



**HAL**  
open science

# Identification d'endommagements de structures à partir de l'évolution dans le temps de mesures de déformation et d'accélération : application aux ponts

Truong Son Pham

## ► To cite this version:

Truong Son Pham. Identification d'endommagements de structures à partir de l'évolution dans le temps de mesures de déformation et d'accélération : application aux ponts. Infrastructures de transport. École des Ponts ParisTech, 2023. Français. NNT : 2023ENPC0013 . tel-04147148

**HAL Id: tel-04147148**

**<https://pastel.hal.science/tel-04147148v1>**

Submitted on 30 Jun 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts  
ParisTech

THÈSE DE DOCTORAT  
de l'École des Ponts ParisTech

# Identification d'endommagements de structures à partir de l'évolution dans le temps de mesures de déformation et d'accélération : application aux ponts

École doctorale N°531, Sciences, ingénierie et environnement (SIE)

Génie Civil

Thèse préparée au laboratoire Navier URM 8205

Équipe Matériaux et Structures Architecturées (MSA)

---

Thèse soutenue le 31 mars 2023, par  
**Truong Son PHAM**

---

Composition du jury:

Luc, DAVENNE Professeur, Université Paris Nanterre	<i>Président</i>
Odile, ABRAHAM HDR, Université Gustave Eiffel	<i>Rapporteuse</i>
Daniel, WEISZ-PATRAULT Chargé de Recherche, École polytechnique	<i>Rapporteur</i>
Gilles, FORET Professeur, École des Ponts ParisTech	<i>Directeur de thèse</i>
Véronique, LE CORVEC Dr.-Ing., OSMOS GROUP	<i>Examinatrice</i>
Claude, BOUTIN Professeur, Université de Lyon	<i>Examineur</i>
Alexandre, BROUSTE Professeur, Le Mans Université	<i>Examineur</i>
Tien, HOANG Dr., École des Ponts ParisTech	<i>Encadrant</i>
Denis, DUHAMEL Professeur, École des Ponts ParisTech	<i>Invité, Co-directeur de thèse</i>
Franziska, SCHMIDT HDR, Université Gustave Eiffel	<i>Invitée</i>



# Remerciements

Je voudrais tout en premier adresser mes remerciements à mes directeurs de thèse : professeur Gilles FORET et professeur Denis DUHAMEL, ainsi que mon encadrant Dr. Tien HOANG pour m'avoir accepté au sein de leur équipe et m'avoir suivi tout le long de la thèse. Merci pour leurs disponibilités et leurs conseils qui m'ont permis de réaliser ce travail, merci pour leur temps consacré à relire et à corriger mes textes. En dehors du travail, ils sont des grands témoins de qualités humains et de développement personnel : merci beaucoup pour leurs conseils, leurs soutiens lorsque j'ai rencontré des moments de difficulté dans l'orientation personnelle et des incertitudes concernant l'avenir. Ces travaux ne seraient pas arrivés jusqu'à la fin sans eux. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude au groupe OSMOS. Je tiens à remercier des personnels chez OSMOS : Ing. Francois-Baptiste CARTIAUX – directeur scientifique, Dr.-Ing. Véronique LE CORVEC, Jorge SEMIAO qui m'ont suivi, particulièrement à Francois-Baptiste et Véronique qui m'ont encadré. Merci Véronique de m'avoir fait prendre connaissance du *code\_Aster*. De nombreux échanges et discussions ont été très utiles.

J'adresse également mes sincères remerciements au professeur Alain EHRLACHER, pour sa participation régulière aux réunions d'avancement, ses conseils précieux et pour son enthousiasme.

Je remercie Franziska SCHMIDT pour sa participation à l'encadrement de ma thèse. Merci pour m'avoir toujours encouragé et pour son temps consacré à relire et corriger mes slides et mes articles.

Je tiens à remercier chaleureusement le professeur Luc DAVENNE pour avoir accepté de présider mon jury, ainsi que Monsieur Daniel WEISZ-PATRAULT et Madame Odile ABRAHAM qui ont accepté d'évaluer ce travail en tant que rapporteur et rapporteure. Je remercie sincèrement les professeurs Alexandre BROUSTE et Claude BOUTIN pour avoir accepté de participer à mon jury.

Je voudrais ensuite remercier l'ensemble des permanents, doctorants et stagiaires de l'équipe MSA du laboratoire Navier pour m'avoir accueilli. Je remercie tout particulièrement Marie-Francoise KASPI, la « maman », pour toute l'aide qu'elle m'a apportée. Merci aux anciens et aux nouveaux qui ont partagé le même bureau avec moi : Le Hung TRAN, Sarah GEBAL, Benjamin CLAUDET, Vitor GUICH et David GONZALEZ pour la bonne ambiance de travail. Merci à Jonas APARICIO, Insaf ECHERRADI, Katy BARKAT, Matteo MIGLIARI,... pour nos discussions pendant les déjeuners et les pauses, pour nos soirées jeux de rôle après 17h42.

Merci à ma mère, qui ne connaît rien de là où je suis et de ce que je fais, mais me soutient toujours. Merci à mes beaux-parents et mon beau-frère pour m'avoir accueilli chaleureusement chez eux, m'ont donné l'impression de rentrer dans une deuxième famille. Merci pour leurs soutiens.

Enfin, ce remerciement n'est jamais complet sans quelques mots adressés à ma femme : NGUYEN Thi Hao Nhi, qui m'a le plus aidé et soutenu pendant toute la thèse. Merci à toi pour toujours être à mon côté, m'avoir encouragé de continuer cette aventure difficile mais fascinante. Si je peux y arriver, c'est grâce à toi !

Palaiseau, juin 2023  
Pham-Truong SON

# Résumé

La surveillance des ouvrages d'art est nécessaire pour connaître l'évolution de leur comportement dans le temps par rapport à une modification du trafic ou à un vieillissement de la structure. De plus, les réglementations européennes imposent une surveillance accrue du poids des véhicules, soit par des systèmes de pesage embarqué ou par des systèmes de pesage en marche tels le pesage par ponts instrumentés. Dans le domaine du génie civil, des méthodes et techniques de surveillance des structures ont été développées permettant la détection des endommagements et l'analyse du comportement de la structure. Parmi ces méthodes, celles des réponses vibratoires sont souvent utilisées dans différentes approches. Cependant, peu de méthodes permettent d'analyser le comportement de la structure en utilisant la réponse sous chargements en temps réel.

Dans ce contexte, la société OSMOS a développé tout un ensemble de techniques de mesures en différents points des ponts pour obtenir des déformations générées par le trafic et pour permettre de suivre ces déformations au fil du temps. Ce type de renseignement est utile pour avoir une estimation de l'évolution de l'état du pont en repérant les évolutions de ces déformations. Le présent travail a pour but de développer des méthodes d'identification d'endommagements à partir de ces déformations mesurées. La première partie est consacrée au problème direct. Connaissant les propriétés mécaniques et géométriques des structures, des modèles analytiques et numériques sont développés afin de chercher les réponses de la structure aux points souhaités. Le problème inverse est présenté dans la deuxième partie et quelques méthodes d'identification de l'endommagement sont proposées. Enfin, des applications aux cas de poutres et d'une structure réelle sont effectuées dans la dernière partie.



# Abstract

Structural Health Monitoring (SHM) is necessary to know the evolution of structure's behaviour with respect to time which can be due to a modification of the traffic or an aging of the structure. In addition, European regulations require increased monitoring of weight loads, either by embedded weighing systems or by bridge weigh-in-motion (BWIM) system such as instrumented weighing. In the field of civil engineering, methods and techniques for monitoring structures have been developed to detect damage and analyse the behaviour of the structure. Among these, the methods based on vibrational responses is often used in different approaches. However, few methods exist to analyse the behaviour of the structure using the real-time strain response.

In this context, the OSMOS group has developed a whole set of techniques to measure the strain on the bridges that are generated by the traffic and to follow these strains over time. This information is critical to have an estimate of the evolution of the state of the bridge by identifying the evolution of the strain in different points. The goal of this work is to develop some structural damage identification methods from these strain measurements. The first part is dedicated to the direct problem. From given mechanical and geometric properties of the structures, analytical and numerical models are developed to search for the structural responses at the desired points. The inverse problem is presented in the second part, where some structural damage identification methods will be proposed. At the end, certain applications to the cases of beams and of a real structure will be carried out in the last part.





# Table des matières

<b>Table des figures</b>	<b>xvii</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>xx</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Etat de l'art</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	4
1.2 Généralités sur la pathologie des ouvrages d'art . . . . .	4
1.3 La corrosion des armatures . . . . .	5
1.3.1 Mécanisme et propagation de la corrosion des armatures . . . . .	5
1.3.2 Quantification de l'intensité de corrosion . . . . .	10
1.3.3 Comportement mécanique de l'acier corrodé . . . . .	11
1.4 Les méthodes d'identification et de localisation d'endommagement existantes	12
1.4.1 Méthode à base des fréquences naturelles . . . . .	13
1.4.2 Méthode à base des déformées modales . . . . .	13
1.4.3 Méthode à base des courbures modales . . . . .	14
1.4.4 Méthodes à base de la Transformation en Ondelettes . . . . .	16
1.4.5 Autres méthodes . . . . .	17
1.5 Modélisation de l'endommagement . . . . .	18
1.5.1 Revue de la littérature . . . . .	19
1.5.2 Comparaison avec les calculs aux éléments finis . . . . .	20
1.6 Modélisation de véhicules . . . . .	24
1.6.1 Modèle de force mobile . . . . .	25
1.6.2 Modèle de masse mobile . . . . .	26
1.6.3 Modèle de masse-ressort mobile (sprung mass) . . . . .	27
1.7 Technologie de la corde optique de OSMOS . . . . .	28
1.8 Conclusion . . . . .	29
<b>I Problème direct</b>	<b>31</b>
<b>2 Modèle analytique de poutre continue sous chargement mobile</b>	<b>33</b>
2.1 Introduction . . . . .	34
2.2 Formulation . . . . .	34
2.3 Calcul des modes . . . . .	36
2.3.1 Déformées modales . . . . .	36
2.3.2 Configuration de la poutre continue . . . . .	37
2.3.3 Problème aux valeurs propres . . . . .	43

2.4	Réponse sous chargements mobiles	45
2.5	Le facteur de masse-vitesse	48
2.6	Validation avec les résultats numériques	51
2.6.1	Poutre continue non fissurée	51
2.6.2	Poutre continue à deux travées	52
2.7	Conclusion	57
<b>3</b>	<b>Modèle analytique et numérique d'un pont à quatre travées</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction	60
3.2	Présentation générale de la structure	60
3.2.1	Généralité sur la géométrie du pont	60
3.2.2	Plan d'instrumentation du pont	62
3.3	Essai de chargement	62
3.4	Modèle analytique du pont	64
3.4.1	Coefficient de Répartition Transversale des Charges	64
3.4.2	Solution analytique d'une portion de poutre	66
3.5	Modélisation de la structure dans <i>code_Aster</i>	69
3.5.1	Géométrie du maillage	69
3.5.2	Propriétés mécaniques des composantes du pont	70
3.5.3	Modélisation des charges	71
3.6	Résultats	71
3.6.1	Analyse modale	71
3.6.2	Réponse temporelle du passage de poids-lourd	75
3.7	Conclusion	76
<b>4</b>	<b>Influence de l'endommagement et du type de capteurs de déformation sur les réponses de structures</b>	<b>77</b>
4.1	Introduction	78
4.2	Déformation mesurée à l'aide de capteurs longs et courts	78
4.2.1	Poutre simple non-fissurée	78
4.2.2	Poutre simple fissurée	82
4.3	Application : le cas d'une poutre	83
4.3.1	Poutre simple saine	83
4.3.2	Poutre simple avec la présence de défaut	85
4.4	Application : le cas d'un pont	90
4.4.1	Cas d'étude réel : Test sur le pont Moneder Gulley	90
4.4.2	Application : Pont à quatre travées	91
4.5	Conclusion	95
<b>II</b>	<b>Problème inverse</b>	<b>97</b>
<b>5</b>	<b>Propositions de critères de détection de l'endommagement à partir des réponses globales</b>	<b>99</b>
5.1	Introduction	100
5.2	Détection par distribution longitudinale des déformations	100
5.2.1	Distribution longitudinale de l'aire de l'histoire des déformations	100
5.2.2	Proposition de critères	103
5.2.3	Applications numériques : calculs avec <i>code_Aster</i>	104
5.3	Critères à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération	107

5.3.1	Décomposition de la solution générale : composantes particulière et homogène . . . . .	109
5.3.2	Décomposition de la solution générale : composantes quasi-statique et dynamique . . . . .	115
5.3.3	Critère de détection de l'endommagement . . . . .	117
5.4	Applications numériques et discussions . . . . .	121
5.4.1	Poutres saines : Validation . . . . .	121
5.4.2	Poutre endommagée : Études paramétriques . . . . .	124
5.5	Conclusion . . . . .	127
<b>6</b>	<b>Propositions de critères de détection de l'endommagement à partir des amplitudes modales</b> . . . . .	<b>129</b>
6.1	Introduction . . . . .	130
6.2	Des limites de la méthode de détection par optimisation . . . . .	130
6.2.1	Exemple introductif . . . . .	130
6.2.2	Bilan énergétique . . . . .	132
6.3	Formulation à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération . . . . .	134
6.4	Identification des paramètres modaux par méthode de fraction rationnelle des polynômes . . . . .	136
6.4.1	Réponse impulsionnelle . . . . .	138
6.4.2	Réponse à un chargement mobile . . . . .	142
6.5	Applications numériques . . . . .	144
6.5.1	Poutres soumises aux chocs . . . . .	144
6.5.2	Poutres soumises aux chargements mobiles . . . . .	146
6.6	Conclusion . . . . .	154
<b>III</b>	<b>Application</b> . . . . .	<b>157</b>
<b>7</b>	<b>Application au cas de poutres</b> . . . . .	<b>159</b>
7.1	Introduction . . . . .	160
7.2	Identification du chargement . . . . .	160
7.2.1	Structure saine . . . . .	160
7.2.2	Structure endommagée . . . . .	164
7.3	Proposition de critères et de disposition des capteurs . . . . .	167
7.4	Détection de l'endommagement à partir des amplitudes modales : Passages aux hasards . . . . .	171
7.4.1	Poutre continue soumise à plusieurs passages aléatoires . . . . .	172
7.4.2	Convergence du rapport $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$ . . . . .	174
7.4.3	Évaluation de $r_{\varepsilon/a}$ en fonction de l'endommagement . . . . .	175
7.5	Conclusion . . . . .	177
<b>8</b>	<b>Application aux ponts</b> . . . . .	<b>179</b>
8.1	Introduction . . . . .	180
8.2	Généralités sur la structure et le modèle numérique raffiné . . . . .	180
8.2.1	Présentation générale de la structure . . . . .	180
8.2.2	Modèle numérique raffiné . . . . .	182
8.2.3	Comparaison des résultats numériques aux données réelles . . . . .	183
8.3	Critère d'endommagement basé sur l'identification des chargements . . . . .	185
8.3.1	Structure saine . . . . .	186

8.3.2	Structure endommagée . . . . .	188
8.3.3	Structure rigidifiée . . . . .	192
8.4	Application aux données réelles . . . . .	193
8.4.1	Direction longitudinale . . . . .	193
8.4.2	Direction transversale . . . . .	195
8.5	Conclusion . . . . .	196
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>197</b>
<b>Annexes</b>		<b>201</b>
<b>A Matrices de transfert</b>		<b>203</b>
A.1	Matrice de transfert à l'interface de la section fissurée . . . . .	203
A.2	Matrice de transfert à l'interface de la zone endommagée . . . . .	204
A.3	Matrice de transfert aux appuis intermédiaires <sup>1</sup> . . . . .	205
A.4	Matrice de transfert à l'appui gauche de la travée endommagée . . . . .	206
A.5	Matrice de relation entre la réponse forcée et la déformée modale . . . . .	207
<b>B Coefficients de distribution de charge</b>		<b>211</b>
B.1	Introduction . . . . .	211
B.2	Méthode de Guyon-Massonnet . . . . .	211
B.2.1	Principes fondamentaux de la méthode . . . . .	211
B.2.2	Paramètres fondamentaux . . . . .	211
B.2.3	Coefficient de Répartition Transversale . . . . .	213
B.3	Application au pont à quatre travées . . . . .	214
B.3.1	Géométrie . . . . .	214
B.3.2	Calcul des CRT pour le pont à quatre travées . . . . .	215
<b>C Aire de l'histoire des déformations</b>		<b>221</b>
C.1	Comparaison de l'aire des composantes particulière $\mathcal{S}_n^p$ et homogène $\mathcal{S}_n^h$ . . . . .	222
C.2	Distribution de l'aire de l'histoire de la déformation totale . . . . .	223
C.3	Influence de la vitesse et de l'amortissement sur l'aire de l'histoire de la déformation calculée . . . . .	225
C.4	Influence de la vitesse et de l'amortissement sur la matrice $Q$ . . . . .	226
<b>D Détermination des coefficients de la méthode de Fraction rationnelle des polynômes</b>		<b>229</b>
D.1	Poutre soumise à une impulsion . . . . .	229
D.1.1	Réponse en déplacement (réceptance) . . . . .	229
D.1.2	Réponse en accélération (accélérance) . . . . .	230
D.2	Poutre soumise à une force mobile . . . . .	232
<b>Bibliographie</b>		<b>239</b>

---

1. A l'exception de l'appui gauche de la travée endommagée

# Table des figures

1.1	Diagramme de Pourbaix simplifié du système $Fe/H_2O$ . . . . .	6
1.2	Mécanisme de corrosion des armatures . . . . .	9
1.3	Les différentes étapes de corrosion selon Tutti [86] . . . . .	10
1.4	Piqure de corrosion (droite) et comparaison avec une corrosion homogène (gauche) pour une même quantité de fer corrodé. . . . .	11
1.5	Corrélation entre la diminution de la charge de plastification (a), de la capacité portante (b) et la perte de section d'armature, d'après Yu <i>et al.</i> [94] . . . . .	12
1.6	Coefficients de Transformation en Ondelettes (TO) d'une poutre simple soumise à une force mobile. . . . .	17
1.7	Modélisation de l'endommagement dans une poutre (a), par une modification locale de la rigidité en flexion (b) par un ressort spiral. . . . .	18
1.8	Poutre simple, bi-appuyée. Source : <a href="http://fr.wikipedia.org">fr.wikipedia.org</a> . . . . .	20
1.9	Flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Béton ( $\nu = 0.2$ ). . . . .	23
1.10	Zoom sur l'intervalle $[0, 0.2]$ de la flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Béton ( $\nu = 0.2$ ). . . . .	23
1.11	Flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Acier ( $\nu = 0.3$ ). . . . .	24
1.12	Modèle de force mobile . . . . .	25
1.13	Modèle de masse mobile . . . . .	26
1.14	Modèle de masse-ressort mobile (sprung mass) . . . . .	27
1.15	Schéma de fibres optiques tressées (gauche) et flux de lumière dans la corde optique [16]. . . . .	28
2.1	Une poutre continue à N travées soumise à M charges mobiles. . . . .	35
2.2	La travée fissurée de la poutre continue . . . . .	37
2.3	La travée endommagée de la poutre continue . . . . .	38
2.4	La travée non-fissurée entre deux appuis intermédiaires. . . . .	40
2.5	Appui gauche de la travée fissurée . . . . .	41
2.6	Mesure de déformation. Le point de mesure est en rouge. . . . .	49
2.7	Poutre sur 3 appuis soumise au passage d'un véhicule à deux essieux . . . . .	53
2.8	Flèche au milieu des travées de la poutre continue lors du passage d'un véhicule à 10 m/s. Taux d'amortissement : $\zeta = 2\%$ . . . . .	55
2.9	Comparaison des réponses de poutre non-fissurée et fissurée lors du passage d'un véhicule à 10 m/s. Taux d'amortissement : $\zeta = 2\%$ . . . . .	55
2.10	Facteur d'Amplification Dynamique à différents niveaux d'amortissement. . . . .	56
2.11	Facteur de masse-vitesse en fonction de la vitesse adimensionnelle. . . . .	57
3.1	Dimension du pont. . . . .	61

3.2	Détail d'une travée du pont. . . . .	61
3.3	Instrumentation des capteurs ( <i>Source : OSMOS</i> ). . . . .	63
3.4	Les cordes optiques considérées et positions des trottoirs ( <i>Source : OSMOS</i> ). . . . .	63
3.5	Déformations des poutres sous travée T2 lors du passage du poids-lourd 44T à 50 km/h, direction Sud. . . . .	65
3.6	Coefficient de Répartition Transversale des charges pour la section du pont (voir annexe B). . . . .	66
3.7	Modélisation d'une portion de poutre. . . . .	67
3.8	Comparaison des résultats du modèle analytique avec des données mesurées. . . . .	67
3.9	Intégrale des signaux mesurés et la droite estimées. . . . .	68
3.10	Facteur d'Amplification Dynamique du pont à quatre travées. . . . .	69
3.11	Facteur d'Amplification Dynamique du pont à quatre travées. Un zoom sur les vitesses usuelles. . . . .	69
3.12	Détail d'une travée du pont. . . . .	70
3.13	Modélisation du chargement . . . . .	72
3.14	Six premiers modes de vibration du pont . . . . .	73
3.15	Accélération de la poutre P1 mesurée pendant le test . . . . .	74
3.16	Comparaison des fréquences naturelles calculées et mesurées . . . . .	74
3.17	Comparaison des déformations moyennes calculées et mesurées. . . . .	76
4.1	Moment de flexion d'une poutre simple . . . . .	79
4.2	cordes optiques fixées sur le pont suivies par OSMOS ( <i>Source : OSMOS</i> ). . . . .	81
4.3	Segment de poutre déformée . . . . .	81
4.4	Moment de flexion d'une poutre simple fissurée . . . . .	82
4.5	Comparaison des déformations mesurées par une jauge de déformation et une corde optique. . . . .	84
4.6	Déformation moyenne mesurée des poutres saine (lignes bleue, orange) et fissurée (ligne verte). . . . .	85
4.7	Modélisation de l'endommagement dans <i>code_Aster</i> . . . . .	87
4.8	Déformations le long de la poutre . . . . .	87
4.9	Déformations moyennes le long de la poutre pour différents scénarios d'endommagements . . . . .	88
4.10	Poutre endommagée avec la disposition des capteurs . . . . .	89
4.11	Poutre simple non-endommagée : Déformation moyenne et « ponctuelle » à mi-travée. . . . .	89
4.12	a) Trois premières fréquences naturelles de la poutre en fonction de la localisation de l'endommagement et b) Leurs variations (%) par rapport aux valeurs de référence (poutre saine). . . . .	90
4.13	Cordes optiques fixées sur le pont Moneder Gulley. <i>Source [39]</i> . . . . .	91
4.14	Déformations mesurées par une jauge de déformation et une fibre optique longue suite au passage d'un train. <i>Source [39]</i> . . . . .	91
4.15	Modélisation d'une portion de poutre. . . . .	92
4.16	Variation de fréquence naturelle du premier mode en fonction de la position et du niveau de l'endommagement . . . . .	92
4.17	Déformations des poutres au milieu de la travée T2 du pont à quatre travées : Structure saine (à gauche) et structure avec poutre numéro 3 endommagée (à droite). . . . .	94
4.18	Déformations maximales des poutres en milieu de la travée T2 du pont à quatre travées suivant différents scénarios d'endommagement. . . . .	94

5.1	Moment de flexion d'une poutre simple . . . . .	101
5.2	Poutre simple instrumentée par une séquence de cordes optiques . . . . .	105
5.3	Poutre saine :a) Histoire des réponses et b) Distribution de l'aire des courbes de déformation. . . . .	105
5.4	Poutre endommagée instrumentée par une séquence de cordes optiques . . . . .	105
5.5	Poutre endommagée : a) Histoire des réponses et b) Distribution de l'aire des courbes de déformation. . . . .	106
5.6	Poutre simple endommagée dans <i>code_Aster</i> . . . . .	106
5.7	Critère global EG : a) en perspective et b) en fonction de la taille de la zone endommagée. . . . .	107
5.8	Critère local $EL_i$ à différents niveaux d'endommagement . . . . .	107
5.9	Poutre simple avec capteur de déformation et d'accélération en co-localisation. . . . .	108
5.10	Accélération (à gauche) et déformation (à droite) du 1er mode en temps . . . . .	113
5.11	Accélérations homogène et particulière en fonction du mode . . . . .	114
5.12	Déformations homogène et particulière en fonction du mode . . . . .	115
5.13	Décomposition du moment de flexion . . . . .	118
5.14	Poutre continue soumise à une force mobile . . . . .	119
5.15	Poutre simple soumise à deux forces mobiles . . . . .	121
5.16	Déformations originale et approchée à mi-travée . . . . .	122
5.17	Visualisation des fonctions objectifs $J_d$ (gauche) et $J$ (droite) . . . . .	122
5.18	Poutre simple soumise à trois forces mobiles . . . . .	123
5.19	Visualisation des déformations approchées au milieu de la poutre sans et avec bruits ajoutés . . . . .	123
5.20	Poutre simple soumise à 2 forces mobiles . . . . .	124
5.21	Vues en perspectives des 2 cas . . . . .	125
5.22	Cas 1 : La localisation de l'endommagement est fixe . . . . .	126
5.23	Cas 2 : La longueur de la zone endommagée est fixe . . . . .	126
5.24	Distance entre les deux forces . . . . .	127
6.1	Poutre continue soumise aux forces mobiles . . . . .	130
6.2	Participation de l'énergie élastique à l'énergie totale en fonction du nombre de travées. . . . .	133
6.3	Participation de l'énergie cinétique à l'énergie totale en fonction du nombre de travées. . . . .	134
6.4	Transformée de Fourier des composantes correspondant aux cinq premiers modes et de l'accélération totale pour le cas d'une poutre simple (gauche) et d'une poutre continue à 4 travées (droite). . . . .	136
6.5	Réceptance d'un oscillateur à 1 d.d.l. . . . .	137
6.6	Poutre continue soumise à une impulsion . . . . .	139
6.7	Poutre simple soumise à un choc . . . . .	145
6.8	La fonction de réponse en fréquence de déformation (gauche) et d'accélération (droite) d'une poutre simple. . . . .	145
6.9	Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des constantes modales de la déformation et de l'accélération. . . . .	145
6.10	La fonction de réponse en fréquence de déformation (gauche) et d'accélération (droite) d'une poutre continue à 4 travées. . . . .	146
6.11	Poutre à 4 travées : Valeurs estimées et de référence des constantes modales de la déformation et de l'accélération. . . . .	146
6.12	Poutre simple soumise à une force mobile . . . . .	147



