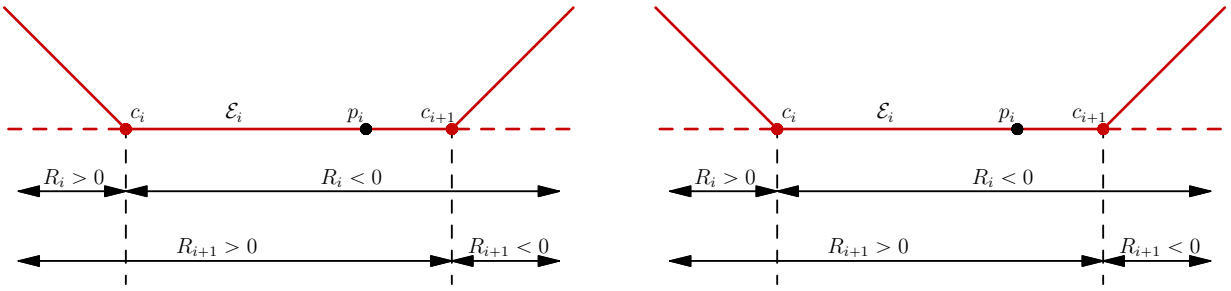
Pour $i \in \{1 \dots n-1\}$, c'est-à-dire à l'exception des deux points d'extrémité, nous avons relevé précédemment que le point p_i appartenait, par construction, à la droite support de l'arête $\mathcal{E}_i$ de l'évolute et pouvait se situer, selon les cas, à l'intérieur du segment délimité par les centres c_i et c_{i+1} ou à l'extérieur. Cette localisation est directement liée aux valeurs relatives de R_i et R_{i+1} (Fig. 2.49) :

$$\begin{aligned} R_i R_{i+1} = \quad 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad p_i \in \quad]c_i, c_{i+1}[\\ R_i R_{i+1} = -1 \quad &\Longleftrightarrow \quad p_i \in \mathcal{E}_i \backslash [c_i, c_{i+1}] \end{aligned} \tag{2.102}$$

Dans le second cas, la localisation du point p_i de part et d'autre du segment $[c_i, c_{i+1}]$ dépend des signes de R_i, R_{i+1} et $\bar{\ell}_{e_i}$. Les différents cas sont synthétisés dans les deux formules

équivalentes suivantes, selon que l'on exprime la position du point p_i en fonction de l'arc $\mathcal{A}_i$ ou $\mathcal{A}_{i+1}$:

$$\begin{aligned} p_i &= c_i - s_{\bar{\ell}_{e_i}} R_i \overrightarrow{\hat{e}_i} \\ p_i &= c_{i+1} - s_{\bar{\ell}_{e_i}} R_{i+1} \overrightarrow{\hat{e}_i} \end{aligned} \tag{2.103}$$



(a) $s_{\bar{\ell}_{e_i}} = 1$ (b) $s_{\bar{\ell}_{e_i}} = -1$

FIGURE 2.49 – Localisation du point p_i

Pour $i = \{0, n\}$, c'est-à-dire pour les extrémités de la CCM, les points p_0 et p_n peuvent être librement disposés respectivement sur les cercles de centre c_1 et c_n :

$$\begin{aligned} p_0 &= \mathcal{R}_{c_1, -\alpha_{c_1}}(p_1) \\ p_n &= \mathcal{R}_{c_n, +\alpha_{c_n}}(p_{n-1}) \end{aligned} \tag{2.104}$$

avec $\mathcal{R}_{c,\alpha}(p)$, image du point p par la rotation de centre c et d'angle α.

Enfin, il nous reste à établir la relation liant l'angle α_{c_i} de l'arc $\mathcal{A}_i$ à l'angle α_{e_i} de l'évolute. Par une étude de cas systématique (Tab. 2.4), on constate que les deux angles sont égaux modulo π.

Cette relation est à préciser selon la position des points p_{i-1} et p_i sur les arêtes $\mathcal{E}_{i-1}$ et $\mathcal{E}_i$. En synthèse, la relation s'écrit :

$$\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + \eta_i \pi \tag{2.105}$$

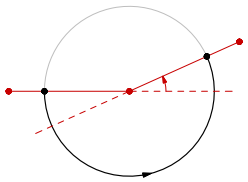
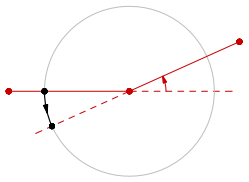
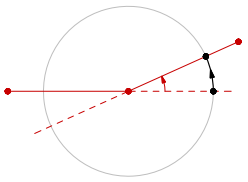
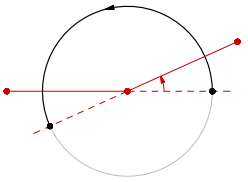
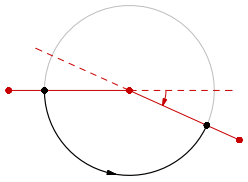
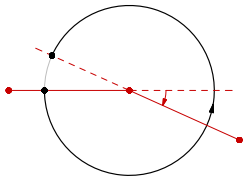
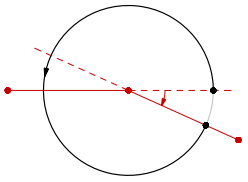
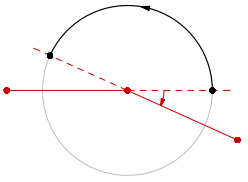
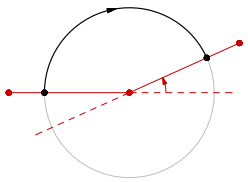
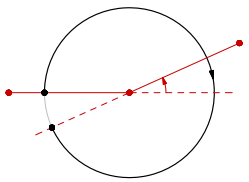
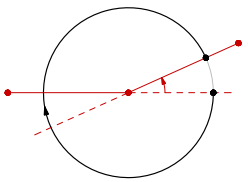
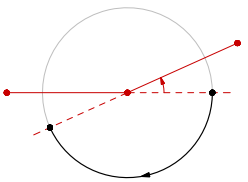
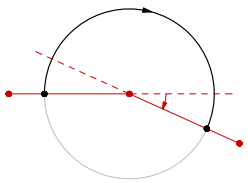
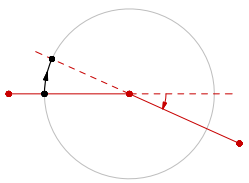
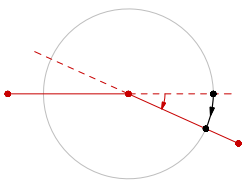
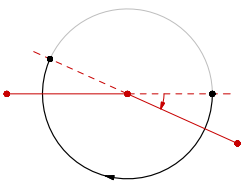
avec les valeurs de η_i selon les cas :

	$s_{\bar{\ell}_{e_{i-1}}} s_{\bar{\ell}_{e_i}} = -1$		$s_{\bar{\ell}_{e_{i-1}}} s_{\bar{\ell}_{e_i}} = 1$			
	$R_i > 0$	$R_i < 0$	$R_i > 0$		$R_i < 0$	
α_{e_i}	$[-\pi, \pi[$	$[-\pi, \pi[$	$[0, \pi[$	$[-\pi, 0[$	$[0, \pi[$	$[-\pi, 0[$
α_{c_i}	$[0, 2\pi[$	$[-2\pi, 0[$	$[0, \pi[$	$[\pi, 2\pi[$	$[-2\pi, -\pi[$	$[-\pi, 0[$
η_i	-1	$+1$	0	-2	$+2$	0

A noter que la séquence des points c_i peut être reconstruite à partir de la connaissance des longueurs des arêtes ℓ_{e_i} et angles α_{e_i} de l'évolute, avec la condition initiale sur le premier vecteur décrite à l'équation 2.98 qui implique également que l'angle initial est nul $\alpha_{e_1} = 0$:

$$c_i = c_{i-1} + \overrightarrow{c_{i-1}c_i} = c_{i-1} + \begin{vmatrix} \ell_{e_i} \cos \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{e_j} \\ \ell_{e_i} \sin \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{e_j} \end{vmatrix} \tag{2.106}$$

TABLE 2.4 – Etude de cas de la relation entre les angles α_{e_i} et α_{c_i} : étude de cas

	$l_{e_{i-1}} > 0$ $l_{e_i} < 0$	$l_{e_{i-1}} > 0$ $l_{e_i} > 0$	$l_{e_{i-1}} < 0$ $l_{e_i} < 0$	$l_{e_{i-1}} < 0$ $l_{e_i} > 0$
$R_i > 0$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [\pi, 2\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - \pi$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i}$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i}$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [\pi, 2\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - \pi$
	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - \pi$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [\pi, 2\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - 2\pi$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [\pi, 2\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - 2\pi$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} - \pi$
$R_i < 0$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + \pi$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [-2\pi, -\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + 2\pi$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [-2\pi, -\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + 2\pi$	$\alpha_{e_i} \in [0, \pi[$ $\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + \pi$
	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [-2\pi, -\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + \pi$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i}$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i}$	$\alpha_{e_i} \in [-\pi, 0[$ $\alpha_{e_i} \in [-2\pi, -\pi[$  $\alpha_{e_i} = \alpha_{c_i} + \pi$

2.4.3.1.4 Conditions de fermeture

Les patrons de découpe des dForms que nous étudions sont définis par des CCM fermées. Nous avons vu que les conditions de symétries des formes explorées dans la partie précédente facilitait grandement la génération de courbes satisfaisant la condition de fermeture. Dans le cas de formes asymétriques, la formulation est plus complexe du fait de la nature globale du problème. Cette question fait même l'objet de casse-têtes célèbres comme le jeu de Tantrix® [259–261] où le vainqueur est celui qui parvient à construire la plus longue courbe constituée de deux types d'arcs et de segments droits (Fig. 2.50). Si la courbe est fermée, elle est gratifiée du double de points... ce qui n'est pas cher payé étant donné la difficulté du problème !

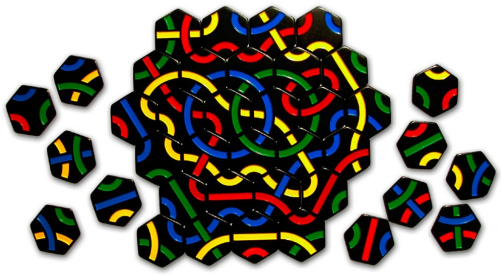


FIGURE 2.50 – Jeu de Tantrix®

Banchoff et Giblin traitent également de la question de la fermeture des CCM dans leur article. Cependant, les auteurs se limitent à des courbes ne comportant que quatre arcs et les conditions fournies ne sont pas univoques du fait de la définition en valeur absolue des rayons de courbure de la CCM et des longueurs des arêtes de l'évolute. Avec la définition algébrique que nous proposons, nous sommes en mesure d'identifier des conditions nécessaires et suffisantes de fermeture pour des CCM comportant un nombre quelconque d'arcs.

Nous reprenons la notation adoptée au paragraphe précédent. Cependant, la CCM étant fermée, on considère une notation modulaire à n indices, si bien que $c_{n+1} = c_1$ (Fig. 2.51).

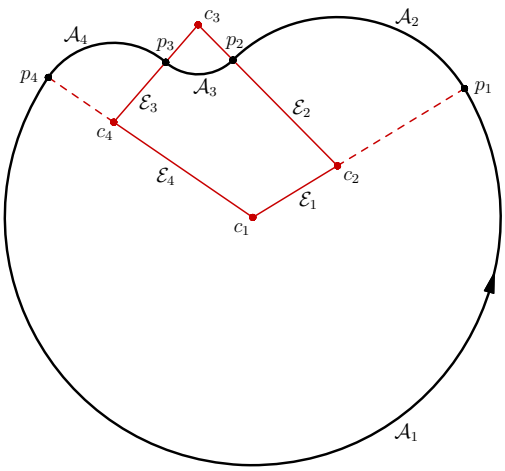
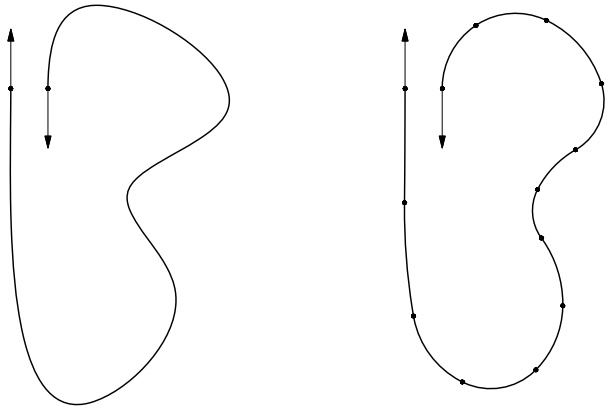


FIGURE 2.51 – Nomenclature CCM fermée

La fermeture de la CCM implique que les points p_0 et p_n appartiennent au même côté $\mathcal{E}_1$ de l'évolute : les extrémités des arcs $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_n$ possèdent alors une direction de tangence identique. Il s'agit de la première condition nécessaire, mais non suffisante de la fermeture d'une CCM : une CCM fermée possède une évolute fermée. Cet énoncé correspond, dans le cas d'une courbe lisse d'indice $\mathcal{N}$ à la condition de fermeture nécessaire, mais non suffisante : $\int \kappa \, ds = 2\pi\mathcal{N}$. En figure 2.52, sont représentées une courbe lisse et une CCM répondant à cette première condition sans pour autant être fermée.



(a) Courbe lisse (b) CCM

FIGURE 2.52 – $\int \kappa \, ds = 2\pi\mathcal{N}$: condition nécessaire, mais non suffisante de fermeture

Pour que la CCM soit fermée, il est nécessaire que les points p_0 et p_n fusionnent en un point unique. Alors, la longueur algébrique de l'arête $\mathcal{E}_1$ de l'évolute est égale à la différence des rayons algébriques des arcs $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_n$:

$$\bar{\ell}_{e_1} = R_1 - R_n \tag{2.107}$$

En combinant les équations 2.96 et 2.107, on obtient la somme télescopique nulle des longueurs algébriques de l'évolute, qui constitue la seconde condition de fermeture.

Les deux conditions de fermeture d'une CCM sont résumées par la formulation suivante :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} & \text{(2.108a)} \\ \sum_{i=1}^{n} \bar{\ell}_{e_i} = 0 & \text{(2.108b)} \end{cases}$$

2.4.3.2 Génération de solutions par flot

Imaginons-nous dans un espace à n dimensions peuplé de dForms aux morphologies les plus diverses, souvent même invalides aux patrons de découpe ouverts. Comment trouver parmi ceux-ci quelques (et non tous) dForms à courbure gaussienne constante ? Il nous faut d'abord en trouver un, qui sera le point de départ de notre exploration dans l'espace à n dimensions. Ensuite, par déformation continue, nous construirons un chemin parmi les possibles dont le tracé est guidé, à chaque pas, par les conditions de fermeture et de courbure gaussienne constante établies précédemment.

2.4.3.2.1 Principes et hypothèses

Le processus de génération de familles de solutions de dForms asymétriques à courbure gaussienne constante se réalise en deux étapes. Tout d'abord, une solution initiale est générée ; elle doit répondre à la fois à la contrainte de courbure gaussienne constante et aux contraintes de fermeture des courbes définissant les deux patrons de découpe. Nous verrons dans le paragraphe 2.4.3.2.2 deux stratégies différentes pour générer une telle solution. Ensuite, un flot géométrique qui respecte toutes les contraintes énoncées est appliqué aux courbes des patrons pour générer des familles de dForms à partir de la solution initiale. La formulation du flot développé est détaillée au paragraphe 2.4.3.2.3.

La courbure gaussienne d'une surface développable par morceaux sans sommet s'exprime directement en fonction de la courbure géodésique des bords de chaque face, c'est-à-dire de la courbure signée des bords des patrons de découpe (Eq. 2.64). En revanche, la contrainte de fermeture d'une CCM s'exprime sur son évolute associée. Il est donc nécessaire, dans la démarche à venir, de décrire précisément les courbes et évolutes des deux patrons de découpe, ainsi que les relations qui les lient.

On appelle courbe et évolute primales les éléments relatifs au premier patron de découpe ainsi que courbe et évolute duales ceux relatifs au second patron de découpe. On peut dire en effet qu'il existe une relation de dualité entre les deux patrons, car il est possible de déduire l'un de l'autre et inversement de façon univoque grâce à la contrainte de courbure gaussienne constante.

Pour la courbe $\mathcal{C}$ et l'évolute $\mathcal{E}$ primales, nous utilisons les mêmes notations que celles utilisées précédemment. Les courbe et évolute duales sont notées respectivement $\mathcal{C}'$, $\mathcal{E}'$ et l'arc $\mathcal{A}'_i(\alpha'_{c_i}, R'_i, \ell'_{c_i})$ de la courbe duale correspond, après assemblage du dForm, à l'arc $\mathcal{A}_i(\alpha_{c_i}, R_i, \ell_{c_i})$ de la courbe primale. De même, l'évolute duale adopte les notations de l'évolute primale augmentées du symbole prime.

Nous rappelons qu'il est nécessaire, dans le cas des dForms qui nous intéresse ici, que les deux patrons de découpe prennent la forme de deux disques topologiques. On se place donc dans le cas où les indices des courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, ainsi que leurs évolutes associées $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont égaux à 1 :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_{c_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha'_{e_i} = 2\pi \tag{2.109}$$

Examinons maintenant les contraintes à satisfaire et les relations entre courbes primales et duales qui en résultent.

D'après la formule de Gauss-Bonnet, la courbure gaussienne totale pour un dForm homéomorphe à la sphère ($\chi = 2$) est égale à $K(\sigma) = 4\pi$. Or la courbure gaussienne est constante et intégralement contenue dans l'unique courbe de rapiéçage. En posant $L = \sum_{i=1}^{n} \ell_{c_i}$, on définit la courbure gaussienne par unité de longueur :

$$K = \frac{4\pi}{L} \tag{2.110}$$

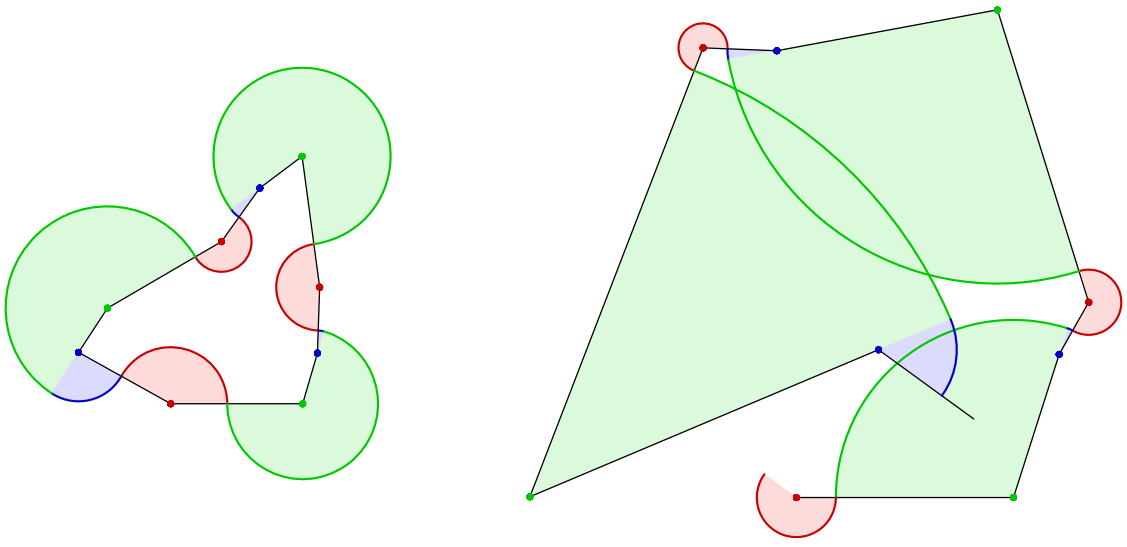
De plus, d'après l'équation 2.64, la courbure gaussienne vaut $K = \kappa_i + \kappa'_i$, avec κ_i et κ'_i, la courbure des arcs $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}'_i$. Alors l'arc $\mathcal{A}'_i$ est entièrement défini à partir de $\mathcal{A}_i$ et de la contrainte de courbure gaussienne constante :

$$\begin{cases} \ell'_{c_i} &= \ell_{c_i} & (2.111) \\ R'_i &= \dfrac{1}{K - \kappa_i} & (2.112) \\ \alpha'_{c_i} &= \alpha_{c_i} \left(\dfrac{K}{\kappa_i} - 1 \right) & (2.113) \end{cases}$$

Regardons maintenant les conditions de fermeture à réaliser pour les deux courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. Pour la courbe primale $\mathcal{C}$, nous avons établi (Eq. 2.108a et 2.108b) qu'il s'agit d'une double condition portant sur l'évolute associée. Pour la courbe duale $\mathcal{C}'$, seule la fermeture vectorielle est à considérer (Eq. 2.108a). En effet, la seconde condition est réalisée *a priori* dans la relation imposée par la contrainte de courbure gaussienne constante (Eq. 2.112) :

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\ell}'_{e_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(R'_{i+1} - R'_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{K - \kappa_{i+1}} - \frac{1}{K - \kappa_i} \right) = -\sum_{i=1}^{n} \left(R_{i+1} - R_i \right) = 0 \qquad (2.114)$$

La figure 2.53 illustre la construction d'une courbe duale à partir d'une courbe primale quelconque. On observe bien le respect de la seconde condition (annulation des longueurs orientées ou fermeture des angles) : les arcs d'extrémité possèdent une direction de tangente commune. En revanche, la première condition (fermeture vectorielle de l'évolute) reste à réaliser.



(a) Courbe et évolute primales (b) Courbe et évolute duales

FIGURE 2.53 – Conditions de fermeture duales non respectées pour une courbe primale quelconque

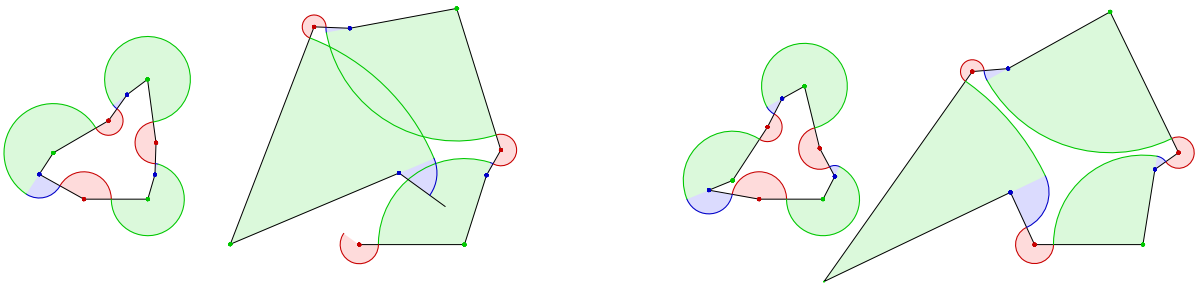
2.4.3.2.2 Initialisation

Nous proposons deux types d'initialisation comme préalable à la génération de familles de dForms à courbure gaussienne constante. Les deux modalités seront mobilisées dans le paragraphe suivant pour initier la procédure du flot géométrique.

Le premier type d'initialisation consiste à générer la courbe primale $\mathcal{C}$ du premier patron de découpe à partir d'une courbe fermée approximée par une série de bi-arcs [254]. Cette technique garantit un raccord en position et tangence entre les n arcs $\mathcal{A}_i(\alpha_{c_i}, R_i, \ell_{c_i})$. Les arcs $\mathcal{A}'_i(\alpha'_{c_i}, R'_i, \ell'_{c_i})$ de la courbe duale sont calculés à partir des paramètres de $\mathcal{A}_i$ et de la contrainte de courbure gaussienne constante, comme exposé dans le paragraphe précédent.

Dans le cas général, la concaténation des arcs $\mathcal{A}'_i$ forme une courbe $\mathcal{C}'$ ouverte (Fig. 2.54a). En procédant à une optimisation portant sur les contraintes de fermeture (Eq. 2.108a et 2.108b), il est possible de générer la solution initiale recherchée (Fig. 2.54b). Plus précisément, nous choisissons les longueurs signées $\bar{\ell}_{e_i}$ de l'évolute primale de telle façon que tous les rayons soient connus et la condition 2.108b respectée. Le problème est donc défini uniquement par les n angles α_{e_i} de l'évolute primale. D'autre part, nous avons vu que la condition 2.108b est systématiquement respectée sous contrainte de courbure gaussienne constante. Le problème d'optimisation peut donc se formuler ainsi, en combinant dans un objectif unique les deux normes des fermetures vectorielles des évolutes primales et duales :

$$\min_{\alpha_{e_i}} \left| \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} \right| + \left| \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e'_i} \right| \tag{2.115}$$



(a) Configuration initiale (b) Configuration finale

FIGURE 2.54 – Optimisation pour la fermeture des courbes primale et duale

Le second type d'initialisation proposé consiste à obtenir directement une solution présentant des courbes primales et duales fermées. Cette proposition généralise les recherches menées en partie 2.4.2 où des courbes primales appartenant au groupe diédral D_N générait systématiquement des courbes duales fermées. Nous montrons ici que toute courbe primale appartenant au groupe cyclique C_N est couplée avec une courbe duale fermée.

Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ une CCM et son évolute associée appartenant au groupe cyclique C_N. La courbe $\mathcal{C}$ est constituée de $Nk = n$ arcs $\mathcal{A}_i$. L'évolute primale est composée également de n points. Il s'agit de montrer que la condition 2.108a est respectée, la seconde l'étant systématiquement par construction.

Selon les conditions locales décrites par les équations 2.111 à 2.113, il est clair que la courbe duale $\mathcal{C}'$ et son évolute associée $\mathcal{E}'$ héritent du groupe de symétrie de la courbe primale. Alors, quelque soit $i \in \{1 \dots n\}$:

$$\begin{cases} \alpha'_{e_{i+k}} &= \alpha'_{e_i} & (2.116) \\ \bar{\ell}'_{e_i+k} &= \bar{\ell}_{e_i} & (2.117) \end{cases}$$

On définit la courbe polygonale $\check{\mathcal{E}}'$ dont chacun des N côtés résulte de la somme vectorielle de k côtés de l'évolute duale $\mathcal{E}'$: $\overrightarrow{\check{e}'_i} = \sum_{j=1+k(i-1)}^{ik} \overrightarrow{e'_j}$ (Fig. 2.55). Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e'_i} = \overrightarrow{0}$ est alors équivalent à montrer que $\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\check{e}'_i} = \overrightarrow{0}$. Pour cela, nous montrons que les vecteurs $\overrightarrow{\check{e}'_i}$ décrivent les côtés d'un polygone régulier de N côtés.

Des équations 2.116 et 2.117, on peut déduire que tous les vecteurs $\overrightarrow{\check{e}'_i}$ ont même norme. De plus, par construction, l'angle $\left(\overrightarrow{\check{e}'_i}, \overrightarrow{\check{e}'_{i+1}}\right) = \left(\overrightarrow{e'_i}, \overrightarrow{e'_{i+k}}\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha'_{e_i}$. Or $\sum_{i=1}^{n} \alpha'_{e_i} = \sum_{i=1}^{k} N\alpha'_{e_i} = 2\pi$ donc l'angle $\left(\overrightarrow{\check{e}'_i}, \overrightarrow{\check{e}'_{i+1}}\right) = \frac{2\pi}{N}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{\check{e}'_i}$ décrivent bien les côtés d'un polygone régulier à N côtés ; les conditions de fermeture de la courbe duale $\mathcal{C}'$ sont donc satisfaites pour toute courbe $\mathcal{C}$ appartenant au groupe cyclique C_N.

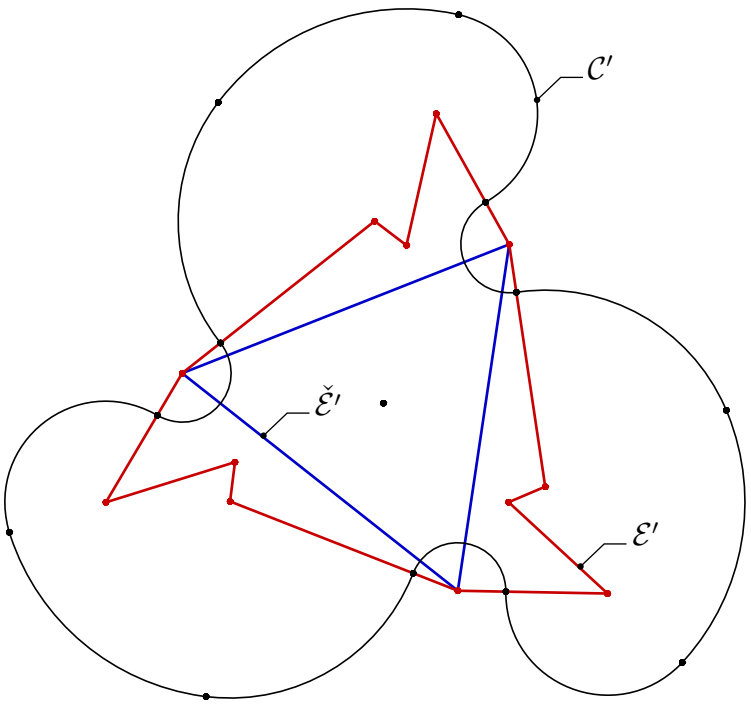


FIGURE 2.55 – CCM et évolute fermées appartenant au groupe cyclique C_N

2.4.3.2.3 Flot géométrique à courbure gaussienne constante

La formulation des conditions de fermeture des CCM indique qu'elle dépend uniquement de la relation entre les longueurs signées de l'évolute (Eq. 2.108b), c'est-à-dire de la différence des rayons des arcs adjacents, à condition que l'évolute reste fermée (Eq. 2.108a). Ces conditions sont donc indépendantes des angles tournants de l'évolute. Cela signifie que la fermeture de la courbe $\mathcal{C}$ demeure garantie, même si l'évolute est déformée librement, du moment que les longueurs signées des arêtes de celle-ci sont conservées.

On peut se représenter le tandem constitué de la courbe circulaire par morceaux et son évolute associée comme un système mécanique composé d'un ensemble de barres rigides articulées ayant pour axes les côtés de l'évolute et dont les points de jonction sont les centres des arcs. Ces arcs appartiennent donc à des disques qui « roulent » les uns sur les autres, tels des engrenages, lors de la déformation du système à barres. La courbe peut être vue comme un élastique s'enroulant autour des disques. Nous choisissons le mot élastique plutôt que chaîne, car, bien que la longueur de l'évolute soit constante au cours du temps, celle de la courbe $\mathcal{C}$ varie avec la déformation de l'évolute.

La figure 2.56 montre plusieurs configurations d'une évolute déformée, aux longueurs d'arêtes constantes, et de la courbe associée. La première image montre un cas singulier, déjà identifié par Banchoff et Giblin. Il s'agit de la CCM possédant une évolute dégénérée, c'est-à-dire ayant tous les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ colinéaires à $\overrightarrow{x}$. On souligne que toute évolute dégénérée possède une CCM associée fermée. Pour cela, il suffit de poser $\bar{\ell}_{e_i} = \overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{x}$ et la première condition de fermeture impliquera nécessairement la seconde.

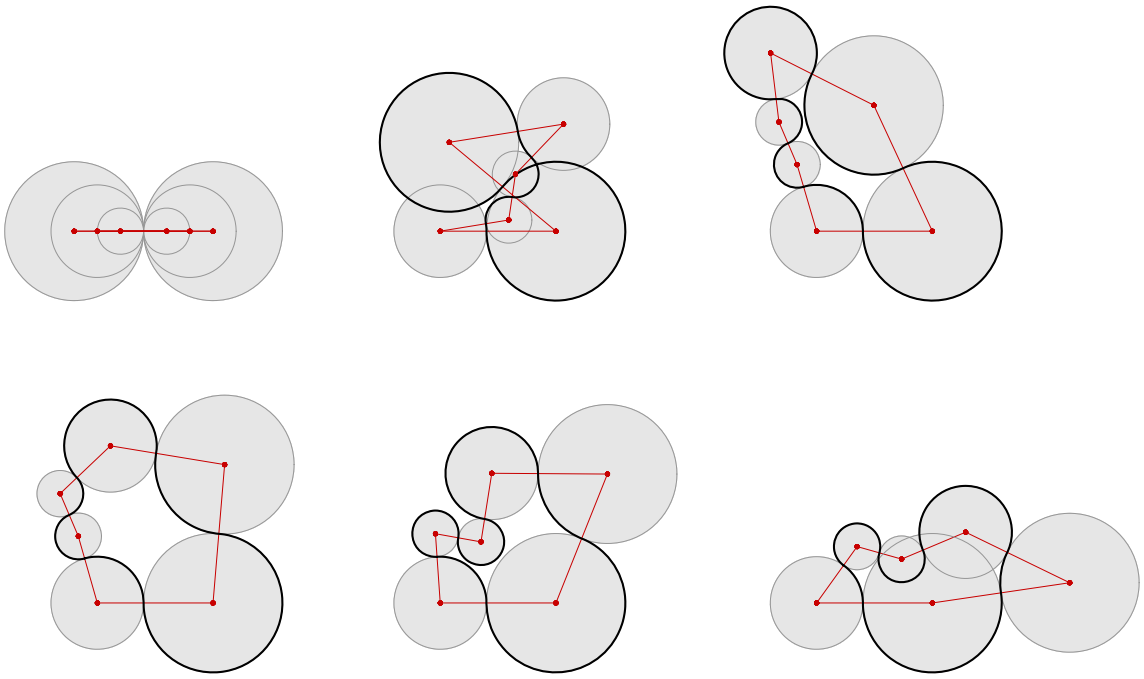


FIGURE 2.56 – Flot isométrique de l'évolute préservant la fermeture de la CCM associée

Le type de déformation de l'évolute décrit ci-dessus est obtenu par l'application d'un flot géométrique isométrique qui conserve, au cours du temps, la longueur de la courbe et sa fermeture, tout en modifiant sa géométrie.

Pour les courbes planes, la notion de flot, et en particulier le flot par la courbure, apparaissant dans de nombreux champs d'application (transition de phase, traitement d'image, lissage...), a fait l'objet d'études approfondies au cours des dernières décennie [262–264]. L'équation d'évolution est en général de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(u,t) & = -f(\kappa(u,t))\overrightarrow{n}(u,t) \\ \gamma(u,0) & = \gamma_0(u) \end{cases} \tag{2.118}$$

avec $\gamma_0(u) \subset \mathbb{R}^2$ une courbe lisse fermée paramétrée par $u \in \mathrm{S}^1$ et $\gamma(u,t) : \mathrm{S}^1 \times [0,T) \to \mathbb{R}^2$ est une famille de courbes se déplaçant en direction de la normale intérieure $-\overrightarrow{n}(u,t)$ selon la fonction vitesse $f(\kappa(u,t))$, elle-même dépendant de la courbure $\kappa(u,t)$ de $\gamma(u,t)$.

Les contraintes relatives à la conservation de la longueur et de la fermeture sont décrites par Crane *et al.* [265] pour une courbe lisse :

$$\langle \dot{\kappa}, \gamma_x \rangle = \langle \dot{\kappa}, \gamma_y \rangle = \langle \dot{\kappa}, \mathbb{1} \rangle = 0 \tag{2.119}$$

avec $\langle , \rangle$, produit scalaire de deux vecteurs, $\dot{\kappa} = \frac{d\kappa}{dt}$, dérivée de la courbure signée par rapport au temps et γ_x, γ_y, coordonnées de la fonction γ.

Nous montrons par la suite que des relations équivalentes existent pour une courbe polygonale $\mathcal{E}$ fermée à laquelle on applique un flot isométrique.

De la même façon que précédemment, la courbe $\mathcal{E}$ est définie par ses n sommets c_i. En découlent les arêtes orientées $\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{c_i c_{i+1}}$, les longueurs $\ell_i = |\overrightarrow{e_i}|$ et les angles tournants $\alpha_i = (\overrightarrow{e_{i-1}}, \overrightarrow{e_i})$. On note $\overrightarrow{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, le vecteur ayant pour composantes les vecteurs α_i (Fig. 2.57).

La condition de fermeture est exprimée au moyen des deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i & = & 2\pi\mathcal{N} & \text{(2.120a)} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i} & = & \overrightarrow{0} & \text{(2.120b)} \end{cases}$$

La première condition est nécessaire pour fixer l'indice $\mathcal{N}$ de la courbe. Par la suite, nous nous plaçons dans la situation où $\mathcal{N} = 1$. La seconde exprime la fermeture vectorielle.

Le flot étant de nature isométrique, les longueurs ℓ_i sont invariables au cours du temps. Les angles α_i sont donc les variables du problème et si nous fixons les angles α_i, alors la courbe $\mathcal{E}$ est donnée à une translation et une rotation près. Comme précédemment, on pose :

$$\begin{cases} c_1 = (0,0) \\ \overrightarrow{\hat{e}_1} = \overrightarrow{x} \end{cases} \tag{2.121}$$

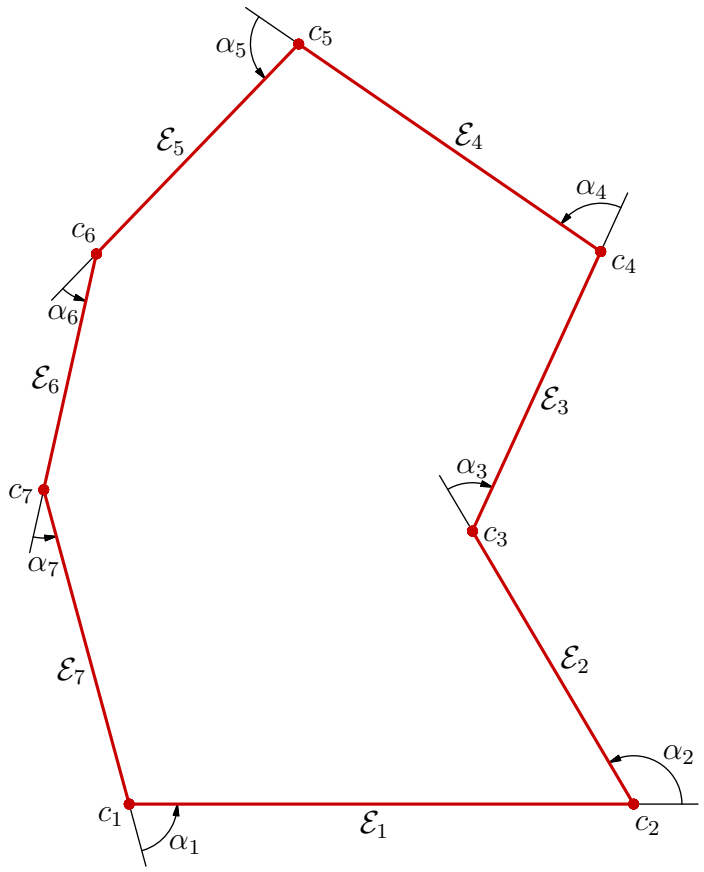


FIGURE 2.57 – Nomenclature pour une courbe polygonale fermée soumise au flot isométrique

Les vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ sont exprimés en fonction du vecteur $\overrightarrow{e_1}$ et des angles tournants α_i :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{e_1} &= \overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_2} &= \frac{\ell_2}{\ell_1}\mathcal{R}_{\alpha_2}\overrightarrow{e_1} \\
\overrightarrow{e_3} &= \frac{\ell_3}{\ell_2}\mathcal{R}_{\alpha_3}\overrightarrow{e_2} = \frac{\ell_3}{\ell_1}\mathcal{R}_{\alpha_2+\alpha_3}\overrightarrow{e_1} \\
&\vdots \\
\overrightarrow{e_i} &= \frac{\ell_i}{\ell_1}\mathcal{R}_{\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_i}\overrightarrow{e_1} = \frac{\ell_i}{\ell_1}\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{i}\alpha_k}\overrightarrow{e_1}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

avec $\mathcal{R}_\alpha\overrightarrow{e}$, rotation d'angle α du vecteur $\overrightarrow{e}$ et $\mathcal{R}_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

On procède maintenant à la déformation de la ligne polygonale en préservant les longueurs ℓ_i et la période. On note $\overrightarrow{E}$, la somme vectorielle des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$. Celle-ci doit demeurer nulle au cours du temps, ce qui implique que sa dérivée est nulle également :

$$\forall t \in [0,T), \qquad \sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{E}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{e_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dt}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \tag{2.123}$$

La dérivée par rapport au temps de chaque vecteur $\overrightarrow{e_i}$ vaut :

$$\begin{aligned}
\frac{d\overrightarrow{e_1}}{dt} &= \overrightarrow{0} \\
\frac{d\overrightarrow{e_2}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\ell_2}{\ell_1}\mathcal{R}_{\alpha_2}\overrightarrow{e_1}\right) = \frac{\ell_2}{\ell_1}\frac{d}{dt}\left(\mathcal{R}_{\alpha_2}\right)\overrightarrow{e_1} = \frac{\ell_2}{\ell_1}\dot{\alpha}_2\begin{pmatrix} -\sin\alpha_2 & -\cos\alpha_2 \\ \cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 \end{pmatrix}\overrightarrow{e_1} = \frac{\ell_2}{\ell_1}\dot{\alpha}_2\mathcal{R}_{\alpha_2+\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_1} \\
\frac{d\overrightarrow{e_3}}{dt} &= \frac{\ell_3}{\ell_1}(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3)\mathcal{R}_{\alpha_2+\alpha_3+\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_1} \\
&\vdots \\
\frac{d\overrightarrow{e_i}}{dt} &= \frac{\ell_i}{\ell_1}(\dot{\alpha}_2+\dot{\alpha}_3+\cdots+\dot{\alpha}_i)\mathcal{R}_{\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_i+\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_1} = \frac{\ell_i}{\ell_1}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{i}\alpha_k+\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_1}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

En sommant l'ensemble des dérivées des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$, on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{E}}{dt} = \sum_{i=2}^{n}\frac{\ell_i}{\ell_1}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{i}\alpha_k+\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{0} \tag{2.125}$$

En introduisant dans la formule précédente l'expression de $\overrightarrow{e_i} = \frac{\ell_i}{\ell_1}\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{i}\alpha_k}\overrightarrow{e_1}$:

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \tag{2.126}$$

Or :

$$\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}\mathcal{R}_{\frac{\pi}{2}}\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \tag{2.127}$$

Donc l'expression 2.126 est équivalente à :

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)\overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} \tag{2.128}$$

Le vecteur $\overrightarrow{e_i}$ est décomposé en la différence de deux vecteurs positions : $\overrightarrow{e_i} = c_{i+1} - c_i$

$$\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)c_{i+1} - \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)c_i = \overrightarrow{0} \tag{2.129}$$

Par un décalage d'indice de la première partie de l'expression on obtient :

$$\sum_{i=3}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i-1}\dot{\alpha}_k\right)c_i - \sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{k=2}^{i}\dot{\alpha}_k\right)c_i = \overrightarrow{0} \tag{2.130}$$

Puis, en effectuant la différence, seuls les termes suivants restent :

$$\sum_{i=2}^{n}\dot{\alpha}_i c_{n+1} - \dot{\alpha}_2 c_2 - \sum_{i=3}^{n}\dot{\alpha}_i c_i = \overrightarrow{0} \tag{2.131}$$

Or $\sum_{i=2}^{n} \dot{\alpha}_1 = -\dot{\alpha}_i$ et $c_{n+1} = c_1$, donc on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i c_i = \overrightarrow{0} \tag{2.132}$$

D'autre part, la dérivation de la condition de fermeture de l'équation 2.120a donne :

$$\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i = 0 \tag{2.133}$$

En décomposant l'expression 2.132 suivant les coordonnées du plan xy, on aboutit aux trois conditions scalaires suivantes, équivalent discret de celles énoncées par Crane *et al.* :

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}c@{\qquad}rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i x_i & = & 0 & & \langle \dot{\overrightarrow{\alpha}}, \overrightarrow{X_1} \rangle & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i y_i & = & 0 & \Longleftrightarrow & \langle \dot{\overrightarrow{\alpha}}, \overrightarrow{Y_1} \rangle & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_i & = & 0 & & \langle \dot{\overrightarrow{\alpha}}, \mathbb{1} \rangle & = & 0 \end{array} \tag{2.134}$$

avec x_i, y_i, abscisses et ordonnées des centres des arcs $\mathcal{A}_i$, concaténés respectivement dans les vecteurs $\overrightarrow{X_1}$ et $\overrightarrow{Y_1}$.

L'espace des contraintes est donc de dimension trois.

Pour mettre en œuvre le flot, il nous faut choisir une fonction qui va provoquer la déformation de la courbe initiale. Nous choisissons ici la minimisation de l'énergie de flexion, dite énergie de Willmore, mais cette fonction peut être librement choisie selon le problème à résoudre. Par exemple, cette fonction pourrait déformer la courbe initiale pour la faire tendre vers une forme objectif. Dans le cas d'une courbe lisse [266], l'énergie de Willmore s'écrit :

$$\mathcal{W}(\gamma) = \int_{\gamma} \kappa^2 \, ds \tag{2.135}$$

Dans le cas discret, l'intégrale devient somme et la courbure est concentrée aux sommets de la courbe polygonale :

$$W(\gamma) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i^2 \tag{2.136}$$

avec $\kappa_i = \dfrac{2\alpha_i}{\ell_{i-1} + \ell_i}$, courbure discrète du sommet i.

Dans le cas d'un flot isométrique, les longueurs sont préservées et l'énergie de Willmore ne dépend que des angles tournants de la courbe : $W(\gamma) = W(\overrightarrow{\alpha})$.

Après avoir discrétisé la géométrie, nous discrétisons et linéarisons le temps en se donnant l'équation d'évolution suivante :

$$\overrightarrow{\alpha}(t) = \overrightarrow{\alpha_0} + t\,\overrightarrow{u} \tag{2.137}$$

avec $\overrightarrow{\alpha}(t)$, configuration prise par les angles α_i après un pas de temps t à partir de la configuration précédente $\overrightarrow{\alpha_0}$. Le vecteur $\overrightarrow{u}$ représente le taux d'accroissement.

La dérivée de l'énergie de Willmore par rapport au temps prend la forme :

$$\frac{d}{dt}W(\overrightarrow{\alpha}(t)) = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2\alpha_i}{\ell_{i-1}+\ell_i}\right)^2 = 8\sum_{i=1}^{n}\frac{\dot{\alpha}_i(t)\alpha_i(t)}{(\ell_{i-1}+\ell_i)^2} \tag{2.138}$$

Afin de décroître cette énergie, il suffit de choisir un taux d'accroissement $\overrightarrow{u}(t) = \dot{\overrightarrow{\alpha}}(t)$ tel que ${}^{dW(t)}/_{dt} < 0$, soit, étant donné la forme de la dérivée de l'énergie, $\dot{\alpha}_i(t)\alpha_i(t) < 0$ ou encore $\langle\dot{\overrightarrow{\alpha}}(t), \overrightarrow{\alpha}(t)\rangle < 0$. Pour ce faire, on choisit $\overrightarrow{u}(t) = \dot{\overrightarrow{\alpha}}(t) = -\overrightarrow{\alpha}(t)$.

Cependant, dans le cas général, cette variation des angles ne respecte pas les contraintes de fermeture identifiées (Eq. 2.134). Pour préserver la fermeture de la courbe, il est nécessaire de projeter le vecteur $\overrightarrow{u}(t)$ sur l'espace des configurations $\mathcal{V}$ qui conserve la courbe fermée, c'est-à-dire un espace de dimension $n-3$ orthogonal à l'espace des contraintes $\mathcal{V}^{\perp}$. Le nombre n représente le nombre de degrés de liberté du système (nombre d'angles pouvant varier), qui est diminué de trois, dimension de l'espace des contraintes. La composante de $\overrightarrow{u}(t) = \dot{\overrightarrow{\alpha}}(t)$, tangente à l'espace des configurations $\mathcal{V}$ est notée $\dot{\overrightarrow{\alpha_T}}(t) = -\overrightarrow{\alpha_T}(t)$. La figure 2.58 propose une représentation tridimensionnelle des espaces décrits ci-dessus.

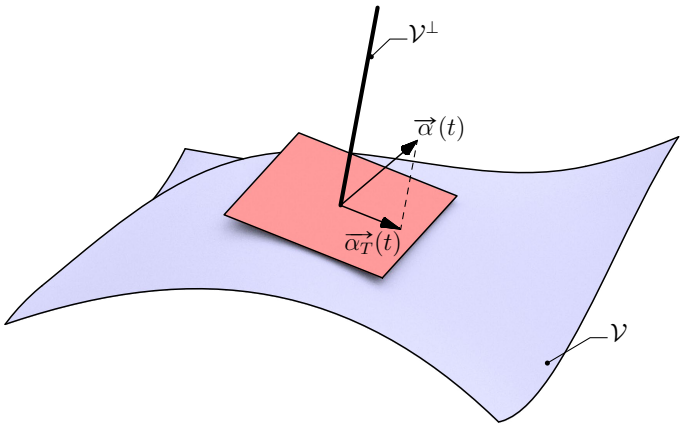


FIGURE 2.58 – Représentation tridimensionnelle des espaces des configurations et des contraintes

On obtient la projection du vecteur $\dot{\overrightarrow{\alpha}}(t)$ par la formule :

$$\dot{\overrightarrow{\alpha_T}}(t) = -\overrightarrow{\alpha_T}(t) = -\left(\overrightarrow{\alpha} - \langle\overrightarrow{\alpha}, \mathbb{1}\rangle\frac{1}{n} - \langle\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{X_1}\rangle\frac{\overrightarrow{X_1}}{\left|\overrightarrow{X_1}\right|^2} - \langle\overrightarrow{\alpha}, \overrightarrow{Y_1}\rangle\frac{\overrightarrow{Y_1}}{\left|\overrightarrow{Y_1}\right|^2}\right) \tag{2.139}$$

Afin de procéder de façon systématique à la détermination du vecteur $\dot{\overrightarrow{\alpha_T}}(t) = -\overrightarrow{\alpha_T}(t)$, nous recherchons plutôt une base orthonormée de l'espace des contraintes par l'algorithme de Gram-Schmidt.

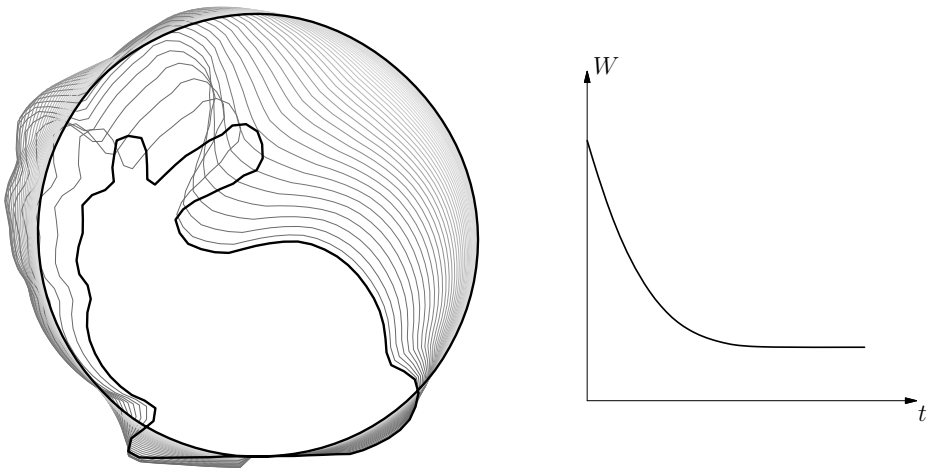
Finalement, la configuration prise par l'ensemble des angles α_i est calculée pour un pas de temps suffisamment petit par :

$$\overrightarrow{\alpha}(t) = \overrightarrow{\alpha_0} - t\overrightarrow{\alpha_T}(t) \tag{2.140}$$

Sous cet éclairage, on comprend que la famille de CCM à quatre arcs, étudiée par Banchoff et Giblin grâce à la cinématique bien connue du système à quatre barres articulées, soit une

famille à un degré de liberté. Nous pouvons aussi confirmer l'intuition des auteurs quant au degré de « flexibilité » offert par un nombre croissant d'arcs dans une CCM puisque le degré de liberté du système est égal à $n-3$.

La figure 2.59 montre la minimisation de l'énergie de Willmore sur la silhouette du lapin de Stanford avec un pas de temps de $t = 0.1$, ainsi que la diminution de l'énergie de Willmore associée au cours du temps. Le flot converge en 26 itérations pour le critère $^{\Delta W}/_{W} < 0.01$.



(a) Du lapin au cercle

(b) Décroissance de l'énergie de Willmore en fonction du temps

FIGURE 2.59 – Minimisation de l'énergie de Willmore par flot isométrique appliqué au lapin de Stanford

Le flot isométrique appliqué à l'évolute de la courbe primale $\mathcal{C}$ garantit la fermeture du premier patron de découpe, mais n'est pas suffisant pour assurer celle de la courbe duale $\mathcal{C}'$. Pour conserver la fermeture simultanée des deux courbes, il est donc nécessaire d'augmenter les contraintes du flot précédent en intégrant les conditions de fermeture de la courbe $\mathcal{C}'$ via les relations établies par la contrainte de courbure gaussienne constante (Eq. 2.111 à 2.113). En réalité, et comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, seule la condition de fermeture vectorielle de la courbe duale est nécessaire, la seconde condition étant systématiquement remplie.

La courbe duale est entièrement définie à partir de la courbe primale et de la contrainte de courbure gaussienne constante, et les longueurs des arêtes de l'évolute primale doivent être conservées par le flot isométrique. Les seules variables du problème sont encore les angles α_{e_i} de l'évolute primale.

Dans une démarche similaire à celle menée pour la détermination du flot isométrique, on déforme toujours l'évolute primale par la variation des angles α_{e_i}, mais nous exprimons maintenant la conservation de la période de la courbe duale. On note $\overrightarrow{E'}$, la somme vectorielle des vecteurs $\overrightarrow{e_i'}$ et obtenons la condition suivante :

$$\forall t \in [0,T), \qquad \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i'} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{E'}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{e_i'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt}\overrightarrow{e_i'} = \overrightarrow{0} \tag{2.141}$$

La différentielle de la fermeture vectorielle de l'évolute duale s'exprime en fonction des variables du problème, c'est-à-dire des angles α_{e_i}, sous la forme :

$$d\overrightarrow{E'} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} d\alpha_{e_i} \tag{2.142}$$

Avec $\dot{\alpha}_{e_i} = \frac{d\alpha_{e_i}}{dt}$, on aboutit à l'expression vectorielle de la contrainte de fermeture de la courbe duale $\mathcal{C}'$:

$$\frac{d\overrightarrow{E'}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} \dot{\alpha}_{e_i} = \overrightarrow{0} \tag{2.143}$$

Nous obtenons alors une expression similaire à l'expression 2.132 pour la fermeture de l'évolute primale, le terme de dérivée partielle de la somme vectorielle $\overrightarrow{E'}$ ayant remplacé celui des vecteurs position des sommets de l'évolute. En décomposant cette expression selon les coordonnées du plan xy, on obtient deux conditions scalaires supplémentaires à ajouter à celles des équations 2.134 pour garantir la fermeture simultanée des deux patrons de découpe :

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_{e_i} \left(\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} \right)_x & = & 0 \\ & & \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dot{\alpha}_{e_i} \left(\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} \right)_y & = & 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \langle \dot{\overrightarrow{\alpha}_e}, \overrightarrow{X_2} \rangle & = & 0 \\ & & \\ \langle \dot{\overrightarrow{\alpha}_e}, \overrightarrow{Y_2} \rangle & = & 0 \end{array} \tag{2.144}$$

avec $\left(\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} \right)_x$ et $\left(\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} \right)_y$, abscisses et ordonnées de la dérivée partielle de la somme vectorielle $\overrightarrow{E'}$, concaténés respectivement dans les vecteurs $\overrightarrow{X_2}$ et $\overrightarrow{Y_2}$.

L'espace des contraintes de fermetures des courbes primale et duale est donc de dimension cinq.

Il s'agit maintenant de calculer à proprement parler les coefficients $\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}}$.

Le vecteur de somme vectorielle de l'évolute duale $\overrightarrow{E'}$ étant dérivé par rapport aux angles de l'évolute primale, nous allons mobiliser les différentes relations géométriques établies précédemment entre une CCM et son évolute associée, ainsi qu'entre une courbe primale et duale.

L'expression 2.105 liant les angles de l'évolute et ceux de la CCM est une fonction non continue et donc non dérivable à l'endroit des changements de valeurs des coefficients η_i et η'_i. Dans la présente étude, nous considérons que les coefficients η_i et η'_i sont constants pendant toute la durée du flot, ce qui limite en pratique le domaine de variation des angles α_{e_i}.

Comme pour l'évolute primale, un côté orienté de la courbe polygonale est définie par :

$$\overrightarrow{e'_i} = \frac{\ell'_{e_i}}{\ell'_{e_1}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{i} \alpha'_{e_k}} \overrightarrow{e'_1} \tag{2.145}$$

Et on pose :

$$\begin{cases} c'_1 = (0,0) \\ \overrightarrow{\hat{e}'_1} = \overrightarrow{x} \end{cases} \tag{2.146}$$

La dérivée partielle du vecteur $\overrightarrow{E'}$ vaut alors :

$$\frac{\partial \overrightarrow{E'}}{\partial \alpha_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{e'_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \overrightarrow{e'_j}}{\partial \alpha_{e_i}} \tag{2.147}$$

Chacun des termes de cette somme vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overrightarrow{e'_j}}{\partial \alpha_{e_i}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \left(\frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} \overrightarrow{e'_1} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} \right) \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} \overrightarrow{e'_1} + \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} \right) \overrightarrow{e'_1} + \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \overrightarrow{e'_1} \right) \end{aligned} \tag{2.148}$$

Chacun des termes représentés dans cette somme est développé par la suite.

En préliminaire, calculons la dérivée partielle de la courbure gaussienne $\frac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}}$ présente dans la courbe de rapiéçage. Pour rappel, la courbure gaussienne est bien constante tout au long de la courbe à t fixé et est égale à :

$$K = \frac{4\pi}{L} \tag{2.149}$$

En revanche, la courbure gaussienne est variable au cours du temps, c'est-à-dire quand les angles varient, car la longueur L de la courbe de rapiéçage varie au cours du temps. Pour un dForm homéomorphe à la sphère ($\chi = 2$) on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} &= \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \left(\frac{4\pi}{L} \right) = 4\pi \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \ell_{c_j}} = 4\pi \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{c_j} R_j} \\ &= 4\pi \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{e_j} - \eta_j \pi \right) R_j} = -\frac{4\pi}{L^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \sum_{j=1}^{n} \left(\alpha_{e_j} - \eta_j \pi \right) R_j \end{aligned}$$

Dans cette expression, tous les angles α_{e_j} sont constants à l'exception de l'angle α_{e_i}. On a également fait l'hypothèse que les coefficients η_j était constants quel que soit t. Alors :

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} = -\frac{4\pi R_i}{L^2} \tag{2.150}$$

Intéressons nous maintenant au rapport des longueurs $\frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}}$ et de sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}}$. Nous considérons plutôt dans un premier temps le rapport des longueurs signées $\frac{\bar{\ell}'_{e_j}}{\bar{\ell}'_{e_1}}$ et notons s_r le signe de ce rapport. En utilisant les relations 2.96 et 2.112, le rapport des longueurs signées vaut :

$$\frac{\bar{\ell}'_{e_j}}{\bar{\ell}'_{e_1}} = \frac{R'_{j+1} - R'_j}{R'_2 - R'_1} = \frac{\dfrac{1}{K - \kappa_{j+1}} - \dfrac{1}{K - \kappa_j}}{\dfrac{1}{K - \kappa_2} - \dfrac{1}{K - \kappa_1}}$$

Et après développement, on trouve :

$$\frac{\bar{\ell}'_{e_j}}{\bar{\ell}'_{e_1}} = \frac{\kappa_{j+1} - \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_1} \frac{(K - \kappa_2)(K - \kappa_1)}{(K - \kappa_{j+1})(K - \kappa_j)} \tag{2.151}$$

Le rapport des longueurs est enfin calculé en prenant la valeur absolue de l'expression précédente :

$$\frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} = \left| \frac{\bar{\ell}'_{e_j}}{\bar{\ell}'_{e_1}} \right| \tag{2.152}$$

Pour le calcul de la dérivée partielle du rapport des longueurs $\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}}$, nous considérons également tout d'abord la dérivée partielle du rapport des longueurs signées :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{\bar{\ell}'_{e_j}}{\bar{\ell}'_{e_1}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \left(\frac{\kappa_{j+1} - \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_1} \frac{(K - \kappa_2)(K - \kappa_1)}{(K - \kappa_{j+1})(K - \kappa_j)} \right)$$

Dans cette expression, seule la courbure gaussienne varie avec l'angle α_{e_i}, les autres paramètres étant invariants au cours du temps. Après développement et en tenant compte du signe s_r du rapport des longueurs signées, on trouve :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \frac{\ell'_{e_j}}{\ell'_{e_1}} = s_r \frac{\kappa_{j+1} - \kappa_j}{\kappa_2 - \kappa_1} \frac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} \times \\ &\frac{K^2(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_j - \kappa_{j+1}) + 2K(-\kappa_1\kappa_2 + \kappa_j\kappa_{j+1}) + \kappa_1\kappa_2(\kappa_j + \kappa_{j+1}) - \kappa_j\kappa_{j+1}(\kappa_1 + \kappa_2)}{((K - \kappa_{j+1})(K - \kappa_j))^2} \end{aligned} \tag{2.153}$$

Calculons maintenant les matrices de rotation $\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}}$ ainsi que sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}}$. Pour cela, nous exprimons tout d'abord les angles α'_{e_k} de l'évolute duale $\mathcal{E}'$ en fonction des variables du problème (angles α_{e_k} de l'évolute primale $\mathcal{E}$) et des paramètres constants via la courbe duale puis la courbe primale :

$$\begin{aligned} \alpha'_{e_k} &= \alpha'_{c_k} + \eta'_k \pi = \alpha_{c_k} \left(\frac{K}{\kappa_k} - 1 \right) + \eta'_k \pi \\ \alpha'_{e_k} &= (\alpha_{e_k} - \eta_k \pi) \left(\frac{K}{\kappa_k} - 1 \right) + \eta'_k \pi \end{aligned} \tag{2.154}$$

En combinaison avec l'expression précédente, la matrice de rotation est donnée en fonction des angles α_{e_k} par la relation :

$$\mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} = \begin{bmatrix} \cos \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} & -\sin \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} \\ \sin \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} & \cos \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} \end{bmatrix} \tag{2.155}$$

Nous obtenons la dérivée partielle à partir de l'expression que nous venons d'établir :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \mathcal{R}_{\sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k}} = \sum_{k=2}^{j} \frac{\partial \alpha'_{e_k}}{\partial \alpha_{e_i}} \begin{bmatrix} -\sin \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} & -\cos \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} \\ \cos \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} & -\sin \sum_{k=2}^{j} \alpha'_{e_k} \end{bmatrix} \tag{2.156}$$

Reste à calculer les termes $\frac{\partial \alpha'_{e_k}}{\partial \alpha_{e_i}}$ pour lesquels nous distinguons deux cas.

$$\frac{\partial \alpha'_{e_k}}{\partial \alpha_{e_i}} = \begin{cases} \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} \dfrac{\alpha_{e_k} - \eta_k \pi}{\kappa_k} + \dfrac{K}{\kappa_k} - 1 & \text{si } k = i \\ \dfrac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} \dfrac{\alpha_{e_k} - \eta_k \pi}{\kappa_k} & \text{si } k \neq i \end{cases} \tag{2.157}$$

Enfin, nous déterminons l'expression du vecteur $\overrightarrow{e'_1} = \ell'_{e_1} \overrightarrow{x}$ et de sa dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \overrightarrow{e'_1}$. Dans un premier temps, nous considérons la longueur signée $\bar{\ell}'_{e_1}$ et le signe de cette longueur notée $s_{\ell'_{e_1}}$.

$$\bar{\ell}'_{e_1} = R'_2 - R'_1 = \frac{1}{K - \kappa_2} - \frac{1}{K - \kappa_1}$$

Et après développement, on obtient :

$$\bar{\ell}'_{e_1} = \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{(K - \kappa_2)(K - \kappa_1)} \tag{2.158}$$

Et nous obtenons l'expression du vecteur $\overrightarrow{e'_1}$:

$$\overrightarrow{e'_1} = \left| \bar{\ell}'_{e_1} \right| \overrightarrow{x} \tag{2.159}$$

Pour le calcul de la dérivée partielle du vecteur $\overrightarrow{e'_1}$, nous considérons également tout d'abord la dérivée partielle de la longueur signée $\bar{\ell}'_{e_1}$:

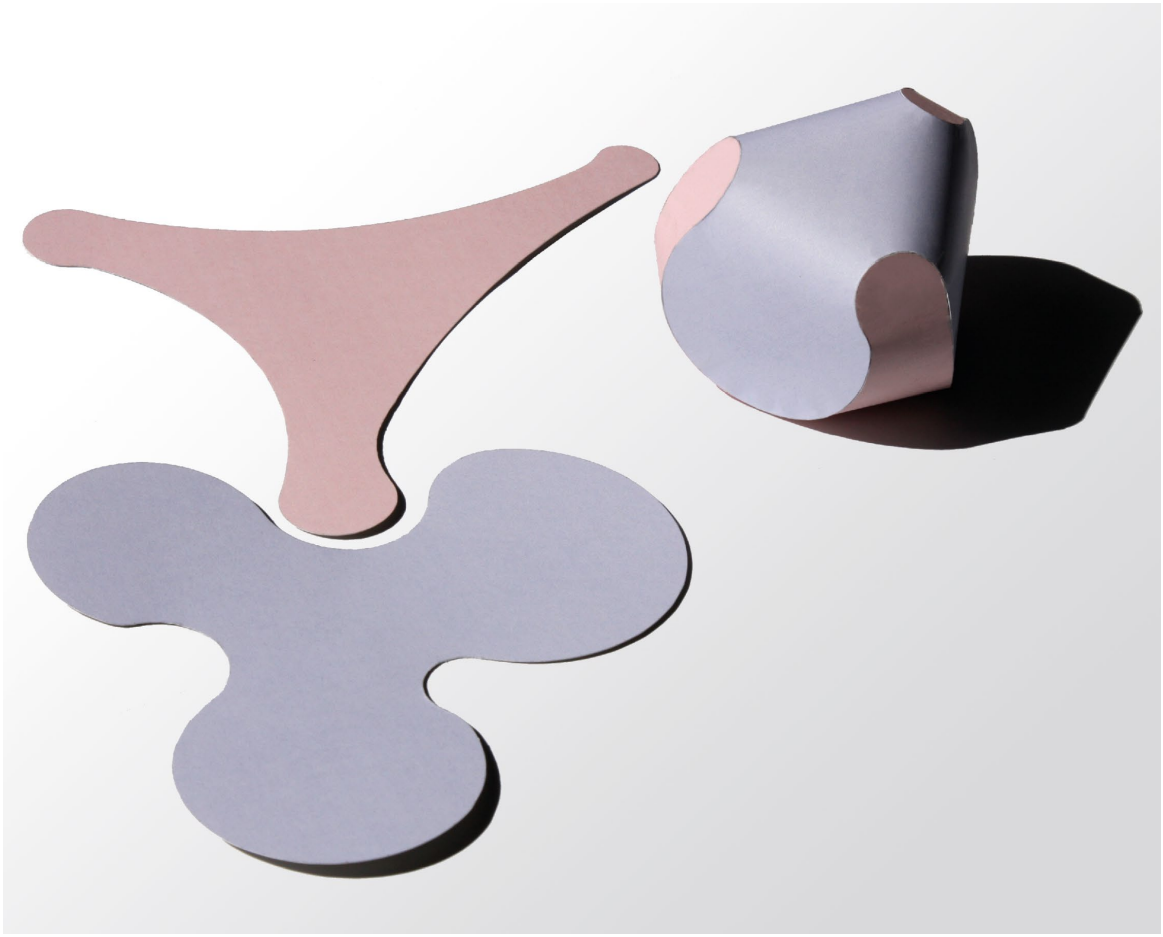
$$\frac{\partial \bar{\ell}'_{e_1}}{\partial \alpha_{e_i}} = \frac{\partial}{\partial \alpha_{e_i}} \left(\frac{\kappa_2 - \kappa_1}{(K - \kappa_2)(K - \kappa_1)} \right)$$

Comme dans l'expression du rapport des longueurs, seule la courbure gaussienne varie avec l'angle α_{e_i}. Après développement et en tenant compte du signe $s_{\ell'_{e_1}}$ de la longueur signée $\bar{\ell}'_{e_1}$, on trouve :

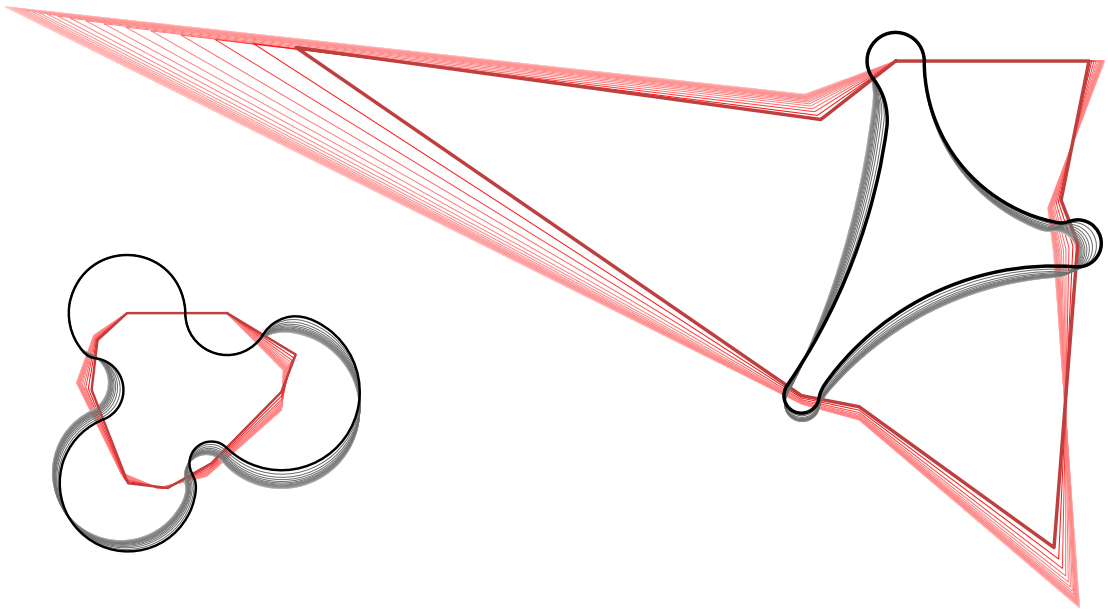
$$\frac{\partial \overrightarrow{e'_1}}{\partial \alpha_{e_i}} = s_{\ell'_{e_1}} \frac{(\kappa_1 - \kappa_2)(2K - \kappa_1 - \kappa_2) - \kappa_j}{(K - \kappa_2)^2 (K - \kappa_1)^2} \frac{\partial K}{\partial \alpha_{e_i}} \overrightarrow{x} \tag{2.160}$$

Grâce aux expressions précédemment détaillées, les deux contraintes supplémentaires relatives à la fermeture de l'évolute duale (Eq. 2.144) peuvent être calculées et ajoutées aux trois précédentes (Eq. 2.134) pour mettre en œuvre le flot isométrique à courbure gaussienne constante.

La figure 2.60 montre une première implémentation de ce flot géométrique et prend pour initialisation les deux patrons de découpe générés à partir d'une courbe primale constituée de bi-arcs et d'une courbe duale fermée par optimisation. Puis un flot isométrique par minimisation de l'énergie de Willmore est appliqué avec un pas de temps très fin de t=0.01 pour avoir une meilleure précision dans les patrons de découpe. L'assemblage tridimensionnel est réalisé grâce à une maquette physique.



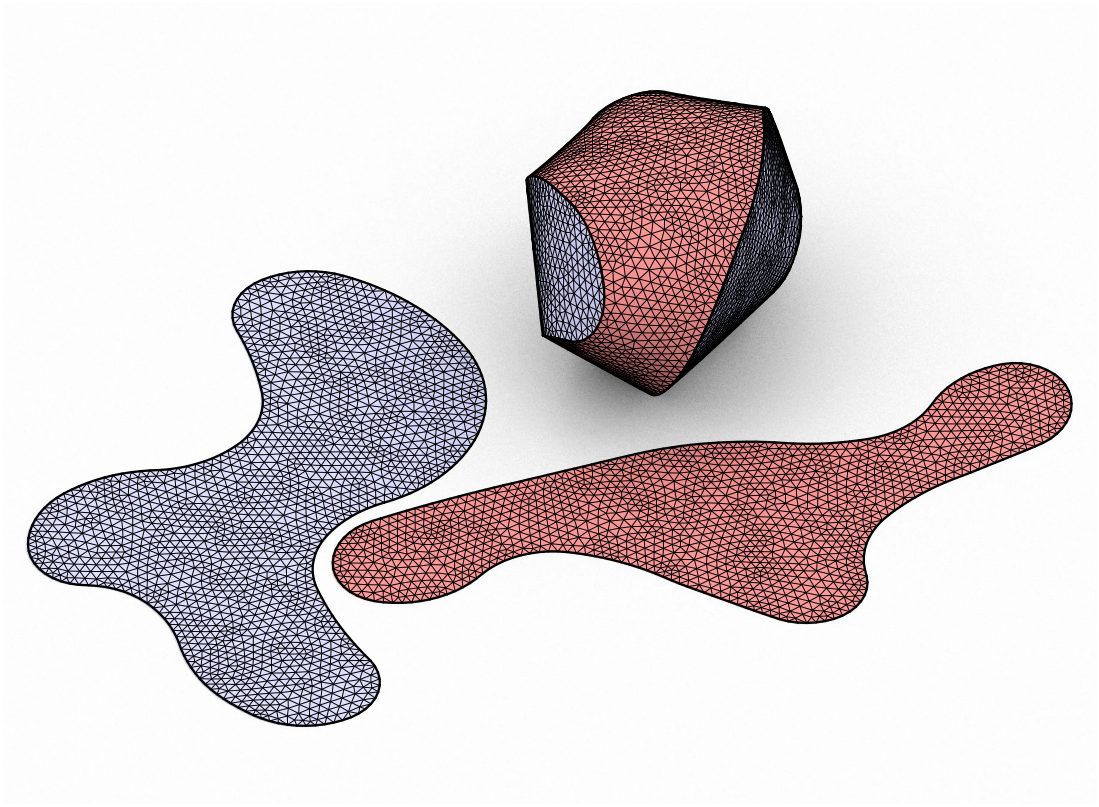
(a) Configuration initiale du flot (maquette physique)



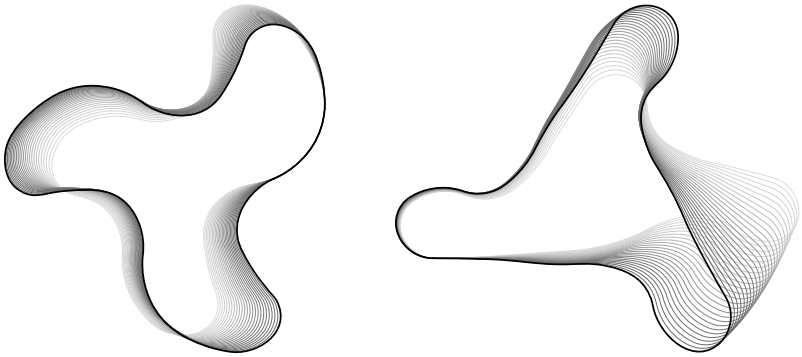
(b) Famille de solutions générés par flot géométrique

FIGURE 2.60 – dForm asymétrique généré à partir d'une initialisation par optimisation

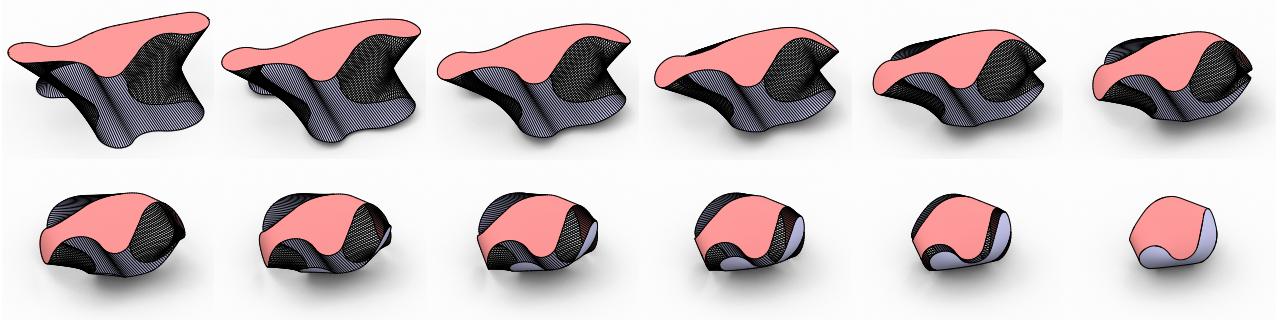
La figure 2.61 montre une seconde implémentation. Seules les CCM sont affichées, car certains arcs, présentant une très faible courbure, rejettent les sommets de l'évolute loin de la figure. Elle prend pour initialisation les deux patrons de découpe issus d'une géométrie appartenant au groupe cyclique C_3. Or appliquer un flot de Willmore sur une forme symétrique conserve cette propriété. Afin de générer un patron de découpe asymétrique à partir de courbes initiales symétriques, il suffit d'appliquer un flot asymétrique tout en conservant les contraintes de fermeture et de courbure gaussienne constante. Ici, nous conservons un flot de Willmore classique pour les $n/3$ premiers angles de l'évolute primale et appliquons un flot de Willmore inversé (qui va avoir tendance à augmenter l'énergie de flexion) pour les autres. L'assemblage tridimensionnel est réalisé à l'aide de l'extension de simulation physique Kangaroo2 intégré dans l'environnement de programmation Grasshopper 3D (version 1.0.0007) au sein du logiciel Rhinoceros 3D (version 6 SR32). Pour cela, nous simulons l'assemblage des deux patrons de découpe en maillant finement les deux disques topologiques et en définissant les propriétés de raideurs des maillages pour que leur comportement soit conforme à celui d'une surface développable. On impose donc une forte raideur membranaire (faible déformation des triangles) ainsi qu'une faible raideur flexionnelle (rotation des triangles autour de leurs côtés). Ensuite, nous lions les sommets des bords des deux maillages de telle façon à ce que les arcs $\mathcal{A}_i$ et $\mathcal{A}'_i$ se trouvent en regard, puis nous diminuons progressivement la longueur de ces liens, rapprochant ainsi les deux surfaces jusqu'à leur contact.



(a) Configuration finale du flot (maquette numérique)



(b) Famille de solutions générés par flot géométrique



(c) Cinématique d'assemblage

FIGURE 2.61 – dForm asymétrique généré à partir d'une initialisation symétrique (groupe cyclique C_3)

2.5 Conclusion

Le présent chapitre offre un nouvel éclairage sur les surfaces développables par morceaux, souvent considérées dans l'approche constructive comme le résultat de la semi-discrétisation d'une surface à double courbure. Ici, les surfaces sont plutôt observées du point de vue de leur assemblage et des propriétés propres à la géométrie de leur courbe de rapiéçage.

La première partie de ce chapitre s'appuie sur une étude menée par Duncan et Duncan [110] sur le pli courbe pour la généraliser à une configuration quelconque liant deux surfaces développables. Grâce à ces résultats, et en connaissant la géométrie de la première surface et celle des deux bords à raccorder, il est dorénavant possible de prédire la géométrie de la seconde surface.

Les relations géométriques entre les deux surfaces et leurs bords étant maintenant clairement énoncées, cela permet d'ouvrir la voie au développement d'applications architecturales, en particulier pour des dispositifs mobiles. Un système de brise-soleil dynamique pourrait tirer parti de cette étude en occultant au mieux la course solaire en intégrant les formes des patrons de découpe comme paramètres de conception.

Seffen [213], dans son article *Spherical images and inextensible curved folding* étudie les résultats de l'article de Duncan et Duncan par l'approche géométrique de la sphère de Gauss et en tire une méthode graphique permettant la prédiction géométrique de structures pliées, mobiles et déployables. Dans une approche similaire, il serait intéressant de comprendre les implications géométriques sur la sphère de Gauss des formulations établies ici pour le rapiéçage courbe.

Dans la seconde partie du chapitre, nous avons donné, en nous appuyant sur la formule de Steiner, une définition de la courbure moyenne et gaussienne pour les géométries semi-discrètes. Par l'intermédiaire d'une intégration sur le tore osculateur, nous montrons que les valeurs sont simplement liées aux courbures géodésiques pour la courbure gaussienne et à l'angle d'ouverture pour la courbure moyenne. De plus, la compatibilité de ces formules avec les théories préexistantes de la géométrie différentielle lisse et discrète, ainsi que celle du pli courbe a été vérifiée.

La dernière partie a été l'occasion de mobiliser les résultats précédents pour les mettre en œuvre dans une démarche de génération de surfaces développables par morceaux fermées sous contraintes : les dForms à courbure gaussienne constante. Ce problème, de nature globale, s'appuie sur des notions topologiques via le théorème de Gauss-Bonnet et identifie des familles de solutions, les premières à partir de patrons de découpe symétriques appartenant au groupe diédral D_N, les secondes générées à partir de patrons de découpe asymétrique.

Dans le premier cas, après avoir décrit la paramétrisation du problème, nous avons proposé une méthode pour prédire la forme tridimensionnelle à partir du développé des patrons. Basé sur des considérations de symétrie, cette formulation donne accès à l'expression explicite de la courbure et de la torsion de la courbe de rapiéçage. Il serait intéressant de mener des études plus approfondies sur les propriétés de cette courbe de rapiéçage et en particulier sous quelles conditions elle devient cosphérique, comme le sont les sommets des polyèdres de Platon et la sphère, figures à courbure gaussienne constante des géométries discrètes et lisses.

Dans le cas des dForms à patrons de découpe asymétriques, la démarche de génération nous a amenés à établir des résultats intermédiaires concernant les courbes circulaires par morceaux fermées. Après avoir décrit les relations liant une courbe circulaire par morceaux et son évolute associée, nous avons établi des conditions de fermeture nécessaires et suffisantes grâce à une définition algébrique des rayons des arcs de cercle et des longueurs des côtés de l'évolute.

Ces résultats sont mobilisés pour la génération de solutions satisfaisant simultanément la contrainte de courbure gaussienne constante et la double fermeture des patrons de découpe. Deux types de solutions sont proposées, la première est générée par optimisation. La seconde est créée par génération directe grâce à la propriété démontrée ici selon laquelle toute courbe primale appartenant au groupe cyclique C_N et définissant le premier patron possède une courbe duale fermée définissant le second patron tout en respectant la contrainte de courbure gaussienne constante.

A partir d'une de ces solutions choisie comme initialisation, une famille de dForms asymétrique a été générée par la méthode du flot géométrique. Grâce aux conditions de fermeture identifiées plus haut, ce flot est conditionné par un espace de contraintes à cinq dimensions appliqué sur l'évolute primale : les trois premières dimensions proviennent des contraintes du flot isométrique nécessaire à la fermeture de la courbe primale, augmenté de deux autres pour garantir la contrainte de courbure gaussienne constante et la fermeture de la courbe duale.

Lors de notre étude, et pour des raisons de simplicité d'implémentation numérique, nous avons limité volontairement l'amplitude du flot afin de nous placer dans une configuration où la variation du cours du temps des variables du problème (angles de l'évolute primale) est continue. Cette limitation pourrait être levée par une étude complémentaire considérant les bifurcations engendrées par ces discontinuités angulaires.