6.13	Poutre simple : Transformées de Fourier numériques et analytiques des accélérations obtenues à mi-travée lors du passage d'une force ponctuelle. . . . .	148
6.14	Poutre simple soumise à une force mobile : FRF en accélération sans bruits (gauche) et avec bruits (droite). . . . .	149
6.15	Poutre continue à deux travées soumise aux chargements mobiles . . . . .	150
6.16	Poutre à deux travées soumise à une force mobile : TF de l'accélération et des deux approches par déformation ( $\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega)$ et $\hat{\varepsilon}^{(2)}(\omega)$ ). . . . .	151
6.17	Rapport entre deux résidus en fonction de la réduction de la valeur du module de Young $\Delta E$ . Cas 1 : Sans prise en compte de l'amortissement (à gauche) et Cas 2 : avec amortissement (à droite). . . . .	152
6.18	Rapport entre deux résidus en fonction de la position du centre de la zone endommagée. Cas 1 : Sans prise en compte de l'amortissement (à gauche) et Cas 2 : avec amortissement (à droite). . . . .	153
6.19	Signaux total et tronqué de l'accélération mesurée au milieu de la première travée et leurs Transformées de Fourier. . . . .	153
6.20	Rapport entre deux résidus ( $ r_k^a / r_k^\varepsilon $ ) en fonction des caractéristiques de l'endommagement. Cas 1 : Localisation fixée, $\Delta E$ variable (à gauche) et Cas 2 : $\Delta E$ fixée, localisation variable (à droite). . . . .	154
7.1	Identification de charge par essieu du véhicule 32T - Poutre simple. . . . .	161
7.2	Identification de charge par essieu du véhicule 32T - Poutre à quatre travées. . . . .	162
7.3	Écarts relatifs entre les valeurs estimées et le poids total des véhicules. . . . .	163
7.4	Écarts relatifs du chargement estimé - le cas d'une force ponctuelle. . . . .	164
7.5	Poutre endommagée à 4 travées soumise aux chargements mobiles. . . . .	164
7.6	Écarts relatifs du chargement estimé - poutre endommagée soumise aux différents chargements mobiles. . . . .	165
7.7	Écarts relatifs du chargement estimé - poutre endommagée soumise à une force ponctuelle à différentes vitesses. . . . .	165
7.8	Écarts relatifs entre les valeurs estimées et le poids total des véhicules. . . . .	166
7.9	Écart maximal du poids estimé en fonction de la réduction du module de Young. . . . .	167
7.10	Écarts relatifs du chargement estimé - poutre à deux travées . . . . .	168
7.11	Disposition des capteurs proposée pour une poutre continue à deux travées. . . . .	169
7.12	Poutre à 2 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en $x/L = 0.1$ et le critère global (ligne noire). . . . .	170
7.13	Poutre à 3 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en $x/L = 0.1$ et le critère global (ligne noire). . . . .	171
7.14	Poutre à 4 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en $x/L = 0.1$ et le critère global (ligne noire). . . . .	171
7.15	Poutre continue à deux travées avec la présence de l'endommagement . . . . .	172
7.16	Exemples de passages aléatoires . . . . .	173
7.17	Exemple de DSP de 1000 passages aléatoires . . . . .	174
7.18	Étude de convergence du rapport $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$ . . . . .	175
7.19	Rapport $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$ en fonction du niveau de l'endommagement. . . . .	175
7.20	Rapport entre deux résidus ( $ r_k^a / r_k^\varepsilon $ ) en fonction des caractéristiques de l'endommagement. Cas 1 : Localisation fixée, $\Delta E$ variable (à gauche) et Cas 2 : $\Delta E$ fixée, localisation variable (à droite). . . . .	176
8.1	Profil longitudinal de la structure . . . . .	180

8.2	Plan d'instrumentation des capteurs considérés (Source <i>OSMOS</i> ) . . . . .	181
8.3	Maillage raffiné du pont à quatre travées . . . . .	182
8.4	Disposition des capteurs sur le pont à quatre travées . . . . .	183
8.5	Comparaison des résultats des calculs numériques et des mesures réelles : Passages « Sud » et « Nord » des véhicules. . . . .	184
8.6	Comparaison des résultats des calculs numériques et des mesures réelles : Passage centré du véhicule 32 T. . . . .	185
8.7	Modélisation des chargements sur le pont. A gauche : Véhicule à 2 essieux (19 T) et à droite : Chargement pour calculer les moments statiques unitaires ( $M_{se}$ ). . . . .	185
8.8	Instrumentation de la structure dans le sens transversal . . . . .	186
8.9	Écarts relatifs des chargements estimés : Le sens transversal . . . . .	187
8.10	Instrumentation des capteurs le long de la structure . . . . .	187
8.11	Écarts relatifs des chargements estimés : Le sens longitudinal . . . . .	188
8.12	Structure endommagée . . . . .	188
8.13	Écarts relatifs des chargements estimés : Structure endommagée . . . . .	189
8.14	Écarts relatifs des chargements estimés en fonction de l'endommagement . . . . .	190
8.15	Écarts relatifs des chargements estimés : poutre 8 endommagée – Direction longitudinale. . . . .	191
8.16	Critère global $\mathcal{E}$ (exprimé en pourcentage) . . . . .	191
8.17	Écarts relatifs des chargements estimés : Structure rigidifiée . . . . .	192
8.18	Écarts relatifs des chargements estimés en fonction du niveau de rigidification . . . . .	193
8.19	Plan d'instrumentation avec les axes choisis . . . . .	194
8.20	Écarts relatifs des chargements estimés : Structure réelle . . . . .	194
8.21	Écarts relatifs des chargements estimés : Structure réelle . . . . .	195
B.1	Dimension du pont. . . . .	214
B.2	Coefficient de Répartition Transversale des charges pour la section du pont. . . . .	219
C.1	Distribution de l'aire des courbes de déformation . . . . .	224
C.2	Différence entre les valeurs de l'aire obtenues par l'approche modale et par l'approche polynomiale. . . . .	225
C.3	Valeur de $f(\gamma_n, \zeta_n)$ en fonction du facteur de vitesse $\gamma_n$ . . . . .	226
C.4	Valeur de $a(\gamma_n, \zeta_n)$ (courbes continues) et de $c(\gamma_n, \zeta_n)$ (courbes pointillées) en fonction du facteur de vitesse $\gamma_n$ . . . . .	227
C.5	Valeur de $b(\gamma_n, \zeta_n)$ (lignes continues) et de $d(\gamma_n, \zeta_n)$ (lignes pointillées) en fonction du facteur de vitesse $\gamma_n$ . . . . .	227



# Liste des tableaux

1.1	Expression du moment de flexion, de la pente et du déplacement de la ligne neutre des deux segments de poutre. . . . .	21
1.2	Caractéristiques des matériaux utilisés. . . . .	22
2.1	Les cinq premières solutions de l'équation caractéristique (2.82). . . . .	52
2.2	Caractéristiques détaillées de la poutre. . . . .	52
2.3	Les cinq premières fréquences naturelles (en Hz). . . . .	54
3.1	Caractéristiques détaillées des véhicules utilisés dans le test de chargement sur le pont à quatre travées. . . . .	64
3.2	Caractéristiques détaillées des passages des véhicules dans le test de chargement sur le pont. . . . .	65
3.3	Caractéristiques détaillées de la poutre. . . . .	67
3.4	Propriétés mécaniques des éléments en béton . . . . .	71
3.5	Les quatre premières fréquences naturelles en Hz correspondantes aux modes de flexion du pont. . . . .	73
3.6	Caractéristiques détaillées du passage de poids-lourd 19 tonnes. . . . .	75
4.1	Caractéristiques détaillées de la poutre non-endommagée. . . . .	86
5.1	Les composantes particulière et homogène du déplacement, de la déformation et de l'accélération. . . . .	112
5.2	Signification des coefficients $c_d$ , $c_z$ , $c_z$ . . . . .	117
5.3	Comparaison des grandeurs retrouvées avec et sans bruits . . . . .	124
6.1	Caractéristiques détaillées du passage de poids-lourd 32 tonnes. . . . .	131
6.2	Écarts des coefficients $c_d$ et $c_{s,i}$ (en %) par rapport aux valeurs de référence estimées durant les passages du poids-lourd de 32 tonnes. . . . .	131
6.3	Participation de l'énergie élastique à l'énergie totale des 5 premiers modes en fonction du nombre de travées . . . . .	133
6.4	Expressions des grandeurs de la réceptance . . . . .	141
6.5	Expressions des grandeurs de l'accélération . . . . .	141
6.6	Expressions des grandeurs de l'accélération . . . . .	143
6.7	Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des paramètres sans la prise en compte des bruits. . . . .	149
6.8	Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des paramètres avec bruits 2 % de l'amplitude maximale du signal. . . . .	150
6.9	Poutre à deux travées : Valeurs estimées et de référence des rapports des modules des constantes modales et des résidus de l'accélération et de la déformation dynamique par deux approches. . . . .	152

7.1	Caractéristiques détaillées des chargements mobiles. . . . .	160
7.2	Caractéristiques détaillées des passages. . . . .	173

# Introduction générale

L'édification des premiers ponts date du début de l'antiquité, avec par exemple celui de Tarr Steps situé en Grande-Bretagne, Milvius (Italie) et le pont d'Alcántara (Espagne), etc. Au cours du temps, les techniques de construction des ponts n'ont cessé de s'améliorer. Aussi, des ponts à plus grande portée commencent à être bâtis au Moyen-Âge. Le pont n'a plus seulement comme fonction de franchir des obstacles, mais devient aussi un symbole d'urbanisme et d'esthétique (par exemple, pont du Rialto (Venice), Ponte Vecchio (Florence)). Durant la révolution industrielle, les ponts métalliques à grande portée apparaissent. Nous pouvons mentionner le viaduc de Garabit sur la Truyère (Eiffel, 1884). Avec le développement des sciences et des techniques, de nouvelles typologies de ponts sont inventées et mises en œuvre dans des ouvrages réels. Dans le monde moderne, les ponts assurent la continuité du transport des biens et des personnes. Leur contribution au développement économique mondial est primordial.

La plupart des ponts dans le monde entier ont été construits au cours du XX<sup>e</sup> siècle, notamment dans la période de forte croissance économique après les Grandes Guerres (1945-1975) [11, 49]. De ce fait, la surveillance en continu ou à intervalles réguliers des structures est nécessaire afin d'assurer le bon fonctionnement de la structure. L'identification de l'endommagement dans les structures fait l'objet de nombreuses recherches. De nombreux types de capteurs connectés et de systèmes d'acquisition ont été développés, comme les capteurs de déplacement utilisant les signaux GPS, les accéléromètres, etc.

Dans ce contexte, la société OSMOS a développé un ensemble de techniques de mesure de déformation à l'aide de cordes optiques longues. De part sa dimension, cette corde optique est capable de couvrir une zone importante de la structure. Elle donne ainsi la possibilité de capturer un défaut si ce dernier se trouve dans sa zone de couverture [38, 75]. Ce travail rentre dans le cadre de la collaboration OSMOS-ENPC dont l'objectif est de développer des méthodes d'identification d'endommagements de structures à partir de mesures de déformation dans le temps et leurs applications aux ponts.

Ce mémoire de thèse est constitué de huit chapitres, répartis dans trois parties principales. Le premier chapitre est dédié aux études bibliographiques. Les chapitres 2, 3, 4 font partie de la première partie, dans laquelle le problème direct est présenté. Les deux chapitres suivants, le chapitre 5 et le chapitre 6 sont consacrés au problème inverse. Enfin, les applications des méthodes proposées font l'objet des deux derniers chapitres (7 et 8). Précisément, les chapitres de ce manuscrit sont organisés de la façon suivante :

- Le premier chapitre présente dans un premier temps la revue de la littérature des généralités sur la pathologie des ouvrages d'art. De plus, des méthodes d'identification et de localisation de l'endommagement existantes sont abordées. A partir des modélisations de défaut dans les poutres, des études comparatives sont effectuées

afin de choisir la modélisation la plus adaptée. Quelques modèles de véhicules sont également discutés. Enfin, nous présentons la technologie de la corde optique d'OS-MOS ;

- Le deuxième chapitre présente le modèle analytique de poutre continue sous chargement mobile. Une méthode analytique permettant de calculer rapidement les réponses dynamiques (déplacement, déformation, accélération, etc.) des poutres continues sous chargement mobile, avec ou sans la présence de défauts, est développée ;
- Le troisième chapitre présente les modèles analytique et numérique d'un pont à quatre travées. La structure est de type pont à poutres sous chaussée. Alors que le modèle analytique est restreint à une portion de poutre en section « T », le modèle de calcul numérique réalisé dans le logiciel *code\_Aster* donne une modélisation plus complète de la structure ;
- Le quatrième chapitre présente la comparaison entre les déformations obtenues par différents types de capteurs de déformation (jauge électrique de déformation, corde (fibre) optique, etc.) ainsi que l'influence de la longueur des capteurs sur les signaux acquis. L'influence de l'endommagement sur les réponses de structures est également abordée ;
- Le cinquième chapitre concerne le problème inverse. Quelques critères de détection de l'endommagement sont proposés à partir des réponses globales de mesures de déformation et de l'accélération. Dans un premier temps, un critère de détection et de localisation de l'endommagement basé sur la distribution de l'aire des histoires de déformation mesurée le long d'une poutre simple est proposé. De plus, nous regardons la corrélation entre la déformation dynamique et l'accélération relevées en un même point pour proposer le deuxième critère ;
- Le sixième chapitre traite aussi du problème inverse. Quelques critères de détection de l'endommagement sont proposés à partir des amplitudes modales de mesures de déformation et de l'accélération. Les paramètres modaux sont identifiés à l'aide de la méthode de fraction rationnelle des polynômes. Plusieurs cas de chargements sont discutés ;
- Le septième chapitre présente quelques applications des méthodes d'identification du chargement et de l'endommagement appliquées aux poutres rectilignes simples et continues ;
- Enfin, le dernier chapitre est dédié à quelques applications des méthodes d'identification du chargement et de l'endommagement pour une structure réelle : le pont à quatre travées. Les comparaisons entre les résultats du modèle numérique de la structure avec un maillage raffiné et les résultats de mesure sont également menées dans cette application.

# Chapitre 1

## Etat de l'art

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>4</b>
<b>1.2</b>	<b>Généralités sur la pathologie des ouvrages d'art</b>	<b>4</b>
<b>1.3</b>	<b>La corrosion des armatures</b>	<b>5</b>
1.3.1	Mécanisme et propagation de la corrosion des armatures	5
1.3.2	Quantification de l'intensité de corrosion	10
1.3.3	Comportement mécanique de l'acier corrodé	11
<b>1.4</b>	<b>Les méthodes d'identification et de localisation d'endommagement existantes</b>	<b>12</b>
1.4.1	Méthode à base des fréquences naturelles	13
1.4.2	Méthode à base des déformées modales	13
1.4.3	Méthode à base des courbures modales	14
1.4.4	Méthodes à base de la Transformation en Ondelettes	16
1.4.5	Autres méthodes	17
<b>1.5</b>	<b>Modélisation de l'endommagement</b>	<b>18</b>
1.5.1	Revue de la littérature	19
1.5.2	Comparaison avec les calculs aux éléments finis	20
<b>1.6</b>	<b>Modélisation de véhicules</b>	<b>24</b>
1.6.1	Modèle de force mobile	25
1.6.2	Modèle de masse mobile	26
1.6.3	Modèle de masse-ressort mobile (sprung mass)	27
<b>1.7</b>	<b>Technologie de la corde optique de OSMOS</b>	<b>28</b>
<b>1.8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>29</b>

---



## 1.1 Introduction

La présence d'endommagements dans les structures de génie civil génère des désordres structurels. La présence d'endommagements peut-être liée à un manque d'entretien, pouvant conduire à des accidents catastrophiques. Plusieurs catastrophes auraient ainsi pu être évitées si des endommagements avaient été détectés à l'état précoce. Récemment, en août 2018, le pont Morandi (Italie) s'est effondré en service par manque d'entretien et de contrôles réguliers, l'effondrement ayant causé 35 morts et de nombreux blessés. De nombreux autres effondrements d'ouvrages d'art se sont produits dans le monde entier à cause du manque de surveillance en continue. Ces exemples démontrent la nécessité de procéder à la surveillance des ouvrages et des plans d'entretien réguliers durant la phase de construction et d'exploitation.

Dans cette optique, de nombreuses méthodes d'identification et d'évaluations non-destructives ont été développées dans les 50 dernières années. La plupart des techniques d'identification sont basées sur la réponse vibratoire des structures permettant de détecter le niveau d'endommagement mais aussi de localiser ces endommagements. Aujourd'hui, avec le développement de certaines technologies, la surveillance en continu des ouvrages d'art permet de suivre l'évolution de l'état des ouvrages à partir de signaux mesurés au cours du temps.

Dans ce contexte, le groupe OSMOS a développé un dispositif qui permet de mesurer les déformations sur les ouvrages d'art au cours du temps : La corde optique. Le principe de la corde optique sera présenté dans la section 1.7.

Le chapitre est consacré à la revue de la littérature. Les pathologies essentielles des ouvrages d'art seront présentées, ainsi que leurs conséquences sur le comportement mécanique des structures. Ensuite, nous présenterons la modélisation de l'endommagement, du véhicule et du pont, ainsi que le choix des modèles adaptés.

## 1.2 Généralités sur la pathologie des ouvrages d'art

Au cours de sa vie en service, un ouvrage d'art subit plusieurs actions de natures différentes. Certaines actions extérieures, ainsi que des évolutions intérieures se développant dans la structure vont alors être des causes de désordres.

Ces causes provenant d'un problème de conception et d'exploitation peuvent être la cause directe d'un désordre de la structure :

- Défaut de conception : quand tous les événements statistiques ne sont pas pris en compte, comme par exemple la tempête qui a mené à l'effondrement du pont de Tacoma (le 7 novembre 1940) ;
- Défaut d'utilisation : un camion de poids excessif peut détruire totalement un pont (pont de Mirepoix-sur-Tarn, effondré le 12 décembre 2020 après le passage d'un poids lourd) ;
- Actions climatiques / environnementales : les cycles gel et dégel de l'eau ;
- Evènements rares : des crues, des séismes...

D'autres causes sont dues à la durabilité des matériaux constitutifs de la structure. Dans le cas de structures en béton précontraint et en béton armé, nous pouvons citer la corrosion et l'alcali-réaction qui sont les causes d'endommagement les plus sévères. De plus, la fatigue des matériaux qui sont soumis à des sollicitations cycliques est aussi un sujet important à étudier.

L'alcali-réaction et la corrosion sont des réactions chimiques qui se développent lentement à l'intérieur des structures sous certaines conditions environnementales favorisant ces événements. L'alcali-réaction est un ensemble de réactions chimiques entre les silicates mal cristallisés contenus dans les granulats réactifs et les ions hydroxydes présents dans la solution interstitielle du béton.

### 1.3 La corrosion des armatures

Une des causes principales et directes qui provoque la dégradation des structures est la corrosion. Wallbank [88] a présenté 200 ponts routiers examinés, dont 61 sont en condition médiocre et 25 ont des problèmes mineurs. Le responsable primordial de ces détériorations est la corrosion. Initiée par des agents agressifs présents dans l'environnement, la corrosion évolue au cours du temps, puis crée des fissures qui entraînent une réduction de la résistance mécanique des structures. Ce processus physico-chimique est lent et difficile à éviter. Concernant la corrosion des armatures du béton armé, il existe plusieurs types de corrosion :

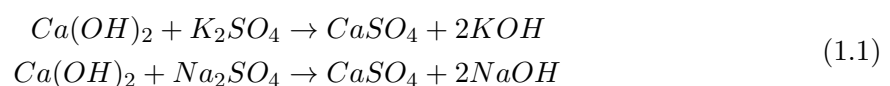
- La corrosion uniforme : L'état endommagé du métal est uniforme.
- La corrosion par piqûre : La corrosion est très localisée et se développe en profondeur.
- La corrosion sous contrainte : L'action conjuguée d'une tension mécanique avec la corrosion. Ce type de corrosion est dangereux pour les ouvrages.
- La corrosion galvanique : Proviens de deux métaux de natures différentes qui sont mis en contact. Un métal s'oxyde et se dissout (anode) alors que l'autre est le réducteur (pile électrochimique).

#### 1.3.1 Mécanisme et propagation de la corrosion des armatures

##### Passivation de l'acier

A la sortie d'usines, les armatures sont couvertes d'une couche de calamine [34]. En attendant leur mise en œuvre, ces armatures stockées en extérieur s'oxydent selon un mode de corrosion, dit atmosphérique. Il en résulte une couche de rouille qui est uniforme et très poreuse. Lors du coulage du béton, ces produits initiaux se transforment et suite à un processus rapide et intense de corrosion, une couche mince d'oxydes se forme. Cette dernière est très dense et peu soluble et a un pouvoir de protection du métal sous-jacent. Le fer est dit passivable, ainsi que le film superficiel qui est nommé le film passif.

En même temps, des réactions entre les silicates et l'eau donnent des hydrates ( $C-S-H$ ) et de la porlandite ( $Ca(OH)_2$ ). Ensuite, cette dernière réagit avec les sulfates alcalins présents dans le ciment :



Cette solution interstitielle fortement alcaline ( $pH \geq 13$ ) favorise la formation et l'efficacité de la couche de protection [24, 34].

Le diagramme d'équilibre potentiel-pH de Pourbaix [71] fait intervenir des réactions susceptibles de se produire. La figure 1.1 montre le diagramme du système  $Fe - H_2O$  à la condition standard : température de l'environnement  $T = 25^\circ C$ , pression atmosphérique  $p = 1 atm$ . La concentration des ions ferreux ( $Fe^{2+}$ ) et des ions ferriques ( $Fe^{3+}$ ) est de  $10^{-6} mol/L$ .

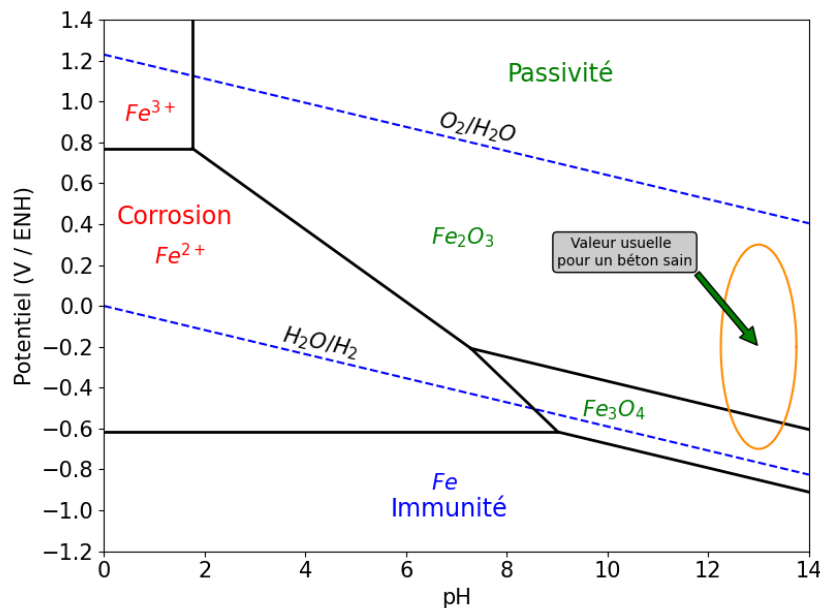


FIGURE 1.1 – Diagramme de Pourbaix simplifié du système  $Fe/H_2O$

Le diagramme de Pourbaix simplifié (Figure 1.1) définit trois régions de stabilité : La région d'immunité se trouve en bas du diagramme, dans laquelle le fer ne se corrodé pas. La région de passivité est celle où les couches d'oxydes se forment. Les armatures après coulage du béton tombent dans cette région, avec le  $pH \geq 13$ . Enfin, la région des ions  $Fe^{2+}$  et  $Fe^{3+}$ , se situant à gauche du diagramme, représente l'état dans lequel le degré du pH est le plus bas. La corrosion se développe dans cette région. A un certain moment, quand les agents agressifs dans l'environnement pénétrèrent dans le béton, le pH de la solution interstitielle diminue et la corrosion peut se développer.

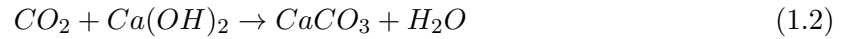
Parmi les causes de corrosion, il y a deux causes principales et distinctes :

- Corrosion induite par la carbonatation ;
- Corrosion induite par la pénétration des ions chlorures.

### Corrosion induite par la carbonatation du béton

C'est un processus long et inévitable. Après une pénétration de dioxyde de carbone vers les espaces poreux dans le béton, le  $CO_2$  atmosphérique réagit avec les hydroxydes de la pâte du ciment, surtout la chaux  $Ca(OH)_2$ , pour former la calcite ( $CaCO_3$ ). Cette

dernière remplit globalement des espaces poreux dans le béton et augmente les propriétés mécaniques du béton. Cependant, cette réaction consomme de hydroxydes ( $OH^-$ ), ce qui entraîne une diminution du degré de pH, de 13 à une valeur comprise entre 8 et 9 [25, 34]. Le diagramme de Pourbaix (Figure 1.1) montre alors que cette neutralisation du béton entraîne des réactions qui dissolvent le film passif, le détruisent et en amorcent la corrosion.



L'épaisseur de la zone carbonatée est proportionnelle à la racine carrée du temps. En général, cette relation peut être écrite [10] :

$$x(t) = K\sqrt{t} \quad (1.3)$$

où  $x$  est l'épaisseur de la zone carbonatée.  $K$  est un coefficient qui dépend à la fois de la composition du béton et de paramètres environnementaux (humidité, température...)

Le coefficient  $K$  peut être décomposé en plusieurs facteurs [4] :

$$K = \gamma f(HR)k \quad (1.4)$$

où :

- $\gamma$  est le coefficient d'exposition ;
- $f(HR)$  est le facteur d'humidité relative, dont les valeurs peuvent être trouvées dans la littérature ([78, 87]) ou à partir d'un logiciel alimenté par une base de données ;
- $k$  est le coefficient de transport du béton.

La vitesse de la carbonatation est plus favorable lorsque l'humidité dans l'environnement est comprise entre 40 % et 70 %. Drouet [28] a montré dans sa thèse que la carbonatation est plus favorable à 50°C et 80°C qu'à 20°C. Après environ 30 ans, la profondeur de carbonatation dans un béton d'ouvrage peut varier de 1 mm à 30 mm selon l'environnement dans lequel il se trouve.

### Corrosion induite par la pénétration des ions chlorures

Les ions chlorures libres sont les principaux acteurs de la corrosion. Ils viennent essentiellement de deux sources :

- L'environnement marin : zone de marnage, en contact direct avec l'eau de mer ou en exposition aux embruns... ;
- Les sels de déverglaçage en hiver.

En milieu saturé, les ions chlorures pénètrent dans le béton par diffusion sous l'effet du gradient de concentration. Une partie des ions chlorures diffusés dans le béton est retenue dans la matrice, alors que le reste est libre, en présence dans la solution interstitielle susceptible d'atteindre une concentration critique  $C_{cr}$  permettant de détruire le film passif d'armatures. C'est le début de la corrosion.