Comment se comportent ces formes lorsqu'elles deviennent structures, quand la surface devient plaque et la courbe devient poutre ? Comment se distribuent les efforts lorsqu'un chargement est appliqué à ces modules ? La partie suivante tente d'apporter des éléments de réponses à ces questionnements en plaçant ces géométries dans un contexte mécanique.

CHAPITRE 3

Mécanique du rapiéçage courbe : Etude d'une structure spatiale à modules de cisaillement développables

Ce chapitre présente une système constructif original qui tente de tirer partie de l'efficacité structurelle des treillis spatiaux et de la facilité de mise en œuvre des tôles développables.

En effet, les structures spatiales à double nappe sont renommées pour leurs performances mécaniques qui en font les systèmes privilégiés pour supporter des couvertures de grandes portées. De nombreux ouvrages d'ingénierie y sont consacrés, leur comportement structurel bien connu et les outils de calcul performants et ergonomiques. Leur talon d'Achille est la complexité d'assemblage des nœuds qui concentrent les enjeux mécaniques, d'une part, pour la transmission des efforts et technologiques, d'autre part, pour l'épure de ces efforts selon les relâchements souhaités.

Les surfaces développables, quant à elles, semblent relativement absentes de la sphère des structures à cause de la souplesse inhérente à leur nature, mais également à cause de la complexité à modéliser leur géométrie et leur comportement mécanique.

Le concept proposé dans ce chapitre va profiter des développements menés sur le rapiéçage courbe pour révéler le potentiel structurel des surfaces développables au sein d'une structure spatiale tout en en simplifiant les détails d'assemblage. A mi-chemin entre un système à barres (structure spatiale réticulée) et un système en plaques (PRS, caisson), la mécanique du rapiéçage courbe est ainsi abordée par l'étude d'une structure hybride, mariant membrures linéaires des nappes et modules de cisaillement en surfaces développables.

Dans une approche inductive, un prototype à échelle 1 est d'abord construit dans les phases préliminaires de la réflexion. La partie 3.1 pose les hypothèses de conception, expose les étapes de fabrication et donne un retour critique de l'expérience, avec deux prolongements identifiés. Le premier, décrit dans la partie 3.2, propose un modèle équivalent de plaque épaisse pouvant se substituer à la modélisation complète de la structure spatiale. Le second prolongement, décrit dans la partie 3.3, consiste à mettre en place une stratégie d'optimisation et des outils de prédimensionnement permettant de transposer la démarche à des structures de grande échelle.

3.1 Conception et fabrication du prototype *SSDSC*

3.1.1 État de l'art

L'IASS (International Association for Shell and Spatial Structures) donne la définition suivante des structures spatiales [267] (traduction de l'auteur) :

> « Une structure spatiale est un système structurel composé d'éléments linéaires agencés de telle manière que les forces transférées soient distribuées dans les trois dimensions. Dans certains cas, les éléments constitutifs peuvent être bidimensionnels. D'un point de vue macroscopique, une structure spatiale prend généralement la forme d'une surface plane ou courbe. »

Les dômes antiques, fabriqués en bois ou en pierre, peuvent être considérés comme les précurseurs des structures spatiales [268], mais c'est réellement au milieu du XIXe siècle que ces typologies structurelles prennent leur essor [269]. Deux facteurs principaux contribuent à l'émergence des structures spatiales. Le premier facteur concerne l'utilisation du fer, puis de l'acier de façon plus systématique dans la construction. Ces matériaux métalliques, dont la production augmente fortement avec la révolution industrielle, présentent l'avantage par rapport à la pierre qui résiste essentiellement à des efforts de compression, de bien résister également aux efforts de traction. Le fer et l'acier présentent aussi l'avantage, contrairement au bois, de pouvoir être façonnées avec une grande variété de longueurs et de sections. Le second facteur concerne le développement du chemin de fer et de la production de masse, impliquant une demande croissante de structures de grandes portées pour les ponts, les gares et les usines.

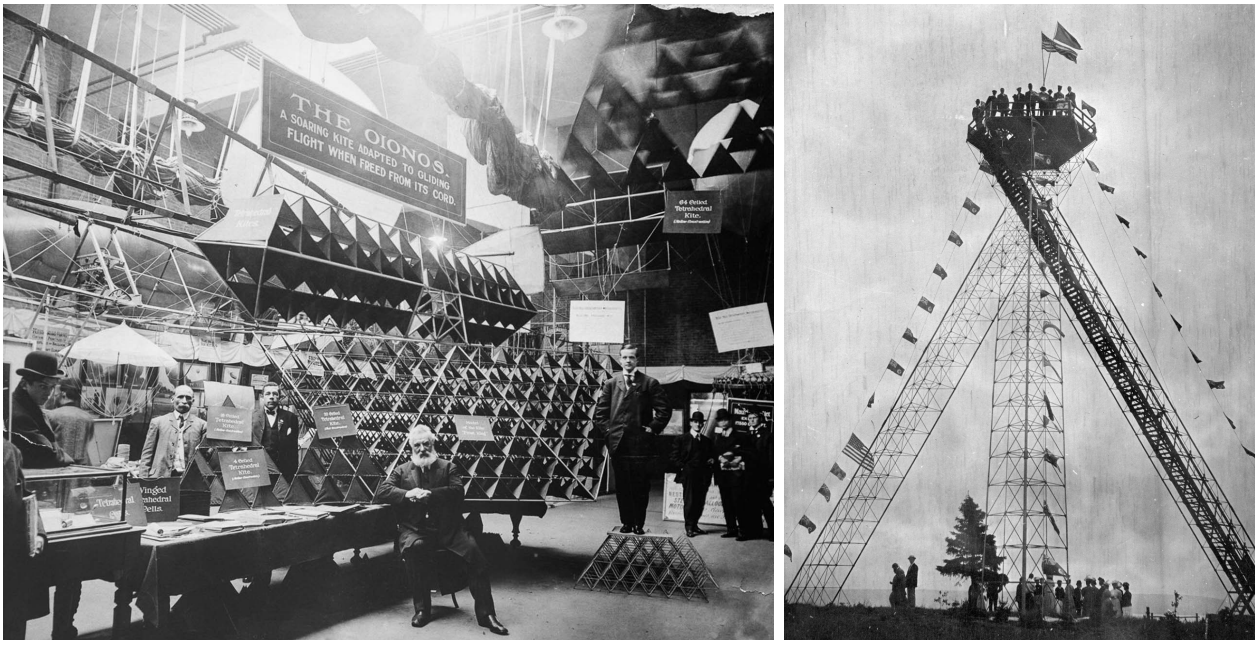


FIGURE 3.1 – The Eden Project : The Biomes
Grimshaw Architects (Royaume-Uni)

Les principales qualités identifiées pour ce type de structure sont donc liées aux conditions qui ont présidé à son émergence [267, 270, 271]. Les premiers avantages sont liés à leur grande efficacité structurelle. Elles sont bien adaptées pour la couverture de grandes portées sans appuis intermédiaires, sont légères et potentiellement très transparentes (Fig. 3.1). Elles sont donc très économes en matière par rapport à d'autres structures à performance de raideur égale. Le second type d'avantages est d'ordre technologique et est propre aux constructions de la filière sèche. La préfabrication des pièces en atelier avec des machines industrielles facilite le montage et réduit le temps de présence sur site. La préfabrication permet également plusieurs cycles de montages/démontages grâce à des assemblages mécaniques réversibles. Grâce à la petite

taille des composants de la structure, le transport et la manutention des éléments peuvent s'effectuer par des méthodes traditionnelles de construction. Enfin, il est possible, dans certains cas, d'éviter l'usage d'un coffrage grâce à un assemblage au sol puis un levage de l'ensemble.

Les premiers développements théoriques sur les structures spatiales ont été initiés en 1880 par l'ingénieur allemand August Föppl dans son ouvrage *Theorie des Fachwerks* (Théorie des systèmes en treillis) [272]. Ces théories portant sur le calcul des surfaces réticulées ont rapidement été appliquées pour deux bâtiments majeurs construits pour l'exposition universelle de Paris de 1889 : la Galerie des Machines et la Tour Eiffel. Malgré ces constructions démonstratrices des potentiels structurels, il faut attendre 1904 et les expérimentations constructives d'Alexander Graham Bell, pour connaître de nouveaux développement dans le domaine. Il fit la démonstration de l'efficacité de ces structures en mettant au point des machines volantes, cerfs-volants [273] (Fig. 3.2a) et biplans motorisés, à partir de grilles à plusieurs nappes. En 1907, il construisit la tour d'observation de Baddeck [274] (Fig. 3.2b).



(a) Cerfs-volants tétraédriques (b) Tour tétraédrique de Baddeck

FIGURE 3.2 – Structures spatiales d'Alexander Graham Bell

Qualifié par André Malraux en 1963 de « père des structures spatiales », Robert Le Ricolais est peu reconnu en France malgré la publication en 1940 de son article « Essai sur les systèmes réticulés à trois dimensions » [275]. Exilé aux États-Unis, il est connu, entre autres travaux, pour son observation et analyse des structures spatiales naturelles comme celles des radiolaires [128]. Enfin, la galerie des pionniers doit être complétée par la figure de Richard Buckminster Fuller. Auteur et inventeur prolifique (plus de trente livres, de nombreuses inventions et de brevets), il est le concepteur du système « Octet Truss » [133], basé sur la géométrie de la concaténation d'octaèdres et de tétraèdres (comme celle utilisée par Bell), mais est parmi les premiers à appliquer ce principe à des géométries courbes. La structure en double nappe du dôme géodésique de l'exposition universelle de Montréal (Canada) marque la consécration et symbolise le travail innovant de Fuller (Fig. 3.3).

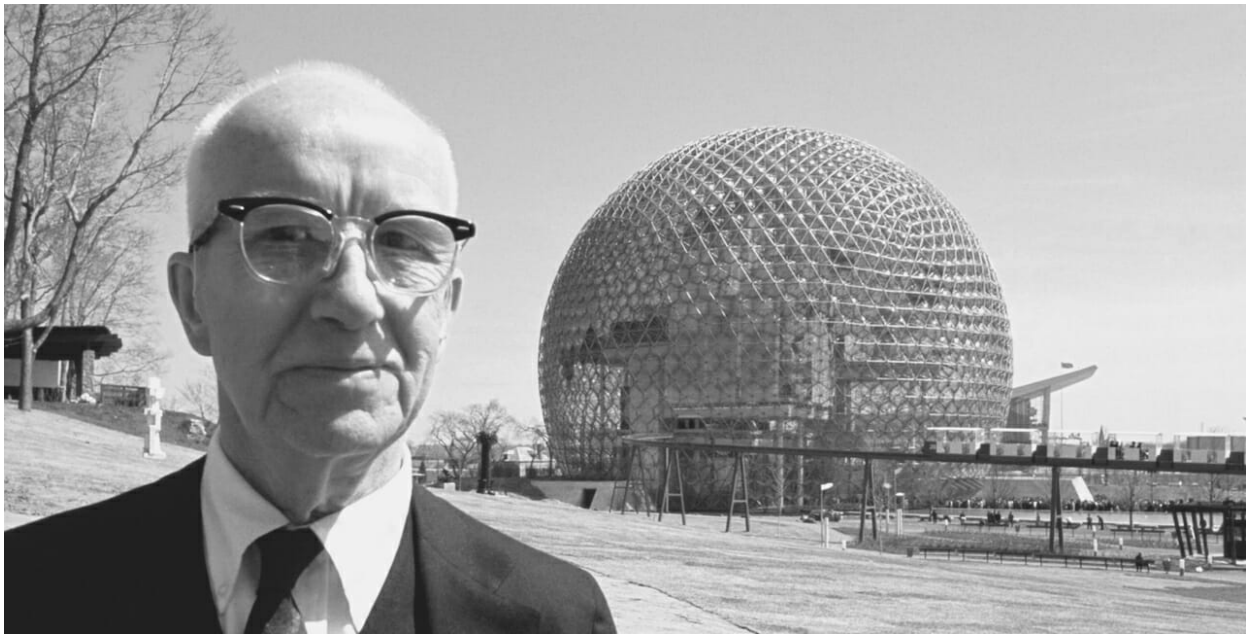


FIGURE 3.3 – Biosphère
Richard Buckminster Fuller (Canada)

Aujourd'hui, les investigations menées sur les structures spatiales sont fortement impactées, du point de vue de la conception, par le développement des moyens de modélisation tridimensionnels couplé à de nouvelles méthodes d'analyse ainsi que par la puissance de calcul [276]. Le concept de *Formex Configuration Processing* est une illustration des avancées faites dans le domaine depuis les années 80 [277–279]. Précurseur de l'étude paramétrique de la géométrie et de la topologie appliquée aux structures spatiales, l'algèbre *Formex* permet de générer des données aussi variées que la connectivité des éléments, les coordonnées des nœuds, les conditions de chargement et la configuration des appuis. L'intégration d'outils d'analyse structurelle au sein même de logiciels graphiques, comme le plug-in Karamba3D fonctionnant avec Grasshopper et Rhinoceros, couplé à des algorithmes d'optimisation permet encore d'améliorer les performances des structures [280].



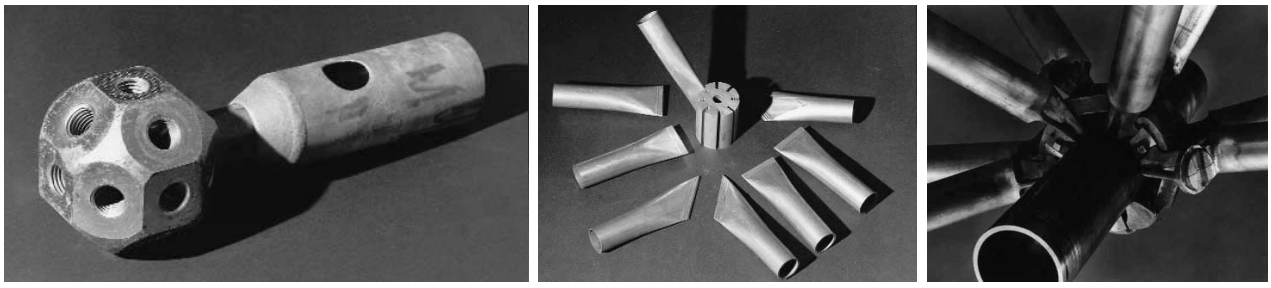
(a) Centre culturel Heydar-Aliyev
Zaha Hadid (Azerbaïdjan)

(b) Musée Guggenheim de Bilbao
Frank O. Gehry (Espagne)

FIGURE 3.4 – Structures spatiales à forme libre

Du point de vue de la fabrication, et rétroactivement de celui de la conception, l'avènement des outils de fabrication numérique remet en question les notions de répétitivité et de la modularité qui caractérisent les structures spatiales jusqu'alors. Les structures spatiales trouvent alors un nouveau champ d'application en devenant le support d'enveloppes à géométrie complexe [281]. Ces structures peuvent être cachées derrière des peaux opaques comme le centre culturel de Heydar Aliyev de Zaha Hadid [282] (Fig. 3.4a), le musée Guggenheim de Bilbao de Frank O. Gehry [283] (Fig. 3.4b) ou contribuer pleinement à la tectonique d'enveloppes transparentes [78, 105, 162, 284].

Le rapide historique des structures spatiales que nous venons de parcourir trouve un écho direct dans la chronologie des inventions et brevets des connexions permettant l'assemblage des éléments constitutifs de ces structures [269] (Fig. 3.5). Identifiée comme un élément clef, aussi bien au niveau mécanique pour la transmission des efforts, technologique pour la rapidité d'assemblage, mais aussi du point de vue économique, la conception des nœuds d'assemblage est considérée par de nombreux auteurs comme une difficulté majeure, voire un frein au développement des structures spatiales [270, 285–287]. Deux typologies principales peuvent être identifiées.



(a) MERO (b) Triodetic (c) Wachsmann

FIGURE 3.5 – Nœuds d'assemblage de systèmes modulaires

La première typologie concerne les systèmes modulaires à forte répétitivité dont une classification complète est proposée par Gerrits [288]. Pour ne citer que les plus importants, mentionnons que, malgré les tentatives de Bell au début du siècle pour développer les structures spatiales au moyen de nœuds moulés, celles-ci ne furent effectivement mises en œuvre en architecture qu'après l'introduction du nœud MERO, brevet déposé en 1943. Probablement la méthode la plus utilisée pour la construction de structures réticulées, le système est composé de barres tubulaires vissées à un nœud polyédrique dont la géométrie est spécifique au projet. Au contraire, Konrad Wachsmann conçoit en 1959 un nœud « universel » à l'occasion du développement d'une structure de hangar de grande portée pour l'armée de l'air américaine [285], cependant la complexité de cette assemblage limitera l'universalité à ce projet ! En France, Stéphane du Château développe les systèmes Tridirectionelle S.D.C. (1957) et Pyramitec (1960), mais la nécessité de soudure sur site ou en atelier en limitera l'usage. Enfin, citons le système Triodetic qui surmonte ce problème en proposant un kit utilisant exclusivement des fixations mécaniques : les barres (généralement en aluminium) sont extrudées et embouties à leurs extrémités, puis introduites dans un nœud extrudé à gorges. L'ensemble est finalement verrouillé par un ensemble rondelles et boulon central.

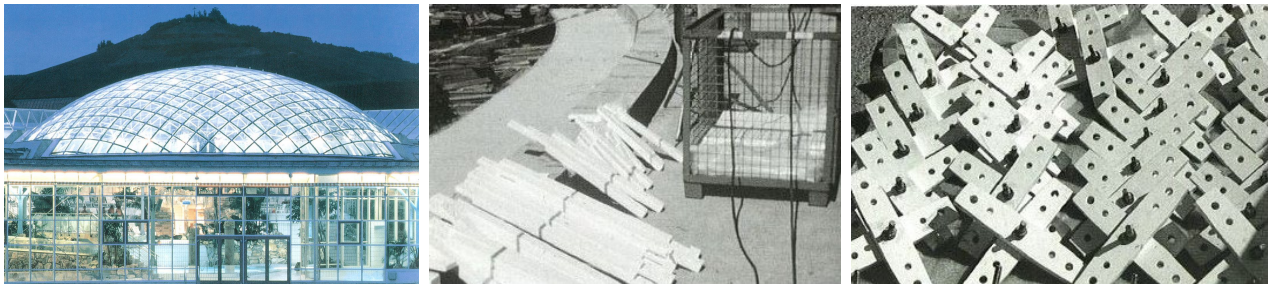


FIGURE 3.6 – Piscine de Neckarsulm [289]
Kohlmeier und Bechler (Allemagne)

La seconde typologie concerne les systèmes capables d'accommoder de fortes variations géométriques [75, 286]. La première stratégie consiste à maximiser le nombre de pièces identiques, la variation géométrique étant reprise dans les degrés de liberté permise dans les assemblages. Cette stratégie est mise en œuvre par exemple dans le projet de dôme en verre de la piscine de Neckarsulm [289] (Fig. 3.6). La seconde stratégie, au contraire, consiste à fabriquer des pièces uniques, souvent à l'aide d'outils à commande numérique, comme dans le projet de la couverture vitrée du British Museum [284] ou la toiture du centre commercial Westfield Londres [290] (Fig. 3.7). Enfin, le pavillon de recherche Caravel heX-Mesh relève d'une stratégie hybride en répartissant la variabilité géométrique dans deux types de nœuds au sein de la même structure [291]



(a) WestField1 (b) WestField2 (c) WestField3

FIGURE 3.7 – Centre commercial de Westfield Londres [290]
Studio Buchan (Royaume-Uni)

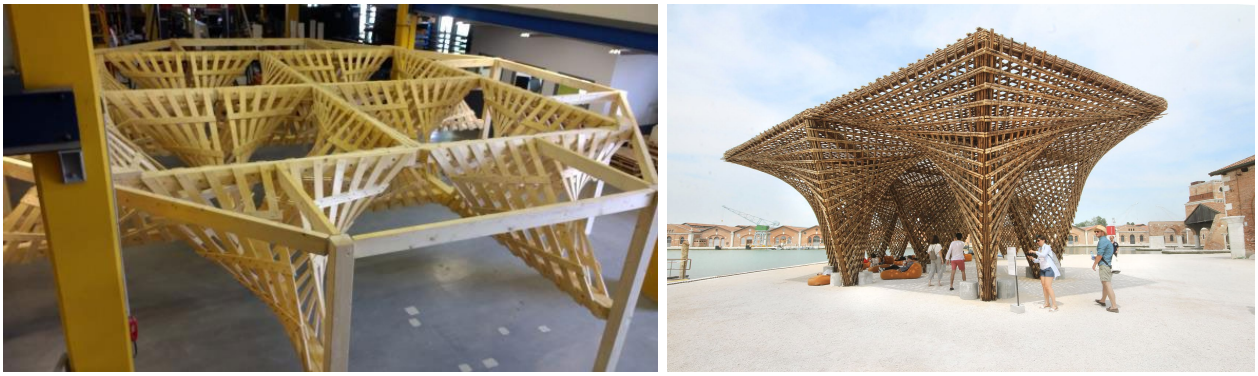
3.1.2 Objectifs du prototype

Les performances mécaniques des structures spatiales reposent sur un travail optimal des éléments constitutifs, ceux-ci n'étant soumis, dans le cas de connexions articulées, qu'à des efforts axiaux. Cette configuration implique également que les axes des barres soient *épurés*, c'est-à-dire concourants en un seul point.

La contrepartie de ces hypothèses est double. Tout d'abord, comme souligné précédemment [270], la complexité technologique d'assembler plusieurs membrures (en général huit pour les structures à double nappe) convergeant sans excentricité avec différents angles dans l'espace est un défi de conception pour l'ingénieur. Ensuite, les nœuds d'assemblages doivent être en

capacité de transférer les efforts entre les différentes barres selon les degrés de liberté choisis et sont donc le lieu d'importantes concentrations de contraintes.

Ces difficultés mises en avant pour les structures spatiales donnent des éléments d'explication sur la faible utilisation du bois, particulièrement sensible aux concentrations de contraintes dans les assemblages. Des solutions alternatives ont été développées afin de mieux répartir les efforts en transformant les diagonales linéaires, appuyées en deux points, en des nappes planes pour les treillis de type *Town*, ou en nappes spatiales avec des paraboloïdes hyperboliques appuyés sur leurs quatre côtés [292] (Fig. 3.8). Notre objet d'étude, l'intégration de tôles minces en acier dans une structure spatiale, partage cette sensibilité aux efforts concentrés et s'inspire de cette stratégie de répartition pour les éléments diagonaux.



(a) Structure spatiale de 9 × 9 m
Collaboration des laboratoires Navier et GSA [292]

(b) Bamboo Stalactite
VTN Architects (Italie)

FIGURE 3.8 – Structures en bois basées sur la figure du paraboloïde hyperbolique

Parmi les nombreuses classifications proposées pour les structures spatiales [271], trois grandes catégories peuvent être identifiées : les structures réticulées (composées exclusivement de barres articulées), les systèmes à parois contraintes (contribution mécanique de la paroi extérieure en plus de sa fonction classique de couverture) et les structures tendues (en câbles ou en toile). Le système structurel décrit ici relève des deux premières catégories (Fig. 3.9). De la première, il hérite les nappes supérieure et inférieure composées d'une grille bi-directionnelle. De la seconde, il hérite les modules de cisaillement composés de polyèdres à voiles minces et courbes. Le prototype tire son nom, *SSDSC*, de la publication dont il a été l'objet : *Spatial Structure with Developable Shear Components* [293].

La contribution visée dans la conception et fabrication de ce prototype est double. Tout d'abord d'un point de vue technologique, la complexité des assemblages d'une structure spatiale à double nappe est réduite en la décomposant en deux connexions simples : une connexion ponctuelle à l'intersection des membrures continues qui se coupent perpendiculairement (nappes supérieure et inférieure) et une connexion linéaire entre les barres et les arêtes des tétraèdres. Au-delà des bénéfices technologiques, le sujet de la performance mécanique est aussi envisagé. La question des instabilités est un sujet critique pour des barres élancées et des tôles minces en présence d'efforts axiaux importants. La courbure introduite dans les faces des modules apporte de la résistance de forme et la connexion linéaire des modules stabilise les membrures contre le flambement.

Cette approche est implémentée dans un prototype à échelle vraie grandeur dont les étapes de conception sont utilisées pour structurer les parties qui suivent. La partie 3.1.3 présente

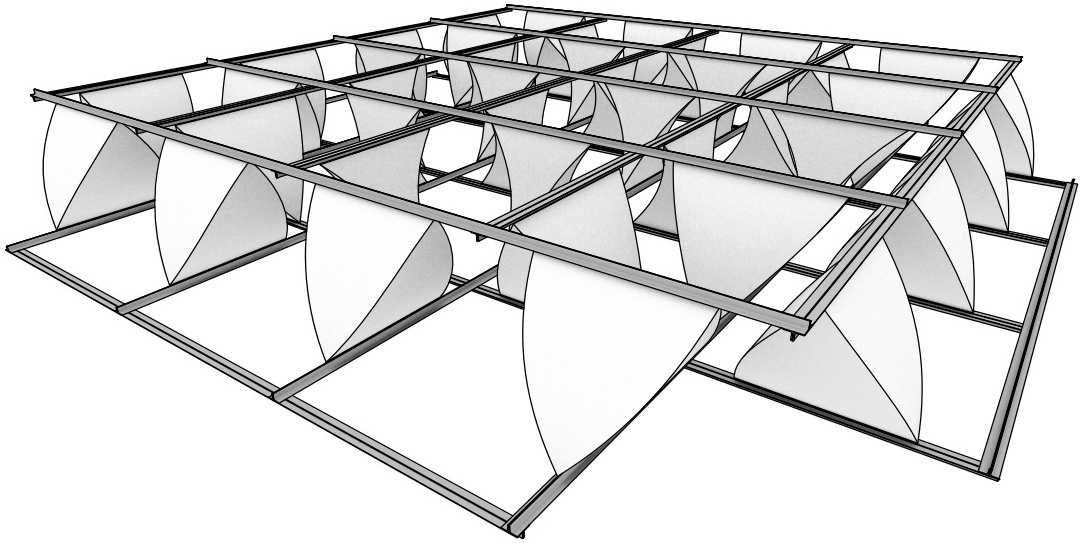


FIGURE 3.9 – Vue perspective du prototype

l'agencement de la grille modulaire issu du pavage semi-régulier de l'espace. La partie 3.1.4 se concentre sur l'échelle d'un module tétraédrique pour en décrire la géométrie et le comportement structurel. En s'appuyant sur ces études locales, une procédure d'optimisation par recherche de forme est menée dans la partie 3.1.5 à l'échelle de la structure complète. La partie 3.1.6 traite de la question de la fabrication du prototype, puis la campagne de mesures effectuée sur cette structure est analysée dans la partie 3.1.7. Enfin, la partie 3.1.8 conclut sur les enseignements à tirer de cette approche expérimentale et envisage des pistes pour généraliser la démarche mise en place à une méthodologie applicable à des structures de plus grande ampleur ou de typologie différente.

3.1.3 Agencement spatial de la grille modulaire

Les structures spatiales à double nappe possèdent généralement un caractère modulaire, c'est-à-dire une périodicité spatiale. Il est courant de baser la conception de ce type de structures sur un pavage régulier de l'espace. Dans cette configuration, comme dans les machines volantes d'Alexander Graham Bell ou le Gyrotron (Fig. 3.10a) de l'exposition universelle de 1967 à Montréal, les sommets des polyèdres correspondent aux nœuds d'assemblages et les arêtes correspondent aux barres. Il existe de nombreux pavages périodiques de l'espace (réguliers, semi-régulier, prismatique...), mais quelques uns seulement possèdent les propriétés de stabilité nécessaires pour en faire une structure [294]. Le prototype développé ici est basé sur le seul pavage semi-régulier, composé de la concaténation de tétraèdres et d'octaèdres (Fig. 3.11).

Contrairement aux structures montrées précédemment qui se déploient dans les trois dimensions de l'espace, les structures spatiales à double nappe sont une troncature bidimensionnelle de la concaténation des polyèdres (Fig. 3.12a). Cette opération conserve une couche de tétraèdres et transforme les octaèdres en pyramides à base carrée et triangles équilatéraux (Fig. 3.12b). Les sommets des pyramides sont alternativement orientés vers le haut et vers le bas.

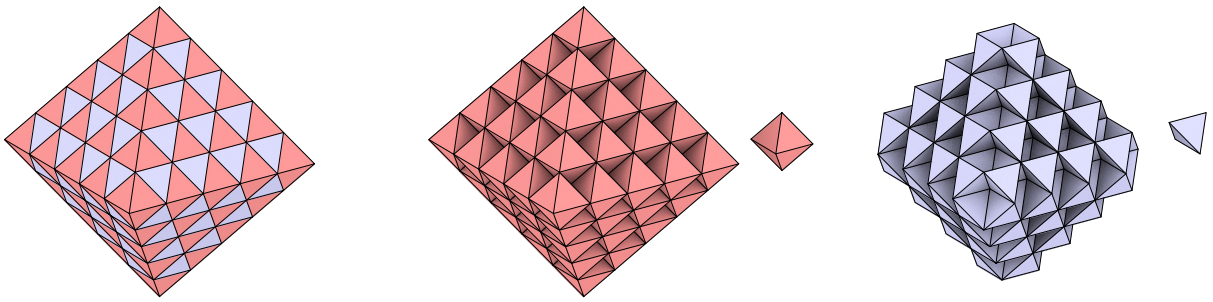
Dans la typologie structurelle que nous étudions, les sommets et les arêtes appartenant aux nappes supérieure et inférieure sont associés aux nœuds et aux membrures de la structure,



(a) Gyrotron, Sean Kenny (b) Pavillon Toshiba-IHI, Kisho Kurokawa

FIGURE 3.10 – Structures spatiales à l'Exposition Universelle de 1967 à Montréal, Canada

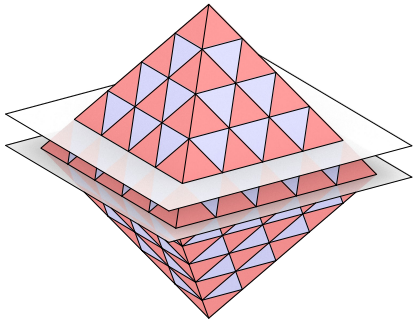
conformément à l'approche classique. En revanche, les faces des tétraèdres sont conservées pour jouer le rôle des diagonales. Les pyramides à base carrée peuvent être lues en négatif (Fig. 3.12c). Le pavillon Toshiba-IHI de l'exposition universelle de 1970 à Osaka peut être considéré comme un précédent historique à ce principe puisqu'il s'appuie sur une trame tétraédrique dotée d'un remplissage surfacique (Fig. 3.10b). On note que, selon la localisation de ce remplissage, son importance varie afin de répondre à des sollicitations différentes.



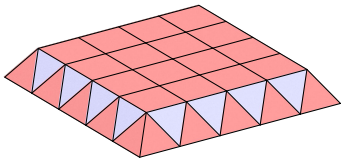
(a) Pavage complet (b) Octaèdres (c) Tétraèdres

FIGURE 3.11 – Pavage semi-régulier composé d'octaèdres et de tétraèdres

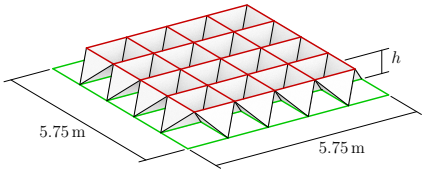
Le prototype est inscrit dans un carré de 5.75 m de côté, c'est-à-dire une grille inférieure composée de cinq cellules de $\ell = 1.15$ m de côté dans les deux directions. La grille supérieure est décalée dans le plan d'une demi-trame dans les deux directions ; elle est donc composée de quatre cellules. La distance verticale entre les deux nappes (hauteur structurelle) est notée h et n'est pas fixée *a priori* (Fig. 3.12c). Elle est considérée comme une variable et sera déterminée plus tard dans l'optimisation globale de la structure. Sur un principe similaire à celui décrit précédemment pour le pavillon Toshiba-IHI, nous verrons au paragraphe suivant que la taille et la forme des tétraèdres de notre prototype pourront s'adapter afin d'optimiser les performances mécaniques de la structure (Fig. 3.12d).



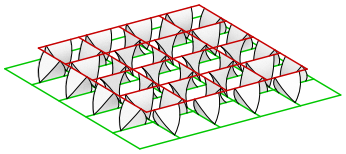
(a) Plans de troncature



(b) Pavage tronqué



(c) Structure hybride : barres et tétraèdres



(d) Variation des tétraèdres

FIGURE 3.12 – Principes morphologiques de la double nappe

3.1.4 Etudes à l'échelle du module

Après avoir décrit les principes d'agencement de la grille bi-directionnelle des nappes supérieure et inférieure de la structure spatiale, nous nous focalisons maintenant sur les éléments tétraédriques qui les relient et en particulier sur leur réponse morpho-structurelle.

3.1.4.1 Définition géométrique du module

La localisation des arêtes supérieure et inférieure d'un tétraèdre est fixée par la géométrie de la grille. Cependant, la longueur de celles-ci, ainsi que la géométrie des quatre arêtes latérales, peuvent être variables et décrites par des paramètres supplémentaires.

Le module répond à trois symétries :

— une réflexion par rapport au plan yz

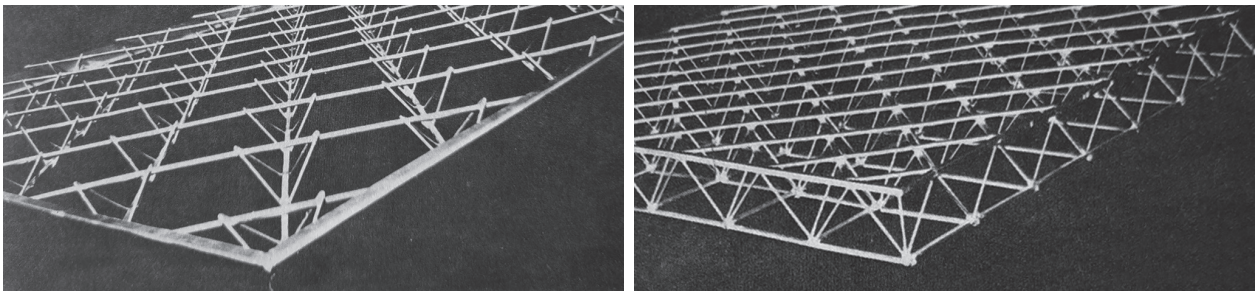
— une réflexion par rapport au plan xz

— une isométrie composée d'une réflexion par rapport au plan xy, puis une rotation de $\pi/2$ atour de l'axe $\overrightarrow{z}$

En considérant ces symétries et la définition globale de la grille, quatre paramètres sont suffisants pour définir de façon univoque la géométrie courbe du tétraèdre. Ces paramètres sont ensuite intégrés dans l'optimisation de forme décrite plus loin.

Le premier paramètre μ, coefficient de remplissage de la cellule, détermine la position des sommets du tétraèdre le long des membrures auxquelles il est connecté (Fig. 3.14a). Il est défini comme une proportion de la longueur ℓ du côté de la cellule et $\mu\ell$ est donc la longueur des arêtes inférieure et supérieure du tétraèdre. Si $\mu = 1$, alors la structure est en configuration « triangulée », les sommets du tétraèdre étant confondus avec les intersections des membrures. Si $\mu < 1$,

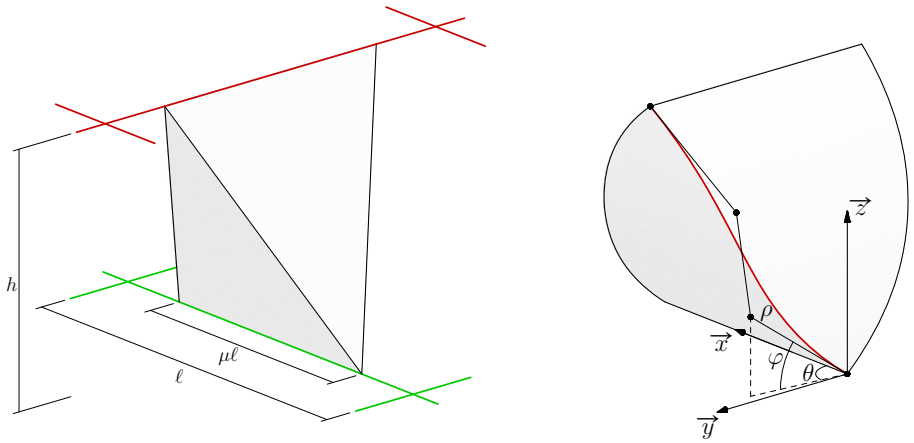
alors la structure adopte une configuration Vierendeel, comme dans le cas du *Tétragrid*, expérimentation structurelle menée par Robert Le Ricolais avec des systèmes à barres. A noter que, contrairement à notre cas d'étude, les nappes supérieure et inférieure sont unidirectionnelles.



(a) Nappe *Tétragrid* (b) Nappe classique

FIGURE 3.13 – Expérimentations structurelles de systèmes réticulés
Robert Le Ricolais [128]

Les trois autres paramètres (θ, φ, ρ) déterminent la géométrie des faces des tétraèdres. Plus précisément, ces trois paramètres décrivent la courbe d'intersection de deux faces adjacentes, qui, par translation le long des arêtes supérieure et inférieure, génère la géométrie cylindrique des faces (généralement non circulaires). La courbe intersection est donnée par une courbe tridimensionnelle de type Béziers cubique. Les courbes de Béziers de degré trois sont définies par quatre points, ou encore par les deux tangentes d'extrémité. Dans notre cas, une seule tangente est suffisante étant donné les symétries du module. L'origine de cette tangente se trouve sur un sommet et son extrémité est définie en coordonnées polaires dans un repère local centré sur le même sommet du tétraèdre et dont l'axe $\overrightarrow{x}$ est orienté par l'arête située sur la membrure. De cette manière, θ et φ déterminent la direction et ρ la norme du vecteur (Fig. 3.14b).



(a) Position des sommets : h, μ (b) Géométrie des arêtes : θ, φ, ρ

FIGURE 3.14 – Paramétrisation du tétraèdre

Le tétraèdre à faces planes peut être obtenu à partir de plusieurs combinaisons de paramètres qui génèrent une courbe de Béziers rectiligne : soit les tangentes sont de longueurs nulles, soit

elles sont colinéaires. Dans le premier cas, $\rho = 0$, quelles que soient les valeurs de θ et φ. Dans le second cas, par un calcul trigonométrique direct, on trouve $\theta = 45°$ et $\varphi = \arctan\left[\frac{\sqrt{2}h}{\mu\ell}\right]$, quelle que soit la valeur de ρ.

Cette paramétrisation permet une grande richesse formelle à partir d'un nombre très limité de paramètres. La figure 3.15, représente quelques membres d'une famille à trois paramètres (θ, φ, ρ) dans l'espace tridimensionnel des paramètres normalisés ; les autres paramètres intervenant dans la définition de la cellule sont fixés aux valeurs suivantes : $h = 0.6\,\text{m}$, $\ell = 1.15\,\text{m}$, $\mu = 0.6$.

Parmi la variété possible des morphologies, on peut identifier cinq types caractéristiques (Fig. 3.15 et 3.16) :

— tétraèdre à face planes ($\rho = 0$ ou $\theta = 45°$,$\varphi = \arctan\left[\frac{\sqrt{2}h}{\mu\ell}\right]$) : t_1 ;

— tétraèdre dont le centre de courbure des faces est toujours situé vers l'extérieur (par ex. pour $\theta = 0°, \varphi = 0°, \rho = 0.3\,\text{m}$) : t_2 ;

— tétraèdre dont le centre de courbure des faces est toujours situé vers l'intérieur (par ex. pour $\theta = 90°, \varphi = 0°, \rho = 0.3\,\text{m}$) : t_3 ;

— tétraèdre dont le centre de courbure des faces est situé vers l'extérieur à proximité de la base triangulaire de la face et vers l'intérieur à proximité du sommet (par ex. pour $\theta = 45°, \varphi = 90°, \rho = 0.3\,\text{m}$) : t_4 ;

— tétraèdre dont le centre de courbure des faces est situé vers l'intérieur à proximité de la base triangulaire de la face et vers l'extérieur à proximité du sommet (par ex. pour $\theta = 45°, \varphi = 0°, \rho = 0.3\,\text{m}$) : t_5.

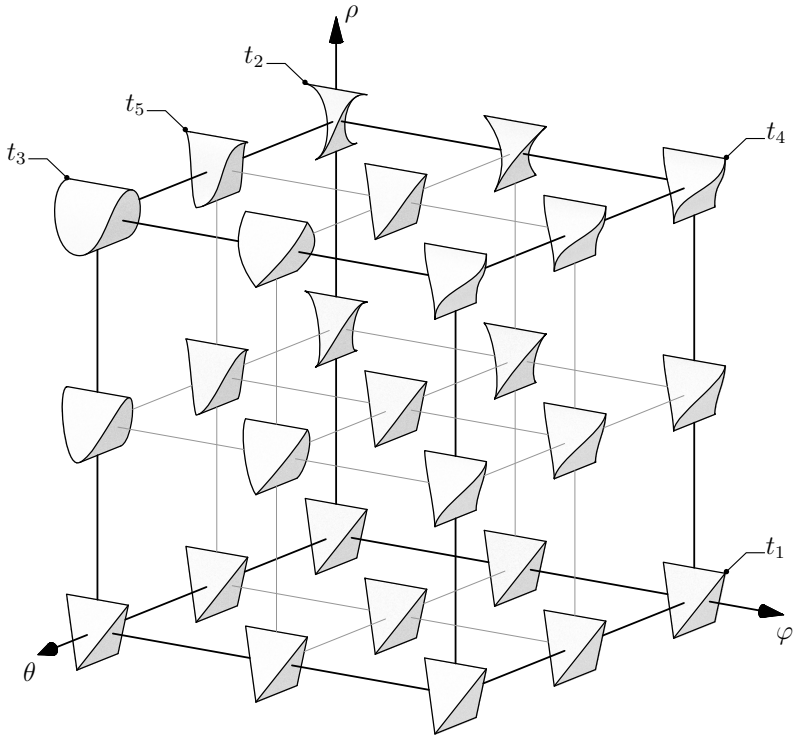
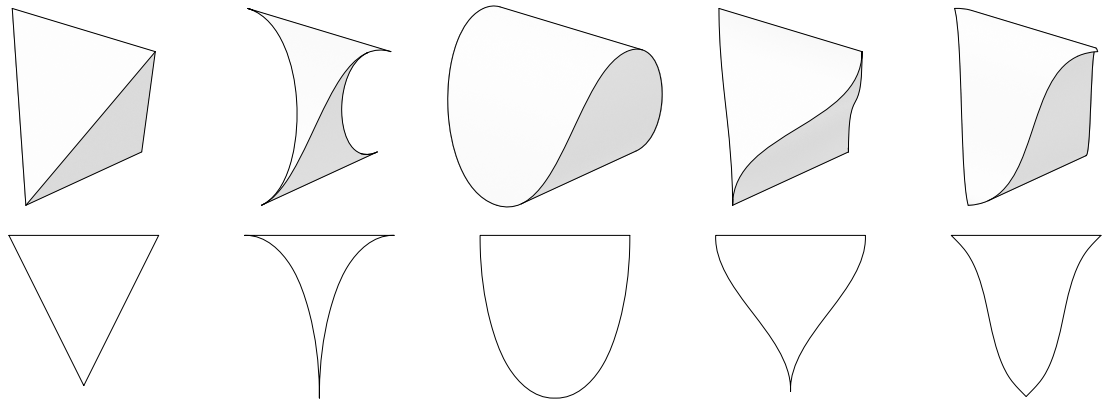


FIGURE 3.15 – Variation géométrique des tétraèdres en fonction de θ, φ et ρ



(a) t1 (b) t2 (c) t3 (d) t4 (e) t5

FIGURE 3.16 – Cinq typologies de tétraèdres

Enfin, nous profitons de cette définition géométrique pour définir deux mesures utilisées plus tard, en particulier lors de la définition de contraintes d'optimisation. La première mesure est la largeur des faces du tétraèdre à mi-hauteur, notée $\ell_{h/2}$. La seconde mesure correspond au rayon de courbure minimal de la face du tétraèdre. Les faces étant cylindriques, il s'agit également du rayon de courbure minimal de la directrice du cylindre, noté R_{min}

3.1.4.2 Comportement structurel

Considérée d'un point de vue macroscopique comme une plaque plane horizontale, une structure spatiale à double nappe chargée verticalement présente des déformations principalement dues aux moments fléchissants et aux efforts tranchants. Par analogie aux poutres prismatiques en I fléchies, dont les semelles supérieure et inférieure sont respectivement comprimées et tendues et l'âme cisaillée, les membrures des deux nappes horizontales de notre structure sont majoritairement soumises à des efforts axiaux et les éléments intermédiaires (les modules tétraédriques) sont soumis aux efforts tranchants.

Afin de mieux saisir l'optimisation globale menée dans la partie suivante, nous menons une étude préliminaire sur un simple module tétraédrique soumis à un chargement typique de cisaillement en observant particulièrement la question de la raideur et du flambement des parois. Nous nous concentrons sur les paramètres propres à la forme du tétraèdre (θ, φ, ρ). Les autres paramètres sont fixés à des valeurs cohérentes avec les dimensions du prototype $(\ell = 1.15\,\mathrm{m}, h = 0.6\,\mathrm{m}, \mu = 0.6)$

Une étude exhaustive de la réponse mécanique des modules sous les différentes sollicitations possibles est menée en partie 3.2.

3.1.4.2.1 Définition du modèle d'analyse aux éléments finis

L'étude de chargement en cisaillement d'un module tétraédrique est réalisée grâce à un modèle paramétrique aux éléments finis. Le logiciel utilisé est le module d'analyse structurelle Karamba3D (version 1.3.3) [295] intégré à l'environnement de programmation visuel Grasshopper 3D (version 1.0.0007), lui-même développé au sein du logiciel de conception graphique Rhinoceros 3D (version 6 SR32).

Le module est orienté dans l'espace de façon à ce que les rives basse et haute soient alignées respectivement selon les axes $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$.

Les conditions de sollicitation en cisaillement du module dans le prototype sont celles d'un chargement réparti le long des rives supérieure et inférieure. Afin de reproduire des conditions similaires à l'échelle du module, nous disposons deux poutres infiniment raides sur les parties rectilignes du tétraèdre ; cela nous permet de simplifier la modélisation en ayant recours à des conditions d'appuis et de chargement ponctuels décrites ci-dessous.

Le module est ainsi appuyé de façon isostatique en quatre points et en respectant les symétries du module. En ces points, les rotations sont laissées libres et les directions de translations bloquées sont indiquées par des flèches (Fig. 3.17) et sont listées ci-dessous :

— points d'extrémités de la rive inférieure : directions $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$;

— point central de la rive inférieure : direction $\overrightarrow{x}$;

— point central de la rive supérieure : $\overrightarrow{y}$.

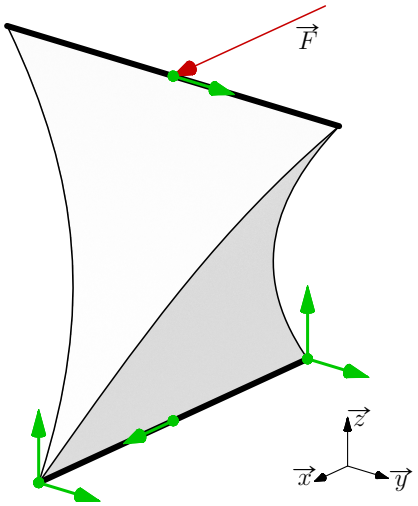


FIGURE 3.17 – Conditions d'appuis et chargement

Le module est chargé ponctuellement par une force horizontale selon l'axe $\overrightarrow{x}$ d'une valeur $\overrightarrow{F} = 10\,\text{kN}$ sur le point central de la rive supérieure. Cette charge est répartie uniformément sur la rive supérieure par la poutre infiniment raide. Le matériau utilisé est l'acier S235, caractérisé par les propriété élastiques suivantes : module d'élasticité : $E = 210\,\text{GPa}$, coefficient de Poisson : $\nu = 0.3$, masse volumique : $\rho_{ac} = 7850\,\text{kg/m}^3$.

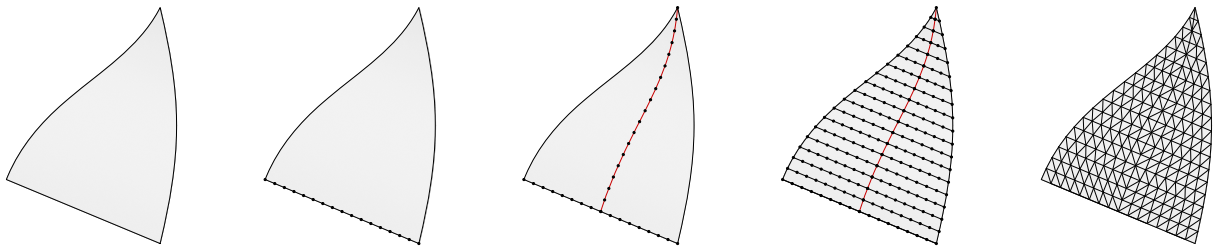
Le logiciel Karamba3D ne possède que deux types d'éléments [296] : un élément poutre de type Timoshenko, utilisé pour modéliser la poutre infiniment raide, et un élément plaque de type TRIC [297,298], utilisé pour modéliser les faces des tétraèdres. Les éléments de type TRIC sont des éléments linéaires triangulaires. Étant donné les symétries du module, il suffit de mailler une seule face du tétraèdre puis d'appliquer les transformations adéquates pour compléter le maillage.

Celui-ci est généré comme suit (Fig. 3.18) :

— division égale de la rive rectiligne selon la longueur objectif ℓ_{div}, donnant la base de la première rangée de triangles ;

— détermination de la hauteur des triangles pour un rapport d'aspect proche du triangle équilatéral ;

— subdivision de la directrice du cylindre selon la hauteur déterminée précédemment ;
— tracé et subdivision de toutes les bases des triangles selon les règles de la surface développable ;
— génération des triangles par une triangulation de Delaunay.



(a) Surface à mailler (b) Division de la rive inférieure (c) Division de la directrice (d) Bases des triangles (e) Triangulation de Delaunay

FIGURE 3.18 – Étapes du maillage

La densité du maillage est donc pilotée par le seul paramètre ℓ_{div}. Le paramètre n_{elt}, lié au paramètre ℓ_{div}, indique le nombre d'éléments dans une face du tétraèdre.

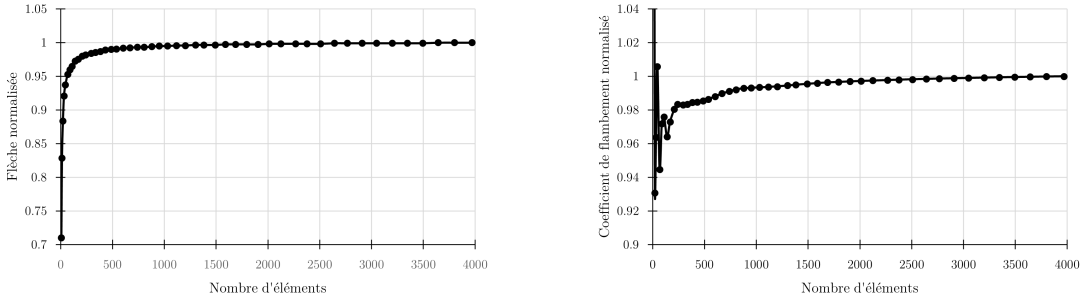
Afin de déterminer la densité nécessaire du maillage pour l'analyse aux éléments finis, deux études de convergences sont menées. La première porte sur un tétraèdre plat pour lequel le paramètre $\rho = 0$, les paramètres θ et φ n'ayant alors plus d'influence sur la forme. La seconde porte sur un tétraèdre courbe avec pour valeurs de paramètres $\theta = 20°$, $\varphi = 30°$, $\rho = 0.35\,\text{m}$. La démarche consiste à diminuer progressivement la longueur de division ℓ_{div} et à relever la valeur de déplacement δ_x selon l'axe $\overrightarrow{x}$ et la valeur du coefficient de charge critique de flambement linéaire CF. Ces deux valeurs, normalisées par les valeurs convergées, sont tracées dans les figures 3.19 et 3.20 en fonction de n_{elt} pour les tétraèdres plat et courbe.

On considère que la fonction converge lorsque l'écart relatif entre l'incrément considéré et la valeur de convergence est inférieur à 5%. Les valeurs minimales de ℓ_{div} et n_{elt} respectant cette hypothèse sont consignées dans le tableau 3.1, croisant type de tétraèdre et grandeur observée. On constate que la convergence intervient nettement plus rapidement pour le tétraèdre plat que pour le tétraèdre courbe. Cela provient du type d'élément imposé par le logiciel de calcul, les éléments triangulaires linéaires étant moins à même de rendre compte des effets de la courbure que les éléments quadratiques.

Afin d'utiliser un modèle paramétrique avec une densité de maillage identique quel que soit le type de tétraèdre ou grandeur observée, on adopte la longueur de subdivision la plus petite, soit $\ell_{div} = 0.03\,\text{m}$.

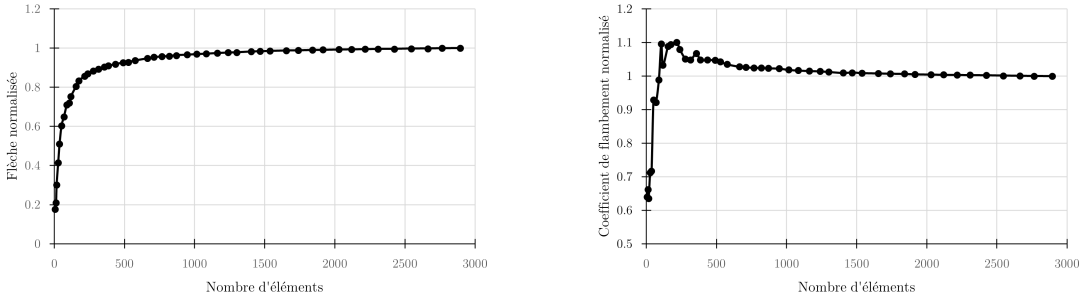
TABLE 3.1 – Etude de convergence

Densité maillage	δ_x		CF	
	ℓ_{div} [m]	n_{elt} [u]	ℓ_{div} [m]	n_{elt} [u]
Tétraèdre Plat	0.10	66	0.14	31
Tétraèdre Courbe	0.04	315	0.03	710



(a) Déplacement en tête δ_x (b) Coefficient de flambement CF

FIGURE 3.19 – Etude de convergence pour le tétraèdre plat



(a) Déplacement en tête δ_x (b) Coefficient de flambement CF

FIGURE 3.20 – Etude de convergence pour le tétraèdre courbe

3.1.4.2.2 Etude paramétrique des performances mécaniques

Le nombre limité de variables intervenant dans cette étude nous permet, pour l'instant, l'exploration exhaustive des solutions générées par la variation des paramètres dans leur domaine de variation défini ainsi :

— $\theta \in [0°, 90°]$;
— $\varphi \in [0°, 90°]$;
— $\rho \in [0\,\text{m}, 0.3\,\text{m}]$.

Le paramètre ρ est limité à la valeur $\rho = h/2 = 0.3\,\text{m}$ afin d'éviter les cas dégénérés de tétraèdres où les faces s'auto-intersectent en partie centrale ($\ell_{h/2}<0$). Comme indiqué précédemment, les autres variables sont fixées : $\ell = 1.15\,\text{m}$, $h = 0.6\,\text{m}$, $\mu = 0.6$.

Les performances mécaniques des différentes morphologies sont évaluées par la mesure du déplacement δ_x en tête de module et du coefficient de charge critique de flambement linéaire CF, pour des tétraèdres de masse constante. Le tétraèdre plat t_p avec une épaisseur de tôle de $e_{tp} = 1.5\,\text{mm}$ est choisi comme référence et la masse de ce dernier est donnée par la formule suivante :

$$m_{tp} = 2\mu h_f \ell e_{tp} \rho_{ac} \tag{3.1}$$

avec $h_f = \sqrt{h^2 + \left(\frac{\mu\ell}{2}\right)^2}$, hauteur d'une face triangulaire du tétraèdre.

La géométrie du module est fixée par le jeu de paramètres $(\ell, \mu, \theta, \varphi, \rho)$. Le choix d'effectuer la comparaison à masse constante nous amène à faire l'hypothèse méthodologique, certes contraire à la production industrielle de tôles, que l'épaisseur est une variable continue. Celle-ci est donnée, pour un tétraèdre courbe t_c, par l'expression suivante :

$$e_{tc} = \frac{A_{tp}}{A_{tc}} e_{tp} \tag{3.2}$$

avec $A_{tp} = 2\mu\ell h_f$, aire du tétraèdre plat et A_{tc}, aire du tétraèdre courbe, calculée numériquement.

Trois fonctions sont exprimées au moyen de cartographies tridimensionnelles : A_{tc} (aire du tétraèdre), δ_x (déplacement en tête) et CF (coefficient de flambement). L'espace tridimensionnel des paramètres est subdivisé en 20 sous-domaines dans chaque dimension, puis chacun des $20 \times 20 \times 20 = 8000$ sous-domaines tridimensionnels est évalué en son centre. Les valeurs des fonctions A_{tc}, δ_x, CF sont alors colorées et placées dans un cube normalisé à l'emplacement du triplet (θ, φ, ρ) correspondant. Afin d'accroître la lisibilité des fonctions, des surfaces d'iso-valeur choisies sont ajoutées ainsi que des coupes bidimensionnelles pour des valeurs de $\rho = cste$.

La fonction A_{tc}, aire du tétraèdre, peut être caractérisée par trois zones principales (Fig. 3.21) : une première zone, d'aire minimale, en bleu, autour des tétraèdres de type t_2, une seconde zone, d'aire maximale, en rouge, autour des tétraèdres de type t_3 et une troisième zone, d'aire intermédiaire, en vert, regroupant les types t_1, t_4 et t_5. Si on prend comme référence le tétraèdre plat (t_1), on peut identifier par ordre d'importance croissante deux facteurs liés modifiant l'aire des faces : la courbure et la découpe en plan des tôles (Fig. 3.16). Ainsi les tétraèdres de type t_2 qui présentent un centre de courbure toujours situé vers l'extérieur possèdent des patrons de découpe de tôle concaves sans point d'inflexion, ce qui aura pour effet de minimiser son aire. Le raisonnement inverse peut être tenu pour les tétraèdres de type t_3. Les tétraèdres de type t_4 et t_5, avec des positions de centre de courbure alternées, possèdent des patrons de découpe dont les bords sont en forme de S, ce qui explique que leur aire soit proche du tétraèdre plat de type t_1.

Au-delà de l'analyse de la variation de l'aire, ces résultats indiquent en creux la variation de l'épaisseur de la tôle puisque nous considérons des tétraèdres de masse constante. Les valeurs pour le tétraèdre de référence (type t_1) ainsi que pour les tétraèdres d'aire minimale (type t_2) et maximale (type t_3) sont consignées dans le tableau 3.2

TABLE 3.2 – Comparaisons des aires et des épaisseurs

	$\theta[^\circ]$	$\varphi[^\circ]$	ρ[m]	A_{tc}[m^2]	e_{tc}[mm]
Tétraèdre t_1	–	–	0.3	0.96	1.5
Tétraèdre t_2 : aire min	00	00	0.3	0.41	3.5
Tétraèdre t_3 : aire max	90	00	0.3	1.66	0.9

La fonction δ_x, déplacement en tête, qui témoigne de la raideur en cisaillement du module, peut également être caractérisée par trois zones principales (Fig. 3.22). La première zone, en bleu, de déplacement minimale (raideur maximale), regroupe principalement les tétraèdres plats (t_1). Cette zone couvre donc la partie inférieure du cube (proche de $\rho = 0$) ainsi qu'une crête dans la partie médiane ($\varphi \sim 45^\circ$) centrée sur le couple de valeur ($\theta = 45^\circ$,

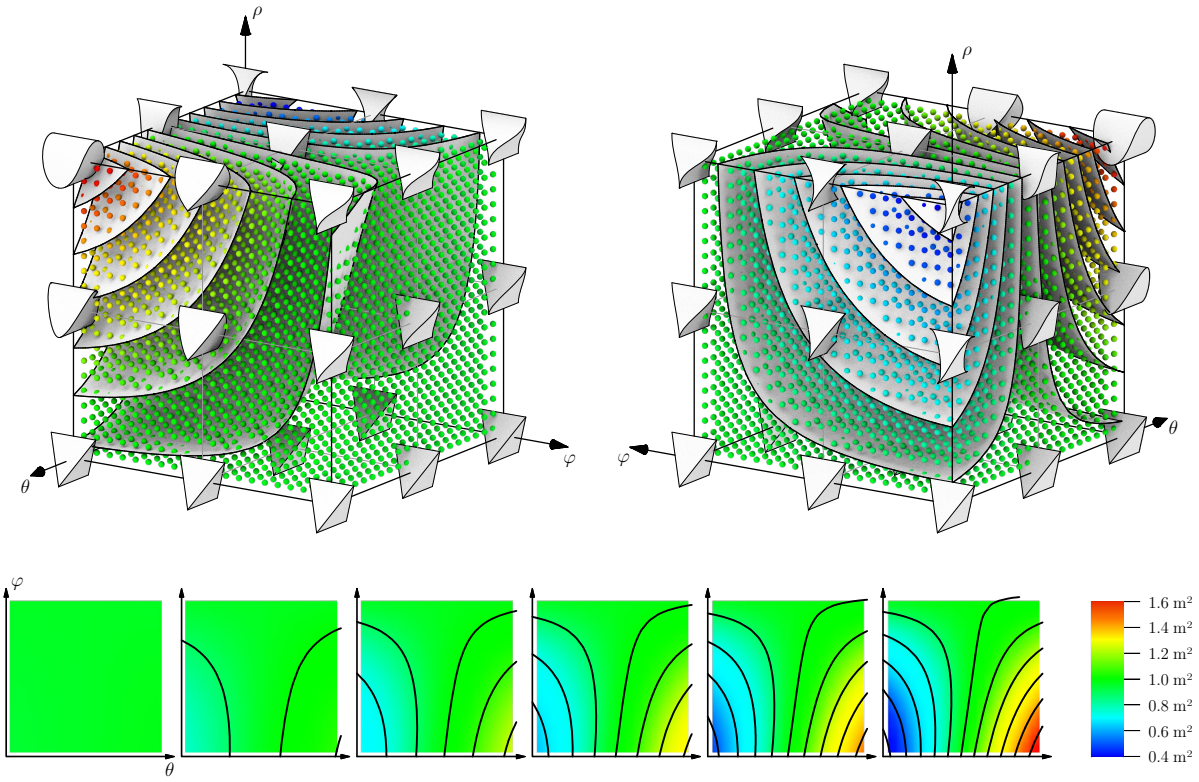


FIGURE 3.21 – Cartographies 3d et coupes à $\rho = cste$ de la fonction A_{tc}, aire du tétraèdre

$\varphi = \arctan\left[\frac{\sqrt{2}h}{\mu\ell}\right] = 50.88°$) qui définit également le tétraèdre plat. Les tétraèdres plats présentent une bonne réponse en cisaillement grâce à une transmission efficace des efforts le long des faces planes et des plis rectilignes des tôles qui sont sollicitées en effort axial. On note aussi que la ligne de crête est infléchie vers la zone de paramètres des tétraèdres courbes t_2 ($\theta \sim 0°$, $\varphi \sim 0°$). Cela s'explique cette fois, non pas par sa morphologie, mais plutôt par la forte épaisseur dont ce type bénéficie en raison de son aire réduite. La seconde zone, en rouge, de déplacement maximal (raideur minimale), regroupe les tétraèdres de type t_4 ($\varphi \sim 90°$). A épaisseur de tôle comparable aux tétraèdres plats, le type t_4 est doublement pénalisé par sa forme ; la courbure de ses faces et la disposition de la matière vis-à-vis de la sollicitation à proximité des appuis ne permettent pas une transmission efficace des efforts. Enfin, la troisième zone, en cyan/vert, de déplacement intermédiaire, regroupe les tétraèdres de type t_3 et t_5 ($\theta \sim 0°$, $\varphi \sim [45°, 90°]$). Ils sont pénalisés par la courbure de leurs faces et pour le tétraèdre t_3 par la faible épaisseur de ses tôles à cause de son aire importante.

La fonction CF, coefficient de flambement linéaire, présente une cartographie plus complexe étant donnée la nature locale du phénomène (Fig. 3.24). Cependant, il est possible d'identifier deux tendances principales. Une première zone, en rouge/orange, montre une faible résistance au flambement. Elle regroupe deux types de tétraèdres : les tétraèdres plats t_1 et les tétraèdres convexes t_3 ($\theta \sim 90°$, $\varphi \sim 0°$). Ces deux types de tétraèdres sont pénalisés par leur géométrie, pour les tétraèdres t_1 qui sont plats sur l'intégralité de leurs faces et pour des tétraèdres t_3 sur de larges zones à proximité du sommet arrondi des faces. La figure 3.23 montre les premiers modes de flambement pour ce type de tétraèdre. On note pour la fonction CF, encore plus clairement que dans le cas de la fonction δ_x, une « cheminée » verticale de faible résistance au

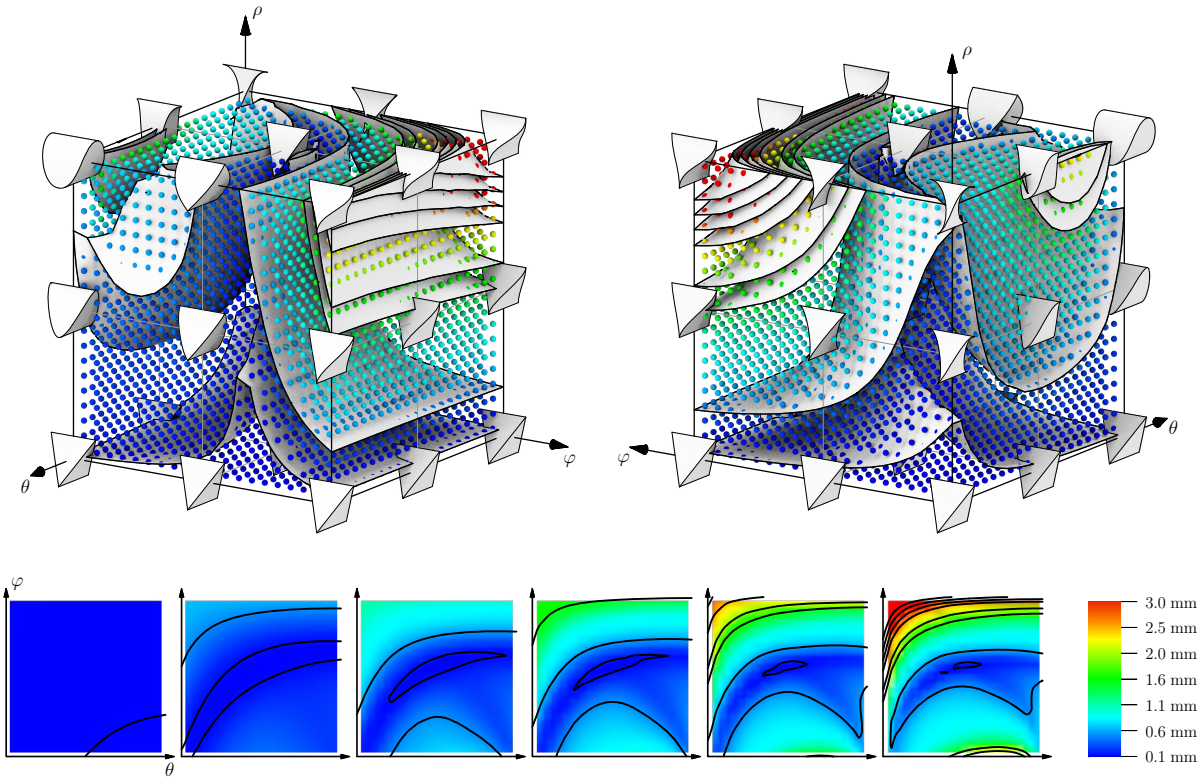


FIGURE 3.22 – Cartographies 3d et coupes à $\rho = cste$ de la fonction δ_x, déplacement en tête

flambement centrée sur le couple de valeur ($\theta = 45°$, $\varphi = \arctan\left[\frac{\sqrt{2}h}{\mu\ell}\right] = 50.88°$) caractérisant le tétraèdre plat. Une seconde zone, en bleu, montre une résistance importante au flambement. Elle est concentrée sur les tétraèdres de type t_3 ($\theta \sim 0°$, $\varphi \sim [0°, 45°]$) qui combinent plusieurs caractéristiques favorables : courbure sur toute la face, faible longueur de flambement et épaisseur importante de la tôle.

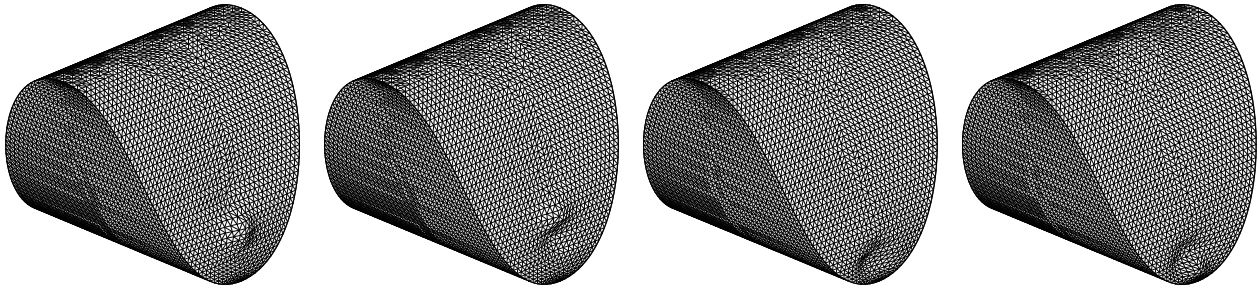


FIGURE 3.23 – Premiers modes de flambement pour le tétraèdre t_3

En guise de synthèse, nous consignons les résultats de déplacements et de coefficients de flambement de trois tétraèdres dans le tableau 3.3 : le tétraèdre t_1 de référence, qui se trouve être également le plus performant pour le déplacement en tête, le tétraèdre t_2, qui est le plus performant pour le coefficient de flambement. Pour information, nous ajoutons un troisième tétraèdre t_b de masse équivalente représentant une utilisation classique pour les structures

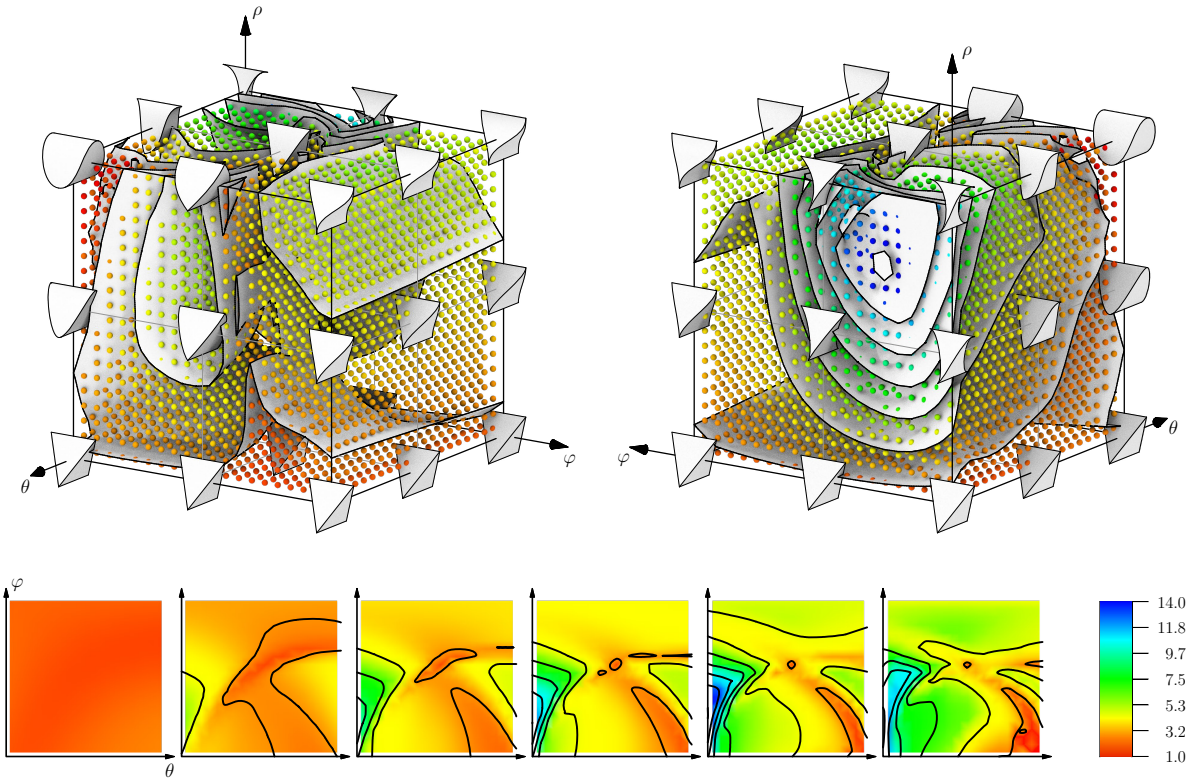


FIGURE 3.24 – Cartographies 3d & coupes à $\rho = cste$ de la fonction CF, coefficient de flambement

spatiales : les arêtes sont articulées entre elles et matérialisées par des barres rectilignes. Nous ne rentrons pas plus en détail dans la comparaison avec cette solution, car elle doit être considérée avec les difficultés technologiques des connexions qui l'accompagnent. Nous choisissons pour section un tube circulaire creux d'une épaisseur de $e_{tb} = 3\,\text{mm}$ dont le rayon R_{tb} est calculé pour respecter la contrainte de masse constante. On obtient d'une part la masse m_{tb} du tétraèdre à barres :

$$m_{tb} = L_{tb} S_{tb} \rho_{ac} \tag{3.3}$$

avec $L_{tb} = 2\mu b + 4\sqrt{h^2 + \frac{(\mu b)^2}{2}}$, linéaire de tube et $S_{tb} = \pi e_{tb}(2R_{tb} - e_{tb})$, aire de la section du tube.

Or, par la contrainte d'égalité des masses, on sait également que :

$$S_{tb} = \frac{m_{tp}}{L_{tb}\rho_{ac}} = \frac{2\mu\ell e_{tp} h_f}{L_{tb}} \tag{3.4}$$

On en déduit le rayon R_{tb} :

$$R_{tb} = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{tb}}{\pi e_{tb}} - e_{tb}\right) \tag{3.5}$$

Pour les valeurs numériques énoncées plus haut, on trouve $R_{tb} = 15.5\,\text{mm}$.

TABLE 3.3 – Comparaison des performances mécaniques selon le type du tétraèdre

	δ_x		CF	
	absolu[mm]	relatif[%]	absolu[-]	relatif[%]
Tétraèdre t_1 : δ_x min	0.12	100	1.3	100
Tétraèdre t_2 : CF max	0.79	652	14.2	1086
Tétraèdre t_b : à barres	0.21	171	20.9	1592

Les surfaces d'iso-valeurs nous informent sur la nature non convexe des trois fonctions observées. Cette considération nous guidera dans le choix de l'algorithme à implémenter dans les optimisations à venir.

Toujours dans le même espace tridimensionnel de représentation, il est possible de mettre en place des cartographies croisées du type illustré en figure 3.25. C'est un moyen efficace de visualiser quels modules répondent à plusieurs critères simultanément. Pour chaque triplet (θ, φ, ρ), le voxel correspondant est affiché si toutes les conditions spécifiées sont satisfaites.

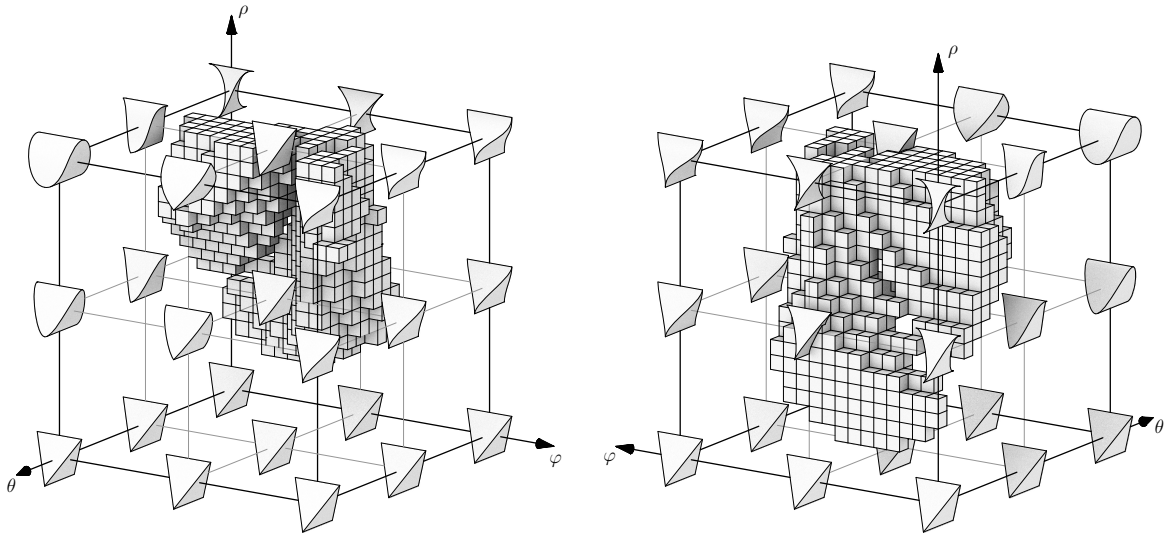


FIGURE 3.25 – Cartographie croisée montrant les tétraèdres satisfaisant la triple contrainte : $0.75\,\mathrm{m}^2 < A_{tc} < 1\,\mathrm{m}^2$, $\delta_x < 10\,\mathrm{mm}$, $CF > 4$

L'hypothèse méthodologique formulée dans cette étude comparative des modules est celle de tétraèdres à masse constante. La démarche mise en place pourrait être appliquée à partir d'autres d'hypothèses comme celle de tétraèdres à tôles d'épaisseur constante, plus en phase avec la réalité constructive. C'est d'ailleurs cette hypothèse que nous serons amenés à faire par la suite pour la fabrication du prototype à échelle 1.

3.1.5 Optimisation de la structure

Les études précédentes montrent que les modules possèdent des propriétés structurelles très contrastées selon leur morphologie. Inversement, selon la localisation au sein du prototype présenté aux paragraphes 3.1.2 et 3.1.3 (Fig. 3.9), les forces s'exerçant sur un module donné varient fortement et la forme du tétraèdre peut s'adapter afin d'améliorer son efficacité structurelle. Ainsi, nous proposons de mener une optimisation par recherche de forme des tétraèdres pour augmenter les performances structurelles et diminuer la quantité de matériaux impliquée.

3.1.5.1 Définition du modèle d'analyse

La taille relativement modeste du prototype d'étude par rapport à une structure réelle, ne permet pas de laisser tous les paramètres libres de variation pour une fabrication à échelle 1. Quelques études préliminaires nous ont conduits à fixer une épaisseur unique de 1.5 mm pour toutes les tôles, ainsi qu'une section constituée d'une double cornière 30×30×3mm pour les membrures. La géométrie de chaque module étant décrite par quatre paramètres $(\mu, \theta, \varphi, \rho)$ et en considérant le paramètre global de hauteur structurelle h défini plus haut, le prototype est entièrement déterminé par $4n_{mod} + 1$ paramètres, n_{mod} définissant le nombre de modules différents.

L'étude est menée, comme dans la partie précédente, sur le module d'analyse structurelle Karamba3D via un modèle paramétrique aux éléments finis. Le matériau utilisé est exclusivement l'acier S235. Le maillage et les éléments sont similaires, à l'exception de la poutre infiniment raide, remplacée par la section en double cornières.

Le chargement choisi est un cas de charge unique, uniforme et vertical, dont l'intensité correspond à la combinaison du poids propre estimé de la structure, d'une vêture en double vitrage et de charges climatiques (vent + neige). Ce chargement surfacique correspond à un chargement ponctuel de 1.5 kN appliqué à chaque nœud de la nappe inférieure, soit un chargement total de 24 kN. Le modèle est simplement appuyé verticalement sur les 16 nœuds périphériques.

L'optimisation que nous menons est assez exigeante en temps de calcul, car elle nécessite de nombreuses itérations sur un modèle comportant lui-même un grand nombre d'éléments (40 tétraèdres maillés finement). De plus, Karamba3D effectue des calculs au second ordre pour déterminer le coefficient de charge critique de flambement linéaire. Afin de diminuer le temps de calcul global, nous nous appuyons sur les symétries de la structure, du chargement et des appuis. Ceux-ci comportent quatre plans de symétrie : $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$ et $x + y = -1$. Il est donc en théorie possible d'effectuer les calculs sur 1/8 du modèle. Dans la pratique, nous effectuons les calculs sur le quart de plan ($x > 0$, $y > 0$) pour éviter de tronquer des tétraèdres et ainsi faciliter la mise en œuvre des conditions d'appuis traduisant les symétries du système sur des barres uniquement (Fig. 3.26).

Selon les symétries identifiées, le nombre de module différents n_{mod} est réduit à 6 ; le modèle est alors entièrement déterminé par 25 paramètres.

3.1.5.2 Définition des paramètres d'optimisation

L'objectif de l'optimisation est double. Tout d'abord, il s'agit de minimiser la masse du prototype, ce qui est équivalent à minimiser l'aire (A) des tétraèdres puisque nous travaillons à épaisseur de tôles et à section de membrures constantes. Ensuite, il s'agit de maximiser la résistance mécanique de la structure. Dans notre cas, le critère critique de résistance est le

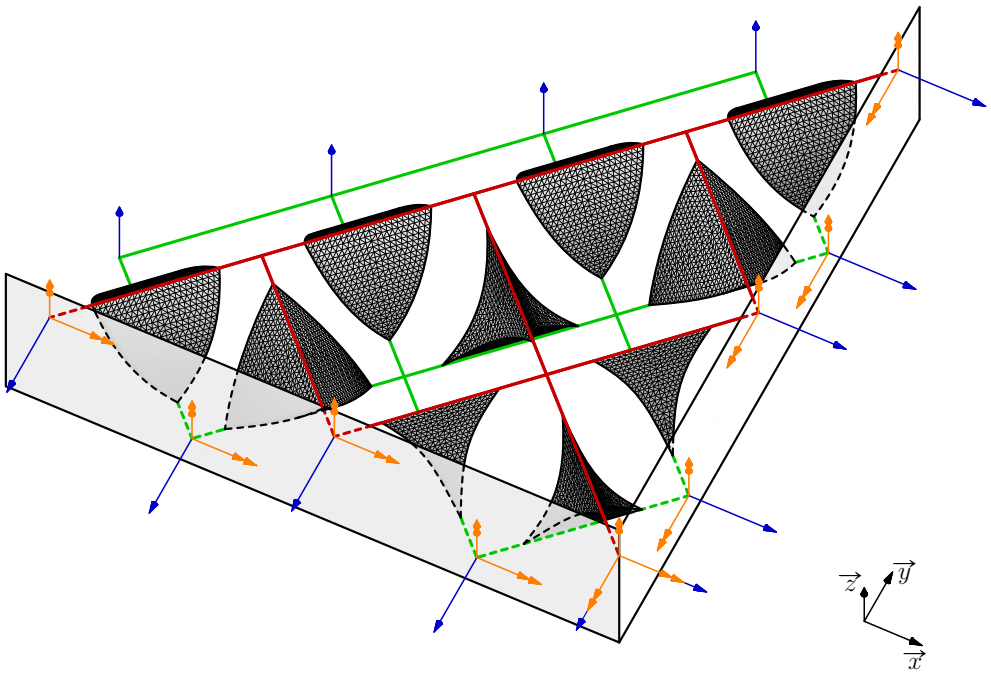


FIGURE 3.26 – Conditions d'appuis appliquées à un quart du modèle (simple flèche bleue : blocage en translation, double flèche orange : blocage en rotation)

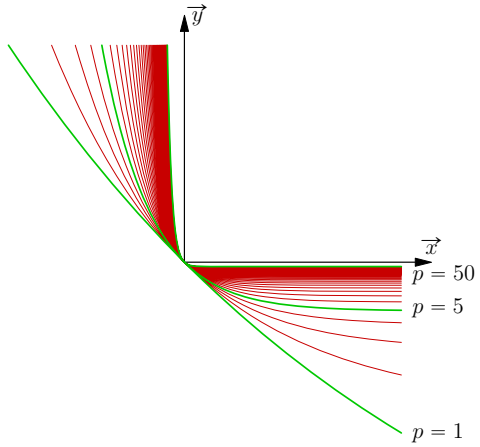
flambement local des tôles d'acier, caractérisé par le coefficient de charge critique de flambement (CF), et non le flambement des membrures qui présentent de faibles longueurs de flambement, ni le taux d'utilisation en contrainte étant donné le matériau à haute résistance employé.

Cette recherche d'optimum est réalisée sous contraintes de deux types. Le premier type concerne le critère de raideur qui limite le déplacement vertical δ_z à 30 mm ($\sim L/200$) ; cette limite est notée $\bar{\delta}_z$. Le second type concerne les contraintes de fabrication. Le rayon de courbure minimal des tôles R_{min} doit être supérieur à 1 m pour faciliter la mise en forme manuelle et pour rester dans le domaine élastique du matériau ; cette limite est notée $\bar{R}_{min}$. D'autre part, la largeur du tétraèdre à mi-hauteur $\ell_{h/2}$ doit être supérieure à 0.2 m, valeur limite notée $\bar{\ell}_{h/2}$, pour des questions de faisabilité technique et d'ergonomie dans les assemblages. Le problème d'optimisation se formule donc ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{h,\mu_i,\theta_i,\varphi_i,\rho_i} \quad & A \quad \& \quad \max_{h,\mu_i,\theta_i,\varphi_i,\rho_i} \quad CF \\ \text{s.t.} \quad & \delta_z \leqslant 30\,\text{mm} \\ & R_{min} \geqslant 1\,\text{m} \\ & \ell_{h/2} \geqslant 0.2\,\text{m} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Afin que les différentes fonctions à minimiser/maximiser possèdent une pondération comparable lors du processus d'optimisation, les variables sont normalisées. Pour cela, on utilise une configuration initiale de la structure constituée de tétraèdres sans courbure, possédant une hauteur structurelle $h = 0.5\,\text{m}$ et tous les coefficients de remplissage des cellules à $\mu_i = 0.6$. On obtient alors pour valeurs initiales de la fonction aire $A_0 = 33\,\text{m}^2$ et $CP_0 = 3$ pour la fonction coefficient de flambement.

Nous choisissons de mener une optimisation mono-objectif : pour cela, nous combinons linéairement au sein de la même fonctionnelle les fonctions A et CF à pondérations égales ainsi que les contraintes par une méthode de pénalisation. Les contraintes sont exprimées à l'aide de fonctions barrières exponentielles d'inégalités [299] du type :



$$c(x) = \frac{1}{p}\left(e^{-p(x-\bar{x})} - 1\right) \tag{3.7}$$

FIGURE 3.27 – Fonction barrière d'inégalité pour différentes valeurs de p

avec p, le paramètre barrière de la fonction et $\bar{x}$ la valeur plancher de la contrainte.

La valeur de p définit la sévérité de la pénalisation, la contrainte étant parfaitement respectée quand $p \to +\infty$ (Fig. 3.27). Cependant, le choix d'un paramètre p élevé, du fait de la nature de la fonction, génère des valeurs numériques très importantes en cas de non-respect de la contrainte, mettant en péril la convergence de l'optimisation. Dans notre cas, nous fixons la valeur à $p = 250$, émettant l'hypothèse de la satisfaction de la contrainte et de la bonne convergence de l'optimisation.

L'énergie totale à minimiser se formule ainsi :

$$E = e_A - e_{CF} - c_{\delta_z} - c_{R_{min}} - c_{\ell_{h/2}} \tag{3.8}$$

avec pour fonctions à optimiser :

$$e_A = \frac{A}{A_0}, \qquad e_{CF} = \frac{CF}{CF_0} \tag{3.9}$$

et pour contraintes :

$$c_{\delta_z} = \frac{1}{p}\left(e^{-p(\bar{\delta}_z - \delta_z)} - 1\right), \; c_{R_{min}} = \frac{1}{p}\left(e^{-p(\bar{R}_{min} - R_{min})} - 1\right), \; c_{\ell_{h/2}} = \frac{1}{p}\left(e^{-p(\bar{\ell}_{h/2} - \ell_{h/2})} - 1\right) \tag{3.10}$$

Contrairement aux fonctions à optimiser, il n'est pas nécessaire de normaliser les entrées des contraintes, celles-ci agissant toutes dans le même sens et prenant des valeurs proche de 0 ou $-\infty$.

Étant donné la non-convexité des fonctions à évaluer et des contraintes à appliquer, nous choisissons une optimisation non-linéaire globale implémentée dans la bibliothèque NLopt [300] basé sur l'algorithme DIRECT [301].

3.1.5.3 Résultats

L'optimisation a convergé vers une solution satisfaisant les contraintes prescrites en 5000 itérations, soit environ 11 h et 41 min. Les valeurs des fonctions et contraintes, notées dans le tableau 3.4, font état d'une aire totale de tôle de $\sim$40 m^2 et d'un coefficient de flambement de 13.2. Les résultats mettent en évidence que les contraintes de rayon minimal de tôle $\bar{R}_{min}$ et de largeur de module à mi-hauteur $\bar{\ell}_{h/2}$ sont déterminantes puisque ces valeurs sont atteintes pour certains tétraèdres. Cela montre également que les fonctions contraintes mises en place fonctionnent avec la précision souhaitée et que la valeur du paramètre barrière p est correctement choisie. En revanche, la contrainte de raideur ($\bar{\delta}_z = 30$ mm) n'est pas activée, couverte par les autres contraintes de fabrication, plus exigeantes.

Les valeurs prises par les paramètres suite à l'optimisation sont indiquées dans le tableau 3.5 pour les six tétraèdres différents ($T_i, i \in \{1 \dots 6\}$)

Table 3.4 – Valeurs des fonctions et des contraintes après optimisation

A[m^2]	CF[-]	δ_Z[mm]	R_{min}[m]	$\ell_{h/2}$[mm]
40.08	13.2	3.8	1.02	0.21

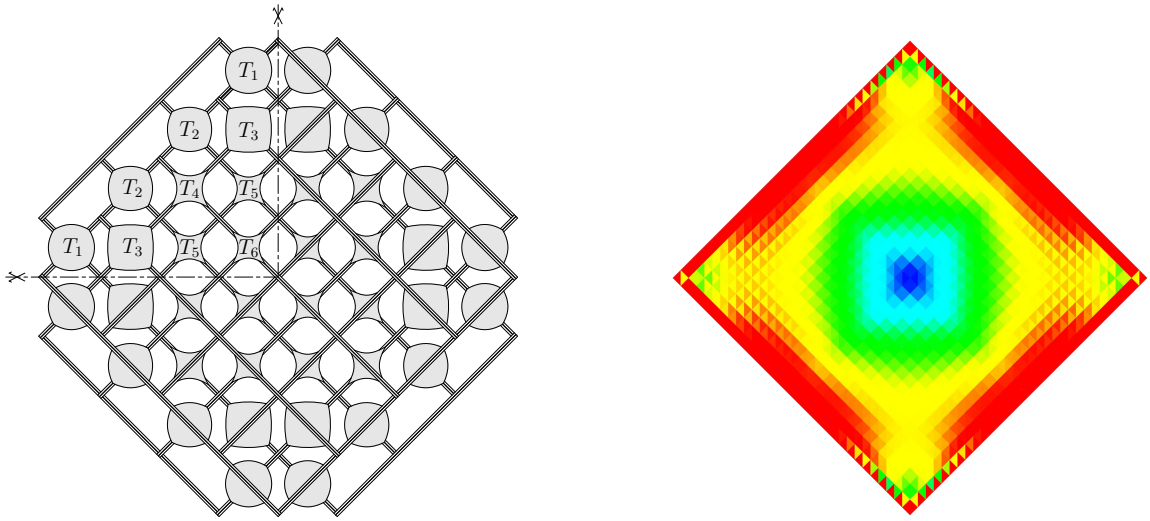
Table 3.5 – Valeurs des paramètres après optimisation

	h[m]	μ[-]	θ[°]	φ[°]	ρ[m]
Global	0.604	–	–	–	–
T_1	–	0.600	74.890	48.192	0.296
T_2	–	0.597	70.574	45.119	0.270
T_3	–	0.689	60.001	49.979	0.270
T_4	–	0.640	15.020	41.150	0.306
T_5	–	0.556	20.542	46.253	0.325
T_6	–	0.556	14.634	45.123	0.302

La distribution de la morphologie des modules fait ressortir deux tendances principales : l'augmentation de la taille des modules du centre vers la rive et un passage progressif du type t_2 (faces concaves) au type t_3 (faces convexes), encore une fois du centre vers la rive. Ces deux tendances peuvent s'expliquer qualitativement en comparant la distribution de la valeur des paramètres avec la répartition des contraintes de cisaillement dans un modèle continu analogue : une plaque épaisse, homogène, appuyée sur ses quatre bords et soumise à un chargement vertical uniforme.

Les membrures supérieures et inférieures constituées de double cornières voient apparaître dans leur partie libre des efforts de flexion et de cisaillement (configuration Vierendeel), le paramètre μ, de valeur plus importante proche des rives vient réduire ces longueurs libres afin d'offrir une meilleure réponse structurelle (Fig. 3.28).

L'interprétation de la variation de la concavité est moins directe et les études précédentes menées sur un module seul ne nous renseignent que partiellement, car réalisées à masse constante, contrairement au prototype dont les tétraèdres sont cette fois d'épaisseur constante.

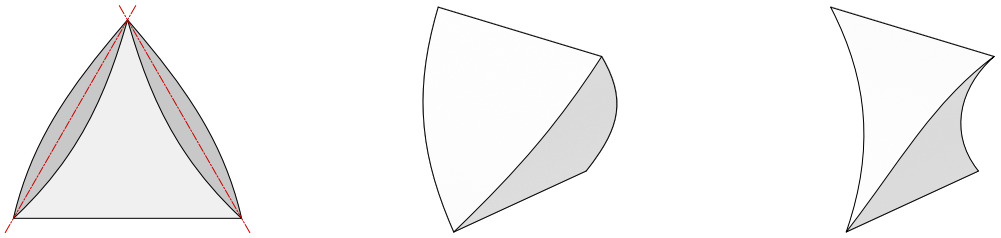


(a) Distribution des modules après optimisation

(b) Distribution des efforts de cisaillement dans une plaque continue

FIGURE 3.28 – Comparaison entre modèles discret et continu

Pour mieux comprendre le phénomène, nous comparons les performances du tétraèdre convexe situé aux angles du prototype (T_1) avec celles d'un tétraèdre concave de même hauteur, même coefficient de remplissage μ_1 et même épaisseur de tôle. Le tétraèdre concave sélectionné est celui dont les faces sont symétriques, en élévation, à celles du tétraèdre convexe par rapport aux faces du tétraèdre plat (Fig. 3.29). Cette symétrie n'est bien sûr plus respectée dans l'espace tridimensionnel du fait de la forme développée des faces. Placé dans les mêmes conditions expérimentales que dans la partie 3.1.4, les résultats compilés dans le tableau 3.6 montrent une réponse mécanique plus efficace pour le tétraèdre convexe, aussi bien au niveau du déplacement δ_x que du coefficient de flambement CF. Ces performances sont suffisamment contrastées pour que le tétraèdre convexe prenne l'avantage sur le tétraèdre concave sur les rives, bien que moins favorable d'un point de vue de la masse impliquée.



(a) Symétrie des faces

(b) Tétraèdre convexe

(c) Tétraèdre concave

FIGURE 3.29 – Définition géométrique des tétraèdres convexe et concave

D'un point de vue plus quantitatif, le rôle de la courbure introduite dans les tétraèdres peut être évaluée en comparant d'une part le modèle résultant de l'optimisation et d'autre part un modèle identique (section des membrures, hauteur structurelle h, coefficients de remplissage μ_i)

TABLE 3.6 – Comparaison des performances mécaniques des tétraèdres convexe et concave à épaisseur constante

	δ_x		CF		A	
	abs[mm]	rel[%]	abs[-]	rel[%]	abs[m^2]	rel[%]
Tétraèdre convexe	0.65	100	6.89	100	1.20	100
Tétraèdre concave	1.08	166	4.29	62	0.70	58

dont toutes les faces des tétraèdres sont planes. On observe les valeurs absolues et relatives de la flèche verticale δ_z, du coefficient de flambement CF, de l'aire des tétraèdres A et la masse totale m_{tot}, reportées dans le tableau 3.7.

Les valeurs de flèche verticale, d'aire des tétraèdres et de poids total sont très comparables. La différence relative du poids est moindre que celle des aires des tétraèdres du fait que les deux structures comparées partagent les mêmes nappes supérieure et inférieure. En revanche, la solution avec tétraèdres courbes présente un net avantage, avec un coefficient de charge de flambement quatre fois supérieur (Fig. 3.30).

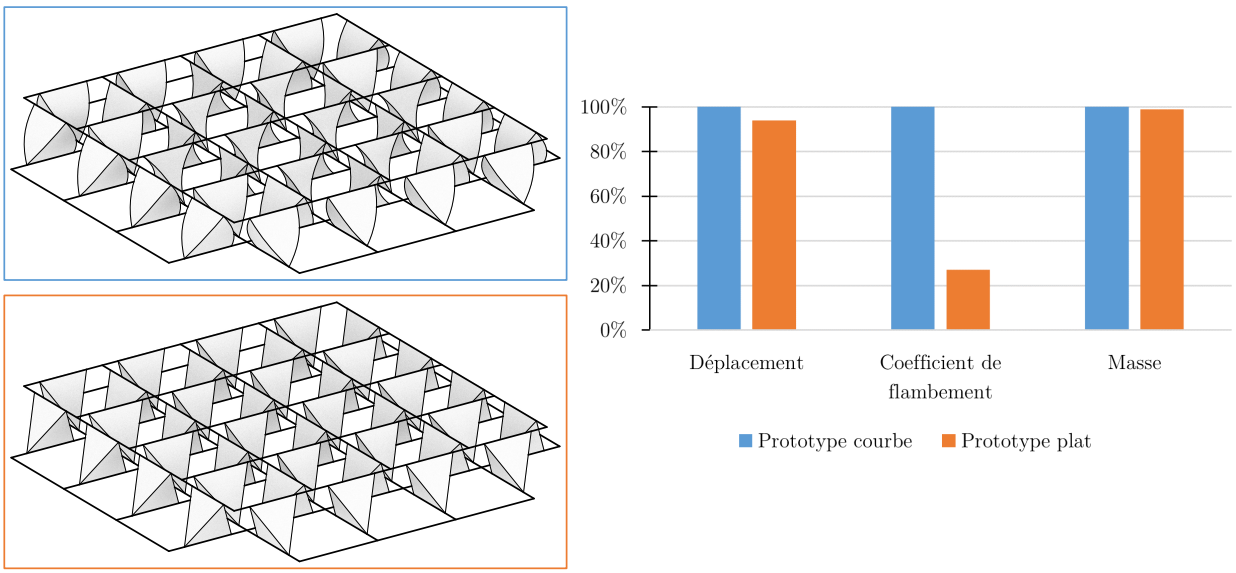


FIGURE 3.30 – Impact de la courbure sur les performances du modèle (simple flèche bleue : blocage en translation, double flèche orange : blocage en rotation)

TABLE 3.7 – Contribution de la courbure aux performances mécaniques du prototype

	δ_z		CF		A		m_{tot}	
	abs[mm]	rel[%]	abs[-]	rel[%]	abs[m^2]	rel[%]	abs[kg]	rel[%]
Prot. courbe	3.8	100	13.2	100	40.08	100	761	100
Prot. plat	3.6	94	3.6	27	39.12	98	750	99

3.1.6 Fabrication et montage

Le prototype a fait l'objet de deux montages successifs.

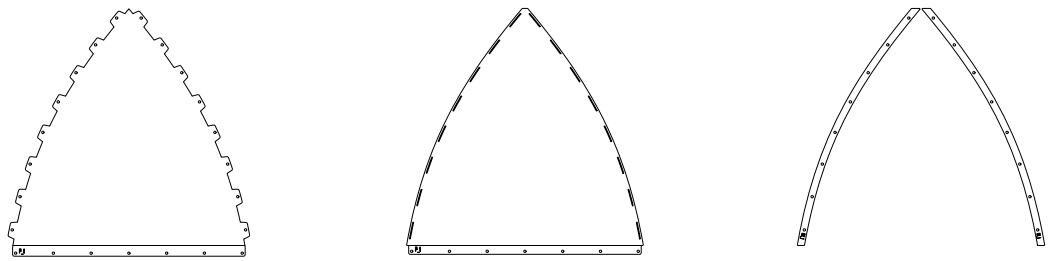
Le premier a été réalisé en juin 2019 à Grenoble à l'occasion d'une collaboration avec l'Université Grenoble-Alpes, département génie civil. Quatre étudiants ont choisi pour sujet de leur diplôme de fin d'étude la fabrication de la structure et la prise de mesures expérimentales.

La structure a été ensuite transportée puis remontée de façon plus pérenne sur un système de piétement sur le campus de l'Ecole des Ponts en septembre 2021. Cette fois c'est une partie de l'équipe des permanents et des doctorants du laboratoire Navier qui a prêté main forte.

La limitation des moyens humains et matériels inhérents au contexte académique ont permis d'éprouver les hypothèses émises à propos de la facilité de fabrication et de mise en œuvre de la structure spatiale développée.

3.1.6.1 Pré-fabrication des tétraèdres

Chaque tétraèdre est constitué de quatre panneaux de 1.5 mm d'épaisseur, mis en forme par cintrage élastique et maintenu en place par un système de fixation décrit plus loin. Le matériau utilisé est l'acier S235, traité contre la corrosion par galvanisation. Les dimensions moyennes des panneaux (contenus dans un carré de 0.8 m de côté) et la faible épaisseur ont dirigé le choix vers une technologie de découpe laser (Fig. 3.31).



(a) Panneau tenon (×2) (b) Panneau mortaise (×2) (c) Plats de fixation (×2)

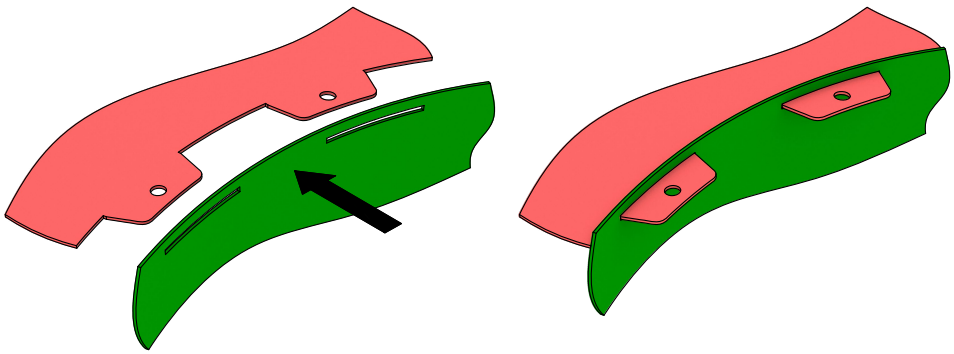
FIGURE 3.31 – Plans de découpe du module n°1

Le bord droit est façonné dans un premier temps avec un pli, dont l'angle est propre à chaque type de tétraèdre, afin de faciliter la fixation ultérieure aux double-cornières des membrures (Fig. 3.35).

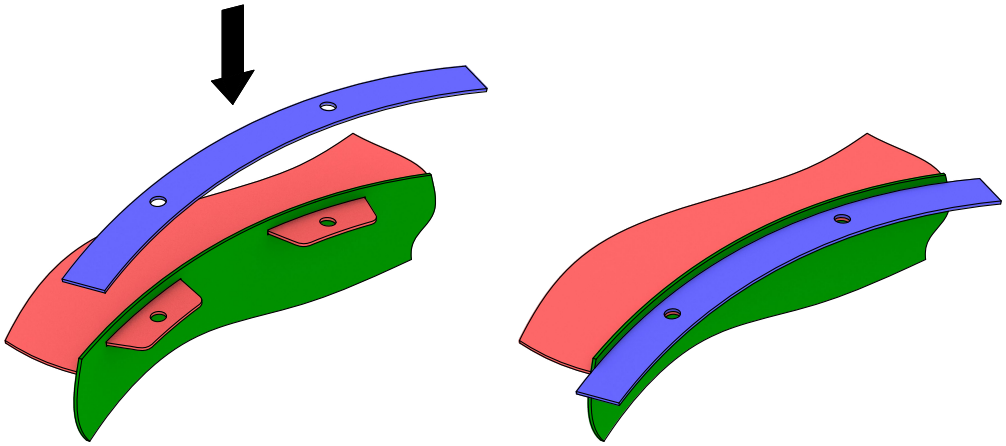
Le long des bords courbes des modules, nous avons affaire à un assemblage de type « rapiéçage » (Chap. 2). Il n'est donc pas envisageable de concevoir un patron de découpe unique pour le module puis de le mettre en forme par pliage. Les quatre panneaux sont donc assemblés le long des bords courbes selon un principe proche de celui mobilisé pour la fabrication du prototype « Metal Euplectella Folie » et qui relève de l'assemblage tenon-mortaise avec clé de blocage.

Le tenon du panneau n°1 (en rouge) est inséré dans la mortaise du panneau n°2 (en vert). Une étroite bande courbe (en bleu) vient couvrir le tenon et applique une pression uniforme sur le panneau n°2 et en maintient la courbure. Enfin, l'ensemble est définitivement verrouillé par un boulon à tête bombé (BHC M6×10) et écrou borgne qui font office de clé de blocage (Fig. 3.32).

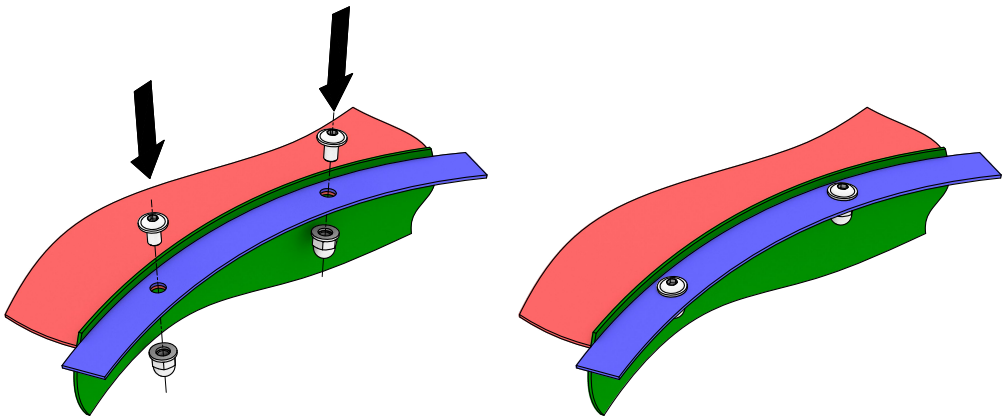
Le temps de fabrication d'un module est estimé environ à 30 min à deux personnes, soit 40 hh (heures-homme) pour l'ensemble des modules.



(a) Insertion tenon-mortaise



(b) Positionnement du plat de fixation



(c) Verrouillage de l'assemblage

FIGURE 3.32 – Séquence de montage de la rive courbe

3.1.6.2 Montage(s)

Le premier montage a eu lieu dans la halle d'essais de l'Université-Grenoble Alpes, département génie civil, et disposait de moyens de levage. Pour cette raison, la stratégie choisie a été celle d'un assemblage complet au sol puis d'un levage de la structure sur les seize étais périphériques faisant office d'appuis. La séquence de montage, illustrée en figure 3.33 est récapitulée ci-dessous.

(i) Réception et classement : l'intégralité des tôles des modules est suffisamment compacte pour être contenue sur une seule palette (Fig. 3.33a). Cependant, il est nécessaire de classer les différents composants par module (4 tôles + 4 bandes), mis en désordre par l'opération d'optimisation de mise en tôle pour la découpe laser (minimisation des chutes par imbrication des pièces).

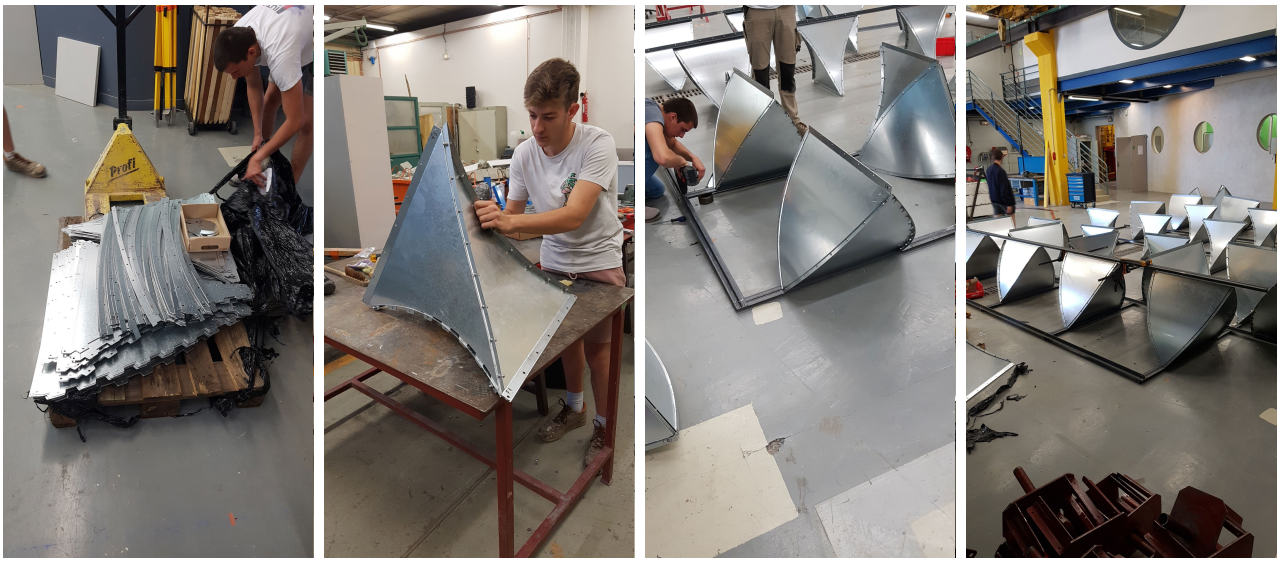
(ii) Pré-fabrication et stockage des 40 modules (Fig. 3.33b).

(iii) Assemblage de la nappe basse au sol : les double-cornières sont assemblées par les ailes horizontales à chaque intersection par quatre boulons à tête bombée (BHC M6×12) et écrou borgne (Fig. 3.35).

(iv) Assemblage des modules sur la nappe basse : le pli pratiqué sur les bords rectilignes des modules est moisé entre les ailes verticales des double-cornières (Fig. 3.33c et 3.35).

(v) Assemblage de la nappe haute : les membrures sont d'abord fixées au bord rectiligne supérieur des modules puis entre elles à chaque intersection (Fig. 3.33d).

(vi) Levage et appui sur les étais (Fig. 3.34).



(a) Réception en kit (b) Préfabrication d'un module (c) Assemblage de la nappe basse (d) Assemblage de la nappe haute

FIGURE 3.33 – Séquence de montage du prototype

Aux 40 hh déjà mentionnées pour la pré-fabrication des modules, il faut ajouter environ 50 hh pour le montage complet de la structure, soit un total d'environ 90 hh. Le montage s'est déroulé sans encombre et possédait le grand avantage du confort de travail à hauteur avec un accès simple et direct à tous les assemblages.



FIGURE 3.34 – Prototype levé et appuyé sur seize étais périphériques.
L'élingage est conservé pour des questions de sécurité.

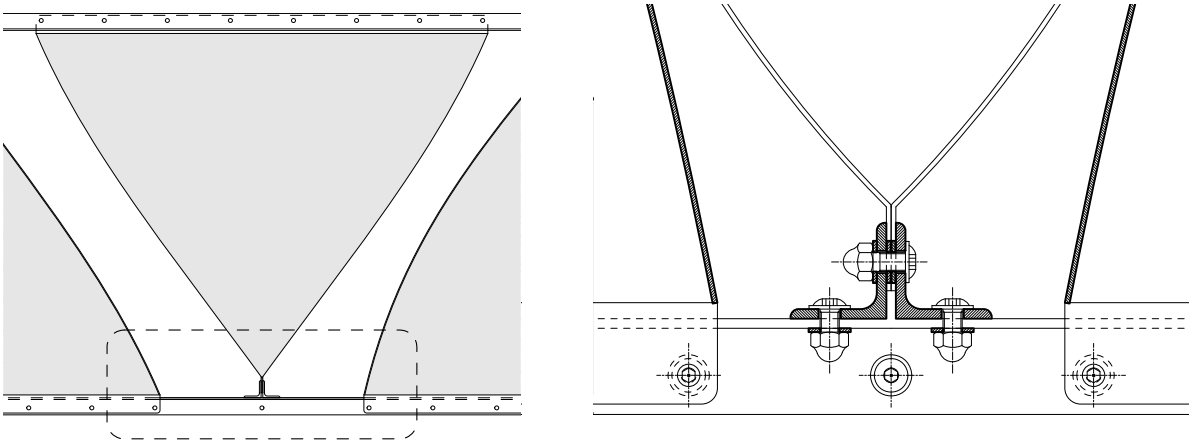


FIGURE 3.35 – Détail d'exécution de l'assemblage double-cornières/tétraèdres

Étant donné la part significative du temps dédié à la fabrication des modules, la structure n'a été démontée que partiellement afin d'en faciliter le remontage futur. Le prototype a donc été transporté puis entreposé à l'Ecole des Ponts en trois lots principaux : tétraèdres assemblés, cornières, quincaillerie.

Le second montage, relativement similaire au premier, diffère cependant en trois points.

Tout d'abord, la structure en double-nappe est augmentée d'un piétement constitué (Fig. 3.36) :

— d'une ceinture de fondation en profilés métalliques posés à même le sol ;

— de seize poteaux cruciformes, composés de quatre cornières 30×30×3mm, remplaçant les étais et offrant les appuis à la structure en double-nappe ;

— de trois panneaux de contreventement de 3 mm d'épaisseur en acier galvanisé.

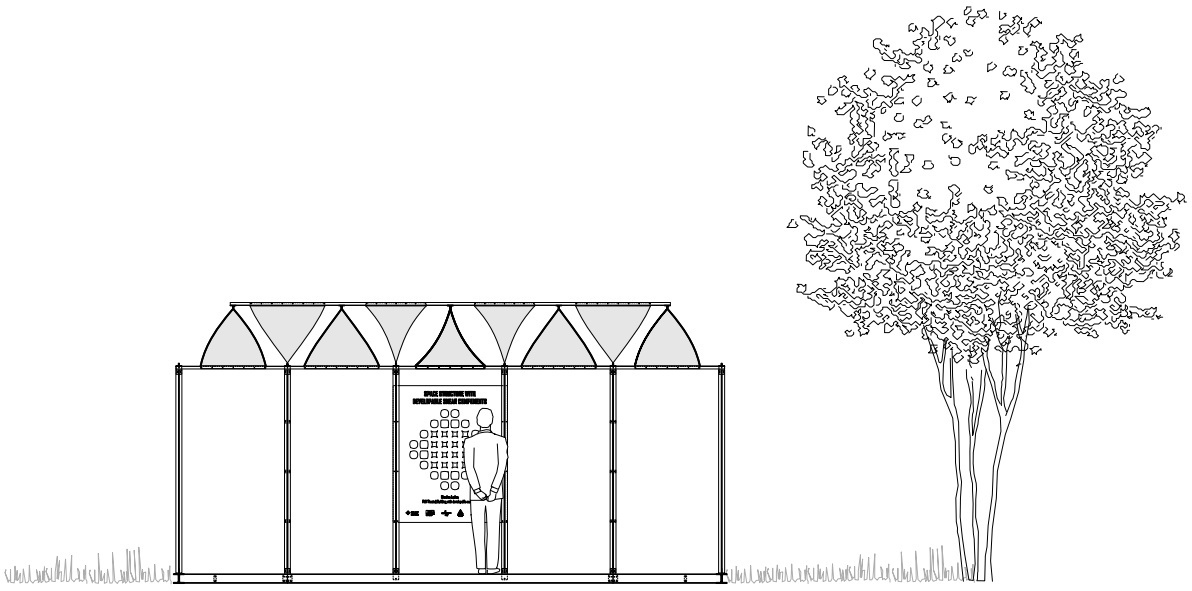


FIGURE 3.36 – Coupe sur l'installation du prototype sur le campus des Ponts et Chaussées

Ensuite, la structure a été montée à partir de modules pré-fabriqués, ce qui a réduit le temps de montage total à environ 70 hh au lieu des 90 hh du premier montage et cela malgré l'ajout du piétement. Cette pré-fabrication n'est pas la seule responsable du gain de temps réalisé, l'expérience acquise à Grenoble a également été précieuse.

Enfin, le montage en extérieur et la difficulté d'accès au site ne nous a pas permis de profiter de moyens de levage. Cela nous a conduits vers une technique de montage en hauteur, rendu possible par l'utilisation de plateformes sécurisées de travail de type « Gazelle ».

Les principales étapes sont illustrées figure 3.37 et résumées ci-dessous :

(i) Pose et nivellement des profilés de fondation : le cadre est constitué de huit parties, quatre angles et quatre parties centrales. Les angles sont soudées en atelier pour garantir une bonne précision de l'équerrage. Chaque partie est un H reconstitué à partir de deux profilés en U (UPE 100) assemblé par les âmes. Ce découpage permet la manutention des éléments par deux personnes (masse maximale d'un élément : 35 kg).

(ii) Pose des éléments verticaux : poteaux et contreventement. L'ensemble de la structure n'est stable qu'une fois la structure en double-nappe posée. Une stabilisation temporaire est apportée par quatre cornières d'angle.

(iii) Pose de la nappe inférieure. Celle-ci n'étant pas soutenue par le sol comme à Grenoble, une forte déformation apparaît sous son poids propre.

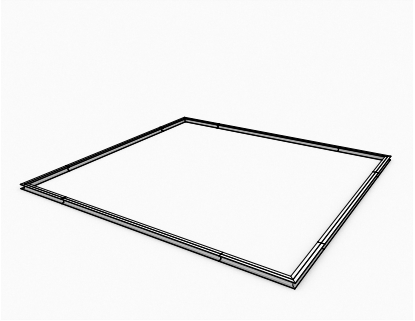
(iv) Étayage de la nappe inférieure afin de retrouver un niveau horizontal.

(v) Assemblage des modules sur la nappe basse.

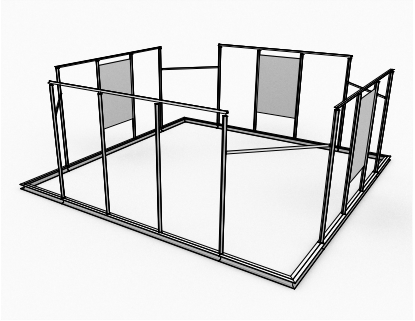
(vi) Assemblage de la nappe haute.

(vii) Dépose des éléments provisoires : étais et cornières de contreventement.

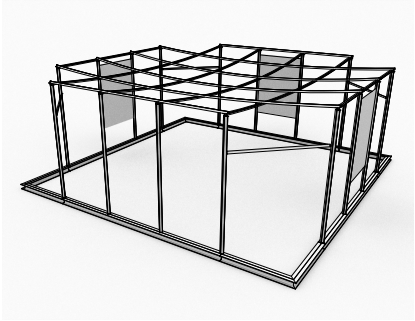
Le montage en hauteur, bien que permettant l'économie des moyens de levage, s'est révélé bien plus éprouvant que le montage au sol. En effet, les hauteurs de travail limitées offertes par les plateformes impliquaient un assemblage peu aisé. Un platelage complet juste en-dessous de la nappe inférieure, reconstituant ainsi les conditions du montage de Grenoble, aurait grandement facilité l'accès aux différentes parties de la structure. De plus, malgré la pré-fabrication des modules, un grand nombre d'assemblage par boulonnage reste à réaliser sur site (918 pour la nappe et 336 pour le piétement). Dans la partie 3.1.8 nous évoquons des pistes pour augmenter la part de pré-fabrication dans la réalisation de ce type de structures.



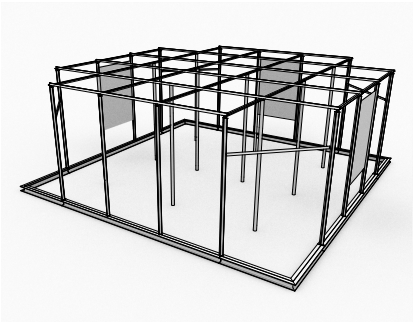
(a) Pose des profilés de fondation



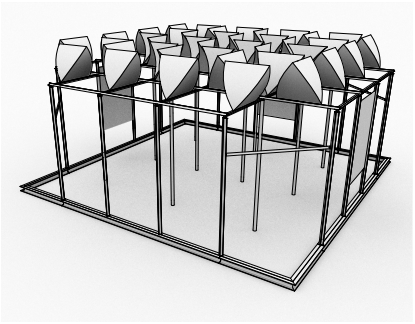
(b) Pose des éléments verticaux



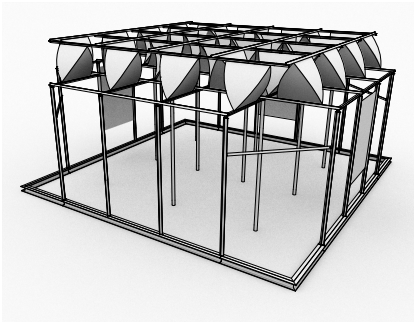
(c) Pose de la nappe inférieure



(d) Étayage de la nappe inférieure



(e) Assemblage des modules sur la nappe basse



(f) Assemblage de la nappe haute



(g) Dépose des éléments provisoires

FIGURE 3.37 – Séquence du montage aux Ponts et Chaussées



FIGURE 3.38 – Montage du prototype avec les équipes du Laboratoire Navier et de l'entreprise Viry



FIGURE 3.39 – Vue intérieure et de détail

3.1.7 Mesures expérimentales

Deux campagnes de mesures ont été menées par le laboratoire 3SR (UMR 5521) sur le prototype monté dans la halle d'essais de l'Université-Grenoble Alpes. Ces mesures nous permettent d'évaluer expérimentalement la réponse mécanique de la structure construite à échelle 1 et d'établir des comparaisons quantitatives avec les modèles d'analyse numérique aux éléments finis.

La première campagne concerne la mesure de déplacement sous chargement et a été réalisée par Vincent Richefeu. La seconde campagne mesure les fréquences propres et a été réalisée par Dominique Daudon.

3.1.7.1 Mesures de déplacements

La méthode utilisée pour évaluer les déplacements de la structure est celle de la corrélation d'images numériques. Deux clichés, pris avant et après chargement, sont comparés dans le plan vertical xz afin d'évaluer le déplacement des membrures de la nappe inférieure. Une première série de mesures donne l'allure globale, quoiqu'approximative, de la déformée sur la moitié de la portée. La seconde série, plus précise, se focalise sur la déformée locale à mi-portée.

3.1.7.1.1 Série n°1

La première série reproduit les conditions dans lesquelles le prototype a été optimisé : chaque nœud de la nappe inférieure reçoit un chargement ponctuel de 1.5 kN (sacs de sable).

Les symétries de la structure nous permettent de considérer les mesures effectuées sur deux demi-membrures de la nappe inférieure comme représentatives de la déformation de l'ensemble de la structure. La figure 3.40 illustre les points de chargement, la configuration de prise de vue et les éléments captés. L'appareil photo est placé en légère contre-plongée, ce qui permet de suivre les deux membrures sur un seul cliché, mais dégrade la qualité de prise de vue et offre une précision relativement médiocre, sans doute due à un problème de parallaxe. Des mouchetis imprimés sont disposés le long des deux membrures au niveau des fixations des tétraèdres.

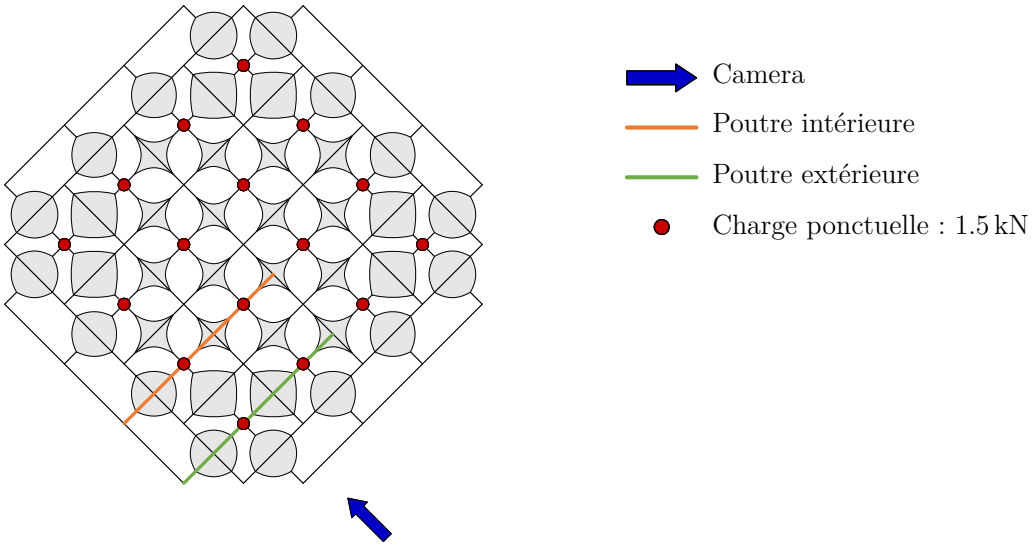
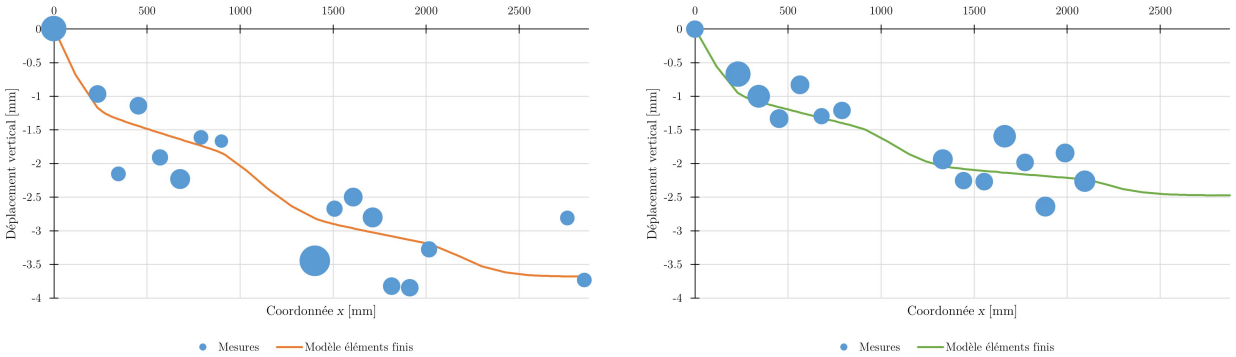


FIGURE 3.40 – Protocole d'acquisition : série n°1

Les graphiques des figures 3.41a et 3.41b représentent en ordonnées le déplacement vertical de la structure suite au chargement. Les valeurs relevées par corrélation d'images (δ_{CI}) sont représentées par des points bleus dont la taille est inversement proportionnelle au niveau de confiance des mesures (coefficients de corrélation). Ces valeurs sont aux nombres de 17 et de 15 pour respectivement les membrures intérieure et extérieure. Les courbes orange (poutre intérieure) et verte (poutre extérieure) représentent la déformée prédite par le modèle aux éléments finis (δ_{EF}). L'abscisse représente la coordonnée x sur la membrure ; $x = 0\,\text{mm}$ est l'appui au niveau de l'étai et $x = 2875\,\text{mm}$ est l'axe de symétrie de la structure.



(a) Poutre intérieure (b) Poutre extérieure

FIGURE 3.41 – Série n°1 : comparaison mesures / modèle aux éléments finis

On remarque bien, dans les deux cas, que le déplacement aux appuis ($x = 0\,\text{mm}$) est quasiment nul. Pour la membrure intérieure, l'ordre de grandeur des déplacements est de 1 à 2 mm au niveau du premier tétraèdre ($x = 575\,\text{mm}$), de 2.5 à 3.5 mm au niveau du second tétraèdre ($x = 1725\,\text{mm}$) et de 3 à 3.5 mm au niveau du troisième tétraèdre ou de la mi-portée ($x = 2875\,\text{mm}$). Pour la membrure extérieure, les déplacements sont d'environ 0.5 à 1.5 mm au niveau du premier tétraèdre et de 1.5 à 2.5 mm au niveau du second tétraèdre ; les mesures à mi-portée n'ont pas été effectuées pour la membrure extérieure.

Qualitativement, les analyses que nous formulons sont valables pour les deux membrures. Nous remarquons que les mesures effectuées sont conformes à la forme de flèche prédite par le modèle aux éléments finis qui est globalement celle d'une structure en flexion soumise à un chargement uniforme. Plus localement, on observe trois « paliers » (deux entiers et un demi au centre) qui correspondent à la localisation des tétraèdres. Cela témoigne de la discontinuité de raideur en cisaillement d'une telle structure.

Afin d'estimer quantitativement la qualité de la prédiction du modèle d'analyse numérique, on s'appuie sur les écarts (Δ_{δ_z}) et écarts relatifs ($\%\Delta_{\delta_z}$) entre les valeurs de flèche du modèle au éléments finis (δ_{EF}) et les mesures expérimentales réalisées par corrélation d'images (δ_{CI}) ainsi que sur leurs moyennes ($\overline{\Delta_{\delta_z}}$ et $\overline{\%\Delta_{\delta_z}}$) :

$$\begin{aligned} \Delta_{\delta_z} &= \delta_{EF} - \delta_{CI} & \%\Delta_{\delta_z} &= \frac{\delta_{EF} - \delta_{CI}}{|\delta_{EF}|} \times 100 \\ \overline{\Delta_{\delta_z}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta_{\delta_{z_i}} & \overline{\%\Delta_{\delta_z}} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \%\Delta_{\delta_{z_i}} \end{aligned} \tag{3.11}$$

avec n, le nombre de mesures.

TABLE 3.8 – Écarts absolus et relatifs entre mesures et modèle aux éléments finis

	$\overline{\Delta_{\delta_Z}}$[mm]	$\overline{\%\Delta_{\delta_Z}}$[%]
Membrure intérieure	0.08	4.98
Membrure extérieure	-0.08	-5.74

Les résultats, compilés dans le tableau 3.8 montrent une bonne correspondance entre mesures et prédiction numérique avec, dans les deux cas, un écart moyen $\overline{\Delta_{\delta_z}} < 0.1$ mm et un écart relatif moyen $\overline{\%\Delta_{\delta_z}} \sim 5\%$. Cependant la forte dispersion des mesures, ne permet pas de positionner la prédiction numérique par rapport aux mesures expérimentales : la raideur de la membrure intérieure semble surestimée, au contraire de la membrure extérieure. De plus, pour chacun des cas, on peut trouver des écarts relatifs pouvant varier de $\%\Delta_{\delta_z} = \pm 30\%$.

3.1.7.1.2 Série n°2

Pour pallier l'imprécision des mesures due à la prise de vue, la seconde série se concentre sur une seule membrure (intérieure), sur une longueur restreinte (~ 55 cm) en partie centrale.

Malheureusement, les conditions expérimentales n'ont pas permis de procéder à nouveau à un chargement complet trop coûteux en temps (et trop éprouvant !). Seul un quart du prototype a pu être chargé par quatre charges ponctuelles de 1.5 kN (Fig. 3.42). Cette configuration de chargement ne respectant pas les conditions de symétries énoncées précédemment, un modèle d'analyse aux éléments finis complet est mis en place afin de comparer les résultats.

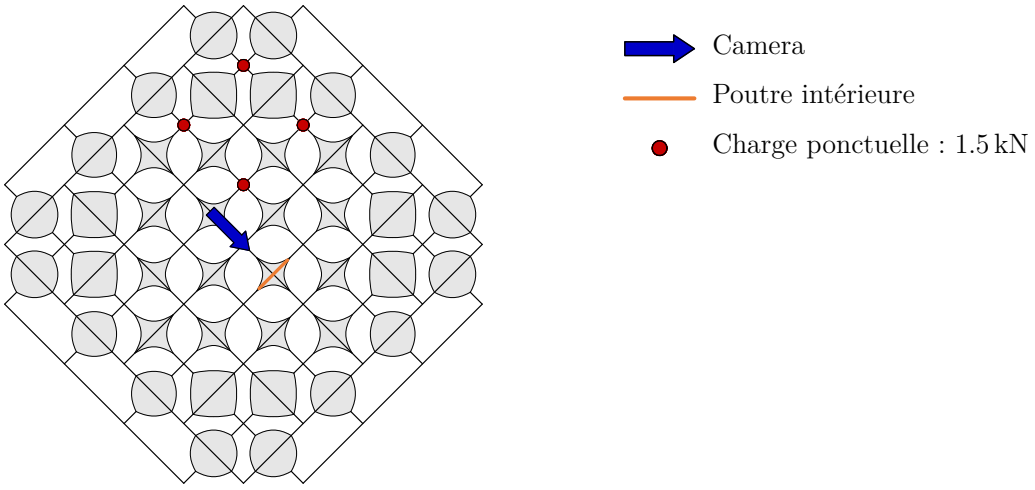


FIGURE 3.42 – Protocole d'acquisition : série n°2

Les conditions de prise de vue permettent d'atteindre une bien meilleure précision que lors de la première série avec une précision annoncée de ± 0.02 mm. Le graphique de la figure 3.43 représente en ordonnée, de façon similaire à la première série, le déplacement vertical suite au chargement dissymétrique de la structure. Les 153 valeurs relevées par corrélation d'images (δ_{CI}), localisées à mi-portée sur une longueur d'environ 55 cm, sont représentées par des points bleus. La courbe orange représente la déformée prédite par le modèle aux éléments

finis (δ_{EF}) sur la portée complète (0 mm $< x <$ 5750 mm). On constate bien, en conséquence du chargement dissymétrique, une forme de flèche également dissymétrique, constituée de déplacements plus importants au niveau des membrures libres et de cinq paliers au niveau des tétraèdres.

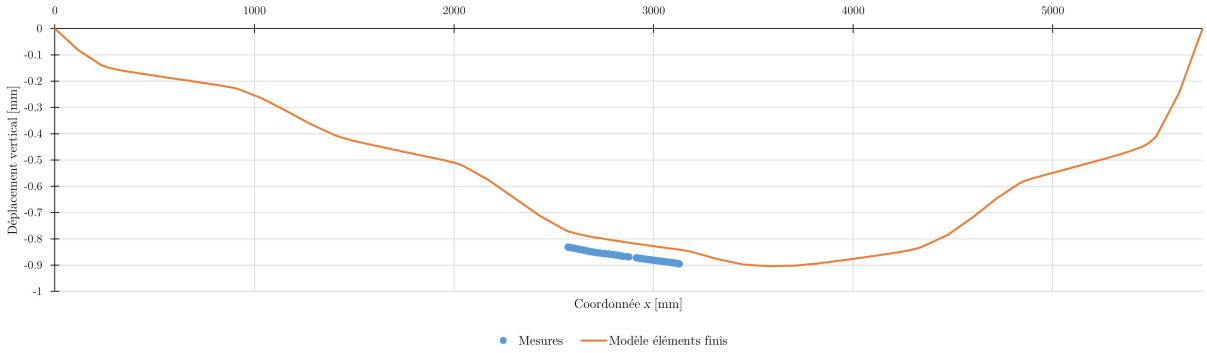


FIGURE 3.43 – Série n°2 : comparaison mesures / modèle aux éléments finis

Les mesures indiquent un déplacement vertical compris entre −0.83 mm et −0.90 mm avec un déplacement moyen de −0.87 mm, résultats cohérents avec la série n°1 pour un chargement global réduit au quart. Nous observons que les mesures suivent fidèlement la courbe de la flèche prédite par le modèle numérique avec un léger décalage vers les valeurs négatives. Selon les définitions données au paragraphe précédent, ce décalage peut être quantifié par une moyenne des écarts absolus de $\overline{\Delta_{\delta_z}} = 0.06$ mm et relatifs de $\overline{\%\Delta_{\delta_z}} = 6.8\%$.

Il n'est cependant pas à exclure que ces mesures, en raison de leurs très faible valeurs, soient entachées d'erreurs dues à la possible déformabilité des appuis lors du chargement. Or la captation étant réalisée exclusivement en partie centrale de la membrure, il n'est pas possible de procéder à une correction *a posteriori* des mesures. Cependant, pour une déplacement faible des appuis, l'angle de déformation est peu sensible à cette erreur et constitue un indicateur plus fiable de comparaison entre le modèle numérique et les mesures expérimentales. Sur le tronçon de 55 cm considéré, les valeurs des mesures *in situ* ainsi que celles extraites du modèle aux éléments finis sont approchées par régression linéaire, puis l'angle entre les deux droites est considéré. L'écart angulaire absolu est égal à $\overline{\Delta_{\theta_y}} = -0.000\,67°$ soit un écart relatif de $\overline{\%\Delta_{\theta_y}} = -9.9\%$.

Suite à ces observations, on peut conclure que le modèle numérique aux éléments finis estime fidèlement le comportement de la structure avec une légère tendance à sur-estimer la raideur si on considère les mesures de déplacements. Les mesures angulaires, au contraire, indiquent plutôt une sous-estimation dans le tronçon considéré. L'hypothèse la plus probable pour expliquer ces différences porte sur les connexions, considérées comme parfaites dans le modèle numérique, alors que les assemblages boulonnés (boulons BHC M6) dans le prototype ont été exécutés avec un jeu de 1 mm.

3.1.7.2 Mesures de fréquences propres

Les mesures de fréquences propres de la structure sont réalisées par analyse de vibrations ambiantes. Le principe consiste à mesurer, *in situ*, la réponse spectrale de l'objet d'étude à une excitation ambiante, c'est-à-dire des excitateurs déjà présents dans le milieu de mesure. En milieu urbain, il peut s'agir de transports (trafic routier, métro...) ou de diverses machines en

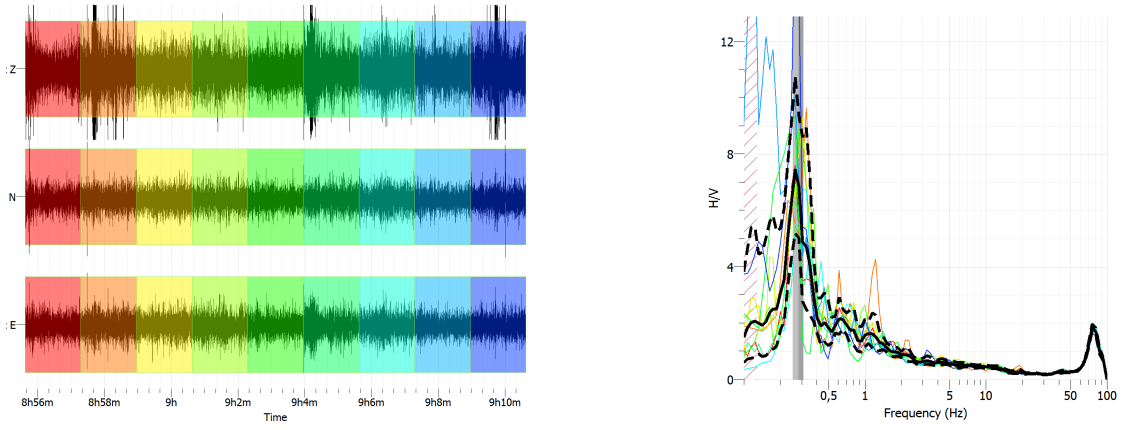
fonctionnement. Cette méthode, initialement développée dans le cadre d'études géotechniques et sismiques, s'est considérablement déployée dans le domaine du génie civil pour les analyses modales de bâtiments et d'ouvrages d'art [302–304].

Le relevé est réalisé au moyen de vélocimètres ultra-sensibles qui mesurent la réponse spectrale de la structure dans les trois directions de l'espace. Il est courant d'appeler (N) et (E) les deux directions dans le plan xy et la direction verticale est notée (Z). Ces données brutes sont traitées par décomposition en séries de Fourrier dans le logiciel *GeoPsy* [305], puis combinées dans le rapport H/V (rapport de la moyenne des composantes horizontales (N et E) sur la composante verticale (Z) des amplitudes spectrales). Ce rapport donne une bonne estimation des fréquences prédominantes du site ou de la construction à évaluer [306, 307].

Dans le cas de mesures relatives à une structure, il est nécessaire de procéder à deux séries de relevés consécutives pour distinguer les vibrations propres au site (géotechnique, dalle d'essai, machines en cours de fonctionnement) de celles relatives à la construction. Concernant le spectre de fréquence de captation, il faut noter que les capteurs employés ne montrent des performances fiables qu'au-delà de 1 Hz et que le traitement des données réduit la fréquence maximale d'acquisition de moitié. La captation est donc menée jusque 200 Hz pour une analyse allant jusque 100 Hz.

3.1.7.2.1 Mesure des fréquences propres du site

Afin de déterminer les vibrations propres relatives au site, les vélocimètres sont disposés à même le sol de la dalle d'essais. Les trois réponses spectrales (Fig. 3.44a), compartimentées en neuf fenêtres de temps, présentent des amplitudes exploitables pour le calcul du rapport H/V, excepté quelques zones de saturation dans la direction verticale (Z). La figure 3.44b présente le diagramme du rapport H/V par une ligne continue noire ; les lignes pointillées noires délimitent l'écart type. Ces courbes synthétisent celles des différentes fenêtres temporelles dessinées en arrière-plan.



(a) Réponses spectrales

(b) Réponses fréquentielles

FIGURE 3.44 – Mesures de fréquences propres du site

La réponse fréquentielle de la dalle en H/V montre deux pics correspondant aux valeurs de fréquences 0.3 Hz et 75 Hz (Fig. 3.44b). La première valeur (0.3 Hz), quoique peu fiable en raison des capacités des capteurs utilisés, semble classique sur le site de la dalle d'essai de

l'Université-Grenoble Alpes où ce type d'analyse fait couramment apparaître des fréquences de 0 à 5Hz dues au sol. La seconde valeur (75 Hz) est vraisemblablement due à une machine en fonctionnement sur le site.

3.1.7.2.2 Mesure des fréquences propres de la structure

Les vibrations propres de la structure sont mesurées en disposant les vélocimètres directement sur la structure. Les trois réponses spectrales (Fig. 3.45a), également réparties en neuf fenêtres de temps, montrent des parties beaucoup plus saturées qui seront filtrées (parties en vert sur le graphique) dans les analyses à venir.

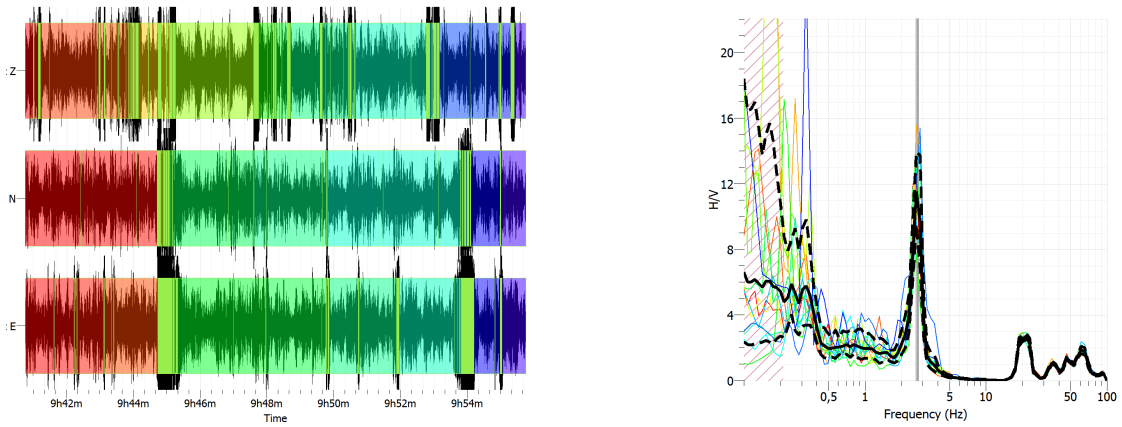
La réponse fréquentielle (Fig. 3.45b) de la structure présente quatre éléments identifiables :

— un plateau de 0 à 0.4Hz ;

— un pic très net à 2.8 Hz ;

— un pic vers 20 Hz ;

— un ensemble de pics dont le plus important est situé vers 68 Hz.



(a) Réponses spectrales

(b) Réponses fréquentielles

FIGURE 3.45 – Mesures de fréquences propres de la structure

Le plateau de 0 à 0.4 Hz, quoique peu précis (écart type très important) en raison des capacités des capteurs, correspond très vraisemblablement à la valeur de 0.3 Hz identifiée dans la première série de mesure et caractéristique du site. Son caractère plus diffus vient du fait que la mesure a été réalisée par l'intermédiaire de la structure. A l'autre extrémité du spectre, l'ensemble des pics autour de la valeur de 68 Hz peut être attribué à la machine en cours de fonctionnement sur le site.

Il apparaît donc deux nouvelles valeurs de fréquences (2.8 et 20Hz), non-identifiées dans les mesures précédentes, qui semblent attachées au prototype. Pour confirmer cette hypothèse, nous comparons ces valeurs à celles données par le modèle numérique aux éléments finis.

Pour reproduire les conditions expérimentales de la mesure, le modèle numérique est enrichi de supports simulant les étais, stabilisés par trépieds. Ces derniers, de nature télescopiques, avec un fût ϕ56 mm, une coulisse ϕ48.3 mm, tous deux d'une épaisseur de 1.8 mm sont modélisés par une poutre tubulaire, ϕ56 mm et épaisseur 1.8 mm en acier S235, encastrée en pied et articulée en tête.

Les résultats d'analyse de modes de vibrations réalisés dans le logiciel Karamba3D met en évidence quatre modes principaux au regard de la masse modale associée et sont reportés dans le tableau 3.9. Les deux premiers modes se situent autour de la valeur de fréquence de 6.3 Hz et les deux suivants vers 20.5 Hz. En fait, il s'agit de modes doubles qui correspondent à deux configurations symétriques de la structure. On peut observer que ce phénomène de mode double se poursuit pour les modes suivants.

Les deux modes situés aux alentours de 6.3 Hz sont des modes de flexion horizontale des étais (Fig. 3.46a) et correspondent au pic observé à 2.8 Hz par les mesures expérimentales. La valeur, certes deux fois supérieure, peut s'expliquer par la modélisation assez grossière des étais qui a tendance à surévaluer leur raideur :

— la poutre est modélisée par une section constante de ϕ56 mm alors qu'elle possède une section réduite à ϕ48.3 mm sur une partie de sa longueur ;

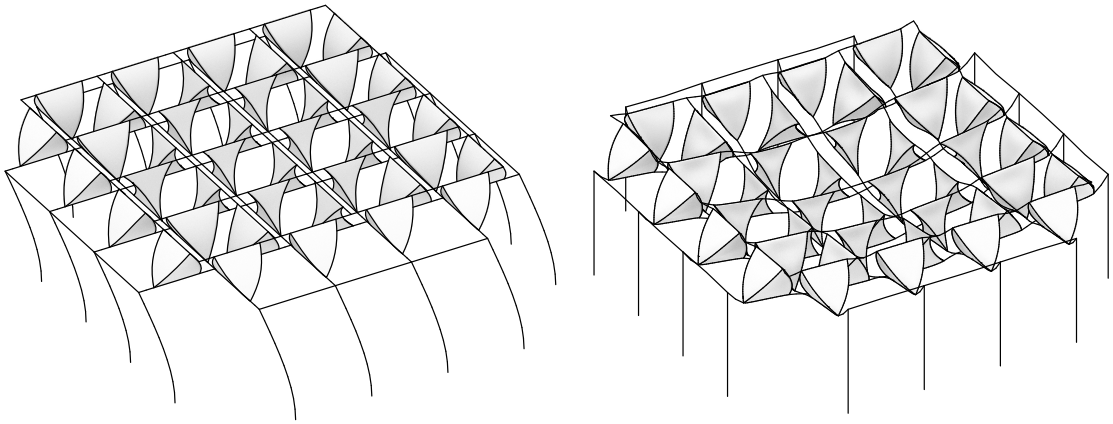
— le jeu entre le fût et la coulisse est négligé ;

— les conditions d'appuis en tête et en pied sont considérées comme parfaites.

Les deux modes situés aux alentours 20.5 Hz sont des modes de flexion verticale de la double nappe (Fig. 3.46b) et correspondent parfaitement au pic de 20 Hz observé expérimentalement.

TABLE 3.9 – Fréquences propres et masses modales, modèle aux éléments finis

Mode	Fréquence propre[Hz]	Masse modale[kg]
1	6.36	1050.33
2	6.45	1036.58
3	20.44	221.02
4	20.71	218.12
5	28.08	0.91
6	28.08	0.91
7	28.39	0.78
8	28.40	0.78



(a) Mode 1&2 : étais (b) Mode 3&4 : double nappe

FIGURE 3.46 – Déformations associées aux modes 1 à 4

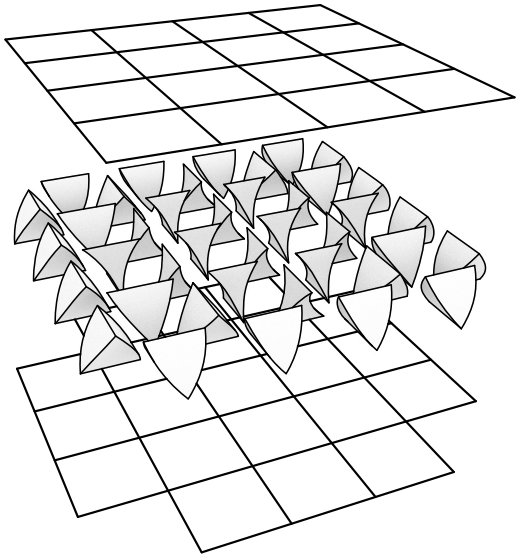
3.1.8 Conclusion

Le prototype *SSDSC* initie la réflexion sur un système structurel hybride constitué de membrures linéaires et de modules de cisaillement surfaciques. Selon une distribution optimale de ces modules, cette structure spatiale peut adopter simultanément des configurations triangulées ou Vierendeel. Ces hypothèses de conception ont été mises à l'épreuve de la fabrication à l'échelle 1 par deux montages successifs, à Grenoble puis sur le campus des Ponts et Chaussées. Une série de mesures expérimentales *in situ* montre une très bonne prédictibilité des modèles de simulation numérique.

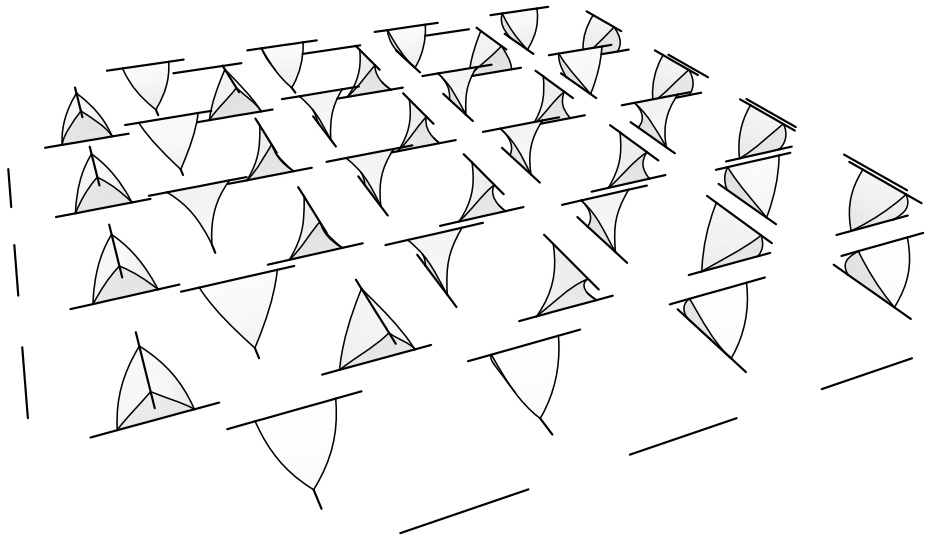
Les études menées à l'échelle d'un module montrent que la paramétrisation proposée à partir d'un nombre limité de variables permet d'atteindre une grande variété de formes qui engendrent un éventail important de réponses structurelles. Malgré les premiers résultats obtenus, il s'agit d'une compréhension partielle du comportement du module, puisque l'analyse ne comporte qu'un cas de charge (cisaillement), exclut l'apport des membrures et n'intègre la variation que de trois paramètres. L'étude exhaustive menée dans la partie 3.2 fournira une caractérisation complète de la raideur du module en identifiant les contributions respectives des membrures et des tétraèdres sous les différents types de déformations. Puis, dans cette même partie, nous étudierons la possibilité d'intégrer cette caractérisation dans un modèle équivalent de plaque épaisse, permettant de faire l'économie de la modélisation géométrique et mécanique complète de la structure.

La versatilité de forme des modules a été mise à profit dans une optimisation globale de la structure qui a permis d'améliorer le fonctionnement structurel tout en réduisant la quantité de matière impliquée dans sa fabrication. Pour cela, l'introduction de la courbure au sein des modules a augmenté les caractéristiques mécaniques (coefficient de charge critique de flambement) sans dégrader pour autant les autres performantes de la structure (masse, raideur). Il est cependant nécessaire de s'interroger sur la possibilité d'appliquer les méthodes d'optimisation développées pour la conception de ce prototype sur les structures de tailles plus importantes. En effet, dans une structure comportant un nombre significativement plus important de modules (pour des raisons de taille de la structure et/ou de conditions de symétries moins favorables), l'augmentation du nombre de paramètres, couplée à celle de la taille des modèles aux éléments finis, remet en cause la possibilité d'employer des algorithmes d'optimisation globaux, du moins dans des conditions similaires à celles du prototype. Une stratégie alternative et des outils opérationnels seront étudiés dans la partie 3.3 afin de développer des solutions compatibles avec le temps du projet d'architecture sur des structures aux dimensions plus ambitieuses.

Deux enseignements principaux sont à tirer des deux montages réalisés : préfabrication et montage au sol. Les assemblages linéaires, situés sur les quatre bords des modules tétraédriques sont chronophages étant donné le nombre important de connexions ; il est donc essentiel qu'elles soient réalisées dans des conditions favorables et non en hauteur. Le second montage a pris le parti de ne pas désassembler les modules et ainsi conserver les assemblages linéaires situés sur les bords courbes des modules. Nous suggérons de prolonger cette piste en associant, dès l'étape de préfabrication, les portions de membrures inférieures et supérieures connectées à un module. Les assemblages linéaires situés sur les bords rectilignes des modules seront ainsi réalisés en atelier et à une hauteur appropriée. Les assemblages réalisés sur site sont alors limités aux connexions ponctuelles entre unités constituées d'un tétraèdre et de deux portions de membrures (Fig. 3.47). La contrepartie à cette proposition est la perte de continuité des membrures dont l'impact sur les performances mécaniques est évalué dans la partie 3.2.2.3.



(a) Montage avec membrures continues



(b) Montage par modules complets : membrures et tétraèdres

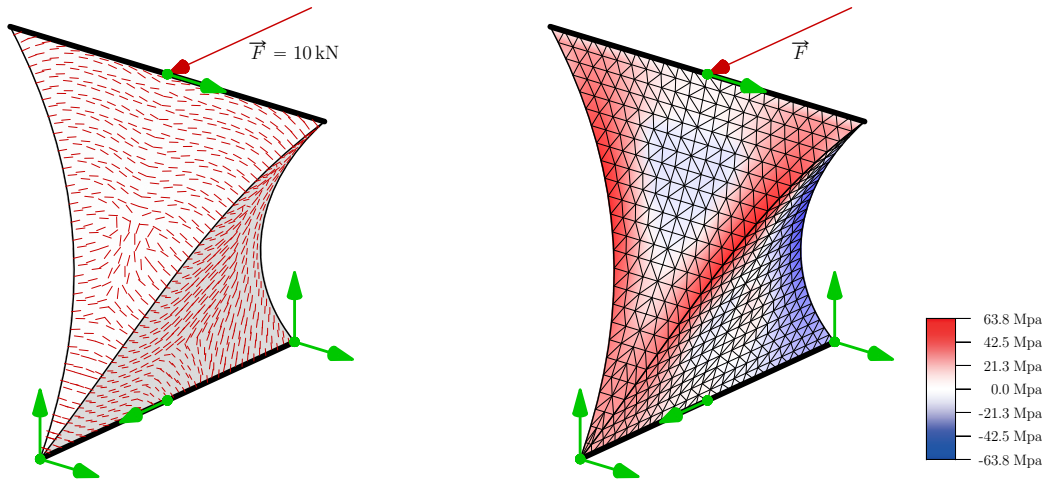
FIGURE 3.47 – Proposition de montage alternatif

3.2 Modèle équivalent de plaque épaisse

3.2.1 État de l'art

Les structures spatiales trouvent toute leur pertinence lorsqu'elles couvrent de grandes portées. Elles sont alors constituées d'un nombre important d'éléments et la question du niveau de complexité de leurs modélisations géométrique et mécanique se pose. Cette question est d'autant plus critique si, comme dans le cas qui nous intéresse, tout ou partie des éléments est de nature surfacique. La génération géométrique plus complexe des éléments bi-dimensionnels, leur maillage, ainsi que le temps de calcul supplémentaire lors d'une analyse aux éléments finis peuvent constituer une barrière à l'utilisation de telles configurations dans un projet. La mise au point de modèles équivalents, sans doute moins précis, mais plus agiles dans les phases amont du projet, est donc un enjeu important pour permettre l'exploration de solutions structurelles basées sur l'emploi des surfaces développables.

Une première stratégie, de nature locale, consiste à évaluer le comportement mécanique de chaque surface participant à la structure globale et les substituer par des modèles simplifiés. Tran [114], dresse un état de l'art détaillé sur la question du comportement mécanique des panneaux courbes et constate que les références bibliographiques sur le sujet sont peu nombreuses et lacunaires par rapport à celles dédiées aux plaques planes ou aux coques de révolution. Il note également que l'approche normative des Eurocodes ne couvre pas directement la question des tôles courbes et propose en conséquence plusieurs approches pour l'évaluation de la charge ultime et de la charge critique de voilement de panneaux cylindres. Cependant, ces approches ne sont valides que sous des conditions de chargement (compression axiale ou transverse, pression uniforme...) et de géométrie (tôle rectangulaire) restreintes. Les modules tétraédriques de la structure spatiale que nous étudions semblent difficilement compatibles avec ces hypothèses : les faces triangulaires du module dont la géométrie résulte de l'assemblage auto-contraint avec les deux faces adjacentes, montrent une distribution de contraintes très variable au bord et en partie courante de la surface (Fig. 3.48).



(a) Directions de contraintes principales

(b) Contraintes de Von Mises

FIGURE 3.48 – Réponse mécanique d'un tétraèdre sous chargement de cisaillement

Une autre stratégie, cette fois de nature globale, consiste à construire un méta-modèle par une méthode d'homogénéisation, afin d'approcher le comportement réel de la structure tout en s'affranchissant de sa modélisation détaillée [89, 308]. Cette approche macroscopique considère alors l'ensemble de la structure spatiale à double nappe comme une plaque hétérogène périodique.

L'homogénéisation est une méthode d'analyse mécanique qui peut être appliquée à différentes échelles selon l'objet d'étude : celle du matériau (matériaux architecturés, matériaux composites, poreux, cellulaires...), du composant architectural (tôle perforée, panneau sandwich), de la structure (système réticulé). Quelle que soit l'échelle, l'objectif est d'obtenir les propriétés mécaniques effectives du matériau (de la structure) à partir de l'observation d'une cellule unitaire, région représentative de l'ensemble : le Volume Élémentaire Représentatif (VER). Le matériau (la structure) est alors remplacé par son équivalent homogène avec les propriétés effectives déterminées à partir du VER. La distribution des champs au sein du matériau est alors calculée sur la base du matériau homogène. Bien que les méthodes d'homogénéisation pour les matériaux et les structures soient comparables dans leur approche, elles se distinguent cependant dans la nature des propriétés mécaniques effectives à déterminer, la première recherchant les coefficients de la matrice de rigidité liant contraintes et déformations, la seconde cherchant à déterminer les coefficients de la matrice de raideur liant cette fois les efforts et les déformations généralisés.

Le champ d'application de l'homogénéisation est très vaste, aussi nous focalisons-nous ici sur celle concernant spécifiquement les structures réticulées. Les différentes méthodes d'homogénéisation pour celles-ci, ainsi qu'une large bibliographie, ont été répertoriées dans les travaux de Noor [309] qui les classe en quatre grandes familles :

— méthode d'identification des forces et déformations d'une petite partie du treillis (VER) à celle d'une petite partie de la structure homogène ;

— méthode d'analyse de champ discret ;

— méthode d'identification d'énergie d'une petite partie du treillis (VER) à celle d'une petite partie de la structure homogène par le développement en séries de Taylor des déplacements nodaux du treillis ;

— méthode des développements asymptotiques.

Il est souvent fait mention dans la littérature de la méthode utilisée par Gibson et Ashby [310] pour illustrer la première méthode d'homogénéisation listée ci-dessus. Celle-ci consiste à étudier les modes de déformation d'une cellule unitaire soumise à des charges données. Les propriétés effectives du matériau sont déduites en supposant que les modèles de poutres sont de type Euler-Bernoulli. Cette méthode fournit généralement des résultats satisfaisants dans le cas de topologies de cellules relativement simples, mais montre ses limites en cas de plus grande complexité dans la connectivité des barres [311].

La méthode la plus courante pour l'analyse de champs discrets est la formulation d'équations aux différences appliquées au treillis. Ces équations sont alors résolues, soit directement, soit par l'intermédiaire d'équations différentielles approchées. Cette méthode est décrite en détail dans l'ouvrage de référence de Dean [312].

Les méthodes énergétiques ont plus spécifiquement été développées par Noor [309] qui considère un système essentiellement dominé par les forces axiales constitué de barres bi-articulées puis, plus récemment, par Kumar et McDowell [313] qui introduisent la notion de densité d'énergie de déformation dans une cellule constituée de poutres en flexion.

Enfin, la dernière méthode mentionnée ci-dessus s'appuie sur les développements asymptotiques dont le concept mathématique et ses applications sont exposés dans Bantoustan *et al.* [314] ainsi que dans Sab et Lebée [315]. Cette technique considère deux échelles simultanément : une échelle macroscopique, où la structure hétérogène est supposée se comporter de façon homogène, et une échelle microscopique pilotée par le comportement de la cellule unitaire.

Afin d'identifier les propriétés mécaniques effectives à déterminer, la méthode d'homogénéisation doit s'appuyer sur un modèle mécanique de la structure. La morphologie des structures spatiales à double nappe, où la hauteur structurelle est petite devant la portée dans les deux directions du plan, nous oriente vers un modèle de plaque. La littérature sur le sujet est extrêmement vaste et nous nous contenterons ici de rappeler les principaux modèles ainsi que leur domaine d'utilisation [315, 316].

L'objectif principal de la théorie des plaques est de réduire la complexité d'un modèle tridimensionnel vers un modèle bidimensionnel tout en gardant une description précise des champs de contraintes et de déformations. Pour cela, deux approches principales existent. La première approche, dite axiomatique, émet des hypothèses *a priori* sur le champ de déplacement de la plaque et sépare les coordonnées en plan et hors plan de la plaque. La seconde approche, dite asymptotique, part du problème tridimensionnel avec un petit paramètre ε et observe son évolution quand ε tend vers zéro. Dans le cas des modèles de plaques, le petit paramètre s'exprime comme le rapport entre l'épaisseur et la portée.

Le premier modèle axiomatique de plaque largement utilisé est initié par Kirchhof puis complété par Love en 1888 [317]. Connu sous le nom de théorie de Kirchhof-Love ou théorie des plaques minces, ce modèle repose sur les hypothèses suivantes :

— le déplacement de la plaque est uniforme dans l'épaisseur ;

— une ligne normale au feuillet moyen reste normale pendant la transformation.

Ces hypothèses impliquent que la déformation de cisaillement transverse ainsi que l'effet de Poisson hors plan sont négligés et limite le domaine d'application de cette théorie à des plaques dont l'épaisseur est très petite devant la portée.

La théorie de Reissner-Mindlin, considérée comme une extension de la précédente, corrige cette lacune en assouplissant la deuxième hypothèse de la théorie de Kirchhof-Love. Formulée par Reissner en 1945 [318] puis par Mindlin en 1951 [319], cette théorie permet une meilleure évaluation des déformations et des contraintes de cisaillement. Une ligne normale au feuillet moyen reste rectiligne pendant la transformation mais ne demeure pas nécessairement normale au feuillet moyen déformé. Les hypothèses de la théorie de Reissner-Mindlin peuvent se formuler ainsi :

— le déplacement transverse de la plaque est uniforme dans l'épaisseur ;

— la variation de déplacement en plan est linéaire dans l'épaisseur.

Enfin, la théorie du « Bending-Gradient », développé par Lebée et Sab [320, 321], est un prolongement du travail de Reissner [318]. L'ajout de degrés de liberté dans la formulation de cette théorie permet de remplacer l'effort tranchant classique par un effort tranchant généralisé lié au gradient du moment fléchissant. Cette approche axiomatique peut néanmoins être justifiée par une approche asymptotique [322].

Pour une compréhension plus détaillée des modèles asymptotiques pour les plaques homogènes et hétérogènes, nous renvoyons vers [316, 323].

3.2.2 Principes d'homogénéisation

Dans la pratique, comme dans la littérature [287,315], le rapport entre la hauteur structurelle et la portée (inverse de l'élancement) des structures à double nappe est souvent compris entre $1/10$ et $1/30$. De plus, la configuration Vierendeel que peut adopter la structure que nous étudions implique une contribution accrue du cisaillement dans le comportement du treillis spatial. Pour ces raisons, et pour les questions de symétries de la structure, nous choisissons un modèle homogène de plaque de Reissner-Mindlin.