La valeur critique de concentration  $C_{cr}$  est souvent exprimée par le rapport entre la quantité totale de chlorures et la masse totale du ciment. Selon Hausmann [41], le critère d'amorçage de la corrosion est défini par :

$$\frac{[Cl^-]}{[OH^-]} \geq 0.6 \quad (1.5)$$

La vitesse de corrosion est plus grande lorsque ce rapport est plus élevé. Pour un béton d'ouvrage non carbonaté, le rapport  $[Cl^-]/[OH^-]$  est compris entre 0.6 et 1.0 correspondant à une concentration « critique » de l'ordre de 0.4 % de masse de ciment. En France, la norme NF EN 206/CN impose que la teneur maximale en  $Cl^-$  rapportée à la masse de ciment soit de 0.4 % pour un béton armé courant [5]. Cette valeur diminue à 0.2 % pour un béton contenant des armatures de précontrainte en acier.

En ce qui concerne le transport des ions chlorures dans le béton, il existe de nombreux modèles analytiques se basant sur la deuxième loi de Fick :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_{app} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

Avec  $D_{app}$  le coefficient de diffusion apparent qui dépend essentiellement du matériau béton et de la température environnementale et  $C(x, t)$  la concentration des ions chlorures à l'instant  $t$ , en profondeur  $x$ .

Une solution pour l'équation (1.6) pour un milieu isotrope semi-infini est :

$$C(x, t) = C_s + (C_0 - C_s) \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4D_{app}t}} \right) \quad (1.7)$$

où  $C_s$  est la concentration en chlorures en surface,  $C_0$  est la concentration initiale des ions chlorures et  $\operatorname{erf}(x)$  est la fonction d'erreur de variable  $x$ , définie par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-\xi^2} d\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi \quad (1.8)$$

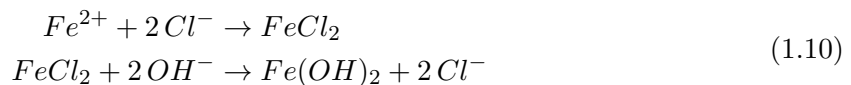
La *FIB* (Fédération Internationale du Béton) propose une solution alternative de l'équation de diffusion (1.6), basée sur la deuxième loi de Fick, comportant plusieurs paramètres dans son bulletin numéro 34 [32]. C'est le modèle le plus couramment utilisé dans l'Union Européenne :

$$C_{Cl^-}(x, t) = C_0 + (C_{s,\Delta x} - C_0) \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{x - \Delta x}{\sqrt{4D_{app}t}} \right) \quad (1.9)$$

Avec :

- $C_0$  : la concentration des ions chlorures initiale (%);
- $\Delta x$  : la profondeur jusqu'à laquelle le transport des ions est à la fois par diffusion et par convection (mm);
- $C_{s,\Delta x}$  : la concentration des ions chlorures à la profondeur  $\Delta x$  (%).

Lorsque la concentration des ions chlorures atteint le seuil d'amorçage, les ions  $Cl^-$  réagissent avec les ions  $Fe^{2+}$  pour former du chlorure de fer. Ensuite, ce dernier consomme des hydroxydes et se transforme en hydroxyde de Fe II. Ces réactions consécutives peuvent s'exprimer comme ci-dessous [58] :



La consommation des ions  $OH^-$  diminue le pH du béton. La corrosion est initiée.

### Propagation de la corrosion

Une fois le film passif détruit, la partie endommagée des armatures forme une anode, où le fer se dissout :



Pour compenser les électrons libérés par la réaction anodique (1.11), l'eau est décomposée à la cathode :



L'anode et la cathode se situent sur la même surface du métal. Le métal conducteur permet d'échanger les électrons libres, alors que le transport des ions dans la solution électrolytique est effectué par diffusion (Figure 1.2).

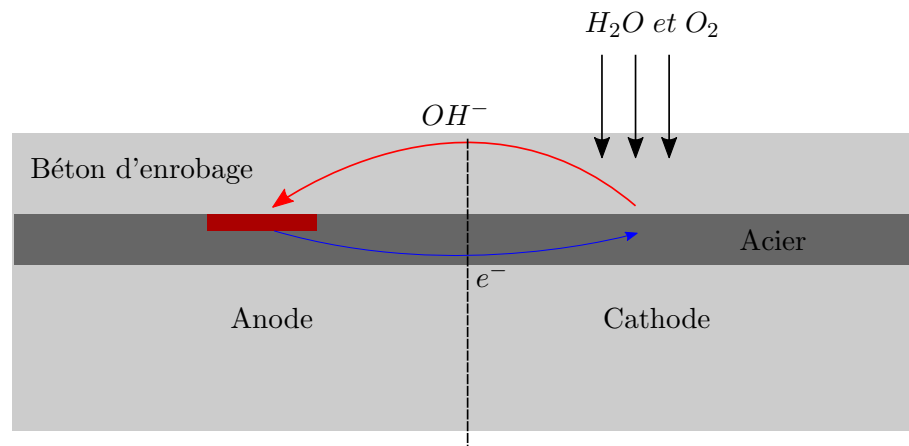
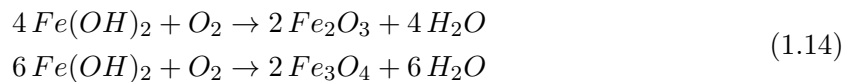


FIGURE 1.2 – Mécanisme de corrosion des armatures

Dans le milieu fortement alcalin, les ions ferreux ( $Fe^{2+}$ ) réagissent avec les ions hydroxydes ( $OH^{-}$ ) qui sont présents dans la solution interstitielle, pour former l'hydroxyde ferreux à la surface des armatures :



L'hydroxyde ferreux s'oxyde pour former l'oxyde ferrique hydraté ( $Fe_2O_3, H_2O$ ) ou la magnétite ( $Fe_3O_4$ ). La « rouille » est le mélange de ces constituants.



Concernant l'évolution de la corrosion, Tuutti *et al.* [86] ont proposé un schéma simplifié contenant deux phases : initiation (amorçage) et propagation (Figure 1.3). Dans la phase d'initiation, l'armature est dans l'état passif. L'acier est protégé par le film passif et la vitesse de corrosion reste faible. Quand la concentration des agents agressifs dépasse un seuil, le film passif est endommagé. L'armature n'est plus protégée à certains endroits et l'acier se dissout. La corrosion passe à l'état de propagation, ou « l'état actif ». C'est la deuxième phase dans le diagramme de Tuutti. Dans cette étape, les produits de corrosion sont proportionnels au temps passé. Enfin, la corrosion entraîne un gonflement du béton d'enrobage et fait apparaître des fissures.

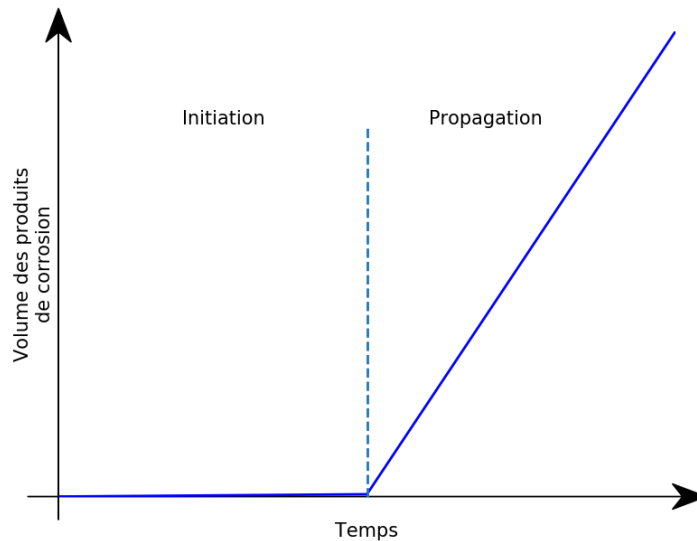


FIGURE 1.3 – Les différentes étapes de corrosion selon Tutti [86]

### 1.3.2 Quantification de l'intensité de corrosion

Afin de quantifier la corrosion, il existe différentes méthodes pour définir un « degré de corrosion ». Il peut être la profondeur de corrosion, le volume de produits de corrosion ou la perte de section d'armature par la corrosion.

Dans son ouvrage, François [34] a défini le « degré de corrosion » comme le rapport entre la section corrodée et la section saine. La perte de diamètre peut être mesurée en fonction du diamètre résiduel à l'aide d'un pied à coulisse. En revanche, la corrosion n'est pas toujours homogène dans la section corrodée et la section corrodée n'est plus circulaire. Une surestimation du diamètre résiduel implique des erreurs lors d'un recalcul de la structure. D'autre part, la perte de section peut être obtenue à partir de la perte de masse, due à la corrosion et sur une longueur donnée. Cette mesure est réalisée en laboratoire : une armature est coupée en morceaux qui sont pesés. Une longueur de 5 mm est suffisante pour donner l'information du degré de corrosion locale :

$$C = \frac{\Delta A}{A} \quad (1.15)$$

Avec  $\Delta A$  la perte de section corrodée et  $A$  la section initiale.

La perte locale d'armature peut avoir une influence sur la structure si la zone endommagée est susceptible de recevoir des sollicitations importantes dans la structure. Cependant, pour estimer des effets globaux sur la structure, la perte globale est utile dans ce cas. Le degré de corrosion général ( $C_{moy}$ ) est défini comme la perte de la section sur la totalité de la longueur de l'armature.

Pour plus d'information sur la corrosion, les facteurs de piqûres sont calculés. Il existe plusieurs définitions du facteur de piqûre. Le facteur de piqûre  $pf_s$  est le rapport entre la corrosion locale maximale et la corrosion moyenne :  $pf_s = C_{max}/C_{moy}$ . Une autre définition, est le ratio géométrique local  $pf_g$  qui signifie le rapport de perte de section basé sur le

diamètre résiduel obtenu avec la piqure sur la section correspondant à la corrosion homogène pour une même quantité de fer perdue (Figure 1.4).

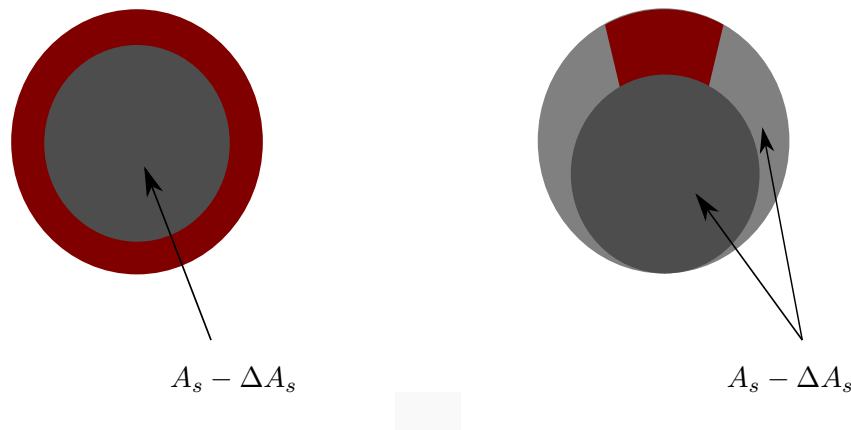


FIGURE 1.4 – Piqure de corrosion (droite) et comparaison avec une corrosion homogène (gauche) pour une même quantité de fer corrodé.

Pour la corrosion induite par la carbonatation, ce facteur de piqure est égal à 1 alors que pour la corrosion induite par les ions chlorures, cette valeur est voisine de 4. Ce facteur de piqure géométrique est utilisé pour distinguer la corrosion induite par les ions chlorures et celle induite par la carbonatation.

### 1.3.3 Comportement mécanique de l'acier corrodé

De nombreuses études ont porté sur l'influence de la corrosion sur le comportement mécanique des structures en béton armé [17, 46, 54, 72, 85]. En général, les études sont en accord sur les conséquences induites par la corrosion sur la structure :

- Du point de vue global, la corrosion entraîne une diminution de la section résistante des armatures ;
- D'autre part, les produits de corrosion ont un volume plus élevé que le volume du métal de base. Cela implique un gonflement du béton d'enrobage, entraînant ensuite l'apparition des fissures ;
- Les produits de corrosion sont plus poreux que l'acier. Quand ces produits se développent autour de l'armature ils peuvent affecter l'adhérence entre le béton et l'acier et alors réduire la capacité de portance ainsi que la performance de la structure.

En ce qui concerne la résistance en traction, les essais de traction simple d'une barre d'armature corrodée réalisés par Zhu et François [96] ont confirmé que « la limite élastique de l'acier n'est pas affectée par la corrosion » et que « la contrainte ultime de l'acier n'est pas modifiée par la corrosion ». Pourtant, la corrosion entraîne une perte de ductilité de l'acier.

A l'échelle structurelle, la corrosion conduit à une diminution de la charge de plastification et de la capacité portante d'une poutre en béton armé en flexion. Les essais réalisés par Yu *et al.* [94] démontrent que la perte de la charge de plastification et la perte de capacité portante sont proportionnelles à la perte de section d'armature due à la corrosion (Figure 1.5). Ces résultats sont logiques et comme indiqué dans le paragraphe précédent, la



limite d'élasticité et la contrainte ultime de l'acier ne sont pas modifiées par la corrosion alors que la charge de plastification et la capacité portante d'une poutre corrodée sont proportionnelles à la section résiduelle de l'armature.

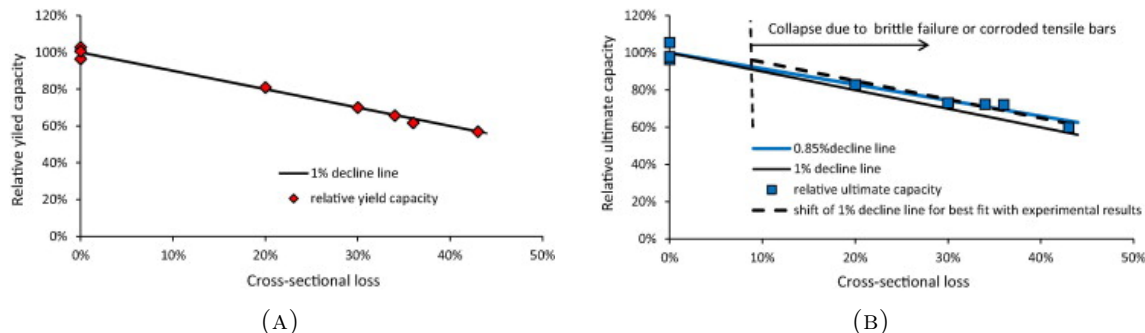


FIGURE 1.5 – Corrélation entre la diminution de la charge de plastification (a), de la capacité portante (b) et la perte de section d'armature, d'après Yu *et al.* [94]

La perte d'adhérence et l'apparition des fissures diminuent la rigidité globale de la structure. Torres-Acosta [85] a examiné 10 poutres corrodées en béton armé. Les poutres ont été contaminées par des concentrations élevées d'ions chlorure durant la phase de coulage du béton, et mises en essai de flexion 3 points. La rigidité structurelle équivalente est définie comme le rapport entre la force appliquée et la flèche de la poutre. Une relation proportionnelle entre la perte de rigidité et le degré de corrosion est relevé. Dans la même optique, Malumbela *et al.* [54] ont testé 20 poutres à grande échelle ( $153 \times 254 \times 3000 \text{ mm}$ ) et à différents niveaux de corrosion à l'aide d'essais de flexion 4 points. Une zone de moment de flexion constante de longueur 1 m est établie au milieu des poutres. Une relation entre la rigidité en flexion de la poutre corrodée et la mesure de flexion est proposée :

$$EI = \frac{M_{ext}}{24\Delta} (3l^2 - 4l_s^2) \quad (1.16)$$

dans laquelle  $EI$  est la rigidité (en flexion) de la poutre corrodée,  $M_{ext}$  est le moment externe appliqué,  $\Delta$  est la flèche de la poutre et  $l$ ,  $l_s$  sont respectivement la distance entre 2 appuis et la longueur des zones où l'effort tranchant est non nul.

Les expériences présentées ont été réalisées en condition quasi-statique. Du point de vue dynamique, Razak *et al.* [72] ont effectué une campagne d'essais dynamiques sur des poutres saines et corrodées afin de relever leurs paramètres modaux. Une réduction des fréquences naturelles a été observée en fonction du niveau d'endommagement.

## 1.4 Les méthodes d'identification et de localisation d'endommagement existantes

La présence d'endommagements dans la structure est une des causes majeures de la dégradation de la structure, voire de son effondrement. La détection d'endommagements a fait l'objet de nombreuses recherches au cours du XX<sup>e</sup> siècle. La plupart des méthodes d'identification sont basées sur l'analyse vibratoire. Fan *et al.* [31] ont fait un résumé des méthodes existantes dans la littérature.

Selon Rytter [77], l'identification des endommagements de structures peut être classée en quatre différents niveaux :

- Niveau 1 : Identification de la présence d'endommagement dans la structure ;
- Niveau 2 : Localisation de l'endommagement dans la structure ;
- Niveau 3 : Quantification de la sévérité de l'endommagement ;
- Niveau 4 : Prédiction de la durée de vie de la structure.

Il existe un grand nombre de méthodes permettant d'aller jusqu'au niveau 3. Il faut cependant disposer de plus d'informations pour prédire la durée de vie de la structure. Dans ce qui suit, différentes méthodes d'identification sont présentées. Les trois premières catégories utilisent des paramètres modaux pour traiter le problème inverse alors que la dernière catégorie prend la réponse temporelle directe comme entrée du problème.

### 1.4.1 Méthode à base des fréquences naturelles

La présence d'une fissure diminue la rigidité globale de la structure et entraîne une diminution des fréquences naturelles de la structure. Plus la structure est endommagée, plus elle est souple. Le changement des valeurs des fréquences propres donne une indication sur la gravité de l'endommagement.

Le pourcentage de changement des valeurs des fréquences est souvent utilisé. Pour le  $i$ -ième mode, ce changement est :

$$\%C_i = 100 \times \frac{\omega_i - \omega_i^f}{\omega_i} \quad (1.17)$$

avec  $\omega_i$  la pulsation propre de la structure non-fissurée et  $\omega_i^f$  la pulsation propre de la structure fissurée.

Cependant, ce pourcentage de changement est relativement petit à basses fréquences. Pour une petite fissure, ce taux de changement peut être inférieur à 1 %. Pour cette raison, les investigations portant sur l'influence des fissures sur les fréquences naturelles ont plutôt lieu en laboratoire. Pour un essai *in situ*, un changement de l'ordre de 5 % est nécessaire pour détecter un endommagement [79]. En réalité, les fréquences naturelles des structures sont sensibles aux conditions environnementales (température, humidité...) et aux conditions d'appuis. Les fréquences identifiées lors d'essais *in situ* tendent à décroître avec l'augmentation de la température. Des variations sur les fréquences peuvent atteindre une valeur de 4 à 5 % pour un changement de température de 15 °C [23]. De plus, la plupart des fréquences naturelles ont tendance à augmenter après un resserrage des appuis.

Hearn et Testa [42] ont démontré que le ratio de la variation des fréquences au carré ( $\Delta\omega_i^2/\Delta\omega_j^2$ ) pour deux modes  $i$  et  $j$  est indépendant de la sévérité de l'endommagement, mais ce ratio dépend de la localisation de la fissure. Néanmoins, il faut considérer de nombreuses fréquences afin d'obtenir un résultat raisonnable [14].

### 1.4.2 Méthode à base des déformées modales

Tandis que les fréquences naturelles fournissent une information globale sur le système, les déformées modales traduisent la description spatiale unique des amplitudes à chaque mode de vibration. En conséquence, un endommagement local peut entraîner des changements sur la déformée modale. Les variations des déformées modales ne dépendent pas seulement de la sévérité de l'endommagement (ou de la profondeur de la fissure) mais aussi

de sa localisation. Il existe donc plusieurs méthodes d'identification basées sur les déformées modales.

Gladwell et Morasqi [37] ont indiqué que les nœuds de chaque déformée modale se déplacent vers la fissure : Des nœuds situés à gauche de la fissure pour une structure saine se déplacent vers la droite, et, les nœuds à droite se déplacent vers la gauche.

### Modal Assurance Criterion (MAC)

Allemang [6] a présenté une méthode d'identification, appelée « Modal Assurance Criterion » (MAC).  $\Phi^A = [\phi_1^A \ \phi_2^A \ \dots \ \phi_{m_A}^A]$  et  $\Phi^B = [\phi_1^B \ \phi_2^B \ \dots \ \phi_{m_B}^B]$  sont deux matrices respectivement de taille  $n \times m_A$  et  $n \times m_B$  qui représentent les déformées modales obtenues par deux façons différentes (à l'issue d'un modèle théorique, d'un calcul aux éléments finis, d'un essai...) ou à deux états différents (structure saine et fissurée).  $m_A$ ,  $m_B$  sont les nombres de modes pris en compte pour les deux approches {A} et {B},  $n$  est le nombre de points de mesure (coordonnées). Le facteur MAC pour les déformées modales  $i$  et  $j$  s'écrit comme ci-dessous :

$$MAC(i, j) = \frac{\left| \sum_{k=1}^n \phi_{k,i}^A \phi_{k,j}^B \right|^2}{\sum_{k=1}^n (\phi_{k,i}^A)^2 \sum_{k=1}^n (\phi_{k,j}^B)^2} \quad (1.18)$$

Le coefficient  $MAC(i, j)$  interprète la corrélation entre le mode  $i$  de l'ensemble  $\Phi^A$  et le mode  $j$  de l'ensemble  $\Phi^B$ . Ces coefficients varient entre 0 et 1. Si les deux modes ne sont pas corrélés, le coefficient MAC est égal à 0. En revanche, ce facteur est proche de 1 quand les deux modes sont corrélés.

### Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC)

A partir des coefficients MAC, les coefficients COMAC (« Coordinate Modal Assurance Criterion ») sont proposés pour déterminer l'endroit pour lequel les déformées modales des deux ensembles de données ne sont pas corrélées. A la coordonnée  $k$  de la structure, le coefficient COMAC est calculé en utilisant  $m$  modes de vibration (ici,  $m_A = m_B = m$ ) entre deux ensembles de données  $\Phi^A$  et  $\Phi^B$  et s'écrit comme suit [50] :

$$COMAC(k) = \frac{\left( \sum_{r=1}^m |\phi_{k,r}^A \phi_{k,r}^B| \right)^2}{\sum_{r=1}^m (\phi_{k,r}^A)^2 \sum_{r=1}^m (\phi_{k,r}^B)^2} \quad (1.19)$$

D'après Palacz [67], il faut prendre plus de deux déformées modales pour chaque ensemble de données afin d'avoir un bon résultat. De plus, le critère MAC peut donner de mauvais résultats quand le nombre de points de mesure est petit. Cependant, le critère COMAC est moins affecté par cette limitation. En pratique, les coefficients COMAC sont assez proches (et ils sont généralement proches de 1). Afin de mieux interpréter les résultats, le coefficient  $(1 - COMAC)$  sera pris en compte.

#### 1.4.3 Méthode à base des courbures modales

Pandey *et al.* [68] ont suggéré que les courbures modales sont plus sensibles à l'endommagement que les coefficients MAC et COMAC des déformées modales. Ces courbures

modales sont obtenues à partir des déformées modales en calculant leur dérivée seconde. Pour des points de mesure discrets, la courbure modale au point  $k$  est estimée par le schéma de différence centré suivant :

$$\phi_{i,k}'' = \frac{\phi_{i,k-1} - 2\phi_{i,k} + \phi_{i,k+1}}{h^2} \quad (1.20)$$

avec  $\phi_{i,k}$  le déplacement modal au point de mesure  $k$  du mode  $i$  et  $h$  l'espacement des points de mesure.

Pour une poutre de type Euler-Bernoulli, la déformée modale peut être caractérisée de manière générale par la fonction analytique :

$$\phi_i = A_i \sin \lambda_i x + B_i \cos \lambda_i x + C_i \sinh \lambda_i x + D_i \cosh \lambda_i x \quad (1.21)$$

La courbure modale est donc obtenue directement sous la forme :

$$\phi_i'' = -\lambda_i^2 A_i \sin \lambda_i x - \lambda_i^2 B_i \cos \lambda_i x + \lambda_i^2 C_i \sinh \lambda_i x + \lambda_i^2 D_i \cosh \lambda_i x \quad (1.22)$$

où  $i$  est le mode considéré et A, B, C, D sont les constantes, déterminées à partir de la configuration géométrique du système.

La courbure modale (MSC - « Mode Shape Curvature ») au point  $k$  est définie comme ci-dessous [68] :

$$MSC_k = \sum_i \left| (\phi_{i,k}^f)'' - (\phi_{i,k}^o)'' \right| \quad (1.23)$$

$(\phi_{i,k}^f)''$  est la courbure modale de la structure fissurée alors que  $(\phi_{i,k}^o)''$  est la courbure modale de la structure saine.

Les travaux expérimentaux menés par Abdel Wahab et De Roeck [3] sur le pont Z24 (ouvrage en béton précontraint de longueur 53.3 m sur l'autoroute A1 Berne-Zurich, Suisse) ont confirmé l'efficacité de la méthode de courbures modales. Ils ont proposé le facteur d'endommagement de courbure (CDF - « Curvature Damage Factor ») :

$$CDF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| (\phi_{i,k}^f)'' - (\phi_{i,k}^o)'' \right| \quad (1.24)$$

avec  $N$  le nombre de modes considérés. Ils ont constaté que les courbures modales associées aux premiers modes propres sont plus précises que celles des modes supérieurs.

Pour une poutre de type Euler-Bernoulli en flexion, la courbure de l'axe neutre est proportionnelle à la déformation mesurée  $\varepsilon_m$  sur la face supérieure ou inférieure de la poutre. Soit  $z_0$  la distance entre le capteur et l'axe neutre ( $z_0 < 0$  si le capteur de déformation est situé au-dessus de l'axe neutre), la courbure au point  $x$  est :

$$u''(x) = \frac{\varepsilon_m(x)}{z_0} \quad (1.25)$$

Par conséquent, la courbure modale d'une structure élancée peut être obtenue à partir des déformations modales mesurées.

#### 1.4.4 Méthodes à base de la Transformation en Ondelettes

C'est une méthode récemment utilisée afin de détecter des singularités d'un signal donné. Contrairement à la Transformée de Fourier qui ne donne que des informations sur les amplitudes et fréquences des composantes sinusoïdales du signal, en divisant le dernier en plusieurs morceaux de longueurs différentes, la Transformation en Ondelettes est très utile au cas où la fréquence du signal dépend aussi du temps.

Étant donné un signal  $f(x)$  qui est de carré intégrable, la Transformation en Ondelettes Continues (ou « *CWT – Continuous Wavelet Transform* » en anglais) est définie par [53] :

$$Wf(u, s) = f(x) * \psi_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \overline{\psi} \left( \frac{x-u}{s} \right) \quad (1.26)$$

où  $\psi_s(x)$  est la dilatation de  $\psi(x)$  par le facteur d'échelle  $s$ ,  $u$  est le paramètre de translation.  $\overline{\psi}(x)$  est le complexe conjugué de  $\psi(x)$ .

De nombreuses études sur la détection et la localisation de l'endommagement de structures de type pont à poutres peuvent être trouvées dans la littérature. Zhu, Law (2005) [97] et Yu *et al.* (2015) [95] ont proposé des méthodes de détection de l'endommagement à partir de l'histoire du déplacement d'un point donné d'une poutre simple soumise à une force mobile. Dans leurs études, l'ondelette de type « Chapeau Mexicain » est utilisée. Il s'agit de l'opposé normalisé de la dérivée seconde d'une fonction gaussienne :

$$\psi(x) = \frac{2}{\sqrt{3}\sigma} \pi^{-1/4} \left( \frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1.27)$$

où  $\sigma$  est la déviation standard.

Dans leur exemple numérique, les auteurs ont utilisé une poutre bi-appuyée en acier ( $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ) de longueur  $L = 50 \text{ m}$ , de section rectangulaire de hauteur égale à  $1 \text{ m}$  et de largeur  $0.5 \text{ m}$ . Une force  $F_0 = 10 \text{ kN}$  passe sur la poutre à vitesse  $v = 1 \text{ m/s}$ . La poutre est fissurée à  $x_f = L/3$ . Une représentation des coefficients de la Transformation en Ondelettes (TO) dans l'exemple numérique de Zhu [97] est présentée dans la figure 1.6.

Nous voyons bien un faisceau divergent à l'endroit de la fissure. La vitesse considérée est très petite par rapport à la première vitesse critique [81] de la poutre, de l'ordre de 1 %. Quand la vitesse est grande ( $v \geq 3\%v_{c1} \cong 3 \text{ m/s}$ ), les faisceaux deviennent flous. La vitesse est un facteur qui est sensible à l'exactitude des exemples présentés. Nous observons que des rayures apparaissent en bas du graphe des coefficients avec l'augmentation de la vitesse. De plus, des événements dynamiques induits par la grande vitesse donnent plus de singularités sur la présentation des coefficients.

Hors de l'utilisation des déplacements comme données d'entrée, Pakrashi *et al.* [66] ont utilisé des jauges de déformation pour obtenir la réponse d'une poutre simple soumise à un véhicule à 2 essieux. Solis *et al.* [80] ont pris des mesures d'accélération en plusieurs points d'une poutre pour appliquer des méthodes de détection de l'endommagement basées sur la Transformation en Ondelettes.

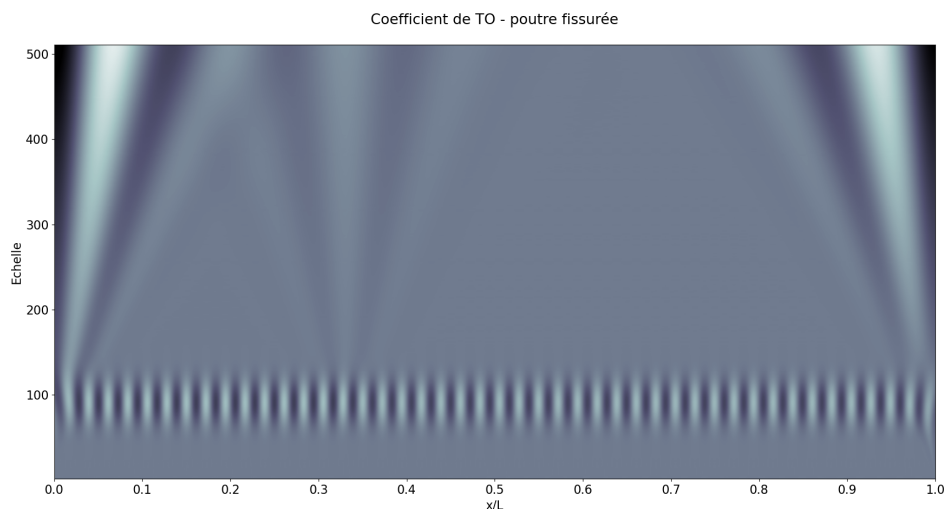


FIGURE 1.6 – Coefficients de Transformation en Ondelettes (TO) d'une poutre simple soumise à une force mobile.

#### 1.4.5 Autres méthodes

Les méthodes mentionnées ci-dessus ont un point commun : Elles utilisent l'analyse modale pour identifier les endommagements. Il existe d'autres méthodes où la réponse temporelle est utilisée directement comme entrée du modèle.

Wu *et al.* [91] ont proposé une méthode basée sur l'aire des lignes d'influence de déformation pour un pont à plusieurs travées. Pour cela, une série de jauges de déformation est installée sous la face inférieure du tablier de ponts. L'aire de la ligne d'influence pour chaque capteur est une fonction de la position des capteurs. Lorsque le véhicule traverse la travée instrumentée, cette relation est quadratique. Si le véhicule n'est pas dans la travée instrumentée, cette relation est linéaire.

$$A(x_i) \propto \begin{cases} a_1 x_i^2 + b_1 x_i + c_1, & x_i \in L_{ins} \\ a_2 x_i + b_2, & x_i \notin L_{ins} \end{cases} \quad (1.28)$$

où  $L_{ins}$  désigne la travée instrumentée.

Quand une fissure se forme, la rigidité locale diminue. Un pic apparaît alors dans le graphe  $A(x_i)$  à l'endroit de la fissure. Cette méthode permet de détecter des endommagements présents dans la travée instrumentée. Dans les essais *in situ*, la méthode donne de bons résultats dans l'intervalle  $[0.25L, 0.75L]$  avec  $L$  la longueur de la travée instrumentée.

De plus, des techniques utilisant la transformation de Hilbert-Huang (HHT) [76], la corrélation croisée entre la réponse (déplacement, accélération) de la poutre mesurée en deux points [62] ont été développées pour détecter des endommagements.

## 1.5 Modélisation de l'endommagement

La présence d'un endommagement diminue la rigidité locale de la structure. Dans la littérature, la fissure d'une poutre peut être modélisée comme une zone de réduction de rigidité en flexion :  $EI(x) \rightarrow \widetilde{EI}(x)$  (Figure 1.7a) ou un ressort spiral de flexibilité locale  $c$ , connectant deux segments de poutre [35].

Considérons une poutre de section rectangulaire de hauteur  $h$  et de largeur  $b$ . Une fissure de profondeur  $a$  est présente au point  $x = x_c$ . En ce qui concerne la première approche, Christides et Barr [21] ont proposé une formule qui permet de calculer la rigidité locale  $\widetilde{EI}(x)$  de la zone endommagée en fonction de la rigidité  $EI$  et des caractéristiques de la fissure :

$$\widetilde{EI}(x) = \frac{EI}{1 + Ce^{-\frac{2\alpha|x-x_c|}{h}}} \quad (1.29)$$

dans laquelle  $C = (I - I_c)/I_c$ ,  $I = bh^3/12$  est le moment quadratique de section non fissurée et  $I_c = b(h - a)^3/12$  est le moment d'inertie de la section fissurée.  $\alpha$  est une constante qui vaut 0.667, que Christides et Barr ont estimée expérimentalement. Pour une fissure de taille petite, une bonne approximation de la longueur de la zone endommagée est  $2h/\alpha$ , soit environ trois fois la hauteur de la poutre.

Dans la deuxième approche, le moment de flexion transmis à travers la section fissurée s'écrit (Figure 1.7b) :

$$u'(x_0^+) - u'(x_0^-) = cM(x_0) \quad (1.30)$$

où  $x_0$  est la position de la fissure et  $u(x)$  le déplacement transversal de la poutre.

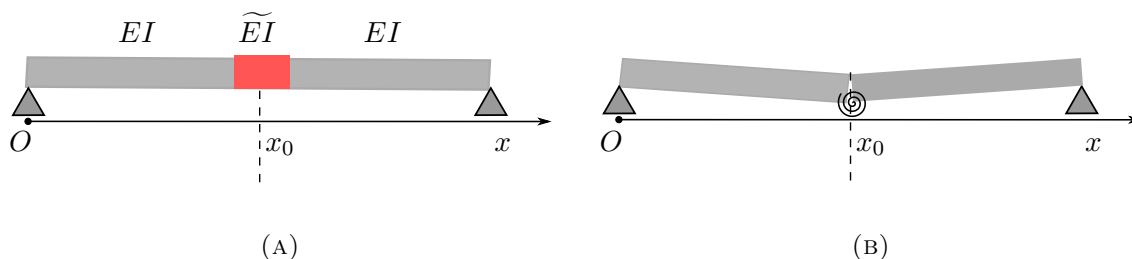


FIGURE 1.7 – Modélisation de l'endommagement dans une poutre (a), par une modification locale de la rigidité en flexion (b) par un ressort spiral.

Puisque  $M(x) = EIu''(x)$ , la relation (1.30) peut être réécrite comme suit :

$$u'(x_0^+) - u'(x_0^-) = Ku''(x_0) \quad (1.31)$$

avec  $K = E Ic$  le coefficient de proportion entre le saut de pente de la poutre et la deuxième dérivée du déplacement au niveau de la fissure.

Dans ce qui suit, l'approche par le modèle du ressort spiral sera prise en compte. Quelques modèles existants dans la littérature seront présentés. Ensuite, un modèle numérique d'une poutre soumise à une flexion en 3 points sera étudié afin de comparer les différents modèles.

### 1.5.1 Revue de la littérature

Soit une structure de type poutre, de section rectangulaire soumise à une flexion. La fissure est supposée de profondeur uniforme  $a$ . De manière générale, la flexibilité locale s'écrit :

$$c = \frac{6\pi h}{EI}(1 - \nu^2)J_1\left(\frac{a}{h}\right) \quad (1.32)$$

où  $h$  est la hauteur de la poutre,  $I$  est le moment d'inertie par rapport à l'axe neutre,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la poutre.  $J_1$  est une fonction qui ne dépend que du ratio entre la profondeur de fissure et la hauteur de la poutre  $a/h$ . L'indice « 1 » désigne que l'expression de  $J_1(a/h)$  correspond au premier mode d'ouverture de la fissure en flexion pure : ouverture selon la normale au plan de la fissure.

#### Modèle de Rizos (1989)

Rizos *et al.* [74] ont utilisé les calculs de la raideur du ressort spiral  $k_T$  proposés par Dimarogonas [26] et Dimarogonas et Paipetis [27], à partir de la fonction densité d'énergie de déformation. Dans son modèle, la flexibilité locale s'écrit [55, 74] :

$$c_\theta = \frac{6h}{EI}(1 - \nu^2)J_1(a_1) \quad (1.33)$$

avec :

$$J_1(a_1) = 1.8624a_1^2 - 3.95a_1^3 + 16.375a_1^4 - 37.226a_1^5 + 76.81a_1^6 - 126.9a_1^7 + 172a_1^8 - 143.97a_1^9 + 66.56a_1^{10} \quad (1.34)$$

$a_1 = a/h$  est le rapport entre la profondeur de la fissure et la hauteur de la poutre.

Le coefficient de proportion est obtenu à partir de la flexibilité locale :

$$K = E I c = 6h(1 - \nu^2)J_1(a_1) \quad (1.35)$$

#### Modèle d'Ostachowicz (1991)

Ostachowicz *et al.* [65] ont proposé un modèle alternatif, dans lequel l'expression du coefficient de proportion  $K$  s'écrit :

$$K = 6\pi h a_1^2 f_J(a_1) \quad (1.36)$$

avec :

$$f_J(a_1) = 0.6384 - 1.035a_1 + 3.7201a_1^2 - 5.1773a_1^3 + 7.553a_1^4 - 7.332a_1^5 + 2.4909a_1^6 \quad (1.37)$$

#### Modèle de Chondros (1998)

Chondros *et al.* [20] ont étudié la vibration d'une poutre en utilisant la fonction de perturbation des fissures et ils en ont déduit la flexibilité locale :

$$c = \frac{6\pi h(1 - \nu^2)\Phi_1(a_1)}{EI} \quad (1.38)$$

avec :

$$\Phi_1(a_1) = 0.6272a_1^2 - 1.04533a_1^3 + 4.5948a_1^4 - 9.9736a_1^5 + 20.2948a_1^6 - 33.0351a_1^7 + 47.1063a_1^8 - 40.7556a_1^9 + 19.6a_1^{10} \quad (1.39)$$



Le coefficient de proportion est  $K = EIc = 6\pi h(1 - \nu^2)\Phi_1(a_1)$ .

Le ratio  $K/(6\pi h)$  ne dépend que du rapport profondeur de la fissure / hauteur de la poutre et éventuellement du coefficient de Poisson ( $\nu$ ) du matériau constitutif de la poutre.

### 1.5.2 Comparaison avec les calculs aux éléments finis

Afin de comparer les modèles présentés ci-dessus et choisir le modèle adapté, nous avons réalisé une simulation numérique du modèle de poutre simple. Il s'agit d'un essai de flexion 3 points d'une poutre de section rectangulaire (Figure 1.8). Le matériau constitutif de la poutre est le béton, puis l'acier.

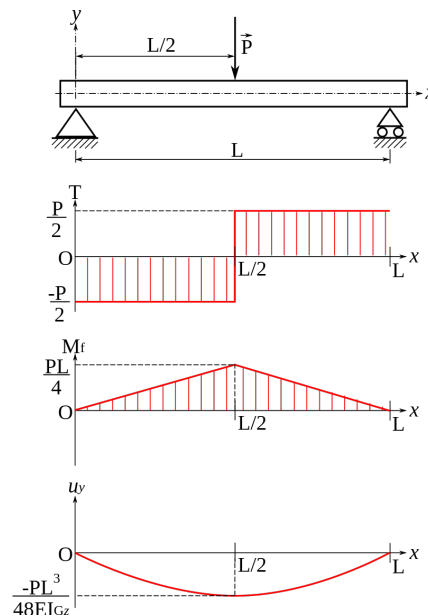


FIGURE 1.8 – Poutre simple, bi-appuyée. Source : [fr.wikipedia.org](http://fr.wikipedia.org)

### Solution analytique

La poutre est de longueur  $L$ , bi-appuyée, soumise à une force ponctuelle d'intensité  $P$  en son milieu. En cas d'endommagement, une fissure se crée au milieu de la poutre, sur la face inférieure. La discontinuité de l'effort tranchant (et de la pente de la ligne moyenne dans le cas d'une poutre fissurée) divise la poutre en deux segments :  $[0, \frac{L}{2}]$  et  $[\frac{L}{2}, L]$ . Chaque segment a alors une expression du moment fléchissant différente. Notons  $u(x) = u_y(x)$  le déplacement de la poutre au point  $x$  représenté dans la figure 1.8, les expressions du moment fléchissant  $M_f(x)$ , la pente  $u'(x)$  et le déplacement  $u(x)$  sont données dans le tableau 1.1.  $C_1, C_2, D_1, D_2$  sont des constantes à déterminer à partir des conditions aux limites et des conditions de continuité de part et d'autre de la fissure.

**Cas d'une poutre saine :**

Les conditions aux limites sont :

$$\begin{cases} u_1(0) = 0 & \Rightarrow D_1 = 0 \\ u_2(L) = 0 & \Rightarrow D_2 = -\frac{PL^3}{6EI} - C_2L \end{cases} \quad (1.40)$$

	$0 \leq x \leq \frac{L}{2}$	$\frac{L}{2} \leq x \leq L$
$M_f(x) = EIu''(x)$	$\frac{P}{2}x$	$\frac{P}{2}(L-x)$
$u'(x)$	$\frac{Px^2}{4EI} + C_1$	$-\frac{Px^2}{4EI} + \frac{PLx}{2EI} + C_2$
$u(x)$	$\frac{Px^3}{12EI} + C_1x + D_1$	$-\frac{Px^3}{12EI} + \frac{PLx^2}{4EI} + C_2x + D_2$

TABLEAU 1.1 – Expression du moment de flexion, de la pente et du déplacement de la ligne neutre des deux segments de poutre.

La continuité du déplacement et de la rotation de section en  $x = \frac{L}{2}$  donne :

$$\begin{cases} u_1\left(\frac{L}{2}\right) = u_2\left(\frac{L}{2}\right) \\ u'_1\left(\frac{L}{2}\right) = u'_2\left(\frac{L}{2}\right) \end{cases} \quad (1.41)$$

Nous déterminons alors le déplacement de chaque segment en remplaçant les expressions de  $u(x)$  et  $u'(x)$  pour les deux segments de poutre et en tenant compte des conditions (1.40, 1.41). Pour le premier segment :

$$u_1 = \frac{Px^3}{12EI} - \frac{PL^2x}{16EI} \quad (1.42)$$

A mi-travée ( $x = L/2$ ), la flèche est :

$$f_0 = |u_1(x)|_{x=L/2} = \frac{PL^3}{48EI} \quad (1.43)$$

#### **Cas d'une poutre fissurée :**

Les conditions aux limites (1.40) restent les mêmes. La continuité du déplacement à travers la fissure est toujours assurée. En revanche, la seule chose qui change est la continuité de la pente à travers la fissure. La deuxième équation dans les conditions de continuité (1.41) n'est plus valable. En section fissurée, le saut de pente de la poutre est proportionnel au moment fléchissant à cet endroit. En appliquant la relation 1.31, nous avons :

$$u'_2\left(\frac{L}{2}\right) - u'_1\left(\frac{L}{2}\right) = K \frac{M(x)}{EI} \Big|_{x=L/2} = \frac{KPL}{4EI} \quad (1.44)$$

A partir des conditions aux limites et des relations de comptabilité en section fissurée (Equations 1.40, 1.41, 1.44), nous pouvons obtenir le déplacement du premier segment de la poutre fissurée :

$$u_{1,f} = \frac{Px^3}{12EI} - \left( \frac{PL^2}{16EI} + \frac{KPL}{8EI} \right) x \quad (1.45)$$

A mi-travée, la flèche de la poutre est :

$$\begin{aligned} f &= |u_{1,f}(x)|_{x=L/2} = \frac{PL^2}{48EI}(L + 3K) \\ &= f_0 \left( 1 + 3\frac{K}{L} \right) \end{aligned} \quad (1.46)$$

avec  $f_0$  la flèche de la poutre non-fissurée, dont l'expression est donnée par (1.43).

La valeur de  $K$  est calculée en fonction de la flèche de la poutre fissurée et de la flèche de référence (poutre non-fissurée) :

$$K = \frac{L}{3} \left( \frac{f}{f_0} - 1 \right) \quad (1.47)$$

### Modélisation numérique

Dans cette partie, une poutre simple de section rectangulaire est modélisée à l'aide du logiciel libre *code\_Aster*<sup>1</sup>. Les détails géométriques de cette poutre sont :

- Longueur : 14.6 m ;
- Largeur : 0.35 m ;
- Hauteur : 0.60 m.

Une force ponctuelle  $P = 10 \text{ kN}$  est exercée au milieu de la poutre. Le mode de calcul utilisé est « statique linéaire » (MECA\_STATIQUE). A l'appui gauche, les déplacements nodaux sont bloqués dans les trois directions ( $DX = DY = DZ = 0$ ). A l'appui droit, les déplacements transversaux sont bloqués ( $DY = DZ = 0$ ). Dans le cas de la poutre endommagée, une fissure d'ouverture initiale de l'ordre de 1 mm sera ajoutée au milieu de la sous face de la poutre. Dans le *code\_Aster*, la poutre est modélisée par un modèle 3D dont les mailles supports sont volumiques.

Concernant le maillage, les éléments hexaèdres linéaires sont générés dans la plateforme SALOME<sup>2</sup>. Les caractéristiques du maillage sont :

- Taille moyenne de maille : 6 cm ;
- Nombre d'éléments : 14 400 ;
- Nombre de noeuds : 18 557.

Le matériau constitutif de la poutre est le béton, puis l'acier dont les caractéristiques sont indiquées dans le tableau 1.2.

Paramètres	Notation	Unité	Béton	Acier
Module d'élasticité	$E$	$GPa$	35.22	210
Coefficient de Poisson	$\nu$	—	0.2	0.3
Masse volumique	$\rho$	$kg/m^3$	2 500	7 800

TABLEAU 1.2 – Caractéristiques des matériaux utilisés.

Dans le cas de référence (c.à.d. poutre non-fissurée), le résultat numérique et le résultat analytique (donné par l'équation 1.43) donnent une valeur de la flèche au milieu de la poutre différant de 0.2 %. Dans une première étape, la poutre en béton est modélisée ( $\nu = 0.2$ ), le rapport  $K/(6\pi h)$  en fonction de profondeur relative de la fissure ( $a_1 = a/h$ ) est montré dans la figure 1.9. Nous voyons que les résultats numériques sont en bonne concordance avec la courbe du modèle de Rizos. Un zoom sur l'intervalle  $a_1 \in [0, 0.20]$  est

1. Logiciel de calcul aux éléments finis, développé par EDF. Site officiel : <https://code-aster.org/>

2. Logiciel libre issu d'une collaboration entre CEA, EDF et Open Cascade. Site officiel : <https://www.salome-platform.org/>

présenté dans la figure 1.10.

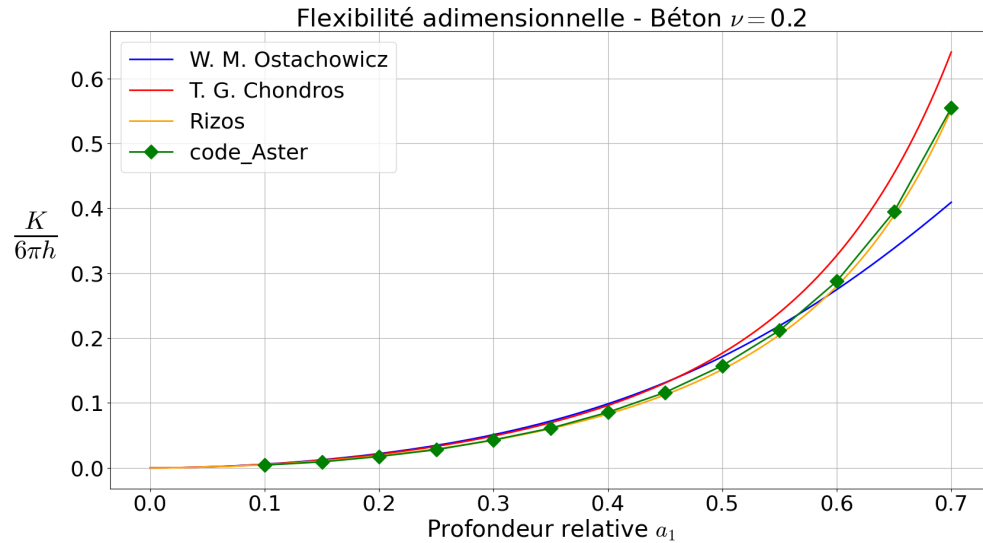


FIGURE 1.9 – Flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Béton ( $\nu = 0.2$ ).

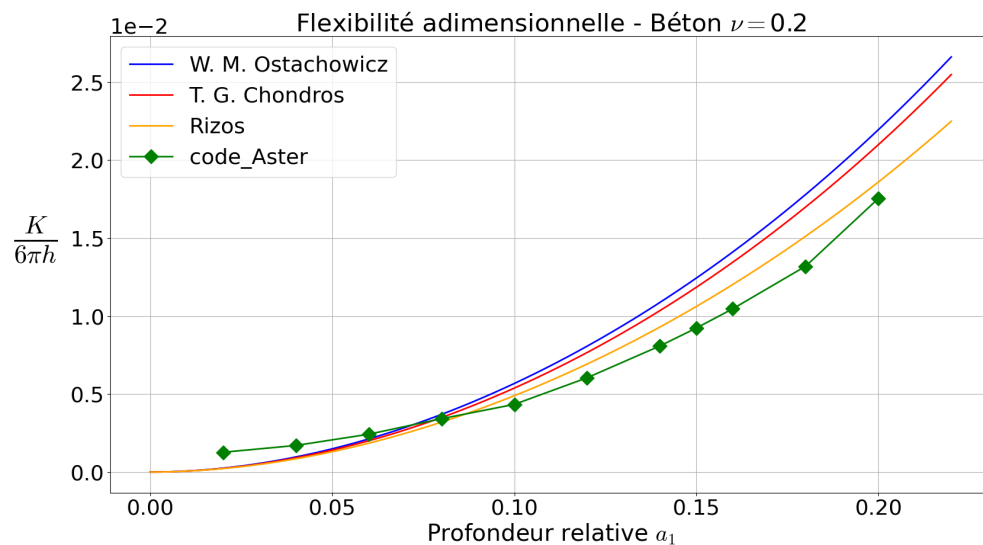


FIGURE 1.10 – Zoom sur l'intervalle  $[0, 0.2]$  de la flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Béton ( $\nu = 0.2$ ).

Quand le matériau constitutif est l'acier, les courbes obtenues avec les modèles de Chondros et Rizos (les courbes rouge et orange) sont différentes en raison du changement du coefficient de Poisson. Les résultats numériques changent également. Ces derniers se trouvent entre la courbe du modèle de Chondros (ligne rouge) et celle du modèle de Rizos (ligne orange) (Figure 1.11).

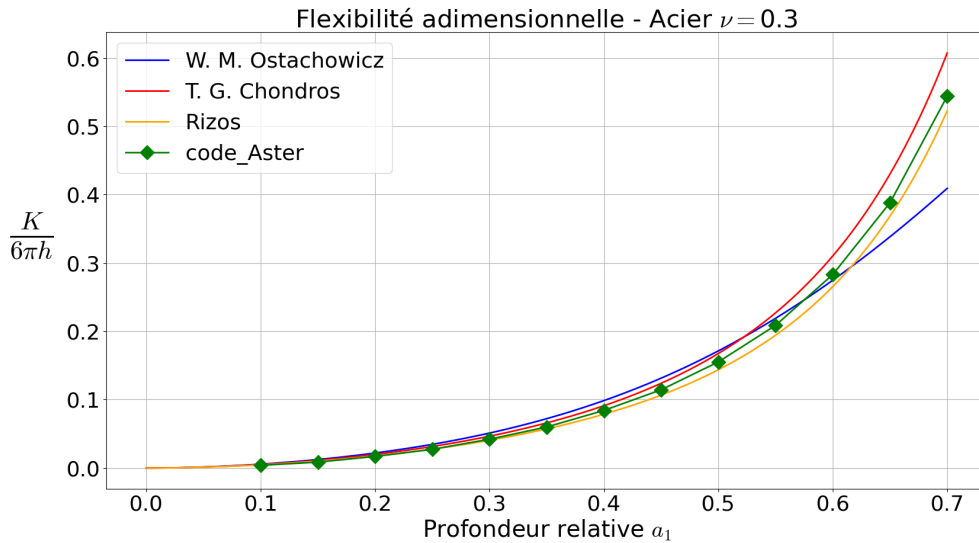


FIGURE 1.11 – Flexibilité locale adimensionnelle en fonction de la profondeur relative à la section fissurée. Matériau : Acier ( $\nu = 0.3$ ).