Malgré la nature hybride de la cellule élémentaire, composée d'éléments linéiques et surfaciques, les conditions de liaison et de périodicité sur les faces de cette cellule sont simples (§ 3.2.2.3). La méthode d'identification des forces et déformations décrite dans le section précédente peut alors être appliquée à notre problème. Il s'agit donc de déterminer tous les coefficients de la matrice de raideur de plaque $\left[R\right]$ définie par la relation :

$$
\begin{array}{ccc}
\left[F\right] & = & \left[R\right] \\
\left[\begin{array}{c} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{array}\right] & = & \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{3}{*}{0}} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} & B_{12} & B_{22} & B_{23} & \multicolumn{2}{c}{} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} & B_{13} & B_{23} & B_{33} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{13} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & \multicolumn{2}{c}{\multirow{3}{*}{0}} \\ B_{12} & B_{22} & B_{23} & D_{12} & D_{22} & D_{23} & \multicolumn{2}{c}{} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} & D_{13} & D_{23} & D_{33} & \multicolumn{2}{c}{} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & \multicolumn{3}{c|}{\multirow{2}{*}{0}} & E_{11} & E_{12} \\ \multicolumn{3}{c}{} & \multicolumn{3}{c}{} & E_{12} & E_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right] \\
 & = & \left[\begin{array}{c|c|c} A & B & 0 \\ \hline B & D & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathrm{E} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{array}\right]
\end{array}
\qquad (3.12)
$$

avec $\left[F\right]$ et $\left[\varepsilon\right]$, vecteurs des efforts et des déformations généralisées.

La matrice de raideur de plaque $\left[R\right]$ (dite ABBDE) se décompose en quatre sous-matrices :

- la matrice (3×3) $\left[A\right]$: matrice des raideurs membranaires ;
- la matrice (3×3) $\left[D\right]$: matrice des raideurs flexionnelles ;
- la matrice (3×3) $\left[B\right]$: matrice de couplage membrane-flexion ;
- la matrice (2×2) $\left[E\right]$: matrice des raideurs des efforts tranchants.

La démarche consiste, suite à l'identification du volume représentatif élémentaire, à imposer successivement à celui-ci les huit déformations généralisées et à observer les efforts généralisés induits, eux-mêmes calculés à partir des réactions d'appuis de la cellule. Par identification entre les efforts et les déformations généralisés, on peut déterminer tous les termes de la matrice de raideur.

3.2.2.1 Géométrie du Volume Élémentaire Représentatif

3.2.2.2 Description de la géométrie

Les nombreuses symétries présentes dans notre structure nous offrent plusieurs choix pour la définition du Volume Élémentaire Représentatif (VER). Afin de simplifier les conditions d'appuis et de périodicité, nous choisissons une cellule dont les faces sont en contact uniquement avec les membrures supérieures et inférieures, évitant ainsi les éléments surfaciques. Cela suppose d'orienter les faces des cellules à 45° par rapport à la direction des membrures. Dans cette configuration, la périodicité dans les deux directions des faces apparaît tous les deux modules (Fig. 3.49). Nous entendons par module un ensemble composé d'un tétraèdre, d'une membrure supérieure et d'une membrure inférieure délimitées dans leurs longueurs par les nœuds d'assemblage comme suggéré en conclusion de la partie précédente. Le VER est donc constitué de quatre modules.

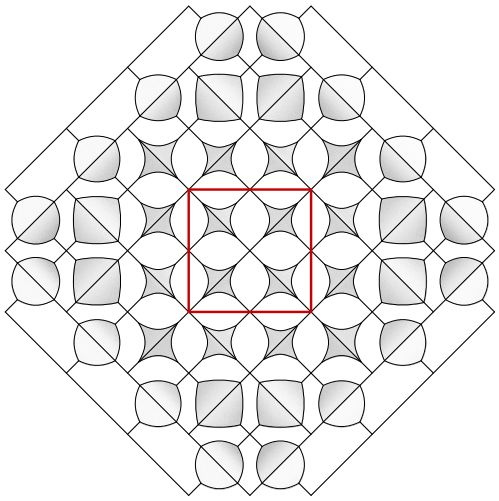


FIGURE 3.49 – Identification du VER au sein de la structure

On définit le système d'axes du VER $\mathcal{R}_V(O_V, \overrightarrow{x_V}, \overrightarrow{y_V}, \overrightarrow{z_V})$ tel que (Fig. 3.50a) :

— l'origine du repère O_V soit situé au centre de gravité du VER ;

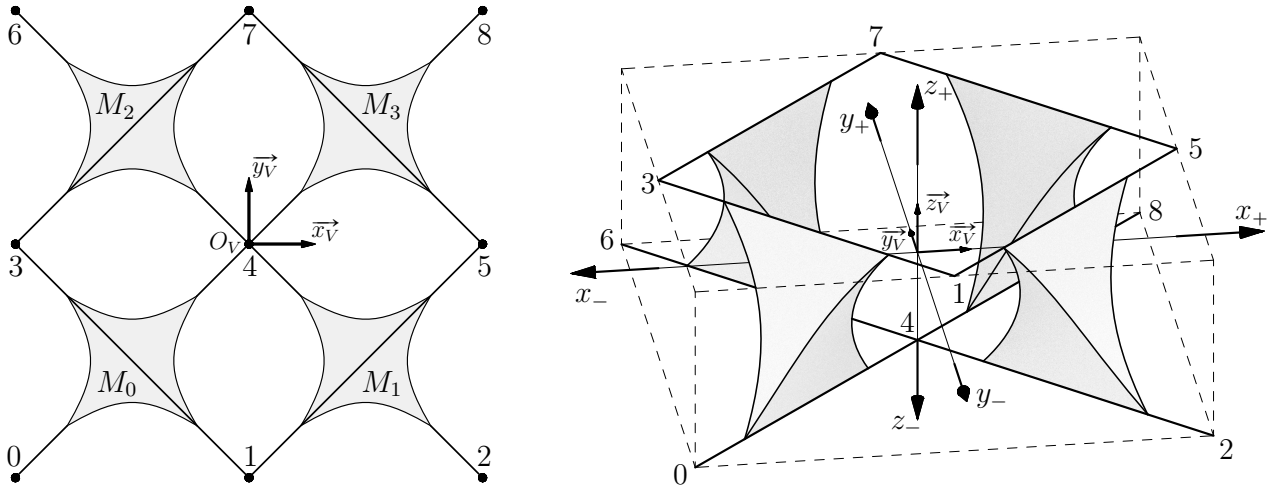
— l'axe $\overrightarrow{z}$ soit vertical vers le haut (perpendiculairement à la surface moyenne de la structure) ;

— les axes $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ orientés à 45° par rapport aux membrures.

On peut alors nommer les six faces du VER selon l'orientation de leur normale par rapport au système d'axes défini : $x_+/x_-, y_+/y_-, z_+/z_-$ (Fig. 3.50b).

Selon les axes de ce repère, la dimension en plan d'un module est $b = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell$, ℓ étant la largeur de trame des membrures inférieures et supérieures, définie dans la partie 3.1.3 ; le VER s'inscrit donc dans un parallélépipède rectangle de côté $2b$ et de hauteur h. Les quatre modules du VER, numérotés de 0 à 3 ($M_0 \ldots M_3$), possèdent des géométries identiques, mais les modules M_1 et M_2 présentent une rotation de 90° par rapport aux modules M_0 et M_3. Les points de références correspondant aux connexions entre modules sont numérotés de 0 à 8 (Fig. 3.50a).

Le système d'axe des poutres du VER $\mathcal{R}_P(O_P, \overrightarrow{x_P}, \overrightarrow{y_P}, \overrightarrow{z_P})$ est une rotation du repère $\mathcal{R}_V$ de 45° autour de l'axe $\overrightarrow{z_V}$. Il est donc aligné en plan avec les membrures inférieures et $O_P = O_V$ (Fig. 3.51a).



(a) $\mathcal{R}_V$: Repère du VER (b) Nomenclature des faces

FIGURE 3.50 – Définition du VER

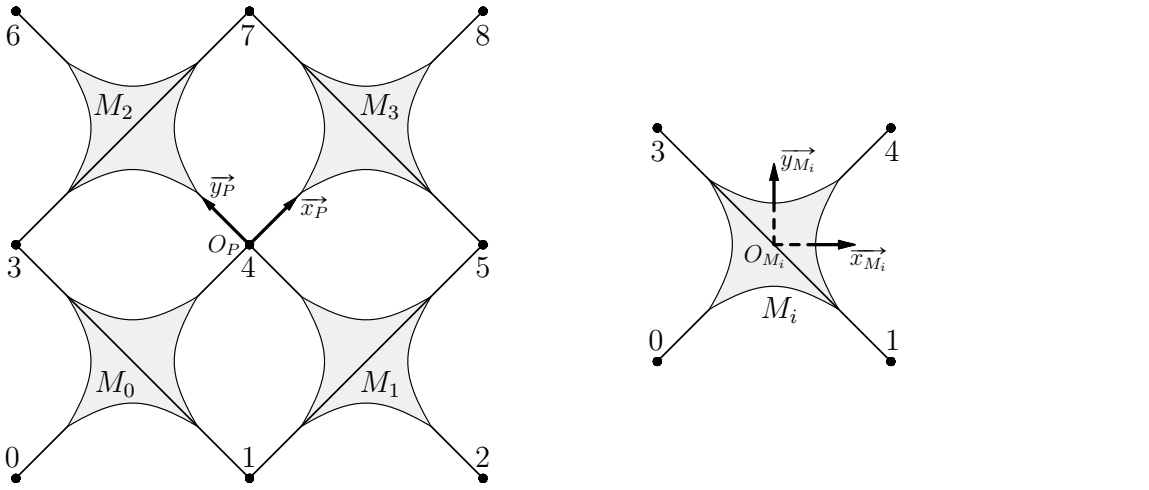
Nous profitons de la définition du VER et de son système d'axes pour établir d'autres points de référence et repères qui seront utilisés par la suite, en particulier dans la partie 3.2.3.

A l'échelle de chaque module i (Fig. 3.51b), un système d'axe $\mathcal{R}_{M_i}(O_{M_i}, \overrightarrow{x_{M_i}}, \overrightarrow{y_{M_i}}, \overrightarrow{z_{M_i}})$ est défini avant chargement tel que :

— l'origine du repère O_{M_i} soit situé au centre de gravité du module i ;

— $\overrightarrow{x_{M_i}} = \overrightarrow{x_V}$, $\overrightarrow{y_{M_i}} = \overrightarrow{y_V}$, $\overrightarrow{z_{M_i}} = \overrightarrow{z_V}$.

Après un mouvement de corps rigide du module (Partie 3.2.3), le repère $\mathcal{R}_{M_i}$ devient $\mathcal{R}_{M_i'}(O_{M_i'}, \overrightarrow{x_{M_i'}}, \overrightarrow{y_{M_i'}}, \overrightarrow{z_{M_i'}})$.

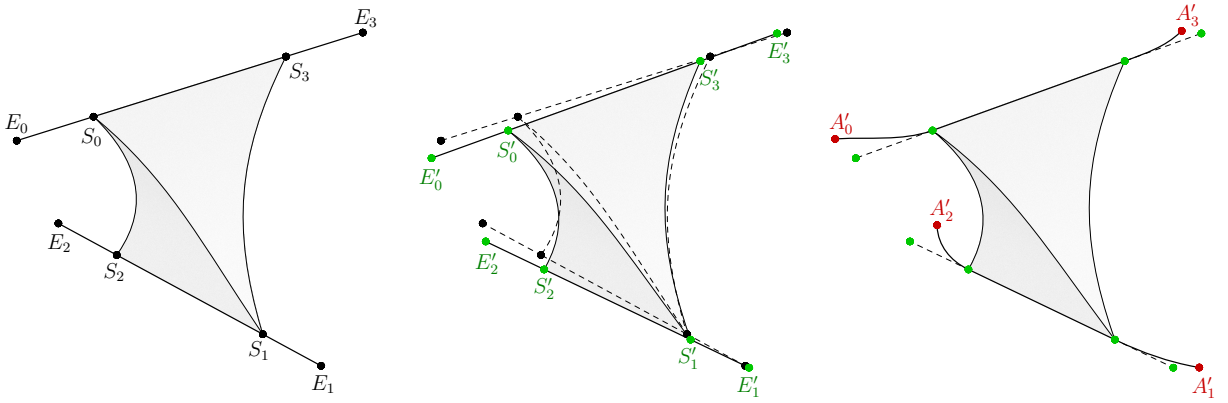


(a) $\mathcal{R}_P$: Repère des poutres (b) $\mathcal{R}_{M_i}$: Repère du module

FIGURE 3.51 – Définition de repères liés au VER

Chaque point de référence j d'un module i est numéroté de 0 à 3 et est associé à six autres points (Fig. 3.52) :

— $S_{i,j}$: Sommet du tétraèdre avant mouvement de corps rigide ;
— $S'_{i,j}$: Sommet du tétraèdre après mouvement de corps rigide ;
— $E_{i,j}$: Extrémité de la membrure avant mouvement de corps rigide ;
— $E'_{i,j}$: Extrémité de la membrure après mouvement de corps rigide ;
— $A_{i,j}$: Appui avant déplacement imposé ($=E_{i,j}$) ;
— $A'_{i,j}$: Appui après déplacement imposé.



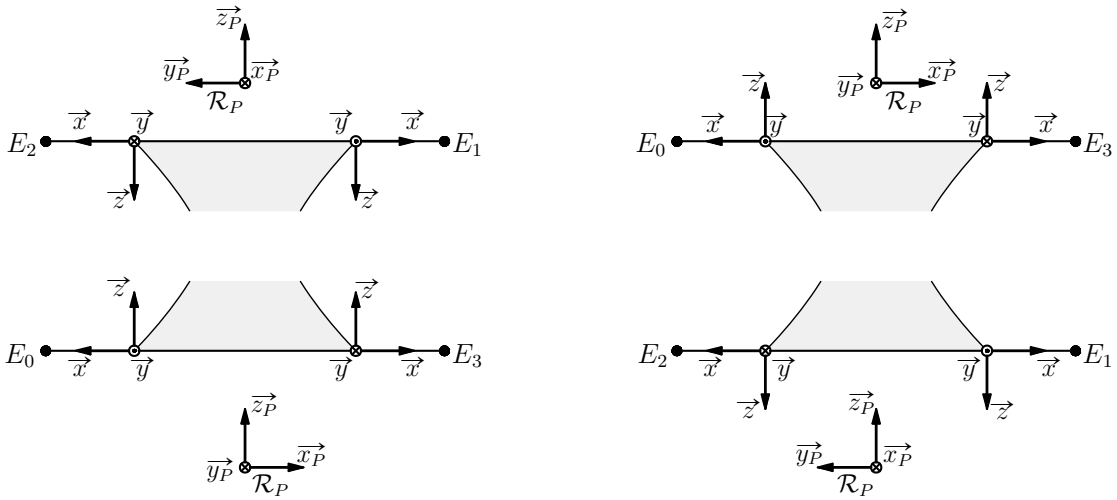
(a) Points dans la configuration initiale

(b) Points suite à un mouvement de corps rigide

(c) Points suite au déplacement imposé des appuis

FIGURE 3.52 – Définition des points de référence

Enfin, on définit un repère local $\mathcal{R}_{P_{i,j}}(O_{P_{i,j}}, \overrightarrow{x_{P_{i,j}}}, \overrightarrow{y_{P_{i,j}}}, \overrightarrow{z_{P_{i,j}}})$ attaché à chaque poutre $P_{i,j}$ du module i.



(a) Modules 0 & 3

(b) Modules 1 & 2

FIGURE 3.53 – Repère local des poutres

Le repère local de la poutre i, $\mathcal{R}_{P_{i,j}}$, répond à la définition suivante :

— l'origine du repère $O_{P_{i,j}}$ est en extrémité du tétraèdre du module i et pointe vers l'extrémité de la poutre j ;

— l'axe $\overrightarrow{x_{P_{i,j}}}$ est orienté selon l'axe de la poutre j ;

— les axes $\overrightarrow{y_{P_{i,j}}}$ et $\overrightarrow{z_{P_{i,j}}}$ sont disposés de façon systématique afin de respecter les symétries du module.

La figure 3.53 localise ces repères locaux par rapport au repère global des poutres $\mathcal{R}_P$ selon le type de module et le tableau 3.10 établit les formules de changement de repères.

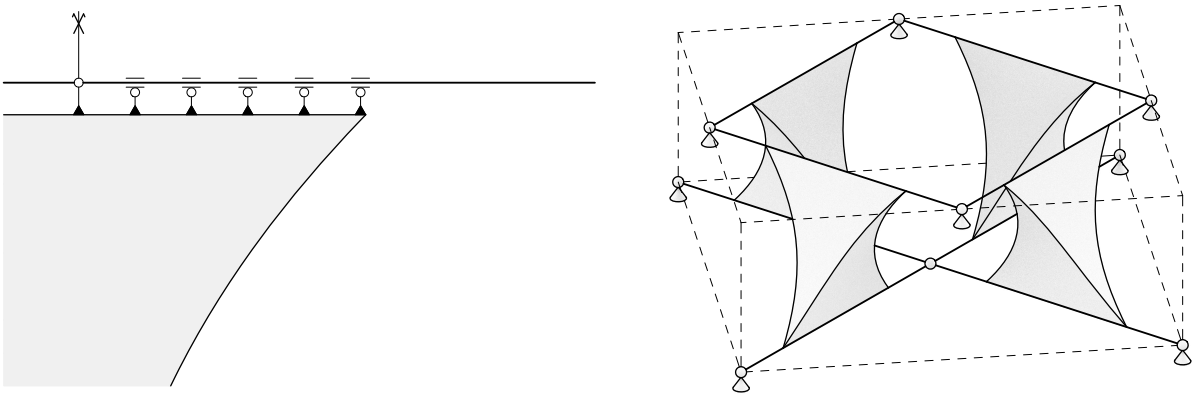
TABLE 3.10 – Repère local des poutres

	M_i $(i = 0, 1, 2, 3)$
Poutre j=0	$\overrightarrow{x_{P_{i,0}}} = -\overrightarrow{x_P}$ $\overrightarrow{y_{P_{i,0}}} = -\overrightarrow{y_P}$ $\overrightarrow{z_{P_{i,0}}} = +\overrightarrow{z_P}$
Poutre j=1	$\overrightarrow{x_{P_{i,1}}} = -\overrightarrow{y_P}$ $\overrightarrow{y_{P_{i,1}}} = -\overrightarrow{x_P}$ $\overrightarrow{z_{P_{i,1}}} = -\overrightarrow{z_P}$
Poutre j=2	$\overrightarrow{x_{P_{i,2}}} = +\overrightarrow{y_P}$ $\overrightarrow{y_{P_{i,2}}} = +\overrightarrow{x_P}$ $\overrightarrow{z_{P_{i,2}}} = -\overrightarrow{z_P}$
Poutre j=3	$\overrightarrow{x_{P_{i,3}}} = +\overrightarrow{x_P}$ $\overrightarrow{y_{P_{i,3}}} = +\overrightarrow{y_P}$ $\overrightarrow{z_{P_{i,3}}} = +\overrightarrow{z_P}$

3.2.2.3 Conditions de liaison et de périodicité

Dans le prototype réalisé, les tétraèdres sont moisés en partie haute et basse entre les cornières des membrures. Ils sont ensuite liaisonnés par une série de boulons traversant des trous ajustés augmentés d'un jeu d'assemblage de 1 mm. L'ensemble est serré sans contrôle de couple. Dans cette situation, il est difficile d'évaluer la nature de la transmission des efforts entre membrures et tétraèdres : se réalise-t-elle par friction ou par pression diamétrale dans les trous ? Afin de mieux décomposer les efforts et faciliter l'assemblage, nous proposons une évolution dans le système de fixation : un trou ajusté est disposé en partie centrale des arêtes inférieures et supérieures des tétraèdres, les autres trous sont oblongs dans la direction parallèle à la membrure (Fig. 3.54a). Cela a pour effet de découpler le tétraèdre des nappes inférieures et supérieures pour les efforts membranaires tout en conservant une transmission des efforts hors plan (flexion et cisaillement).

En conclusion de la partie précédente, nous avons suggéré d'augmenter la préfabrication de la structure en constituant des unités d'assemblages composés d'un tétraèdre et des portions de membrures afférentes. La conséquence de cette hypothèse est la brisure de continuité de flexion des membrures au niveau de la connexion entre modules. Même s'il est possible de reconstituer



(a) Conditions de liaisons internes (b) Conditions de liaisons externes

FIGURE 3.54 – Conditions de liaisons du module

cette continuité lors de l'assemblage (double boulonnage, soudage...), la simplicité de montage recherchée sur site nous incite à considérer un simple boulonnage (Fig. 3.54b).

L'assemblage de type ciseau (deux membrures continues liaisonnées par un axe vertical) du prototype construit devient un assemblage articulé. Sans faire une étude approfondie, nous évaluons l'impact de ce choix sur les performances mécaniques de la structure, en modifiant les conditions de liaisons du modèle numérique du prototype : la flèche passe de 3.8 mm à 4.3 mm soit une augmentation de 13%. Ce chiffre, valable uniquement pour les sections et la géométrie du prototype construit, donne un ordre de grandeur du coût en raideur pour le système structurel que l'on envisage.

On note également que cette hypothèse de liaison induit un mécanisme à un degré de liberté au sein du VER (Fig. 3.55). Ceci est cependant peu pénalisant à l'échelle globale puisque la compatibilité cinématique des VER après leur concaténation génère un système structurel à un seul degré de liberté qu'il est aisé de reprendre grâce à un système d'appuis adéquat (Fig. 3.56).

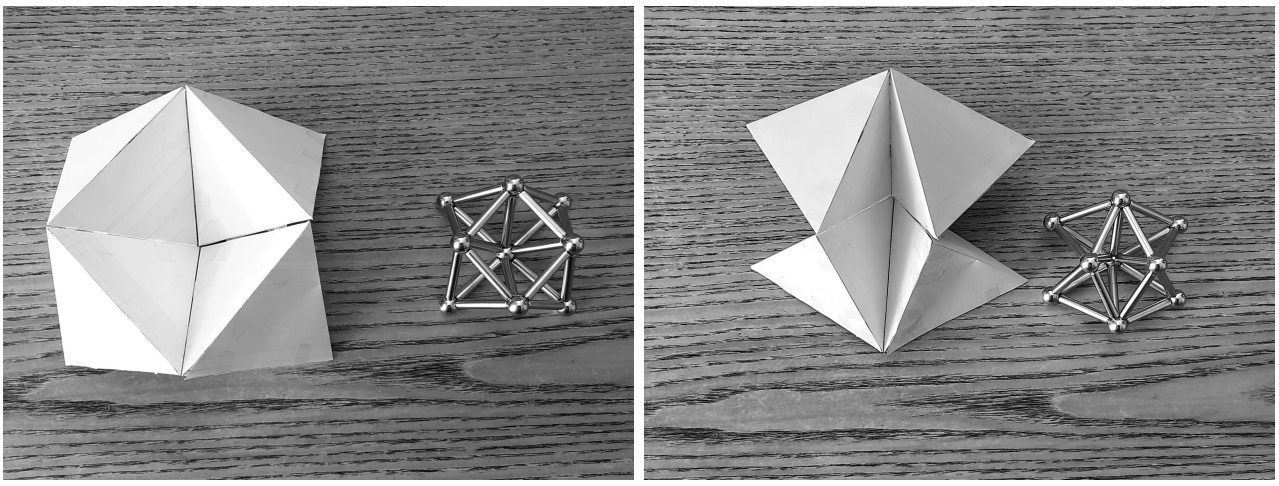


FIGURE 3.55 – Mécanisme à un degré de liberté au sein du VER

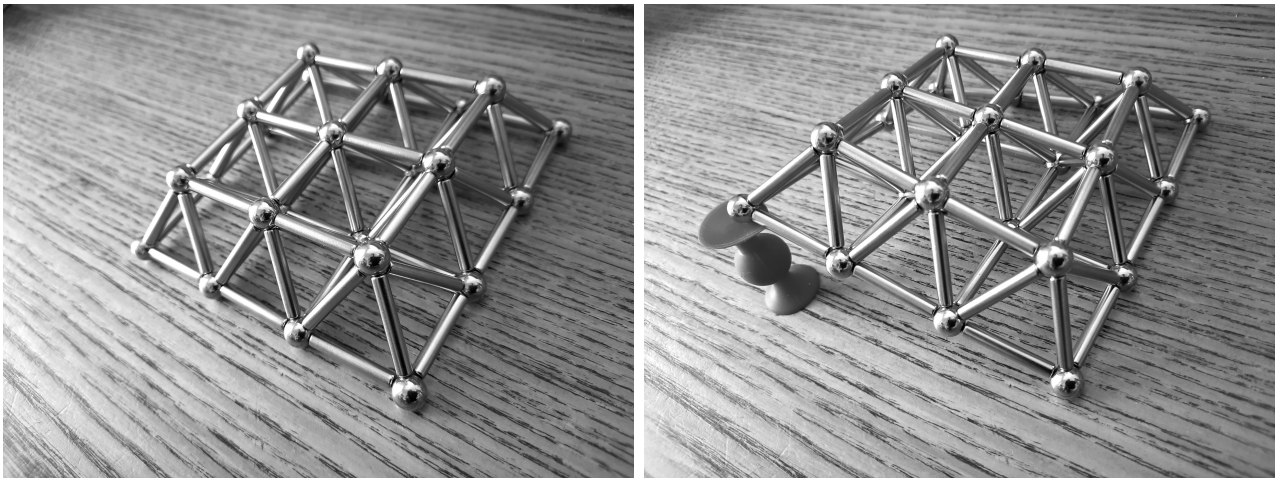


FIGURE 3.56 – Mécanisme à un degré de liberté au sein de la structure : moment de torsion de plaque

Enfin, les conditions de périodicité sont simples à énoncer étant donné la nature des faces des cellules et de leurs conditions de liaisons rotulées : les déplacements dans les trois directions de l'espace des extrémités de membrures doivent être identiques sur deux faces opposées.

3.2.2.3.1 Composition des raideurs

Le VER est composé d'objets de natures différentes (éléments linéaires/éléments surfaciques) et il a été observé sur le prototype que ces composants jouent des rôles différents au sein de la structure (efforts normaux/efforts transverses). Les nouvelles conditions de liaisons entre les membrures et les tétraèdres exposées au paragraphe précédent renforcent l'autonomie des deux objets de sorte que les tétraèdres n'interviennent que pour deux types d'efforts : le moment de torsion (D_{33}) et les efforts tranchants (E_{11}, E_{22}, E_{12}) ; les membrures, en revanche, sont impliquées dans le calcul de tous les coefficients de la matrice de raideur.

La méthodologie proposée pour déterminer les coefficients de la matrice de raideur du VER consiste à identifier indépendamment les contributions respectives des membrures et des tétraèdres, puis de les combiner pour déterminer la raideur de l'ensemble. Cet assemblage n'est nécessaire que pour les coefficients (D_{33}, $E_{11} = E_{22}$, E_{12}), les autres étant uniquement pilotés par les membrures étant donné les conditions de liaison internes.

La configuration du VER dans le cas de chargements transverses relève du modèle de deux ressorts en série, le premier correspondant aux parties libres des membrures, le second correspondant aux tétraèdres. Cette hypothèse suppose un découplage complet des ressorts, ce qui revient à négliger la contribution des membrures dans le domaine des tétraèdres pour ce qui est des efforts transverses. Cette hypothèse semble *a priori* pertinente selon les observations réalisées sur le prototype. Qualitativement, les paliers observés dans la déformée des membrures (§ 3.1.7) correspondent aux parties connectées aux tétraèdres et indiquent un rapport de raideur en faveur des tétraèdres. Quantitativement, cette observation est confirmée par la mesure de l'énergie de déformation en flexion des membrures dans le prototype construit : la partie libre des poutres concentre 88% de l'énergie de totale déformation alors qu'elle ne représente que 40% du linéaire total (Fig. 3.57).

Les deux parties suivantes détaillent les contributions respectives à la raideur d'ensemble

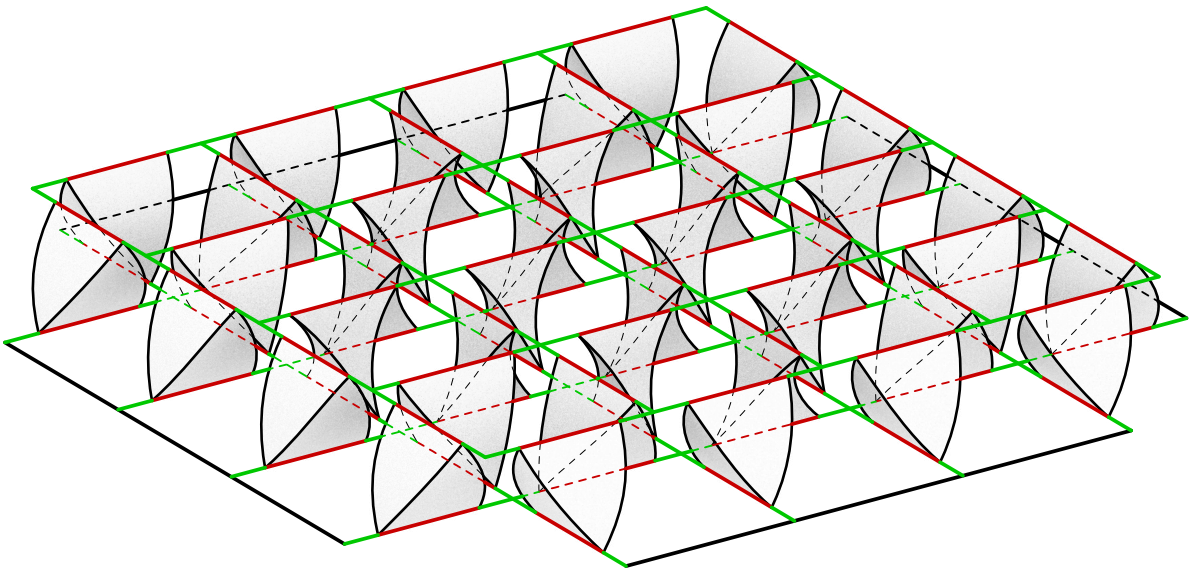


FIGURE 3.57 – L'essentiel de l'énergie de déformation en flexion des membrures se trouve dans la partie libre des poutres (en vert)

des membrures et des tétraèdres.

Pour l'évaluation de la contribution des membrures (§ 3.2.3), nous considérons les tétraèdres comme infiniment raides et animés uniquement de mouvements de corps rigide. Nous procédons à un calcul analytique par la méthode des forces. Les matrices de raideur et de souplesse relatives aux membrures sont notées $\left[R_M\right]$ et $\left[S_M\right]$:

$$\begin{aligned} \left[F\right] &= \left[R_M\right]\left[\varepsilon\right] \\ \left[\varepsilon\right] &= \left[R_M\right]^{-1}\left[F\right] = \left[S_M\right]\left[F\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Pour l'évaluation de la contribution des tétraèdres (§ 3.2.4), nous considérons les membrures comme infiniment raides et animées uniquement de mouvement de corps rigide. Nous procédons à un calcul par analyse aux éléments finis, intégrés dans un méta-modèle s'appuyant sur la méthode de surfaces de réponses. Les matrices de raideur et de souplesse relatives aux tétraèdres sont notées $\left[R_T\right]$ et $\left[S_T\right]$:

$$\begin{aligned} \left[F\right] &= \left[R_T\right]\left[\varepsilon\right] \\ \left[\varepsilon\right] &= \left[R_T\right]^{-1}\left[F\right] = \left[S_T\right]\left[F\right] \end{aligned} \tag{3.14}$$

Enfin, la raideur de l'ensemble est donnée par l'assemblage des matrices de raideur, plus précisément par l'addition des matrices de souplesse (ressorts en série) :

$$\left[F_{Tot}\right] = \left[R_{Tot}\right]\left[\varepsilon\right], \qquad \left[R_{Tot}\right] = \left[S_{Tot}\right]^{-1} = \left(\left[S_M\right] + \left[S_T\right]\right)^{-1} \tag{3.15}$$

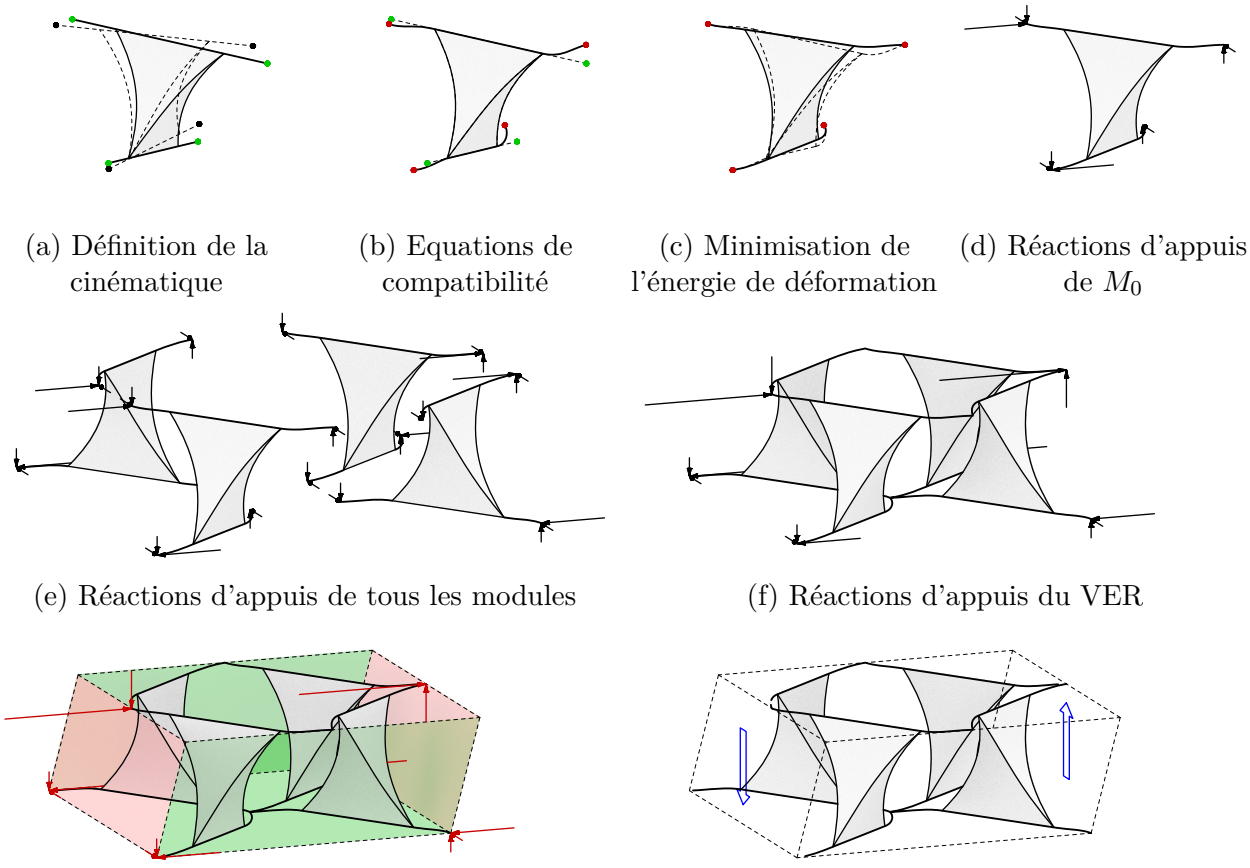
La validité de ces hypothèses sera discutée *a posteriori* par comparaison à un modèle complet aux éléments finis (§ 3.2.6).

3.2.3 Contribution des membrures

3.2.3.1 Démarche

Nous décrivons ici les étapes à mettre en œuvre pour la détermination des coefficients de la matrice de raideur relative à la contribution des membrures. Comme indiqué précédemment, les tétraèdres sont considérés comme infiniment raides et les membrures déformables. Les huit colonnes de la matrice de raideur $\left[R_M\right]$ sont déterminées en imposant successivement les huit déformations volumiques associées aux déformations généralisées puis en les mettant en rapport avec le vecteur colonne des efforts généralisés. Les coefficients de la matrice sont exprimés en fonction des paramètres géométriques du VER (la dimension en plan b, la hauteur h, le coefficient de remplissage μ) et des paramètres géométriques de la section des membrures (l'aire de sa section S, les moments quadratiques I_y et I_z). L'hypothèse des tétraèdres infiniment rigides étant d'une part cinématiquement incompatible avec une déformation imposée pour $\mu = 1$ (absence de membrures) et d'autre part difficile à mettre en œuvre technologiquement pour des valeurs basses de μ, nous limitons notre étude à $\mu \in [0.4, 0.9]$.

Ce processus se déroule en huit étapes, illustrées à la figure 3.58 dans le cas de la déformation de cisaillement γ_{xz} qui sera détaillée au § 3.2.3.3.



(a) Définition de la cinématique

(b) Equations de compatibilité

(c) Minimisation de l'énergie de déformation

(d) Réactions d'appuis de M_0

(e) Réactions d'appuis de tous les modules

(f) Réactions d'appuis du VER

(g) Attribution des réactions aux faces

(h) Efforts généralisés et matrice de raideur

FIGURE 3.58 – Étapes de détermination des coefficients de la matrice de raideur relative aux membrures

Etape 1 : Définition de la cinématique
Les tétraèdres, supposés indéformables, sont mus par un mouvement de corps rigide à définir. Dans cette première étape, il s'agit de déterminer quels sont les degrés de liberté envisageables selon les symétries du VER et de son chargement. De plus, ces symétries permettent de réduire les premières étapes de l'étude à une cellule composée d'un module au lieu de quatre.

Si l'on considère le module M_0 comme objet d'étude, celui-ci possède une cinématique de corps rigide dans l'espace tridimensionnel à six degrés de liberté qui sont notés, dans le repère $\mathcal{R}_V$:

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}_{R_{M'}/R_M}} = \overrightarrow{\mathcal{T}} = (t_x, t_y, t_z)$

— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}_{R_{M'}/R_M}} = \overrightarrow{\mathcal{R}} = (r_x, r_y, r_z)$

En pratique, les conditions de symétrie limitent le nombre de degrés de liberté à trois au maximum.

Dans l'hypothèse de petits déplacements dans laquelle on se place, on peut écrire le déplacement de tout point P appartenant à un solide animé par un mouvement de corps rigide :

$$\overrightarrow{\delta_P} = \overrightarrow{\mathcal{T}} + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_M P} \tag{3.16}$$

Etape 2 : Equations de compatibilité
Le mouvement de corps rigide de l'ensemble du module selon la cinématique identifiée à l'étape précédente n'est pas compatible avec les conditions d'appuis définies par la déformation imposée. Les déplacements $(\delta_x, \delta_y, \delta_z)$ à apporter en extrémité de membrures sont calculées afin de rendre ce mouvement compatible avec les conditions limites.

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation
Le système est hyperstatique et il est nécessaire de procéder à la minimisation de l'énergie de déformation des membrures afin de déterminer les paramètres de la cinématique identifiée à l'étape 2.

L'expression de cette énergie est formulée suite aux hypothèses et conditions suivantes :

— l'énergie de déformation des membrures liée au cisaillement est négligée : les poutres sont de type Euler-Bernoulli étant donné leur élancement important ;

— l'énergie de torsion est nulle : les conditions d'appuis d'articulées en extrémité de membrure ne transmettent pas les efforts de torsion ;

— les membrures ont une section et un matériau unique.

Bien que le module soit constitué d'un tétraèdre, d'une seule membrure inférieure et d'une seule membrure supérieure, pour des commodités de calcul, on peut considérer qu'il s'agit de quatre demi-membrures numérotées de $j = 0$ à 3, de manière cohérente avec les points de référence du module (§ 3.2.2.1). De plus, les conditions d'appui mènent à considérer des longueurs de poutres différentes pour les efforts normaux et les efforts de flexion (Fig. 3.59). Pour les premiers, on prend une longueur de poutre correspondant à une demi-diagonale de module puisque les trous oblongs lui permettent d'être sollicitée sur toute sa longueur, soit $\ell_N = \frac{\sqrt{2}}{2} b$. Pour les efforts de flexion, et en cohérence avec les hypothèses de découplage des ressorts, on considère que la membrure est encastrée en extrémité de tétraèdre, soit $\ell_M = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \mu) b$.

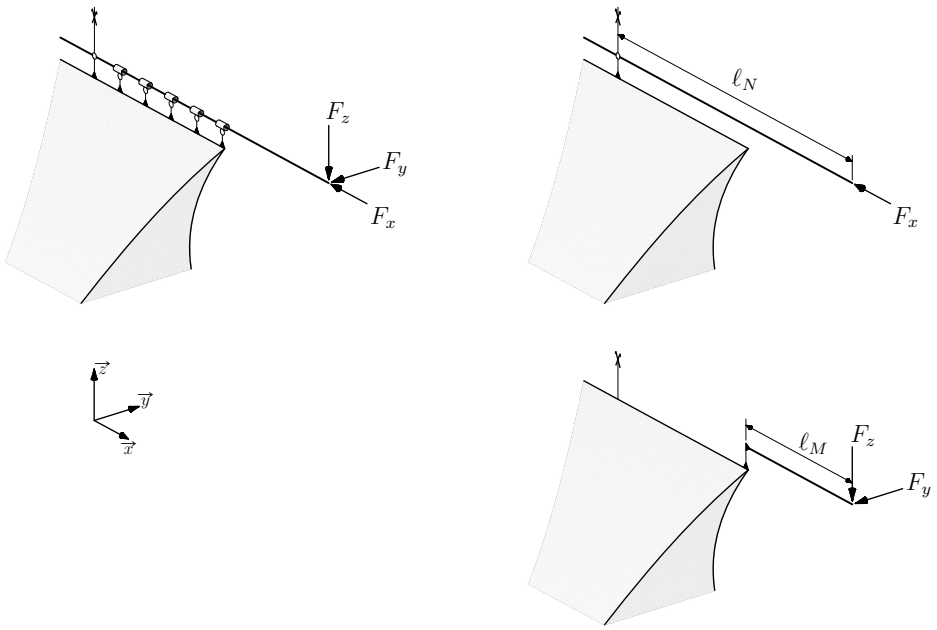


FIGURE 3.59 – Longueurs et système d'appuis équivalent

Sous ces conditions, la formulation générale de l'énergie de déformation des membrures d'un module s'écrit :

$$\mathcal{W}_{def} = \sum_{j=0}^{3} \left(\mathcal{W}_{N_j} + \mathcal{W}_{M_j} \right) = \sum_{j=0}^{3} \left[\int_0^{\ell_N} \left(\frac{N_j^2}{2ES} \right) + \int_0^{\ell_M} \left(\frac{M_{y,j}^2}{2EI_y} + \frac{M_{z,j}^2}{2EI_z} \right) \right] \tag{3.17}$$

avec $\mathcal{W}_{N_j}$, énergie de déformation liée aux efforts normaux, $\mathcal{W}_{M_j}$, énergie de déformation liée aux moments fléchissants, N_j, effort normal, $M_{y,j}$ et $M_{z,j}$ moments fléchissants respectivement autour des axes $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$, E, module d'Young, S, aire de la section, I_y et I_z moments quadratiques selon respectivement les axes $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$.

Pour une force F_x, appliquée dans l'axe de la poutre et générant un déplacement axial δ_x, l'effort normal est constant : $N(x) = F_x$. La raideur axiale vaut :

$$K_N = \frac{F_x}{\delta_x} = \frac{ES}{\ell_N} \tag{3.18}$$

En remplaçant et en intégrant, on obtient l'énergie de déformation liée à l'effort normal :

$$\mathcal{W}_N = K_N \frac{\delta_x^2}{2} \tag{3.19}$$

Pour une force F_z, verticale et appliquée perpendiculairement à l'axe de la poutre et générant un déplacement transverse δ_z, le moment fléchissant est linéaire : $M_y(x) = F_z x$. La raideur flexionnelle vaut :

$$K_{M_y} = \frac{F_z}{\delta_z} = \frac{3EI_y}{\ell_M^3} \tag{3.20}$$

En remplaçant et en intégrant, on obtient l'énergie de déformation liée au moment fléchissant autour de l'axe $\overrightarrow{y}$:

$$\mathcal{W}_{M_y} = K_{M_y} \frac{\delta_z^2}{2} \tag{3.21}$$

Par un raisonnement analogue, on obtient l'énergie de déformation liée au moment fléchissant autour de l'axe $\overrightarrow{z}$:

$$\mathcal{W}_{M_z} = K_{M_z}\frac{\delta_y^2}{2} \tag{3.22}$$

Finalement, on obtient l'expression générale de l'énergie de déformation d'un module :

$$\mathcal{W}_{def} = \sum_{j=0}^{3}\left[K_N\frac{\delta_{x_i}^2}{2} + K_{M_y}\frac{\delta_{z_i}^2}{2} + K_{M_z}\frac{\delta_{y_i}^2}{2}\right] \tag{3.23}$$

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0
Une fois les raideurs et les déplacements en extrémité de poutres connus, il est aisé d'en déduire les réactions d'appuis en extrémité des poutres dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_{0,j}}$ par la relation :

$$\overrightarrow{R_{0,j}} = \overrightarrow{\delta_{0,j}} \cdot \overrightarrow{K} \tag{3.24}$$

avec $\overrightarrow{\delta_{0,j}} = \left(\delta_{x_{0,j}}, \delta_{y_{0,j}}, \delta_{z_{0,j}}\right)$, vecteur des déplacements en extrémité de la membrure j et $\overrightarrow{K} = \left(K_N, K_{M_z}, K_{M_y}\right)$, vecteur des raideurs.

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules
Les réactions des autres modules sont déduites de celles du module M_0 par des considérations de symétries.

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER
Les réactions d'appuis du VER sont déduites par combinaison des quatre modules.

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER
Les réactions d'appuis calculées à l'étape précédente se situent, soit au milieu de l'arête supérieure d'une face (points 1, 3, 5, 7), soit aux sommets inférieurs (points 0, 2, 6, 8). Dans le premier cas, cette force est localisée sur une seule face et son attribution se fait sans ambiguïté. Dans le second cas, la réaction se situe à l'intersection de deux faces et son attribution doit être déterminée. Par exemple, une réaction située au sommet 0 et dirigée selon l'axe $\overrightarrow{x}$ peut être considérée, selon son attribution, comme une force normale de la face x_- ou comme une force tangentielle de la face y_-.

Pour déterminer l'appartenance d'une réaction à une face de normale $\overrightarrow{x}$ ou $\overrightarrow{y}$, nous introduisons une cellule composée de $4 \times 4 = 16$ modules dont les points de référence sont numérotés de 0 à 24 (Fig. 3.60). On peut alors considérer que le sommet 2 du VER, appartenant aux faces x_- et y_+ devient le point intérieur 2 de la face x_- de la cellule (4×4). Si une réaction d'appui apparaît au point 2 de la cellule (4×4), alors il s'agit d'une force extérieure et elle est une réaction d'appui appartenant à la face x_- du VER. Si aucune réaction d'appui n'apparaît, il s'agit alors d'une force intérieure et appartient à la face y_+ du VER. Un raisonnement identique peut être mené pour le sommet 6 du VER et le point 10 de la cellule (4×4). Les forces présentes aux points 2 et 10 de la cellule (4×4) sont déterminées grâce à un modèle numérique aux éléments finis intégrant le type de déformation imposée et les conditions d'appuis correspondantes (§ 3.2.3.2). Ce modèle nous donne un renseignement qualitatif sur les réactions d'appuis de la cellule (4×4), l'évaluation quantitative étant réalisée analytiquement par la présente démarche sur le VER.

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur.
Les efforts généralisés au sein du VER sont calculés de façon analogue à ceux du cas homogène de la théorie de Reissner-Mindlin. Dans notre cas, les réactions d'appuis jouent le rôle des contraintes qu'il convient, dans un premier temps, de moyenner sur les deux faces opposées

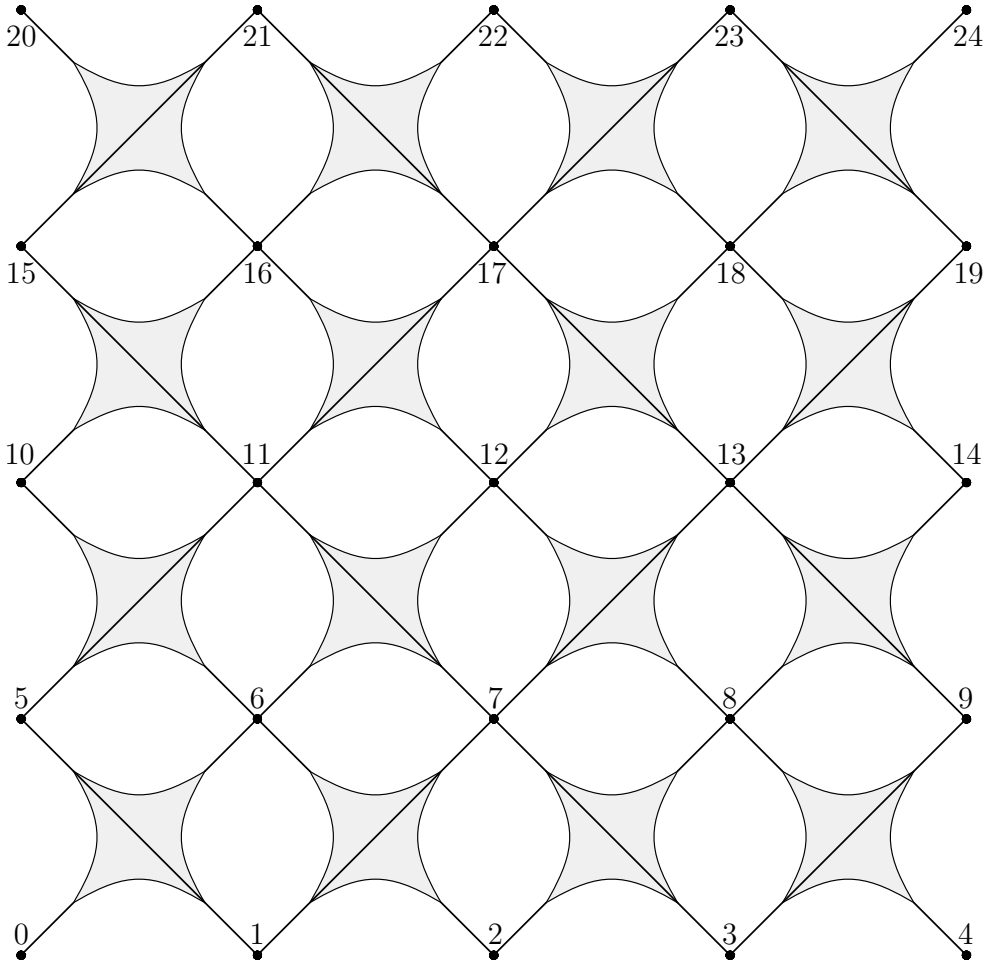


FIGURE 3.60 – Cellule 4×4 modules

pour obtenir un effort généralisé moyen sur le VER. Dans un second temps, les réactions sont intégrées puis normalisées par unité de longueur. On rappelle ici, pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$, le calcul classique des efforts généralisés de la théorie de Reissner-Mindlin (colonne de gauche) et son équivalent utilisé ici (colonne de droite) :

$$\begin{aligned}
N_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx}\, dz \quad &\sim \quad N_{xx} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x_+x} - \sum R_{x_-x}}{2} \\
N_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy}\, dz \quad &\sim \quad N_{xy} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x_+y} - \sum R_{x_-y}}{2} \\
M_{xx} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\sigma_{xx}\, dz \quad &\sim \quad M_{xx} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum zR_{x_+x} - \sum zR_{x_-x}}{2} \\
M_{xy} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z\tau_{xy}\, dz \quad &\sim \quad M_{xy} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum zR_{x_+y} - \sum zR_{x_-y}}{2} \\
V_x &= \frac{5}{6}\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xz}\, dz \quad &\sim \quad V_x &= \frac{5}{6}\frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x_+z} - \sum R_{x_-z}}{2}
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Enfin, les coefficients de la matrice de raideur sont calculés en effectuant le rapport entre les efforts généralisés calculés ci-dessus et la déformation imposée.

Après une récapitulation des conditions d'appuis des cellules (§ 3.2.3.2), cette procédure en huit étapes est détaillée pour la déformation en cisaillement γ_{xz} (§ 3.2.3.3). Pour les autres déformations, basées sur la même approche, nous donnerons les résultats intermédiaires importants (§ 3.2.3.4-3.2.3.7).

3.2.3.2 Conditions d'appuis des cellules

Les conditions d'appuis sont déterminées par le chargement en déformation du VER ainsi que par les symétries de la structure. Elles nous indiquent les réactions d'appui à calculer puis à intégrer dans l'estimation des raideurs. Elle sont compilées dans le tableau à double entrée (Tab. 3.11).

Verticalement, sont consignées cinq déformations imposées : ε_{xx}, ε_{xy}, χ_{xx}, χ_{xy}, γ_{xz}, les trois déformations, ε_{yy}, χ_{yy}, γ_{xy}, pouvant être déduites des précédentes. Horizontalement, sont indiquées les trois échelles de cellules considérées : cellule (4×4), cellule VER (2×2), cellule module (1×1).

Dans un premier temps, nous déterminons le système d'appuis du VER (colonne centrale). Les conditions d'appuis et de périodicité nous indiquent que tous les appuis sont articulés (§ 3.2.2.3) et deux types de contraintes s'appliquent sur les bords du VER :

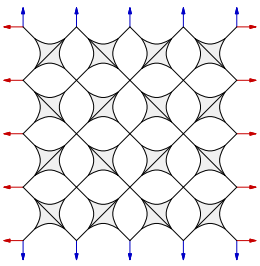
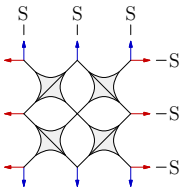
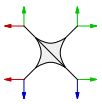
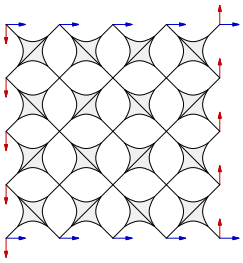
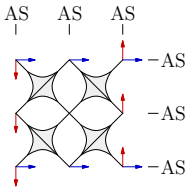
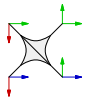
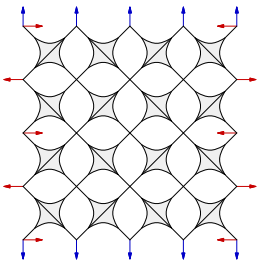
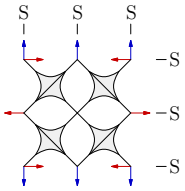
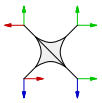
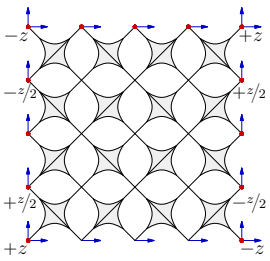
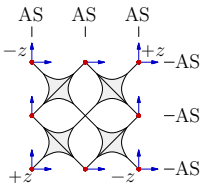
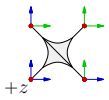
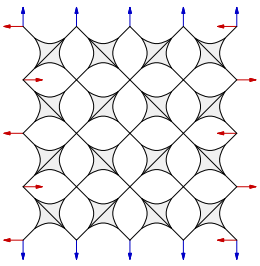
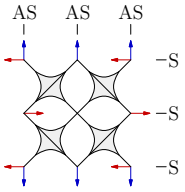
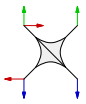
— les directions de déplacements imposés par la déformation considérée : flèches rouges ;

— les directions d'appuis fixes imposées par les symétries (indiquées par le symbole (S) et générant des réactions dans le plan) et les anti-symétries (indiquées par le symbole (AS) et générant des réactions hors plan) : flèches bleues.

Dans un second temps, nous déterminons les conditions d'appuis du module M_0 (colonne de droite). Celui-ci hérite celles du VER, augmentée des conditions de symétrie et d'anti-symétrie des plans médians du VER : flèches vertes.

Enfin, nous déterminons les conditions d'appuis de la cellule (4 × 4) qui répondent aux mêmes contraintes que le VER.

TABLE 3.11 – Conditions d'appuis des cellules

	Cellule (4 × 4)	VER	Module
ε_{xx}			
ε_{xy}			
χ_{xx}			
χ_{xy}			
γ_{xz}			

→ Direction de déplacement imposé par la déformation considérée
→ Direction d'appui fixe imposée par symétrie (S) ou anti-symétrie (AS)
→ Direction d'appui fixe supplémentaire imposée par la symétrie pour le module

3.2.3.3 Cisaillement γ_{xz}

Nous avons introduit, un double indiçage pour définir les points de référence relatifs à un sommet j d'un module i. Par exemple, le point $S'_{1,2}$ désigne le sommet n°2 du tétraèdre du module M_1 après mouvement de corps rigide. Cependant, s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le module traité (étapes 1 à 4), nous omettons l'indice du module pour faciliter la lisibilité. Le double indiçage est réintroduit dans les étapes finales.

Etape 1 : Définition de la cinématique
A l'échelle du VER, les faces z_+ et z_- sont respectivement translatées de Δ_x et $-\Delta_x$ selon $\overrightarrow{x_V}$. La déformation imposée correspondante est :

$$\gamma_{xz} = \frac{2\Delta_x}{h} \tag{3.26}$$

A l'échelle du module M_0, les faces z_+ et z_- sont également translatées de Δ_x et $-\Delta_x$ selon $\overrightarrow{x_V}$. Pour des questions de facilité de calcul, nous modifions les conditions d'appuis établies précédemment en considérant que les déplacements imposés dans la direction $+\overrightarrow{x_V}$ le sont aux points 1 et 2 et que les déplacements imposés dans la direction $-\overrightarrow{x_V}$ le sont aux points 0 et 3. Les conditions d'appuis originales seront rétablies, et les réactions d'appuis en conséquence, à l'étape 4 avant combinaison à l'étape 6.

La cinématique du module M_0 comporte deux degrés de liberté compatibles avec les symétries de la géométrie et du chargement dans le repère $\mathcal{R}_M$ (Fig. 3.61) :

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (0, t_y, 0)$
— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = (0, r_y, 0)$

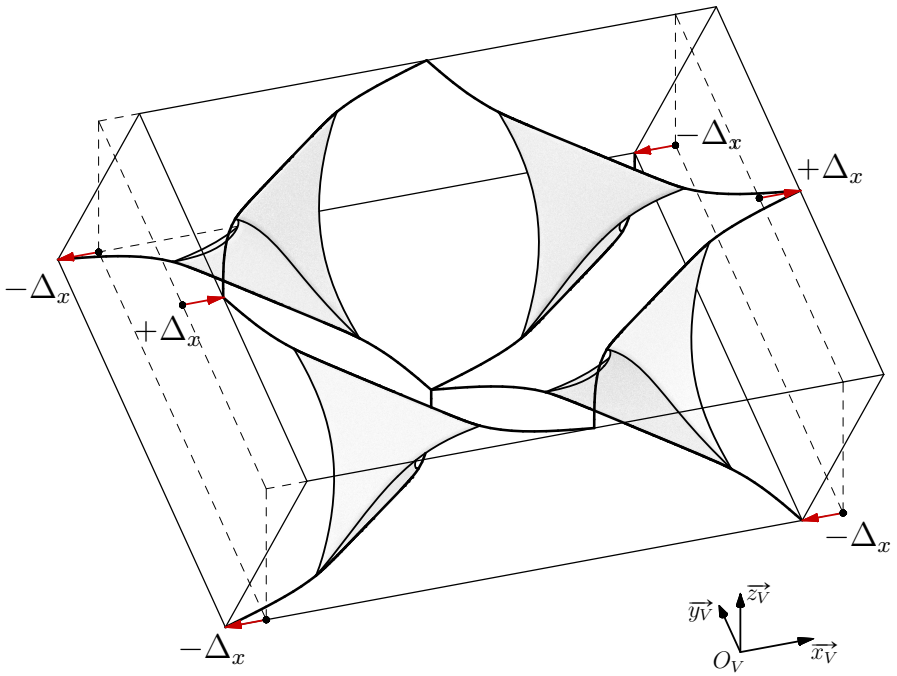


FIGURE 3.61 – Cinématique du cisaillement γ_{xz}

Etape 2 : Equations de compatibilité
Il s'agit maintenant de déterminer les déplacements à imposer aux extrémités des membrures (E'_j) suite à un mouvement de corps rigide de l'ensemble du module selon la cinématique identifiée. Ces déplacements doivent rendre compatible le mouvement de corps rigide avec le système d'appuis de la déformation en cisaillement γ_{xz} (A'_j). On distingue donc les géométries avant et après application du mouvement de corps rigide.

Dans le repère $\mathcal{R}_M$ du module, les extrémités des membrures ont pour coordonnées avant mouvement de corps rigide :

$$\overrightarrow{O_M E_0} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E_1} = \begin{bmatrix} +\frac{b}{2} \\ -\frac{b}{2} \\ +\frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_M E_2} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} \\ +\frac{b}{2} \\ +\frac{h}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E_3} = \begin{bmatrix} +\frac{b}{2} \\ +\frac{b}{2} \\ -\frac{h}{2} \end{bmatrix}$$

Les déplacements des extrémités des membrures selon le mouvement de corps rigide ont pour expression $\overrightarrow{E_i E'_i} = \overrightarrow{\mathcal{T}} + \overrightarrow{\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O_V E_i}$:

$$\overrightarrow{E_0 E'_0} = \begin{bmatrix} -r_y \frac{h}{2} \\ +t_y \\ +r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{E_1 E'_1} = \begin{bmatrix} +r_y \frac{h}{2} \\ +t_y \\ -r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{E_2 E'_2} = \begin{bmatrix} +r_y \frac{h}{2} \\ +t_y \\ +r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{E_3 E'_3} = \begin{bmatrix} -r_y \frac{h}{2} \\ +t_y \\ -r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

La position des extrémités des membrures suite au mouvement de corps rigide est déduite des expressions précédentes :

$$\overrightarrow{O_M E'_0} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & -r_y \frac{h}{2} \\ -\frac{b}{2} & +t_y \\ -\frac{h}{2} & +r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E'_1} = \begin{bmatrix} +\frac{b}{2} & +r_y \frac{h}{2} \\ -\frac{b}{2} & +t_y \\ +\frac{h}{2} & -r_y \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_M E_2'} = \begin{bmatrix} -\frac{b}{2} & +r_y\frac{h}{2} \\ +\frac{b}{2} & +t_y \\ +\frac{h}{2} & +r_y\frac{b}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E_3'} = \begin{bmatrix} +\frac{b}{2} & -r_y\frac{h}{2} \\ +\frac{b}{2} & +t_y \\ -\frac{h}{2} & -r_y\frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

On se place maintenant dans le repère global des poutres $\mathcal{R}_P$ et la position des extrémités des membrures suite au mouvement de corps rigide devient :

$$\overrightarrow{O_M E_0'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-b & -r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(& +r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ -\frac{h}{2} & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E_1'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(& +r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-b & -r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ +\frac{h}{2} & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_M E_2'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(& +r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(+b & -r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ +\frac{h}{2} & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M E_3'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(+b & -r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(& +r_y\frac{h}{2} & +t_y) \\ -\frac{h}{2} & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

La position des appuis pour la déformation de cisaillement γ_{xz} est donnée par :

$$\overrightarrow{O_M A_0'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(-b & -\Delta_x) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(& +\Delta_x) \\ -\frac{h}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M A_1'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(& +\Delta_x) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-b & -\Delta_x) \\ +\frac{h}{2} & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{O_M A_2'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(& +\Delta_x) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(+b & -\Delta_x) \\ +\frac{h}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{O_M A_3'} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}(+b & -\Delta_x) \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(& +\Delta_x) \\ -\frac{h}{2} & \end{bmatrix}$$

On en déduit le vecteur entre les extrémités des membrures et les appuis dans le repère global des poutres $\mathcal{R}_P$:

$$\overrightarrow{E'_0A'_0} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{E'_1A'_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{E'_2A'_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{E'_3A'_3} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

Enfin, ces valeurs de déplacements à imposer aux extrémités des membrures sont exprimées dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$:

$$\overrightarrow{\delta_0} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_1} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & -r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_3} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & -r_y\frac{h}{2} & +\Delta_x\right) \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y & +r_y\frac{h}{2} & -\Delta_x\right) \\ & +r_y\frac{b}{2} & \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation

Étant donné l'expression des déformations $\overrightarrow{\delta_j}$, la formule de l'énergie de déformation des membrures (Equation 3.23) se simplifie :

$$\mathcal{W}_{def} = 4\left[K_N\frac{\delta_{x_0}^2}{2} + K_{M_y}\frac{\delta_{z_0}^2}{2} + K_{M_z}\frac{\delta_{y_0}^2}{2}\right] \tag{3.27}$$

Le problème de minimisation de l'énergie de déformation des membrures se formule alors :

$$\min_{t_y, r_y} \mathcal{W}_{def} \tag{3.28}$$

Grâce à l'expression analytique de cette énergie, il est possible de déterminer t_y et r_y en résolvant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial r_y} &= 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial t_y} &= 0 \end{cases} \tag{3.29}$$

En remplaçant avec l'expression de $\overrightarrow{\delta_0}(\delta_{x_0}, \delta_{y_0}, \delta_{z_0})$ puis en dérivant, on obtient le système :

$$\begin{cases} -\dfrac{h}{4}\left(t_y - r_y\dfrac{h}{2} + \Delta_x\right)K_N + r_y\dfrac{b^2}{4}K_{M_y} + \dfrac{h}{4}\left(t_y + r_y\dfrac{h}{2} - \Delta_x\right)K_{M_z} &= 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(t_y - r_y\dfrac{h}{2} + \Delta_x\right)K_N + \dfrac{1}{2}\left(t_y + r_y\dfrac{h}{2} - \Delta_x\right)K_{M_z} &= 0 \end{cases} \tag{3.30}$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} r_y &= \dfrac{4\Delta_x h K_N K_{M_z}}{2h^2 K_N K_{M_z} + b^2 K_{M_y}(K_N + K_{M_z})} \\ t_y &= \left(r_y\dfrac{h}{2} - \Delta_x\right)\dfrac{K_N - K_{M_z}}{K_N + K_{M_z}} \end{cases} \tag{3.31}$$

Si les membrures présentent une raideur axiale très supérieure à la raideur flexionnelle ($K_N \gg K_{M_z}$), alors les expressions précédentes se simplifient :

$$\begin{cases} r_y &= \dfrac{4\Delta_x h K_{M_z}}{2h^2 K_{M_z} + b^2 K_{M_y}} \\ t_y &= r_y\dfrac{h}{2} - \Delta_x \end{cases} \tag{3.32}$$

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0.
Les réactions d'appuis se calculent dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$ par la relation $\overrightarrow{R_j} = \overrightarrow{K} \cdot \overrightarrow{\delta_j}$:

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y - r_y\frac{h}{2} + \Delta_x\right) & K_N \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y + r_y\frac{h}{2} - \Delta_x\right) & K_{M_z} \\ -r_y\frac{b}{2} & K_{M_y} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y - r_y\frac{h}{2} + \Delta_x\right) & K_N \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y + r_y\frac{h}{2} - \Delta_x\right) & K_{M_z} \\ -r_y\frac{b}{2} & K_{M_y} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y - r_y\frac{h}{2} + \Delta_x\right) & K_N \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y + r_y\frac{h}{2} - \Delta_x\right) & K_{M_z} \\ +r_y\frac{b}{2} & K_{M_y} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y - r_y\frac{h}{2} + \Delta_x\right) & K_N \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(t_y + r_y\frac{h}{2} - \Delta_x\right) & K_{M_z} \\ +r_y\frac{b}{2} & K_{M_y} \end{bmatrix}$$

Soit, dans le repère du module $\mathcal{R}_M$:

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big[-\big(t_y \;\; -r_y\frac{h}{2} \;\; +\Delta_x\big) \;\; K_N \;\; + \;\; \big(t_y \;\; +r_y\frac{h}{2} \;\; -\Delta_x\big) \;\; K_{M_z}\big] \\ 0 \\ -r_y\frac{b}{2} \;\; K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R_x \\ 0 \\ +R_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big[+\big(t_y \;\; -r_y\frac{h}{2} \;\; +\Delta_x\big) \;\; K_N \;\; - \;\; \big(t_y \;\; +r_y\frac{h}{2} \;\; -\Delta_x\big) \;\; K_{M_z}\big] \\ 0 \\ +r_y\frac{b}{2} \;\; K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_x \\ 0 \\ -R_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big[+\big(t_y \;\; -r_y\frac{h}{2} \;\; +\Delta_x\big) \;\; K_N \;\; - \;\; \big(t_y \;\; +r_y\frac{h}{2} \;\; -\Delta_x\big) \;\; K_{M_z}\big] \\ 0 \\ -r_y\frac{b}{2} \;\; K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_x \\ 0 \\ +R_z \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\big[-\big(t_y \;\; -r_y\frac{h}{2} \;\; +\Delta_x\big) \;\; K_N \;\; - \;\; \big(t_y \;\; +r_y\frac{h}{2} \;\; -\Delta_x\big) \;\; K_{M_z}\big] \\ 0 \\ +r_y\frac{b}{2} \;\; K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R_x \\ 0 \\ -R_z \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules
A l'étape 1, nous avons modifié les conditions d'appui du module M_0 afin de faciliter le calcul des réactions d'appuis sous déformation imposée. Afin de reconstituer le VER à partir des modules M_0 à M_3, il est nécessaire de rétablir les conditions d'appuis identifiées initialement. Les réactions d'appuis se redistribuent comme suit :

Module M_0

$$\overrightarrow{R_{0,0}} = \begin{bmatrix} +2R_x \\ +R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_x \\ -R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,2}} = \begin{bmatrix} -2R_x \\ +R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_x \\ -R_z \end{bmatrix}$$

Module M_1

$$\overrightarrow{R_{1,0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,1}} = \begin{bmatrix} +2R_x \\ -R_x \\ -R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,3}} = \begin{bmatrix} -2R_x \\ -R_x \\ -R_z \end{bmatrix}$$

Module M_2

$$\overrightarrow{R_{2,0}} = \begin{bmatrix} -2R_x \\ -R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,1}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +R_x \\ -R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,2}} = \begin{bmatrix} +2R_x \\ -R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,3}} = \begin{bmatrix} 0 \\ +R_x \\ -R_z \end{bmatrix}$$

Module M_3

$$\overrightarrow{R_{3,0}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{3,1}} = \begin{bmatrix} -2R_x \\ +R_x \\ -R_z \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{3,2}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{3,3}} = \begin{bmatrix} +2R_x \\ +R_x \\ -R_z \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER

Après avoir pris la précaution d'imposer des déformations équivalentes sur les modules et sur le VER tout en respectant les conditions de symétries, les réactions d'appuis du VER sont déduites par sommation des réactions des modules. Les réactions sont calculées pour les points 0 à 8 à l'exception du point 4 qui est devenu un point intérieur. On vérifie cependant que les réactions à ce point sont bien équilibrées.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{R_0} &= \overrightarrow{R_{0,0}} &&= \begin{bmatrix} +2R_x \\ +R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_1} &= \overrightarrow{R_{0,1}} + \overrightarrow{R_{1,0}} &&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_2} &= \overrightarrow{R_{1,1}} &&= \begin{bmatrix} +2R_x \\ -R_x \\ -R_z \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_3} &= \overrightarrow{R_{0,2}} + \overrightarrow{R_{2,0}} &&= \begin{bmatrix} -4R_x \\ 0 \\ +2R_z \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_4} &= \overrightarrow{R_{0,3}} + \overrightarrow{R_{1,2}} + \overrightarrow{R_{2,11}} + \overrightarrow{R_{3,0}} &&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_5} &= \overrightarrow{R_{1,3}} + \overrightarrow{R_{3,1}} &&= \begin{bmatrix} -4R_x \\ 0 \\ -2R_z \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_6} &= \overrightarrow{R_{2,2}} &&= \begin{bmatrix} +2R_x \\ -R_x \\ +R_z \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_7} &= \overrightarrow{R_{2,3}} + \overrightarrow{R_{3,2}} &&= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\
\overrightarrow{R_8} &= \overrightarrow{R_{3,3}} &&= \begin{bmatrix} +2R_x \\ +R_x \\ -R_z \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER

On constate que le point 2, point central de la face y_- de la cellule (4×4) ne présente pas de réaction d'appuis, ni selon $\overrightarrow{y}$, ni selon $\overrightarrow{z}$, contrairement au point 10, point central de la face x_-, qui présente des réactions d'appuis selon les deux directions. On conclut que l'intégralité des réactions d'appuis est supportée par les faces x_- et x_+.

Ceci est résumé ci-dessous selon les faces et les composantes :

Face x_-			
$\overrightarrow{x}$	R_{0_x}	R_{3_x}	R_{6_x}
$\overrightarrow{y}$	R_{0_y}	-	R_{6_y}
$\overrightarrow{z}$	R_{0_z}	R_{3_z}	R_{6_z}

Face x_+			
$\overrightarrow{x}$	R_{2_x}	R_{5_x}	R_{8_x}
$\overrightarrow{y}$	R_{2_y}	-	R_{8_y}
$\overrightarrow{z}$	R_{2_z}	R_{5_z}	R_{8_z}

Face y_-	
$\overrightarrow{x}$	-
$\overrightarrow{y}$	-
$\overrightarrow{z}$	-

Face y_+	
$\overrightarrow{x}$	-
$\overrightarrow{y}$	-
$\overrightarrow{z}$	-

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur
Les efforts généralisés sont déterminés par intégration des réactions d'appuis calculés à l'étape précédente.

Pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x+x} - \sum R_{x-x}}{2} = \frac{1}{2b}\frac{R_{2_x} + R_{5_x} + R_{8_x} - (R_{0_x} + R_{3_x} + R_{6_x})}{2} \\ N_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x+y} - \sum R_{x-y}}{2} = \frac{1}{2b}\frac{R_{2_y} + R_{8_y} - \left(R_{0_y} + R_{6_y}\right)}{2} \\ N_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xx} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum zR_{x+x} - \sum zR_{x-x}}{2} = \frac{1}{2b}\frac{\frac{h}{2}R_{5_x} - \frac{h}{2}\left(R_{2_x} + R_{8_x}\right) - \left(\frac{h}{2}R_{3_x} - \left(\frac{h}{2}R_{0_x} + R_{6_x}\right)\right)}{2} \\ M_{xx} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \frac{1}{2b}\frac{\sum zR_{x+y} - \sum zR_{x-y}}{2} = \frac{1}{2b}\frac{\left[-\frac{h}{2}\left(R_{2_y} + R_{8_y}\right) - \left(-\frac{h}{2}\left(R_{0_y} + R_{6_y}\right)\right)\right]}{2} \\ M_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{5}{6}\frac{1}{2b}\frac{\sum R_{x+z} - \sum R_{x-z}}{2} = \frac{5}{6}\frac{1}{2b}\frac{R_{2_z} + R_{5_z} + R_{8_z} - (R_{0_z} + R_{3_z} + R_{6_z})}{2} = -\frac{5}{3b}R_z \\ V_x &= \frac{5}{6}r_y K_{M_y} \end{aligned}$$

Tous les efforts généralisés sont nuls pour les faces de normale $\overrightarrow{y}$:

$$N_{yy} = N_{yx} = M_{yy} = M_{yx} = V_y = 0$$

Tous les coefficients de la septième colonne de la matrice de raideur (Eq. 3.12) sont donc nuls à l'exception du coefficient E_{11}, déterminé par le rapport $E_{11} = {}^{V_x}/_{\gamma_{xz}}$. Pour plus de lisibilité, nous exprimons ce coefficient en fonction des raideurs axiales et flexionnelles des membrures K_N, K_{M_y} et K_{M_z} :

$$E_{11} = \frac{5}{3}\frac{K_N K_{M_z}}{2K_N\frac{K_{M_z}}{K_{M_y}} + \left(\frac{b}{h}\right)^2 (K_N + K_{M_z})}$$

Si ($K_N \gg K_{M_z}$), alors l'expression précédente devient :

$$\tilde{E}_{11} = \frac{5}{3} \frac{K_{M_z}}{2\dfrac{K_{M_z}}{K_{M_y}} + \left(\dfrac{b}{h}\right)^2}$$

Afin de visualiser l'influence des différents paramètres sur le coefficient de raideur en cisaillement, nous traçons les courbes correspondant à la variation d'un paramètres parmi les six identifiés (b, h, μ, S, I_y, I_z) (Fig. 3.62, Eq. 3.18 et 3.20 pour les expressions analytiques de K_N, K_{M_y} et K_{M_z}).

Par défaut, les autres valeurs sont fixées à des valeurs proches de celles du prototype :

— $b = 0.75\,\mathrm{m}$;

— $h = 0.6\,\mathrm{m}$;

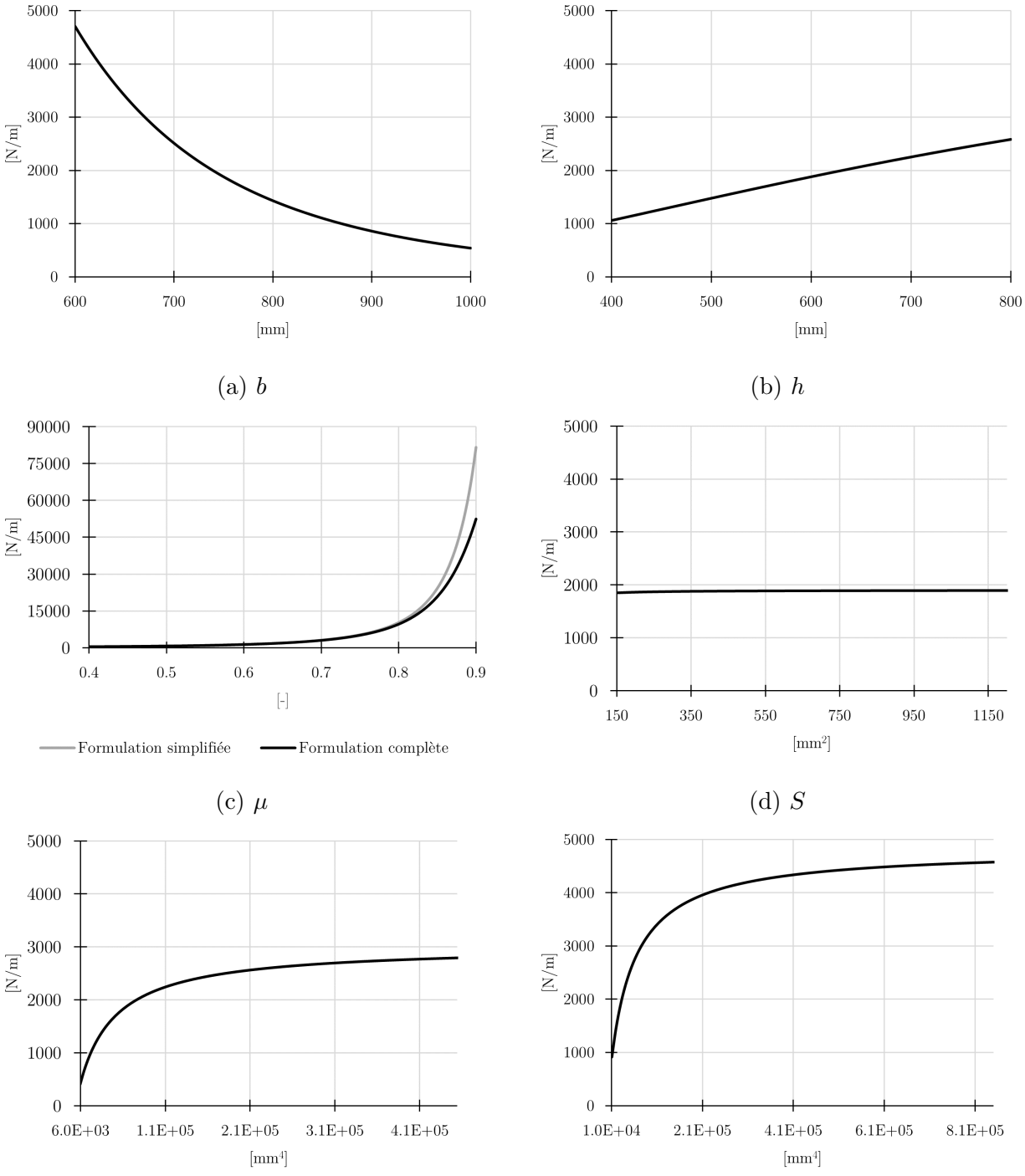
— $\mu = 0.4$;

— S, I_y, I_z, définis par une section en double cornière 30×30×3mm.

Pour domaines de variations, on choisit $b \in [0.6\mathrm{m}, 1\mathrm{m}]$ et $h \in [0.4\mathrm{m}, 0.8\mathrm{m}]$, ce qui correspond environ à $\pm 1/3$ de la valeur par défaut. Le paramètre μ est tracé sur son intervalle de variation complet $\mu \in [0.4, 0.9]$ et les valeurs des paramètres géométriques des membrures sont bornées par celles correspondant à une double cornière 20×20×2mm et 60×60×6mm.

Pour les variables b, h, S, I_y et I_z, la condition ($K_N \gg K_{M_z}$) étant respectée sur tout le domaine de variation, les courbes E_{11} et $\tilde{E}_{11}$ sont superposées ; seule la première est tracée. Afin de comparer les ordres de grandeur et de variation, l'échelle des ordonnées est commune pour ces paramètres. Au contraire, pour la variable μ où la condition ($K_N \gg K_{M_z}$) n'est pas respectée sur tout le domaine de variation, les deux courbes sont tracées sur le même graphique. L'échelle des ordonnées est différente des cinq autres paramètres.

On observe, conformément aux formules, que la raideur en cisaillement croît en même temps que h, μ, I_y et I_z et qu'elle est peu sensible à la variation de section et décroît avec la dimension en plan b du VER. Pour le graphique représentant la variation de μ, on constate que les deux courbes divergent dans la partie supérieure du domaine, car les raideurs axiale et flexionnelle deviennent comparables. La formule simplifiée a tendance à surévaluer la raideur en cisaillement de plaque pour des valeurs de μ proche de 1 et il semble plus pertinent de conserver la formulation complète pour cette partie du domaine (hypothèse sécuritaire).



(a) b (b) h

(c) μ (d) S

(e) I_y (f) I_z

FIGURE 3.62 – Variation du coefficient E_{11} en fonction d'un paramètre

3.2.3.4 Déformation membranaire ε_{xx}

Etape 1 : Définition de la cinématique

A l'échelle du VER, les faces x_+ et x_- sont respectivement translatées de Δ_x et $-\Delta_x$ selon $\overrightarrow{x_V}$. La déformation imposée correspondante est :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta_x}{b} \tag{3.33}$$

A l'échelle du module M_0, la face x_+ est immobile et la face x_- est translatée de $-\Delta_x$ selon $\overrightarrow{x_V}$. Pour des raisons de symétrie, nous préférons imposer les déplacements équivalents : les faces x_+ et x_- sont translatées de $^{\Delta_x}/_2$ et $-^{\Delta_x}/_2$ selon $\overrightarrow{x_V}$.