Parmi les cas étudiés, nous voyons que le modèle de Rizos est en bon accord avec les résultats numériques. Comme dans la plupart des cas, les ouvrages d'art sont construits en béton armé et un coefficient de Poisson de valeur 0.2 est suffisant. Le modèle de Rizos sera utilisé pour modéliser la présence d'une fissure dans le modèle analytique de poutre.

## 1.6 Modélisation de véhicules

Du point de vue théorique, le système pont – véhicule est constitué des deux sous-système : le véhicule qui passe sur le pont et la structure elle-même. De manière générale, la réponse du système est non linéaire et dépendante du temps, du fait que la force de contact entre deux sous-système varie en fonction du temps et dépend de plusieurs facteurs : la vitesse du véhicule, l'état des pneus, le profil de la route, etc. En fonction de la réponse souhaitée, du rapport entre la masse du véhicule et celle de la structure, des propriétés dynamiques du véhicule, ce dernier est modélisé par différentes approches. Dans la littérature, il existe trois grandes façons de modéliser ce chargement mobile : la force mobile, la masse mobile et la masse suspendue mobile (« sprung mass model » en anglais). Plus la modélisation du chargement est détaillée, plus le système est compliqué.

Le pont, quant-à-lui, est modélisé par une poutre unidimensionnelle dans le cas le plus simple, des plaques et des poutres dans des modèles de calculs aux éléments finis ou encore de façon plus complexe mais aussi plus complète, par des éléments massifs dans des logiciels de calculs aux éléments finis. La dernière modélisation est la plus coûteuse.

Dans le cas le plus simple, considérons un pont de type poutre de longueur  $L$ , de masse linéique  $\rho S$ , de rigidité en flexion  $EI$ , l'équation de mouvement du pont sous sollicitation

externe peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{D}}u(x, t) &= f_{ext}(x, t), \\ x &\in [0, L], \\ t &\in [0, L/v].\end{aligned}\tag{1.48}$$

où  $u(x, t)$  est le déplacement vertical de la poutre,  $\widehat{\mathcal{D}}$  est un opérateur différentiel et  $f_{ext}(x, t)$  la force externe exercée sur la poutre.  $\widehat{\mathcal{D}} = EI\partial^4/\partial x^4 + \rho S\partial^2/\partial t^2$  dans le cas d'une poutre non amortie et  $\widehat{\mathcal{D}} = EI\partial^4/\partial x^4 + E^*I\partial^5/\partial t\partial x^4 + c\partial/\partial t + \rho S\partial^2/\partial t^2$  pour une poutre amortie. Les détails seront discutés dans le Chapitre 2.

### 1.6.1 Modèle de force mobile

La modélisation du chargement par une force mobile est le modèle le plus simple, mais il est aussi le plus répandu parmi les études sur la vibration d'ouvrages d'art induite par chargement des véhicules. La force  $P$  est supposée traverser la poutre avec une vitesse constante  $v$  (Figure 1.12).

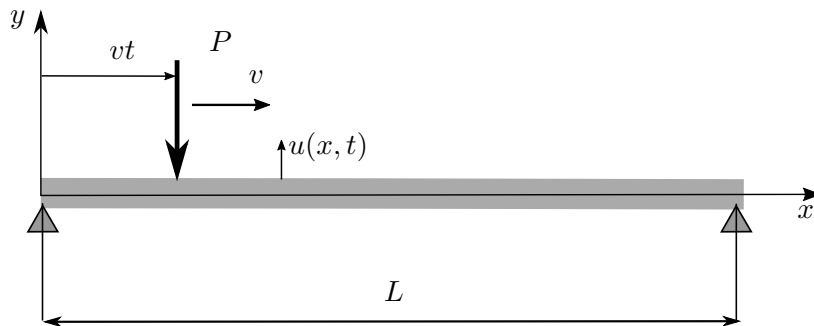


FIGURE 1.12 – Modèle de force mobile

La force exercée sur le pont par le véhicule dans ce modèle est supposée constante et égale au poids du véhicule :

$$f_{ext}(x, t) = P\delta(x - vt)\tag{1.49}$$

avec  $\delta(x)$  la fonction Delta de Dirac,  $x$  l'abscisse horizontale, et  $t$  désigne le temps.

Le modèle a été utilisé depuis le XIX<sup>e</sup> siècle. Après l'effondrement du pont ferroviaire du Chester (Angleterre) en 1847, de nombreuses études ont porté sur ce sujet. Deux ans après l'accident, Stokes [82] a examiné le problème sur une poutre d'inertie nulle. En négligeant l'effet d'inertie du véhicule, Timoshenko [84] a développé une solution approximative pour le problème d'une poutre simple soumise à des forces mobiles en 1922. A l'aide de la transformée de Fourier, Fryba [36] a donné une expression analytique pour la réponse d'une poutre simple en cas de système faiblement amorti. Foda [33] utilise la fonction de Green pour résoudre le même problème. La modélisation du véhicule par une force mobile a été également utilisée dans les travaux de Green [40], Dugush [29], Kumar [47], Museros [57], Attar [8], Svedholm [83], Nguyen et Duhamel [61], etc.

Le modèle n'est valable que si la masse du véhicule est petite par rapport à la masse du pont, et lorsque la réponse du véhicule n'est pas cherchée. Le modèle est simple, mais il permet de relever les propriétés dynamiques essentielles du pont induites par le mouvement du véhicule avec une exactitude suffisante. Cependant, l'interaction entre la structure et le véhicule n'est pas prise en compte. Avec ce modèle, la réponse de la structure peut être exprimée explicitement par des formules analytiques.

### 1.6.2 Modèle de masse mobile

Lorsque la masse du véhicule est comparable à la masse du pont, l'effet d'inertie du véhicule est pris en compte. A coté de son poids propre, le mouvement vertical du véhicule contribue à modifier la force de contact entre ces deux sous-systèmes. La masse  $M$  est supposée traverser la poutre à une vitesse constante  $v$  (Figure 1.13).

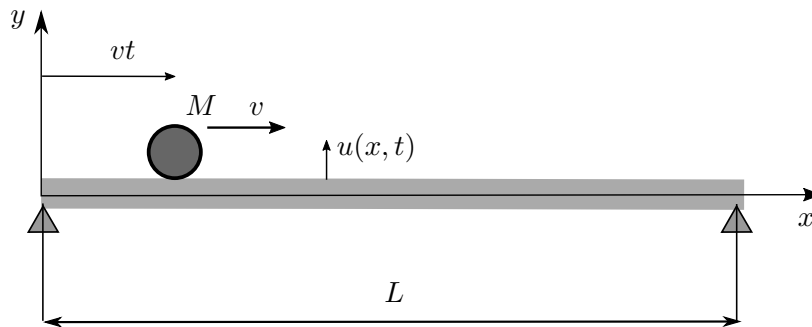


FIGURE 1.13 – Modèle de masse mobile

Supposons que la masse mobile soit toujours en contact avec la poutre. La force exercée sur cette dernière est désormais modifiée :

$$f_{ext}(x, t) = M \left( g + \frac{\partial^2 u(vt, t)}{\partial t^2} \right) \delta(x - vt) \quad (1.50)$$

où  $g$  est l'accélération de la pesanteur.

Wilson & Wilson [89] ont développé le problème de Stock [82] pour une masse mobile qui traverse une poutre d'inertie nulle. Par méthode d'itération, Mahmoud et Zaid [52] ont résolu le problème de masse mobile sous une poutre simplement bi-appuyée. Eftekhari *et al.* [30] ont utilisé le couplage de la méthode de Ritz et de la méthode de quadratures pour des éléments triangulaires pour résoudre le problème. Ichikawa *et al.* [45] ont examiné une poutre continue soumise à une masse mobile à l'aide de l'intégration numérique. L'effet d'inertie de la masse est également étudié. Biello et Bergman [13] ont étudié le problème pour une poutre endommagée.

Un des inconvénients de ce modèle est la perte de contact entre la masse mobile et la poutre. Le phénomène est appelé aussi *séparation*. Lee [48] a étudié l'effet de séparation pour le cas d'une poutre à une travée soumise à la fois à une masse mobile et une force axiale. D'après son étude, l'existence de la tension dans la structure peut empêcher le rebondissement de la masse.

### 1.6.3 Modèle de masse-ressort mobile (sprung mass)

Les modèles présentés sont utilisés au cas où seulement la réponse de la structure est souhaitée. Lorsque le mouvement du véhicule est aussi mis en considération, ou le véhicule présente des propriétés dynamiques non négligeables, le modèle du véhicule est renforcé par l'ajout d'un ressort et éventuellement un amortisseur. Un tel modèle s'appelle « sprung mass » en anglais (Figure 1.14). Un degré de liberté est ajouté au système pont – véhicule.

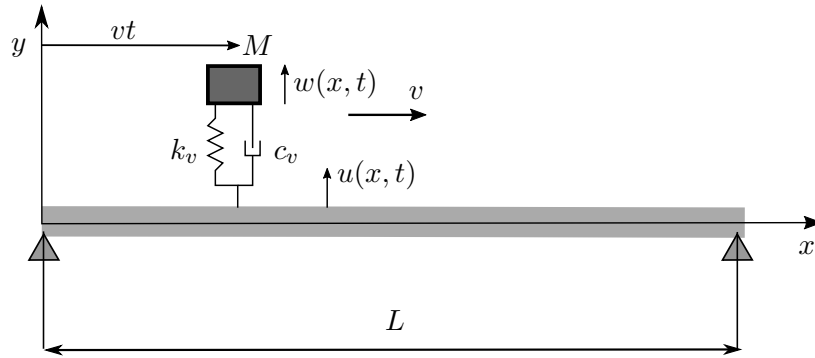


FIGURE 1.14 – Modèle de masse-ressort mobile (sprung mass)

La masse mobile  $M$  est attachée à la poutre à travers le ressort et l'amortisseur, et est supposée de vitesse constante  $v$ . Soit  $w(x, t)$  le déplacement de la masse par rapport à sa position du ressort au repos (pas de masse attachée sur la tête du ressort, ce dernier n'est pas en compression ni en traction),  $u(x, t)$  le déplacement de la poutre, avec le sens positif pointant vers le haut comme montré sur la Figure 1.14. L'expression de la force de contact sur la poutre s'écrit :

$$f_{ext}(x, t) = [-k_v(w(vt, t) - u(vt, t)) - c_v(\dot{w}(vt, t) - \dot{u}(vt, t))] \delta(x - vt) \quad (1.51)$$

où  $k_v$  est la raideur du ressort et  $c_v$  le coefficient d'amortissement liés au sous-système « véhicule ».

Comme un degré de liberté est ajouté au système, nous avons une équation additionnelle du mouvement de la masse supportée par le ressort et l'amortisseur :

$$M\ddot{w}(vt, t) = -k_v(w(vt, t) - u(vt, t)) - c_v(\dot{w}(vt, t) - \dot{u}(vt, t)) - Mg \quad (1.52)$$

Olsson [63] a proposé une méthode qui permet de résoudre le problème aux éléments finis. Par superposition modale, Azam *et al.* [9] ont résolu le problème pour une poutre de Timoshenko à l'aide des techniques numériques. Yang & Yang [92] ont proposé une solution analytique approximative de la réponse du véhicule dans le cas où la masse de ce dernier est petite devant la masse du pont.

Il existe d'autres types de modélisation du véhicule, qui sont composés des modèles présentés. Par conséquent, le modèle du véhicule est plus complexe et il n'existe pas de solution analytique explicite. Le choix du modèle dépend du type de chargement et de la réponse souhaitée.



Pesterev *et al.* [70] ont effectué une étude comparative sur le problème de chargement mobile appliqué aux poutres simples de travée longue et courte, avec différents modèles basiques du véhicule. Selon leur étude, les réponses en déplacement données par les trois modèles mentionnés sont bien en accord. Les différences entre ces réponses sont négligeables, même dans le cas où les propriétés dynamiques du véhicule sont choisies telles que la fréquence propre de ce dernier est égale à la première fréquence de résonance de la poutre.

Dans ce qui suit, comme nous ne nous intéressons qu'à la réponse de la structure, et vu que le poids des véhicules habituels est petit par rapport au poids propre du pont, le modèle de force mobile sera utilisé dans les calculs analytiques et numériques.

## 1.7 Technologie de la corde optique de OSMOS

La corde optique développée par le groupe OSMOS, est basée sur un capteur à haute précision qui permet de mesurer des déformations entre deux points avec une résolution micrométrique. En utilisant la technologie de guide d'ondes optiques, des changements de structures peuvent être mesurés. Le système de mesure d'OSMOS est basé sur le principe de modulation d'intensité avec mesures d'atténuation analogique. Cette technique fournit une solution stable et réalisable.



FIGURE 1.15 – Schéma de fibres optiques tressées (gauche) et flux de lumière dans la corde optique [16].

La corde optique est constituée de trois fibres optiques tressées (Figure 1.15). Selon le principe de micro-flexion, n'importe quel changement de longueur (tension ou compression) de ce capteur pré-tendu implique une atténuation proportionnelle de la lumière dans la fibre optique. La corde optique est la partie active du système de mesure. Chaque extrémité de la corde optique est connectée à un distributeur pour raccorder les fibres. Une extrémité de la corde optique est connectée à un câble optique, qui permet de transporter les signaux mesurés à un convertisseur optoélectronique. A l'autre extrémité, deux fibres optiques sont raccordées et forment un « court-circuit optique ». Le capteur est ensuite connecté à un câble optique normal qui permet de transporter les signaux optiques sans les convertir ni les amplifier. La corde optique est donc insensible aux bruits électromagnétiques et elle peut fonctionner sans source électrique supplémentaire.

La corde optique a l'avantage de pouvoir assurer des mesures et synchronisations des données en continu. Lors des essais dynamiques, la corde optique peut effectuer des mesures à 100 Hz. Cela permet d'évaluer des événements dynamiques tels que le passage d'un piéton, d'un poids-lourd sur un pont... Pour une surveillance à long terme, la corde optique effectue une mesure chaque 10 à 60 minutes, ou au moment où la déformation détectée excède un certain seuil. Ces mesures permettent d'évaluer des modifications saisonnières et de détecter le passage des poids-lourds sur le pont instrumenté.

## 1.8 Conclusion

Nous avons dans un premier temps fait une présentation générale des pathologies des ouvrages, pathologies pour lesquelles la corrosion des armatures s'avère une cause importante évoluant au cours du temps. Par la suite nous considérerons que la corrosion des armatures est la principale responsable de l'endommagement d'ouvrage d'art. Nous avons ensuite présenté quelques méthodes d'identification d'endommagements dans les structures (notamment de type poutre). Certaines sont sensibles à la sévérité de l'endommagement alors que d'autres permettent de déterminer des facteurs de répartition spatiale. Il faut mentionner un point commun à ces méthodes qui est le besoin d'un grand nombre de points de mesure afin de pouvoir correctement localiser les endommagements.

Ensuite, parmi les modélisations de fissure présentées, le modèle de Rizos s'avère être le plus prédictif par rapport aux résultats de calculs aux éléments finis effectués sur *code\_Aster*. Ce modèle sera donc ensuite utilisé dans certains calculs simples pour un problème direct (poutre unidimensionnelle).

Les différents modèles de chargement mobile ont été présentés. La modélisation du véhicule par des forces mobiles sera retenue en fonction de nos besoins.

Pour finir nous avons présenté la corde optique développée par OSMOS. Cette technique de mesure propose une solution pour le problème de surveillance en continu des ouvrages. Les mesures dynamiques peuvent s'effectuer à n'importe quel moment et ne gênent pas la circulation ce qui présente un grand avantage. Elles permettent par ailleurs de suivre et d'évaluer des caractères dynamiques de l'ouvrage surveillé.



Première partie  
Problème direct



## Chapitre 2

# Modèle analytique de poutre continue sous chargement mobile

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>34</b>
<b>2.2</b>	<b>Formulation</b>	<b>34</b>
<b>2.3</b>	<b>Calcul des modes</b>	<b>36</b>
2.3.1	Déformées modales	36
2.3.2	Configuration de la poutre continue	37
2.3.3	Problème aux valeurs propres	43
<b>2.4</b>	<b>Réponse sous chargements mobiles</b>	<b>45</b>
<b>2.5</b>	<b>Le facteur de masse-vitesse</b>	<b>48</b>
<b>2.6</b>	<b>Validation avec les résultats numériques</b>	<b>51</b>
2.6.1	Poutre continue non fissurée	51
2.6.2	Poutre continue à deux travées	52
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>57</b>

---

## 2.1 Introduction

Les problèmes traitant de structures élastiques soumises à des charges mobiles présentent un grand intérêt dans l'industrie. Il existe en effet beaucoup d'applications dans le domaine du génie civil, spécialement dans le domaine des ponts. Au cours du siècle dernier, de nombreuses études ont porté sur ce problème. Fryba [36] a présenté dans son ouvrage une solution analytique pour le problème de poutres simples et poutres continues soumises à une charge mobile. Les résultats sont obtenus par la combinaison des fonctions de déplacements. Ichikawa *et al.* [45] ont utilisé la superposition des modes propres pour trouver la solution d'une poutre continue à section uniforme soumise à une force ponctuelle qui passe sur la poutre à différentes vitesses. Dugush et Eisenberger [29] ont décrit les déformées modales d'une poutre continue à section non-uniforme sous forme de séries polynomiales infinies pour la recherche de la réponse temporelle. Dans le cas d'une autre approche, Foda *et al.* [33] ont utilisé la fonction de Green pour calculer la réponse dynamique d'une poutre simple soumise à une force ponctuelle. Récemment, Hoang *et al.* [43] ont utilisé la transformation de Fourier et les propriétés de la distribution peigne de Dirac pour calculer la réponse dynamique d'une poutre périodiquement supportée.

La présence d'endommagements dans la structure va modifier la réponse du système sous chargements mobiles. La présence d'une fissure dans la structure va augmenter sa flexibilité locale. En conséquence, la fissure provoque une diminution en valeurs des fréquences naturelles et une amplification de la réponse sous le même chargement. Concernant la modélisation de l'endommagement, une revue des méthodes existantes dans la littérature a été présentée dans le Chapitre 1. Le problème de la poutre endommagée sous chargement mobile a également été étudié à l'aide de plusieurs approches. Bilello *et al.* [13] ont utilisé la superposition des modes avec l'introduction de la matrice de transfert, qui relie simultanément le déplacement, la pente, le moment de flexion et l'effort tranchant des deux segments de poutre. Dans la même idée, Lin *et al.* [51] ont calculé directement la réponse d'une poutre console fissurée à l'aide de l'intégration de Duhamel.

Dans ce chapitre, nous présentons une méthode analytique permettant de calculer rapidement la réponse temporelle d'une poutre continue soumise à un système de plusieurs forces ponctuelles. En réalité, il s'agit des ponts soumis aux charges roulantes dues aux véhicules. La poutre continue est divisée en plusieurs segments de poutre dont chacun est considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli. Les segments de poutre sont reliés à l'aide d'une matrice de transfert, qui représente l'état déformé d'un segment après l'autre. L'endommagement présent dans la poutre est modélisé par un ressort spiral. La réponse finale sera obtenue par superposition des modes propres.

## 2.2 Formulation

Considérons une poutre continue de  $N_s$  travées et de longueur totale  $L$ . Un endommagement se trouve à la  $k$ -ième travée. Comme présenté dans le chapitre précédent, cet endommagement peut être modélisé comme une fissure ou une zone de réduction de rigidité en flexion, induite par la présence de la fissure [35]. L'endommagement divise cette travée en deux segments de poutre (pour le cas de la fissure) ou trois segments de poutre (le cas de la zone endommagée). La poutre initiale est donc modélisée comme un système de  $N$  segments de poutre séparés. Nous avons  $N = N_s + 1$  pour le cas de la fissure et  $N = N_s + 2$

pour le cas d'une zone de réduction de module de Young. La longueur totale de la poutre est :  $L = \sum_{j=1}^N L_j$ , où  $L_j$  est la longueur du  $j$ -ième segment de poutre. Comme montré dans la Figure 2.1, un véhicule à  $M$ -essieux arrive sur la poutre avec une vitesse constante  $v$ . Nous notons  $d_i$  la distance entre le  $i$ -ième essieu et le  $(i + 1)$ -ième essieu, la distance entre le premier essieu et le  $i$ -ième essieu est :  $D_{i-1} = \sum_{k=1}^{i-1} d_k$ . Si le véhicule ne possède qu'un essieu, par convention,  $D_0 = 0$ .

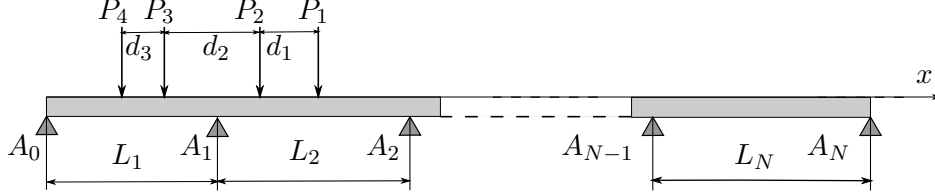


FIGURE 2.1 – Une poutre continue à  $N$  travées soumise à  $M$  charges mobiles.

Afin d'établir le problème de vibrations forcées d'une poutre continue fissurée, les hypothèses suivantes seront prises en compte :

1. Chaque segment de poutre est considéré comme une poutre d'Euler-Bernoulli à comportement linéaire élastique. Cette poutre est de section uniforme ;
2. Le véhicule est toujours en contact avec la poutre et seulement l'effet de son poids est pris en compte. L'effet d'inertie du véhicule est négligeable, vu que sa masse est petite par rapport à la masse du pont ;
3. Initialement (au moment  $t = 0$ ), le véhicule arrive sur la poutre continue à son extrémité gauche.

L'équation dynamique pour le  $j$ -ième segment de poutre s'écrit [83] :

$$E_j I \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_j^4} + E_j^* I \frac{\partial^5 u_j}{\partial t \partial x_j^4} + c \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = f_j(x_j, t) \quad (2.1)$$

dans laquelle  $E_j$  est le module de Young,  $I$  est le moment d'inertie de la poutre,  $\rho$  la masse volumique,  $S$  la section droite de la poutre,  $E_j^*$  le mécanisme d'amortissement interne et  $c$  le mécanisme d'amortissement externe. De plus, notons  $u_j$  le déplacement vertical de la poutre,  $f_j(x_j, t)$  la distribution des efforts extérieurs qui s'exercent sur la poutre,  $x_j$  la coordonnée locale le long du segment de poutre ( $0 \leq x_j \leq L_j$ ) dont l'origine se trouve à l'extrémité gauche du segment considéré et  $t$  désigne le temps.

L'effort exercé par chaque essieu est considéré comme une force ponctuelle. En utilisant la distribution de Dirac  $\delta(x_j)$  pour décrire chaque force ponctuelle, l'expression de la distribution des efforts est donnée par :

$$\begin{aligned} f_j(x_j, t) &= (P_1 \delta(x_j - vt) + P_2 \delta(x_j - vt + D_1) + \dots + P_M \delta(x_j - vt + D_{M-1})) \\ &\quad \times [H(x_j) - H(x_j - L_j)] \\ &= \left( \sum_{i=1}^M P_i \delta(x_j - vt + D_{i-1}) \right) \times [H(x_j) - H(x_j - L_j)] \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $H(x_j)$  est la fonction de Heaviside qui s'écrit :

$$H(x_j) = \begin{cases} 1, & x_j \geq 0 \\ 0, & x_j < 0 \end{cases}$$



## 2.3 Calcul des modes

Considérons maintenant la vibration libre de la poutre. Nous prenons  $f_j(x_j, t) = 0$ . En utilisant la méthode de séparation des variables, la réponse de la poutre est découpée en deux termes : un terme temporel  $q(t)$  et un autre terme spatial  $\phi_j(x_j)$ . Ce terme spatial correspond à une famille de fonctions qui s'appellent également les *déformées modales* :

$$u_j(x_j, t) = \phi_j(x_j)q(t) \quad (2.3)$$

Considérons maintenant l'équation différentielle homogène de la poutre :

$$E_j I \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_j^4} + E_j^* I \frac{\partial^5 u_j}{\partial t \partial x_j^4} + c \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0 \quad (2.4)$$

La prise en compte de l'équation (2.3) dans l'équation (2.4) nous permet d'écrire :

$$\frac{\phi_j''''(x_j)}{\phi_j(x_j)} = -\frac{\rho S \ddot{q} + c \dot{q}}{E_j I q + E_j^* I \dot{q}} = \lambda_j^4 \quad (2.5)$$

où  $\lambda_j$  est une constante. L'opérateur prime  $(\star)'$  désigne la dérivée de la fonction  $(\star)$  par rapport à la variable  $x$  (la composante spatiale).

Pour le calcul des modes, dans un premier temps nous ne prenons pas en compte les amortissements. Supposons que la réponse du système est de type :  $u_j(x_j, t) = \phi_j(x_j)e^{i\omega t}$ , où  $\omega$  est la pulsation de la poutre continue. L'équation (2.5) devient alors :

$$\frac{\phi_j''''(x_j)}{\phi_j(x_j)} = \frac{\rho S \omega^2}{E_j I} = \lambda_j^4 \quad (2.6)$$

### 2.3.1 Déformées modales

A partir de l'équation (2.5), pour le  $j$ -ième segment de poutre, les déformées modales sont solutions de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4 \phi_j(x_j)}{dx_j^4} - \lambda_j^4 \phi_j(x_j) = 0 \quad (2.7)$$

avec  $\phi_j(x_j)$  la déformée modale du  $j$ -ième segment de poutre dont la forme générale est exprimée comme suit :

$$\phi_j(x_j) = A_j \sin \lambda_j x_j + B_j \cos \lambda_j x_j + C_j \sinh \lambda_j x_j + D_j \cosh \lambda_j x_j \quad (2.8)$$

De plus, la pulsation  $\omega$  est un critère global de la poutre continue. A chaque mode de vibration, elle prend la même valeur quelque soit le segment de poutre. La relation (2.6) nous permet d'exprimer la valeur  $\lambda_j$  d'un segment en fonction d'un autre. Par exemple, soit  $E_0$  le module de Young d'un segment de poutre non-endommagée, nous avons :

$$\lambda_j = \sqrt[4]{\frac{E_0}{E_j}} \lambda_0 = \mu_j \lambda_0 \quad (2.9)$$

dans laquelle  $\mu_j = \sqrt[4]{E_0/E_j}$ .

Dans ce qui suit, nous adoptons l'écriture  $x_j = x - \sum_{i=1}^{j-1} L_i$  ( $0 \leq x_j \leq L_j$ ) pour désigner la coordonnée locale du  $j$ -ième segment de poutre.