La cinématique du module M_0 ne comporte pas de degré de liberté compatible avec les symétries de la géométrie et du chargement dans le repère $\mathcal{R}_M$ (Fig. 3.63) :

Selon les symétries du système, la cinématique du module M_0 ne possède aucun degré de liberté (Fig. 3.63) :

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (0, 0, 0)$

— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = (0, 0, 0)$

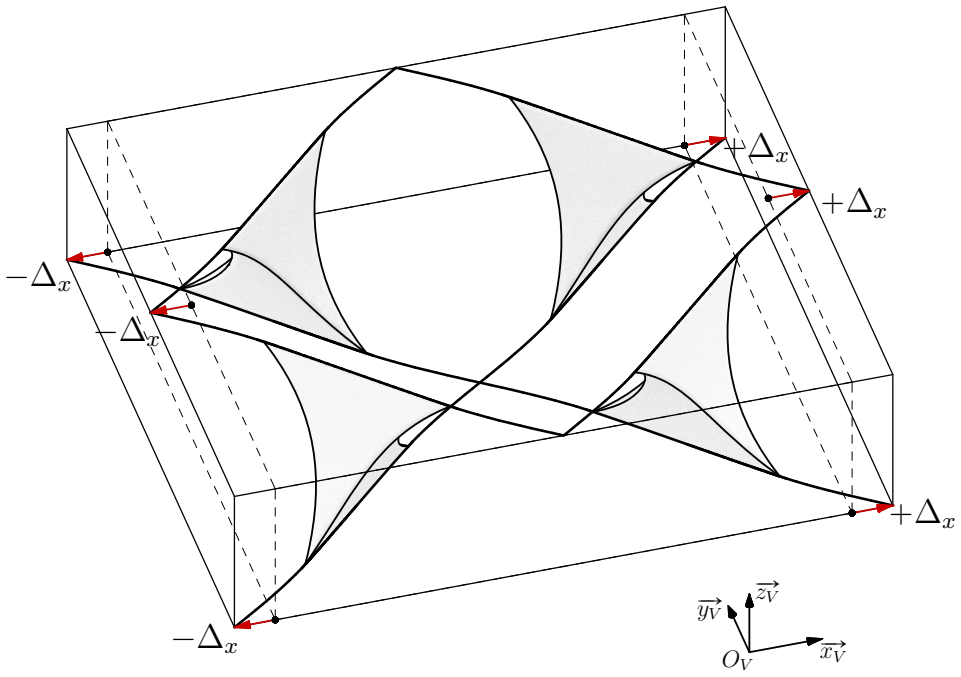


FIGURE 3.63 – Cinématique de la déformation membranaire ε_{xx}

Etape 2 : Equations de compatibilité

Les valeurs de déplacements à imposer aux extrémités des membrures, exprimées dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$ valent :

$$\overrightarrow{\delta_0} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_1} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta_2} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_3} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\Delta_x}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation

La cinématique du module étant nulle, cette étape est sans objet.

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0.

Les réactions d'appuis, dans le repère du module $\mathcal{R}_M$ valent :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{4}(-K_N - K_{M_z}) \\ \frac{\Delta}{4}(-K_N + K_{M_z}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{4}(+K_N + K_{M_z}) \\ \frac{\Delta}{4}(-K_N + K_{M_z}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{4}(-K_N - K_{M_z}) \\ \frac{\Delta}{4}(+K_N - K_{M_z}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta}{4}(+K_N + K_{M_z}) \\ \frac{\Delta}{4}(+K_N - K_{M_z}) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules

Les réactions d'appuis des modules M_1 à M_3 sont déduites du module M_0 par symétrie. Elles sont identiques au module M_0 :

Module M_i

$$\overrightarrow{R_{i,0}} = \begin{bmatrix} +R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,1}} = \begin{bmatrix} -R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,2}} = \begin{bmatrix} +R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,3}} = \begin{bmatrix} -R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER
Par combinaison des modules M_0 à M_3, on déduit les réactions d'appuis du VER :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} +R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ +2R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} -R_x \\ +R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} +2R_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_5} = \begin{bmatrix} -2R_x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_6} = \begin{bmatrix} -R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_7} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R_y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_8} = \begin{bmatrix} -R_x \\ -R_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER
On constate que le point 2, point central de la face y_- de la cellule (4×4) présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{y}$ et le point 10, point central de la face x_- présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{x}$.
Les réactions d'appuis sont donc réparties ainsi, selon les faces et les composantes :

Face x_-			
$\overrightarrow{x}$	R_{0_x}	R_{3_x}	R_{6_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Face x_+			
$\overrightarrow{x}$	R_{2_x}	R_{5_x}	R_{8_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_-			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{0_y}	R_{1_y}	R_{2_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_+			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{6_y}	R_{7_y}	R_{8_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur
Les efforts généralisés sont déterminés par intégration des réactions d'appuis calculés à l'étape précédente.

Pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$:

$$N_{xx} = -\frac{2}{b} R_x = \frac{\Delta_x}{2b} \left(K_N + K_{M_z}\right)$$
$$N_{xy} = M_{xx} = M_{xy} = V_x = 0$$

Pour les faces de normale $\overrightarrow{y}$:

$$N_{yy} = -\frac{2}{b} R_y = \frac{\Delta_x}{2b} \left(K_N - K_{M_z}\right)$$
$$N_{yx} = M_{xx} = M_{yx} = V_y = 0$$

Tous les coefficients de la première colonne de la matrice de raideur sont donc nuls à l'exception des coefficients A_{11} et A_{12}, déterminé par le rapport $A_{11} = {}^{N_{xx}}/_{\varepsilon_{xx}}$ et $A_{12} = {}^{N_{yy}}/_{\varepsilon_{xx}}$.

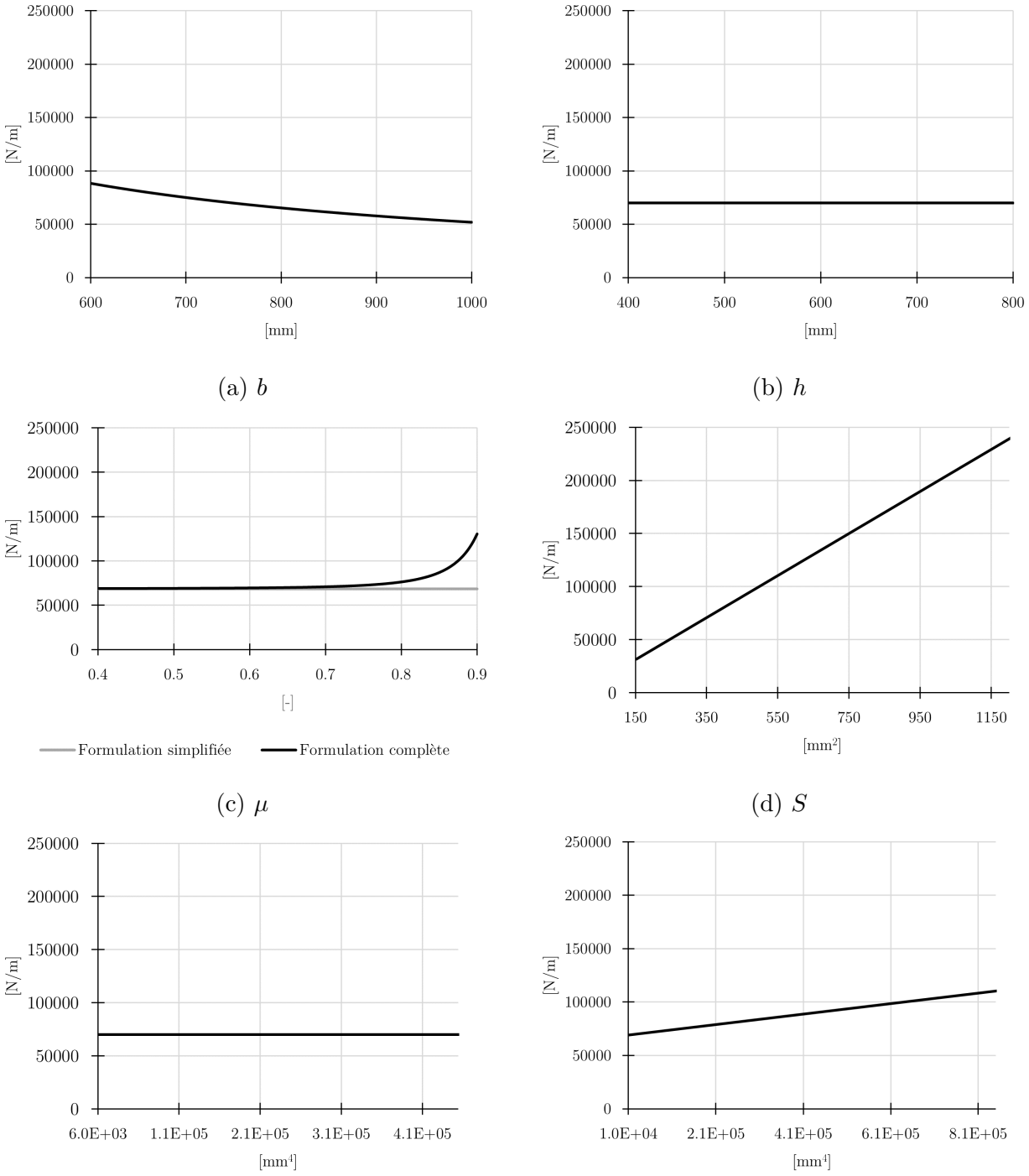
$$A_{11} = \frac{K_N + K_{M_z}}{2} \qquad A_{12} = \frac{K_N - K_{M_z}}{2}$$

Si $(K_N \gg K_{M_z})$, alors l'expression précédente devient :

$$\tilde{A}_{11} = \frac{K_N}{2} \qquad \tilde{A}_{12} = \frac{K_N}{2}$$

Les formules et les courbes tracées (Fig. 3.64 et 3.65) montrent que les raideurs membranaires A_{11} et A_{12} sont indépendantes de la hauteur h et de l'inertie I_y, ce qui est cohérent avec la réponse mécanique du VER dont les membrures sont étirées et fléchies selon l'axe faible. Cela explique également que le paramètre dominant, lorsque la condition $(K_N \gg K_{M_z})$ est respectée, est l'aire de la section S : l'allure de la courbe relative à ce paramètre est linéaire et présente une forte variation de raideur. Le seul graphique présentant une différence notoire entre la formulation complète et la formulation simplifiée est celui montrant la variation de μ. La formulation simplifiée néglige les effets de la raideur flexionnelle et prévoit des coefficients A_{11} et A_{12} constants, car la raideur axiale est indépendante de ce paramètre. Au contraire, en partie supérieure du domaine où raideurs axiale et flexionnelle deviennent comparables, la formulation complète des coefficients intègre une contribution positive de la raideur K_{M_z} pour A_{11} et négative pour A_{12}.

Enfin, lorsque la condition $(K_N \gg K_{M_z})$ est respectée, $\tilde{A}_{11} = \tilde{A}_{12}$, ce qui peut se traduire par un coefficient de Poisson apparent égal à 1, valeur théoriquement inaccessible en élasticité linéaire isotrope. Cependant, pour des matériaux architecturés, comme celui que nous étudions, cette valeur peut être interprétée comme un critère d'incompressibilité de plaque en déformation plane [324].



(a) b

(b) h

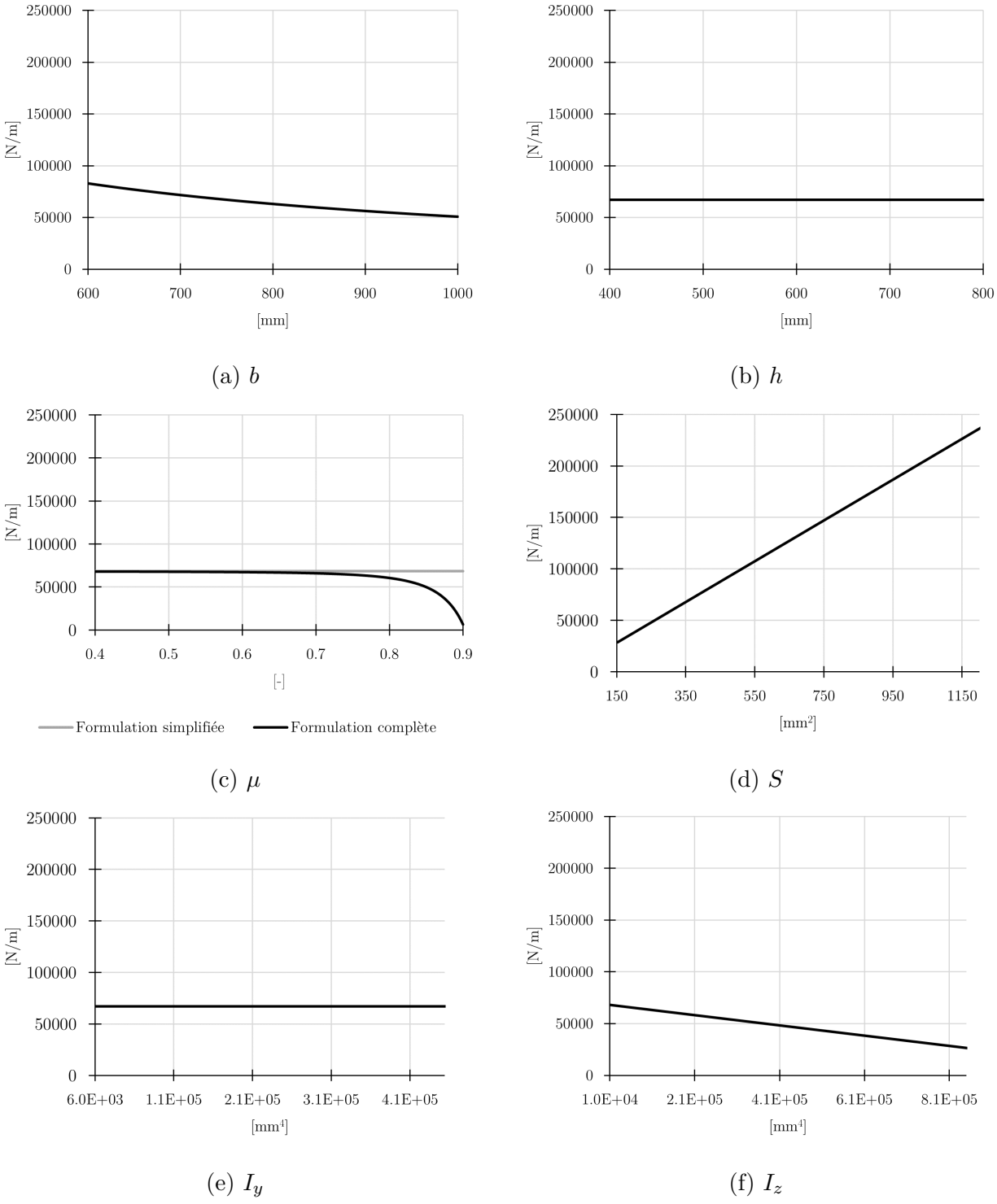
(c) μ

(d) S

(e) I_y

(f) I_z

FIGURE 3.64 – Variation du coefficient A_{11} en fonction d'un paramètre



(a) b (b) h

(c) μ (d) S

(e) I_y (f) I_z

FIGURE 3.65 – Variation du coefficient A_{12} en fonction d'un paramètre

3.2.3.5 Déformation membranaire ε_{xy}

Etape 1 : Définition de la cinématique

A l'échelle du VER, les faces x_+ et x_- sont respectivement translatées de Δ_y et $-\Delta_y$ selon $\overrightarrow{y_V}$. La déformation imposée correspondante est :

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\Delta_y}{b} \tag{3.34}$$

A l'échelle du module M_0, la face x_+ est immobile et la face x_- est translatée de $-\Delta_y$ selon $\overrightarrow{y_V}$. Pour des raisons de symétrie, nous préférons imposer les déplacements équivalents : les faces x_+ et x_- sont translatées de $\Delta_y/2$ et $-\Delta_y/2$ selon $\overrightarrow{y_V}$.

La cinématique du module M_0 comporte un degré de liberté compatible avec les symétries de la géométrie et du chargement dans le repère $\mathcal{R}_M$ (Fig. 3.66) :

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (0, 0, 0)$

— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = (0, 0, r_z)$

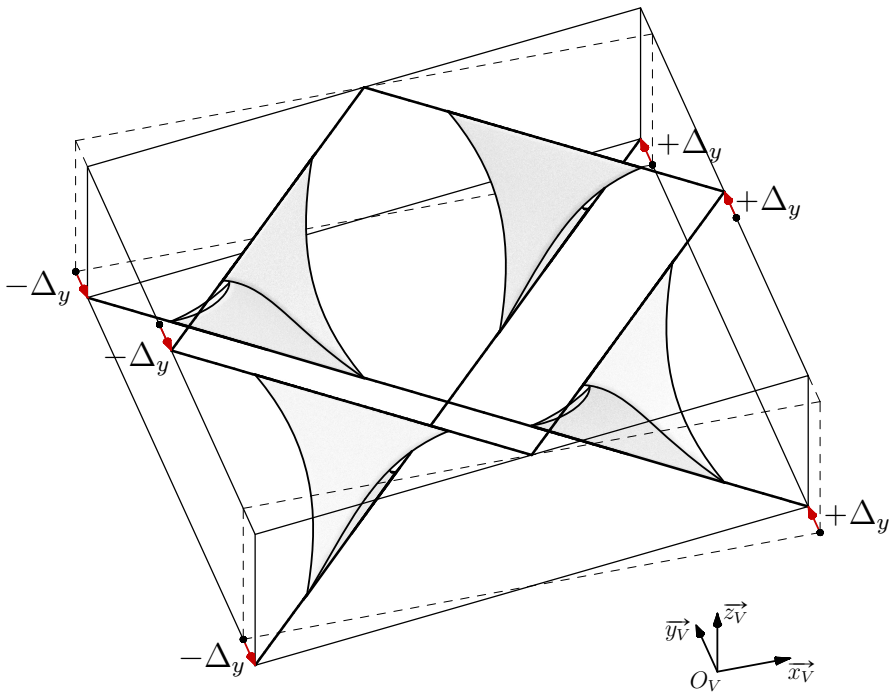


FIGURE 3.66 – Cinématique de la déformation membranaire ε_{xy}

Etape 2 : Equations de compatibilité
Les valeurs de déplacements à imposer aux extrémités des membrures, exprimées dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$ valent :

$$\overrightarrow{\delta_0} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-r_y b \right. & +\frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+r_y b \right. & -\frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+r_y b \right. & -\frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_3} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-r_y b \right. & +\frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation
Étant donné l'expression des déformations $\overrightarrow{\delta_j}$, la formule de l'énergie de déformation des membrures (Equation 3.23) se simplifie :

$$\mathcal{W}_{def} = 4\left[K_N \frac{\delta_{x0}^2}{2} + K_{M_z}\frac{\delta_{y0}^2}{2}\right] \tag{3.35}$$

Grâce à l'expression analytique de cette énergie, il est possible de déterminer r_z en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial r_z} = 0 \tag{3.36}$$

En remplaçant avec l'expression de $\overrightarrow{\delta_0}(\delta_{x0}, \delta_{y0}, \delta_{z0})$ puis en dérivant, on obtient l'équation :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} b K_{M_z}\left(r_z b - \frac{\Delta_y}{2}\right) = 0 \tag{3.37}$$

La résolution donne :

$$r_z = \frac{\Delta_y}{2b} \tag{3.38}$$

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0.
Les réactions d'appuis, dans le repère du module $\mathcal{R}_M$ valent :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ -\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ +\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} +\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ -\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} +\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ +\frac{\Delta_y}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules
Les réactions d'appuis des modules M_1 à M_3 sont déduites du module M_0 par symétrie. Elles sont identiques au module M_0 :

Module M_i

$$\overrightarrow{R_{i,0}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,1}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,2}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_{i,3}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER
Par combinaison des modules M_0 à M_3, on déduit les réactions d'appuis du VER :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} +2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ +2R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_6} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_7} = \begin{bmatrix} -2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_8} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER
On constate que le point 2, point central de la face y_- de la cellule (4×4) présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{x}$ et le point 10, point central de la face x_-, présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{y}$. Les réactions d'appuis sont donc réparties ainsi, selon les faces et les composantes :

Face x_-			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{0_y}	R_{3_y}	R_{6_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Face x_+			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{2_y}	R_{5_y}	R_{8_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_-			
$\overrightarrow{x}$	R_{0_x}	R_{1_x}	R_{2_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_+			
$\overrightarrow{x}$	R_{6_x}	R_{7_x}	R_{8_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur
Les efforts généralisés sont déterminés par intégration des réactions d'appuis calculés à l'étape précédente.

Pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$:

$$N_{xy} = -\frac{2}{b}R = \frac{\Delta_y}{2b}K_N$$
$$N_{xx} = M_{xx} = M_{xy} = V_x = 0$$

Pour les faces de normale $\overrightarrow{y}$:

$$N_{yx} = -\frac{2}{b}R = \frac{\Delta_y}{2b}K_N$$
$$N_{yy} = M_{xx} = M_{yx} = V_y = 0$$

Tous les coefficients de la troisième colonne de la matrice de raideur sont donc nuls à l'exception du coefficient A_{33}, déterminé par le rapport $A_{33} = {}^{N_{xy}}/_{2\varepsilon_{xy}}$.

$$A_{33} = \frac{K_N}{4}$$

La raideur membranaire de cisaillement A_{33} ne dépend que de la raideur axiale des membrures. Elle est donc constante pour tous les paramètres à l'exception de la dimension en plan b pour laquelle elle décroît en fonction inverse et l'aire de la section S pour laquelle elle croît linéairement.

3.2.3.6 Courbure χ_{xx}

Etape 1 : Définition de la cinématique
A l'échelle du VER, les faces x_+ et x_- sont respectivement pivotées d'un angle de ρ_y et $-\rho_y$ selon $\overrightarrow{y_V}$. Dans l'hypothèse de petits déplacements et de petites rotations, on peut assimiler cette rotation à un allongement/raccourcissement des fibres supérieures/inférieures. On impose alors :

— les déplacements Δ_x et $-\Delta_x$ respectivement à la fibre supérieure des faces x_+ et x_- ;

— les déplacements $-\Delta_x$ et Δ_x respectivement à la fibre inférieure des faces x_+ et x_-.

La déformation imposée correspondante est :

$$\chi_{xx} = \frac{2\Delta_x}{hb} \tag{3.39}$$

A l'échelle du module M_0, la face x_+ est immobile et la face x_- est pivotée de $-\rho_y$ selon $\overrightarrow{y_V}$. Pour des raisons de symétrie, nous préférons imposer les déplacements équivalents : les faces x_+ et x_- sont pivotées de $\rho_y/2$ et $-\rho_y/2$ selon $\overrightarrow{y_V}$, soit des déplacements imposés de $\Delta_x/2$ et $-\Delta_x/2$ correctement distribués sur les fibres supérieure et inférieure des faces x_+ et x_-.

Nous remarquons que les déplacements imposés sont les mêmes que ceux de la déformation membranaire ε_{xy}, les étapes 2 à 4 sont donc similaires (dupliquées ci-dessous pour permettre une lecture autonome de cette partie). Cependant, la nature de la déformation et les conditions d'appuis varient, les étapes 5 et suivantes sont donc différentes.

La cinématique du module M_0 comporte un degré de liberté compatible avec les symétries de la géométrie et du chargement dans le repère $\mathcal{R}_M$ (Fig. 3.67) :

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (0, 0, 0)$

— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = (0, 0, r_z)$

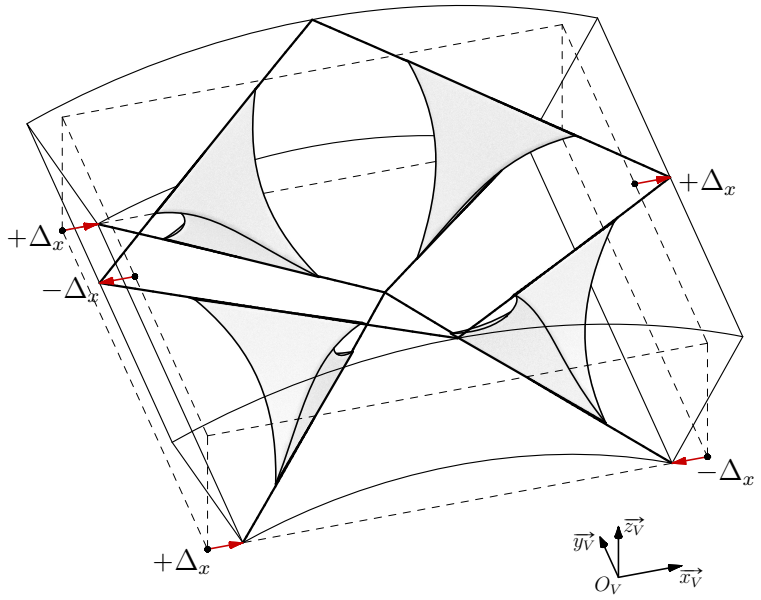


FIGURE 3.67 – Cinématique de la courbure χ_{xx}

Etape 2 : Equations de compatibilité
Les valeurs de déplacements à imposer aux extrémités des membrures, exprimées dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$ valent :

$$\overrightarrow{\delta_0} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-r_z b \right. & \left. +\frac{\Delta_x}{2}\right) \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+r_z b \right. & \left. -\frac{\Delta_x}{2}\right) \\ 0 & \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta_2} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(+r_z b \right. & \left. -\frac{\Delta_x}{2}\right) \\ 0 & \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_3} = \begin{bmatrix} +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\right. & \frac{\Delta_x}{2}\left. \right) \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-r_z b \right. & \left. +\frac{\Delta_x}{2}\right) \\ 0 & \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation
Étant donné l'expression des déformations $\overrightarrow{\delta_j}$, la formule de l'énergie de déformation des membrures (Equation 3.23) se simplifie :

$$\mathcal{W}_{def} = 4\left[K_N \frac{\delta_{x_0}^2}{2} + K_{M_z}\frac{\delta_{y_0}^2}{2}\right] \tag{3.40}$$

Grâce à l'expression analytique de cette énergie, il est possible de déterminer r_z en résolvant l'équation :

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial r_z} = 0 \tag{3.41}$$

En remplaçant avec l'expression de $\overrightarrow{\delta_0}(\delta_{x_0}, \delta_{y_0}, \delta_{z_0})$ puis en dérivant, on obtient l'équation :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} b K_{M_z}\left(r_z b - \frac{\Delta_x}{2}\right) = 0 \tag{3.42}$$

La résolution donne :

$$r_z = \frac{\Delta_x}{2b} \tag{3.43}$$

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0.
Les réactions d'appuis, dans le repère du module $\mathcal{R}_M$ valent :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ -\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ +\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} +\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ -\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} +\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ +\frac{\Delta_x}{4}K_N \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules
Les réactions d'appuis des modules M_1 à M_3 sont déduites du module M_0 par symétrie :

Module M_0

$$\overrightarrow{R_{0,0}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,1}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,2}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,3}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Module M_1

$$\overrightarrow{R_{1,0}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,1}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,2}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,3}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Module M_2

$$\overrightarrow{R_{2,0}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,1}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,2}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,3}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Module M_3

$$\overrightarrow{R_{3,0}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,1}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,2}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,3}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER
Par combinaison des modules M_0 à M_3, on déduit les réactions d'appuis du VER :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} -2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_5} = \begin{bmatrix} +2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_6} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_7} = \begin{bmatrix} 0 \\ +2R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_8} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ 0 \end{bmatrix}$$

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER
On constate que le point 2, point central de la face y_- de la cellule (4×4) présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{y}$ et le point 10, point central de la face x_- présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{x}$.
Les réactions d'appuis sont donc réparties ainsi, selon les faces et les composantes :

Face x_-			
$\overrightarrow{x}$	R_{0_x}	R_{3_x}	R_{6_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Face x_+			
$\overrightarrow{x}$	R_{2_x}	R_{5_x}	R_{8_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_-			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{0_y}	R_{1_y}	R_{2_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Face y_+			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{6_y}	R_{7_y}	R_{8_y}
$\overrightarrow{z}$		-	

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur
Les efforts généralisés sont déterminés par intégration des réactions d'appuis calculés à l'étape précédente.

Pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$:

$$M_{xx} = \frac{h}{b}R = \frac{h\Delta_x}{4b}K_N$$
$$N_{xx} = N_{xy} = M_{xy} = V_x = 0$$

Pour les faces de normale $\overrightarrow{y}$:

$$M_{yy} = \frac{h}{b}R = \frac{h\Delta_x}{4b}K_N$$
$$N_{yy} = M_{yx} = M_{yx} = V_y = 0$$

Tous les coefficients de la quatrième colonne de la matrice de raideur sont donc nuls à l'exception des coefficients D_{11} et D_{21}, déterminés par le rapport $D_{11} = {}^{M_{xx}}/_{\chi_{xx}}$ et $D_{21} = {}^{M_{yy}}/_{\chi_{xx}}$.

$$D_{11} = D_{21} = \frac{h^2}{8}K_N$$

Les raideurs flexionnelles de plaque D_{11} et D_{21} ne dépendent que de la raideur axiale des membrures et de la hauteur du VER. Elle est donc constante pour tous les paramètres à l'exception de la dimension en plan b pour laquelle elle décroît en fonction inverse, de la hauteur h avec une croissance quadratique et de l'aire de la section S avec une croissance linéaire.

3.2.3.7 Courbure χ_{xy}

Etape 1 : Définition de la cinématique
A l'échelle du VER, on opère une torsion des faces x_+ et x_- d'un angle ρ_x selon $\overrightarrow{x_V}$, soit une rotation respective des faces x_+ et x_- d'un angle $\rho_x/2$ et $-\rho_x/2$ selon $\overrightarrow{x_V}$. Cette opération génère également une torsion des faces y_+ et y_- selon $\overrightarrow{y_V}$ d'une valeur $\rho_y = -\rho_x$.

Dans l'hypothèse de petits déplacements et de petites rotations, on peut assimiler cette rotation à une translation verticale des coins M_0, M_2, M_6 et M_8 du VER d'une valeur alternée de Δ_z et $-\Delta_z$.

La déformation imposée correspondante est :

$$\chi_{xy} = \frac{\Delta_z}{b^2} \tag{3.44}$$

A l'échelle du module M_0, les points 1, 2 et 3 sont immobiles et le point 0 est translaté de Δ_z selon $\overrightarrow{z_V}$. Pour des raisons de symétrie, nous préférons imposer les déplacements équivalents : les points 1, 2 et 3 sont translatés de $-\Delta_z/2$ et le point 0 de $\Delta_z/2$ selon $\overrightarrow{z_V}$.

Contrairement aux autres déformations imposées et étant donné les symétries du système, il est plus pertinent de décrire la cinématique du module M_0 dans le repère global des poutres $\mathcal{R}_P$. Elle comporte trois degrés de liberté compatibles avec les symétries de la géométrie et du chargement dans ce repère (Fig. 3.68) :

— Translations : $\overrightarrow{\mathcal{T}} = (t_x, 0, t_z)$
— Rotations : $\overrightarrow{\mathcal{R}} = (0, r_y, 0)$

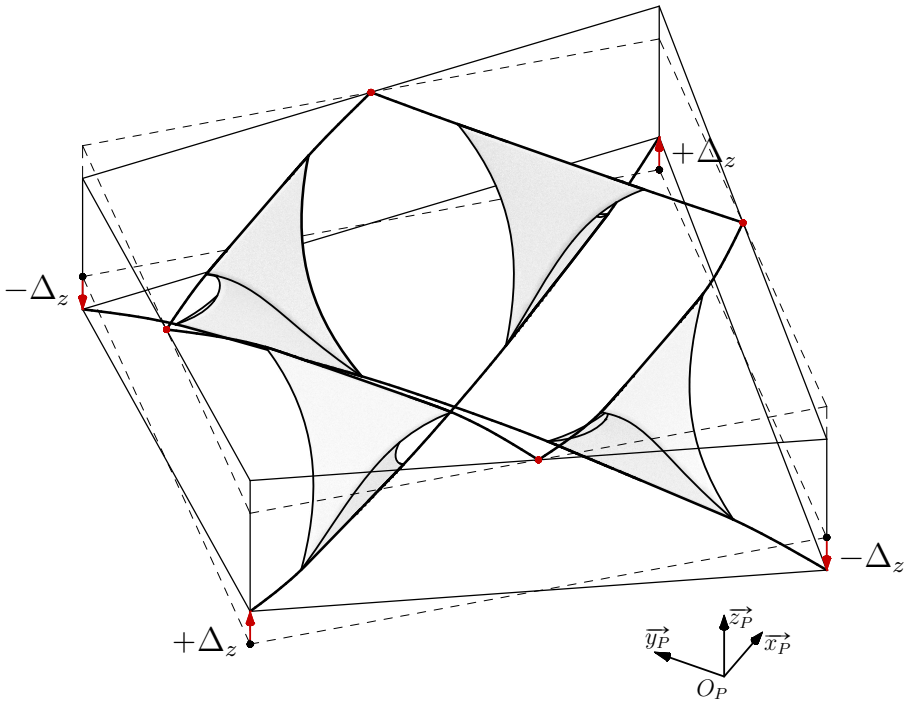


FIGURE 3.68 – Cinématique de la courbure χ_{xy}

Etape 2 : Equations de compatibilité

Les valeurs de déplacements à imposer aux extrémités des membrures, exprimées dans le repère local des poutres $\mathcal{R}_{P_j}$ valent :

$$\overrightarrow{\delta_0} = \begin{bmatrix} +t_x & -r_y\frac{h}{2} & \\ & 0 & \\ -t_z & -\frac{\sqrt{2}}{2}r_y b & +\frac{\Delta_z}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_1} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ +t_x & +r_y\frac{h}{2} & \\ +t_z & & +\frac{\Delta_z}{2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\delta_2} = \begin{bmatrix} & 0 & \\ +t_x & -r_y\frac{h}{2} & \\ +t_z & & +\frac{\Delta_z}{2} \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{\delta_3} = \begin{bmatrix} -t_x & +r_y\frac{h}{2} & \\ & 0 & \\ -t_z & +\frac{\sqrt{2}}{2}r_y b & -\frac{\Delta_z}{2} \end{bmatrix}$$

Etape 3 : Minimisation de l'énergie de déformation

Étant donné l'expression des déformations $\overrightarrow{\delta_j}$ qui est différente pour chaque poutre, il est nécessaire de considérer la formule complète de l'énergie de déformation des membrures (Equation 3.23).

Grâce à l'expression analytique de cette énergie, il est possible de déterminer t_x, t_z et r_y en résolvant le système :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial r_y} &= 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial t_x} &= 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{W}_{def}}{\partial t_z} &= 0 \end{cases} \tag{3.45}$$

En remplaçant avec l'expression des $\overrightarrow{\delta_i}(\delta_{x_i}, \delta_{y_i}, \delta_{z_i})$ puis en dérivant, on obtient le système :

$$\begin{cases} h\left(-t_x + r_y\frac{h}{2}\right)K_N + \frac{\sqrt{2}}{2}b\left(\sqrt{2}r_y b - \Delta_z\right)K_{M_y} + h\left(+t_x + r_y\frac{h}{2}\right)K_{M_z} = 0 \\ \left(+t_x - r_y\frac{h}{2}\right)K_N + \left(+t_x + r_y\frac{h}{2}\right)K_{M_z} = 0 \\ t_z = -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases} \tag{3.46}$$

La résolution donne :

$$\begin{cases} r_y &= \dfrac{\sqrt{2}b\Delta_z}{2b^2 + 4h^2\dfrac{K_{M_z}}{K_{M_y}}\dfrac{K_N}{K_N + K_{M_z}}} \\ t_y &= r_y\dfrac{h}{2}\dfrac{K_N - K_{M_z}}{K_N + K_{M_z}} \\ t_z &= -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases} \tag{3.47}$$

Si les membrures présentent une raideur axiale très supérieure à la raideur flexionnelle ($K_N \gg K_{M_z}$), alors les expressions précédentes se simplifient :

$$\begin{cases} r_y &= \dfrac{\sqrt{2}b\Delta_z}{2b^2 + 4h^2\dfrac{K_{M_z}}{K_{M_y}}} \\ t_y &= r_y\dfrac{h}{2} \\ t_z &= -\dfrac{\Delta}{4} \end{cases} \tag{3.48}$$

Etape 4 : Calcul des réactions d'appuis du module M_0.
Les réactions d'appuis, dans le repère du module $\mathcal{R}_M$ valent :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & +r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_N \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & +r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_N \\ \Big(-t_z & -\frac{\sqrt{2}}{2}r_y b & +\frac{\Delta_z}{2}\Big) & K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_1} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & -r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_{M_z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & -r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_{M_z} \\ \Big(-t_z & & -\frac{\Delta_z}{2}\Big) & K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & -r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_{M_z} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & -r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_{M_z} \\ \Big(-t_z & & -\frac{\Delta_z}{2}\Big) & K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & +r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_N \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\Big(-t_x & +r_y\frac{h}{2} & \Big) & K_N \\ \Big(-t_z & +\frac{\sqrt{2}}{2}r_y b & -\frac{\Delta_z}{2}\Big) & K_{M_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_3} \end{bmatrix}$$

Etape 5 : Calcul des réactions d'appuis des autres modules
Les réactions d'appuis des modules M_1 à M_3 sont déduites du module M_0 par symétrie :

Module M_0

$$\overrightarrow{R_{0,0}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_1} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,1}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,2}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{0,3}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_3} \end{bmatrix}$$

Module M_1

$$\overrightarrow{R_{1,0}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ -R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,1}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ -R_{z_1} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,2}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ -R_{z_3} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{1,3}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ -R_{z_2} \end{bmatrix}$$

Module M_2

$$\overrightarrow{R_{2,0}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ -R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,1}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ -R_{z_3} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,2}} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ -R_{z_1} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{2,3}} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ -R_{z_2} \end{bmatrix}$$

Module M_3

$$\overrightarrow{R_{3,0}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_3} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,1}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,2}} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_2} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_{3,3}} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_1} \end{bmatrix}$$

Etape 6 : Calcul des réactions d'appuis du VER
Par combinaison des modules M_0 à M_3, on déduit les réactions d'appuis du VER :

$$\overrightarrow{R_0} = \begin{bmatrix} +R \\ +R \\ +R_{z_1} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_1} = \begin{bmatrix} -2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_2} = \begin{bmatrix} +R \\ -R \\ -R_{z_1} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2R \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_5} = \begin{bmatrix} 0 \\ +2R \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{R_6} = \begin{bmatrix} -R \\ +R \\ -R_{z_1} \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_7} = \begin{bmatrix} +2R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \overrightarrow{R_8} = \begin{bmatrix} -R \\ -R \\ +R_{z_1} \end{bmatrix}$$

Etape 7 : Attribution des réactions d'appuis aux faces du VER
On constate que le point 2, point central de la face y_- de la cellule (4×4) présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{x}$ et le point 10, point central de la face x_- présente une réaction d'appui selon $\overrightarrow{y}$. Les composantes selon $\overrightarrow{x}$ des réactions sont donc attribuées aux faces de normales $\overrightarrow{y}$, alors que les composantes selon $\overrightarrow{y}$ sont attribuées aux faces de normales $\overrightarrow{x}$. D'autre part, aucun des points 2 et 10 ne présente de réaction verticale. Les composantes selon $\overrightarrow{z}$ sont donc équitablement réparties entre les faces de normales $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$. En cohérence avec la symétrie du VER et de son chargement, les composantes sont distribuées pour moitié entre deux faces de normales $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ adjacentes.

Les réactions d'appuis sont donc réparties ainsi, selon les faces et les composantes :

Face x_-			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{0_y}	R_{3_y}	R_{6_y}
$\overrightarrow{z}$	$R_{0_z}/2$	-	$R_{6_z}/2$

Face x_+			
$\overrightarrow{x}$		-	
$\overrightarrow{y}$	R_{2_y}	R_{5_y}	R_{8_y}
$\overrightarrow{z}$	$R_{2_z}/2$	-	$R_{8_z}/2$

Face y_-			
$\overrightarrow{x}$	R_{0_x}	R_{1_x}	R_{2_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$	$R_{0_z}/2$	-	$R_{6_z}/2$

Face y_+			
$\overrightarrow{x}$	R_{6_x}	R_{7_x}	R_{8_x}
$\overrightarrow{y}$		-	
$\overrightarrow{z}$	$R_{6_z}/2$	-	$R_{8_z}/2$

Etape 8 : Calcul des efforts généralisés et des coefficients de la matrice de raideur
Les efforts généralisés sont déterminés par intégration des réactions d'appuis calculés à l'étape précédente.

Pour les faces de normale $\overrightarrow{x}$:

$$M_{xy} = -\frac{h}{b}R + \frac{R_{z_1}}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\left(-t_x + r_y\frac{h}{2}\right)K_N + \frac{1}{4}\left(-t_z - \frac{\sqrt{2}}{2}r_y b + \frac{\Delta_z}{2}\right)K_{M_y}$$
$$N_{xx} = N_{xy} = M_{xx} = V_x = 0$$

Pour les faces de normale $\overrightarrow{y}$:

$$M_{yx} = \frac{h}{b}R - \frac{R_{z_1}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{h}{b}\left(-t_x + r_y\frac{h}{2}\right)K_N - \frac{1}{4}\left(-t_z - \frac{\sqrt{2}}{2}r_y b + \frac{\Delta_z}{2}\right)K_{M_y}$$
$$N_{yy} = M_{yx} = M_{yy} = V_y = 0$$

Tous les coefficients de la sixième colonne de la matrice de raideur sont donc nuls à l'exception du coefficient D_{33}, déterminé par le rapport $D_{33} = {}^{M_{xy}}/_{2\chi_{xy}}$.

$$D_{33} = \frac{b^2 K_{M_y}\left(K_N + K_{M_z}\right) - 2h^2 K_N K_{M_z}}{32\left(K_N + K_{M_z}\right) + 64\dfrac{h^2}{b^2}K_N\dfrac{K_{M_z}}{K_{M_y}}} \tag{3.49}$$

Si $(K_N \gg K_{M_z})$, alors l'expression précédente devient :

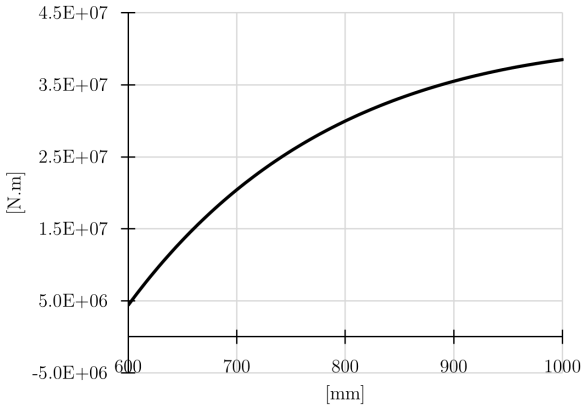
$$\tilde{D}_{33} = \frac{b^2 K_{M_y} - 2h^2 K_{M_z}}{32 + 64\dfrac{h^2}{b^2}\dfrac{K_{M_z}}{K_{M_y}}} \tag{3.50}$$

L'expression du coefficient de raideur en torsion du VER est plus complexe que les autres coefficients dans sa forme et dans son interprétation. Les intervalles de variation du coefficient D_{33} étant très différents selon les paramètres, chaque graphique possède une échelle des ordonnées différente. Seul le graphique de μ représente les deux formulations, complète et simplifiée, qui se distinguent dans la partie supérieure du domaine de variation.

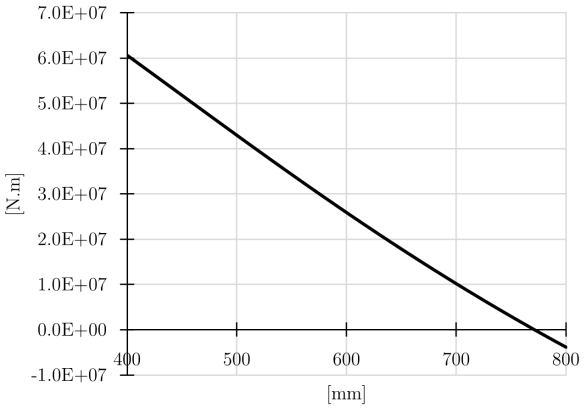
En observant la formule analytique, ainsi que les courbes de variation des paramètres, on peut constater que le coefficient D_{33}, selon certains jeux de variables, est capable de prendre des valeurs positives, nulle, ou négatives. Une raideur négative est une notion contre-intuitive pour des matériaux conventionnels, mais peut se retrouver dans des matériaux architecturés comme celui que nous étudions. Par exemple, les matériaux auxétiques [325] possèdent un coefficient de Poisson négatif, ce qui impliquerait, pour une plaque constituée de ce matériau, un coefficient A_{12} négatif. Si l'on considère l'expression simplifiée, le comportement conventionnel ou non du coefficient est piloté par le rapport entre les quatre variables b, h, I_y et I_z selon la relation :

$$\tilde{D}_{33} > 0 \Longleftrightarrow \frac{b^2 K_{M_y}}{h^2 K_{M_z}} > 2 \tag{3.51}$$

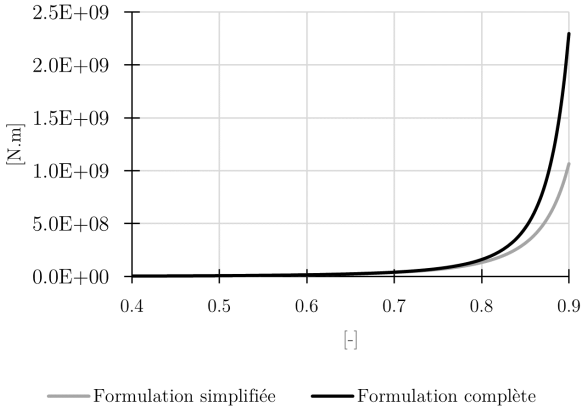
Cela explique aussi que, de façon contre-intuitive, la raideur en torsion augmente en même temps que b ou diminue en même temps que h et I_z.



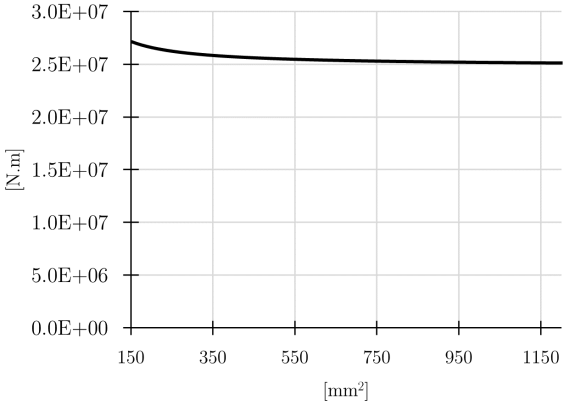
(a) b



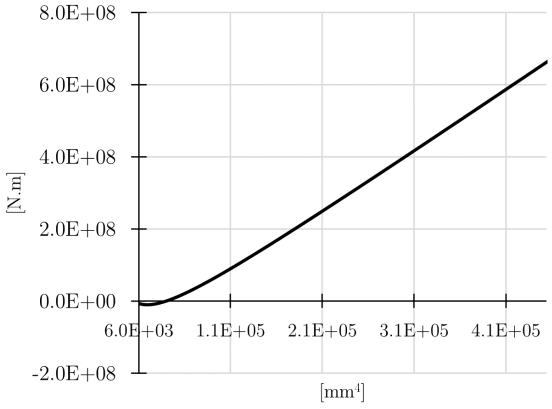
(b) h



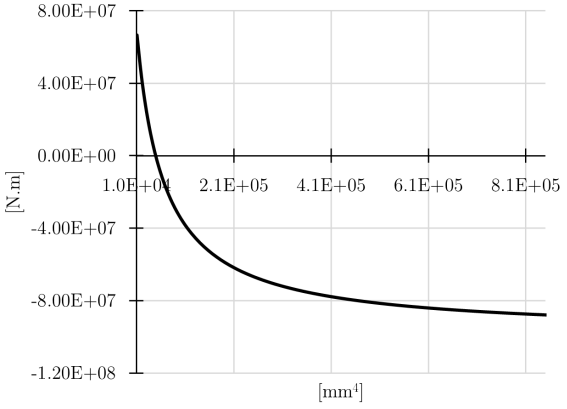
(c) μ



(d) S



(e) I_y



(f) I_z

FIGURE 3.69 – Variation du coefficient D_{33} en fonction d'un paramètre

3.2.3.8 Synthèse

A partir des études menées précédemment, il est possible de déduire par symétrie l'intégralité des coefficients de la matrice de raideur relative à la contribution des membrures :

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & & & & & \\ A_{12} & A_{11} & 0 & & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & & & & & \\ \hline & & & D_{11} & D_{11} & 0 & & \\ & 0 & & D_{11} & D_{11} & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 0 & D_{33} & & \\ \hline & & & & & & E_{11} & 0 \\ & 0 & & & 0 & & 0 & E_{11} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{3.52}$$

Les formulations complètes et simplifiées ($(K_N \gg K_{M_z})$) sont rappelées ci-dessous, respectivement en colonne de gauche et de droite :

$$A_{11} = \frac{K_N + K_{M_z}}{2} \qquad \tilde{A}_{11} = \frac{K_N}{2}$$

$$A_{12} = \frac{K_N - K_{M_z}}{2} \qquad \tilde{A}_{12} = \frac{K_N}{2}$$

$$A_{33} = \frac{K_N}{4}$$

$$D_{11} = \frac{h^2}{8} K_N$$

$$D_{33} = \frac{b^2 K_{M_y} (K_N + K_{M_z}) - 2h^2 K_N K_{M_z}}{32 (K_N + K_{M_z}) + 64 \frac{h^2}{b^2} K_N \frac{K_{M_z}}{K_{M_y}}} \qquad \tilde{D}_{33} = \frac{b^2 K_{M_y} - 2h^2 K_{M_z}}{32 + 64 \frac{h^2}{b^2} \frac{K_{M_z}}{K_{M_y}}}$$

$$E_{11} = \frac{5}{3} \frac{K_N K_{M_z}}{2K_N \frac{K_{M_z}}{K_{M_y}} + \left(\frac{b}{h}\right)^2 (K_N + K_{M_z})} \qquad \tilde{E}_{11} = \frac{5}{3} \frac{K_{M_z}}{2 \frac{K_{M_z}}{K_{M_y}} + \left(\frac{b}{h}\right)^2}$$

avec b et h, dimensions en plan et hors plan d'un module, $K_N = {ES}/{\ell_N}$, $K_{M_y} = {3EI_y}/{\ell_M^3}$ et $K_{M_z} = {3EI_z}/{\ell_M^3}$, raideurs axiale et flexionnelles des membrures (§ 3.2.3.1).

On note l'absence de couplage membrane-flexion : la sous-matrice $\left[B\right]$ est nulle. De plus, on observe que les quatrième et cinquième colonnes sont identiques ; cela traduit la présence du mécanisme identifié précédemment (§ 3.2.2.3).

3.2.4 Contribution des tétraèdres

3.2.4.1 Méthode des plans d'expériences numériques

Après avoir déterminé la contribution des membrures au sein du modèle équivalent de plaque épaisse, nous décrivons maintenant la contribution des tétraèdres avec laquelle il faudra combiner la première pour obtenir un modèle complet. On considère ici les membrures comme infiniment raides et les tétraèdres déformables.

Le principe général est le même que pour les membrures : les coefficients de la matrice de raideur $\left[R_T\right]$ sont déterminés en imposant les déformations volumiques associées aux déformations généralisées, puis en les mettant en rapport avec les efforts généralisés. Selon les hypothèses énoncées précédemment (§ 3.2.2), les tétraèdres n'interviennent que pour la déformée en torsion (χ_{xy}) et en cisaillement (γ_{xz} et γ_{yz}), les autres déformées sollicitant uniquement les membrures. La présente étude se concentre donc sur la détermination des coefficients D_{33} et E_{11}, puisque par symétrie, $E_{22} = E_{11}$ et $E_{12} = 0$.

La complexité de la géométrie des tétraèdres et de leur chargement rend une formulation analytique directe difficile. Nous avons donc recours à un modèle numérique aux éléments finis qui, contrairement aux fonctions continues établies pour les membrures, ne donnent qu'une représentation discrète de la réponse mécanique des tétraèdres. Cette approche soulève la question des jeux de paramètres à choisir pour les simulations et aussi de la méthode d'interpolation afin de prédire la réponse pour un nouveau jeu de paramètres.

La méthode développée par la suite s'appuie sur la notion de plans d'expériences numériques et plus précisément celle mise en place par Tran [114], vers lequel nous renvoyons pour un état de l'art complet et une description détaillée de la méthode. Toutefois, nous reprenons dans ce qui suit les points principaux de la démarche que nous illustrons par un cas simple (§ 3.2.4.2) avant de l'appliquer à la détermination des coefficients D_{33} et E_{11} (§ 3.2.4.3)

Les plans d'expérience, classiques ou numériques, apportent un formalisme afin de systématiser une série d'essais pour obtenir la meilleure compréhension (prédiction) du comportement de l'objet d'étude avec un minimum d'expérimentation. Les plans d'expérimentation « classiques » ont émergé afin de structurer la démarche traditionnelle dite « essai-erreur » qui consiste à faire varier les différentes composantes du système à étudier sans stratégie prédéfinie. Cette démarche d'essai-erreur montre en effet ses limites dans le cas d'un nombre d'essais restraint par leur coût ou leur temps de mise en œuvre. Ces contraintes expliquent bien le contexte d'émergence, dans les années 30, de la méthode des plans d'expérience : le mathématicien Sir Fisher [326] a pour mission de fournir une méthodologie scientifique afin d'augmenter les rendements agricoles en faisant varier le type d'engrais, les variétés végétales...

Plus récemment, les progrès scientifiques des modèles théoriques couplés à l'augmentation de la puissance de calcul des ordinateurs permettent souvent de remplacer l'expérimentation physique par des simulations numériques. Cependant, la complexité des modèles et la précision des résultats requise impliquent des temps de calcul importants, limitant ainsi le nombre d'essais envisageables. C'est pourquoi l'expérimentation numérique partage avec l'expérimentation physique cette recherche d'économie de moyen et place les plans d'expérimentations au cœur de sa démarche.

3.2.4.2 Processus d'expérimentation numérique

Nous décrivons et illustrons par un cas simple les étapes à mettre en œuvre pour mener à bien le processus des plans d'expériences numériques. Le cas d'étude sélectionné est celui de la définition des caractéristiques géométriques d'une section en double cornière à ailes égales. Ces données seront utilisées dans la partie 3.3 où les dimensions de la section sont laissées variables.

Considérons un modèle numérique paramétrique dépendant d'une combinaison de variables X, appelées valeurs d'entrées ou inputs. Pour un jeu de paramètres donné, le simulateur évalue un ensemble de réponses Y, appelées valeurs de sorties ou outputs. Dans l'étude de cas de la double cornière, nous avons deux valeurs d'entrée (épaisseur e de l'aile et sa longueur L) et quatre valeurs de sorties (aire de la section S, moments quadratiques I_y, I_z, I_p). Dans le cas général, notons n, le nombre de variables dont dépend le modèle numérique et qui appartiennent chacune à un domaine de variation défini par l'utilisateur. Une simulation $i \in \{1, \ldots, p\}$ est alors représentée par un point dans un espace de dimension n : $(X_{1,i}, X_{2,i}, \ldots, X_{n,i})$ à laquelle sont associées m réponses $Y_{j,i}$ avec $j \in \{1, \ldots, m\}$. L'ensemble de tous les points du domaine de variation associé à une réponse Y_j génère une hypersurface de dimension n, appelée surface de réponse, dans un espace de dimension $n + 1$. En réalité, plutôt qu'une surface, il s'agit d'un nuage de points qui doit être interpolé par un modèle mathématique.

Les grandes étapes et les choix inhérents à la démarche sont similaires à ceux développés par Tran [114] :

— étape 1 : identification du problème ;

— étape 2 : choix du modèle mathématique des réponses ;

— étape 3 : choix des expériences à réaliser ;

— étape 4 : construction du modèle approché ;

— étape 5 : validation de la précision du modèle obtenu ;

— étape 6 : conclusions.

Sans reprendre l'argumentation détaillée, nous parcourons ces étapes en énonçant les différents choix, en apportant les précisions spécifiques à notre étude et en les illustrant avec le cas de la double cornière.

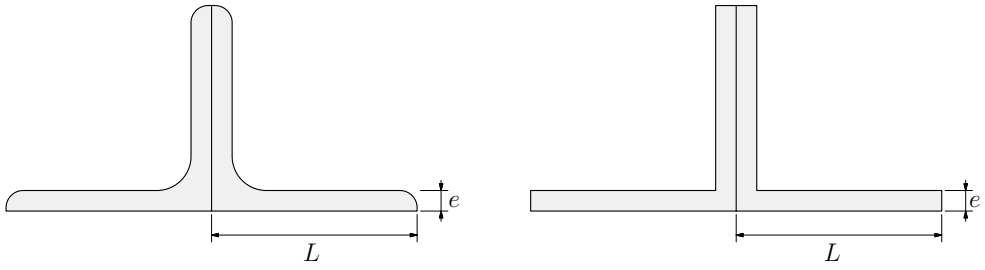
Etape 1 : Identification du problème et méthodologie
Cette étape consiste essentiellement à identifier la nature du problème, déterminer les paramètres ayant une potentielle influence sur le résultat, ainsi que leurs domaines de variation.

Dans notre exemple, nous souhaitons déterminer les caractéristiques géométriques de la section d'une double cornière à ailes égales S, I_y, I_z, I_p. Les trois premiers sont facilement calculables analytiquement et seront comparés avec les résultats numériques obtenus. En revanche, le calcul du moment quadratique polaire n'est pas trivial pour les sections complexes et justifie ce type d'approche.

Nous identifions deux paramètres d'influence : l'épaisseur de l'aile e et sa longueur L. Nous considérons une géométrie légèrement simplifiée de la double cornière où les congés ne sont pas pris en considération (Fig. 3.70). Il aurait été facile d'intégrer dans le calcul la notion d'inégalité des ailes, mais pour des questions de représentation, restreinte à trois dimensions, nous nous limitons à deux variables.

Même si dans la production industrielle des cornières laminées, il existe un certain couplage entre longueur et épaisseur d'ailes ($e \approx {}^{L}/_{10}$), nous considérons, pour l'exemple, que les deux variables peuvent prendre toutes les valeurs des intervalles de variation suivants :

— $e \in [3\,\text{mm}, 20\,\text{mm}]$
— $L \in [30\,\text{mm}, 200\,\text{mm}]$



(a) Modèle avec congés (b) Modèle simplifié

FIGURE 3.70 – Paramétrisation de la double cornière

Etape 2 : Choix du modèle mathématique des réponses
Il existe de nombreux travaux portant sur les types de modèles mathématiques approchant au mieux la réponse d'un problème donné. Les principales méthodes identifiées [327] sont la méthode de surfaces de réponses [328, 329], le krigeage et les réseaux de neurones [330]. L'interpolation bilinéaire d'une grille régulière d'échantillons peut être considérée comme une approximation par morceaux de la réponse [99].

En revanche, la méthode la plus adaptée dépend du problème considéré et peu d'approches comparatives existent dans la littérature. De formalisme simple et facile à mettre en place, le choix polynomial semble convenir dans de nombreux cas [308]. De plus, celui-ci permet d'effectuer facilement une étude de sensibilité, c'est-à-dire de comprendre l'importance relative des divers facteurs sur la réponse. Dans le cas de notre illustration, le choix d'un modèle polynomial semble particulièrement pertinent étant donné la forme analytique de l'aire et des moments quadratiques de sections constituées de formes rectangulaires.

La forme générale du modèle basé sur les polynômes s'écrit :

$$y_i = \sum_{k=1}^{q} \beta_k f_k\left(x_i\right) + \varepsilon_i \tag{3.53}$$

avec $x_i = (X_{1,i}, X_{2,i}, \ldots, X_{n,i})$, vecteur des valeurs d'entrée, β_k, vecteur des coefficients inconnus à estimer, ε^i, écart au modèle et $f_k\left(x_i\right)$, premières fonctions d'une base de l'espace $\mathbb{L}^2$.

Pour notre problème à deux variables $x = (X_1 = e, X_2 = L)$, les premières fonctions de base sont classées par degrés croissants dans le tableau 3.12.

Pour le calcul des caractéristiques géométriques de la section en double cornière, les formes analytiques nous renseignent : nous choisissons une fonction polynomiale de degré 2 pour l'aire de la section et de degré 4 pour les moments quadratiques.

Par exemple, pour l'aire de la section, la relation 3.53 devient :

$$S = \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 e + \beta_3 L^2 + \beta_4 eL + \beta_5 e^2 + \varepsilon(x) \tag{3.54}$$

TABLE 3.12 – Premières fonctions polynomiales à deux variables, degré 1 à 4

degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
$f_0(x) = 1$	$f_1(x) = L$	$f_3(x) = L^2$	$f_6(x) = L^3$	$f_{10}(x) = L^4$
	$f_2(x) = e$	$f_4(x) = eL$	$f_7(x) = eL^2$	$f_{11}(x) = eL^3$
		$f_5(x) = e^2$	$f_8(x) = e^2L^1$	$f_{12}(x) = e^2L^2$
			$f_9(x) = e^3$	$f_{13}(x) = e^3L^1$
				$f_{14}(x) = e^4$

Etape 3 : Choix des expériences à réaliser

L'objectif principal concernant le choix des points d'expériences pour l'expérimentation numérique est le remplissage le plus uniforme possible de l'espace des paramètres (Space-Filling Design). Il existe principalement deux types d'échantillonnage dans la littérature : les plans à marges uniformes comme les hypercubes latins ou les suites de faible discrépance. On utilise dans notre étude les suites de Sobol' qui appartiennent à la seconde catégorie d'échantillonnage. Celles-ci présentent le double avantage d'être faciles à construire par leur nature binaire et de préserver l'uniformité de la distribution alors que le nombre d'échantillons augmente. Il est donc possible de mener une première campagne d'essais avec un petit nombre de points, puis de compléter cette campagne en ajoutant de nouveaux points tout en conservant les résultats des premiers calculs.

Il n'existe pas de règle préconisant le degré et le nombre de points à calculer pour atteindre une précision suffisante dans l'interpolation polynomiale, la qualité de celle-ci dépendant fortement de la régularité de la fonction à approcher. En revanche, il est nécessaire de calculer un nombre de point x_i au moins égal au nombre de paramètres inconnus β_k. Dans ce cas, l'interpolation polynomiale sera parfaite pour ces points (résidus $\varepsilon = 0$), mais présentera des résultats globaux de moins bonne qualité (sous-apprentissage) que si cette interpolation est basée sur un plus grand nombre de points. Pour un phénomène physique bien identifié, la théorie peut renseigner sur une forme *a priori* du polynôme. Ce n'est pas notre cas pour la définition des coefficients de la matrice de raideur D_{33} et E_{11}. C'est pourquoi nous proposons, dans la partie suivante, une méthode empirique pour déterminer le degré du polynôme et le nombre d'échantillons à choisir pour atteindre une corrélation satisfaisante.

Dans notre exemple, nous avons vu à l'étape précédente que l'étude des caractéristiques géométriques de la section en double cornière est basée, selon le cas, sur les polynômes de degré 2 (6 coefficients inconnus) ou 4 (15 coefficients inconnus). Nous menons une campagne de calculs numériques basés sur 100 points.

Le logiciel GNU Octave version 6.2.0 [331] est utilisé pour générer les 100 points de la suite de Sobol', basée sur l'algorithme de Bratley et Fox [332, 333]. Puis on opère un changement de variable pour faire correspondre le domaine de variation des points de la suite, initialement générés entre 0 et 1 (Fig. 3.71), aux domaines de variation établis dans l'étape 1.

Ensuite, les quatre caractéristiques géométriques S, I_y, I_z et I_p sont évaluées numériquement avec le logiciel Rhinoceros pour les 100 points d'échantillonnage.

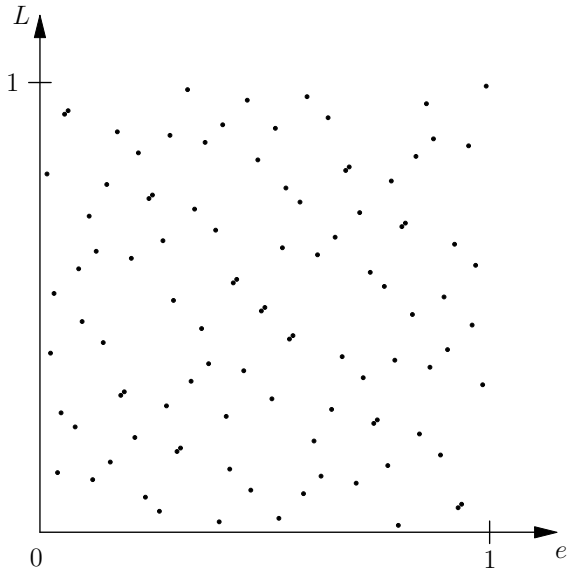
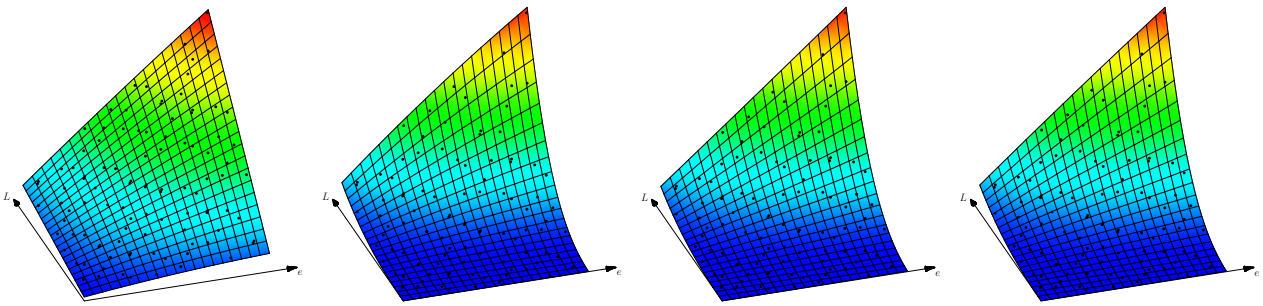


FIGURE 3.71 – Échantillonnage de cent points de la suite de Sobol' en dimension 2

Etape 4 : Construction du modèle approché
Cette étape consiste à déterminer les coefficients inconnus β_i des modèles polynomiaux choisis à l'étape 2. Ils sont estimés par la méthode de régression des moindres carrés implémentée dans la librairie *Math.NET Numerics*.

Dans notre exemple, les coefficients attachés aux fonctions décrites au tableau 3.12 sont présentés de façon synthétique pour les quatre réponses sous une forme similaire dans le tableau 3.13 (polynôme de degré 2) et dans les tableaux 3.14, 3.15 et 3.16 (polynômes de degré 4).

Les surfaces de réponse des quatre caractéristiques géométriques S, I_y, I_z et I_p sont tracées, en superposition des points d'échantillonnage en figure 3.72. Sur l'axe des $\overrightarrow{x}$, on trouve le paramètre d'épaisseur de l'aile e, et sur l'axe des $\overrightarrow{y}$, on trouve le paramètre de longueur de l'aile L. La grandeur mesurée/prédite se trouve sur l'axe des $\overrightarrow{z}$. Toutes les valeurs des réponses sont normalisées entre 0 et 1.



(a) Aire de la section S (b) Moment quadratique I_y (c) Moment quadratique I_z (d) Moment quadratique I_p

FIGURE 3.72 – Surfaces de réponse des caractéristiques de la section en double cornière

TABLE 3.13 – Coefficients de régression : aire de la section S

degré 0	degré 1	degré 2
$\beta_0 =$ 0.0	$\beta_1 =$ 0.0	$\beta_3 =$ 0.0
	$\beta_2 =$ 0.0	$\beta_4 =$ 4.0
		$\beta_5 =$ −2.0

TABLE 3.14 – Coefficients de régression : moment quadratique I_y

degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
$\beta_0(x) =$ −31.1	$\beta_1(x) =$ 3.9	$\beta_3(x) =$ −0.1	$\beta_6(x) =$ 0.0	$\beta_{10}(x) =$ 0.0
	$\beta_2(x) =$ −23.6	$\beta_4(x) =$ 0.2	$\beta_7(x) =$ 0.0	$\beta_{11}(x) =$ 0.4
		$\beta_5(x) =$ 3.0	$\beta_8(x) =$ 0.1	$\beta_{12}(x) =$ −0.6
			$\beta_9(x) =$ −0.3	$\beta_{13}(x) =$ 0.6
				$\beta_{14}(x) =$ −0.2

TABLE 3.15 – Coefficients de régression : moment quadratique I_z

degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
$\beta_0(x) =$ 0.0	$\beta_1(x) =$ 0.00	$\beta_3(x) =$ 0.00	$\beta_6(x) =$ 0.00	$\beta_{10}(x) =$ 0.00
	$\beta_2(x) =$ 0.00	$\beta_4(x) =$ 0.00	$\beta_7(x) =$ 0.00	$\beta_{11}(x) =$ 0.67
		$\beta_5(x) =$ 0.00	$\beta_8(x) =$ 0.00	$\beta_{12}(x) =$ 0.00
			$\beta_9(x) =$ 0.00	$\beta_{13}(x) =$ 0.67
				$\beta_{14}(x) =$ −0.67

TABLE 3.16 – Coefficients de régression : moment quadratique I_p

degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
$\beta_0(x) =$ −31.1	$\beta_1(x) =$ 3.9	$\beta_3(x) =$ −0.1	$\beta_6(x) =$ 0.0	$\beta_{10}(x) =$ 0.0
	$\beta_2(x) =$ −23.6	$\beta_4(x) =$ 0.2	$\beta_7(x) =$ 0.0	$\beta_{11}(x) =$ 1.1
		$\beta_5(x) =$ 3.0	$\beta_8(x) =$ 0.1	$\beta_{12}(x) =$ −0.6
			$\beta_9(x) =$ −0.3	$\beta_{13}(x) =$ 1.3
				$\beta_{14}(x) =$ −0.9

Etape 5 : Validation de la précision du modèle obtenu

Parmi les différents critères permettant d'évaluer la qualité du modèle proposé, le coefficient de détermination R^2 est celui habituellement utilisé pour la méthode de régression linéaire des moindres carrés. Il mesure l'adéquation entre le modèle et les données observées, ou calculées dans le cas d'expérimentation numérique. Il est défini par :

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y}_i)^2} \tag{3.55}$$

avec n, nombre de mesures, y_i, valeur de la mesure i, $\hat{y}_i$, la valeur prédite correspondante et $\bar{y}_i$, la moyenne des mesures.

Le coefficient de détermination R^2 varie entre 0 et 1. La qualité du modèle est d'autant meilleure que le coefficient R^2 se rapproche de 1.

Dans le tableau 3.17, on compare les valeurs du coefficient de détermination R^2 des différents modèles en fonction du degré du polynôme. Les coefficients inconnus β_i sont identifiés séparément pour chaque jeu de polynômes correspondant à un degré donné, alors que seuls ceux de degré 2 sont indiqués dans le tableau 3.13 et ceux de degré 4 dans les tableaux 3.14, 3.15 et 3.16. Dans tous les cas, le modèle est basé sur un échantillonnage de 100 points. On observe que la corrélation devient parfaite à partir du degré 2 pour l'aire de la section S et à partir du degré 4 pour les moments quadratiques I_y, I_z, I_p. Ces résultats viennent valider les hypothèses faites dans les étapes 2 et 3 quant aux choix du modèle et du nombre de points expérimentaux.

Table 3.17 – Coefficients de détermination S, I_y, I_z, I_p en fonction du degré du polynôme

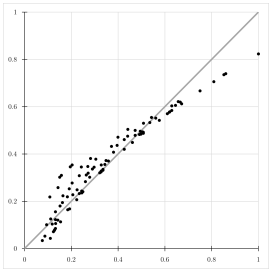
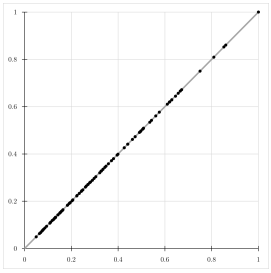
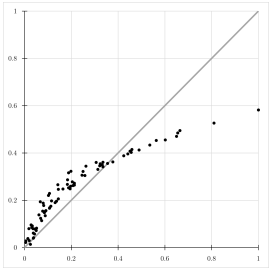
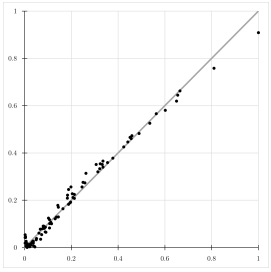
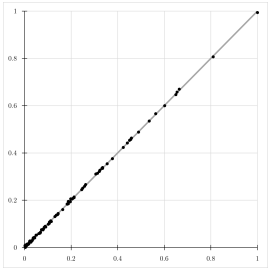
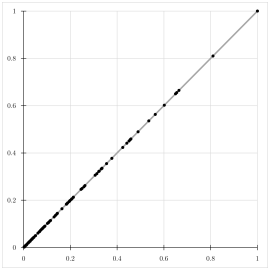
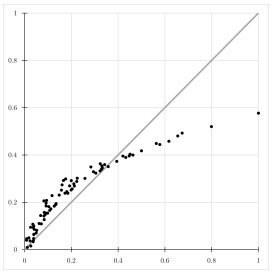
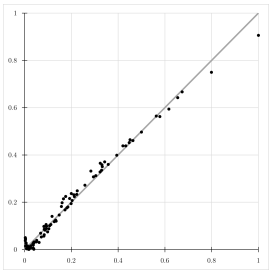
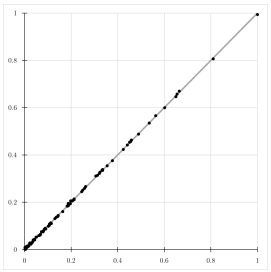
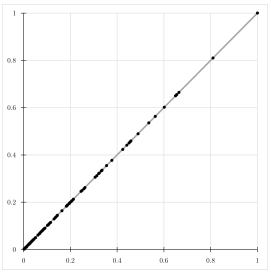
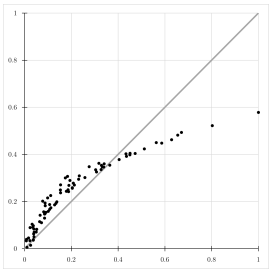
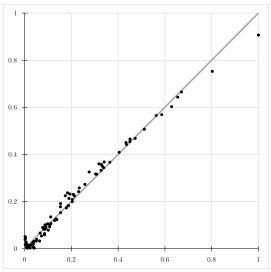
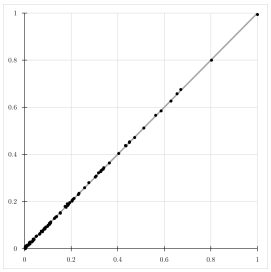
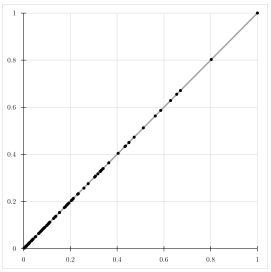
	degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
S	$R^2 = 0.0000$	$R^2 = 0.9121$	$R^2 = 1.0000$	$R^2 = 1.0000$	$R^2 = 1.0000$
I_y	$R^2 = 0.0000$	$R^2 = 0.7895$	$R^2 = 0.9849$	$R^2 = 0.9998$	$R^2 = 1.0000$
I_z	$R^2 = 0.0000$	$R^2 = 0.7882$	$R^2 = 0.9859$	$R^2 = 0.9998$	$R^2 = 1.0000$
I_p	$R^2 = 0.0000$	$R^2 = 0.7888$	$R^2 = 0.9856$	$R^2 = 0.9998$	$R^2 = 1.0000$

Afin de visualiser la qualité de la réponse en fonction du degré du polynôme choisi, on construit un graphique de corrélation où la valeur observée y_i est reportée en abscisse et la valeur prédite $\hat{y}_i$ en ordonnée (Tab. 3.18). Pour plus de lisibilité, nous normalisons les valeurs par la plus grande valeur de y_i ou de $\hat{y}_i$. La prédiction est d'autant meilleure que les points se situent sur la diagonale.

Etape 6 : Conclusions

L'approche par les plans d'expériences numériques permet d'évaluer les caractéristiques géométriques de la section en double cornière avec une corrélation parfaite ($R^2 = 1$), car les modèles polynomiaux choisis conviennent particulièrement à ce type de problème.

TABLE 3.18 – Graphiques de corrélation comparant valeurs expérimentales et valeurs prédites

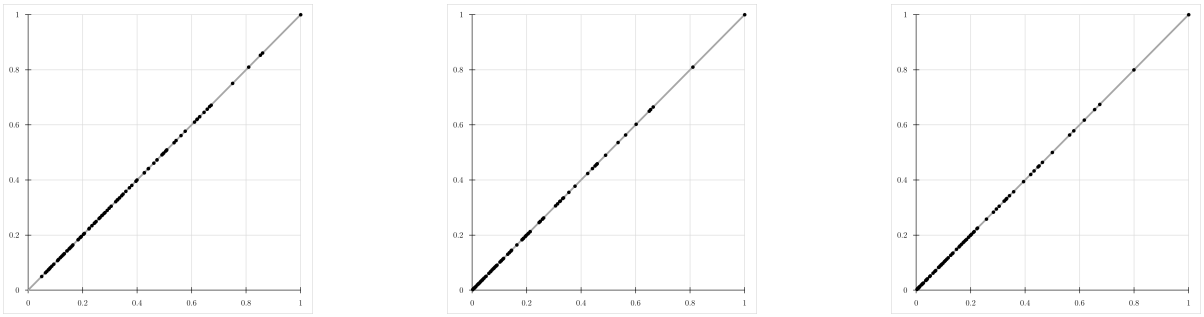
	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4
S				
I_y				
I_z				
I_p				

Il est également possible de vérifier la parfaite corrélation entre la prévision polynomiale et les formules analytiques calculées pour l'aire de la section S et les moments quadratiques I_y et I_z (théorème de transport de Huygens) :

$$\begin{aligned} A &= 2e\,(2L - e) \\ I_y &= \frac{e\,(e^2 - 5eL + 5L^2)\,(e^2 - eL + L^2)}{6\,(2L - e)} \\ I_z &= \frac{2e\,(L^3 + e^2L - e^3)}{3} \end{aligned} \tag{3.56}$$

Pour les expressions analytiques de A et I_z, qui ont des fonctions polynomiales, on constate que les coefficients des monômes sont identiques à ceux calculés par la régression linéaire (tableau 3.13 et 3.15). On construit également trois graphiques de comparaison en figure 3.73

entre les valeurs des expressions analytiques en abscisses et les valeurs obtenues par regression en ordonnées. On constate en particulier, pour l'expression I_y qui est une fonction rationnelle et pour qui la comparaison directe des coefficients des monômes n'est pas possible, que les points sont parfaitement alignés sur la diagonale.



S I_y I_z

FIGURE 3.73 – Graphiques comparant valeurs analytiques et celles obtenues par régression

3.2.4.3 Application aux coefficients de la matrice de raideur des tétraèdres

Après avoir décrit et illustré la démarche générale des plans d'expériences numériques, nous les appliquons au sujet de notre étude : la détermination des coefficients de la matrice de raideur D_{33} et E_{11} dans le cadre de la contribution des tétraèdres.

Etape 1 : Identification du problème et méthodologie

La matrice de raideur des tétraèdres est à combiner par la suite avec celle des membrures. Elle répond donc aux mêmes conditions de liaisons, de périodicité et d'appuis que celles définies pour la contribution des membrures.

Les coefficients sont exprimés en fonction des paramètres géométriques du VER (la dimension en plan b, la hauteur h, le coefficient de remplissage μ), mais s'affranchissent des paramètres géométriques de la section, les membrures étant considérées comme indéformables. Les tétraèdres sont en acier S235.

A ces paramètres s'ajoutent les paramètres géométriques des tétraèdres. Nous adoptons une paramétrisation très similaire à celle du prototype construit (§ 3.1.4.1) mais nous choisissons de définir la géométrie des faces plutôt que celle de leur intersection. Celles-ci sont générées par translation d'une courbe plane de type Béziers cubique joignant le sommet du tétraèdre et le centre de l'arête opposée (plan de symétrie de la face). Cette courbe est pilotée par quatre points ou, de façon équivalente, par les deux tangentes d'extrémités, qui peuvent être définies par quatre paramètres : α_1 et ρ_1, angle et longueur de la tangente au sommet du tétraèdre ainsi que α_2 et ρ_2, angle et longueur de la tangente au centre de l'arête opposée. La figure 3.74 montre cette paramétrisation ainsi que quelques morphologies de tétraèdres issues de la variation des paramètres. Enfin, l'épaisseur e de la tôle complète le jeu de paramètres. Le problème dépend donc de huit variables : b, h, μ, e, α_1, ρ_1, α_2, ρ_2.

Les coefficients D_{33} et E_{11} sont évalués, pour chaque jeu de paramètre à partir d'un modèle numérique aux éléments finis. Dans un processus similaire aux étapes 6-8 du calcul de la contribution des membrures (§3.2.3), les réactions d'appuis sont extraites pour chacune des déformations puis combinées pour calculer les efforts généralisés. Enfin, elles sont mises en rapport avec la déformation considérée afin d'évaluer le coefficient correspondant.

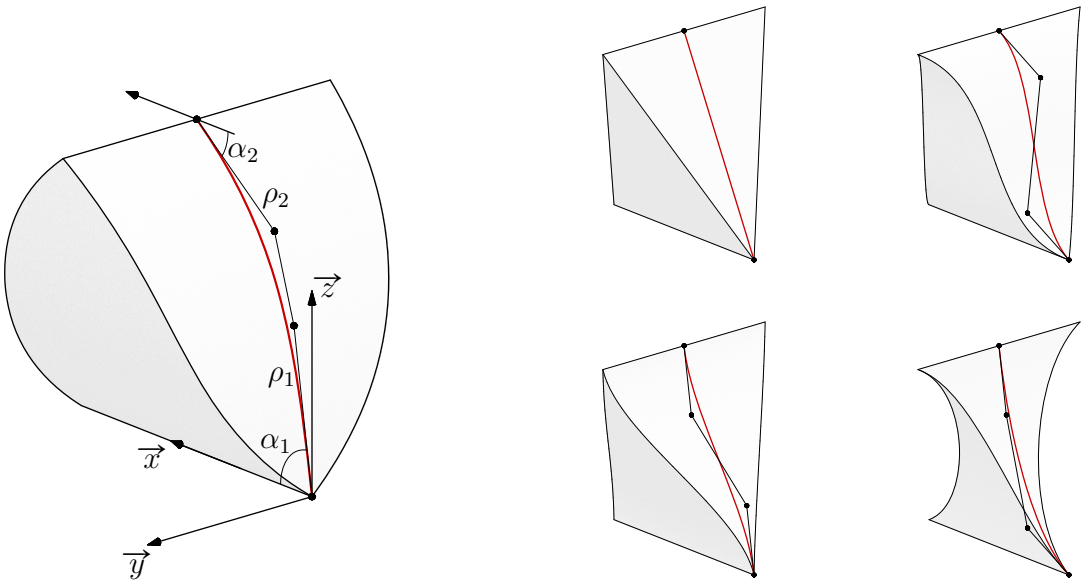


FIGURE 3.74 – Paramétrisation du tétraèdre selon le plan de symétrie

Pour le moment de torsion, nous avons vu que (§ 3.2.3.7) :

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -\frac{h}{b}R + \frac{R_{z_1}}{4} \\ \chi_{xy} &= \frac{\Delta_z}{b^2} \end{aligned} \tag{3.57}$$

avec R, réactions horizontales au point 0, R_{z_1} réaction verticale au point 0, Δ_z, déplacements imposés aux points 0,2,6,8 du VER.

Le coefficient D_{33} se calcule donc par la relation suivante :

$$D_{33} = \frac{b}{8\Delta_z}\left(4hR + bR_{z_1}\right) \tag{3.58}$$

Pour l'effort tranchant, nous avons vu que (§ 3.2.3.3) :

$$\begin{aligned} V_x &= -\frac{5}{3b}R_z \\ \gamma_{xz} &= \frac{2\Delta_x}{h} \end{aligned} \tag{3.59}$$

avec R_z réaction verticale au point 0, Δ_x, déplacements imposés aux points 0,2,6,8 du VER.

Le coefficient E_{11} se calcule donc par la relation suivante :

$$E_{11} = -\frac{5}{6}\frac{h}{\Delta_x b}R_z \tag{3.60}$$

Afin de donner une plus grande généralité à l'étude, nous travaillons par la suite avec des variables adimensionnelles, ce qui nous permet d'obtenir des résultats indépendants de la taille de l'objet considéré. En appliquant le théorème de Vaschy-Buckingham, qui permet d'établir

combien de variables sans dimensions peuvent être construites à partir des variables originales, les coefficients D_{33} et E_{11} peuvent être exprimés en fonction de sept variables.

D'autre part, les coefficients D_{33} et E_{11} sont rendus adimensionnels en les divisant par les coefficients correspondants de la plaque homogène de même hauteur qui a pour matrice de raideur en flexion $\left[D\right]$ et en cisaillement $\left[F\right]$:

$$\left[D\right] = D\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \qquad \left[E\right] = \frac{5h}{6}G\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.61}$$

avec $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$, module de rigidité flexionnelle de plaque.

Les coefficients $D_{33_{hom}}$ et $E_{11_{hom}}$ de la plaque homogène valent donc :

$$D_{33_{hom}} = \frac{Eh^3}{24\left(1+\nu\right)} \qquad E_{11_{hom}} = \frac{5h}{6}G \tag{3.62}$$

Les coefficients adimensionnels $\tilde{D}_{33}$ et $\tilde{E}_{11}$, corrigés d'un facteur 10^3 pour des questions d'ordre de grandeur valent :

$$\tilde{D}_{33} = \frac{D_{33}}{D_{33_{hom}}}10^3 = \frac{24b\left(4hR + bR_{z_1}\right)\left(1+\nu\right)}{8\Delta_z h^3 E}10^3 \qquad \tilde{E}_{11} = \frac{E_{11}}{E_{11_{hom}}}10^3 = -\frac{R_z}{\Delta_x bG}10^3 \tag{3.63}$$

En choisissant la hauteur h comme variable d'adimensionnalisation, les coefficients $\tilde{D}_{33}$ et $\tilde{E}_{11}$ s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{33} &= f\left(\frac{b}{h}, \mu, \frac{e}{h}, \alpha_1, \frac{\rho_1}{h}, \alpha_2, \frac{\rho_2}{h}\right) = f\left(\tilde{b}, \mu, \tilde{e}, \alpha_1, \tilde{\rho_1}, \alpha_2, \tilde{\rho_2}\right) \\ \tilde{E}_{11} &= f\left(\frac{b}{h}, \mu, \frac{e}{h}, \alpha_1, \frac{\rho_1}{h}, \alpha_2, \frac{\rho_2}{h}\right) = f\left(\tilde{b}, \mu, \tilde{e}, \alpha_1, \tilde{\rho_1}, \alpha_2, \tilde{\rho_2}\right) \end{aligned} \tag{3.64}$$

En posant $h = 0.5\,\mathrm{m}$, il est maintenant possible de déterminer le domaine de variation de chaque variable dimensionnelle et adimensionnelle correspondante. Le domaine doit être représentatif de la variabilité possible des paramètres tout en étant le plus ajusté possible, car sa taille influence directement la précision des résultats obtenus.

Le domaine de variation du paramètre b est choisi pour générer un rapport d'aspect h/b compris entre 0.5 et 1, proportion couramment rencontrée dans les exemples construits et dans la littérature [270]. La variation du paramètre μ est limitée entre 0.4 et 0.9, pour des raisons de fabricabilité des modules et de conditionnement de modèle, comme évoqué précédemment (§ 3.2.3.1). L'épaisseur de la tôle e est comprise entre 1 et 3 mm afin de permettre une mise en forme manuelle dans le domaine élastique. Enfin, les domaines de variation des quatre paramètres α_1, α_2, ρ_1 et ρ_2 sont choisis de façon à éviter des géométries aberrantes des tétraèdres (auto-intersection, courbures extrêmes...). Ces informations sont compilées, pour les variables dimensionnelles et adimensionnelles dans le tableau 3.19.

On rappelle également les valeurs des différents paramètres fixes dans le tableau 3.20.

Les domaines de variation des sept variables adimensionnelles étant différents, nous opérons un changement de variable afin de remplacer ces paramètres naturels par des variables centrées réduites (domaine de variation entre -1 et +1). Cette équivalence dans les domaines de variation permettra d'effectuer une étude de sensibilité et de comparer l'effet des facteurs.

TABLE 3.19 – Domaine de variation des variables dimensionnelles et adimensionnelles

	Unité	Minimum	Maximum
b	[m]	0.5	1
$\tilde{b}$	[-]	1	2
μ	[-]	0.4	0.9
e	[m]	0.001	0.003
$\tilde{e}$	[-]	0.002	0.006
α_1	[-]	0.15π	0.45π
ρ_1	[m]	0.05	0.25
$\tilde{\rho_1}$	[-]	0.1	0.5
α_2	[-]	0.15π	0.45π
ρ_2	[m]	0.05	0.25
$\tilde{\rho_2}$	[-]	0.1	0.5

TABLE 3.20 – Valeurs des paramètres fixes

	Unité	Valeur
E	[GPa]	210
G	[GPa]	80.76
h	[m]	0.5
Δ_x	[mm]	0.5
Δ_z	[mm]	0.5
ν	[-]	0.300149

Si $\tilde{p} \in [A, B]$, variable adimensionnelle doit se transformer en $\bar{p} \in [-1, +1]$, alors la transformation linéaire est la suivante :

$$\bar{p} = \frac{2}{B-A}\tilde{p} + \frac{A+B}{A-B} \tag{3.65}$$

Soit :

$$\begin{cases} \bar{b} = & 2\tilde{b} - 3.0 \\ \bar{\mu} = & 4\mu - 2.6 \\ \bar{e} = & 500\tilde{e} - 2.0 \\ \bar{\alpha_1} = & 6.67\alpha_1 - 2.0 \\ \bar{\rho_1} = & 5\tilde{\rho_1} - 1.5 \\ \bar{\alpha_2} = & 6.67\alpha_2 - 2.0 \\ \bar{\rho_2} = & 5\tilde{\rho_2} - 1.5 \end{cases} \tag{3.66}$$

Le maillage des faces des tétraèdres est réalisé de façon similaire à celle utilisée pour le prototype (§ 3.1.4.2). Afin de déterminer la densité de ce maillage, nous menons une étude de convergence pour les coefficients D_{33} et E_{11}. La convergence intervenant plus rapidement sur

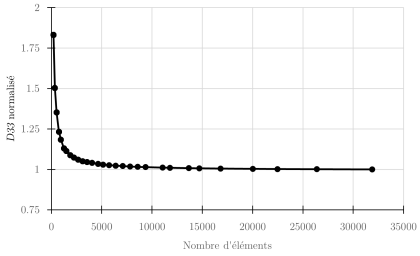
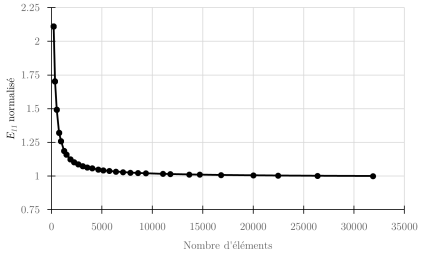
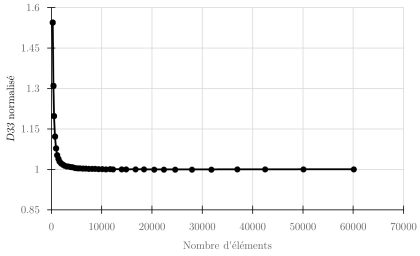
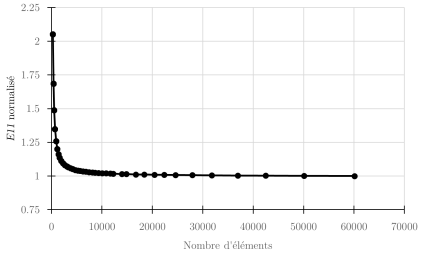
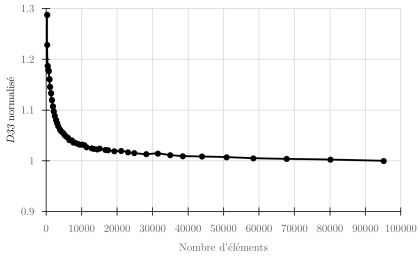
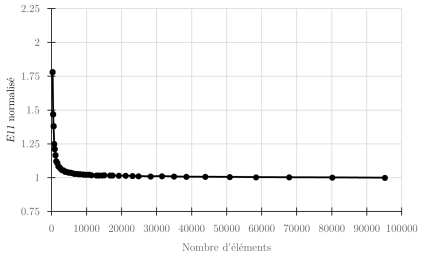
les tétraèdres plats, nous choisissons une géométrie de tétraèdre avec une courbure significative correspondant au jeu de paramètres $\alpha_1 = 0.15\pi$, $\rho_1 = 0.25\,\text{m}$, $\alpha_2 = 0.15\pi$, $\rho_1 = 0.10\,\text{m}$. Les paramètres $b = 0.75\,\text{m}$ et $e = 2\,\text{mm}$ sont choisis au milieu du domaine de variation. Enfin, on choisit d'étudier trois valeurs de remplissage μ=0.4/0.65/0.9, valeurs extrêmes et moyenne de l'intervalle de variation.

On considère que la fonction converge lorsque l'écart relatif entre l'incrément considéré et la valeur de convergence est inférieur à 5%. Les valeurs minimales de ℓ_{div} et n_{elt} pour atteindre cet objectif sont consignées dans le tableau 3.21 et les courbes de convergence sont tracées dans le tableau 3.22 pour les coefficients D_{33} et E_{11}, normalisés par les valeurs convergées, et les trois valeurs de μ. Nous choisissons une valeur de subdivision unique, minorant les valeurs relevées pour les deux coefficients, quelle que soit la valeur de μ, soit $\ell_{div} = 0.01\,\text{m}$.

TABLE 3.21 – Etude de convergence de D_{33} et E_{11} : résolution du maillage

Densité maillage	D_{33}		E_{11}	
	ℓ_{div} [m]	n_{elt} [u]	ℓ_{div} [m]	n_{elt} [u]
$\mu = 0.4$	0.02	884	0.01	1156
$\mu = 0.65$	0.04	344	0.02	1182
$\mu = 0.9$	0.02	1382	0.03	974

TABLE 3.22 – Etude de convergence de D_{33} et E_{11} : courbes

	D_{33}	E_{11}
S		
I_y		
I_z		

Etapes 2/3 : Choix du modèle mathématique des réponses et des expériences à réaliser
Faute de précédents dans la littérature, nous nous orientons par défaut vers le modèle polynomial présenté dans la partie précédente. En revanche, il est difficile de présager le degré du polynôme le mieux adapté pour refléter fidèlement les résultats des expérimentations numériques. Quelques essais préliminaires nous indiquent qu'il est nécessaire d'avoir recours à des degrés relativement élevés. Nous nous laissons la possibilité de tester des modèles de degrés un à sept.

Dans notre cas, où le problème est piloté par sept variables adimensionnelles, le nombre de coefficients inconnus, et donc le nombre minimum de points d'expérimentations à calculer, augmente très rapidement avec le degré du polynôme (Tab. 3.23). Pour un polynôme de degré sept à sept variables, il est de 3432. Nous choisissons de calculer *a priori* 10000 points dont seulement une partie pourra entrer en jeu dans la construction du polynôme de réponse final.

TABLE 3.23 – Nombre de paramètres inconnus selon le degré du polynôme

degré 0	degré 1	degré 2	degré 3	degré 4	degré 5	degré 6	degré 7
1	8	36	120	330	792	1716	3432

Etapes 4/5 : Construction du modèle approché et validation de la précision
Afin de construire la surface de réponse des coefficients D_{33} et E_{11} la plus adaptée, nous évaluons la qualité du modèle de régression dans une étude à deux paramètres impliquant d'une part le degré du polynôme et de l'autre le nombre de points d'expérience calculés. L'évaluation se réalise au travers de deux critères : le coefficient de détermination R^2 précédemment introduit et le coefficient de sécurité tel que défini dans l'Eurocode NF EN 1990 [334].

Nous résumons succinctement le calcul du coefficient de sécurité dans le contexte particulier de notre étude.

Dans le cadre du calcul des structures, le coefficient de sécurité est une approche semi-probabiliste qui permet de combiner plusieurs aspects liés à la sécurité des structures :

— incertitude dans les valeurs représentatives des actions : γ_f ;

— incertitude du modèle dans les actions et les effets des actions : γ_{Sd} ;

— incertitude du modèle dans la résistance structurale/aptitude au service : γ_{Rd} ;

— incertitude dans les propriétés des matériaux : γ_m.

Dans notre cas, nous nous focalisons sur le troisième type d'incertitude, car c'est bien la qualité du modèle de réponse en raideur que nous cherchons à évaluer. La procédure complète du calcul du coefficient de sécurité est détaillée dans l'annexe D de l'Eurocode NF EN 1990 et résumée dans Johansson *et al.* [335]. Nous en reprenons ici les étapes principales et adoptons temporairement les notations de l'Eurocode.

Il s'agit d'abord d'établir une fonction de résistance théorique appelée $r_t = g_{rt}(\underline{X})$, où $\underline{X}$ représente les variables qui influent sur la résistance concernée : il s'agit de la fonction polynomiale des coefficients D_{33} et E_{11} à évaluer.

Puis on définit le modèle probabiliste $r = br_t\delta$ où δ est le terme d'erreur et b le meilleur ajustement de la pente selon la méthode des moindres carrés. Le modèle polynomial que nous proposons étant une régression linéaire par la méthode des moindres carrés, la valeur de b est systématiquement égale à 1.

Comme nous considérons uniquement l'incertitude liée au modèle de résistance, le coefficient de variation V_r du modèle de résistance est équivalent au coefficient de variation V_δ qui peut être aisément calculé à partir des termes d'erreur δ_i.

En cas d'un grand nombre d'essais ($p > 100$), les résistances caractéristique r_k et de calcul r_d sont obtenues par :

$$\begin{aligned} r_k &= bg_{rt}(\underline{X}_m)e^{-k_\infty Q - 0.5Q^2} \\ r_d &= bg_{rt}(\underline{X}_m)e^{-k_{d,\infty} Q - 0.5Q^2} \end{aligned} \tag{3.67}$$

avec $\underline{X}_m$, valeurs moyennes des variables, $Q = \sqrt{\ln(V_r^2 + 1)}$, $k_\infty = 1.64$ et $k_{d,\infty} = 3.04$, valeurs données par l'Eurocode.

Enfin, le coefficient partiel de sécurité est donné par le rapport des deux valeurs de résistance :

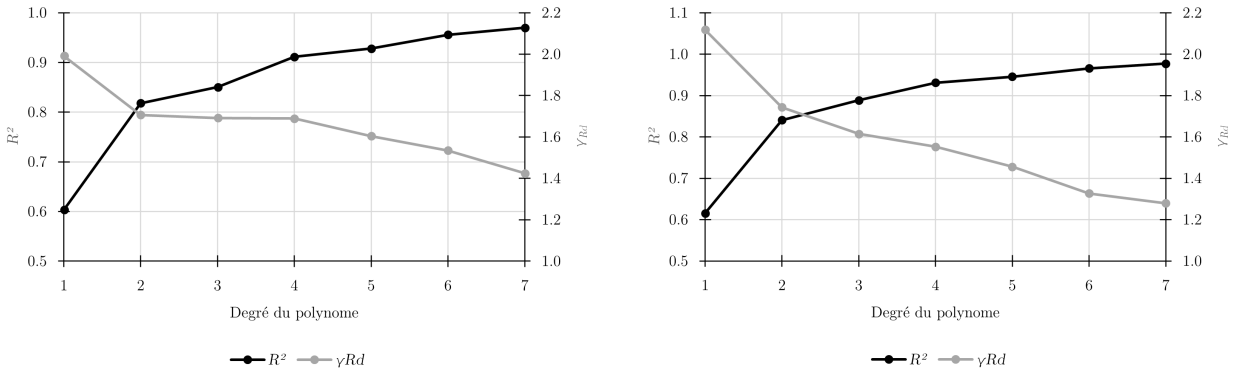
$$\gamma_{Rd} = \frac{r_k}{r_d} = e^{1.4\sqrt{\ln(V_r^2+1)}} \tag{3.68}$$

Pour chaque degré de polynôme, nous construisons systématiquement un modèle polynomial pour le nombre minimal de points nécessaires, puis par pas de 500 points jusqu'à 10000 points. Par exemple, pour les polynômes de degré 5, nous construisons 20 modèles : pour 792, 1000, 1500, ..., 10000 points. Ensuite, à chaque modèle sont associées les deux valeurs des coefficients de détermination R^2 et de sécurité γ_{Rd}. Les colonnes de gauche et du centre des tableaux 3.25 (D_{33}) et 3.26 (E_{11}) montrent, par degré de polynôme, les valeurs des coefficients R^2 et γ_{Rd} en ordonnées en fonction du nombre de points d'expériences engagés en abscisses.

Nous observons une tendance identique quel que soit le degré : les deux coefficients prennent la valeur 1 pour le nombre minimum de points d'expérience, puis se dégradent rapidement pour les degrés faibles, plus lentement pour les degrés élevés, pour converger vers une valeur limite. Cette tendance s'explique par un sous-apprentissage dans le cas d'un faible nombre de points engagés, puis par une limite caractérisée par la richesse du modèle proposé. C'est précisément la valeur de cette limite qui nous intéresse ici afin d'arbitrer sur le degré et le nombre de points à sélectionner pour le modèle final. Le tableau 3.24 et la figure 3.75 où sont reportées les valeurs limites des coefficients R^2 et γ_{Rd} en fonction du degré du polynôme, montrent un gain significatif de qualité du modèle à mesure que s'élève le degré du polynôme. Ceci est confirmé par la moindre dispersion des nuages de points sur les graphiques de corrélation présentés en colonne de droite des tableaux 3.25 et 3.26 comparant en abscisse les valeurs expérimentales et en ordonnées les valeurs prévues par le modèle.

TABLE 3.24 – Valeurs limites des coefficients R^2 et γ_{Rd} selon le degré du polynôme

Degré	D_{33}		E_{11}	
	R^2	γ_{Rd}	R^2	γ_{Rd}
1	0.60	1.99	0.62	2.12
2	0.82	1.71	0.84	1.74
3	0.85	1.69	0.89	1.61
4	0.91	1.69	0.93	1.55
5	0.93	1.60	0.95	1.46
6	0.96	1.53	0.97	1.33
7	0.97	1.42	0.98	1.28



(a) D_{33} (b) E_{11}

FIGURE 3.75 – Courbes des valeurs limites des coefficients R^2 et γ_{Rd} selon le degré du polynôme

Même si la corrélation semble s'améliorer entre les degrés 6 et 7, nous proposons de choisir le polynôme de degré 6 calculé à partir de 10000 points aussi bien pour D_{33} que pour E_{11}. Nous appelons par la suite ces fonctions polynomiales $f_{D_{33}}$ et $f_{E_{11}}$. Les coefficients de détermination sont proches de 1 ($R^2 = 0.96$ pour D_{33} et $R^2 = 0.97$ pour E_{11}) et les coefficients de sécurité n'imposent pas une majoration trop excessive ($\gamma_{Rd} = 1.5$ pour D_{33} et $\gamma_{Rd} = 1.3$ pour E_{11}). Deux raisons supplémentaires appuient ce choix. Tout d'abord, l'évaluation d'un polynôme à 3432 termes (degré 7) est sensiblement plus coûteuse que celle d'un polynôme à 1716 termes (degré 6). Ensuite, il semble que les 10000 points calculés aient été insuffisants pour une complète convergence des deux critères pour le degré 7, réduisant hypothétiquement l'avantage de celui-ci par rapport au degré 6.

Etape 6 : Conclusions

La mise en place de plans d'expériences numériques a permis d'aboutir à deux modèles fiables pour représenter les coefficients D_{33} et E_{11} de la matrice de raideur des tétraèdres. L'étude menée a montré qu'il était nécessaire d'avoir recours à des polynômes de degrés élevés qui possèdent donc un grand nombre de termes (1716). La très grande majorité de ces termes (1673), sont des monômes impliquant deux variables ou plus, et traduisent un fort couplage entre les paramètres.

La comparaison des ordres de grandeur des coefficients β_k, rendue possible par l'introduction de variables centrées réduites, interroge sur la nécessité de conserver tous les termes des polynômes. Les graphiques de la figure 3.76 superposent deux types de données : la courbe montre la valeur relative $\beta_{rel} = {}^{|\beta_k|}/_{\max|\beta_k|}$ classée par ordre décroissant et en arrière plan, l'histogramme montre le degré (somme des puissances) du monôme associé.

On remarque sur l'histogramme que les différentes puissances des monômes sont relativement bien distribuées, même si on peut relever une tendance des puissances inférieures à être associées avec les coefficients β_k à fortes valeurs. Ce constat va dans le sens de la nécessité de recourir à des polynômes de degrés élevés. Ensuite, on constate une très forte disparité des valeurs des coefficients et donc de leur influence sur le résultat final. Afin d'évaluer l'impact de l'exclusion d'un certain nombre de termes, on observe l'évolution des coefficients de détermination et de sécurité dans le cas de polynômes tronqués. Le tableau 3.27 et le graphique de la figure 3.77 montrent les coefficients R^2 et γ_{Rd} en fonction de β_{lim}, valeur seuil en-dessous de laquelle les termes correspondants sont exclus. Le tableau indique également le nombre n_{ex} de termes exclus. On note que la qualité du modèle souffrirait peu de négliger les termes inférieurs

TABLE 3.25 – D_{33} : Evaluation de la réponse polynomiale

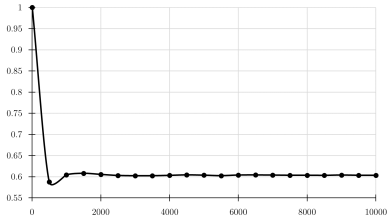
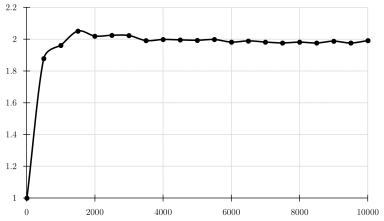
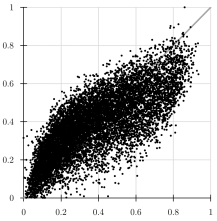
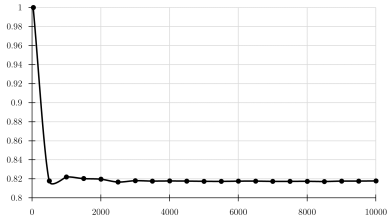
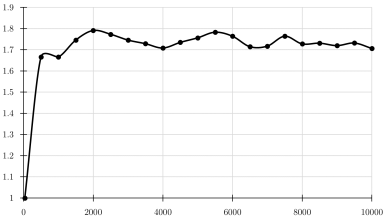
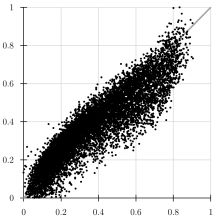
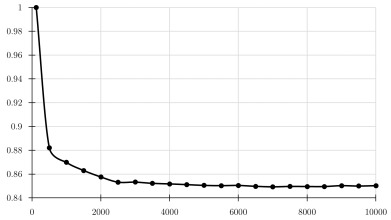
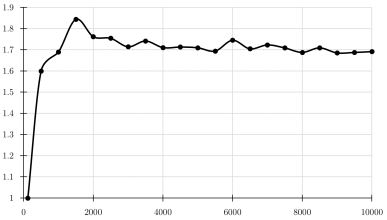
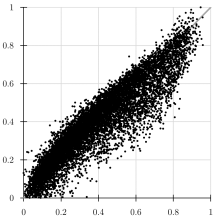
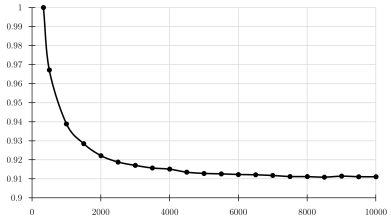
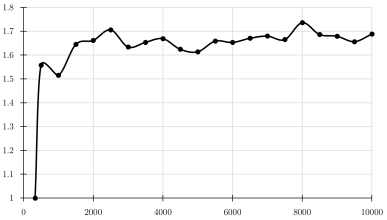
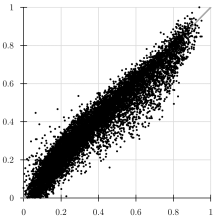
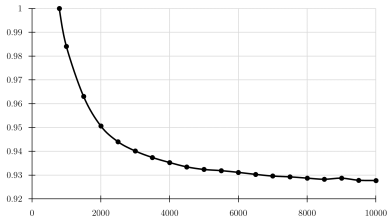
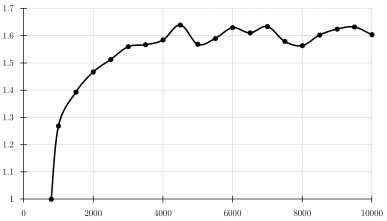
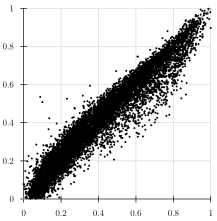
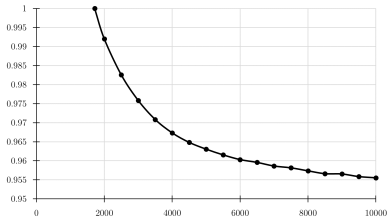
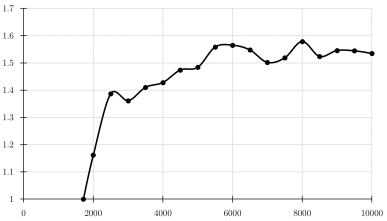
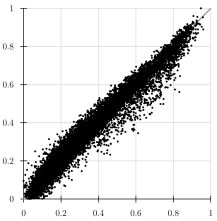
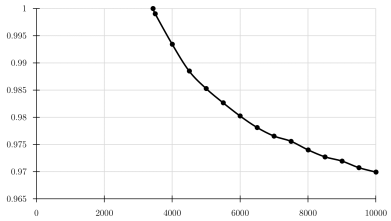
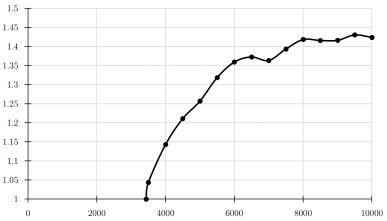
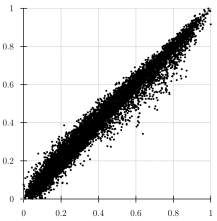
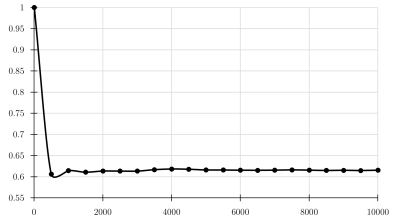
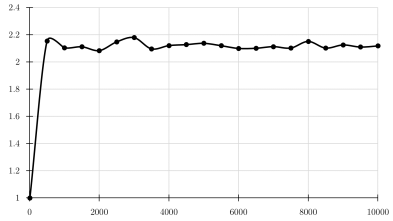
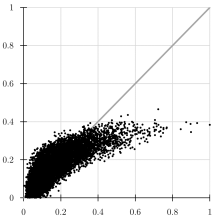
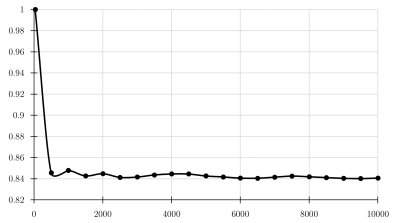
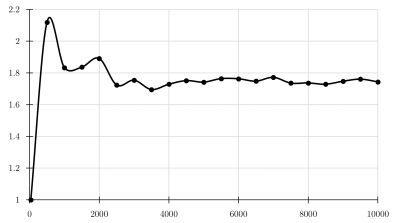
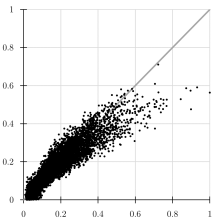
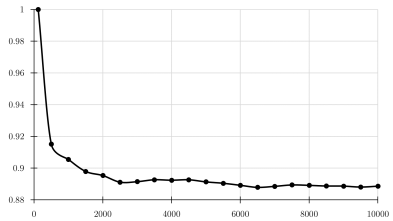
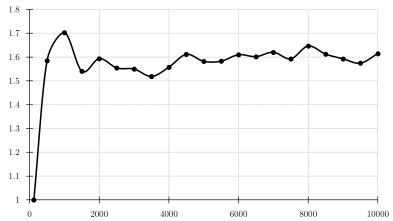
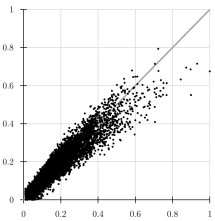
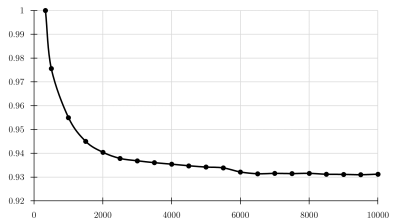
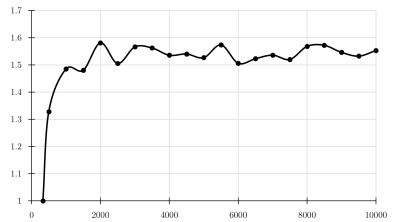
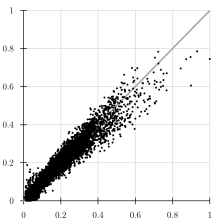
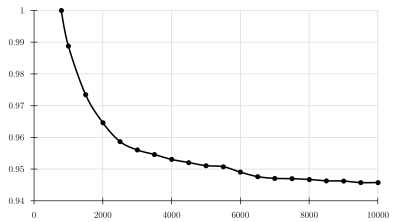
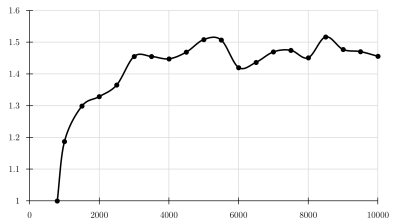
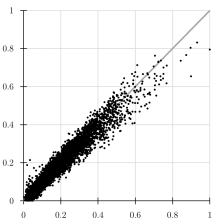
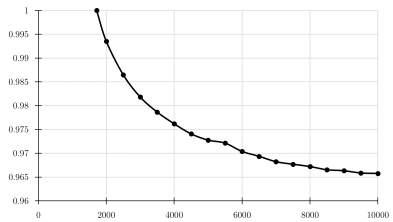
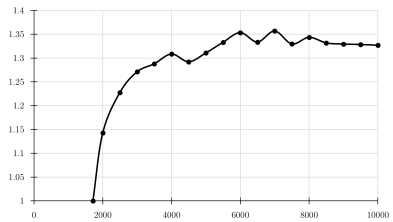
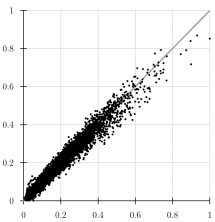
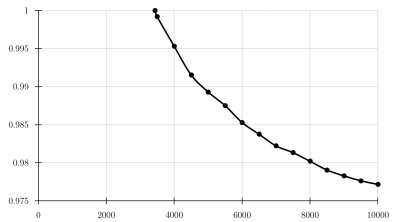
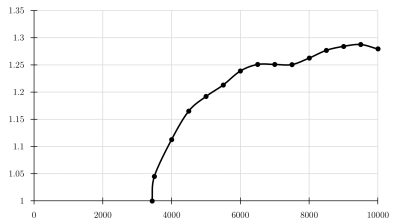
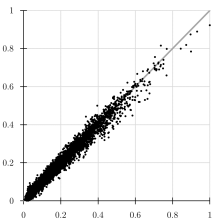
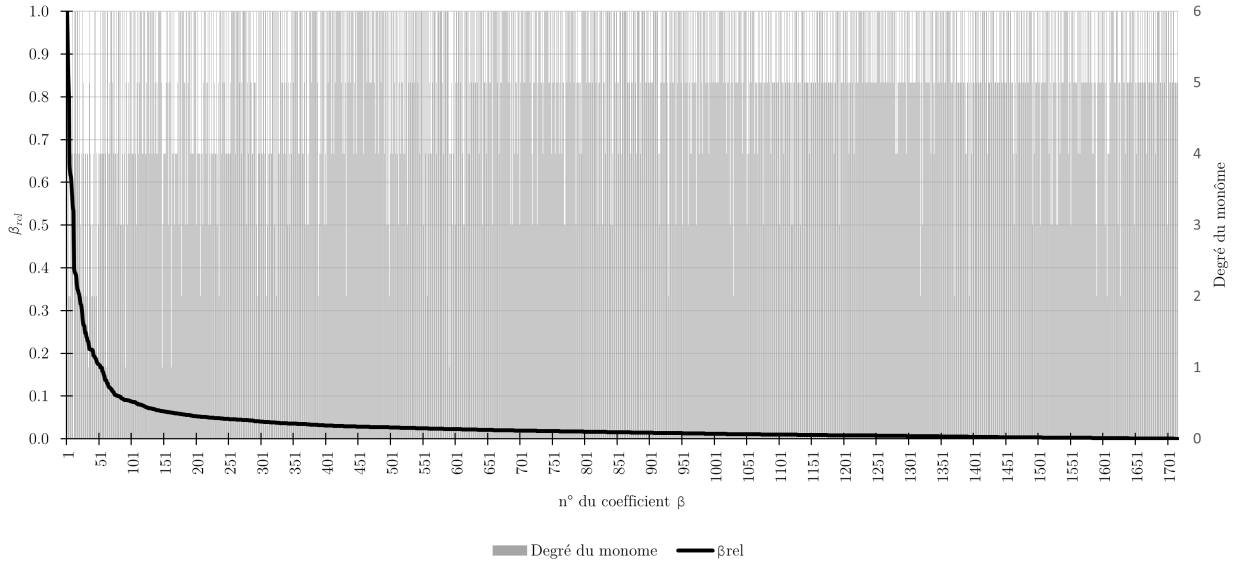
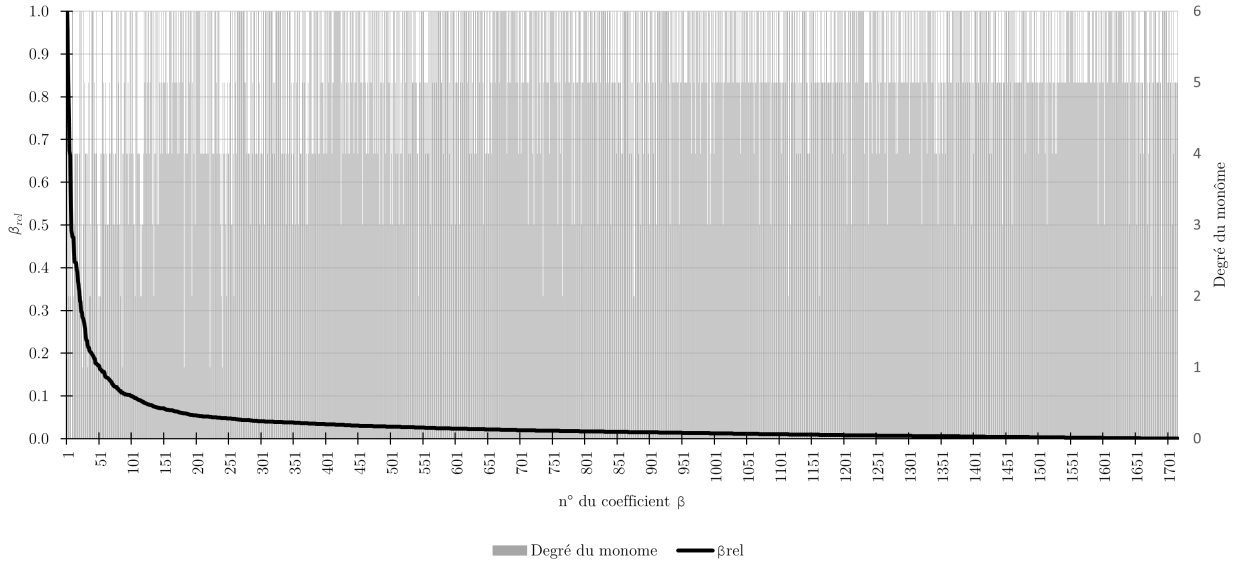
	R^2	γ_{Rd}	Corrélation
Degré 1			
Degré 2			
Degré 3			
Degré 4			
Degré 5			
Degré 6			
Degré 7			

TABLE 3.26 – E_{11} : Evaluation de la réponse polynomiale

	R^2	γ_{Rd}	Corrélation
Degré 1			
Degré 2			
Degré 3			
Degré 4			
Degré 5			
Degré 6			
Degré 7			



(a) D_{33}



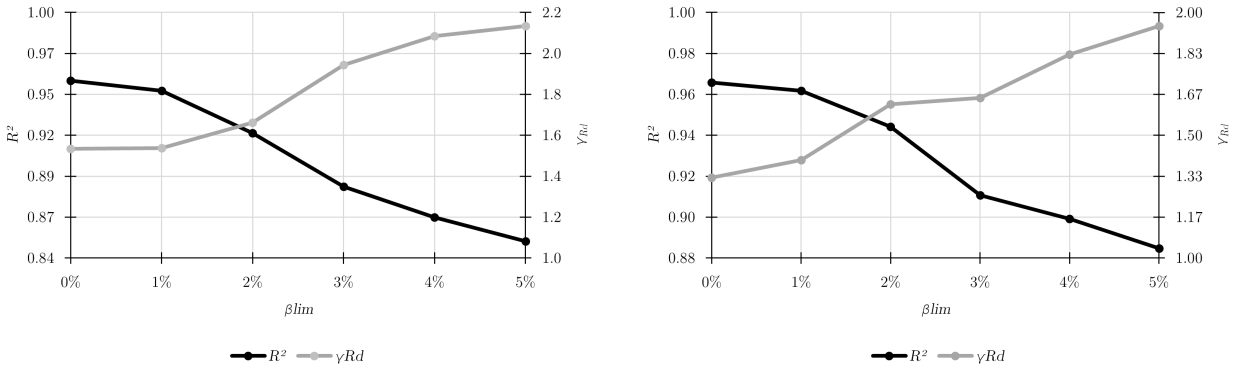
(b) E_{11}

FIGURE 3.76 – Classification des coefficients des polynômes réponses

à $\beta_{lim} < 1\%$ et ferait l'économie d'environ 600 termes. Néanmoins, même avec le seuil de troncature le plus important ($\beta_{lim} = 5\%$), plus de 200 termes composent la fonction polynomiale, témoignant d'un fort couplage entre les paramètres dans le modèle tel que nous l'avons conçu. Probablement révélateur de la complexité du problème traité, ce couplage pourrait possiblement être réduit en explorant d'autres modèles que celui polynomial choisi ici et en recherchant des paramétrages alternatifs de la géométrie. Les résultats n'en demeurent pas moins exploitables, car numériquement économes en temps de calcul, mais interdisent de dégager une interprétation physique simple du comportement mécanique des tétraèdres.

TABLE 3.27 – Valeurs des indicateurs R^2 et γ_{Rd} en fonction de la troncature de la fonction polynomiale (nombre total de termes : 1716)

Seuil	D_{33}			E_{11}		
	n_{ex}	R^2	γ_{Rd}	n_{ex}	R^2	γ_{Rd}
$\beta_{lim} = 0\%$	0	0.96	1.53	0	0.97	1.33
$\beta_{lim} = 1\%$	632	0.95	1.54	601	0.96	1.40
$\beta_{lim} = 2\%$	1052	0.92	1.66	1015	0.94	1.63
$\beta_{lim} = 3\%$	1296	0.89	1.94	1261	0.91	1.65
$\beta_{lim} = 4\%$	1414	0.87	2.08	1406	0.90	1.83
$\beta_{lim} = 5\%$	1497	0.85	2.13	1484	0.88	1.94



(a) D_{33} (b) E_{11}

FIGURE 3.77 – Courbes d'évolution des indicateurs R^2 et γ_{Rd} en fonction de la troncature de la fonction polynomiale

3.2.5 Composition des raideurs

Dans les deux parties précédentes, nous avons proposé une formulation pour les matrices de raideur relatives à la contribution des membrures $\left[R_M\right]$ et des tétraèdres $\left[R_T\right]$ et le § 3.2.2.3.1 explicite la manière dont s'assemble la matrice complète $\left[R_{Tot}\right]$. En réalité, étant donné la composition des matrices respectives, seuls les coefficients D_{33} et E_{11} sont à combiner ; tous les autres termes sont identiques à ceux de la matrice de raideur des membrures. Les coefficients D_{33} et E_{11}, tous deux situés sur la diagonale de la matrice se calculent de la façon suivante :

$$\begin{aligned} D_{33_{Tot}} &= \frac{D_{33_M} D_{33_T}}{D_{33_M} + D_{33_T}} \\ E_{11_{Tot}} &= \frac{E_{11_M} E_{11_T}}{E_{11_M} + E_{11_T}} \end{aligned} \tag{3.69}$$

Les termes D_{33_M} et E_{11_M} se calculent directement à partir des variables dimensionnelles du problème à traiter (§ 3.2.3.8). Les termes D_{33_T} et E_{11_T} doivent être extraits de la formulation adimensionnelle (Eq. 3.64) par le changement de variable inverse :

$$\begin{aligned} D_{33_T} &= D_{33_{hom}} f_{D_{33}}\left(\bar{b}, \mu, \bar{e}, \alpha_1, \bar{\rho_1}, \alpha_2, \bar{\rho_2}\right) \\ E_{11_T} &= E_{11_{hom}} f_{E_{11}}\left(\bar{b}, \mu, \bar{e}, \alpha_1, \bar{\rho_1}, \alpha_2, \bar{\rho_2}\right) \end{aligned} \tag{3.70}$$

avec :

$$\begin{cases} \bar{b} = & 2\,\dfrac{b}{h} - 3.0 \\ \bar{\mu} = & 4\,\mu - 2.6 \\ \bar{e} = & 500\,\dfrac{e}{h} - 2.0 \\ \bar{\alpha_1} = & 6.67\,\alpha_1 - 2.0 \\ \bar{\rho_1} = & 5\,\dfrac{\rho_1}{h} - 1.5 \\ \bar{\alpha_2} = & 6.67\,\alpha_2 - 2.0 \\ \bar{\rho_2} = & 5\,\dfrac{\rho_1}{h} - 1.5 \end{cases} \tag{3.71}$$

En synthèse, la matrice de raideur totale s'écrit sous la forme :

$$\begin{bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|ccc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & & & & & \\ A_{12} & A_{11} & 0 & & 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} & & & & & \\ \hline & & & D_{11} & D_{11} & 0 & & \\ & 0 & & D_{11} & D_{11} & 0 & & 0 \\ & & & 0 & 0 & D_{33_{Tot}} & & \\ \hline & 0 & & & 0 & & E_{11_{Tot}} & 0 \\ & & & & & & 0 & E_{11_{Tot}} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ \chi_{xx} \\ \chi_{yy} \\ 2\chi_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \tag{3.72}$$

avec A_{11}, A_{12}, A_{33} et D_{11}, coefficients de la matrice de raideur des membrures, $D_{33_{Tot}}$ et $E_{11_{Tot}}$, coefficients combinés des matrices de raideur des membrures et des tétraèdres.

La comparaison des ordres de grandeur des coefficients D_{33_T} et D_{33_M} d'une part ainsi que E_{11_T} et E_{11_M} d'autre part, nous permet de comprendre quantitativement la pondération de chacun au sein des coefficients $D_{33_{Tot}}$ et $E_{11_{Tot}}$. Sans prétendre à une comparaison exhaustive qui ferait varier l'ensemble des paramètres, nous sélectionnons ceux susceptibles d'avoir une influence directe sur les raideurs relatives, dans des conditions proches de celles du prototype construit pour les variables fixes. Nous remplaçons cependant le profil en double cornière par une section rectangulaire pour éviter le cas particulier $D_{33} < 0$ (§ 3.2.3.7) :

- $b = 0.75\,\text{m}$;
- $h = 0.6\,\text{m}$;
- μ variable ;
- S, I_y, I_z, définis par une section rectangulaire $40\times20\times2\text{mm}$;
- $e = 1.5\,\text{mm}$;
- $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2$: variables.

Plutôt que de faire varier continûment les variables $\alpha_1, \alpha_2, \rho_1, \rho_2$, nous proposons deux combinaisons représentant deux cas typiques :

— tétraèdre convexe : $\alpha_1 = 0.45\pi$, $\alpha_2 = 0.15\pi$, $\rho_1 = 0.2\,\text{m}$, $\rho_2 = 0.2\,\text{m}$;

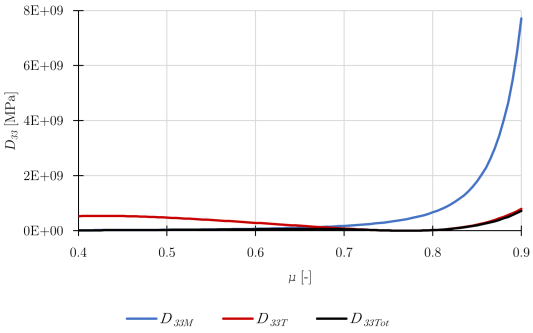
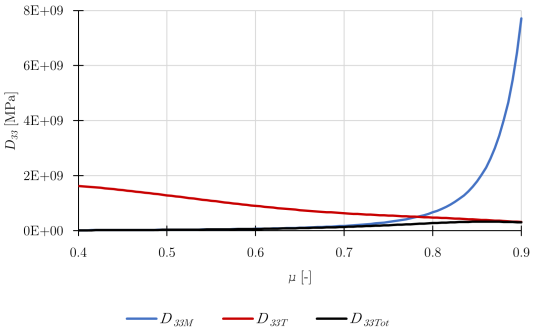
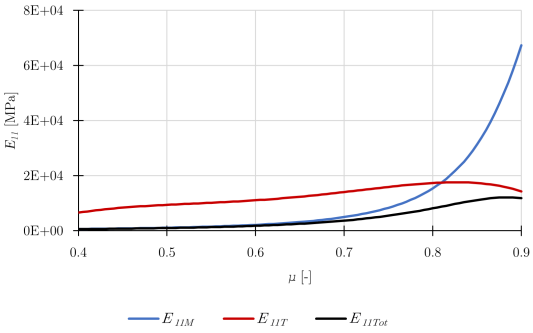
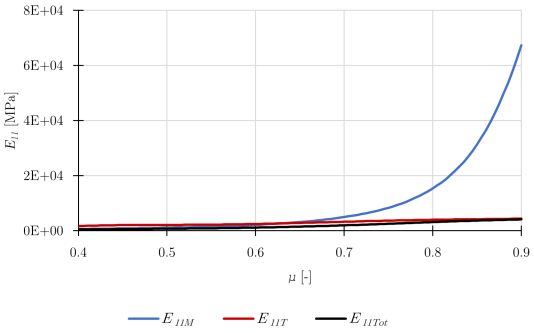
— tétraèdre concave : $\alpha_1 = 0.25\pi$, $\alpha_2 = 0.45\pi$, $\rho_1 = 0.2\,\text{m}$, $\rho_2 = 0.2\,\text{m}$.

La comparaison se réalise en s'appuyant sur quatre graphiques (Tab. 3.28) : deux coefficients (D_{33} et E_{11}) croisés avec deux types de tétraèdres (convexe et concave). Chaque graphique comporte trois courbes qui représentent la raideur des membrures, la raideur du tétraèdre et la raideur totale en fonction du coefficient de remplissage μ.

Les quatre graphiques expriment la même tendance. Dans la partie inférieure du domaine de variation de μ, la raideur totale est pilotée par la raideur des membrures, car celles-ci présentent une longueur de poutre importante, peu disposée à reprendre les sollicitations transverses imposées par le moment de torsion et l'effort tranchant de plaque. En revanche, dans la partie haute du domaine de variation de μ, la raideur des membrures devient très importante et la raideur totale est alors pilotée par la raideur des tétraèdres. Dans les configurations observées, les raideurs des membrures et des tétraèdres trouvent leur équivalence entre $\mu = 0.65$ et $\mu = 0.8$.

On note également que le type convexe est plus raide, à épaisseur constante, que le type concave pour les efforts de cisaillements. Cela confirme les études préliminaires du comportement structurel réalisées pour le prototype (§ 3.1.4.2).

TABLE 3.28 – Comparaison des ordres de grandeurs des raideurs D_{33} et E_{11} en fonction du paramètre μ et de la concavité du tétraèdre

	Tétraèdre convexe	Tétraèdre concave
D_{33}		
E_{11}		

3.2.6 Comparaison du modèle équivalent et du modèle complet

Pour évaluer la validité du modèle équivalent proposé, nous confrontons celui-ci à un modèle détaillé comportant membrures et tétraèdres appelé par la suite « modèle complet ». Cette comparaison se fait au sein de deux bancs d'essais. Le premier teste le modèle équivalent relatif aux seules membrures (§ 3.2.3.8). Le second s'intéresse au modèle équivalent total, combinant la raideur des membrures et des tétraèdres (§ 3.2.5). Dans les deux cas, la comparaison repose sur le relevé de la flèche maximale δ_z de la structure, mesurée à mi-portée.

3.2.6.1 Définition des modèles

La configuration idéale pour comparer un modèle complet et son équivalent homogénéisé est de disposer de modèles les plus grands possibles pour se placer dans la situation où la taille du VER devient petite devant celle du modèle. De cette façon, le modèle sera également moins sensible aux conditions aux limites. Nous choisissons un modèle constitué de 144 modules (soit 36 VER), qui semble être un bon compromis entre taille suffisante du modèle et temps de calcul. Pour un essai donné, tous les modules (membrures et tétraèdres) sont identiques : l'intégralité du modèle est définie par un unique jeu de paramètres.

Comme pour le prototype construit, chaque module s'inscrit dans un parallélépipède rectangle ayant pour base un carré de côté b et de hauteur h dont les valeurs seront définies plus loin ; les symétries de la structure, du chargement et des appuis permettent d'effectuer les calculs sur un quart du modèle. Pour membrures, on choisit une section rectangulaire qui nous garantit de nous placer en dehors du cas particulier $D_{33} < 0$.

L'analyse structurelle du modèle complet est réalisée sur le module d'analyse structurelle Karamba3D et est conforme aux conditions de liaisons, de périodicité et d'appuis énoncées précédemment (§ 3.2.2.3). On simule un chargement uniforme en appliquant un chargement ponctuel de 1.5 kN appliqué à chaque nœud, soit un chargement d'environ 2.27 $\mathrm{kN/m^2}$.

Le modèle équivalent est implémenté dans le logiciel de calcul d'éléments finis Abaqus [336]. Contrairement à Karamba3D, Abaqus permet de créer des éléments finis de coques (General Shell Stiffness) en renseignant directement les coefficients de la matrice de raideur calculés dans les parties précédentes. A noter que nous n'appliquons pas ici les coefficients de sécurité relatifs aux coefficients D_{33} et E_{11} des tétraèdres (§ 3.2.4.3) puisque l'objectif poursuivi ici n'est pas le dimensionnement d'une structure sous critère de flèche, mais la vérification de la précision de celle-ci.

Le modèle Abaqus est un modèle plaque qui, comme le modèle complet, représente un quart du modèle total. Il comporte 36 partitions carrées de côté b (équivalent à un module du modèle complet) complétées par 9 partitions triangulaires pour former un grand triangle rectangle isocèle (Fig. 3.79a). La densité de maillage nécessaire est déterminée par une étude de convergence portant sur le critère de flèche. La figure 3.78 montre que le critère de convergence à 5% est atteint dès que le modèle comporte environ 20 éléments dans le maillage, mais que le palier de convergence se dessine réellement à partir d'une centaine d'éléments. Afin de satisfaire ce critère et de respecter également les partitions correspondant aux modules du modèle complet, nous optons pour un maillage du modèle Abaqus réalisé au moyen de quatre éléments finis par partition, soit 180 éléments de type S8R au total. Les éléments S8R sont de forme quadrangulaire à 8 points (quadratique), basés sur une formulation de type plaque épaisse de Reissner-Mindlin (Fig. 3.79b).

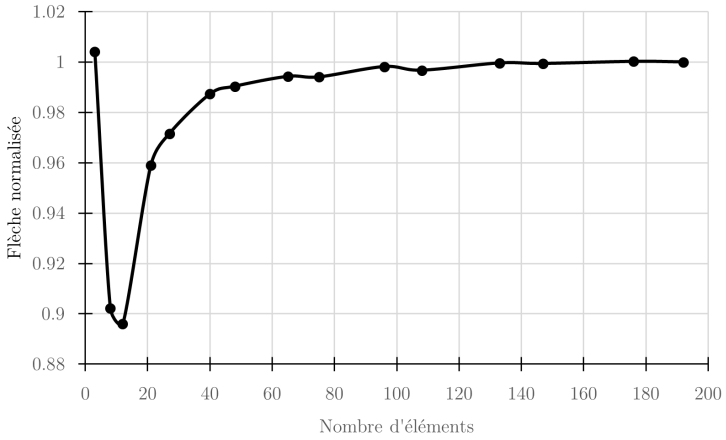


FIGURE 3.78 – Etude de convergence du modèle Abaqus

Les appuis du modèle équivalent sont de deux types et conformes au modèle complet (Fig. 3.79a) :

— les appuis de rive (selon le côté diagonal) sont simplement appuyés : les translations $\overrightarrow{x}$, $\overrightarrow{y}$ et $\overrightarrow{z}$ sont bloquées ;

— les appuis de symétries (selon les directions $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$) s'assurent de la compatibilité du modèle partiel sur les bords tronqués : selon le plan de symétrie, deux rotations et une translation sont bloquées.

Enfin, le modèle équivalent est chargé de façon uniforme avec une densité identique à celle du modèle complet, soit $2.27\,\mathrm{kN/m^2}$.

A noter que le logiciel Abaqus accepte, au sein de la matrice de raideur renseignée, uniquement des coefficients positifs et des lignes et colonnes linéairement indépendantes. La première exigence est atteinte par le choix de sections rectangulaires pour les membrures. Pour satisfaire la seconde exigence, nous modifions légèrement le coefficient D_{12}=$0.99D_{11}$ et supprimons ainsi le degré de liberté présent sans modifier sensiblement le rapport des raideurs.

3.2.6.2 Banc d'essai n°1

Pour le banc d'essai n°1, nous évaluons la qualité du modèle équivalent pour les membrures. Dans le modèle complet, les tétraèdres sont configurés de façon à être infiniment raides et les membrures déformables. Selon notre paramétrisation, six paramètres sont susceptibles d'influer sur la flèche : b, h, μ, S, I_y et I_z.

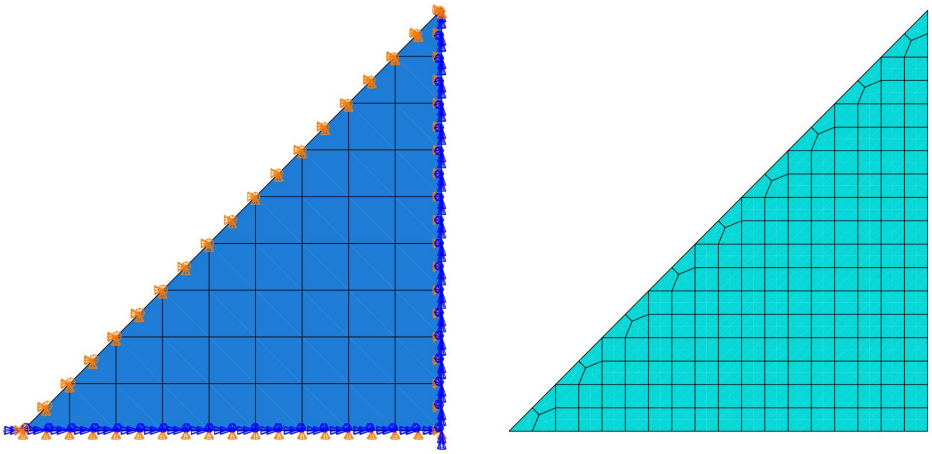
Afin de réduire le nombre d'essais, nous proposons de coupler les paramètres de la section et de fixer $b = \frac{\sqrt{2}}{2} 1.15\,\mathrm{m}$, identique au prototype construit. Le nombre de paramètres indépendants est ainsi réduit à trois. On fait varier un paramètre parmi trois, les autres étant fixés aux valeurs par défaut suivantes :

— $h = 0.625\,\mathrm{m}$;

— $\mu = 0.6$;

— S, I_y, I_z, définis par une section rectangulaire $40\times20\times2\mathrm{mm}$.

Les trois séries d'essais, en faisant varier h, μ puis la section des membrures, sont synthétisés par le tableau 3.29. Les domaines de variation des variables h et μ sont choisis en conformité



(a) Partitions et appuis (b) Maillage

FIGURE 3.79 – Abaqus : configuration du modèle

avec ceux de l'étude du Volume Élémentaire Représentatif et celui de la section est défini pour correspondre à des élancements couramment rencontrés pour des poutres en flexion. Pour chaque série, nous effectuons cinq mesures.

Les résultats sont compilés dans le tableau 3.30 et tracés sur les graphiques de la figure 3.80. Ils consignent trois valeurs par essai : la flèche du modèle complet (δ_zCp), la flèche du modèle équivalent (δ_zEq) et l'écart relatif ($\%\Delta_{\delta_z}$).

TABLE 3.29 – Banc d'essai n°1 : configuration des paramètres
Section[mm], μ[-], h[m]

	Section	μ	$\boldsymbol{h}$	Section	$\boldsymbol{\mu}$	h	**Section**	μ	h
1	40×20×2.0	0.6	**0.5000**	40×20×2.0	**0.4**	0.625	**40×20×2.0**	0.6	0.625
2	40×20×2.0	0.6	**0.5625**	40×20×2.0	**0.5**	0.625	**50×25×2.5**	0.6	0.625
3	40×20×2.0	0.6	**0.6250**	40×20×2.0	**0.6**	0.625	**60×30×3.0**	0.6	0.625
4	40×20×2.0	0.6	**0.6875**	40×20×2.0	**0.7**	0.625	**70×35×3.5**	0.6	0.625
5	40×20×2.0	0.6	**0.7500**	40×20×2.0	**0.8**	0.625	**80×40×4.0**	0.6	0.625

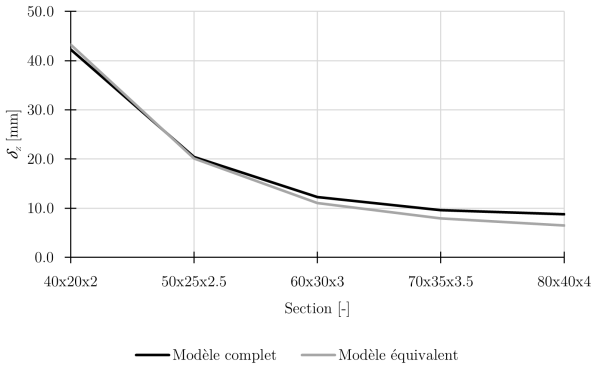
Les trois courbes montrent une très bonne corrélation entre les deux modèles avec un écart relatif moyen de 12% et un écart relatif maximal d'environ 40% pour les valeurs hautes du domaine de variation de μ. Les courbes présentent une même tendance qui, comme attendu, voit la flèche diminuer en même temps que la section, μ et h augmentent.

L'essai n°3, commun aux trois séries de tests montre une légère surestimation de la raideur du modèle équivalent d'environ 10%. On peut raisonnablement avancer l'hypothèse que cette différence est due au modèle de poutre d'Euler-Bernoulli utilisé dans le modèle équivalent qui néglige l'énergie de cisaillement. Cette même hypothèse explique pourquoi cette différence a tendance à diminuer pour les valeurs basses de section et du coefficient de remplissage μ : le rapport longueur/hauteur (élancement) des membrures respecte plus rigoureusement le modèle de poutre d'Euler-Bernoulli. Au contraire, pour les valeurs hautes de section et de μ, les deux courbes divergent, car l'élancement est moins favorable au modèle de poutre choisi.

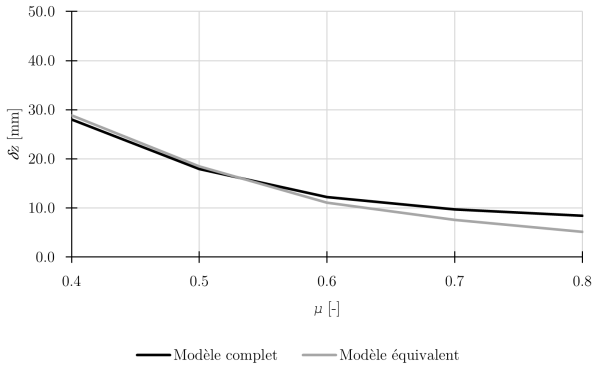
Enfin, les courbes de variation de h, où la section et μ sont constants, présentent un écart relatif constant d'environ 10% sur l'ensemble du domaine, expliqué par un élancement constant.

TABLE 3.30 – Banc d'essai n°1 : résultats
Flèches δ_zEq et δ_zCp [mm], écarts relatifs $\%\Delta_{\delta_z}$[%]

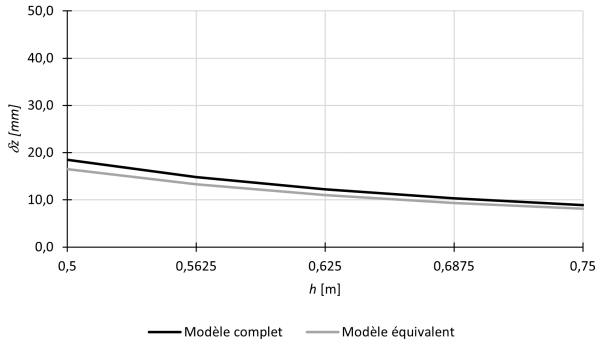
	h			μ			Section		
	δ_zCp	δ_zEq	$\%\Delta_{\delta_z}$	δ_zCp	δ_zEq	$\%\Delta_{\delta_z}$	δ_zCp	δ_zEq	$\%\Delta_{\delta_z}$
1	18.5	16.5	10.7	28.0	28.8	3.0	42.2	43.3	2.4
2	14.9	13.3	10.3	18.0	18.4	2.6	20.4	20.1	1.6
3	12.3	11.1	9.8	12.3	11.1	9.8	12.3	11.1	9.8
4	10.3	9.4	9.4	9.7	7.6	22.0	9.6	7.9	18.1
5	8.9	8.1	8.9	8.4	5.1	38.8	8.8	6.5	26.3



(a) Section des membrures



(b) Coefficient de remplissage μ



(c) Hauteur structurelle h

FIGURE 3.80 – Résultats du banc d'essais n°1

3.2.6.3 Banc d'essai n°2

Pour le banc d'essai n°2, nous évaluons la qualité du modèle équivalent dans son ensemble. Dans le modèle complet, les tétraèdres ainsi que les membrures sont déformables. Nous nous focalisons sur les paramètres propres au tétraèdre, à savoir : e, α_1, ρ_1, α_2, et ρ_2. La section des membrures est identique pour tous les essais (section rectangulaire 60×30×3mm).

Afin de réduire le nombre d'essais, nous proposons de coupler les quatre paramètres de forme du tétraèdre α_1, ρ_1, α_2, et ρ_2 en les faisant varier simultanément d'une configuration convexe à concave. Pour la variation d'épaisseur, on conserve la forme concave inchangée. Pour la variation de concavité, on garde une épaisseur constante $e = 2\,\text{mm}$.

Les deux séries d'essais, en faisant varier e puis la concavité des tétraèdres sont synthétisés par le tableau 3.31. Les résultats sont compilés dans le tableau 3.32 et tracés sur les graphiques de la figure 3.81.

TABLE 3.31 – Banc d'essai n°2 : configuration des paramètres
e[mm], α_1[-], ρ_1[m], α_2[-], ρ_2[m]

	$\boldsymbol{e}$	α_1	ρ_1	α_2	ρ_2	e	$\boldsymbol{\alpha_1}$	$\boldsymbol{\rho_1}$	$\boldsymbol{\alpha_2}$	$\boldsymbol{\rho_2}$
1	**1.0**	0.250π	0.2	0.450π	0.2	2.0	**0.450π**	**0.2**	**0.150π**	**0.2**
2	**2.5**	0.250π	0.2	0.450π	0.2	2.0	**0.400π**	**0.2**	**0.225π**	**0.2**
3	**2.0**	0.250π	0.2	0.450π	0.2	2.0	**0.350π**	**0.2**	**0.300π**	**0.2**
4	**2.5**	0.250π	0.2	0.450π	0.2	2.0	**0.300π**	**0.2**	**0.375π**	**0.2**
5	**3.0**	0.250π	0.2	0.450π	0.2	2.0	**0.250π**	**0.2**	**0.450π**	**0.2**

Les deux courbes montrent une assez bonne corrélation entre les deux modèles avec un écart relatif moyen de 16% et un écart relatif maximal de 23%.

L'observation des courbes en relation avec la variation de concavité montre une meilleure correspondance pour le type convexe que pour le type concave. Nous avons par ailleurs déjà constaté que, pour une épaisseur donnée, le type convexe est plus raide que le type concave (§ 3.2.5 et 3.1.4.2). La morphologie convexe est donc mieux disposée à respecter l'hypothèse formulée pour le modèle équivalent et qui consiste à supposer que les membrures sont parfaitement encastrées et possèdent une tangente horizontale en extrémité du tétraèdre. En cas de non respect de cette hypothèse, les membrures présentent un angle initial au niveau de leur ancrage dans le tétraèdre, augmentant d'autant la souplesse globale du module. Malgré l'écart de la valeur maximale de la flèche à mi-portée, l'allure globale de sa distribution sur l'ensemble de la structure est très similaire dans les modèles équivalents et complets (Fig. 3.82)

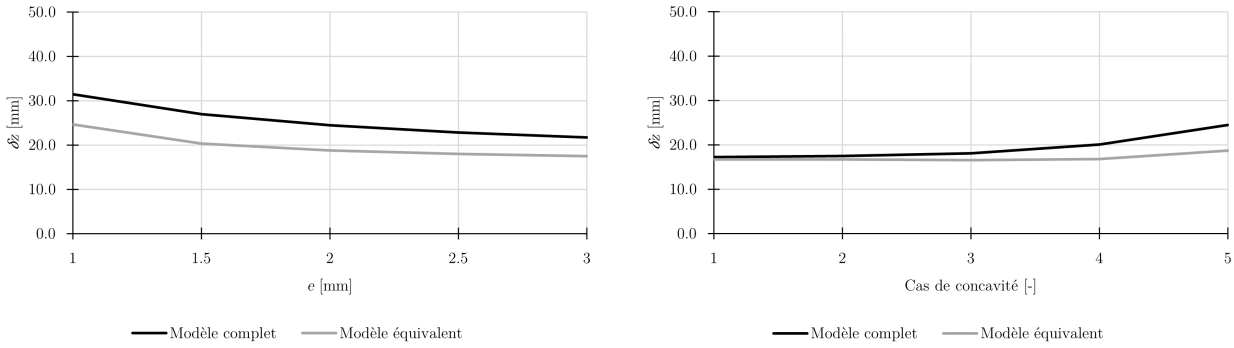
L'écart observé dans l'essai n°5 sur la variation de concavité se retrouve à l'identique à l'essai n°3 sur la variation d'épaisseur (même jeu de paramètres). Cet écart d'environ 22% se maintient sur l'ensemble du domaine de variation de l'épaisseur.

Nous rappelons que les coefficients de sécurité relatifs aux coefficients D_{33} ($\gamma_{Rd} = 1.53$) et E_{11} ($\gamma_{Rd} = 1.33$) des tétraèdres n'ont pas été appliqués dans le calcul de la flèche, mais qu'ils permettraient de couvrir les divergences observées dans le banc d'essais n°2.

Enfin, en rapprochant les bancs d'essais n°1 et 2 et dans les domaines testés, il semble que la flèche globale soit le plus sensible à la section des membrures, à la hauteur h de la structure et au coefficient de remplissage μ ; les paramètres du tétraèdre (e, α_1, ρ_1, α_2, et ρ_2) semblent être de moindre influence. Cette remarque est d'importance, car elle sera mobilisée dans la partie suivante afin d'établir une stratégie de conception pour des structures de plus grande échelle.

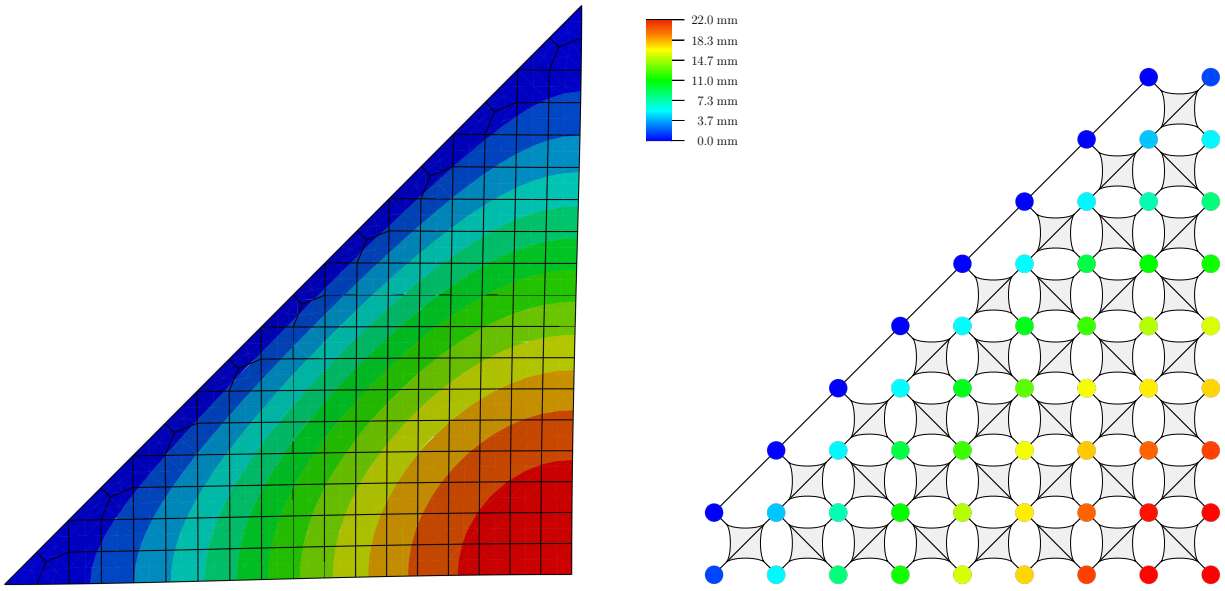
TABLE 3.32 – Banc d'essai n°2 : résultats
Flèches δ_zEq et δ_zCp [mm], écarts relatifs $\%\Delta_{\delta_z}$[%]

	e			Concavité		
	δ_zEq	δ_zCp	$\%\Delta_{\delta_z}$	δ_zEq	δ_zCp	$\%\Delta_{\delta_z}$
1	24.6	31.4	27.6	16.7	17.2	2.9
2	20.3	27.0	32.9	16.7	17.5	4.5
3	18.7	24.5	30.6	16.6	18.1	8.9
4	18.0	22.8	26.8	16.8	20.0	19.0
5	17.5	21.7	23.7	18.7	24.5	30.6



(a) Epaisseur de tôle e (b) Concavité des tétraèdres

FIGURE 3.81 – Résultats du banc d'essais n°2



(a) Modèle équivalent (b) Modèle complet

FIGURE 3.82 – Allure de la déformée : Banc d'essai n°2, test de concavité n°5

3.2.7 Conclusion

L'objet de cette partie a été le développement d'un modèle équivalent de plaque épaisse orthotrope de type Reissner-Mindlin pouvant se substituer, pour son comportement en raideur, au système structurel à double nappe imaginé pour le prototype *SSDSC*, grâce à l'identification d'un volume élémentaire représentatif aux conditions limites simples.

En s'appuyant sur l'hypothèse que les deux entités constituant le module (les membrures et le tétraèdre) apportent deux contributions distinctes et découplées à la raideur d'ensemble, nous avons proposé une approche hybride. La première partie consiste à calculer la part de la raideur due aux membrures par la méthode des forces en procédant par calcul analytique. La seconde partie consiste à calculer la part de la raideur due aux tétraèdres, également par la méthode des forces, mais en s'appuyant cette fois sur une série de calculs aux éléments finis qui sont ensuite approchés par la méthode des surfaces de réponses. Les deux parties sont enfin combinées au sein d'une matrice de raideur globale.

Grâce à la comparaison des ordres de grandeur des contributions respectives et de leur évolution lors de la variation des paramètres, il a été possible de mieux identifier l'implication des différentes variables dans la performance en raideur de la structure. En particulier, les paramètres de la section des membrures (S, I_y et I_z), de la hauteur structurelle (h) et le coefficient de remplissage (μ) jouent un rôle significatif alors que les paramètres propres aux tétraèdres semblent avoir un impact plus limité. Cette observation servira de base à la proposition faite dans la partie suivante pour une stratégie d'optimisation adaptée à des structures de plus grande ampleur.

Enfin, la formulation du modèle équivalent a été implémentée au sein d'un modèle aux éléments finis sur Abaqus et confrontée à un modèle complet (avec membrures et tétraèdres) par deux bancs d'essais. Les résultats montrent globalement une très bonne corrélation entre les deux modèles. Cependant, deux limites dans le domaine de validité du modèle ont été mises en évidence et leurs origines identifiées.

La première limite, relative aux membrures, provient de l'hypothèse du modèle d'Euler-Bernoulli choisi pour représenter les nappes inférieure et supérieure, qui n'est pas rigoureusement respectée pour les valeurs hautes de μ ou pour les sections importantes. Le non-respect de cette hypothèse, qui entraîne une surestimation de la raideur par le modèle équivalent, ne se situe pas du côté de la sécurité et doit être corrigé. Deux pistes sont à envisager. La première consiste à traiter la question en amont en enrichissant le modèle de poutre (modèle de Timoshenko) et en intégrant ainsi le terme relatif au cisaillement dans le calcul de l'énergie de déformation des membrures. La seconde piste consiste à traiter la question en aval en attribuant un coefficient majorateur à la valeur de flèche obtenue pour compenser l'effet du cisaillement négligé. Cette correction pourrait s'inspirer d'approches similaires décrites dans les Eurocodes [337, 338] pour les calculs simplifiés de treillis et barres composées.

La seconde limite, relative aux tétraèdres, résulte du non-respect de l'hypothèse de découplage de la raideur des membrures et des tétraèdres. Le modèle équivalent surestime la raideur de la structure pour les tétraèdres de morphologie concave. L'introduction d'un coefficient de correction, rendant compte du couplage des raideurs dans les coefficients D_{33} et E_{11} des tétraèdres, permettrait d'affiner la correspondance entre les deux modèles.

3.3 Optimisation et pré-dimensionnement pour une structure à grande échelle

Les conclusions tirées suite à la fabrication du prototype ont conduit à identifier deux barrières majeures à l'extrapolation de la méthode d'optimisation mise en place pour l'ouvrage construit vers des structures de plus grandes dimensions.

La première provient de la complexité de la modélisation géométrique et mécanique ainsi que du temps de calcul nécessaires dans une approche de modélisation complète aux éléments finis. Des éléments de réponses ont été apportés sur cette question dans la partie 3.2 en proposant la formulation d'un modèle équivalent. La seconde barrière résulte de l'augmentation importante du nombre de paramètres avec la dimension de la structure envisagée. Nous proposons de traiter ici cette question en décomposant l'optimisation globale et unique utilisée pour le prototype en une série d'optimisations locales et multiples, plus économes en temps de calcul, car impliquant un nombre réduit de paramètres sur des modélisations simplifiées.

3.3.1 Stratégie d'optimisation

Les paramètres du système structurel à double nappe que nous étudions agissent différemment sur le comportement mécanique de la structure. Nous avons montré dans la partie précédente que les paramètres de section des membrures, le coefficient de remplissage et la hauteur structurelle impactent sensiblement la flèche globale alors que l'influence de la morphologie des tétraèdres est plus limitée. Au contraire, nous avons mis en évidence l'apport de la courbure (morphologie des tétraèdres) dans la résistance au flambement, sans dégrader pour autant les performances de raideur lors de la conception du prototype.

Sans rentrer dans le détail de la procédure d'optimisation qui est l'objet de la suite, nous proposons d'esquisser ici les grandes lignes d'une méthodologie en deux séquences.

Dans une première séquence, nous traitons de la raideur de la structure : la quantité de matière engagée est minimisée sous contrainte de flèche, déterminée par les conditions du projet (portée, fonctions de la dalle, etc.). La flèche étant une grandeur intégrale, cette optimisation engage la totalité de la structure, mais implique un nombre considérablement réduit de variables en excluant la contribution des paramètres des tétraèdres. Cette approche, qui omet une partie du cisaillement dans le calcul de la flèche, est une pratique de projet courante pour le dimensionnement des structures réticulées. Pour compenser cette approximation, soit un coefficient majorateur est appliqué à la déformation, soit la raideur de la structure est artificiellement réduite. Par exemple, le code de calcul CM66 [339], règles de calcul des constructions en acier qui précédaient l'Eurocode NF EN 1993-1 [337], recommande de prendre un module de déformation longitudinale fictif de $160\,000\,\mathrm{N/mm^2}$ au lieu de $210\,000\,\mathrm{N/mm^2}$, soit une majoration d'environ 30% de la déformation.

Cette première séquence d'optimisation implique donc les variables globales s'appliquant à l'ensemble de la structure : la hauteur structurelle h, les caractéristiques de la section S, I_y, I_z, ainsi que les variables locales μ_i définissant le coefficient de remplissage de chaque module. Cette phase d'optimisation peut aussi bien être menée à partir d'un modèle complet que de son modèle équivalent. Cependant, il est intéressant de noter que l'effet des tétraèdres étant négligé, ces derniers peuvent être remplacés par des éléments infiniment raides. Le modèle à optimiser est alors un modèle à barres, ce qui diminue considérablement le temps de calcul. Par la suite, nous choisissons de nous appuyer sur un modèle complet à barres pour pouvoir profiter

de l'environnement d'optimisation intégré Rhinoceros/Grasshopper/Karamba3D/NLopt déjà utilisé pour le prototype.

La deuxième séquence d'optimisation concerne la résistance de la structure, où nous nous focalisons sur la question du flambement des tôles des tétraèdres. La vérification en contrainte est exclue *a priori* de la procédure d'optimisation, car très rarement dimensionnante pour ce type de structure en acier. Elle fera l'object d'une vérification *a posteriori*.

Il résulte de la première séquence d'optimisation un état de déformation pour chaque module. Cet état de déformation devient le chargement de la deuxième séquence d'optimisation qui consiste à définir, pour chaque module, la forme et l'épaisseur du tétraèdre optimal en minimisant la quantité de matière sous contrainte d'un coefficient de charge critique de flambement donné. Nous verrons par la suite que d'autres contraintes peuvent être ajoutées. Cette séquence implique donc les variables e_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i} alors que les paramètres de la section des membrures (S, I_y, I_z), la hauteur structurelle (h) et les coefficients de remplissage (μ_i) sont fixés par la première séquence. Cette optimisation en résistance nécessite certes une modélisation complète des membrures et tétraèdre, mais s'applique sur un modèle local de la structure (un module) avec un nombre limité de variables (cinq) garantissant une convergence rapide du processus.

3.3.2 Comparaison des approches globales et séquentielle

Pour tester la pertinence de l'approche par optimisation séquentielle proposée dans cette partie, on compare ses performances avec l'approche globale du prototype. Pour cela, nous mettons en parallèle les deux techniques sur un objet commun constitué de 40 tétraèdres (dont 6 différents) et de membrures inférieure et supérieure en double cornières à ailes égales. Nous utilisons la paramétrisation des tétraèdres à 6 paramètres (e_i, μ_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i}) définie au § 3.2.4.3 et la longueur des ailes des cornières, notée L_c, est laissée libre. L'épaisseur des cornières est fixé à $L_c/10$. Le problème d'optimisation est donc piloté par 38 paramètres, contre 25 pour le prototype : h, L_c, μ_i, e_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i} avec $i \in \{1 \dots 6\}$.

La comparaison des performances des deux types d'optimisation s'opère à contrainte de flèche (δ_z<10 mm), contrainte de coefficient de flambement ($CF < 10$) et nombre d'itérations égales. Le nombre d'itérations est fixé à 10500, chiffre qui correspond pour l'optimisation séquentielle à 1500 itérations pour la séquence 1 (raideur) et 6 × 1500 itérations pour les six tétraèdres différents de la séquence 2 (résistance). L'optimisation globale sera donc arrêtée après 10500 itérations. Pour éviter toute redondance avec la partie suivante, nous nous contentons de donner les résultats principaux de l'étude en comparant le temps de calcul, la masse totale (membrures et tétraèdres) et la forme des tétraèdres obtenus. Les résultats des optimisations globale et séquentielle sont consignés dans le tableau 3.33. Pour rappel, l'optimisation globale menée pour la prototype *SSDSC* y est également indiquée.

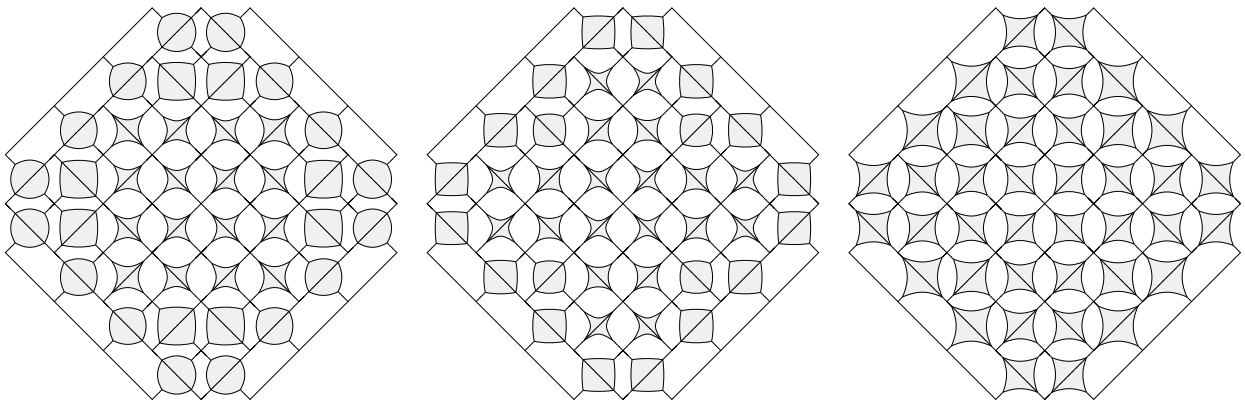
Table 3.33 – Comparaison des optimisations globales et séquentielle

Optimisation	Nbre itérations [u]	Tps de calcul [h]	Masse totale [kg]
Globale (SSDSC)	5000	11.7	761
Globale	10 500	24.4	876
Séquentielle	10 500	5.9	686

Nous constatons que la qualité de l'optimisation globale a souffert de l'augmentation du nombre de paramètres puisque la minimisation de la masse du prototype a été moins performante que pour le prototype initial alors que le temps de calcul et le nombre d'itération sont supérieurs : le temps de calcul a été insuffisant pour converger correctement. Au contraire, l'optimisation séquentielle a su tirer profit des nouveaux degrés de libertés introduits (caractéristiques de section des membrures et épaisseur des tôles) pour améliorer ses performances.