### 2.3.2 Configuration de la poutre continue

Dans cette section, les matrices de transfert sont introduites afin d'assurer les conditions de continuité au niveau de la fissure, des interfaces entre la zone endommagée et le reste de la poutre, et enfin, des appuis intermédiaires. L'état déformé d'un segment de poutre est caractérisé par les coefficients  $A_j, B_j, C_j, D_j$ . Nous notons  $X_j = [A_j, B_j, C_j, D_j]^T$  le vecteur qui contient les coefficients des déformées modales du  $j$ -ième segment de poutre. A l'interface de deux segments consécutifs (au niveau de la fissure et des appuis intermédiaires), une matrice de transfert de taille  $4 \times 4$ , notée  $\mathbf{M}_{4 \times 4}$ , est utilisée pour mettre en relation les vecteurs de coefficients :  $X_j = \mathbf{M}_{4 \times 4} X_{j-1}$ . De plus, nous admettons qu'en dehors de la zone endommagée, le module de Young de la poutre continue est de même valeur pour toutes les travées. C'est-à-dire  $E_j = E = \text{const}, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\} \setminus \{k_2\}$  (sauf zone de réduction de rigidité en flexion  $EI$ ).

#### Travée endommagée

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la fissure est modélisée comme un ressort spiral de flexibilité locale  $c_\theta$ , ou une zone de réduction du module de Young  $\Delta E$ . Dans la suite, nous allons considérer ces deux approches.

#### L'interface à la fissure

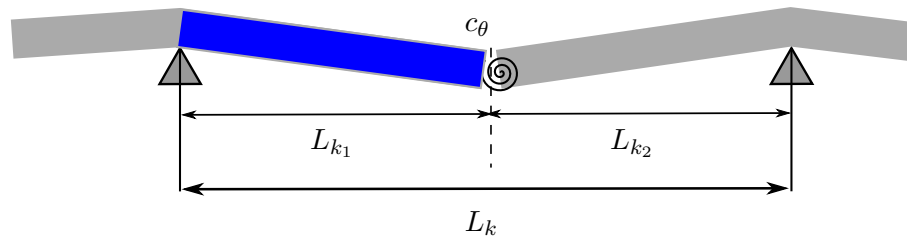


FIGURE 2.2 – La travée fissurée de la poutre continue

Dans la première approche, l'endommagement est modélisé comme un ressort spiral (Figure 2.2). En section fissurée, le saut de pente est proportionnel au moment de flexion à cet endroit :  $\Delta u'(x) = c_\theta M(x)$ . Remarquons que  $M(x) = EI u''(x)$ . Cette relation peut être écrite comme suit :

$$u'_{k_2}(0, t) - u'_{k_1}(L_{k_1}, t) = K u''_{k_2}(0, t) \quad (2.10)$$

avec  $K = EI c_\theta$  le coefficient de proportion en section fissurée.

Pour une poutre de section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$  qui possède une fissure uniforme de profondeur  $a$ , nous utilisons le modèle de Rizos [74] :

$$c_\theta = \frac{6h(1 - \nu^2)}{EI} J_1(a/h) \quad (2.11)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la poutre,  $EI$  la rigidité en flexion et  $J_1(a/h) = J_1(a_1)$  une fonction de la profondeur relative (le rapport  $a/h$ ) de la

fissure :

$$J_1(a_1) = 1.8624a_1^2 - 3.95a_1^3 + 16.375a_1^4 - 37.226a_1^5 + 76.81a_1^6 - 126.9a_1^7 + 172a_1^8 - 143.97a_1^9 + 66.56a_1^{10} \quad (2.12)$$

Finalement, nous obtenons :  $K = E I c_\theta = 6h(1 - \nu^2)J_1(a_1)$ .

De part et d'autre de la fissure, le déplacement vertical, le moment de flexion et l'effort tranchant restent inchangés. Les conditions de continuité à la fissure sont :

$$\begin{aligned} u_{k_1}(L_{k_1}, t) &= u_{k_2}(0, t) \\ E_{k_1} I u_{k_1}''(L_{k_1}, t) &= E_{k_2} I u_{k_2}''(0, t) \\ E_{k_1} I u_{k_1}'''(L_{k_1}, t) &= E_{k_2} I u_{k_2}'''(0, t) \end{aligned} \quad (2.13)$$

A partir des relations (2.10) et (2.13), nous déduisons :

$$X_{k_2} = \mathbf{T}(K, L_{k_1}) X_{k_1} = \mathbf{T}_{k_1} X_{k_1} \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{T}(K, L_{k_1})$  est la matrice de transfert en section fissurée. Notons que  $E_{k_1} = E_{k_2} = E$ , nous trouvons l'expression de  $\mathbf{T}_{k_1} = \mathbf{T}(K, L_{k_1})$  (pour la construction de la matrice  $\mathbf{T}(K, L_{k_1})$ , voir l'annexe A.1) :

$$\mathbf{T}_{k_1} = \begin{bmatrix} -b.s + c & -s - b.c & b.sh & b.ch \\ s & c & 0 & 0 \\ -b.s & -b.c & b.sh + ch & sh + b.ch \\ 0 & 0 & sh & ch \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

avec :

$$\begin{aligned} b &= \frac{K \lambda_{k_1}}{2} = 3h(1 - \nu^2)J_1(a_1)\lambda_{k_1} \\ s &= \sin \lambda_{k_1} L_{k_1}, \quad c = \cos \lambda_{k_1} L_{k_1} \\ sh &= \sinh \lambda_{k_1} L_{k_1}, \quad ch = \cosh \lambda_{k_1} L_{k_1} \end{aligned}$$

La matrice de transfert en section fissurée  $\mathbf{T}(K, L_{k_1})$  ne dépend que de la longueur  $L_{k_1}$  et de la profondeur relative de la fissure ( $a_1 = a/h$ ). Pour des raisons de compacité, nous la notons aussi  $\mathbf{T}_{k_1}$ .

### L'interface de la zone endommagée

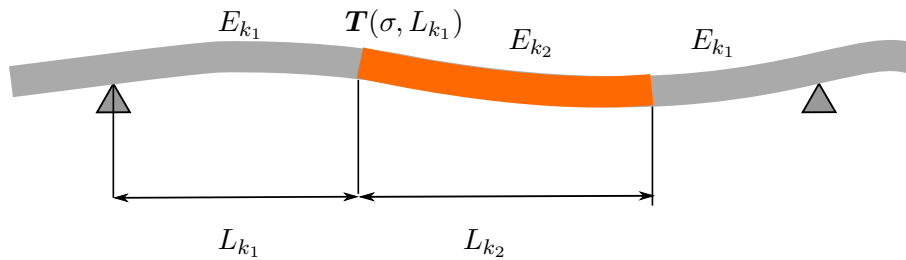


FIGURE 2.3 – La travée endommagée de la poutre continue

Dans la deuxième approche, l'endommagement est modélisé comme une zone avec un module de Young réduit, de longueur  $L_{k_2}$  et de module d'élasticité  $E_{k_2}$  ( $E_{k_2} < E_{k_1}$ , où

$E_{k_1}$  est le module de Young de la poutre saine), comme montré dans la figure 2.3. Nous établissons les matrices de transfert aux interfaces de cette zone (en orange, Fig. 2.3) et le reste de la poutre.

Considérons d'abord l'interface gauche de la zone endommagée. A travers cette interface, nous supposons que le déplacement vertical, la pente de l'axe neutre, le moment de flexion et l'effort tranchant restent également inchangés. Ces conditions de continuité se transforment en relations entre les déplacements à gauche et à droite de l'interface, ainsi que leurs dérivées :

$$\begin{aligned} u_{k_1}(L_{k_1}, t) &= u_{k_2}(0, t) \\ u'_{k_1}(L_{k_1}, t) &= u'_{k_2}(0, t) \\ E_{k_1} I u''_{k_1}(L_{k_1}, t) &= E_{k_2} I u''_{k_2}(0, t) \\ E_{k_1} I u'''_{k_1}(L_{k_1}, t) &= E_{k_2} I u'''_{k_2}(0, t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Notons  $\sigma = \sigma_{12} = \sqrt[4]{E_{k_1}/E_{k_2}} = \lambda_{k_2}/\lambda_{k_1}$ , nous obtenons la matrice de transfert  $\mathbf{T}(\sigma, L_{k_1})$  telle que :

$$X_{k_2} = \mathbf{T}(\sigma, L_{k_1}) X_{k_1} = \mathbf{T}_{k_1} X_{k_1} \quad (2.17)$$

où  $\mathbf{T}_{k_1} = \mathbf{T}(\sigma, L_{k_1})$  est la matrice de transfert à l'interface dont l'expression est la suivante (voir annexe A.2) :

$$\mathbf{T}_{k_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \sigma^2)c/\sigma & -(1 + \sigma^2)s/\sigma & (1 - \sigma^2)ch/\sigma & (1 - \sigma^2)sh/\sigma \\ (1 + \sigma^2)s & (1 + \sigma^2)c & (1 - \sigma^2)sh & (1 - \sigma^2)ch \\ (1 - \sigma^2)c/\sigma & -(1 - \sigma^2)s/\sigma & (1 + \sigma^2)ch/\sigma & (1 + \sigma^2)sh/\sigma \\ (1 - \sigma^2)s & (1 - \sigma^2)c & (1 + \sigma^2)sh & (1 + \sigma^2)ch \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

avec :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt[4]{E_{k_1}/E_{k_2}} \\ s &= \sin \lambda_{k_1} L_{k_1}, \quad c = \cos \lambda_{k_1} L_{k_1} \\ sh &= \sinh \lambda_{k_1} L_{k_1}, \quad ch = \cosh \lambda_{k_1} L_{k_2} \end{aligned}$$

Comme la matrice de transfert en section fissurée, cette matrice ne dépend que de la longueur  $L_{k_1}$  et du rapport  $\sigma = \sigma_{12} = \sqrt[4]{E_{k_1}/E_{k_2}}$ . Nous notons cette matrice  $\mathbf{T}_{k_1}$ .

Avec la même démarche, nous établissons également la matrice de transfert  $\mathbf{T}_{k_2}$  pour l'interface droite, qui ne dépend que de la longueur  $L_{k_2}$  de la zone endommagée et du rapport  $\sigma_{21} = \sqrt[4]{E_{k_2}/E_{k_1}}$ .

### Les appuis intermédiaires <sup>1</sup>

Les appuis intermédiaires sont supposés infiniment rigides. Les déplacements de la poutre sont bloqués à ces endroits. Cependant, la pente et le moment de flexion restent inchangés.

---

1. A l'exception de l'appui gauche de la travée endommagée

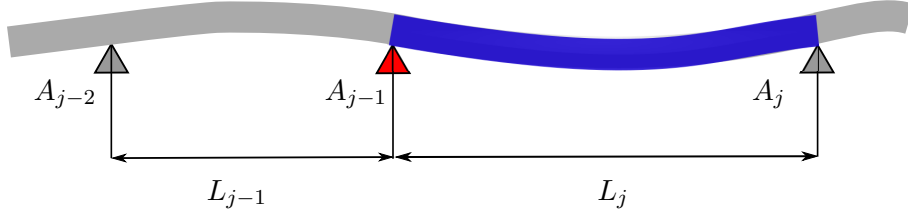


FIGURE 2.4 – La travée non-fissurée entre deux appuis intermédiaires.

Considérons la  $j$ -ième travée. Supposons que cette travée n'est pas endommagée. Elle est considérée comme un segment de poutre d'Euler-Bernoulli. Les deux extrémités de cette poutre sont bloquées aux appuis :

$$\begin{aligned} u_j(0, t) &= 0 \\ u_j(L_j, t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

À l'extrémité gauche (c.à.d. à l'appui  $A_{j-1}$  - l'appui rouge, Figure 2.4), la pente et le moment de flexion de la poutre globale ne changent pas. Ces conditions de continuité s'expriment comme suit :

$$\begin{aligned} u'_j(0, t) &= u'_{j-1}(L_{j-1}, t) \\ E_j I u''_j(0, t) &= E_{j-1} I u''_{j-1}(L_{j-1}, t) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nous obtenons une matrice de transfert  $\mathbf{S}(L_{j-1}, L_j)$  qui relie les vecteurs de coefficients des travées  $j-1$  et  $j$ . La matrice  $\mathbf{S}$  est de taille  $4 \times 4$  et son expression est la suivante (voir annexe A.3) :

$$\mathbf{S}_{4 \times 4} = \frac{1}{2\sigma} \begin{bmatrix} -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot s + 2\eta \cdot c & -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot c - 2\eta \cdot s & \sigma^3 \cdot \kappa \cdot sh + 2\eta \cdot ch & \sigma^3 \cdot \kappa \cdot ch + 2\eta \cdot sh \\ \sigma^3 \cdot s & \sigma^3 \cdot c & -\sigma^3 \cdot sh & -\sigma^3 \cdot ch \\ \sigma^3 \cdot \kappa \cdot s + 2\varepsilon \cdot c & \sigma^3 \cdot \kappa \cdot c - 2\varepsilon \cdot s & -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot sh + 2\varepsilon \cdot ch & -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot ch + 2\varepsilon \cdot sh \\ -\sigma^3 \cdot s & -\sigma^3 \cdot c & \sigma^3 \cdot sh & \sigma^3 \cdot ch \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

La matrice  $\mathbf{S}_{4 \times 4}$  pourrait être également exprimée sous forme de produit des matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} -\kappa & \eta \\ 1 & 0 \\ \kappa & \varepsilon \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & c & -sh & -ch \\ c & -s & ch & sh \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}_j \boldsymbol{\Sigma}_{j-1, j} \mathbf{W}_{j-1} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dans laquelle  $\sigma = \sqrt[4]{E_{j-1}/E_j}$  et  $s$ ,  $c$ ,  $sh$ ,  $ch$  sont des fonctions sinusoïdales et sinusoïdales hyperboliques de la  $(j-1)$ -ième travée :

$$\begin{aligned} s &= \sin \lambda_{j-1} L_{j-1}, \quad c = \cos \lambda_{j-1} L_{j-1} \\ sh &= \sinh \lambda_{j-1} L_{j-1}, \quad ch = \cosh \lambda_{j-1} L_{j-1} \end{aligned}$$

Les fonctions  $\kappa$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon$  ne contiennent que les informations de la  $j$ -ième travée :

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\cos \lambda_j L_j - \cosh \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j} \\ \eta &= -\frac{\sinh \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j} \\ \varepsilon = 1 - \eta &= \frac{\sin \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j}\end{aligned}$$

Nous observons que les matrices  $\mathbf{V}_j$ ,  $\mathbf{W}_{j-1}$  contiennent respectivement des informations liées aux propriétés géométriques (longueur, nombre d'onde) des travées  $j$  et  $j-1$ , alors que la matrice  $\mathbf{\Sigma}_{j-1,j}$  est une fonction du rapport des rigidités de ces deux travées consécutives.

Dans notre problème, nous avons  $E_{j-1} = E_j = E$ , cela implique  $\sigma = 1$  dans l'expression de la matrice de transfert  $\mathbf{S}$ . De plus, nous avons :  $\lambda_{j-1} = \lambda_j$ .

Il faut noter également que la somme de la deuxième ligne et de la quatrième ligne de la matrice  $\mathbf{S}_{4 \times 4}$  est égale à zéro. Cette matrice est donc singulière. Cette conclusion est expliquée par le fait que le segment de poutre est bloqué à ses deux extrémités et que deux composantes du vecteur de coefficients peuvent être exprimées par les deux autres. Le vecteur de coefficients est de dimension 2. L'expression  $X_j = \mathbf{S}_{4 \times 4} X_{j-1}$  permet de calculer les coefficients des déformées modales de la  $j$ -ième travée connaissant ceux de la  $(j-1)$ -ième travée. La matrice  $\mathbf{S}$  n'est pas inversible.

### L'appui gauche de la travée endommagée

Considérons maintenant l'appui gauche de la travée endommagée (le  $k$ -ième appui). Cet appui est particulier du fait que la  $k$ -ième travée est divisée en deux ou trois segments de poutre séparés, en fonction de la modélisation de l'endommagement. La figure 2.5 présente le cas où la fissure est modélisée par un ressort spiral. En conséquence, la deuxième condition aux limites dans les équations (2.19) n'est plus satisfaite. Par contre, les autres conditions restent les mêmes.

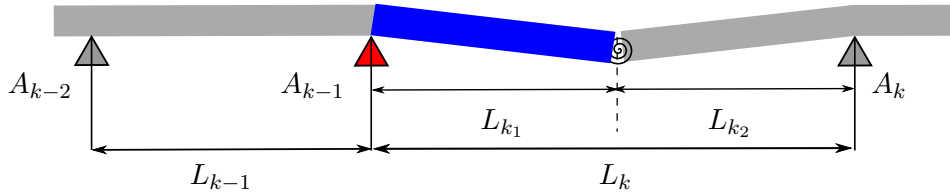


FIGURE 2.5 – Appui gauche de la travée fissurée

L'extrémité droite du segment  $k_e$  est liée à l'appui  $A_k$  (le nombre de segments de poutre dans cette travée est  $e = 2$  si l'endommagement est une fissure,  $e = 3$  si cette dernière est modélisée par une zone endommagée). Le déplacement vertical à cet endroit est bloqué. Nous avons :

$$u_{k_e}(L_{k_e}) = 0 \quad (2.23)$$

$$\Rightarrow A_{k_e} \sin \lambda_{k_e} L_{k_e} + B_{k_e} \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} + C_{k_e} \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} + D_{k_e} \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e} = \mathbf{b}_{k_e}^T X_{k_e} = 0 \quad (2.24)$$

Avec  $\mathbf{b}_{k_e} = [\sin \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e}]^T$  et,  $X_{k_e} = [A_{k_e}, B_{k_e}, C_{k_e}, D_{k_e}]^T$ .

En reportant la relation (2.14) en section fissurée et la relation (2.17) en interface de la zone endommagée dans l'équation (2.24), nous obtenons :

$$\mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{T} X_{k_1} = 0 \quad (2.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}_1(K, L_{k_1}), & \text{si } c_\theta \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}_2(\sigma_{12}, L_{k_2}) \cdot \mathbf{T}_1(\sigma_{21}, L_{k_1}), & \text{si } \Delta E \end{cases} \quad (2.26)$$

A partir des conditions (2.19), (2.20), (2.25), nous obtenons une matrice  $\mathbf{G}_{4 \times 4}$ , dite la matrice de transfert à l'appui gauche de la travée fissurée dont l'expression est la suivante (voir annexe A.4) :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} -\kappa & \eta \\ 1 & 0 \\ \kappa & \varepsilon \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & c & -sh & -ch \\ c & -s & ch & sh \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}_k \boldsymbol{\Sigma}_{k-1, k_1} \mathbf{W}_{k-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

La matrice  $\mathbf{G}$  a une structure identique à la matrice  $\mathbf{S}$ , mais les expressions de ses composantes ne sont pas les mêmes. Similaires à la matrice  $\mathbf{S}$ , nous notons  $\sigma = \sqrt[4]{E_{k-1}/E_{k_1}}$  et  $s, c, sh, ch$  des fonctions sinusoïdales et sinusoïdales hyperboliques de la  $(k-1)$ -ième travée :

$$\begin{aligned} s &= \sin \lambda_{k-1} L_{k-1}, \quad c = \cos \lambda_{k-1} L_{k-1} \\ sh &= \sinh \lambda_{k-1} L_{k-1}, \quad ch = \cosh \lambda_{k-1} L_{k-1} \end{aligned}$$

Les fonctions  $\kappa, \eta, \varepsilon$  ne contiennent que les informations de la  $k$ -ième travée, qui est composée de segments de poutre :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_2 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_4}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \\ \eta &= -\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_3}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \\ \varepsilon &= 1 - \eta = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{b}_{k_e} = [\sin \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e}]^T$  et  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont les colonnes de  $\mathbf{T}$ , qui est la matrice résultante des matrices de transfert en section fissurée. Nous supposons que les segments  $k-1$  et  $k_1$  ont la même propriété de section et de matériau, nous déduisons  $\sigma = 1$  et  $\lambda_{k-1} = \lambda_{k_1}$ . Comme la matrice  $\mathbf{S}$ , la matrice  $\mathbf{G}$  est aussi singulière.

### La matrice exprimant la condition à l'extrémité droite de la poutre continue

La poutre est appuyée sur un appui simple à son extrémité droite. Cela impose la nullité du déplacement vertical et du moment de flexion à ce point. Notons que la condition  $u_N(L_N) = 0$  est utilisée pour établir des matrices de transfert ( $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{G}$ ). Pour cet appui, il ne reste qu'une condition aux limites à prendre en compte :

$$u_N''(L_N) = 0 \quad (2.28)$$

La condition (2.28) peut être exprimée sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} -\sin \lambda_N L_N & -\cos \lambda_N L_N & \sinh \lambda_N L_N & \cosh \lambda_N L_N \end{bmatrix} X_N = \mathbf{B}(L_N) X_N = 0 \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{B}(L_N)$  est une matrice de dimension  $1 \times 4$  qui décrit la nullité du moment de flexion à l'extrémité droite de la poutre.

### 2.3.3 Problème aux valeurs propres

Pour tous les appuis intermédiaires, à l'exception de l'appui gauche de la travée fissurée, nous avons toujours la relation :

$$X_j = \mathbf{S}_{j-1,j} X_{j-1} \quad (2.30)$$

Pour la travée fissurée, nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} X_{k_1} &= \mathbf{G} X_{k-1}, \quad k \geq 2 \\ X_{k_e} &= \mathbf{T} X_{k_1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

En arrangeant ces matrices, nous obtenons :

$$\boxed{(\mathbf{B}_N \cdot \mathbf{S}_{N-1,N} \cdot \mathbf{S}_{N-2,N-1} \cdots \mathbf{S}_{k_2,k_1+1} \cdot \mathbf{T}_{k_1} \cdot \mathbf{G}_{k-1,k_1} \cdot \mathbf{S}_{k-2,k-1} \cdots \mathbf{S}_{1,2}) X_1 = 0} \quad (2.32)$$

Le produit matriciel du côté gauche de l'équation (2.32) donne une matrice résultante de taille  $1 \times 4$  que nous notons  $\mathbf{R}$ . Nous pouvons récrire cette équation sous une forme plus condensée :

$$\mathbf{R} X_1 = 0 \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{R} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4]$ ,  $r_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

A l'extrémité gauche, la poutre est appuyée sur un appui simple. En conséquence, le déplacement et le moment de flexion en ce point sont toujours égaux à zéro. Nous avons :

$$\begin{cases} u_1(0, t) = 0 \\ E_1 I u_1''(0, t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_1 = 0 \\ D_1 = 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Nous considérons le deuxième appui de la poutre continue. Le déplacement de la poutre à cet endroit est nul. Quand aucun endommagement n'est présent dans la première travée, comme  $X_1 = [A_1, B_1, C_1, D_1]^T = [A_1, 0, C_1, 0]^T$  nous avons :

$$A_1 \sin \lambda_1 L_1 + C_1 \sinh \lambda_1 L_1 = 0 \quad (2.35)$$



Lorsqu'un endommagement est présent dans la première travée, nous introduisons le vecteur  $\mathbf{b}_{k_e} = [\sin \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e}]^T$  et la matrice résultante  $\mathbf{T} = [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2 | \mathbf{t}_3 | \mathbf{t}_4]$ , comme décrit dans les équations (2.24) et (2.26). Nous avons :

$$\mathbf{b}_{k_e}^T X_{k_e} = \mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{T} X_1 = 0 \quad (2.36)$$

$$\Rightarrow \mathbf{b}_{k_e}^T [\mathbf{t}_1 | \mathbf{t}_2 | \mathbf{t}_3 | \mathbf{t}_4] \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \\ C_1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (2.37)$$

Nous en déduisons :

$$A_1 \mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{t}_1 + C_1 \mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{t}_3 = 0 \quad (2.38)$$

A partir des équations (2.35) et (2.38), nous observons que le coefficient  $C_1$  peut être exprimé en terme du coefficient  $A_1$  :

$$C_1 = \gamma(\omega) A_1 \quad (2.39)$$

dans laquelle :

$$\gamma(\omega) = \begin{cases} -\frac{\sin \lambda_1 L_1}{\sinh \lambda_1 L_1}, & k \geq 2 \\ -\frac{\mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{t}_1}{\mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{t}_3}, & k = 1 \end{cases} \quad (2.40)$$

où  $\lambda_1 = \sqrt{\omega^4 \sqrt{\rho S / E_1 I}}$ .

Nous pouvons récrire le vecteur de coefficients du premier segment de poutre sous la forme :

$$X_1 = [A_1 \quad 0 \quad \gamma(\omega) A_1 \quad 0]^T \quad (2.41)$$

L'existence de la solution non-triviale de l'équation (2.33) nous permet d'écrire :

$$f(\omega) = r_1(\omega) + \gamma(\omega) r_3(\omega) = 0 \quad (2.42)$$

Les fréquences propres de la poutre continue sont obtenues à partir des solutions de l'équation (2.42).

Une fois les pulsations propres  $\{\omega_n\}$  trouvées, les déformées modales seront normalisées tel que :

$$\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{mn} \quad (2.43)$$

où  $\delta_{mn}$  est le delta de Kronecker.

Comme la poutre initiale est divisée en  $N$  segments, la déformée modale (correspondante au  $n$ -ième mode) est la somme des déformées modales de chaque segment :

$$\phi_n(x) = \sum_{j=1}^N \phi_{n,j}(x - l_{j-1}) [H(x - l_{j-1}) - H(x - l_j)] \quad (2.44)$$

dans laquelle  $\phi_{n,j}$  est la déformée modale du  $j$ -ième segment de poutre pour le  $n$ -ième mode,  $l_j = \sum_{i=1}^j L_i$  est la longueur totale des  $j$  premiers segments ( $l_0 = 0$  par convention).  $L_j$  est la longueur du  $j$ -ième segment.

En changeant les coordonnées du repère global au repère local, la normalisation des déformées modales (2.43) peut être réécrite comme suit :

$$\int_0^L \phi_m(x)\phi_n(x) = \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \phi_{m,j}(x_j)\phi_{n,j}(x_j)dx_j = \delta_{mn} \quad (2.45)$$

## 2.4 Réponse sous chargements mobiles

La solution de la poutre continue est la somme des solutions correspondant à l'équation qui gouverne le mouvement de chaque segment de poutre :

$$E_j I \frac{\partial^4 u_j}{\partial x_j^4} + E_j^* I \frac{\partial^5 u_j}{\partial t \partial x_j^4} + c \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = f_j(x_j, t) \quad (2.46)$$

pour  $0 \leq x_j \leq L_j$ .

La solution de (2.46) peut être décomposée suivant une combinaison linéaire des déformées modales orthonormales  $\phi_n(x)$  :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) q_n(t) \quad (2.47)$$

où  $q_n(t)$  sont les coordonnées généralisées du  $n$ -ième mode. Les déformées modales  $\phi_n(x)$  ont été déterminées dans la partie précédente (Section 2.3.3). Dans cette partie, nous cherchons les coordonnées généralisées  $q_n(t)$ .