Au-delà de la qualité des résultats obtenus, le temps de calcul est nettement à l'avantage de l'optimisation séquentielle qui, malgré un nombre plus important d'opérations d'optimisation (une optimisation de raideur, six optimisations de résistance) opère sur des modèles plus légers avec un nombre très limité de paramètres.

Enfin, la comparaison de la morphologie des tétraèdres confirme les hypothèses avancées précédemment sur leur fonctionnement structurel (Fig. 3.83). Comme pour le prototype, l'optimisation globale montre des tétraèdres convexes sur les rives et concaves en partie centrale alors que l'optimisation séquentielle ne présente que des tétraèdres concaves. Comme évoqué déjà plusieurs fois auparavant, la concavité intervient pour des questions de raideur : les tétraèdres deviennent tous concaves dans l'optimisation séquentielle, dès que leur forme est uniquement pilotée par le flambement.

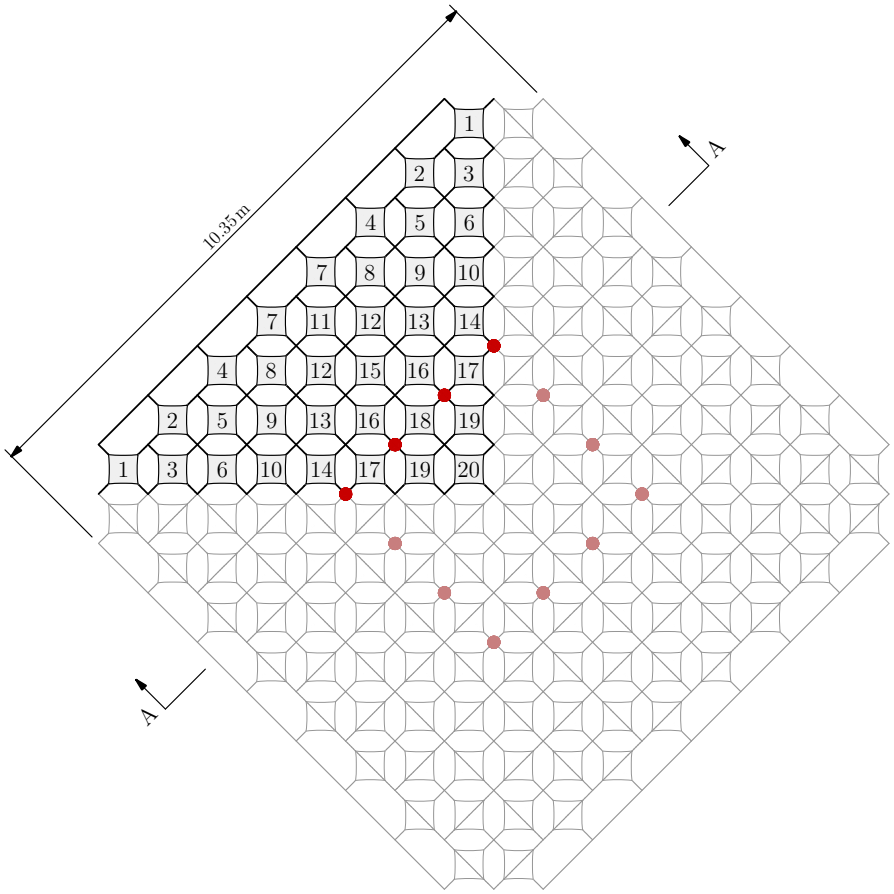


(a) Optimisation globale (SSDSC) (b) Optimisation globale (c) Optimisation séquentielle

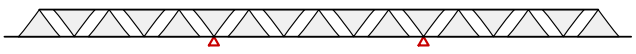
FIGURE 3.83 – Comparaison de la morphologie des tétraèdres selon le type d'optimisation

3.3.3 Application à une structure en porte-à-faux

En guise d'illustration, nous proposons d'appliquer la technique de l'optimisation séquentielle à une structure en porte-à-faux. Il s'agit d'une dalle carrée de 10.35 m de côté, appuyée au 1/3 et 2/3 de sa longueur dans les deux directions. Les parties en porte-à-faux, comme la partie entre appuis, a donc une longueur de 3.45 m (Fig. 3.84b).



(a) Repérage sur un quart de plan



(b) Coupe A-A

FIGURE 3.84 – Repérage des modules et des appuis

La structure est constituée de 144 modules dont 20 sont différents (Fig. 3.84a et 3.85). Le problème d'optimisation est donc piloté par 122 paramètres : h, L_c, μ_i, e_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i} avec $i \in \{1 \dots 20\}$. A l'exception de la localisation des appuis et du nombre de modules, les conditions de liaisons, de périodicité et d'appuis sont toujours identiques.

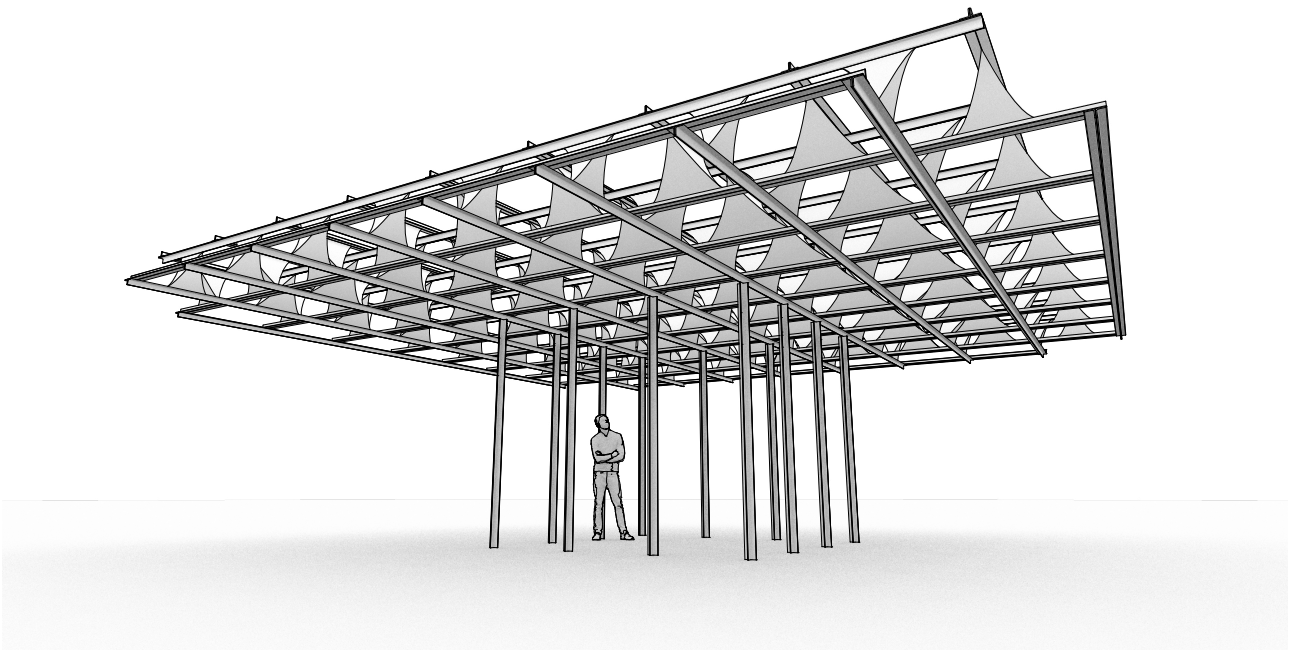


FIGURE 3.85 – Vue perspective de la structure en porte-à-faux

3.3.3.1 Séquence n°1 : Optimisation en raideur

L'objectif de la première séquence d'optimisation est la détermination du premier jeu de 22 paramètres (h, L_c et μ_i) par minimisation de la masse (M) de la structure sous contrainte de flèche. Le déplacement vertical de la structure δ_z est limité à 12 mm. Cette valeur, notée $\bar{\delta}_z$, est calculée à partir de l'Eurocode NF EN 1990 [334] qui définit une flèche maximale de $2 \times {}^{L}/_{200} = 18$ mm pour le cas général des toitures en porte-à-faux. Puis, nous appliquons à cette valeur une correction afin de compenser l'absence de contribution des tétraèdres dans le calcul de la flèche. Cette correction, qui diminue des $^2/_3$ le module de Young est un peu plus sévère que celui du code CM66 pour tenir compte du fait que le dispositif en tétraèdre est moins performant qu'un système classique à barres (§ 3.1.4.2). Cette contrainte de flèche est exprimée au moyen d'une fonction barrière exponentielle d'inégalité (§ 3.1.5.2, $p = 250$) puis elle est combinée linéairement avec la fonction de masse qu'il est inutile de normaliser, étant l'unique fonction à minimiser.

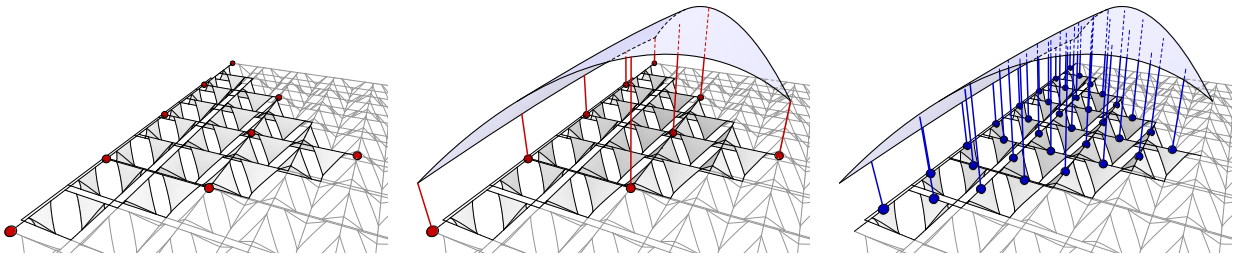
L'optimisation mono-objectif à 22 variables se formule ainsi :

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{h,L_c,\mu_i} & M \\ \text{s.t.} & \delta_z \leqslant 12\,\text{mm} \end{array} \tag{3.73}$$

Pour alléger cette phase d'optimisation, il est possible de reconsidérer la manière dont sont définis les coefficients de remplissage μ_i. Nous avons remarqué lors de l'optimisation du prototype et dans la comparaison des optimisations globale et séquentielle que la valeur de μ varie de façon relativement continue en fonction de la position du module dans la structure. Il est donc possible de définir les paramètres μ_i comme les valeurs d'une fonction continue à deux dimensions spatiales $\mu_i = \mu(x_i, y_i)$, avec (x_i, y_i) les coordonnées en plan du centre du module.

De nombreuses fonctions peuvent convenir pour définir $\mu(x, y)$: fonction spline, interpolation bilinéaire... Nous choisissons une fonction polynomiale de degré deux à deux inconnues de

la forme $\mu(x,y) = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2$. Les six coefficients inconnus sont calculés par régression linéaire aux moindres carrés à partir d'un nombre restraint de points d'échantillonnage de μ, répartis uniformément sur le domaine plan de la structure. Dans notre cas, nous choisissons neuf points, réductibles à six valeurs non-symétriques notés $\hat{\mu}_i$ (Fig. 3.86a). Au lieu de manipuler directement vingt valeurs μ_i, l'optimisation traite seulement six valeurs $\hat{\mu}_i$ à partir desquelles est calculée la fonction $\mu(x,y)$ (Fig. 3.86b) dont sont extraites les vingt valeurs des coefficients μ_i (Fig. 3.86c).



(a) Neuf points d'échantillonnage $\hat{\mu}_i$

(b) Calcul de la surface de réponse $\mu(x,y)$

(c) Extraction de la valeur μ_i des tétraèdres

FIGURE 3.86 – Calcul des coefficients μ_i par une fonction polynomiale

Le problème d'optimisation à huit variables se reformule ainsi :

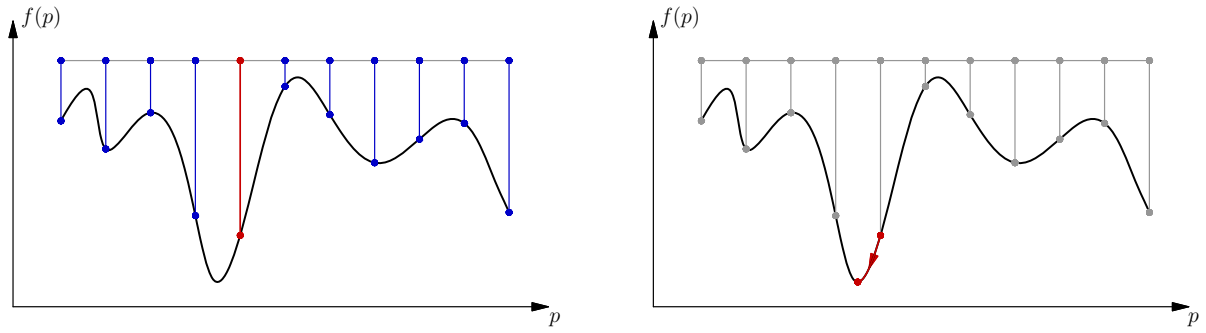
$$\begin{array}{ll} \min\limits_{h,L_c,\hat{\mu}_i} & M \\ \text{s.t.} & \delta_z \leqslant 12\,\text{mm} \end{array} \tag{3.74}$$

Comme pour le prototype, la première partie de l'optimisation (2000 itérations) est menée avec l'algorithme non-linéaire global DIRECT [301], puis est affinée par une seconde partie (1000 itérations) menée avec l'algorithme local COBYLA [340,341] qui prend les valeurs déterminées par l'algorithme DIRECT comme valeurs d'initialisation.

Ces algorithmes sont complémentaires. Le premier, grâce à l'exploration systématique de l'espace des paramètres par division du domaine en hypercubes de plus en plus petits, est une méthode efficace pour trouver la « vallée » dans laquelle est située le minimum (Fig. 3.87a) ; il est en revanche moins performant pour trouver le « fond » de cette vallée. L'algorithme COBYLA, par sa méthode de descente de gradient, prend avantageusement le relais pour converger vers le minimum local (Fig. 3.87b). Les algorithmes DIRECT et COBYLA sont tous deux implémentés dans la bibliothèque d'optimisation non-linéaire NLopt [300].

La convergence de l'optimisation est tracée sur la figure 3.88a avec en abscisse le numéro de l'itération et en ordonnée la valeur de l'énergie normalisée à minimiser. En gris est représentée la partie correspondant à l'algorithme DIRECT et en noir celle correspondant à COBYLA. On observe la dispersion des valeurs obtenues à partir de l'algorithme DIRECT au-dessus d'un front clairement dessiné. Cette dispersion provient de l'exploration systématique de l'espace des paramètres. Au contraire, les valeurs sont plus compactes pour l'algorithme COBYLA qui parvient à une convergence franche à 2700 itérations. Pour plus de lisibilité, en particulier pour les algorithme globaux, nous classerons à partir de maintenant le résultat des optimisations par ordre décroissant (Fig. 3.88b).

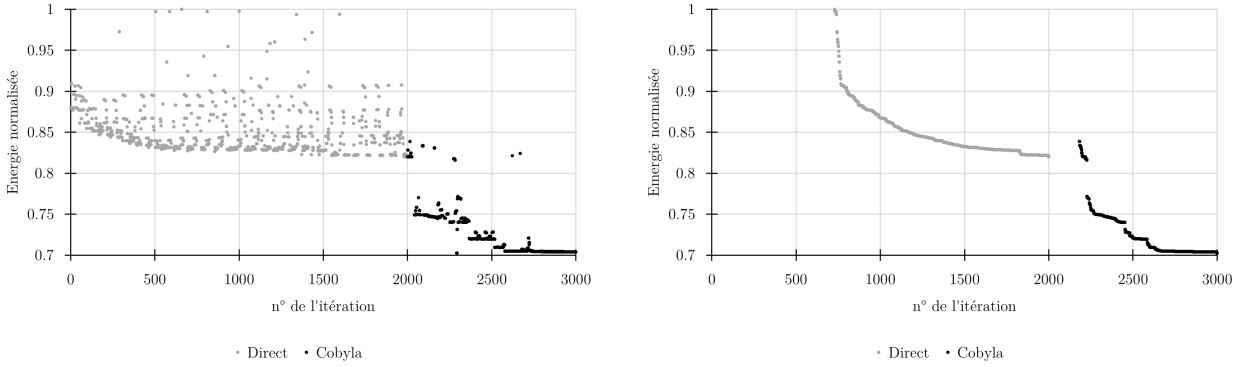
Les algorithmes utilisés exigent des variables continues, ce qui est le cas de toutes à l'exception de la largeur d'aile L_c qui doit correspondre aux gammes de production standard. C'est



(a) Exploration systématique de l'espace des contraintes

(b) Descente de gradient

FIGURE 3.87 – Séquençage algorithmique global / local



(a) Valeurs d'optimisation non-classées

(b) Valeurs d'optimisation classées

FIGURE 3.88 – Séquence n°1 : convergence de l'optimisation

pourquoi, à l'issue de ce cycle d'optimisation DIRECT + COBYLA, nous augmentons la valeur de L_c à la valeur supérieure disponible sur catalogue (cornière 60×60×6mm).

Ensuite nous renouvelons l'opération d'optimisation DIRECT + COBYLA à sept variables et à dimension de cornière fixée :

$$\begin{array}{lrcl} \min\limits_{h,\hat{\mu}_i} & M & & \\ \text{s.t.} & \delta_z & \leqslant & 12\,\text{mm} \\ & L_c & = & 60\,\text{mm} \end{array} \tag{3.75}$$

3.3.3.2 Séquence n°2 : Optimisation en résistance

L'objectif de la deuxième séquence d'optimisation est la détermination des paramètres restants (e_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i}), les autres paramètres (h, L_c, μ_i) ayant été fixés par la séquence n°1. Cette optimisation est menée pour chaque module en minimisant la masse du tétraèdre (M_i) sous contrainte de flambement.

Le module est chargé en déplacement en appliquant l'état de déformation hérité de l'optimisation de la séquence n°1. Pour connaître la déformation à imposer, le déplacement des quatre extrémités des membrures est extrait du modèle global optimisé de la séquence n°1, puis

lui est soustrait le mouvement de corps rigide dû au déplacement d'ensemble du module. Le mouvement de corps rigide est déterminé par l'algorithme de Kabsch [342–344] qui donne les matrices de translation et de rotation optimales entre deux ensembles de points couplés deux à deux.

La recherche d'optimum est réalisée, lors de cette séquence d'optimisation, sous trois contraintes.

Tout d'abord, le coefficient de charge critique de flambement (CF) doit être supérieur à 15. Cette valeur est choisie sur la base de l'Eurocode NF EN 1993-1 [337] qui considère la structure réputée sensible aux effets de second ordre si le facteur de charge critique est inférieur à 10. Ensuite, on applique une majoration de 50% à ce critère par anticipation de l'augmentation de la déformation imposée qui apparaîtra lorsque la contribution des tétraèdres sera prise en considération, c'est-à-dire quand les tétraèdres infiniment rigides de la séquence n°1 seront replacés par les tétraèdres optimisés de la séquence n°2.

La seconde contrainte vient de la volonté de conserver le cintrage des parois du tétraèdre dans le domaine élastique sans consommer toute la résistance mécanique de la tôle. On calcule la contrainte maximale au sein de la tôle en utilisant la formule simplifiée des poutres de type Euler-Bernoulli : $\sigma_{max} = \frac{eE\kappa_{max}}{2}$ où κ_{max} est la courbure maximale de la tôle et e son épaisseur. Nous limitons cette valeur à 60% de la limite élastique de l'acier S235.

Enfin, nous imposons une troisième contrainte pour éviter de perdre le bénéfice de l'optimisation en raideur de la séquence n°1. Pour cela, nous nous assurons d'une dégradation limitée des coefficients de la matrice de raideur où intervient le tétraèdre (D_{33}, E_{11}, E_{22}) en imposant à ces coefficients une valeur au moins égale à 80% de leur valeur initiale.

Le problème d'optimisation à cinq variables se reformule ainsi :

$$\begin{aligned} \min_{e_i,\alpha_{1_i},\rho_{1_i},\alpha_{2_i},\rho_{2_i}} \quad & M_i \\ \text{s.t.} \quad & CF \geqslant 15 \\ & \frac{\sigma_{max}}{f_y} \leqslant 0.6 \\ & \frac{(D_{33})_{seq_2}}{(D_{33})_{seq_1}} \geqslant 0.8 \\ & \frac{(E_{11})_{seq_2}}{(E_{11})_{seq_1}} \geqslant 0.8 \\ & \frac{(E_{22})_{seq_2}}{(E_{22})_{seq_1}} \geqslant 0.8 \end{aligned} \tag{3.76}$$

L'optimisation de la séquence n°2 s'organise de façon similaire à celle de la première séquence. Le premier cycle d'optimisation à cinq variables continues se compose d'une première partie (1000 itérations) calculée avec l'algorithme DIRECT, suivie d'une seconde partie (500 itérations) avec l'algorithme COBYLA.

Ensuite, nous menons un second cycle d'optimisation à quatre variables continues (α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i}) en fixant la variable d'épaisseur de la tôle e à la valeur disponible en catalogue immédiatement supérieure à celle déterminée dans le premier cycle d'optimisation.

Les convergences des optimisations à cinq variables pour les vingt tétraèdres T_i sont tracées en figure 3.89.

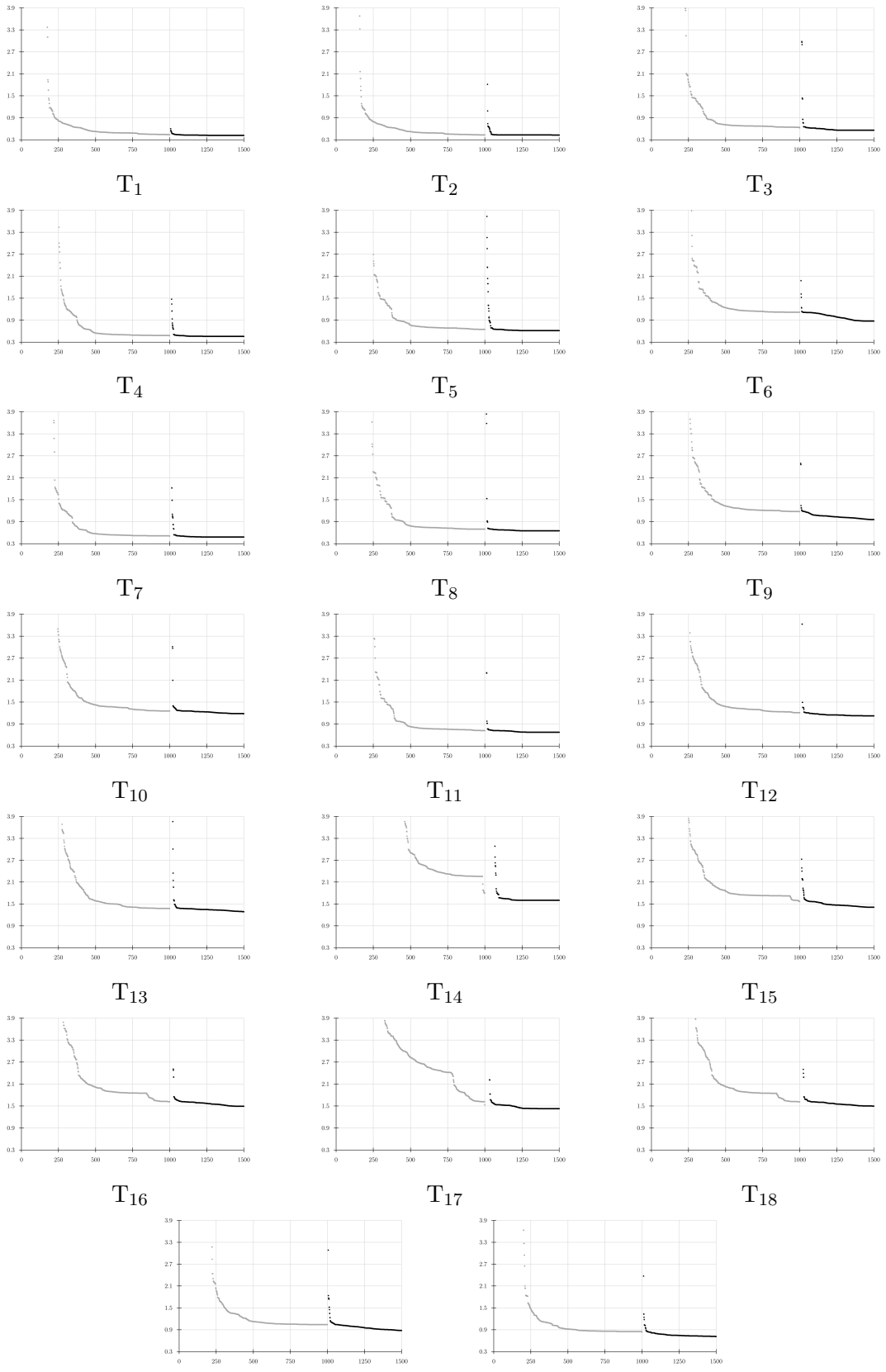


FIGURE 3.89 – Séquence n°2 : convergence des optimisations

3.3.3.3 Vérifications et résultats

Les résultats des séquences n°1 et 2 sont assemblées au sein d'un unique modèle pour générer la morphologie finale.

La séquence totale de l'optimisation a convergé vers une solution satisfaisant les contraintes prescrites (tableau 3.34) en 66000 itérations, soit environ 15h et 47 minutes. La masse totale de la structure est de 5.4 t soit un ratio d'environ 50 kg/m^2.

Les résultats montrent que la contrainte sur le ratio de raideur des coefficients D_{33}, E_{11} et E_{22}, est déterminante, car tous les tétraèdres atteignent cette valeur. On peut interpréter cette tendance, dans notre application de structure en porte-à-faux, comme une contrainte de raideur plus exigeante que celle de résistance. Pour représenter cette contrainte, une valeur unique est reportée dans le tableau : $\%(D_{33}E_{11}E_{22}) = \min\left(\frac{(D_{33})_{seq_2}}{(D_{33})_{seq_1}}, \frac{(E_{11})_{seq_2}}{(E_{11})_{seq_1}}, \frac{(E_{22})_{seq_2}}{(E_{22})_{seq_1}}\right)$.

On remarque aussi naturellement que la contrainte portant sur le cintrage devient prépondérante pour les tétraèdres présentant des épaisseurs de tôle les plus importantes, par exemple pour les tétraèdres T_{10} et T_{12} - T_{18}

Le critère de flèche est bien respecté et proche de la contraire imposée avec une valeur maximale mesurée en extrémité de porte-à-faux de 16.6 mm en tenant compte de la contribution de la forme et de l'épaisseur des tétraèdres. Au terme de la première séquence d'optimisation, la flèche mesurée était de 11.8 mm, soit une augmentation d'environ 40%, valeur comprise entre la recommandation CM66 et celle adoptée ici.

Enfin, même si elles sont toutes respectées, il est plus difficile de conclure sur la question des contraintes de facteurs de flambement, car d'une part ces valeurs n'évoluent pas de manière continue en fonction des paramètres (changement de mode de flambement) et d'autre part, elles ont été sensiblement modifiées suite à l'intégration de la contribution des tétraèdres dans le calcul de la déformée.

Les valeurs prises par les paramètres suite à l'optimisation sont indiquées dans le tableau 3.35 pour les vingt tétraèdres différents ($T_i, i \in \{1 \dots 20\}$) et tracées dans les histogrammes de la figure 3.90. La distribution de la morphologie fait ressortir deux tendances cohérentes : à mesure que les tétraèdres s'approchent des appuis, le coefficient de remplissage μ et l'épaisseur e des tôles augmentent pour répondre à une sollicitation en cisaillement croissante. La figure 3.91 montre les cartographies des paramètres μ et e ; les appuis sont représentés par des sphères noires.

Par ailleurs, il semble que la morphologie concave des tétraèdres soit assez constante avec $\alpha_1 \sim 0.17\pi$ et $\alpha_2 \sim 0.36\pi$. La courbure est sans doute limitée par la contrainte de cintrage élastique et le ratio de raideur. Les valeurs assez dispersées de ρ_1 et ρ_2 sont plus difficiles à interpréter ; la fonction à optimiser et les contraintes sont vraisemblablement peu sensibles à ces paramètres dans la gamme de variation des autres paramètres.

Enfin, on procède à la vérification de la résistance des sections transversales des membrures telle que définie dans l'Eurocode NF EN 1993 et trouvons une utilisation maximale de 42%. Pour les tôles des tétraèdres, nous utilisons le rapport entre les contraintes de Von Mises et la limite d'élasticité et trouvons une utilisation maximale de 73%.

TABLE 3.34 – Valeurs des fonctions et des contraintes après optimisation

	M[kg]	CF[-]	$\frac{\sigma_{max}}{f_y}$[-]	$\%(D_{33}E_{11}E_{22})$[-]
Global	5402	–	–	–
T_1	–	37.7	0.388	0.803
T_2	–	12.5	0.589	0.803
T_3	–	17.7	0.308	0.802
T_4	–	21.1	0.477	0.802
T_5	–	32.3	0.230	0.802
T_6	–	20.9	0.579	0.801
T_7	–	23.6	0.449	0.802
T_8	–	32.9	0.214	0.802
T_9	–	28.5	0.474	0.802
T_{10}	–	25.5	0.519	0.801
T_{11}	–	31.2	0.213	0.801
T_{12}	–	37.9	0.538	0.801
T_{13}	–	24.0	0.536	0.802
T_{14}	–	19.9	0.588	0.801
T_{15}	–	30.5	0.501	0.801
T_{16}	–	21.9	0.553	0.801
T_{17}	–	19.5	0.501	0.801
T_{18}	–	27.1	0.550	0.801
T_{19}	–	30.1	0.144	0.802
T_{20}	–	48.2	0.242	0.802

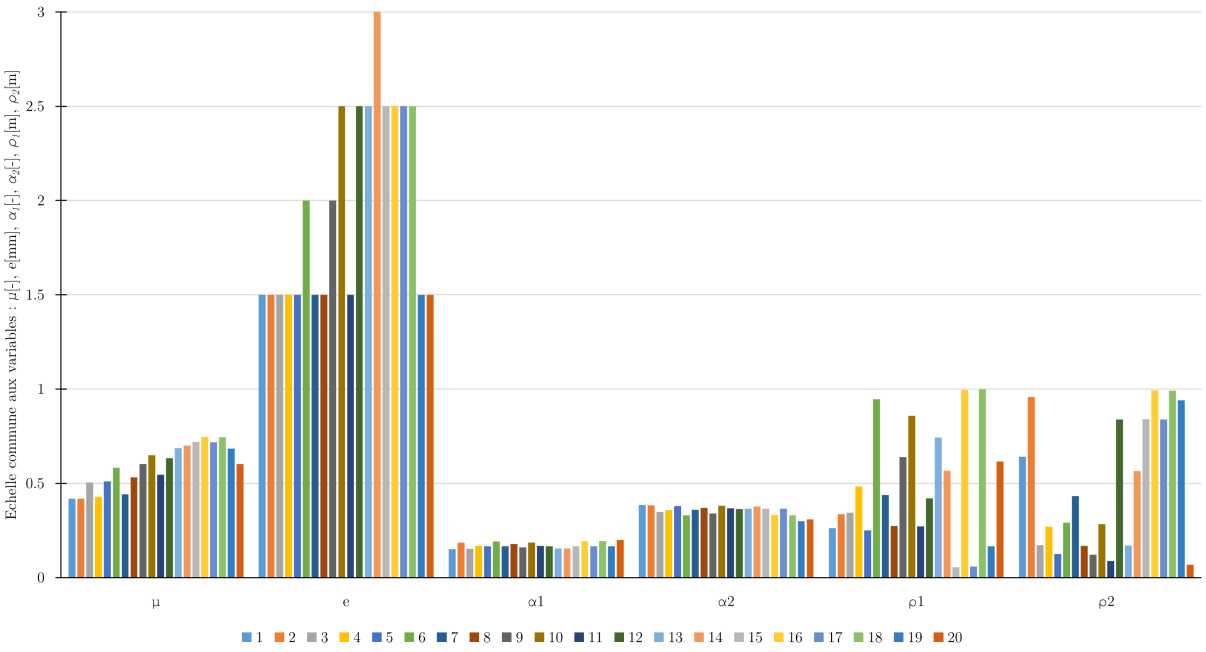
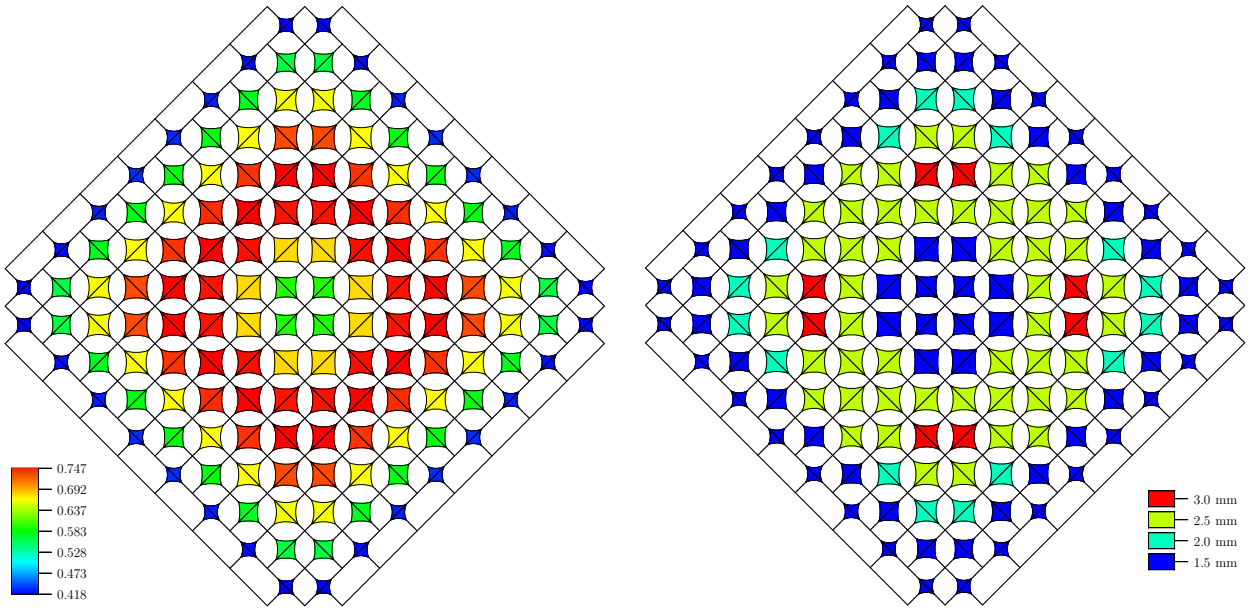


FIGURE 3.90 – Valeurs des paramètres des tétraèdres



(a) Coefficient de remplissage μ (b) Épaisseur e

FIGURE 3.91 – Cartographie des paramètres

TABLE 3.35 – Valeurs des paramètres après optimisation

	h[m]	L_c[mm]	μ_i[-]	e_i[mm]	α_{1_i}[-]	ρ_{1_i}[m]	α_{2_i}[-]	ρ_{2_i}[m]
Global	0.604	–	–	–	–			
Global	–	60	–	–	–			
T_1	–	–	0.42	1.5	0.15π	0.08	0.39π	0.19
T_2	–	–	0.42	1.5	0.19π	0.10	0.38π	0.29
T_3	–	–	0.50	1.5	0.15π	0.10	0.35π	0.05
T_4	–	–	0.43	1.5	0.17π	0.15	0.36π	0.08
T_5	–	–	0.51	1.5	0.17π	0.08	0.38π	0.04
T_6	–	–	0.58	2.0	0.19π	0.29	0.33π	0.09
T_7	–	–	0.44	1.5	0.17π	0.13	0.36π	0.13
T_8	–	–	0.53	1.5	0.18π	0.08	0.37π	0.05
T_9	–	–	0.60	2.0	0.16π	0.19	0.34π	0.04
T_{10}	–	–	0.65	2.5	0.19π	0.26	0.38π	0.09
T_{11}	–	–	0.55	1.5	0.17π	0.08	0.37π	0.03
T_{12}	–	–	0.64	2.5	0.17π	0.13	0.36π	0.25
T_{13}	–	–	0.69	2.5	0.16π	0.22	0.37π	0.05
T_{14}	–	–	0.70	3.0	0.16π	0.17	0.38π	0.17
T_{15}	–	–	0.72	2.5	0.17π	0.02	0.37π	0.25
T_{16}	–	–	0.75	2.5	0.20π	0.30	0.33π	0.30
T_{17}	–	–	0.72	2.5	0.17π	0.02	0.37π	0.25
T_{18}	–	–	0.75	2.5	0.19π	0.30	0.33π	0.30
T_{19}	–	–	0.69	1.5	0.17π	0.05	0.30π	0.28
T_{20}	–	–	0.60	1.5	0.20π	0.19	0.31π	0.02

3.3.4 Conclusion

Les structures spatiales, qui sont composées d'un nombre important d'éléments, peuvent tirer parti de la variation morphologique de leurs composants pour augmenter leurs capacités structurelles. De nombreux paramètres sont donc nécessaires pour décrire et optimiser la géométrie de l'ouvrage.

Cette partie propose une méthode d'optimisation alternative à celle développée pour le prototype, car inopérante quand le nombre de paramètres en jeu devient trop important. Cette méthode, basée sur l'observation du rôle des différents paramètres dans le comportement mécanique de la structure, propose de séquencer plusieurs optimisations avec un nombre réduit de paramètres en s'appuyant sur des modèles plus légers ou locaux. La stratégie développée est appliquée à une structure en porte-à-faux avec 144 modules dépendant de 122 paramètres.

La première séquence de la méthode optimise la masse de la structure sous contrainte de raideur en agissant sur les paramètres des membrures (h, μ_i et la section des membrures). Le modèle utilisé est un modèle global à barres. Pour alléger encore le modèle, il est proposé de remplacer l'optimisation individuelle des paramètres μ_i par celle d'une fonction scalaire à deux variables. La seconde séquence de la méthode optimise la masse de chaque tétraèdre sous contrainte de résistance en agissant sur les paramètres des tétraèdres (e_i, α_{1_i}, ρ_{1_i}, α_{2_i}, ρ_{2_i}).

La forme de la structure optimisée montre une distribution des modules en cohérence avec le chargement et le système d'appuis.

Deux pistes d'améliorations sont envisagées pour parfaire la démarche proposée ici.

Dans le travail proposé, la séquence n°1 s'appuie sur un modèle à barres à cause des limitations imposées par l'environnement d'analyse mécanique utilisé. Cette séquence pourrait avantageusement profiter des résultats du modèle à plaque équivalent développé en partie 3.2 en faisant l'économie de la modélisation détaillée et d'une partie du temps de calcul. Cela implique de mettre en place une plateforme dotée d'algorithmes d'optimisation couplés à un logiciel de calcul aux éléments finis avancé, comme Abaqus, permettant de renseigner les données de raideur de plaque.

Pour la séquence n°2, il serait intéressant d'explorer la piste des expérimentations numériques pour la détermination du facteur de flambement d'un module pour un jeu de paramètres donné. Cela représente, certes, un investissement initial important en temps de calcul pour réaliser les expérimentations nécessaires à l'établissement de la surface de réponse, mais une fois le modèle établi, l'optimisation sur une fonction (polynomiale) sera bien plus économe que sur un modèle aux éléments finis.

Le système proposé pourrait encore gagner en généralité en questionnant certaines hypothèses initiales.

L'optimisation de la structure est actuellement conduite sous un chargement unique, vertical. Souvent cas de charge dominant pour le type de structure envisagée, celle-ci peut néanmoins se montrer sensible aux chargements asymétriques. Il serait donc utile d'introduire la possibilité de définir plusieurs chargements ou des combinaisons de charges au sein de la procédure d'optimisation.

La géométrie, en dalle plane aux membrures orthogonales, développée ici n'est pas un impératif. Les modules tétraédriques peuvent s'accommoder de nappes courbes, éventuellement de hauteur structurelle variable. Dans ce cas, la distribution des membrures sur les surfaces courbes est cruciale afin de conserver de bonnes propriétés constructives pour une couverture composée, par exemple, de panneaux quadrangulaires plans ou de bandes développables.

Enfin, le système hybride barres/surfaces, basé ici sur la concaténation de pyramides et

de tétraèdres, pourrait faire l'objet de recherches sur des topologies de cellules et des pavages spatiaux alternatifs.

Conclusion

Les propriétés géométriques des surfaces développables leur confèrent de nombreux avantages constructifs : grande surface déployée malgré un stockage et un transport très compacts, large spectre morphologique, malgré une mise en œuvre faisant preuve d'une grande économie de moyen.

Ces caractéristiques ont orienté naturellement l'emploi des surfaces développables vers une fonction d'enveloppe, car la souplesse appréciée pour leur mise en forme semble les compromettre pour des usages structurels. Cependant, une analyse morpho-structurelle atteste de réelles contributions des surfaces développables pour les cinq paramètres de conception identifiés : *Forme*, *Force*, *Structure*, *Matériau* et *Technologie*. Mais cette analyse constate également que les surfaces développables peinent à trouver une place centrale dans le processus de projet, pénalisées par leur manque d'intégration dans l'outillage du concepteur, aussi bien pour les modélisations géométriques que mécaniques.

Le potentiel structurel des surfaces développables est cependant mis en évidence par la fabrication du prototype *Metal Euplectella Folie* où celles-ci tiennent une place à part entière grâce à la mise en place d'outils de modélisation paramétriques intégrant à la fois contraintes géométriques et mécaniques. Cette structure expérimentale propose d'explorer la mise en forme auto-contrainte de bandes développables aux formes libres sur le principe du tube hélicoïdal. Les principaux résultats obtenus sont la possibilité de générer des formes tubulaires tridimensionnelles complexes aux capacités structurelles avérées et cela, au moyen d'une mise en forme à faible énergie, sans gabarit, ni plan de montage et dans un temps d'assemblage réduit.

Conjointement aux études bibliographiques, les réflexions autour du prototype ont amené à se pencher sur la question de la nature géométrique de la jonction entre deux surfaces développables à bords quelconques : le rapiéçage courbe.

Il est tout d'abord traité d'un point de vue géométrique en s'appuyant sur l'étude de l'article de Duncan & Duncan [110] sur le pli courbe, sous-cas du rapiéçage courbe où deux surfaces développables partagent un bord courbe commun dans leur configuration développée. Les travaux sur le pli sont illustrés puis généralisés à une configuration quelconque : en utilisant les résultats classiques de géométrie différentielle, les équations complètes sont établies pour prévoir la géométrie d'une surface si la géométrie de l'autre surface et des deux bords à raccorder sont connus.

L'étude de la géométrie du rapiéçage courbe est approfondie en proposant une définition

de la courbure moyenne et gaussienne localisées dans les courbes de jonction des géométries semi-discrètes. Ces formulations s'expriment simplement en fonction des courbures géodésiques pour la courbure gaussienne et de l'angle entre les plans tangents pour la courbure moyenne. La cohérence avec les théories déjà établies de la géométrie différentielle lisse et discrète est vérifiée et les relations du pli courbe s'interprètent bien comme un cas particulier de celles nouvellement établies.

Enfin, l'étude géométrique du rapiéçage courbe se conclut par la recherche de formes développables fermées présentant certaines régularités géométriques : les dForms à courbure gaussienne constante. Pour cela, le matériel théorique développé précédemment est réinvesti dans ce problème de nature géométrique globale. Par des considérations topologiques basées sur le théorème de Gauss-Bonnet, nous identifions deux familles de solutions, la première à partir de patrons de découpe symétriques (groupe diédral D_N), la seconde à partir de patrons de découpe asymétriques.

Dans le premier cas, les symétries du problème permettent d'accéder à la description complète de la forme tridimensionnelle et à l'expression explicite de la courbure et de la torsion de la courbe de rapiéçage.

Dans le second cas, la contribution se focalise essentiellement sur la génération des patrons de découpe à assembler, les formes tridimensionnelles étant obtenues par maquette physique ou simulation numérique. Afin de produire les patrons de découpe asymétriques répondant à la contrainte de courbure gaussienne constante, les courbes circulaires par morceaux sont étudiées et les conditions nécessaires et suffisantes de fermeture établies en généralisant les travaux de Banchoff et Giblin [258]. Grâce à ces résultats, il est possible de générer par exemple par optimisation, une première solution respectant simultanément la contrainte de courbure gaussienne constante et la double condition de fermeture des deux patrons de découpe. Puis, à partir de cette solution choisie comme initialisation, une famille de dForms asymétriques est générée par la méthode du flot géométrique animé par la minimisation du flot de Willmore.

La mécanique du rapiéçage courbe bénéficie des développements sur les formes fermées développables menés précédemment et est abordée à travers l'étude d'un système structurel à double nappe hybride constitué de membrures linéaires et de modules de cisaillement surfaciques. Au sein de cette structure spatiale, les modules de cisaillement prennent la forme de tétraèdres à faces développables qui, selon leur position, peuvent optimiser leur taille et leur forme pour améliorer le comportement structurel du système tout en minimisant la quantité de matière engagée. Un objectif technologique visant à simplifier les connexions à branches multiples habituellement rencontrées dans les structures à double nappe motive également cette recherche.

Un prototype à échelle 1, nommé *SSDSC* pour *Space Structure with Developable Shear Components* est conçu et fabriqué pour tester ces hypothèses. La connexion linéaire des modules tétraédriques sur les membrures est une alternative crédible aux assemblages ponctuels épurés des structures réticulées tant du point de vue technologique que structurel. En particulier, la courbure des faces des tétraèdres permet de multiplier par quatre le coefficient de charge critique de flambement par rapport à une structure similaire sans courbure, et cela sans dégrader les autres performances de la structure (masse, raideur). Deux campagnes de mesures (déplacements et fréquences propres) sont réalisées *in situ* et montrent une très bonne prédictibilité des modèles aux éléments finis, ce qui permet de conduire les approfondissements de l'étude en se basant exclusivement sur des simulations numériques. En revanche, les méthodes d'optimisations développées pour la conception du prototype interrogent quant à sa capacité

à être transposée à des structures de plus grande ampleur en raison du temps de convergence nécessaire pour les algorithmes d'optimisation globale appliqués sur des modèles aux éléments finis complets.

Une première proposition tient dans la possibilité de s'affranchir de la modélisation détaillée par la formulation d'un modèle équivalent. Un modèle de plaque épaisse orthotrope de type Reissner-Mindlin est proposé pour simuler le comportement en raideur de la structure spatiale. En s'appuyant sur l'hypothèse que les deux éléments constitutifs (membrures/tétraèdre) d'un volume élémentaire représentatif apportent deux contributions distinctes et découplées, les principes d'homogénéisation sont appliqués dans une approche combinée : la contribution des membrures est donnée par un calcul analytique alors que celle des tétraèdres s'appuie sur un calcul aux éléments finis approchés par la méthode des surfaces de réponses. Puis les deux parties sont assemblées dans une matrice de raideur globale. La qualité du modèle équivalent a été testée en l'implémentant au sein d'un modèle aux éléments finis et en confrontant les résultats à ceux d'un modèle complet. Les résultats sont globalement très satisfaisants, en dépit d'hypothèses simplificatrices de modélisation qui limitent cependant le domaine de validité du modèle équivalent. Des mesures correctives consistant à enrichir le modèle équivalent ou à augmenter les coefficients de sécurité ont été proposées en conséquence.

Une seconde proposition tient dans la possibilité de s'affranchir de l'optimisation globale appliquée à l'ensemble du modèle et à l'ensemble des paramètres. Grâce à l'observation de l'implication des différents paramètres dans le comportement mécanique de la structure, il est possible de scinder l'optimisation globale en deux séquences, chacune basée sur un nombre plus réduit de paramètres et des modèles plus légers ou locaux. La première séquence optimise la masse de la structure sous contrainte de raideur en utilisant un modèle complet à barres alors que la seconde optimise individuellement la masse des tétraèdres sous contrainte de résistance.

Ainsi, les travaux sur le rapiéçage courbe menés au cours de cette thèse commencent-ils à compléter le diagramme morpho-structurel de René Motro et nous convoquons une dernière fois les cinq paramètres, individuellement ou en couplage, afin de dégager de nouvelles pistes de réflexion.

Tout d'abord, le paramètre *Matériau*, qui a montré toute sa pertinence dans sa déclinaison en acier pour la réalisation de formes tubulaires raidies ou de structures spatiales, pourrait faire l'objet d'investigations informées, notamment, par la question environnementale. Quel est l'impact de telles constructions ? Est-il possible d'en améliorer le bilan carbone par le choix du matériau et de sa mise en œuvre ? Quid de l'intégration, dès la conception, de principes de déconstruction et de réemploi de parties de la structure ?

Cette dernière hypothèse suppose sans doute de s'éloigner du paradigme de la pièce unique pour tenter de trouver des principes de modularité des composants. En prolongeant les recherches sur les paramètres *Forme* et *Technologie*, des pistes allant dans ce sens sont envisageables. Comme le proposent Duncan & Duncan pour le pli courbe, il serait intéressant d'identifier des configurations particulières de distribution des règles, au sein des surfaces assemblées, occasionnant des régularités dans la géométrie du rapiéçage courbe ; une courbe de rapiéçage plane permettrait la mise en place d'un profil de connexion continu de géométrie simple, ou encore un angle de rapiéçage constant donnerait lieu à des pièces de connexion répétitives. D'autre part, sous quelles conditions peut-on approcher une surface complexe à double courbure avec un nombre fini et recombinable de bandes développables ?

Contrairement à la géométrie du rapiéçage qui a été abordée dans sa généralité, l'aspect mécanique est approché par l'étude de cas d'une structure spatiale et le problème est traité par la

mise en place d'un méta-modèle. Cette vision macroscopique des paramètres *Force* et *Structure* pourrait être complétée par une étude entrant davantage dans l'intimité de la matière et des phénomènes physiques en présence. Cela permettrait de mieux comprendre le rôle éventuel de rigidification que pourrait jouer le rapiéçage courbe au sein du système structurel.

L'ensemble des outils et méthodes développées ici permet d'ouvrir la voie au développement d'applications architecturales en tirant profit des propriétés géométriques et mécaniques des surfaces développables et du rapiéçage courbe. L'outil de génération par flot des dForms intègre actuellement deux surfaces reliées par une couture à courbure gaussienne constante, mais le modèle pourrait s'enrichir afin d'intégrer des dispositions architecturales et techniques variées. Il serait intéressant d'augmenter le nombre de surfaces à rapiécer et d'étendre ces principes à des contours ouverts pour les appliquer, par exemple, à des configurations de couvertures. De plus, l'introduction d'une courbure gaussienne variable, définie par optimisation, devrait profiter du couplage morpho-structurel et permettre d'influencer significativement le comportement mécanique des surfaces rapiécées.

ANNEXE A

Tableaux de cas du rapiéçage courbe

L'annexe A compile de façon exhaustive tous les cas de figures pouvant être rencontrés lors du rapiéçage courbe de deux surfaces développables.

Les huit configurations géométriques possibles de la surface σ_1, exprimées par la valeur de l'angle β_1, traduisent la combinaison des signes des courbures géodésique κ_{g_1} et normale κ_{n_1}. Elles sont consignées dans le tableau 2.1. Le signe de la courbure géodésique κ_{g_2} génère deux cas supplémentaires qui, croisés avec les huit précédents, donnent au total les seize combinaisons qui sont présentées dans les pages suivantes.

Pour une question de lisibilité, les diagrammes de courbure ne sont pas légendés, mais reprennent le code couleur du diagramme des courbures (Fig. 2.21) rappelé ci-dessous :

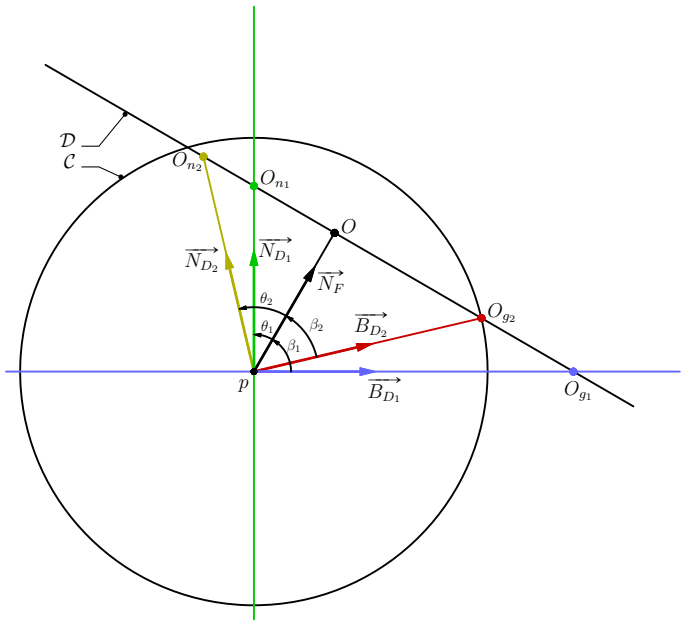


FIGURE A.1 – Diagramme des courbures de σ_1 et σ_2

TABLE A.1 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi, -\pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

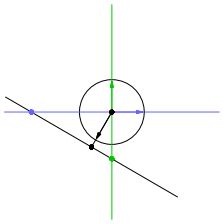
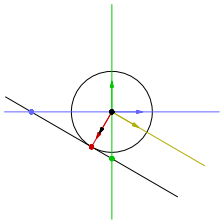
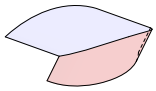
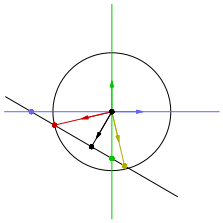
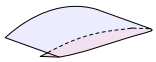
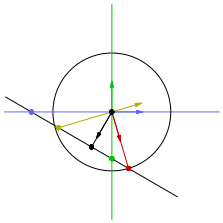
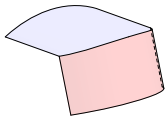
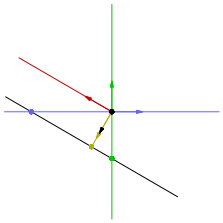
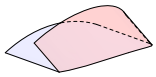
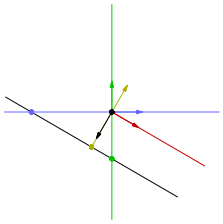
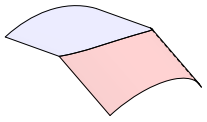
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.2 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi, -\pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

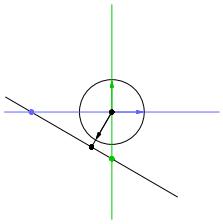
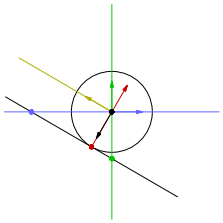
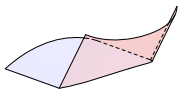
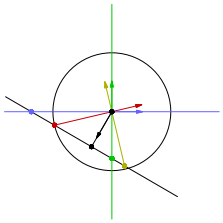
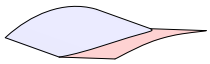
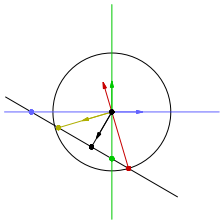
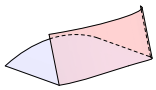
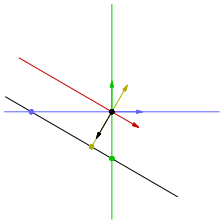
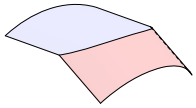
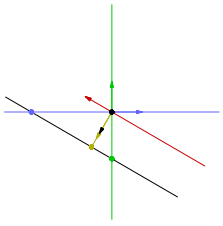
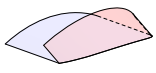
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.3 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = -\pi/2$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

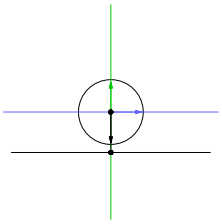
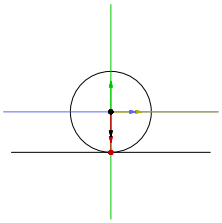
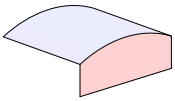
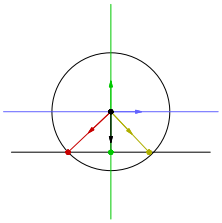
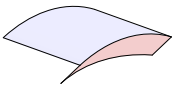
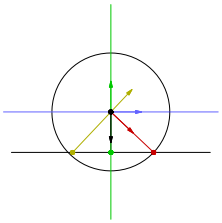
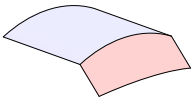
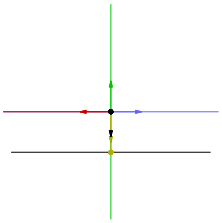
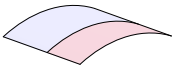
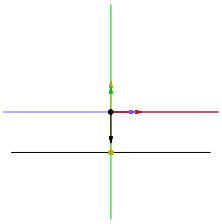
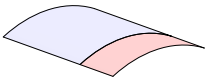
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.4 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = -\pi/2$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

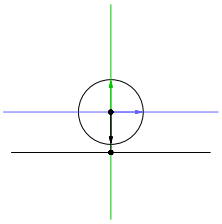
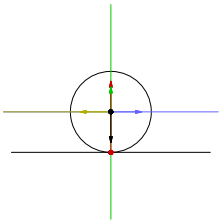
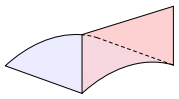
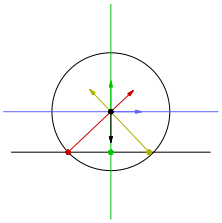
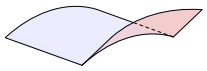
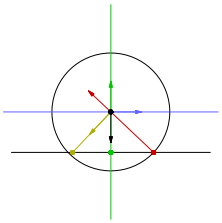
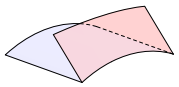
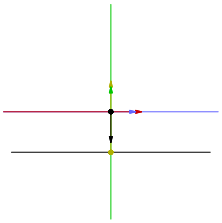
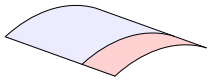
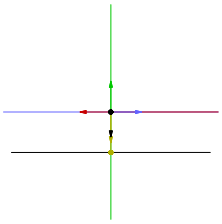
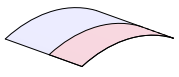
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.5 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi/2, 0[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

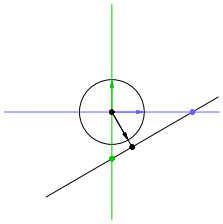
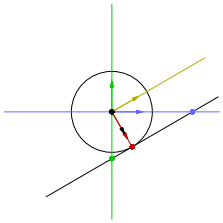
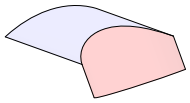
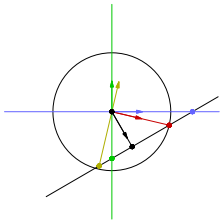
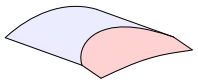
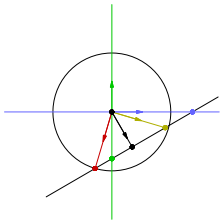
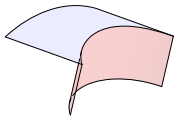
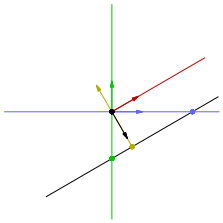
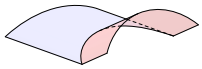
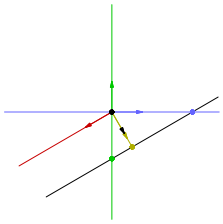
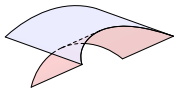
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.6 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi/2, 0[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

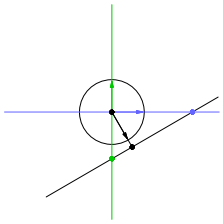
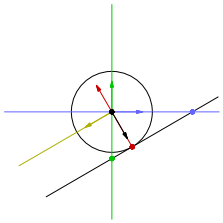
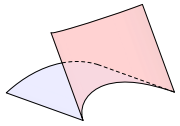
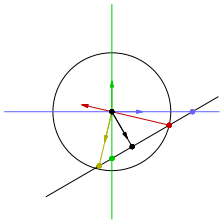
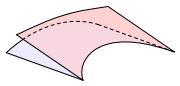
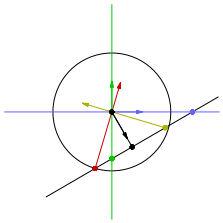
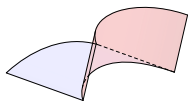
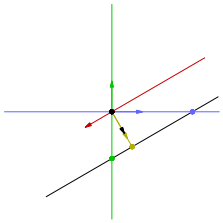
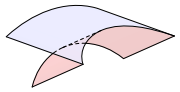
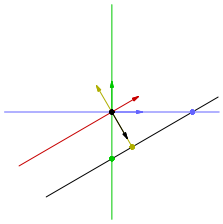
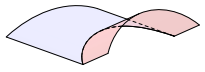
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.7 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = 0$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

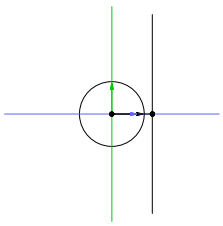
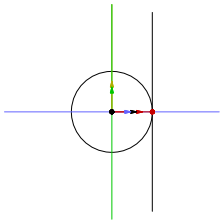
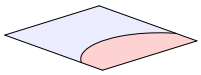
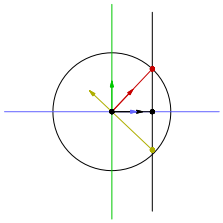
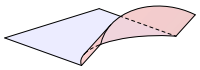
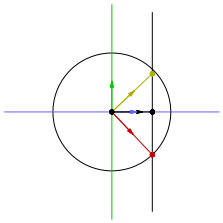
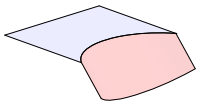
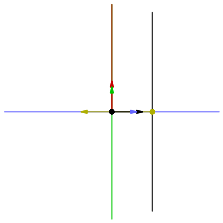
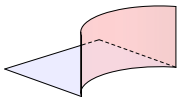
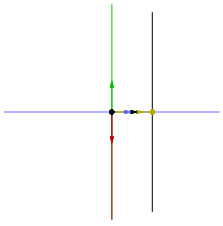
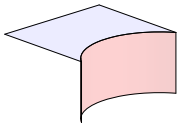
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.8 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = 0$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

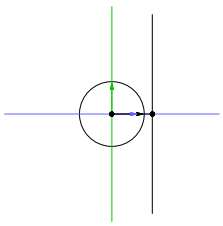
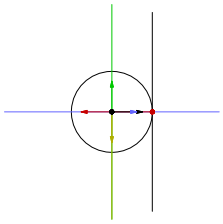
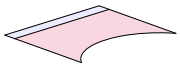
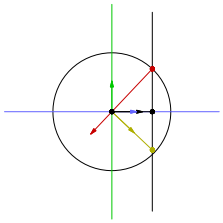
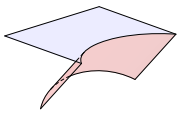
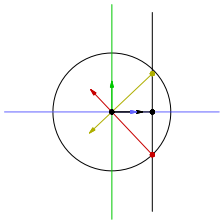
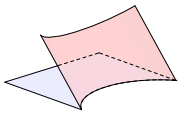
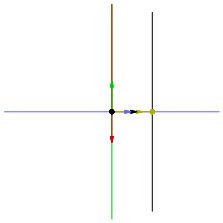
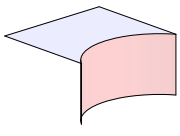
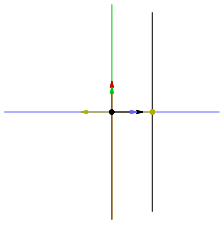
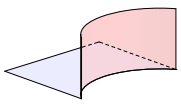
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.9 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

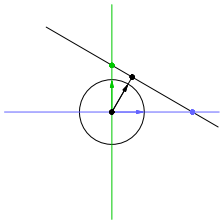
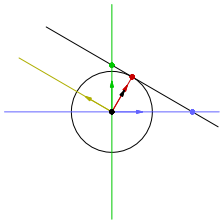
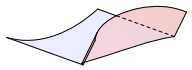
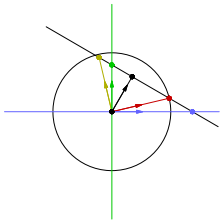
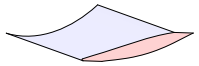
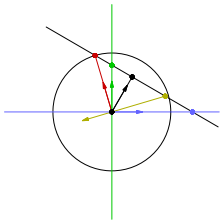
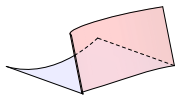
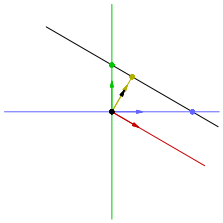
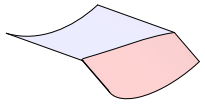
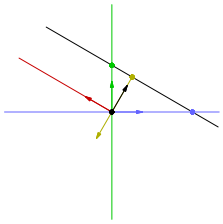
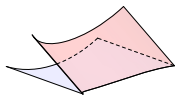
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.10 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

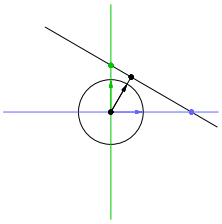
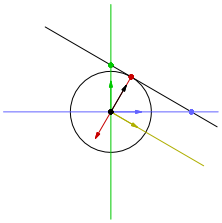
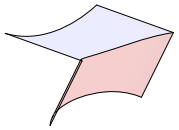
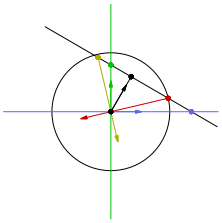
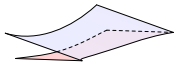
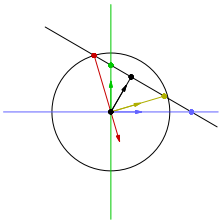
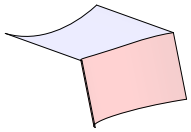
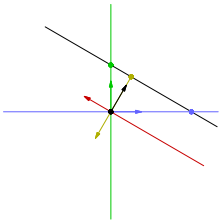
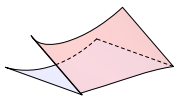
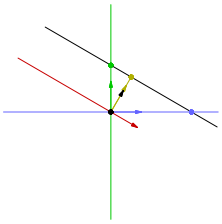
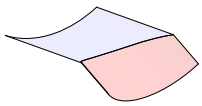
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} =$ -1		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} =$ -1		

TABLE A.11 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi/2$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

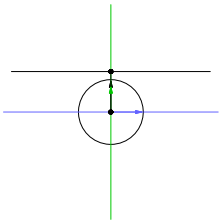
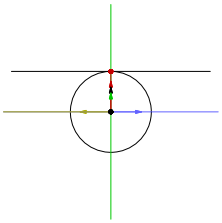
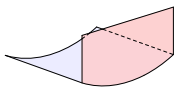
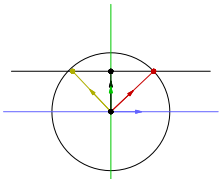
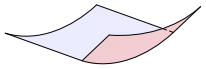
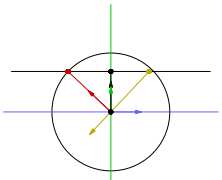
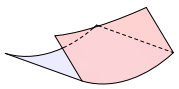
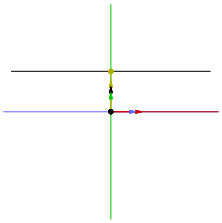
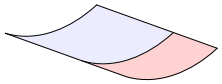
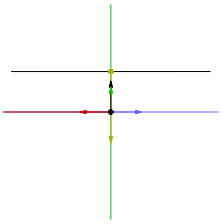
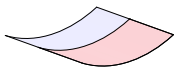
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.12 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi/2$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

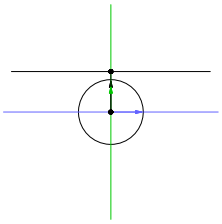
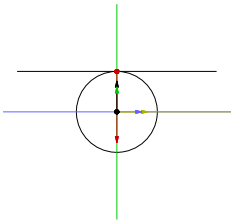
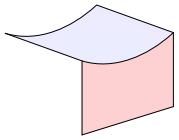
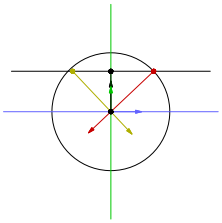
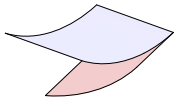
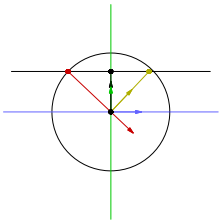
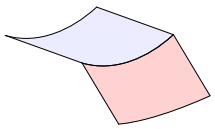
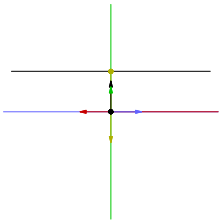
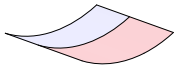
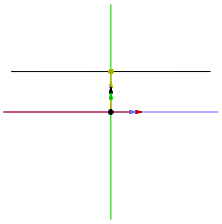
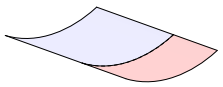
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.13 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]\pi/2, \pi[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

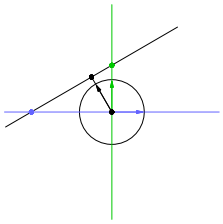
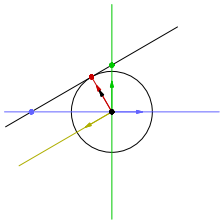
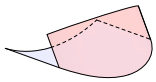
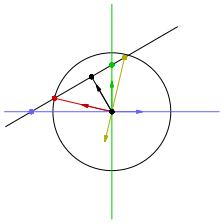
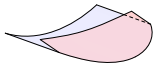
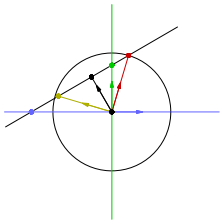
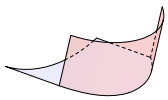
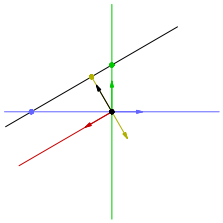
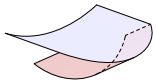
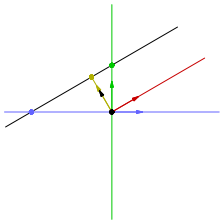
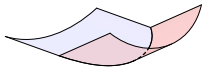
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.14 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]\pi/2, \pi[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

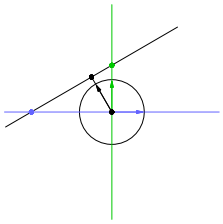
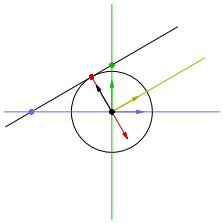
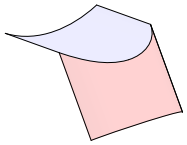
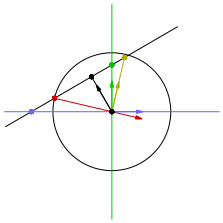
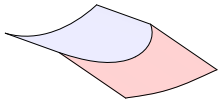
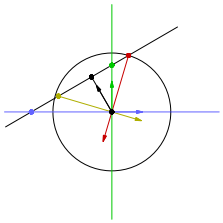
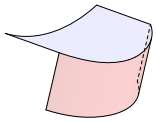
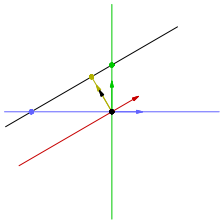
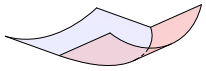
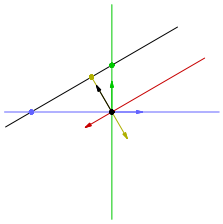
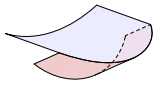
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.15 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$

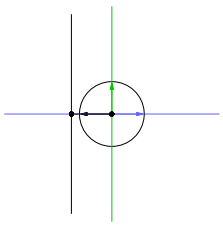
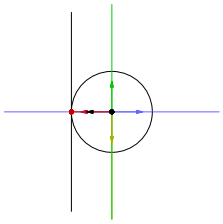
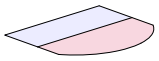
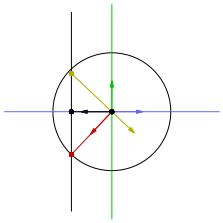
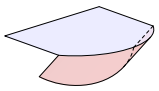
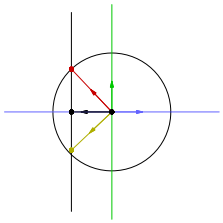
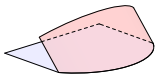
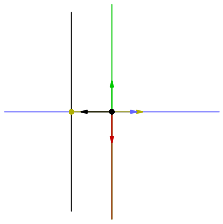
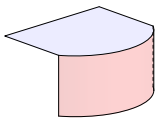
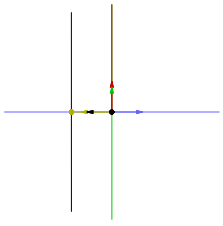
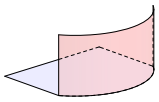
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

TABLE A.16 – Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$

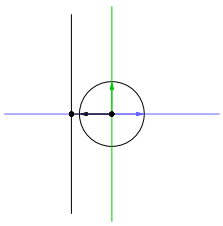
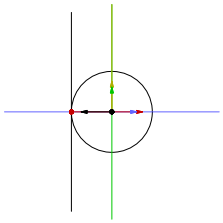
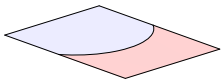
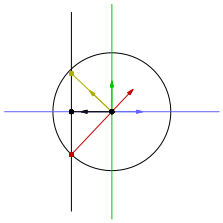
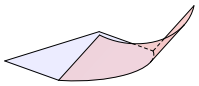
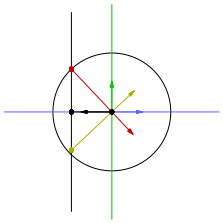
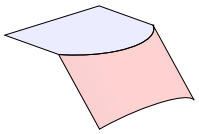
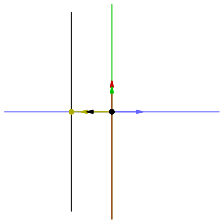
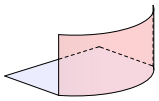
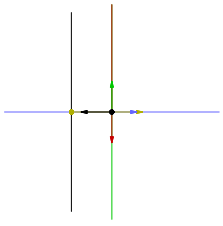
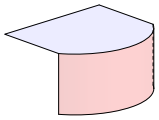
		Diagramme	Surface σ_1 et σ_2
Cas 1	-		-
Cas 2	$s_{\beta_2} = 0$		
Cas 3a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 3b	$s_{\beta_2} = -1$		
Cas 4a	$s_{\beta_2} = +1$		
Cas 4b	$s_{\beta_2} = -1$		

Table des figures

1 Façonnage d'une maquette en plâtre grâce à un gabarit réglé [5] 1
2 Franchissements sculptés par la recherche de performances mécaniques 2
3 Mises en forme robotisées 3

1.1 Surfaces développables : de l'origami à l'architecture
(a) https://imgur.com/gallery/6uBQL
(b) https://architizer.com/blog/practice/details/masterclass/ 5
1.2 Surfaces développables : construction navale, aéronautique et automobile
(a) Photographie : AFP
(b) Photographie : Lindner Fotografie
(c) Photographie : Alf van Beem 6
1.3 Processus de débillardage à la cintreuse 7
1.4 Paramétrages de courbes
(a) https://codedelaroute.io/blog/borne-kilometrique-autoroute/
(b) https://books.openedition.org/editionscnrs/docannexe/image/2753/img-1.jpg 8
1.5 Description d'une courbe spatiale par le trièdre de Frenet 10
1.6 Courbe plane et diagramme de courbure signée 11
1.7 Surface d'Enneper, courbes isoparamétriques et courbe quelconque définie sur la surface 12
1.8 Courbures de Darboux illustrées par les rotations d'un avion 15
1.9 Application de Gauss 16
1.10 Définition des courbures principales par un plan normal mobile 17
1.11 Classification des surfaces selon leur courbure gaussienne 19
1.12 Repères de définition d'une bande développable 20
1.13 Bande développable normale 21
1.14 Classification des surfaces développables selon la distribution des règles 22
1.15 Eros
http://lalvanistudio.com/sculpture/gallery/ 23
1.16 Raffinement de quadrangles plans vers une bande développable 24
1.17 Paramétrage par un double réseau orthogonal de lignes géodésiques 24
1.18 Premières intuitions de Léonard Euler 25
1.19 Simulation d'un drapeau flottant au vent basée sur un modèle de surface inextensible [63] 26
1.20 Discrétisation d'une forme à double courbure selon le type de panneaux et la densité de maillage [39] 27

1.21 L'art des surfaces développables
(a) Photographie : SIAE
(b) https://ilhankoman.blogspot.com/
(c) Photographie : Sébastien Le Gourriérec 28
1.22 Œuvres monumentales développables
(a) Photographie : Bill Jacobson Studio
(b) https://www.carloborer.ch/424 28
1.23 Surfaces développables dans le design
(a) https://www.conranshop.fr/gj-bow-chair.html
(b) Photographie : Ron Arad 29
1.24 Vue générale sur le premier étage de la Tour Eiffel
Image : Agence Moatti & Rivière 29
1.25 Paramétrisation de la surface de la façade en fonction de deux variables [82] . 30
1.26 Calepinage final et discrétisation de la façade en bandes développables [82] . . 31
1.27 Éléments constructifs de la façade
(a) Photographie : Niccolò Baldassini
(b) Photographie : Nicolas Leduc 31
1.28 Principe de géométrie et d'assemblage pour un montant de façade
Modélisation 3d et images : Nicolas Leduc
Maquette et photographies : Niccolò Baldassini & Nicolas Leduc 32
1.29 Diagramme des paramètres morpho-structurels 33
1.30 Surfaces cylindriques 34
1.31 Réalisations à géométries cylindriques circulaires
(a) Photographie : Lode Van de Velde
(b) Photographie : Apple 34
1.32 Façade vitrée de la Samaritaine
https://www.frener-reifer.com/references-fr/la-samaritaine/ 35
1.33 Surfaces coniques 35
1.34 Réalisations à géométries coniques
(a) Photographie : Jean-Michel Sordello
(b) Photographie : JiPR
(c) Photographie : Annik Wetter 36
1.35 Surfaces de translation : l'enclos des Hippopotames, zoo de Berlin [91] 36
1.36 Réalisations à géométries homothétiques et de rotation
(a) Photographie William Nicholson
(b) Photographie Nathan Reading 37
1.37 Surfaces de translation développables
(a) https://www.rfr.fr/projets/gare-tgv-de-belfort-montbeliard
(b) https://youtu.be/iCAGlu4vPog 38
1.38 Surfaces homothétiques et de rotation développables
(a) https://www.archiexpo.fr/prod/alucobond/product-1616-1154387.html
(b) https://www.archiexpo.fr/prod/alucobond/product-1616-1424711.html . . 38
1.39 Surface d'égale pente 39
1.40 Réalisations à géométrie d'égale pente
(a) Photographie William
(b) D'après [98] 40

1.41 Pavillon Minima|Maxima
Photographie : NAARO 41
1.42 Réalisations à partir de bandes développables rectilignes
(a) D'après [104]
(b) Photographie : Martin Ley 41
1.43 Flexion en grand déplacement d'une carte magnétique
Photographie : Nicolas Leduc 42
1.44 Considérations énergétiques pour une plaque rectangulaire 43
1.45 Système Isoflex [128] 44
1.46 Extraits du brevet de Amde M. Wolde-Tinsae [131]
Method of forming a skeletal dome structure in situ 45
1.47 Band Shell
Photographies : ©RFR 46
1.48 Caissons raidis en aluminium de la Fondation Louis Vuitton
Photographies : Africa Gracia ©T\E\S\S 46
1.49 Diagramme d'Ashby autour des matériaux utilisés pour le cintrage élastique . 47
1.50 Réalisations en verre cintré à froid
(a) Photographie : Jacques Raynaud
(b) Photographie : Richard Kohler 48
1.51 One Ocean Thematic Pavilion
Photographie : SOMA 49
1.52 Découpe de pièces uniques
(a) D'après [284]
(b) https://www.itke.uni-stuttgart.de/research/icd-itke-research-pavilions/icd-itke-research-pavilion-2011/ 50
1.53 Système de couverture Bemo®
(a) https://www.bemo.com/en/special-profiles-for-standing-seam-system
(b) D'après [145]
(c) https://www.baudinchateauneuf.com/realisation/zenith-tarmac-a-chateauroux-36/ 50
1.54 Système *Zip Shape* [148] 51
1.55 Mise en forme de cônes métalliques [151] 51
1.56 Mise en forme par pliage de panneaux composites type Alucobond®
(a) D'après [152]
(b) https://www.archiexpo.fr/prod/alucobond/product-1616-2207339.html . . 52
1.57 Mise en forme des panneaux en BFUP de la Fondation Louis Vuitton [153] . . 52
1.58 Discontinuité des panneaux dans le plan
(a) ©Museo Soumaya
(b) https://www.archiexpo.fr/prod/zahner/product-67352-560581.html 53
1.59 Discontinuité des panneaux hors plan
Photographie : Hufton + Crow 53
1.60 Plusieurs formes atteignables par la cinématique du pli courbe [155] 54
1.61 Type de rationalisation pratiquée selon le contexte de projet 56
1.62 La Grande Coupole de l'Observatoire de Meudon
Jean-Christophe Benoist
Didier Raux 57

1.63 Musée de la Préhistoire de Jeonjok
Modélisation 3d : Nicolas Leduc ©RFR
Photographies : ©XTU 57
1.64 Gare TGV de Strasbourg
©RFR 58
1.65 Géométrie de la verrière
©RFR 58
1.66 Processus de fabrication du verre cintré
©RFR 59
1.67 Maquettes pendantes de formes funiculaires [167] 60
1.68 Pavillons réalisés par cintrage élastique
(a) https://www.itke.uni-stuttgart.de/research/icd-itke-research-pavilions/icd-itke-research-pavilion-2010/
(b) https://www.itke.uni-stuttgart.de/research/icd-itke-research-pavilions/icd-itke-research-pavilion-2015-16/ 61
1.69 Détail du pavillon Hygroskin [180] 61
1.70 Inspirations formelles de bâtiments à formes complexes
(a) http://www.bubblemania.fr/bulle-fondation-vuitton-frank-gehry/
Croquis : Frank O. Gehry, https://www.fondationlouisvuitton.fr/fr
Photographie : Iwan Baan
(b) Photographie : Xiazhi 62
1.71 Oct Design Museum
https://www.archdaily.com/244804/oct-design-museum-studio-pei-zhu 62
1.72 Cité du Vin
Photographie : Patrick Janicek
https://www.cmpbois.com/articles/arbonis-bordeaux-cite-civilisations-vin.html 63
1.73 Démarche de rationalisation géométrique
Modélisation 3d : Nicolas Leduc ©RFR 63
1.74 Élévation 65
1.75 Maquette illustrant le principe du tube hélicoïdal 66
1.76 Applications architecturales de tubes spiralés en carton
(a) https://www.pointp.fr/p/gros-oeuvre-bpe-voirie-tp/tube-coffrage-carton-sonotube-standard-diametre-300mm-longueur-A1436126
(b) Photographie : Denis Bin 66
1.77 Tubes métalliques spiralés
(a) https://www.indiamart.com/proddetail/ss-spiral-pipe-15722093033.html
(b) http://www.unilandindustry.com/57-ssaw-steel-pipe.html 67
1.78 Processus de fabrication d'un tube hélicoïdal 67
1.79 Euplectella Aspergillum [199] 68
1.80 Principe du tube hélicoïdal à forme libre 69
1.81 Comparaison des formes tridimensionnelles et de leur développé 70
1.82 Surface de référence 71
1.83 Double réseau d'hélices 71
1.84 Subdivision du domaine pour la définition des hélices 72
1.85 Etude des angles entre les deux réseaux 72
1.86 Quatre bandes développables 73