En reportant l'équation (2.47) dans l'équation (2.46), puis multipliant les deux côtés par  $\phi_n(x)$  et intégrant les deux expressions de l'égalité entre 0 et L, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & q_n(t) \sum_j E_j I \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^{(4)}(x_j) \phi_{n,j}(x_j) dx_j \\ & + \dot{q}_n(t) \times \left( \sum_j E_j^* I \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^{(4)}(x_j) \phi_{n,j}(x_j) dx_j + c \sum_j \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^2(x_j) dx_j \right) \\ & + \ddot{q}_n(t) \rho S \sum_j \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^2(x_j) dx_j = \sum_{i=1}^M P_i \phi_n(vt - D_{i-1}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nous pouvons définir la pulsation propre  $\omega_n$  du système non-amorti :

$$\omega_n^2 = \frac{\sum_j E_j I \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^{(4)}(x_j) \phi_{n,j}(x_j) dx_j}{\rho S \sum_j \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^2(x_j) dx_j} \quad (2.49)$$

A partir de la relation (2.6), nous pouvons voir le lien entre la pulsation propre  $\omega_n$  et la valeur de  $\lambda_{n,j}$  du segment  $j$  de poutre :

$$\omega_n^2 = \lambda_{n,j}^4 \frac{E_j I}{\rho S} \quad (2.50)$$

De plus, en utilisant la méthode de l'intégration par parties, l'expression (2.49) peut être réécrite sous la forme :

$$\omega_n^2 = \frac{\int_0^L \phi_n''(x)E(x)I\phi_n''(x)dx}{\int_0^L \phi_n(x)\rho S\phi_n(x)dx} = \frac{\mathbf{K}_n^*}{\mathbf{M}_n^*} \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{K}_n^*$ ,  $\mathbf{M}_n^*$  sont respectivement la raideur généralisée et la masse généralisée correspondantes au mode  $n$ .

Nous supposons que le mécanisme de l'amortissement interne est proportionnel à la rigidité du matériau :  $E_j^* = \alpha E_j$ , alors que le mécanisme de l'amortissement externe est proportionnel à la masse linéique de la poutre :  $c = \beta \rho S$ . Le terme de la vitesse généralisée  $\dot{q}_n(t)$  dans l'équation (Eq. 2.48) devient :

$$(\alpha\omega_n^2 + \beta)\rho S \sum_j \int_0^{L_j} \phi_{n,j}^2(x_j)dx_j \quad (2.52)$$

Nous définissons le coefficient d'amortissement de type Rayleigh  $\zeta_n$  qui correspond au  $n$ -ième mode de vibration comme suit :

$$\zeta_n = \frac{1}{2} \left( \alpha\omega_n + \frac{\beta}{\omega_n} \right) \quad (2.53)$$

Nous obtenons au final l'équation différentielle pour les coordonnées généralisées  $q_n(t)$  :

$$\ddot{q}_n(t) + 2\omega_n\zeta_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{\rho S} \phi_n(vt - D_{i-1}) = p_n(t) \quad (2.54)$$

Initialement, la poutre continue est au repos. Cela implique les conditions initiales des coordonnées généralisées  $q_n(t)$  et leur première dérivée  $\dot{q}_n(t)$  :

$$\begin{cases} q_n(t) &= 0 \\ \dot{q}_n(t) &= 0 \end{cases} \quad (2.55)$$

Les coordonnées généralisées peuvent être déterminées grâce à l'intégrale de Duhamel :

$$q_n(t) = \int_{\tau=0}^t p_n(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (0 \leq \tau \leq t) \quad (2.56)$$

où  $h(t)$  est la réponse de l'équation (2.54) à une impulsion unitaire  $p_n(t) = \delta(t)$  :

$$h(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n^d} \sin(\omega_n^d t) e^{-\zeta_n \omega_n t}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

avec  $\omega_n^d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$  la pseudo-pulsation propre du système correspondant au  $n$ -ième mode.

D'ailleurs, la solution générale de l'équation différentielle (2.54), déterminée par l'intégrale directe (2.56) peut être décomposée en 2 parties : Une partie, qui représente la vibration libre de la poutre, dite « homogène » et l'autre, dite « particulière », est la réponse forcée sous chargement mobile :

$$q_n(t) = Q_n^p(t) + Q_n^h(t) \quad (2.58)$$

### Solution particulière

La solution particulière est déterminée par :

$$Q_n^p(t) = \sum_{i=1}^M \frac{P_i}{\rho S} q_n^p(t - \tau_{i-1}) \quad (2.59)$$

où  $\tau_{i-1} = D_{i-1}/v$  et  $q_n^p(t)$  désignent la solution forcée de l'équation (2.54) à une seule force ponctuelle réduite :  $p_n(t) = \phi_n(vt)$  (c.-à.-d. l'intensité  $P_1/\rho S = 1$ ). Cette dernière est la somme de la réponse obtenue sur tous les segments :

$$q_n^p(t) = \sum_{j=1}^N q_{n,j}^p(t - t^{j-1}) [H(t - t^{j-1}) - H(t - t^j)] \quad (2.60)$$

dans laquelle  $t^j = l_j/v = (\sum_{i=1}^j L_i)/v$  est l'instant où la force unité sollicite la  $j$ -ième travée.

L'expression de  $q_{n,j}^p(t_j)$  est de même forme que la déformée modale  $\phi_{n,j}$  :

$$\begin{aligned} q_{n,j}^p(t_j) &= \bar{A}_{n,j} \sin(\lambda_{n,j} v t_j) + \bar{B}_{n,j} \cos(\lambda_{n,j} v t_j) \\ &+ \bar{C}_{n,j} \sinh(\lambda_{n,j} v t_j) + \bar{D}_{n,j} \cosh(\lambda_{n,j} v t_j) \\ &= [\sin \Omega_{n,j} t_j \quad \cos \Omega_{n,j} t_j \quad \sinh \Omega_{n,j} t_j \quad \cosh \Omega_{n,j} t_j] \bar{X}_{n,j} \end{aligned} \quad (2.61)$$

où  $\Omega_{n,j} = \lambda_{n,j} v$  est la pulsation liée à la vitesse du véhicule quand ce dernier passe sur le segment de poutre  $j$  et  $\bar{X}_{n,j} = [\bar{A}_{n,j} \quad \bar{B}_{n,j} \quad \bar{C}_{n,j} \quad \bar{D}_{n,j}]^T$  est le vecteur de coefficients de la solution particulière correspondant au  $n$ -ième mode. Reportons l'expression de  $q_{n,j}^p(t)$  (2.61) à l'équation (2.54) et posons le terme à droite ( $p_n(t)$ ) égale à  $\phi_n(vt)$ . En utilisant la méthode de coefficients indéterminés, nous pouvons exprimer le vecteur  $\bar{X}_{n,j}$  en fonction du vecteur de coefficients  $X_{n,j} = [A_{n,j} \quad B_{n,j} \quad C_{n,j} \quad D_{n,j}]^T$  comme suit (les détails de calculs se trouvent dans l'annexe A.5) :

$$\bar{X}_{n,j} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & \mathbf{0} & \\ -b & a & c & d \\ \mathbf{0} & & d & c \end{array} \right) X_{n,j} = \mathbf{Q} X_{n,j} \quad (2.62)$$

où :

$$\begin{aligned} a &= \frac{1 - \gamma_{n,j}^2}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad b = \frac{2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2} \\ c &= \frac{1 + \gamma_{n,j}^2}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad d = \frac{-2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les termes  $a, b, c, d$  sont exprimés par les grandeurs adimensionnelles :  $\zeta_n$  – le taux d'amortissement et le facteur de vitesse  $\gamma_{n,j} = \Omega_{n,j}/\omega_n$  – le rapport entre la pulsation liée à la vitesse du véhicule et la pulsation propre de la poutre correspondant au mode  $n$ . Pour une structure non endommagée, en posant  $v_{c,n} = \omega_n/\lambda_n = \lambda_n \sqrt{EI/\rho S}$  la vitesse critique correspondant au  $n$ -ième mode de vibration de la poutre, nous voyons que  $\gamma_{n,j} = \gamma_n = v/v_{c,n}$  est également le rapport entre la vitesse du véhicule et la  $n$ -ième vitesse critique. Pour un système non-amorti (c.à.d  $\zeta_n = 0$ ), la matrice  $\mathbf{Q}$  est diagonale ( $b = d = 0$ ).

### Solution homogène

La solution homogène de l'équation (2.54) correspondante au  $n$ -ième mode est :

$$Q_n^h(t) = [\alpha_{n,k} \sin(\omega_n^d t) + \beta_{n,k} \cos(\omega_n^d t)] e^{-\omega_n \zeta_n t} \quad (2.64)$$

où  $\alpha_{n,k}$ ,  $\beta_{n,k}$  sont des coefficients liés aux ondes sinusoïdales amorties. A  $t = 0$ , la somme de  $Q_n^p(0)$  et  $Q_n^h(0)$  (valant la valeur initiale des coordonnées généralisées  $q_n(0)$ ) ainsi que la somme de leur première dérivée ( $\dot{Q}_n^p(0) + \dot{Q}_n^h(0) = \dot{q}_n(0)$ ) doivent être satisfaites les conditions initiales (2.55). A l'instant  $t_k$  où un essieu entre dans un nouveau segment de poutre, les coefficients  $\alpha_{n,k}$  et  $\beta_{n,k}$  assurent que les conditions de continuité des coordonnées généralisées  $q_n(t)$  et des vitesses généralisées  $\dot{q}_n(t)$  soient satisfaites :

$$\begin{cases} q_n(t_k^-) &= q_n(t_k^+) \\ \dot{q}_n(t_k^-) &= \dot{q}_n(t_k^+) \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_n^p(t_k^-) + Q_n^h(t_k^-) &= Q_n^p(t_k^+) + Q_n^h(t_k^+) \\ \dot{Q}_n^p(t_k^-) + \dot{Q}_n^h(t_k^-) &= \dot{Q}_n^p(t_k^+) + \dot{Q}_n^h(t_k^+) \end{cases} \quad (2.66)$$

La solution particulière  $Q_n^p(t)$  est déterminé à partir des équations (2.59–2.63) alors que le terme homogène  $Q_n^h(t)$  est donné par l'expression 2.64. En résolvant le système d'équations linéaires (2.66), les valeurs des coefficients  $\alpha_{n,k}$ ,  $\beta_{n,k}$  sont obtenus.

La réponse temporelle de la poutre continue est la combinaison linéaire des déformées modales avec les coordonnées généralisées correspondantes pour tous les modes de vibration (Equation 2.47). Dans la pratique, nous ne retenons que les premiers modes dont la contribution à la réponse finale est importante. Selon l'Eurocode 8, la somme des masses modales effectives des modes retenus doit atteindre au moins 90 % de la masse totale de la structure [59, 60].

La décomposition de la réponse temporelle de la poutre continue soumise à un chargement mobile en terme de solution homogène (libre) et solution particulière (forcée) nous permet de clarifier la participation de chaque partie à la réponse finale, en fonction de la vitesse du véhicule et du taux d'amortissement du système. Cette décomposition est également implantée dans le code de calculs pour le problème concerné sous Python, afin d'éviter les calculs couteux par intégrale numérique.

## 2.5 Le facteur de masse-vitesse

Actuellement, la surveillance des ouvrages a de plus en plus recours à la mesure des déformations (à l'aide de jauges de déformation, fibres optiques à réseau de Bragg - FBG : « Fiber Bragg grating », corde optique d'OSMOS, ...). Dans cette partie, nous allons démontrer que l'intégrale de la ligne d'influence de déformation ne dépend pas de la configuration du véhicule (nombre d'essieux et répartition de charge sur chaque essieu) à vitesse usuelle.

Considérons une poutre droite (Figure 2.6) de section et de matériau homogènes. Notons  $Ox$  l'axe horizontal et  $Oy$  l'axe vertical. Un capteur de déformation se trouve au point

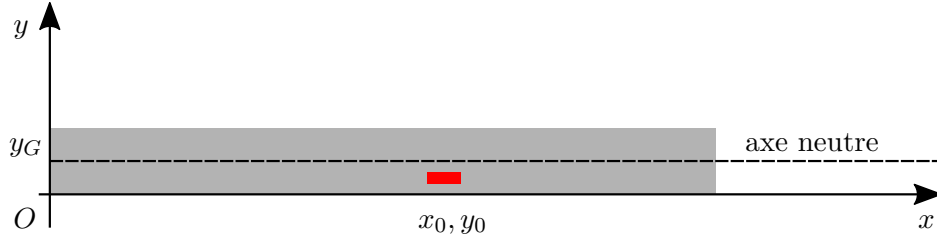


FIGURE 2.6 – Mesure de déformation. Le point de mesure est en rouge.

$(x_0, y_0)$  (repéré par le rectangle rouge).  $y_G$  est l'ordonnée de l'axe neutre de la poutre. La déformation mesurée par le capteur est :

$$\varepsilon(t) = -(y_0 - y_G)u'' = -(y_0 - y_G) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n''(x_0)q_n(t) \quad (2.67)$$

Notons  $D = \sum_{i=0}^{M-1} d_i$  la distance entre le premier et le dernier essieu d'un véhicule et  $z_0 = -(y_0 - y_G) > 0$  la distance entre le capteur de déformation et l'axe neutre de la poutre. Nous calculons l'aire de la courbe de déformation enregistrée par le capteur quand ce véhicule passe sur la poutre :

$$I_1 = \int_0^{\frac{L+D}{v}} \varepsilon(t)dt = z_0 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n''(x_0) \int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t)dt \quad (2.68)$$

L'intégrale du terme  $q_n(t)$  est décomposée en somme de deux intégrales :

$$\int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t)dt = \int_0^{\frac{L+D}{v}} Q_n^p(t)dt + \int_0^{\frac{L+D}{v}} Q_n^h(t)dt \quad (2.69)$$

En combinant les équations (2.59) et (2.69), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t)dt &= \sum_{i=1}^M p_i \int_{\tau_{i-1}}^{\frac{L}{v} + \tau_{i-1}} q_n^p(t - \tau_{i-1})dt + \int_0^{\frac{L+D}{v}} Q_n^h(t)dt \\ &= \frac{mg}{\rho S} \int_0^{\frac{L}{v}} q_n^p(t)dt + \int_0^{\frac{L+D}{v}} Q_n^h(t)dt \end{aligned} \quad (2.70)$$

avec  $mg = \sum_{i=1}^M P_i$  le poids total du véhicule. Ici,  $m$  est la masse totale du véhicule et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Dans la section 2.4, nous avons vu que la solution particulière  $q_n^p(t)$  est une combinaison linéaire des fonctions sinusoïdales et sinusoïdales hyperboliques, avec la pulsation  $\Omega_n = \lambda_n v$  qui dépend de la vitesse du véhicule. Comme les caractéristiques de la section et du matériau constitutif de la poutre sont supposées être homogènes, nous avons  $\lambda_{n,j} = \lambda_n, \forall j$ . D'autre part, la solution homogène  $q_n^h(t)$  est constituée d'ondes sinusoïdales amorties avec la pulsation  $\omega_n^d$  et ne dépend que des propriétés intrinsèques de la poutre continue. Rappelons le ratio  $\gamma_n$  dans le cas d'une poutre non-endommagée :

$$\gamma_n = \frac{\Omega_n}{\omega_n} = \frac{\lambda_n v}{\lambda_n^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho S}}} = \frac{v}{v_{c,n}} \quad (2.71)$$

où  $v_{c,n} = \lambda_n \sqrt{EI/\rho S} = \omega_n/\lambda_n$  est la vitesse critique correspondant au  $n$ -ième mode.

Remarquons que  $\Omega_n t = \lambda_n v t = \lambda_n a$ , où  $a = vt$  est la position de la force exercée. La première intégrale de l'expression (2.70) peut être obtenue par changement des variables ( $t \mapsto a$ ). A basse vitesse ( $\gamma_1 \leq 10\%$ ), cette intégrale dépend peu de la vitesse. Pour le cas d'une poutre simple soumise à une force ponctuelle, lorsque le facteur de vitesse est inférieur à 10 %, l'écart entre l'aire de l'histoire de la composante particulière de déformation ( $\int \phi_n(x) q_n^p(t) dt$ ) et l'aire calculée dans le cas du chargement statique ( $v \rightarrow 0$ ) est de l'ordre de 1 % (voir annexe C.3). De plus, la contribution de la deuxième intégrale de l'expression (2.70) sur le résultat final est négligeable. Une démonstration détaillée pour le cas d'une poutre simple se trouve également dans l'annexe C.

En effet, seule la première vitesse critique est importante et représente la première vitesse de résonance lors du passage d'un véhicule. A faible vitesse, c.à.d.  $v \ll v_c$ , nous ne prenons en compte que le premier ordre du ratio  $\Omega_n/\omega_n$ . Nous supposons également que le taux d'amortissement est suffisamment petit  $\zeta_n \leq 5\%$ , donc les termes situés sur la diagonale principale de la matrice  $\mathbf{Q}$  sont très proches de 1 ( $a \approx c \approx 1$ ) alors que les termes situés hors de la diagonale principale sont pratiquement tous nuls ( $b \approx d \approx 0$ ). Une illustration détaillée de la dépendance des termes  $a, b, c, d$  en fonction de  $\gamma_n$  et de  $\zeta_n$  se trouve dans l'annexe C.4. La matrice  $\mathbf{Q}$  devient :

$$\mathbf{Q} \approx \frac{1}{\omega_n^2} \mathbf{I}_4 \quad (2.72)$$

Cela implique :

$$\bar{X}_{n,j} \approx \frac{1}{\omega_n^2} X_{n,j} \quad (2.73)$$

Nous en déduisons :

$$q_{n,j}^p(t_j) \approx \frac{1}{\omega_n^2} \phi_{n,j}(vt_j) \quad (2.74)$$

En substituant l'expression de  $q_n^p(t)$  (Eq. 2.60) dans l'équation (2.70), avec la prise en compte de l'expression (2.74), l'estimation approximative de l'intégrale (2.69) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t) dt &\approx \frac{mg}{\rho S} \int_0^{\frac{L}{v}} q_n^p(t) dt \\ &= \frac{mg}{\rho S} \sum_{j=1}^N \int_0^{\frac{L_j}{v}} q_{n,j}^p(t_j) dt_j \\ &= \frac{mg}{\rho S} \frac{1}{\omega_n^2} \sum_{j=1}^N \int_0^{\frac{L_j}{v}} \phi_{n,j}(vt_j) dt_j \end{aligned} \quad (2.75)$$

Nous posons  $a_j = vt_j$ , par changement des variables, nous avons :

$$\int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t) dt \approx \frac{mg}{\rho S} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{v} \sum_{j=1}^N \int_0^{L_j} \phi_{n,j}(a_j) da_j \quad (2.76)$$

Nous calculons l'intégrale de la déformée modale  $\phi_{n,j}(a_j)$  sur le segment  $j$  :

$$\begin{aligned}
& \int_0^{L_j} \phi_{n,j}(a_j) da_j \\
&= \int_0^{L_j} (A_{n,j} \sin \lambda_n a_j + B_{n,j} \cos \lambda_n a_j + C_{n,j} \sinh \lambda_n a_j + D_{n,j} \cosh \lambda_n a_j) da_j \\
&= \frac{1}{\lambda_n} [A_{n,j}(1 - \cos \lambda_n L_j) + B_{n,j} \sin \lambda_n L_j + C_{n,j}(\cosh \lambda_n L_j - 1) + D_{n,j} \sinh \lambda_n L_j] \\
&= \frac{1}{\lambda_n} \Psi_{n,j}
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Reportons l'expression (2.77) à l'équation (2.76), nous avons :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{L+D}{v}} q_n(t) dt &\approx \frac{mg}{\rho S} \frac{1}{\omega_n^2} \frac{1}{\lambda_n v} \sum_{j=1}^N \Psi_{n,j} \\
&= \frac{mg}{\rho S} \frac{1}{\lambda_n^4 \frac{EI}{\rho S}} \frac{1}{\lambda_n v} \sum_{j=1}^N \Psi_{n,j} \\
&= \frac{g}{EI} \cdot \frac{m}{v} \frac{1}{\lambda_n^5} \sum_{j=1}^N \Psi_{n,j}
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Par la superposition des modes, l'aire de la ligne d'influence de déformation est :

$$I_1 \approx z_0 \frac{m}{v} \frac{g}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{\phi_n''(x_0)}{\lambda_n^5} \Psi_{n,j} = \frac{m}{v} F_{m,v} \tag{2.79}$$

Cette intégrale est proportionnelle à la masse totale du véhicule et inversement proportionnelle à sa vitesse. Elle ne dépend pas de la configuration du véhicule (le nombre d'essieux, la distance entre essieux et la répartition de charge pour chaque essieu). La constante  $F_{m,v}$  est appelée le « facteur de masse-vitesse » :

$$F_{m,v} = z_0 \frac{g}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N \frac{\phi_n''(x_0)}{\lambda_n^5} \Psi_{n,j} \tag{2.80}$$

## 2.6 Validation avec les résultats numériques

Dans cette section, quelques résultats numériques sont présentés. Le but de cette partie est de mettre en évidence la méthode présentée, en comparaison avec : (1) - les résultats existants dans la littérature ; et (2) - les résultats numériques à l'aide de calculs aux éléments finis.

### 2.6.1 Poutre continue non fissurée

Afin de vérifier la conception des matrices de transfert, considérons une poutre continue à  $N$  travées. Toutes les travées ont la même longueur  $L$ , les mêmes propriétés de la section droite et du matériau. De ce fait, les nombres d'ondes des déformées modales ont la même valeur pour toutes les travées :  $\lambda_j = \lambda, \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}$ . La matrice résultante après assemblage des matrices est :

$$\mathbf{R}(\lambda L) = \mathbf{B}\mathbf{S}^{N-1} \tag{2.81}$$



avec  $\mathbf{B} = [-\sin \lambda L \quad -\cos \lambda L \quad \sinh \lambda L \quad \cosh \lambda L]$  et  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(L, L)$ , qui est déterminée à l'aide de l'expression (2.21).

L'équation caractéristique de la poutre est :

$$f(\lambda L) = r_1 - \frac{\sin \lambda L}{\sinh \lambda L} r_3 = 0 \quad (2.82)$$

Les cinq premières solutions de l'équation (2.82) sont données dans le tableau 2.1.

Nombre de travées	$\lambda L$ (en multiple de $\pi$ )				
	$\lambda_1 L$	$\lambda_2 L$	$\lambda_3 L$	$\lambda_4 L$	$\lambda_5 L$
1	1	2	3	4	5
2	1	1.2499	2	2.2500	3
3	1	1.1320	1.3679	2	2.1351
4	1	1.0801	1.2499	1.4207	2

TABLEAU 2.1 – Les cinq premières solutions de l'équation caractéristique (2.82).

Les résultats donnés dans le tableau sont identiques aux valeurs trouvées par Ichikawa [45]. Dans cet exemple, seule la configuration géométrique est prise en compte. Les pulsations propres (puis, les fréquences naturelles) sont calculées à partir des valeurs de  $\lambda_n$  grâce à la relation 2.50 :  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{EI/\rho S}$ .

### 2.6.2 Poutre continue à deux travées

Dans ce qui suit, nous considérons une poutre continue à deux travées (Figure 2.7).

La poutre est en acier, de section carrée, dont les caractéristiques de la géométrie et du matériau sont présentées dans le tableau 2.2.

Paramètres	Notation	Unité	Valeur
Longueur totale	$2L$	m	20
Hauteur	$h$	cm	10
Largeur	$b$	cm	10
Module de Young	$E$	GPa	210
Coefficient de Poisson	$\nu$	–	0.3
Masse volumique	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	7 800
Taux d'amortissement	$\zeta$	–	0.02

TABLEAU 2.2 – Caractéristiques détaillées de la poutre.

Un véhicule à deux essieux passe sur la poutre. L'essieu avant applique une charge  $P_1 = 1 \text{ kN}$  alors que l'essieu arrière applique une charge  $P_2 = 2 \text{ kN}$ . La distance entre les deux essieux est  $d = 4 \text{ m}$ . Initialement (à  $t = 0$ ), le véhicule pénètre sur la poutre par l'extrémité gauche à une vitesse constante  $v = 10 \text{ m/s}$ . Un endommagement de profondeur variable peut être présent au milieu de la première travée. Afin de valider notre modèle analytique, l'endommagement est modélisé par deux approches :

- Une fissure de profondeur  $a = 0.5h$ , au milieu de la poutre (Figure 2.7a). Nous appelons ce cas « poutre fissurée » ;

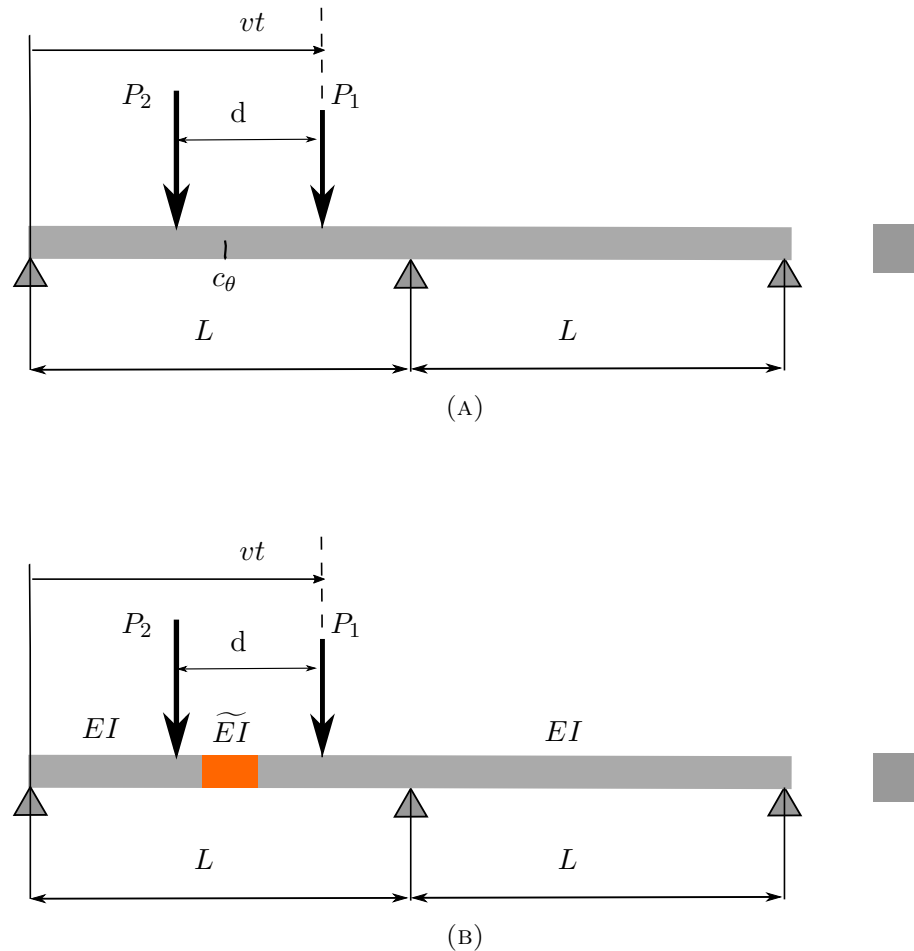


FIGURE 2.7 – Poutre sur 3 appuis soumise au passage d’un véhicule à deux essieux

- Une zone avec la réduction de rigidité en flexion  $\tilde{EI}$  (Figure 2.7b), selon le modèle de Christides et Barr [21]. Dans cette approche, la rigidité de la zone endommagée est homogénéisée sur une longueur  $l_e = 40\text{ cm}$ . La valeur de  $\tilde{EI}$  est la moyenne entre la valeur minimale de  $EI(x)$  à l’endroit fissuré de la poutre et la valeur  $EI$  de la poutre saine. Cela implique une réduction de module de Young  $\Delta E/E = (EI - \tilde{EI})/EI = 44\%$ . Cette valeur est introduite ensuite dans le modèle analytique et aux calculs numériques par la méthode des éléments finis. Nous appelons ce cas « poutre endommagée ».