1.87 Forme du déterminant pour deux courbes simples . . . 73
1.88 Forme du déterminant pour deux hélices . . . 74
1.89 Quatre normalies quasi-développables . . . 74
1.90 Éléments constructifs . . . 75
1.91 Prototype n°1 : modélisation et réalisation
Photographie et modélisation 3d : Nicolas Leduc . . . 76
1.92 Banc d'essai des fixations dans la disposition alternée dessus/dessous . . . 77
1.93 Etapes de fabrication du prototype n°1
Photographies : Nicolas Leduc . . . 77
1.94 Prototype n°2
(a) : Photographie : Dimitri Durand ©Viry . . . 78
1.95 Cinématique d'assemblage . . . 79
1.96 Patrons de découpe montrant une des quatre bandes de dix-huit panneaux et une des quatre bandes de dix-neuf raidisseurs . . . 80
1.97 Séquence de montage du prototype
Photographies : Nicolas Leduc . . . 81
1.98 Installation dans la cour de la Maréchalerie de l'École d'Architecture de Versailles
Photographies 1 à 4 : Nicolas Leduc
Photographie 5 : Olivier Baverel . . . 82
1.99 *Metal Euplectella Folie* sur le campus de l'École des Ponts
Photographie de jour : Claire Bésinet
Photographie de nuit : Hélène Peter ©Viry . . . 83
1.100 Vues intérieures
Photographies : Claire Bésinet . . . 84
1.101 Structure spiralée à trois branches . . . 85

2.1 Architectures pionnières dans l'utilisation des surfaces développables
(a) Photographie : Wladyslaw
(b) Photographie : Nicolas Janberg . . . 89
2.2 Réflexions d'un cylindre général par rapport à un plan . . . 90
2.3 David Huffman et son pliage courbe *Hexagonal column with cusps* [210] . . . 91
2.4 Œuvres d'art faisant usage du pli courbe
(a) https://erikdemaine.org/curved/MoMA/
(b) https://www.flickr.com/photos/richardsweeney/201989218/in/photostream/ . . . 92
2.5 Design et pli courbe
(a) https://www.luminaire.fr/le-klint-172-suspension-pliee-a-la-main.html?sku=6086184&utm_medium=organic&utm_source=google&utm_campaign=feed-google-shopping&utm_content=bild&utm_term=6086184
(b) http://www.milgo-bufkin.com/algorhythms/index.html . . . 93
2.6 Tony Wills présentant plusieurs modèles de dForms [226] . . . 93
2.7 Assemblage numérique de deux ellipses orientées à 45° . . . 94
2.8 Description de la géométrie en plan . . . 96
2.9 Description de la géométrie tridimensionnelle de σ_1 . . . 97
2.10 Diagramme des courbures par rapport à σ_1 . . . 98

2.11 Diagramme des courbures par rapport à σ_1 et σ_2 . . . 99
2.12 Procédé industriel d'ensachage vertical
http://www.acheter-vendre-machines.fr/2013/07/le-concept-des-ensacheuses-verticales-et-horizontales.html . . . 101
2.13 Description de la géométrie en plan . . . 102
2.14 Courbe de Viviani [242] . . . 102
2.15 La surface σ_1, définie en plan, s'enroule autour d'un cylindre d'axe vertical . . . 104
2.16 Cinématique de pliage selon une courbe de Viviani . . . 108
2.17 Configurations de rapiéçages selon le signe de la courbure . . . 110
2.18 Diagramme des courbures par rapport à σ_1 . . . 111
2.19 Nature des solutions possibles selon les valeurs de courbures prescrites . . . 113
2.20 Détermination des caractéristiques géométriques de σ_2 . . . 114
2.21 Diagramme des courbures de σ_1 et σ_2 . . . 115
2.22 Rapiéçages circulaires plans . . . 120
2.23 Rapiéçages circulaires coniques . . . 121
2.24 Morphing de la courbe γ_{2d_2} . . . 122
2.25 Les deux rapiéçages possibles pour la courbe de rive $\gamma_{2d_{2f}}$ . . . 123
2.26 Du pliage au rapiéçage courbe . . . 123
2.27 Formule de Steiner . . . 125
2.28 Steiner chez les Shadok
Les Shadoks - Coffret 5 DVD, Création Jacques Rouxel . . . 125
2.29 M Le Mammouth - Le Fabuleux Voyage
Photographie : Nicolas Leduc . . . 126
2.30 Définition géométrique des surfaces développables par morceaux . . . 127
2.31 Formule de Steiner : contribution des faces, arêtes et sommets . . . 127
2.32 Fusion des sommets et des arêtes dans la courbe de rapiéçage lors du raffinement dans une direction du maillage . . . 128
2.33 Définition des repères de Darboux et Frenet au point p de la courbe de rapiéçage 129
2.34 Lecture de la nature de la courbure gaussienne du rapiéçage par sa localisation sur le tore osculateur . . . 130
2.35 dForm basé sur la figure du Vesica Piscis : maquette physique . . . 132
2.36 Définition paramétrique du dForm basé sur la figure du Vesica Piscis . . . 133
2.37 Découpage de la sphère selon des polyèdres à bords courbes . . . 133
2.38 dForm et patrons de découpe constitués de deux arcs de cercles et deux segments de droites . . . 134
2.39 Nomenclature des angles et des distances . . . 136
2.40 Cinématique d'assemblage . . . 139
2.41 dForm défini par ses sections horizontales polygonales . . . 140
2.42 Courbure de la courbe de rapiéçage en fonction de la longueur d'arc . . . 143
2.43 Église Saint-Charles-aux-Quatre-Fontaines [253] . . . 144
2.44 Quelques courbes circulaires par morceaux en architecture et en design
(a) D'après [257]
(b) https://www.mobilier-design-occasion.fr/luminaire/lampes-a-poser/lampe-pizzakobra.html
(c) Image : Nicolas Leduc ©RFR
http://www.kyeongin.com/main/view.php?key=20190902010000487 . . . 145

2.45 Les quatre types de jonction entre deux arcs . . . 146
2.46 Ellipses et évolutes . . . 146
2.47 Nomenclature des CCM . . . 147
2.48 Famille de CCM obtenue à partir de décalages orthogonaux . . . 149
2.49 Localisation du point p_i . . . 150
2.50 Jeu de Tantrix®
Photographie : Karel Julien Cole . . . 152
2.51 Nomenclature CCM fermée . . . 152
2.52 $\int \kappa \, ds = 2\pi\mathcal{N}$: condition nécessaire, mais non suffisante de fermeture . . . 153
2.53 Conditions de fermeture duales non respectées pour une courbe primale quelconque . . . 155
2.54 Optimisation pour la fermeture des courbes primale et duale . . . 156
2.55 CCM et évolute fermées appartenant au groupe cyclique C_N . . . 157
2.56 Flot isométrique de l'évolute préservant la fermeture de la CCM associée . . . 158
2.57 Nomenclature pour une courbe polygonale fermée soumise au flot isométrique . 160
2.58 Représentation tridimensionnelle des espaces des configurations et des contraintes 163
2.59 Minimisation de l'énergie de Willmore par flot isométrique appliqué au lapin de Stanford . . . 164
2.60 dForm asymétrique généré à partir d'une initialisation par optimisation . . . 169
2.61 dForm asymétrique généré à partir d'une initialisation symétrique . . . 171

3.1 The Eden Project : The Biomes
(a) Photographie : Glenn Beanland
(b) Photographie : Steve Keiretsu . . . 176
3.2 Structures spatiales d'Alexander Graham Bell
(a) Photographie : Bettmann Archive / Getty Images
(b) Photographie : Bell Collection . . . 177
3.3 Biosphère
Photographie : Magnum Photos . . . 178
3.4 Structures spatiales à forme libre
(a) ©Zaha Hadid Architects
(b) https://www.guggenheim-bilbao.eus/fr/le-batiment/la-construction . . . 178
3.5 Nœuds d'assemblage de systèmes modulaires
(a) Photographie : Glyn Halls
(b) https://www.subtilitas.site/post/463428483/space-frame
(c) Photographie : Glyn Halls . . . 179
3.6 Piscine de Neckarsulm [289] . . . 180
3.7 Centre commercial de Westfield Londres [290] . . . 180
3.8 Structures en bois basées sur la figure du paraboloïde hyperbolique
(a) D'après [292]
(b) Photographie : Trevor Ryan Patt . . . 181
3.9 Vue perspective du prototype . . . 182
3.10 Structures spatiales à l'Exposition Universelle de 1967
(a) https://numerique.banq.qc.ca/patrimoine/details/52327/2753838
(b) Photographie : Takato Marui . . . 183
3.11 Pavage semi-régulier composé d'octaèdres et de tétraèdres . . . 183

3.12 Principes morphologiques de la double nappe . . . 184
3.13 Expérimentations structurelles de systèmes réticulés Robert Le Ricolais [128] . 185
3.14 Paramétrisation du tétraèdre . . . 185
3.15 Variation géométrique des tétraèdres en fonction de θ, φ et ρ . . . 186
3.16 Cinq typologies de tétraèdres . . . 187
3.17 Conditions d'appuis et chargement . . . 188
3.18 Étapes du maillage . . . 189
3.19 Etude de convergence pour le tétraèdre plat . . . 190
3.20 Etude de convergence pour le tétraèdre courbe . . . 190
3.21 Cartographies 3d et coupes à $\rho = cste$ de la fonction A_{tc} . . . 192
3.22 Cartographies 3d et coupes à $\rho = cste$ de la fonction δ_x . . . 193
3.23 Premiers modes de flambement pour le tétraèdre t_3 . . . 193
3.24 Cartographies 3d & coupes à $\rho = cste$ de la fonction CF . . . 194
3.25 Cartographie croisée montrant les tétraèdres satisfaisant la triple contrainte . . 195
3.26 Conditions d'appuis appliquées à un quart du modèle . . . 197
3.27 Fonction barrière d'inégalité pour différentes valeurs de p . . . 198
3.28 Comparaison entre modèles discret et continu . . . 200
3.29 Définition géométrique des tétraèdres convexe et concave . . . 200
3.30 Impact de la courbure sur les performances du modèle . . . 201
3.31 Plans de découpe du module n°1 . . . 202
3.32 Séquence de montage de la rive courbe . . . 203
3.33 Séquence de montage du prototype . . . 204
3.34 Prototype levé et appuyé sur seize étais périphériques
Photographie : Guillaume Galpin . . . 205
3.35 Détail d'exécution de l'assemblage double-cornières/tétraèdres . . . 205
3.36 Coupe sur l'installation du prototype sur le campus des Ponts et Chaussées . . 206
3.37 Séquence du montage aux Ponts et Chaussées . . . 208
3.38 Montage du prototype avec les équipes du Laboratoire Navier et de l'entreprise Viry
Photographies 1 à 4 : Nicolas Leduc
Photographie 5 : Cyril Douthe
Photographie 6 : François Lecompte . . . 209
3.39 Vue intérieure et de détail
Photographies : Nicolas Leduc . . . 210
3.40 Protocole d'acquisition : série n°1 . . . 211
3.41 Série n°1 : comparaison mesures / modèle aux éléments finis . . . 212
3.42 Protocole d'acquisition : série n°2 . . . 213
3.43 Série n°2 : comparaison mesures / modèle aux éléments finis . . . 214
3.44 Mesures de fréquences propres du site . . . 215
3.45 Mesures de fréquences propres de la structure . . . 216
3.46 Déformations associées aux modes 1 à 4 . . . 217
3.47 Proposition de montage alternatif . . . 219
3.48 Réponse mécanique d'un tétraèdre sous chargement de cisaillement . . . 220
3.49 Identification du VER au sein de la structure . . . 224
3.50 Définition du VER . . . 225
3.51 Définition de repères liés au VER . . . 225

3.52 Définition des points de référence . . . 226
3.53 Repère local des poutres . . . 226
3.54 Conditions de liaisons du module . . . 228
3.55 Mécanisme à un degré de liberté au sein du VER . . . 228
3.56 Mécanisme à un degré de liberté au sein de la structure . . . 229
3.57 L'essentiel de l'énergie de déformation en flexion des membrures se trouve dans la partie libre des poutres (en vert) . . . 230
3.58 Étapes de détermination des coefficients de la matrice de raideur relative aux membrures . . . 231
3.59 Longueurs et système d'appuis équivalent . . . 233
3.60 Cellule 4×4 modules . . . 235
3.61 Cinématique du cisaillement γ_{xz} . . . 238
3.62 Variation du coefficient E_{11} en fonction d'un paramètre . . . 247
3.63 Cinématique de la déformation membranaire ε_{xx} . . . 248
3.64 Variation du coefficient A_{11} en fonction d'un paramètre . . . 252
3.65 Variation du coefficient A_{12} en fonction d'un paramètre . . . 253
3.66 Cinématique de la déformation membranaire ε_{xy} . . . 254
3.67 Cinématique de la courbure χ_{xx} . . . 258
3.68 Cinématique de la courbure χ_{xy} . . . 262
3.69 Variation du coefficient D_{33} en fonction d'un paramètre . . . 268
3.70 Paramétrisation de la double cornière . . . 272
3.71 Échantillonnage de cent points de la suite de Sobol' en dimension 2 . . . 274
3.72 Surfaces de réponse des caractéristiques de la section en double cornière . . . 274
3.73 Graphiques comparant valeurs analytiques et celles obtenues par régression . . . 278
3.74 Paramétrisation du tétraèdre selon le plan de symétrie . . . 279
3.75 Courbes des valeurs limites des coefficients R^2 et γ_{Rd} selon le degré du polynôme 285
3.76 Classification des coefficients des polynômes réponses . . . 288
3.77 Courbes d'évolution des indicateurs R^2 et γ_{Rd} en fonction de la troncature de la fonction polynomiale . . . 289
3.78 Etude de convergence du modèle Abaqus . . . 293
3.79 Abaqus : configuration du modèle . . . 294
3.80 Résultats du banc d'essais n°1 . . . 295
3.81 Résultats du banc d'essais n°2 . . . 297
3.82 Allure de la déformée : Banc d'essai n°2, test de concavité n°5 . . . 297
3.83 Comparaison de la morphologie des tétraèdres selon le type d'optimisation . . . 301
3.84 Repérage des modules et des appuis . . . 302
3.85 Vue perspective de la structure en porte-à-faux . . . 303
3.86 Calcul des coefficients μ_i par une fonction polynomiale . . . 304
3.87 Séquençage algorithmique global / local . . . 305
3.88 Séquence n°1 : convergence de l'optimisation . . . 305
3.89 Séquence n°2 : convergence des optimisations . . . 307
3.90 Valeurs des paramètres des tétraèdres . . . 310
3.91 Cartographie des paramètres . . . 310

A.1 Diagramme des courbures de σ_1 et σ_2 . . . 321

Liste des tableaux

1.1 Conditionnement de la bande développable en fonction du type de courbe suivie et de l'angle α . . . 21
1.2 Lignes de courbure et distribution des courbures maximales évoluant en fonction de la forme de la surface [82] . . . 30
1.3 Discrétisation des surfaces de translation, homothétiques et de rotation . . . 37
1.4 Rayon minimum selon l'épaisseur et la nuance de l'acier avant plastification . . . 70
1.5 Banc d'essais des détails de fixation : prototype n°1 . . . 76

2.1 Configuration de la surface σ_1 selon la valeur de l'angle β_1 . . . 112
2.2 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 117
2.3 Famille de dForms à deux paramètres . . . 135
2.4 Etude de cas de la relation entre les angles α_{e_i} et α_{c_i} : étude de cas . . . 151

3.1 Etude de convergence . . . 189
3.2 Comparaisons des aires et des épaisseurs . . . 191
3.3 Comparaison des performances mécaniques selon le type du tétraèdre . . . 195
3.4 Valeurs des fonctions et des contraintes après optimisation . . . 199
3.5 Valeurs des paramètres après optimisation . . . 199
3.6 Comparaison des performances mécaniques des tétraèdres convexe et concave à épaisseur constante . . . 201
3.7 Contribution de la courbure aux performances mécaniques du prototype . . . 201
3.8 Écarts absolus et relatifs entre mesures et modèle aux éléments finis . . . 213
3.9 Fréquences propres et masses modales, modèle aux éléments finis . . . 217
3.10 Repère local des poutres . . . 227
3.11 Conditions d'appuis des cellules . . . 237
3.12 Premières fonctions polynomiales à deux variables, degré 1 à 4 . . . 273
3.13 Coefficients de régression : aire de la section S . . . 275
3.14 Coefficients de régression : moment quadratique I_y . . . 275
3.15 Coefficients de régression : moment quadratique I_z . . . 275
3.16 Coefficients de régression : moment quadratique I_p . . . 275
3.17 Coefficients de détermination S, I_y, I_z, I_p en fonction du degré du polynôme . . . 276
3.18 Graphiques de corrélation comparant valeurs expérimentales et valeurs prédites 277
3.19 Domaine de variation des variables dimensionnelles et adimensionnelles . . . 281
3.20 Valeurs des paramètres fixes . . . 281
3.21 Etude de convergence de D_{33} et E_{11} : résolution du maillage . . . 282
3.22 Etude de convergence de D_{33} et E_{11} : courbes . . . 282
3.23 Nombre de paramètres inconnus selon le degré du polynôme . . . 283
3.24 Valeurs limites des coefficients R^2 et γ_{Rd} selon le degré du polynôme . . . 284

3.25 D_{33} : Evaluation de la réponse polynomiale . . . 286
3.26 E_{11} : Evaluation de la réponse polynomiale . . . 287
3.27 Valeurs des indicateurs R^2 et γ_{Rd} en fonction de la troncature de la fonction polynomiale . . . 289
3.28 Comparaison des ordres de grandeurs des raideurs D_{33} et E_{11} en fonction du paramètre μ et de la concavité du tétraèdre . . . 291
3.29 Banc d'essai n°1 : configuration des paramètres . . . 294
3.30 Banc d'essai n°1 : résultats . . . 295
3.31 Banc d'essai n°2 : configuration des paramètres . . . 296
3.32 Banc d'essai n°2 : résultats . . . 297
3.33 Comparaison des optimisations globales et séquentielle . . . 300
3.34 Valeurs des fonctions et des contraintes après optimisation . . . 309
3.35 Valeurs des paramètres après optimisation . . . 311

A.1 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi, -\pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 322
A.2 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi, -\pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 323
A.3 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = -\pi/2$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 324
A.4 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = -\pi/2$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 325
A.5 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi/2, 0[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 326
A.6 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]-\pi/2, 0[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 327
A.7 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = 0$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 328
A.8 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = 0$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 329
A.9 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 330
A.10 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]0, \pi/2[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 331
A.11 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi/2$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 332
A.12 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi/2$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 333
A.13 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]\pi/2, \pi[$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 334
A.14 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 \in]\pi/2, \pi[$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 335
A.15 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi$ et $\kappa_{g_2} \geqslant 0$ . . . 336
A.16 Configuration des surfaces σ_1 et σ_2 pour $\beta_1 = \pi$ et $\kappa_{g_2} \leqslant 0$ . . . 337

Bibliographie

[1] J. A. Ramírez, J. A. Ramŕıez et J. A. R. Miralles, *The Beehive Metaphor : From Gaudí to Le Corbusier*. Reaktion Books, 2000.

[2] M. Burry, *Scripting Cultures : Architectural Design and Programming*. John Wiley & Sons, 2011.

[3] ——, "Parametric design and the Sagrada Familia," *Arq : Architectural Research Quarterly*, vol. 1, n°. 4, p. 70–81, 1996.

[4] T. Fischer, "Geometry rationalization for non-standard architecture," *Architecture Science*, vol. 5, n°. 5, p. 25–47, 2012.

[5] M. Burry, *Gaudi Unseen : Completing the Sagrada Familia*, 1er éd. Berlin : JOVIS Verlag, oct. 2007.

[6] F. Migayrou, "Architectures non standard, catalogue de l'exposition," 2003.

[7] "Applied Geometry, TU Wien." [En ligne]. Disponible : https://www.geometrie.tuwien.ac.at/geom/ig/index.php

[8] H. Pottmann, M. Eigensatz, A. Vaxman et J. Wallner, "Architectural geometry," *Computers & graphics*, vol. 47, p. 145–164, 2015.

[9] "Fabricate | Design & Making." [En ligne]. Disponible : http://www.fabricate.org/

[10] "ACM SIGGRAPH." [En ligne]. Disponible : https://www.siggraph.org/

[11] "AAG 2020." [En ligne]. Disponible : https://www.aag2020.com

[12] J. Wang, C. Jiang, P. Bompas, J. Wallner et H. Pottmann, "Discrete line congruences for shading and lighting," dans *Computer Graphics Forum*, vol. 32. Wiley Online Library, 2013, p. 53–62.

[13] N. Kotelnikova-Weiler, "Optimisation mécanique et énergétique d'enveloppes en matériaux composites pour les bâtiments," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2012.

[14] J. Vincent, "Biomimetic patterns in architectural design," *Architectural Design*, vol. 79, n°. 6, p. 74–81, 2009.

[15] V. Helm, J. Willmann, F. Gramazio et M. Kohler, "In-situ robotic fabrication : Advanced digital manufacturing beyond the laboratory," dans *Gearing up and Accelerating Cross-Fertilization between Academic and Industrial Robotics Research in Europe*. Springer, 2014, p. 63–83.

[16] D. Brander, J. A. Bærentzen, K. Clausen, A.-S. Fisker, J. Gravesen, M. N. Lund, T. B. Nørbjerg, K. H. Steenstrup et A. Søndergaard, "Designing for hot-blade cutting : Geometric approaches for high-speed manufacturing of doubly-curved architectural surfaces," dans *Advances in Architectural Geometry*. vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, 2016, p. 306–327.

[17] G. Epps, "RoboFold." [En ligne]. Disponible : https://www.robofold.com/

[18] G. Epps et S. Verma, "Curved Folding : Design to fabrication process of RoboFold," dans *Shape Modeling International*, vol. 201375, 2013.

[19] O. Baverel, J.-F. Caron, F. Tayeb et L. Du Peloux, "Gridshells in composite materials : Construction of a 300 m2 forum for the solidays' festival in Paris," *Structural engineering international*, vol. 22, n°. 3, p. 408–414, 2012.

[20] L. Du Peloux de Saint Romain, "Modeling of bending-torsion couplings in active-bending structures : Application to the design of elastic gridshells," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, déc. 2017.

[21] L. Du Peloux de Saint Romain, F. Tayeb, O. Baverel et J.-F. Caron, "Composite Gridshells, Créteil | TESS." [En ligne]. Disponible : https://www.tess.fr/focus/composite-gridshells-creteil

[22] G. Austern, I. G. Capeluto et Y. J. Grobman, "Rationalization methods in computer aided fabrication : A critical review," *Automation in Construction*, vol. 90, p. 281–293, 2018.

[23] A. Menges et T. Schwinn, "Manufacturing reciprocities," *Architectural Design*, vol. 82, n°. 2, p. 118–125, 2012.

[24] M. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.

[25] A. N. Pressley, *Elementary Differential Geometry*. Springer Science & Business Media, 2010.

[26] G. Farin, *Curves and Surfaces for Computer-Aided Geometric Design : A Practical Guide*. Elsevier, 2014.

[27] H. Pottmann et J. Wallner, *Computational Line Geometry*. Springer Science & Business Media, 2001.

[28] J.-P. Brossard, "Mécanique générale. Développement de la cinématique," *Techniques de l'ingénieur. Sciences fondamentales*, n°. A1663, p. A1663–1, 1996.

[29] Wikipedia contributors, "Première forme fondamentale," *Wikipédia*, juin 2022. [En ligne]. Disponible : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Premi%C3%A8re_forme_fondamentale&oldid=194768938

[30] ——, "Seconde forme fondamentale," *Wikipédia*, oct. 2021. [En ligne]. Disponible : https://fr.wikipedia.org/w/index.php?title=Seconde_forme_fondamentale&oldid=187364690

[31] X. Tellier, "Morphogenesis of curved strutural envelopes," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, mai 2020.

[32] R. Ferréol, "Ligne géodésique d'une surface." [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/courbes3d/lignes/geodesic.shtml

[33] ——, "Ligne asymptotique d'une surface." [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/courbes3d/lignes/asymptotic.shtml

[34] ——, “Ligne de courbure d’une surface.” [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/courbes3d/lignes/courbure.shtml

[35] C. Tang, M. Kilian, P. Bo, J. Wallner et H. Pottmann, “Analysis and design of curved support structures,” dans *Advances in Architectural Geometry*, 2016, p. 8–22.

[36] M. Konaković-Luković, P. Konaković et M. Pauly, “Computational design of deployable auxetic shells,” dans *Advances in Architectural Geometry*. Klein Publishing, 2018, p. 94–111.

[37] M. Konaković, K. Crane, B. Deng, S. Bouaziz, D. Piker et M. Pauly, “Beyond developable : Computational design and fabrication with auxetic materials,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 35, n°. 4, p. 1–11, 2016.

[38] M. Perriollat, “Paramétrisation et reconstruction des surfaces développables à partir d’images,” Thèse de doctorat, Université Blaise Pascal - Clermont II, 2008.

[39] H. Pottmann, A. Schiftner, P. Bo, H. Schmiedhofer, W. Wang, N. Baldassini et J. Wallner, “Freeform surfaces from single curved panels,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 27, n°. 3, p. 1–10, 2008.

[40] M. Rabinovich, T. Hoffmann et O. Sorkine-Hornung, “Discrete geodesic nets for modeling developable surfaces,” *ACM Transactions on Graphics (ToG)*, vol. 37, n°. 2, p. 1–17, 2018.

[41] N. Montagne, C. Douthe, X. Tellier, C. Fivet et O. Baverel, “Voss Surfaces : A Design Space for Geodesic Gridshells,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 61, n°. 4, p. 255–263, déc. 2020.

[42] E. Ghys, “Gaspard Monge, le beau, l’utile, le vrai.” [En ligne]. Disponible : http://images.math.cnrs.fr/Gaspard-Monge

[43] S. Lawrence, “Developable surfaces : Their history and application,” *Nexus Network Journal*, vol. 13, n°. 3, p. 701–714, 2011.

[44] R. Ferréol, “Surface de Darboux.” [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/surfaces/darboux/darboux.shtml

[45] ——, “Surface de Monge.” [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/surfaces/monge/monge.shtml

[46] F. Cajori, “Generalizations in geometry as seen in the history of developable surfaces,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 36, n°. 8, p. 431–437, 1929.

[47] Günter Aumann, “Interpolation with developable Bézier patches,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 8, n°. 5, p. 409–420, 1991.

[48] J. Lang et O. Röschel, “Developable (1, n)-Bézier surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 9, n°. 4, p. 291–298, 1992.

[49] C.-H. Chu et C. H. Séquin, “Developable Bézier patches : Properties and design,” *Computer-Aided Design*, vol. 34, n°. 7, p. 511–527, 2002.

[50] G. Aumann, “A simple algorithm for designing developable Bézier surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 20, n°. 8-9, p. 601–619, 2003.

[51] ——, “Degree elevation and developable Bézier surfaces,” *Computer Aided Geometric Design*, vol. 21, n°. 7, p. 661–670, 2004.

[52] M. Zhou, G. Peng, Z. Ye et J. Yang, “Design of developable surfaces by using duality between plane and point geometries,” *Jisuanji Fuzhu Sheji Yu Tuxingxue Xuebao/Journal of Computer-Aided Design and Computer Graphics*, vol. 16, n°. 10, p. 1401–1406, 2004.

[53] X.-W. Zhang et G.-J. Wang, "New algorithm for designing developable Bézier surfaces," *Journal of Zhejiang University : Science*, vol. 7, n°. 12, p. 2050–2056, 2006.

[54] L. Fernández-Jambrina, "B-spline control nets for developable surfaces," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 24, n°. 4, p. 189–199, 2007.

[55] J. Solomon, E. Vouga, M. Wardetzky et E. Grinspun, "Flexible developable surfaces," dans *Computer Graphics Forum*, vol. 31. Wiley Online Library, 2012, p. 1567–1576.

[56] T. Wolf, V. Cornillère et O. Sorkine-Hornung, "Physically-based Book Simulation with Freeform Developable Surfaces," dans *Computer Graphics Forum*, vol. 40. Wiley Online Library, 2021, p. 449–460.

[57] T. L. Kunii et H. Gotoda, "Singularity theoretical modeling and animation of garment wrinkle formation processes," *The Visual Computer*, vol. 6, n°. 6, p. 326–336, 1990.

[58] P. Decaudin, D. Julius, J. Wither, L. Boissieux, A. Sheffer et M.-P. Cani, "Virtual Garments : A Fully Geometric Approach for Clothing Design," *Computer Graphics Forum*, vol. 25, n°. 3, p. 625–634, sept. 2006.

[59] M. Chen et K. Tang, "A fully geometric approach for developable cloth deformation simulation," *The visual computer*, vol. 26, n°. 6, p. 853–863, 2010.

[60] A. Jung, S. Hahmann, D. Rohmer, A. Begault, L. Boissieux et M.-P. Cani, "Sketching folds : Developable surfaces from non-planar silhouettes," *Acm Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 34, n°. 5, p. 1–12, 2015.

[61] X. Provot, "Deformation constraints in a mass-spring model to describe rigid cloth behaviour," dans *Graphics Interface*. Canadian Information Processing Society, 1995, p. 147–147.

[62] E. Grinspun, A. N. Hirani, M. Desbrun et P. Schröder, "Discrete shells," dans *Proceedings of the 2003 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation*. Citeseer, 2003, p. 62–67.

[63] M. Bergou, M. Wardetzky, D. Harmon, D. Zorin et E. Grinspun, "A quadratic bending model for inextensible surfaces," dans *Symposium on Geometry Processing*, 2006, p. 227–230.

[64] E. English et R. Bridson, "Animating developable surfaces using nonconforming elements," dans *ACM SIGGRAPH 2008 Papers*, 2008, p. 1–5.

[65] M. Peternell, "Developable surface fitting to point clouds," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 21, n°. 8, p. 785–803, 2004.

[66] O. Faugeras et Q.-T. Luong, *The Geometry of Multiple Images : The Laws That Govern the Formation of Multiple Images of a Scene and Some of Their Applications*. MIT press, 2001.

[67] A. M. Andrew, "Multiple view geometry in computer vision," *Kybernetes*, 2001.

[68] J. S. Chalfant, "Analysis and design of developable surfaces for shipbuilding," Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 1997.

[69] C.-H. Chu et J.-T. Chen, "Characterizing degrees of freedom for geometric design of developable composite Bézier surfaces," *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, vol. 23, n°. 1, p. 116–125, 2007.

[70] F. Pérez et J. A. Suárez, "Quasi-developable B-spline surfaces in ship hull design," *Computer-Aided Design*, vol. 39, n°. 10, p. 853–862, 2007.

[71] F. Pérez-Arribas, A. Silva-Campillo et H. R. Díaz-Ojeda, “Defining developable ship surfaces considering material properties,” *Ocean Engineering*, vol. 243, p. 110164, janv. 2022.

[72] S. N. Krivoshapko, “Tangential developable and hydrodynamic surfaces for early stage of ship shape design,” *Ships and Offshore Structures*, p. 1–9, 2022.

[73] J. R. Greenwood, S. P. Magleby et L. L. Howell, “Developable mechanisms on regular cylindrical surfaces,” *Mechanism and Machine Theory*, vol. 142, p. 103584, 2019.

[74] T. G. Nelson, T. K. Zimmerman, S. P. Magleby, R. J. Lang et L. L. Howell, “Developable mechanisms on developable surfaces,” *Science Robotics*, vol. 4, n°. 27, p. eaau5171, 2019.

[75] E. Schling, “Repetitive Structures,” Thèse de doctorat, Technical University of Munich, juill. 2018.

[76] M. Eigensatz, M. Kilian, A. Schiftner, N. J. Mitra, H. Pottmann et M. Pauly, “Paneling architectural freeform surfaces,” dans *ACM SIGGRAPH 2010 Papers*, 2010, p. 1–10.

[77] M. Eigensatz, M. Deuss, A. Schiftner, M. Kilian, N. J. Mitra, H. Pottmann et M. Pauly, “Case studies in cost-optimized paneling of architectural freeform surfaces,” dans *Advances in Architectural Geometry*, vol. 2010. Springer Vienna, 2010, p. 49–72.

[78] N. Baldassini, H. Pottmann, J. Raynaud et A. Schiftner, “New strategies and developments in transparent free-form design : From facetted to nearly smooth envelopes,” *International Journal of Space Structures*, vol. 25, n°. 3, p. 185–197, 2010.

[79] R. Ferréol, “Pevsner et les Surfaces Développables.” [En ligne]. Disponible : http://www.mathouriste.eu/Surf_Regl/Surfaces_Developpables_Sculptures.html

[80] T. Akgün, “Developable sculptural forms of Ilhan Koman,” *Bridges London : Mathematics, music, art, architecture, culture*, p. 343–350, 2006.

[81] B. Gürsoy et M. Özkar, “Schematizing Basic Design in Ilhan Koman’s “Embryonic” Approach,” *Nexus Network Journal*, vol. 17, n°. 3, p. 981–1005, déc. 2015.

[82] A. Schiftner, N. Leduc, P. Bompas, N. Baldassini et M. Eigensatz, “Architectural geometry from research to practice : The eiffel tower pavilions,” dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2012, p. 213–228.

[83] N. Baldassini, N. Leduc et A. Schiftner, “Construction aware design of curved glass facades : The Eiffel Tower Pavilions,” dans *Glass Performance Days Finland (Conference Proceedings)*, 2013, p. 406–10.

[84] N. Leduc, J. Raynaud et N. Baldassini, “Project for the Eiffel Tower : Constructive Geometry,” dans *Challenging Glass*, vol. 3, 2012, p. 93.

[85] Q. Li, A. Borgart et Y. Wu, “How to Understand "Structural Morphology" ?” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 57, n°. 2, p. 145–158, 2016.

[86] M. Bagnéris, R. Motro, B. Maurin et N. Pauli, “Structural morphology issues in conceptual design of double curved systems,” *International Journal of Space Structures*, vol. 23, n°. 2, p. 79–87, 2008.

[87] M. Bagnéris, “Contribution à la conception et à la réalisation des morphologies non-standard : les formes pascaliennes comme outil,” Thèse de doctorat, Université Montpellier II, 2009.

[88] R. Mesnil, "Structural explorations of fabrication-aware design spaces for non-standard architecture," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2017.

[89] R. Motro, "An approach to structural morphology," dans *An Anthology of Structural Morphology*. World Scientific, 2009, p. 15–32.

[90] H. Pottmann, *Architectural Geometry*. Bentley Institute Press, 2007, vol. 10.

[91] J. Glymph, D. Shelden, C. Ceccato, J. Mussel et H. Schober, "A parametric strategy for free-form glass structures using quadrilateral planar facets," *Automation in construction*, vol. 13, n°. 2, p. 187–202, 2004.

[92] D. Lordick, "Intuitive design and meshing of non-developable ruled surfaces," dans *Proceedings of the Design Modelling Symposium*, 2009, p. 5–7.

[93] Y. Liu, H. Pottmann, J. Wallner, Y.-L. Yang et W. Wang, "Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces," dans *ACM SIGGRAPH 2006 Papers*, 2006, p. 681–689.

[94] R. Mesnil, C. Douthe, O. Baverel, B. Léger et J.-F. Caron, "Isogonal moulding surfaces : A family of shapes for high node congruence in free-form structures," *Automation in Construction*, vol. 59, p. 38–47, 2015.

[95] C. Jiang, C. Wang, F. Rist, J. Wallner et H. Pottmann, "Quad-mesh based isometric mappings and developable surfaces," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 39, n°. 4, p. 128–1, 2020.

[96] R. Ferréol, "Surface d'égale pente." [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/surfaces/talus/talus.shtml

[97] A. H. Abouelkheir, "Sand Tectonics : A material-based approach to architectural design and fabrication," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, juill. 2021.

[98] A. Martín-Pastor et R. García-Alvarado, "Developable Wooden Surfaces for Lightweight Architecture : Bio-Dune Pavilion," dans *Digital Wood Design*. Springer, 2019, p. 1481–1500.

[99] B. Vaudeville, M. King, S. Aubry, J. Raynaud, M. Chalaux et A. Witt, "How Irregular Geometry and Industrial Process Come Together : A Case Study of the "Fondation Louis Vuitton Pour la Création", Paris," dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2012, p. 279–294.

[100] S. Leopoldseder et H. Pottmann, "Approximation of developable surfaces with cone spline surfaces," *Computer-Aided Design*, vol. 30, n°. 7, p. 571–582, 1998.

[101] Y. Liu, W. Xu, J. Wang, L. Zhu, B. Guo, F. Chen et G. Wang, "General planar quadrilateral mesh design using conjugate direction field," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 30, n°. 6, p. 1–10, 2011.

[102] A. K. Schiftner, "Planar quad meshes from relative principal curvature lines," Thèse de doctorat, Vienna University of Technology, 2007.

[103] J. Wallner, A. Schiftner, M. Kilian, S. Flöry, M. Höbinger, B. Deng, Q. Huang et H. Pottmann, "Tiling freeform shapes with straight panels : Algorithmic methods," dans *Advances in Architectural Geometry*, vol. 2010. SpringerWein, 2010, p. 73–86.

[104] N. Meredith et J. Kotronis, "Self-detailing and self-documenting systems for wood fabrication : The Burj Khalifa," dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2012, p. 185–198.

[105] E. Schling, D. Hitrec et R. Barthel, "Designing Grid Structures Using Asymptotic Curve Networks," dans *Humanizing Digital Reality*. Springer, 2018, p. 125–140.

[106] I. Shatz, A. Tal et G. Leifman, "Paper craft models from meshes," *The Visual Computer*, vol. 22, n°. 9, p. 825–834, 2006.

[107] F. Massarwi, C. Gotsman et G. Elber, "Papercraft models using generalized cylinders," dans *15th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG'07)*. IEEE, 2007, p. 148–157.

[108] D. Julius, V. Kraevoy et A. Sheffer, "D-charts : Quasi-developable mesh segmentation," dans *Computer Graphics Forum*, vol. 24. Citeseer, 2005, p. 581–590.

[109] J. Mitani et H. Suzuki, "Making papercraft toys from meshes using strip-based approximate unfolding," *ACM transactions on graphics (TOG)*, vol. 23, n°. 3, p. 259–263, 2004.

[110] J. P. Duncan et J. L. Duncan, "Folded Developables," *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 383, n°. 1784, p. 191–205, 1982.

[111] M. Kilian, S. Flöry, Z. Chen, N. J. Mitra, A. Sheffer et H. Pottmann, "Curved folding," *ACM transactions on graphics (TOG)*, vol. 27, n°. 3, p. 1–9, 2008.

[112] P. Bisch, *Mécanique Des Coques : Théorie et Applications*. Presses des Ponts., 2013.

[113] K. P. Soldatos, "Mechanics of cylindrical shells with non-circular cross-section : A survey," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 52, n°. 8, p. 237–274, 1999.

[114] K. L. Tran, "Étude de la résistance et de la stabilité des tôles courbes cylindriques en acier : applications aux ouvrages d'art," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2012.

[115] L. S. D. Morley, "Analysis of developable shells with special reference to the finite element method and circular cylinders," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, vol. 281, n°. 1300, p. 113–170, 1976.

[116] S. N. Krivoshapko, "Static analysis of shells with developable middle surfaces," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 51, n°. 12, p. 731–746, 1998.

[117] E. Cerda et L. Mahadevan, "Confined developable elastic surfaces : Cylinders, cones and the Elastica," *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 461, n°. 2055, p. 671–700, 2005.

[118] A. Boudaoud, "Membranes élastiques et capillaires : Instabilités, singularités et autoadaptation," Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2001.

[119] R. La Magna, S. Schleicher et J. Knippers, "Bending-active plates," dans *Advances in Architectural Geometry*, vol. 2016, 2016, p. 170–87.

[120] E. H. Mansfield et P. W. Kleeman, "A Large-Deflexion Theory for Thin Plates : A Theory based on the Assumption of an Inextensional Middle Surface of the Plate," *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, vol. 27, n°. 4, p. 102–108, 1955.

[121] D. G. Ashwell, "The equilibrium equations of the inextensional theory for thin flat plates," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 10, n°. 2, p. 169–182, 1957.

[122] J. G. Simmonds et A. Libai, "Exact equations for the inextensional deformation of cantilevered plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 36, p. 631–636, 1979.

[123] Y. C. Fung et W. H. Wittrick, "A boundary layer phenomenon in the large deflexion of thin plates," *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, vol. 8, n°. 2, p. 191–210, 1955.

[124] R. de Vericourt, "Inextensional theory applied to cold bent glass built-in stress evaluation," dans *Proceedings of Glass Performance Days*, Finland, 2011, p. 377–382.

[125] V. R. Seereeram et K. A. Seffen, "Confirming inextensional theory," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n°. 19-20, p. 3439–3448, 2014.

[126] A. D. Norman, K. A. Seffen et S. D. Guest, "Morphing of curved corrugated shells," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n°. 7-8, p. 1624–1633, 2009.

[127] R. Le Ricolais, "Les tôles composées et leurs applications aux constructions légères," *Bulletin des ingénieurs civils de France*, mai 1935.

[128] M. Mimram, *Structures et Formes. Etude Appliquée à l'oeuvre de Robert Le Ricolais.* Paris : Dunod : Presses Ponts et chaussées., 1983.

[129] A. Lebée, "Homogénéisation de plaques périodiques épaisses : Application aux panneaux sandwichs à âme pliables en chevrons," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2010.

[130] J. M. Davies, "Developments in stressed skin design," *Thin-Walled Structures*, vol. 44, n°. 12, p. 1250–1260, 2006.

[131] A. M. Wolde-Tinsae, "Method of forming a skeletal dome structure in situ," Etats-Unis Brevet 4,400,927, août 1983.

[132] S. Burrows et M. Simpson, "The Stadium geometry," *The Arup Journal - The Beijing National Stadium Special Issue*, 2009.

[133] R. W. Marks et R. B. Fuller, *Dymaxion World of Buckminster Fuller.* Anchor Books, 1973.

[134] R. B. Fuller, "Self-Strutted Geodesic Plydome," Etats-Unis Brevet 2,905,113, sept. 1959.

[135] C. Douthe, J. F. Caron et O. Baverel, "Gridshell structures in glass fibre reinforced polymers," *Construction and Building Materials*, vol. 24, n°. 9, p. 1580–1589, sept. 2010.

[136] N. Kotelnikova-Weiler, C. Douthe, E. L. Hernandez, O. Baverel, C. Gengnagel et J.-F. Caron, "Materials for actively-bent structures," *International Journal of Space Structures*, vol. 28, n°. 3-4, p. 229–240, 2013.

[137] R. La Magna, "Bending-active plates : Strategies for the induction of curvature through the means of elastic bending of plate-based structures," Thèse de doctorat, Universität Stuttgart - ITKE, 2017.

[138] J. Lienhard, "Bending-active structures : Form-finding strategies using elastic deformation in static and kinetic systems and the structural potentials therein," Thèse de doctorat, Universität Stuttgart - ITKE, 2014.

[139] M. Ashby, "Designing architectured materials," *Scripta Materialia*, vol. 68, n°. 1, p. 4–7, 2013.

[140] J. Knippers, F. Scheible, M. Oppe et H. Jungjohann, "Bio-inspired Kinetic GFRP-façade for the Thematic Pavilion of the EXPO 2012 in Yeosu," dans *International Symposium of Shell and Spatial Structures*, vol. 90, 2012, p. 341–347.

[141] J. Neugebauer, M. Wallner-Novak, T. Lehner, C. Wrulich et M. Baumgartner, "Movable thin glass elements in façades," dans *Challenging Glass Conference Proceedings*, vol. 6, 2018, p. 195–202.

[142] P. Khatak, “Laser cutting technique : A literature review,” *Materials Today : Proceedings*, 2021.

[143] V. A. Nemchinsky et W. S. Severance, “What we know and what we do not know about plasma arc cutting,” *Journal of physics d : applied physics*, vol. 39, n°. 22, p. R423, 2006.

[144] A. W. Momber et R. Kovacevic, *Principles of Abrasive Water Jet Machining*. Springer Science & Business Media, 2012.

[145] M. Schmieder et P. Mehrtens, “Cladding freeform surfaces with curved metal panels—a complete digital production chain,” dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2012, p. 237–242.

[146] G. Schuh, G. Bergweiler, F. Fiedler, P. Bickendorf et C. Colag, “A review on flexible forming of sheet metal parts,” dans *2019 IEEE International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management (IEEM)*. IEEE, 2019, p. 1221–1225.

[147] M. Ando et P. H. Fleming, “A Study of Alvar Aalto’s Wood Reliefs for Furniture and Architectural Design,” *Journal of Design History*, vol. 32, n°. 2, p. 146–169, mai 2019.

[148] C. Schindler, “ZipShape–a computer-aided fabrication method for bending panels without molds,” dans *Proceedings of the eCAADe Conference*, 2008, p. 795–802.

[149] B. Satterfield, A. Preiss, D. Mavis, G. Entwistle, M. Swackhamer et M. Hayes, “Bending the Line,” dans *Fabricate 2020*. JSTOR, 2020.

[150] C. Schindler et M. S. Espinosa, “ZipShape Mouldless Bending II,” dans *eCAADe*, 2011, p. 477.

[151] “Cours sur le roulage,” janv. 2020. [En ligne]. Disponible : https://www.rocdacier.com/cours-sur-le-roulage-mise-a-jour-2020/

[152] “Alucobond - Usinage et Données Techniques.” [En ligne]. Disponible : https://alucobond.com/cms/deliver/Verarbeitungsbroschuere_F_2017_08.pdf

[153] S. Aubry, P. Bompas, B. Vaudeville, D. Corvez, T. Lagrange, P. Mazzacane et A. Brizou, “A UHPFRC cladding challenge : The fondation Louis Vuitton pour la création" Iceberg,” dans *Proceedings of International Symposium on Ultra-High Performance Fiber-Reinforced Concrete. Marseille, France*, vol. 3748, 2013.

[154] G. Technologies, “Museo Soumaya : Facade Design to Fabrication.” [En ligne]. Disponible : https://issuu.com/gehrytech/docs/sou_06_issuu_version

[155] T. Tachi, “Composite rigid-foldable curved origami structure,” *Proceedings of Transformables*, p. 18–20, 2013.

[156] T. Tachi et G. Epps, “Designing One-DOF mechanisms for architecture by rationalizing curved folding,” dans *International Symposium on Algorithmic Design for Architecture and Urban Design (ALGODE-AIJ). Tokyo*, vol. 5, 2011, p. 6.

[157] B. Mitrović, “Leon Battista Alberti, Mental Rotation, and the Origins of Three-Dimensional Computer Modeling,” *Journal of the Society of Architectural Historians*, vol. 74, n°. 3, p. 312–322, 2015.

[158] C. T. Mueller, “Computational exploration of the structural design space,” Thèse de doctorat, Massachusetts Institute of Technology, 2014.

[159] T. Fischer, “Rationalising bubble trusses for batch production,” *Automation in construction*, vol. 16, n°. 1, p. 45–53, 2007.

[160] L. Hesselgren, R. Charitou et S. Dritsas, "The Bishopsgate tower case study," *International journal of architectural computing*, vol. 5, n°. 1, p. 61–81, 2007.

[161] R. Attar, R. Aish, J. Stam, D. Brinsmead, A. Tessier, M. Glueck et A. Khan, "Embedded rationality : A unified simulation framework for interactive form finding," *International journal of architectural computing*, vol. 8, n°. 4, p. 399–418, 2010.

[162] M. Schlaich, U. Burkhardt, L. Irisarri et J. Goñi, "Palacio de comunicaciones-a single layer glass grid shell over the courtyard of the future town hall of Madrid," dans *Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures : Proceedings*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2010.

[163] C. Ceccato, "Material articulation : Computing and constructing continuous differentiation," *Architectural Design*, vol. 82, n°. 2, p. 96–103, 2012.

[164] C. Williams, "The definition of curved geometry for widespan enclosures," p. 41–59, 2000.

[165] J. F. Blassel et A. Pfadler, "La gare de strasbourg," *Construction métallique*, vol. 45, n°. 1, p. 15–36, 2008.

[166] K. Gavriil, R. Guseinov, J. Pérez, D. Pellis, P. Henderson, F. Rist, H. Pottmann et B. Bickel, "Computational design of cold bent glass façades," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 39, n°. 6, p. 1–16, 2020.

[167] M. Burry, "Essential Precursors to the Parametricism Manifesto : Antoni Gaudí," *Architectural Design*, vol. 2, p. 30–35, 2016.

[168] M. Rippmann, L. Lachauer et P. Block, "Interactive vault design," *International Journal of Space Structures*, vol. 27, n°. 4, p. 219–230, 2012.

[169] R. Levien, "The elastica : A mathematical history," *Electrical Engineering and Computer Sciences University of California at Berkeley*, p. 70, 2008.

[170] C. Douthe, "Etude de structures élancées précontraintes en matériaux composites, application à la conception des gridshells," Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2007.

[171] J. Lienhard, H. Alpermann, C. Gengnagel et J. Knippers, "Active bending, a review on structures where bending is used as a self-formation process," *International Journal of Space Structures*, vol. 28, n°. 3-4, p. 187–196, 2013.

[172] C. Douthe, O. Baverel et J.-F. Caron, "Form-finding of a grid shell in composite materials," *Journal-International association for shell and Spatial Structures*, vol. 150, p. 53, 2006.

[173] C. Gengnagel, H. Alpermann et E. Lafuente, "Active bending in hybrid structures," *Form–Rule/ Rule–Form*, vol. 2013, p. 12–27, 2013.

[174] S. Nabaei, O. Baverel et Y. Weinand, "Form finding of twisted interlaced structures : A hybrid approach," dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2014, p. 127–143.

[175] J. Lienhard, S. Schleicher et J. Knippers, "Bending-active structures–Research pavilion ICD/ITKE," dans *Proceedings of the International Symposium of the IABSE-IASS Symposium*. Taller Longer Lighter London, UK, 2011.

[176] M. Fleischmann, J. Knippers, J. Lienhard, A. Menges et S. Schleicher, "Material behaviour : Embedding physical properties in computational design processes," *Architectural Design*, vol. 82, n°. 2, p. 44–51, 2012.

[177] S. Bechert, J. Knippers, O. D. Krieg, A. Menges, T. Schwinn et D. Sonntag, “Textile fabrication techniques for timber shells,” dans *Advances in Architectural Geometry*. Park Books Zurich, Switzerland, 2016.

[178] J. Brütting, A. Körner, D. Sonntag et J. Knippers, “Bending-active segmented shells,” dans *Proceedings of the IASS Annual Symposium*, 2017.

[179] E. Vazquez, C. Randall et J. P. Duarte, “Shape-changing architectural skins : A review on materials, design and fabrication strategies and performance analysis,” *Journal of Facade Design and Engineering*, vol. 7, n°. 2, p. 93–114, 2019.

[180] O. D. Krieg, “HygroSkin–meteorosensitive pavilion,” dans *Advancing Wood Architecture*. Routledge, 2016, p. 125–140.

[181] D. Sung, “Smart geometries for smart materials : Taming thermobimetals to behave,” *Journal of Architectural Education*, vol. 70, n°. 1, p. 96–106, 2016.

[182] B. Lindsey et F. O. Gehry, *Digital Gehry. Material Resistance Digital Construction*. Springer Science & Business Media, 2001.

[183] L. Spuybroek, *The Architecture of Continuity : Essays and Conversations*. NAI Publishers, 2008.

[184] R. Venturi, D. S. Brown et S. Izenour, *Learning from Las Vegas - Symbolism of Architectural Form*. Cambridge, Mass. : The MIT Press, juin 1977.

[185] B. Soquier, R. Mizzi, D. Dureisseix et J.-B. Valette, “Constructing Complex Geometries : A Case Study on the Cité des Civilisations du Vin in Bordeaux, France,” dans *Advances in Architectural Geometry*. Springer, 2014, p. 323–335.

[186] “Evolute | the geometry experts.” [En ligne]. Disponible : http://evolute.at/

[187] A. Nealen, M. Müller, R. Keiser, E. Boxerman et M. Carlson, “Physically based deformable models in computer graphics,” dans *Computer Graphics Forum*, vol. 25. Wiley Online Library, 2006, p. 809–836.

[188] J. Lienhard, R. La Magna et J. Knippers, “Form-finding bending-active structures with temporary ultra-elastic contraction elements,” *Mobile and rapidly assembled structures IV*, vol. 107, p. 115, 2014.

[189] N. Leduc, J.-F. Caron, C. Douthe, B. Vaudeville, S. Aubry, K. Leempoels et J.-P. Tahay, “An innovative fabrication process from rolled helicoidal steel strips,” dans *Proceedings of the International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium*, 2018, p. S29.23–S29–30.

[190] L. C. Bank et T. D. Gerhardt, “Paperboard tubes in structural and construction engineering,” *Nonconventional and Vernacular Construction Materials*, p. 645–672, 2020.

[191] P. Montmitonnet et J.-L. Aubin, “Formage des tubes métalliques-Procédés–Analyse détaillée du laminage à pas de pèlerin,” *Techniques de l’ingénieur*, 2009.

[192] P. Gagnon et P. LaForest, “Push actuator,” US Brevet US4 875 660A, oct. 1989. [En ligne]. Disponible : https://patents.google.com/patent/US4875660A/en

[193] “Technologie Spiralift.” [En ligne]. Disponible : https://www.pacospiralift.com/fr/solutions/technologie-spiralift/

[194] C. Schüller, R. Poranne et O. Sorkine-Hornung, “Shape representation by zippables,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 37, n°. 4, p. 1–13, 2018.

[195] F. Kälberer, M. Nieser et K. Polthier, “Stripe Parameterization of Tubular Surfaces,” dans *Topological Methods in Data Analysis and Visualization*, V. Pascucci, X. Tricoche, H. Hagen et J. Tierny, édit. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011, p. 13–26.

[196] T. Zhang, C. Duan, A. Wang et Q. Wang, “Dynamic modeling and optimal design of Tube–Diaphragm coupling beam inspired by bamboo,” *Thin-Walled Structures*, vol. 155, p. 106836, oct. 2020.

[197] D. W. Thompson, *On Growth and Form*. United Kingdom : Cambridge University Press, 1942, vol. 2.

[198] S. T. Hyde, “Contemporary Geometry For The Built Design ?” *Architectural Theory Review*, vol. 15, n°. 2, p. 110–124, août 2010.

[199] J. C. Weaver, J. Aizenberg, G. E. Fantner, D. Kisailus, A. Woesz, P. Allen, K. Fields, M. J. Porter, F. W. Zok et P. K. Hansma, “Hierarchical assembly of the siliceous skeletal lattice of the hexactinellid sponge Euplectella aspergillum,” *Journal of structural biology*, vol. 158, n°. 1, p. 93–106, 2007.

[200] M. A. Monn et H. Kesari, “Enhanced bending failure strain in biological glass fibers due to internal lamellar architecture,” *Journal of the mechanical behavior of biomedical materials*, vol. 76, p. 69–75, 2017.

[201] Y. Anastas, M. Gillet, L. Rowenczyn et O. Baverel, “Complex Surface Approximation with Developable Strips,” *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, vol. 57, n°. 2, p. 133–143, 2016.

[202] F. Gonzalez-Quintial et A. Martin-Pastor, “Convolutas-Developable strips and digital fabricated lightweight architecture,” dans *Architecture in the Age of the 4th Industrial Revolution*, 2019.

[203] G. K. Francis, *A Topological Picturebook*. Springer, 1987, vol. 2.

[204] A. I. Bobenko, P. Schröder, J. M. Sullivan et G. M. Ziegler, *Discrete Differential Geometry*. Birkhäuser, 2008.

[205] G. Glaeser et F. Gruber, “Developable surfaces in contemporary architecture,” *Journal of Mathematics and the Arts*, vol. 1, n°. 1, p. 59–71, 2007.

[206] E. D. Demaine, M. L. Demaine, D. Koschitz et T. Tachi, “Curved crease folding : A review on art, design and mathematics,” dans *Proceedings of the IABSE-IASS Symposium : Taller, Longer, Lighter*. Citeseer, 2011, p. 20–23.

[207] A. Lebée, “From folds to structures, a review,” *International journal of space structures*, vol. 30, n°. 2, p. 55–74, 2015.

[208] J. Mitani, *Curved-Folding Origami Design*. CRC Press, 2019.

[209] D. A. Huffman, “Curvature and creases : A primer on paper,” *IEEE Transactions on computers*, vol. 25, n°. 10, p. 1010–1019, 1976.

[210] E. D. Demaine, M. L. Demaine et D. Koschitz, “Reconstructing David Huffman’s legacy in curved-crease folding,” *Origami*, vol. 5, p. 39–52, 2011.

[211] D. Koschitz, “Designing with curved creases,” dans *Advances in Architectural Geometry*. vdf Hochschulverlag AG, 2016, p. 82–103.

[212] C. Jiang, K. Mundilova, F. Rist, J. Wallner et H. Pottmann, “Curve-pleated structures,” *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 38, n°. 6, p. 1–13, 2019.

[213] K. A. Seffen, "Spherical images and inextensible curved folding," *Physical review. E*, vol. 97, n°. 2-1, p. 023 004.1–023 004.7, 2018.

[214] S. Mierunalan et K. Seffen, "Geometry of Curved Folded Developables," dans *AIAA SCITECH 2022 Forum*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2022.

[215] J. Mitani, "Column-shaped origami design based on mirror reflections," *Journal for Geometry and Graphics*, vol. 16, n°. 2, p. 185–194, 2012.

[216] D. Koschitz, "Curved-crease Paperfolding Structures and their Tectonics," dans *Advances in Architectural Geometry*, 2020.

[217] J. Boersma et J. Molenaar, "Geometry of the shoulder of a packaging machine," *Siam Review*, vol. 37, n°. 3, p. 406–422, 1995.

[218] A. Vergauwen, L. Alegria Mira, K. Roovers et N. De Temmerman, "Parametric design of adaptive shading elements based on Curved-line Folding," dans *Proceedings of the First Conference Transformables 2013*, 2013.

[219] L. Nagy, L. Rhode-Barbarigos, S. Adriaenssens et A. Kilian, "Conceptual design of a single-crease origami-arc inspired movable footbridge structure," *International Journal of Space Structures*, vol. 30, n°. 2, p. 75–84, 2015.

[220] D. Raducanu, V. D. Cojocaru, V. A. Raducanu, A. Nocivin, N. Serban, I. Cinca, E. M. Cojocaru, L. Moldovan, C. Trisca-Rusu et I. V. Balkan, "Design and Optimization of a Curved-Crease-Folding Process Applied to a Light Metallic Structure," *Processes*, vol. 9, n°. 7, p. 1110, 2021.

[221] P. Eversmann, P. Ehret et A. Ihde, "Curved-folding of thin aluminium plates : Towards structural multi-panel shells," dans *Proceedings of IASS Annual Symposia*, vol. 2017. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2017, p. 1–10.

[222] A. Berrubé, N. Leduc, J. Hidalgo et S. Aubry, "Forming process of façade panels by curved folding with combined geometric and mechanical optimisation." *Hormigón y acero*, n°. 292, p. 63–69, 2020.

[223] W. Carl, "On semidiscrete constant mean curvature surfaces and their associated families," *Monatshefte für Mathematik*, vol. 182, n°. 3, p. 537–563, 2017.

[224] C. Müller, "Semi-discrete constant mean curvature surfaces," *Mathematische Zeitschrift*, vol. 279, n°. 1-2, p. 459–478, 2015.

[225] O. Stein, E. Grinspun et K. Crane, "Developability of triangle meshes," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 37, n°. 4, p. 1–14, 2018.

[226] T. Wills, "DForms : 3D forms from two 2D sheets," dans *Bridges : Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, 2006, p. 503–510.

[227] A. D. Alexandrov, *Convex Polyhedra*. Springer Science & Business Media, 2005.

[228] J. Sharp, "D-forms and Developable Surfaces," *Bridges : Mathematical Connections between Art, Music and Science*, p. 503–510, 2005.

[229] Ö. Gönen, E. Akleman et V. Srinivasan, "Modeling D-forms," *Bridges : Mathematical Connections between Art, Music and Science*, p. 209–216, 2007.

[230] Q. Xing, G. Esquivel et E. Akleman, "Twisted D-Forms : Design and Construction of D-Forms with Twisted Prismatic Handles with Developable Sides," dans *Proceedings of Bridges 2012 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. Tessellations Publishing, 2012, p. 323–328.

[231] J. Sharp, *D-Forms : Surprising New 3-D Forms from Flat Curved Shapes*. Tarquin Group, 2008.

[232] R. R. Orduño, N. Winard, S. Bierwagen, D. Shell, N. Kalantar, A. Borhani et E. Akleman, "A mathematical approach to obtain isoperimetric shapes for D-form construction," *Proceedings of Bridges 2016 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Education, Culture*, p. 277–284, 2016.

[233] K. A. Seaton, "Sphericons and D-forms : A crocheted connection," *Journal of Mathematics and the Arts*, vol. 11, n°. 4, p. 187–202, 2017.

[234] E. D. Demaine et G. N. Price, "Generalized D-Forms Have No Spurious Creases," *Discrete & Computational Geometry*, vol. 43, n°. 1, p. 179–186, 2010.

[235] E. Demaine, "Geometric Folding Algorithms : Linkages, Origami, Polyhedra | Electrical Engineering and Computer Science | MIT OpenCourseWare." [En ligne]. Disponible : https://ocw.mit.edu/courses/6-849-geometric-folding-algorithms-linkages-origami-polyhedra-fall-2012/

[236] K. A. Brakke, "Surface Evolver," août 2013. [En ligne]. Disponible : http://facstaff.susqu.edu/b/brakke/evolver/evolver.html

[237] P. Bourke, "dForms." [En ligne]. Disponible : http://paulbourke.net/geometry/dform/

[238] A. Bobenko et I. Izmestiev, "Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes," *Annales de l'institut Fourier*, vol. 58, n°. 2, p. 447–505, 2008.

[239] D. Kane, G. N. Price et E. D. Demaine, "A pseudopolynomial algorithm for Alexandrov's Theorem," dans *Workshop on Algorithms and Data Structures*. Springer, 2009, p. 435–446.

[240] P. MAYRHOFER, "3d-Modelling of special dForms made from elliptic shaped developments," dans *Proceedings of the 14th International Conference on Geometry and Graphics*, 2010.

[241] R. Ferréol, "Developpable avec pli," 2019. [En ligne]. Disponible : https://mathcurve.com/surfaces/developpablepli/developablepli.shtml

[242] ——, "Courbe de Viviani." [En ligne]. Disponible : https://www.mathcurve.com/courbes3d/viviani/viviani.shtml

[243] N. Leduc, C. Douthe, B. Vaudeville, S. Aubry, K. Leempoels, L. Hauswirth et O. Baverel, "dForms with Constant Discrete Gaussian Curvature," dans *Advances in Architectural Geometry*, 2020, p. 174–187.

[244] M. Raffaelli, J. Bohr et S. Markvorsen, "Cartan ribbonization and a topological inspection," *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 474, n°. 2220, p. 20170389, 2018.

[245] R. Fletcher, "Musings on the Vesica Piscis," *Nexus network journal*, vol. 6, n°. 2, p. 95–110, 2004.

[246] K. Mundilova et T. Wills, "Folding the Vesica Piscis," dans *Bridges 2018 Conference Proceedings*. Tessellations Publishing, 2018, p. 535–538.

[247] E. Ghys, "Le Brazuca, le ballon cubique de la coupe du monde," mai 2014. [En ligne]. Disponible : https://images.math.cnrs.fr/Le-Brazuca-le-ballon-cubique-de-la-Coupe-du-monde.html

[248] K. Delp et B. Thurston, "Playing with Surfaces : Spheres, Monkey Pants, and Zippergons," dans *Proceedings of Bridges 2011 : Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture*. Tessellations Publishing, 2011, p. 1–8.

[249] N. Sharp et K. Crane, "Variational surface cutting," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 37, n°. 4, p. 1–13, 2018.

[250] S. Cantat, "La balle et la courbe," août 2012. [En ligne]. Disponible : https://images.math.cnrs.fr/La-balle-et-la-courbe.html

[251] J. Arroyo, O. J. Garay et J. J. Mencía, "When is a periodic function the curvature of a closed plane curve ?" *The American Mathematical Monthly*, vol. 115, n°. 5, p. 405–414, 2008.

[252] S. Huerta, "Oval domes : History, geometry and mechanics," *Nexus Network Journal*, vol. 9, n°. 2, p. 211–248, 2007.

[253] P. L. Rosin, "A survey and comparison of traditional piecewise circular approximations to the ellipse," *Computer Aided Geometric Design*, vol. 16, n°. 4, p. 269–286, 1999.

[254] L. A. Piegl et W. Tiller, "Biarc approximation of NURBS curves," *Computer-Aided Design*, vol. 34, n°. 11, p. 807–814, sept. 2002.

[255] K. Bolton, "Biarc curves," *Computer-Aided Design*, vol. 7, n°. 2, p. 89–92, 1975.

[256] F. Plihon, "Architectures Numériques et Résurgence Baroque : Bernard Cache, Greg Lynn et le Pli de Deleuze," Thèse de doctorat, Université Charles de Gaulle-Lille III, 2016.

[257] G. Lynn, *Animate Form*. Princeton Architectural Press New York, 1999, vol. 1.

[258] T. Banchoff et P. Giblin, "On the geometry of piecewise circular curves," *The American Mathematical Monthly*, vol. 101, n°. 5, p. 403–416, 1994.

[259] D. Baumeister et J. Rothe, "Satisfiability parsimoniously reduces to the Tantrix TM rotation puzzle problem," dans *International Conference on Machines, Computations, and Universality*. Springer, 2007, p. 134–145.

[260] K. L. Downing, "Tantrix : A minute to learn, 100 (genetic algorithm) generations to master," *Genetic Programming and Evolvable Machines*, vol. 6, n°. 4, p. 381–406, 2005.

[261] F. Kino et Y. Uno, "An integer programming approach to solving Tantrix on fixed boards," *Algorithms*, vol. 5, n°. 1, p. 158–175, 2012.

[262] B. Andrews, "Evolving convex curves," *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, vol. 7, n°. 4, p. 315–371, 1998.

[263] L. Ma et A. Zhu, "On a length preserving curve flow," *Monatshefte für Mathematik*, vol. 165, n°. 1, p. 57–78, 2012.

[264] G. Sapiro et A. Tannenbaum, "Area and length preserving geometric invariant scale-spaces," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 17, n°. 1, p. 67–72, 1995.

[265] K. Crane, U. Pinkall et P. Schröder, "Robust fairing via conformal curvature flow," *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, vol. 32, n°. 4, p. 1–10, 2013.

[266] F. Dayrens, "Minimisations sous contraintes et flots du périmètre et de l'énergie de Willmore," Thèse de doctorat, Université de Lyon, 2016.

[267] Y. Tsuboi, "Analysis, design and realization of space frames : A state-of-the-art report," *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, n°. 84/85, 1984.

[268] A. Choisy, *L'art de Bâtir Chez Les Byzantins*. Librairie de la Société anonyme de publications périodiques, 1883, vol. 1.

[269] J. Chilton, *Space Grid Structures*. Routledge, 2007.

[270] N. Subramanian, *Principles of Space Structures (Second Edition)*. New Delhi : Wheeler Publushing, 1999.

[271] Z. S. Makowski, *Steel Space Structures*. Londres : M. Joseph, 1965.

[272] A. Föppl, *Theorie Des Fachwerks*. Leipzig : Verlag von Arthur Felix, 1880.

[273] A. G. Bell, "Tetrahedral principle in kite structures," *National Geographic Magazine*, p. 219–251, 1903.

[274] C. Maniaque, "Bell, Alexander Graham," *International Journal of Space Structures*, vol. 21, n°. 1, p. 73–76, 2006.

[275] R. Le Ricolais, "Essais sur des Systèmes Reticulés à trois dimensions," dans *Annales Des Ponts et Chaussées*, 1940, p. 63–70.

[276] Z. S. Makowski, "Space structures-a review of the developments within the last decade," *Space structures*, vol. 4, p. 1–8, 1993.

[277] H. Nooshin et P. Disney, "Formex Configuration Processing I," *International Journal of Space Structures*, vol. 15, n°. 1, p. 1–52, mars 2000.

[278] ——, "Formex Configuration Processing II," *International Journal of Space Structures*, vol. 16, n°. 1, p. 1–56, mars 2001.

[279] ——, "Formex Configuration Processing III," *International Journal of Space Structures*, vol. 17, n°. 1, p. 1–50, mars 2002.

[280] C. Preisinger et M. Heimrath, "Karamba—A toolkit for parametric structural design," *Structural Engineering International*, vol. 24, n°. 2, p. 217–221, 2014.

[281] M. Eekhout, "Design, Engineering, Production & Realisation of Glass Structures for "Free-Form" Architecture," dans *CWCT Members Meeting. Bath, United Kingdom*. Citeseer, 2004.

[282] J. Sanchez-Alvarez, "Practical aspects determining the modelling of the space structure for the free-form envelope enclosing Baku's Heydar Aliyev Cultural Centre," dans *Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures : Proceedings*. Editorial Universitat Politècnica de València, 2010.

[283] H. Petroski, "Engineering : Bilbao," *American Scientist*, vol. 86, n°. 4, p. 320–325, 1998.

[284] J. Sischka, S. Brown, E. Handel et G. Zenkner, "Die Überdachung des Great Court im British Museum in London," *Stahlbau*, vol. 70, n°. 7, p. 492–502, 2001.

[285] Z. S. Makowski, "Development of jointing systems for modular prefabricated steel space structures," dans *Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures : Proceedings*, vol. 17, Warsaw, 2002, p. 17.

[286] S. Stephan, J. Sánchez-Alvarez et K. Knebel, "Reticulated structures on free-form surfaces," *Stahlbau*, vol. 73, n°. 8, p. 562–572, 2004.

[287] R. Dziewolski, "Structures spatiales en métal. Principes de construction et calculs." *La revue construction métallique*, n°. 3, p. 17–28, 1967.

[288] J. M. Gerrits, "An architectonic approach of choosing a space frame system," *Lightweight Structures in Architecture, Engineering and Construction*, vol. 2, p. 992–999, 1998.

[289] A. Holgate, *The Art of Structural Engineering : The Work of Jörg Schlaich and His Team*. Edition Axel Menges, 1997.

[290] G. Hartl, "The Westfield Roof–from Concept to Fitting," dans *Innovative Design and Construction*. DETAIL, 2013, p. 34–36.

[291] X. Tellier, S. Zerhouni, G. Jami, A. Le Pavec, T. Lenart, M. Lerouge, N. Leduc, C. Douthe, L. Hauswirth et O. Baverel, "The Caravel heX-Mesh pavilion, illustration of a new strategy for gridshell rationalization," *SN Applied Sciences*, vol. 2, n°. 4, p. 1–12, 2020.

[292] O. Baverel, P. Chalas, V. Richefeu et G. Hivin, "Proposal for a lowtech wooden space truss," dans *Proceedings of IASS Annual Symposia*, vol. 2018. International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), 2018, p. 1–8.

[293] N. Leduc, C. Douthe, G. Hivin, B. Vaudeville, S. Aubry, K. Leempoels et O. Baverel, "Space Structure with Developable Shear Components," dans *Proceedings of the International Fib Symposium on Conceptual Design of Structures*, Spain, 2019, p. 345–352.

[294] J. C. Maxwell, "L. on the calculation of the equilibrium and stiffness of frames," *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 27, n°. 182, p. 294–299, 1864.

[295] C. Preisinger, "Linking structure and parametric geometry," *Architectural Design*, vol. 83, n°. 2, p. 110–113, 2013.

[296] ——, "Karamba3D Manual." [En ligne]. Disponible : https://manual.karamba3d.com/

[297] J. H. Argyris, M. Papadrakakis, C. Apostolopoulou et S. Koutsourelakis, "The TRIC shell element : Theoretical and numerical investigation," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 182, n°. 1-2, p. 217–245, 2000.

[298] J. Argyris, L. Tenek et L. Olofsson, "TRIC : A simple but sophisticated 3-node triangular element based on 6 rigid-body and 12 straining modes for fast computational simulations of arbitrary isotropic and laminated composite shells," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 145, n°. 1-2, p. 11–85, 1997.

[299] P. Moengin, "Exponential barrier method in solving linear programming problems," *International Journal of Engineering & Technology*, vol. 12, n°. 3, p. 33–37, 2012.

[300] S. G. Johnson, "The NLopt nonlinear-optimization package." [En ligne]. Disponible : http://github.com/stevengj/nlopt

[301] D. R. Jones, C. D. Perttunen et B. E. Stuckman, "Lipschitzian optimization without the Lipschitz constant," *Journal of optimization Theory and Applications*, vol. 79, n°. 1, p. 157–181, 1993.

[302] C. Michel, P. Guéguen, S. El Arem, J. Mazars et P. Kotronis, "Full-scale dynamic response of an RC building under weak seismic motions using earthquake recordings, ambient vibrations and modelling," *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 39, n°. 4, p. 419–441, 2010.

[303] D. Bindi, B. Petrovic, S. Karapetrou, M. Manakou, T. Boxberger, D. Raptakis, K. D. Pitilakis et S. Parolai, "Seismic response of an 8-story RC-building from ambient vibration analysis," *Bulletin of Earthquake Engineering*, vol. 13, n°. 7, p. 2095–2120, 2015.

[304] B. Guillier, J.-L. Chatelain, H. Tavera, H. Perfettini, A. Ochoa et B. Herrera, "Establishing empirical period formula for RC buildings in Lima, Peru : Evidence for the impact of both the 1974 Lima earthquake and the application of the Peruvian seismic code on high-rise buildings," *Seismological Research Letters*, vol. 85, n°. 6, p. 1308–1315, 2014.

[305] M. Wathelet, J.-L. Chatelain, C. Cornou, G. D. Giulio, B. Guillier, M. Ohrnberger et A. Savvaidis, "Geopsy : A user-friendly open-source tool set for ambient vibration processing," *Seismological Research Letters*, vol. 91, n°. 3, p. 1878–1889, 2020.

[306] S. Brûlé et E. Javelaud, "Méthode H/V en géotechnique. Application à un modèle bicouche," *Revue française de Géotechnique*, n°. 142, p. 3–15, 2013.

[307] C. Acerra, H.-B. Havenith et S. Zacharopoulos, "Guidelines for the implementation of the H/V spectral ratio technique on ambient vibrations measurements, processing and interpretation," European Commission, Rapport technique, 2004.

[308] T. T. Allen, M. A. Bernshteyn et K. Kabiri-Bamoradian, "Constructing meta-models for computer experiments," *Journal of Quality Technology*, vol. 35, n°. 3, p. 264–274, 2003.

[309] A. K. Noor, "Continuum Modeling for Repetitive Lattice Structures," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 41, n°. 7, p. 285–296, juill. 1988.

[310] L. J. Gibson et M. F. Ashby, "Cellular solids : Structure and properties," *Press Syndicate of the University of Cambridge, Cambridge, UK*, p. 175–231, 1997.

[311] S. Arabnejad et D. Pasini, "Mechanical properties of lattice materials via asymptotic homogenization and comparison with alternative homogenization methods," *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 77, p. 249–262, 2013.

[312] D. L. Dean, *Discrete Field Analysis of Structural Systems*. Springer, 1976.

[313] R. S. Kumar et D. L. McDowell, "Generalized continuum modeling of 2-D periodic cellular solids," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, n°. 26, p. 7399–7422, déc. 2004.

[314] A. Bensoussan, J.-L. Lions et G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. American Mathematical Soc., 2011, vol. 374.

[315] K. Sab et A. Lebée, *Homogenization of Heterogeneous Thin and Thick Plates*. John Wiley & Sons, 2015.

[316] A. Lesage, "Multi-scale approaches for the computation and the optimization of heterogeneous plates," Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2020.

[317] A. E. H. Love, "The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London.(A.)*, n°. 179, p. 491–546, 1888.

[318] E. Reissner, "The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 12, n°. 2, 1945.

[319] R. D. Mindlin, "Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 18, n°. 1, 1951.

[320] A. Lebée et K. Sab, "A Bending-Gradient model for thick plates. Part I : Theory," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, n°. 20, p. 2878–2888, 2011.

[321] ——, "A Bending-Gradient model for thick plates, Part II : Closed-form solutions for cylindrical bending of laminates," *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, n°. 20, p. 2889–2901, 2011.

[322] ——, "Justification of the Bending-Gradient theory through asymptotic expansions," dans *Generalized Continua as Models for Materials*. Springer, 2013, p. 217–236.

[323] D. Caillerie et J. C. Nedelec, "Thin elastic and periodic plates," *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, vol. 6, n°. 1, p. 159–191, 1984.

[324] R. Boulaud, “Etudes et modélisations du comportement d’un écran de filet pare-blocs à différentes échelles,” Thèse de doctorat, Université Paris-Est, 2020.

[325] J. Dirrenberger, “Propriétés effectives de matériaux architecturés,” Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2012.

[326] R. A. Fisher, “Design of experiments,” *British Medical Journal*, vol. 1, n°. 3923, p. 554, 1936.

[327] T. W. Simpson, J. D. Poplinski, P. N. Koch et J. K. Allen, “Metamodels for computer-based engineering design : Survey and recommendations,” *Engineering with computers*, vol. 17, n°. 2, p. 129–150, 2001.

[328] G. E. P. Box et K. B. Wilson, “On the Experimental Attainment of Optimum Conditions,” *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 13, n°. 1, p. 1–45, 1951.

[329] R. H. Myers, D. C. Montgomery et C. M. Anderson-Cook, *Response Surface Methodology : Process and Product Optimization Using Designed Experiments*. John Wiley & Sons, 2016.

[330] E. Ross et D. Hambleton, “Using Graph Neural Networks to Approximate Me-chanical Response on 3D Lattice Structures,” dans *Advances in Architectural Geometry*, vol. 24, 2020, p. 466–485.

[331] J. W. Eaton, D. Bateman, S. Hauberg et R. Wehbring, *GNU Octave Version 6.1.0 Manual : A High-Level Interactive Language for Numerical Computations*, 2020. [En ligne]. Disponible : https://www.gnu.org/software/octave/doc/v6.1.0/

[332] P. Bratley et B. L. Fox, “Algorithm 659 : Implementing Sobol’s quasirandom sequence generator,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 14, n°. 1, p. 88–100, 1988.

[333] S. Joe et F. Y. Kuo, “Remark on algorithm 659 : Implementing Sobol’s quasirandom sequence generator,” *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, vol. 29, n°. 1, p. 49–57, 2003.

[334] “Eurocode 0 : Bases de calcul des structures.”

[335] B. Johansson, R. Maquoi et G. Sedlacek, “New design rules for plated structures in Eurocode 3,” *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 57, n°. 3, p. 279–311, mars 2001.

[336] M. Smith, *ABAQUS/Standard User’s Manual, Version 6.9*. United States : Dassault Systèmes Simulia Corp, 2009.

[337] “Eurocode 3 : Calcul des structures en acier, Partie 1-1 : Règles générales et règles pour les bâtiments.”

[338] “Eurocode 5 : Conception et calcul des structures en bois.”

[339] “CM66 : Règles de calcul des constructions en acier,” déc. 1966.

[340] M. J. Powell, “A direct search optimization method that models the objective and constraint functions by linear interpolation,” dans *Advances in Optimization and Numerical Analysis*. Springer, 1994, p. 51–67.

[341] ——, “Direct search algorithms for optimization calculations,” *Acta numerica*, vol. 7, p. 287–336, 1998.

[342] W. Kabsch, “A solution for the best rotation to relate two sets of vectors,” *Acta Crystallographica Section A : Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography*, vol. 32, n°. 5, p. 922–923, 1976.

[343] ——, “A discussion of the solution for the best rotation to relate two sets of vectors,” *Acta Crystallographica Section A : Crystal Physics, Diffraction, Theoretical and General Crystallography*, vol. 34, n°. 5, p. 827–828, 1978.

[344] K. S. Arun, T. S. Huang et S. D. Blostein, “Least-squares fitting of two 3-D point sets,” *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, n°. 5, p. 698–700, 1987.

Abstract :
A piece of paper, a steel sheet, a plywood panel or glass pane naturally takes the shape of a developable surface when deformed. This property of isometry to the plane confers to this type of surface a wide range of applications, from clothing design to shipbuilding. In architecture, developable surfaces are mainly used to rationalise the construction of freeform envelopes.
This thesis explores the structural capabilities of developable surfaces through constructive systems based on curved patching. Although it is the most general type of connection between two developable surfaces, it has been little described with respect to the particular case of curved folding.
Curved patching is first considered from a geometrical point of view by proposing a definition of the Gaussian and mean curvatures located in the connection curve, in coherence with the pre-existing theories of smooth and discrete differential geometries. Then this theoretical corpus is applied to the generation of closed, piecewise developable surfaces with constant Gaussian curvature by a geometric flow method.
In a second step, the curved patching is addressed from a mechanical point of view by the study of a hybrid spatial structure consisting of two layers of two-way lattice grid and shear modules with developable faces. The equivalent stiffness of this structure is evaluated by the principles of homogenisation using a Reissner-Mindlin orthotropic thick plate model. Finally, design and optimisation tools are proposed in order to implement the results for large-scale structures.
The studies are supplied and illustrated by the manufacture of two full-scale research pavilions.

Résumé :
Une feuille de papier, une tôle d'acier, un panneau de contreplaqué ou encore une plaque de verre prennent naturellement la forme d'une surface développable lorsqu'ils se déforment. Cette propriété d'isométrie au plan confère à ce type de surface un large spectre d'applications, de la confection de vêtements à l'industrie de la construction navale. En architecture, les surfaces développables sont essentiellement employées pour rationaliser la fabrication d'enveloppes à géométrie complexe.
Cette thèse explore les capacités structurelles des surfaces développables au travers de systèmes constructifs basés sur le rapiéçage courbe ; bien qu'étant le type de raccord le plus général entre deux surfaces développables, il a été peu décrit par rapport au cas particulier du pli courbe.
Le rapiéçage courbe est abordé, dans un premier temps, du point de vue géométrique en proposant une définition des courbures gaussienne et moyenne localisées dans la courbe de raccord, en cohérence avec les théories préexistantes des géométries différentielles lisse et discrète. Puis ce corpus théorique est mobilisé pour la génération de surfaces fermées, développables par morceaux et à courbure gaussienne constante par une méthode de flot géométrique.
Dans un second temps, le rapiéçage courbe est traité du point de vue mécanique par l'étude d'une structure spatiale hybride constituée de deux nappes à barres et de modules de cisaillement à faces développables. La raideur équivalente de cette structure est évaluée par les principes de l'homogénéisation grâce à un modèle de plaque épaisse orthotrope de Reissner-Mindlin. Enfin des outils de prédimensionnement et d'optimisation sont élaborés afin de mettre en œuvre les recherches développées au sein de structures de grandes dimensions.
Les études sont nourries et illustrées par la fabrication de deux pavillons démonstrateurs à échelle 1.