Afin de mettre en évidence le modèle analytique présenté, un modèle comparatif est créé dans le *Code\_Aster*, un logiciel libre de calculs aux éléments finis développé au sein de EDF. Le maillage comporte 200 segments droits de même longueur. Dans le *Code\_Aster*, ces segments 1D sont modélisés par des éléments de poutre droite Euler-Bernoulli (POU\_D\_E). Pour le cas de la poutre endommagée :

- Modélisation de la fissure par ressort : un élément discret (modélisation DIS\_TR) de

rigidité de rotation  $k_\theta = 1/c_\theta$  est ajouté à l'endroit où la fissure se situe avec  $c_\theta$  la flexibilité locale en section fissurée, introduite par l'équation (2.11).

- Modélisation de la fissure par réduction de rigidité en flexion  $EI$  : Une zone « endommagée » est créée au milieu de la première travée, de longueur  $l_c$  et de module de Young  $\tilde{E} = 0.56E$ .

### Fréquences naturelles

Le tableau 2.3 présente les valeurs des cinq premières fréquences naturelles pour les cas correspondant à la poutre non-fissurée (poutre saine), la poutre fissurée et la poutre endommagée (avec la présence d'une zone de rigidité réduite), qui sont obtenues à la fois en résolvant l'équation caractéristique du modèle analytique (2.42) et par calculs aux éléments finis à l'aide du *code\_Aster*.

Mode	Poutre saine (analytique)	Poutre fissurée		Poutre endommagée	
		Analytique	<i>code_Aster</i>	Analytique	<i>code_Aster</i>
1	2.35284	2.3156	2.3156	2.3166	2.3166
2	3.67558	3.6380	3.6380	3.6391	3.6391
3	9.41134	9.4113	9.4113	9.4106	9.4106
4	11.91123	11.8871	11.8870	11.8869	11.8869
5	21.17552	20.83985	20.8399	20.8529	20.8529

TABLEAU 2.3 – Les cinq premières fréquences naturelles (en Hz).

Concernant les cas de la poutre fissurée et endommagée, les valeurs des fréquences calculées par le modèle analytique sont identiques à celles obtenues numériquement. De plus, les fréquences retrouvées par les deux approches différentes sont en bon accord. Les valeurs des fréquences naturelles de la poutre avec présence de la fissure sont plus faibles que celles de la poutre non-fissurée. Cependant, cette diminution est vraiment très petite. Une variation maximale des fréquences naturelles de l'ordre de 1.6 % est alors difficile à détecter dans les conditions réelles.

### Réponse temporelle

Pour interpréter la réponse temporelle de la poutre sous chargement mobile, nous considérons maintenant le cas d'un véhicule qui se déplace à la vitesse  $v = 10 \text{ m/s}$  sur une poutre non fissurée. Les douze premiers modes propres de la poutre sont retenus (soit une fréquence maximale  $f_{\max} = 91.91 \text{ Hz}$ ). La masse modale effective cumulée vaut plus de 90 % de la masse de la poutre. Le taux d'amortissement modal est pris égal à 2 % pour tous les modes. Dans le *code\_Aster*, la réponse transitoire est calculée directement par le schéma d'intégration temporelle Newmark avec  $\beta = 1/4$  et  $\gamma = 1/2$  sur la base généralisée (opérateur DYNA\_LINE). Tous les modes possédant une valeur de fréquence naturelle qui est inférieure ou égale à 100 Hz seront pris en compte. Les flèches au milieu des deux travées sont présentées dans la figure 2.8.

Les courbes résultantes du modèle analytique et des calculs aux éléments finis dans *code\_Aster* sont en très bonne concordance. Pour le modèle analytique, les résultats sont calculés sur une base des fonctions explicites dont les expressions sont bien connues. En conséquence, les calculs analytiques réalisés sous Python donnent les résultats plus rapidement. Cela pourrait aider pour la réalisation d'études paramétriques en faisant varier

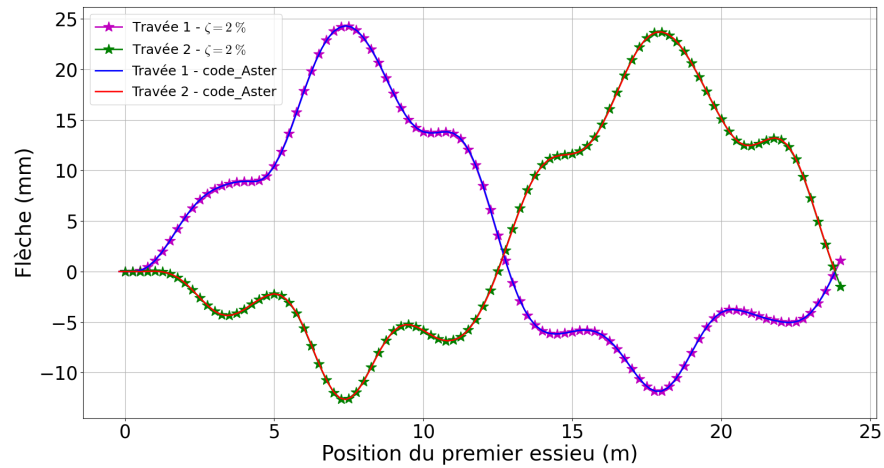


FIGURE 2.8 – Flèche au milieu des travées de la poutre continue lors du passage d'un véhicule à 10 m/s. Taux d'amortissement :  $\zeta = 2\%$ .

des paramètres comme la profondeur de la fissure, la vitesse de véhicule ou la distance entre deux essieux, etc.

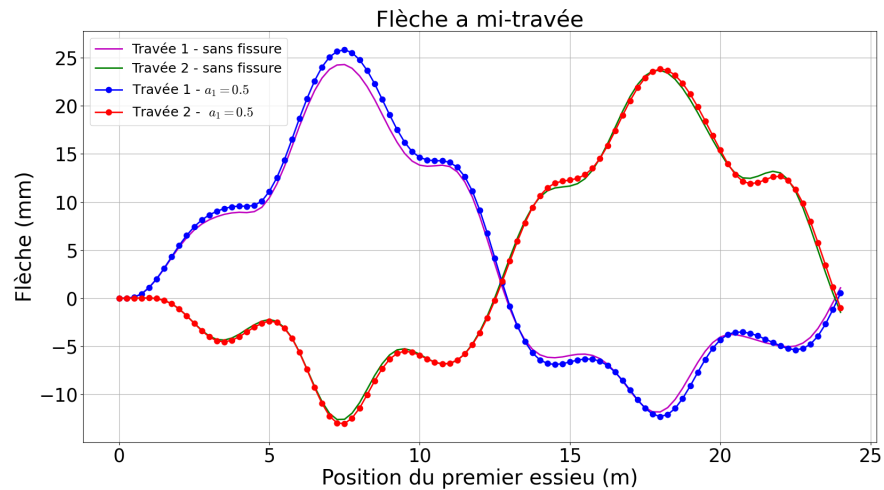


FIGURE 2.9 – Comparaison des réponses de poutre non-fissurée et fissurée lors du passage d'un véhicule à 10 m/s. Taux d'amortissement :  $\zeta = 2\%$ .

Afin de voir l'influence de l'endommagement sur la réponse, une fissure de profondeur relative  $a_1 = 0.5$  est introduite au milieu de la première travée. Les autres paramètres restent inchangés. La figure 2.9 représente la réponse dynamique de la poutre fissurée en comparaison avec celle de la poutre saine, selon le modèle analytique.

La première travée étant fissurée en son milieu, cette dernière est plus souple que l'autre. Nous observons une augmentation de la flèche au milieu de la travée 1 (courbe bleue). Cependant, la modification de la réponse due à la fissure est relativement petite. Pour la

première travée, la différence entre les deux pics est environ 5 %.

### Facteur d'Amplification Dynamique (FAD)

La réponse dynamique de la poutre est influencée par la vitesse du véhicule. Nous introduisons le Facteur d'Amplification Dynamique (FAD), défini par le rapport entre la réponse maximale de la poutre sous chargement mobile et celle en cas de charge quasi-statique :

$$FAD = \frac{\max_t u(t)}{\max_t u_0(t)} \quad (2.83)$$

La figure 2.10 présente les Facteurs d'Amplification Dynamique pour les deux travées en fonction de la première vitesse adimensionnelle :  $\gamma_1 = v/v_{c1}$ . Ici,  $v_{c1} = \lambda_1 \sqrt{EI/\rho S} = 47 \text{ m/s}$  est la première vitesse critique. Nous prenons trois différents niveaux d'amortissement :  $\zeta = 0 \%$  (système non-amorti),  $\zeta = 2 \%$  et  $\zeta = 5 \%$ . Pour les grandes vitesses ( $v \geq 0.6v_{c1}$ ), les valeurs de FAD sont plus grandes en travée 2.

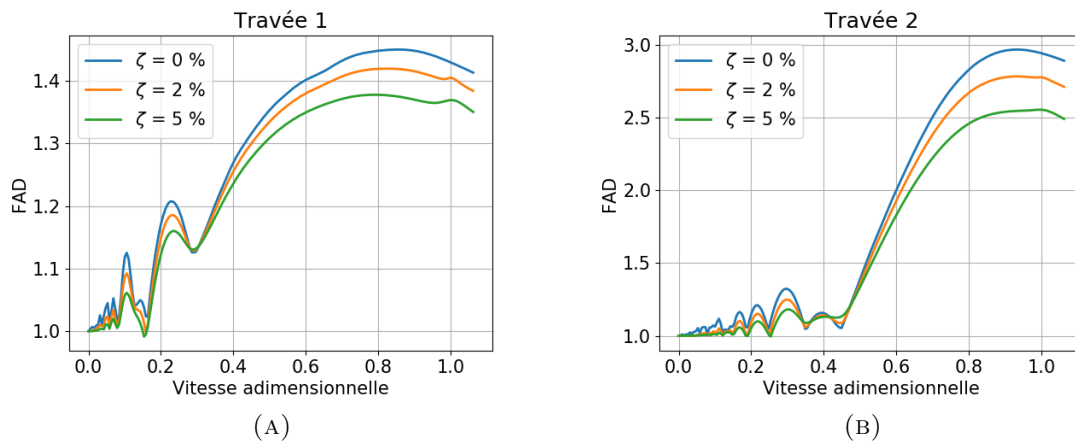


FIGURE 2.10 – Facteur d'Amplification Dynamique à différents niveaux d'amortissement.

### Facteur de masse-vitesse $F_{m,v}$

Un autre résultat important de cette étude paramétrique concernant la variation de vitesse du véhicule est le facteur de masse-vitesse que nous avons vu en section 2.5. Selon l'équation (2.79), nous avons :

$$I_1 = \int \epsilon(t) dt \approx \frac{m}{v} \times F_{m,v} \quad (2.84)$$

$$\Rightarrow F_{m,v} \approx I_1 \times \frac{v}{m} \quad (2.85)$$

La figure 2.11 présente la dépendance de ce facteur correspondant aux points de mesure situés au milieu de chaque travée en fonction de la vitesse adimensionnelle du véhicule ( $\tilde{v} = v/v_{c1}$ ). Les pointillés représentent le produit de l'intégrale directe de la déformation  $I_1 = \int \epsilon(t) dt$  avec le ratio  $m/v$  alors que la ligne horizontale indique la valeur estimée du

Facteur de masse-vitesse  $F_{m,v}$ , calculée par la formule (2.80). Les points bleus représentent l'intégrale de la réponse du système non-amorti alors que les points rouge représentent les résultats du système avec une valeur d'amortissement à 2 %. Nous observons dans la plage des vitesses faibles ( $v \leq 0.2v_{c1}$ ) que les pointillés sont proches de la valeur estimée.

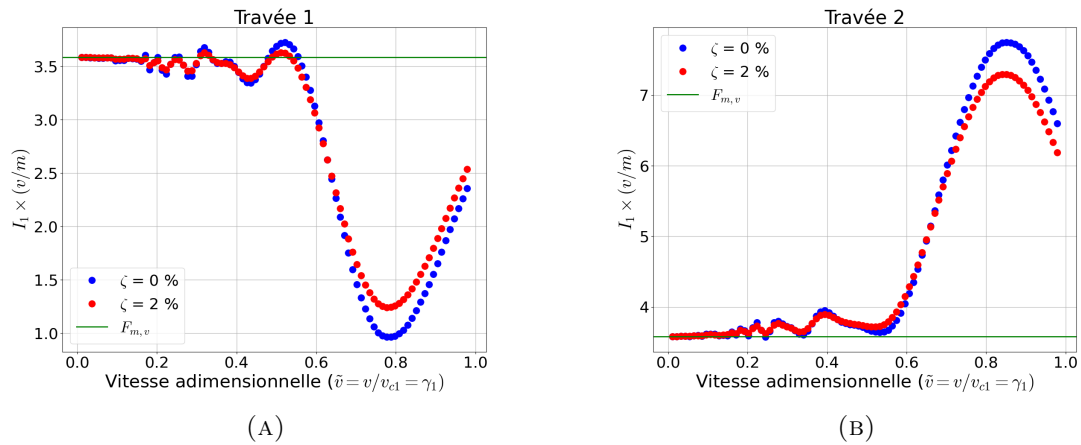


FIGURE 2.11 – Facteur de masse-vitesse en fonction de la vitesse adimensionnelle.

## 2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi un modèle analytique permettant de calculer la réponse temporelle d'une poutre d'Euler-Bernoulli posée sur plusieurs appuis sous charge-ments mobiles. Les résultats sont obtenus rapidement grâce aux expressions analytiques explicites des fonctions de formes et des coordonnées généralisées correspondant à chaque mode propre. La prise en compte de l'amortissement permet d'approcher des problèmes réels.

L'introduction de l'aire de la ligne d'influence de déformation est aussi un résultat important de ce modèle. A basses vitesses, cette intégrale est proportionnelle au rapport entre la masse et la vitesse du véhicule. Le coefficient de proportion  $F_{m,v}$ , appelé « facteur de masse - vitesse », est estimé à partir des caractéristiques intrinsèques du système. Ce coefficient ne dépend pas de la configuration du chargement appliqué.

Les résultats numériques obtenus par des calculs aux éléments finis pour une poutre continue d'Euler-Bernoulli dans *code\_Aster* sont cohérents avec les résultats analytiques. Cela permet de vérifier la pertinence du modèle analytique qui a l'avantage d'avoir des temps de calculs plus rapides que ceux obtenus avec les calculs numériques. La méthode analytique présentée est un outil puissant et rapide, qui nous aidera à effectuer des études paramétriques sans avoir besoin de re-créeer un maillage.



# Chapitre 3

## Modèle analytique et numérique d'un pont à quatre travées

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>60</b>
<b>3.2</b>	<b>Présentation générale de la structure</b>	<b>60</b>
3.2.1	Généralité sur la géométrie du pont	60
3.2.2	Plan d'instrumentation du pont	62
<b>3.3</b>	<b>Essai de chargement</b>	<b>62</b>
<b>3.4</b>	<b>Modèle analytique du pont</b>	<b>64</b>
3.4.1	Coefficient de Répartition Transversale des Charges	64
3.4.2	Solution analytique d'une portion de poutre	66
<b>3.5</b>	<b>Modélisation de la structure dans <i>code_Aster</i></b>	<b>69</b>
3.5.1	Géométrie du maillage	69
3.5.2	Propriétés mécaniques des composantes du pont	70
3.5.3	Modélisation des charges	71
<b>3.6</b>	<b>Résultats</b>	<b>71</b>
3.6.1	Analyse modale	71
3.6.2	Réponse temporelle du passage de poids-lourd	75
<b>3.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>76</b>

---



## 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons étudier une structure réelle : Un passage supérieur à quatre travées, de type « pont à poutres sous chaussée ». Le pont est instrumenté depuis une dizaine d'années à l'aide de cordes optiques, qui permettent de mesurer la déformation moyenne sur la longueur de ces dernières. Un essai de chargement a été réalisé en novembre 2019, qui nous fournit des données réelles de la structure soumise aux chargements mobiles connus. La présentation détaillée de la géométrie de la structure, ainsi que le plan d'instrumentation et l'essai de chargement se trouvent dans les sections 3.2, 3.3.

Un modèle analytique a été développé pour résoudre le problème d'une poutre continue soumise à des charges mobiles dans le Chapitre 2. Ce modèle nous permet de trouver rapidement les réponses temporelles (histoire des déplacements, des déformations et des accélérations, etc.) de la poutre en un point donné. Dans un premier temps, ce chapitre sera consacré à l'application de la méthode analytique mentionnée à la structure réelle, en comparant avec les signaux mesurés lors du passage d'un poids lourd.

Ensuite, afin d'obtenir une modélisation complète de la structure, un modèle de calculs numériques aux éléments finis sera appliqué à la structure. Une géométrie simplifiée est ensuite construite dans la plateforme *Salomé*. Les propriétés mécaniques des matériaux constituant le pont seront recalées en se référant aux fréquences naturelles retrouvées par les accéléromètres installés sur le pont. Pour valider le modèle, les réponses calculées seront comparées avec les résultats du test.

## 3.2 Présentation générale de la structure

### 3.2.1 Généralité sur la géométrie du pont

Le pont est une structure de type PRAD (*Pont à Poutres Préfabriquées Précontraintes par Adhérence*), avec le hourdis en béton armé coulé en place. Le pont comprend quatre travées, avec une longueur totale de 46 m. Les deux travées centrales ont la même longueur, de 14.6 m chacune. Pareillement, les travées courtes de longueur 8.4 m sont situées à l'extérieur. Sous chaque travée, il y a 10 poutres préfabriquées en béton précontraint, de section trapézoïdale et de même longueur que la travée qu'elles supportent. L'espacement entre les poutres est de 1.09 m. Le hourdis est de largeur 10.08 m et d'épaisseur 30 cm (Figure 3.1).

La figure 3.2 présente plus en détail les composantes d'une travée en vue perspective. Chaque poutre est supportée par deux appuis en néoprène qui se trouvent aux deux extrémités de la poutre. Ces appuis sont posés sur des chevêtres et des culées. Sur le hourdis, deux trottoirs placés le long du pont, ont une largeur de 1.5 m et une hauteur de 30 cm chacun. Les appuis, les entretoises et les trottoirs seront pris en compte dans la modélisation numérique.

Les géométries des composantes du pont sont détaillées ci-dessous :

Les poutres de section généralisée (en forme de trapèze isocèle) :

- Hauteur : 0.58 m
- Petite base : 0.27 m

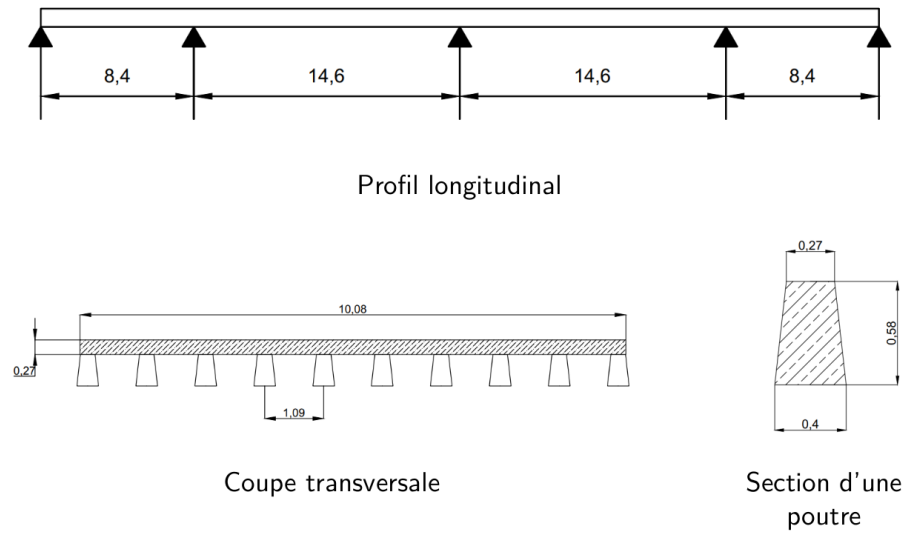


FIGURE 3.1 – Dimension du pont.

— Grande base : 0.40 m

Les entretoises de section rectangulaire :

- Hauteur : 0.58 m
- Largeur : 0.40 m

Les trottoirs de section rectangulaire :

- Hauteur : 0.30 m
- Largeur : 1.50 m

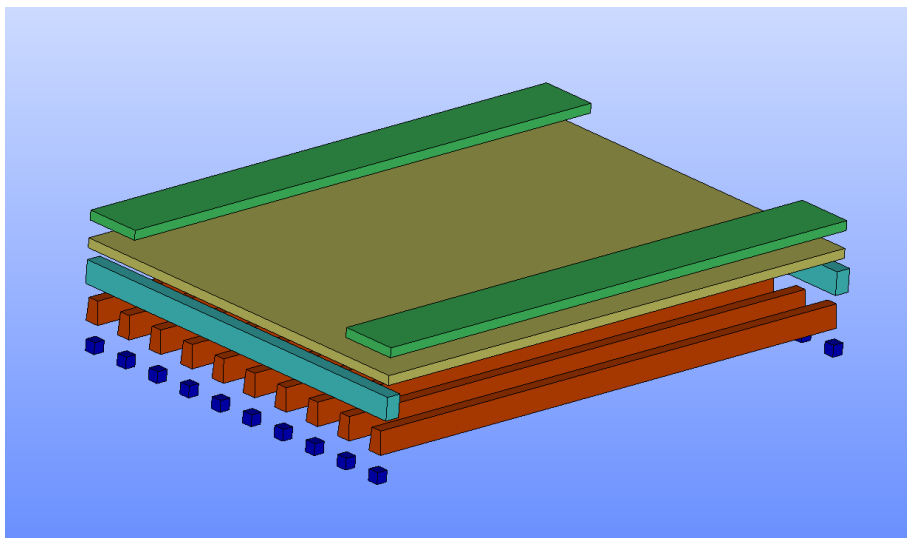


FIGURE 3.2 – Détail d'une travée du pont.

### 3.2.2 Plan d'instrumentation du pont

Depuis 2011, six cordes optiques gainées flexibles en acier de longueur 2 m sont installées sur les poutres situées au milieu de chaque voie et en sous face des deux travées centrales. De plus, cinq extensomètres et deux sondes de température sont également installés. Une station de Monitoring a été montée sur la face extérieure du pilier 2 qui assure l'enregistrement des données.

En 2019, l'ancienne station de monitoring a été remplacée par une nouvelle. Six nouvelles cordes optiques de longueur 1 m, deux accéléromètres tri-axiaux ont été ajoutés afin de compléter le module de pesage des véhicules en marche. Une sonde de température est également installée au niveau de la station. Seules les deux travées centrales sont instrumentées.

La figure 3.3 représente le plan d'instrumentation de l'ouvrage. Les poutres sont numérotées de 1 à 10 comme montré sur le schéma 3.3a. La travée centrale gauche est appelée « Travée 2 » (travée T2) alors que la travée centrale droite est nommée « Travée 3 » (travée T2). Un passage est dit « Sud » lorsqu'il emprunte la voie au-dessus les poutres de 1 à 5 alors qu'un passage « Nord » désigne le passage sur la voie qui se trouve au-dessus les poutres de 6 à 10 (Figure 3.4). Au cas où un véhicule emprunte le pont avec le passage « Nord », il passe de la travée T2 à la travée T3. Réciproquement, quand ce véhicule emprunte le pont avec le passage « Sud », il passe donc de la travée T3 à la travée T2. Les flèches bleues sur le schéma indiquent les deux sens de circulation.

La figure 3.3c montre un exemple de l'installation des cordes optiques sur les poutres 1 à 5 (dans le sens de gauche à droite) et en sous face du hourdis. Sur cette photo, nous voyons aussi un accéléromètre tri-axial placé sur la poutre P1 (ACC-P1). Nous voyons que, dans le sens longitudinal, les cordes optiques sont placées au milieu de chaque travée longue, alors que les accéléromètres sont installés entre un tiers et la moitié de la travée T2, afin d'éviter les nœuds des modes de vibration inférieurs. Dans le cadre de cette étude, seuls les signaux des cordes optiques positionnées sur les poutres (CO-T2-P2, CO-T2-P4, CO-T2-P7, CO-T2-P9 et CO-T3-P4, CO-T3-P7) sont exploités pour le traitement (Figure 3.4).

## 3.3 Essai de chargement

Un essai de chargement a eu lieu sur le pont en novembre 2019 dans le cadre d'une expérimentation conjointe de la société OSMOS et de ses partenaires. Le but de cet essai était de mettre au point un module de pesage des véhicules en marche en utilisant la déformation du tablier comme indicateur du poids et de la configuration. L'état déformé du pont est enregistré à la fréquence d'échantillonnage de 100 Hz grâce aux cordes optiques d'OSMOS installées sur les poutres et sur la sous-face du hourdis. Trois poids-lourds différents en poids et en configuration ont été choisis pour l'essai. Les véhicules sont passés sur le pont à différentes vitesses. Avant la réalisation du test, les véhicules ont été pesés et leurs détails géométriques ont été mesurés. Les caractéristiques détaillées des véhicules sont présentées dans le tableau 3.1. L'indice « 1 » désigne l'essieu en tête du véhicule.

Quand un véhicule passe sur le pont, la poutre située au milieu de la voie où le véhicule se trouve est la plus déformée. C'est le cas de la poutre 7 pour le passage Nord et de

Pile coté station	Travée 2	Pile centrale	Travée 3	Pile
Poutre 1	↑ X+ ACC-P1 → Y+			
Poutre 2	↔ CO-T2-P2 ↔ CO-AXL-23			
Poutre 3				
Poutre 4	↔ CO-T2-P4 ↔ CO-AXL-45	↔ CO-PIL-34	↔ CO-T3-P4	
Poutre 5				
Poutre 6				
Poutre 7	↔ CO-T2-P7	↔ CO-PIL-78	↔ CO-T3-P7	
Poutre 8				
Poutre 9	↔ CO-AXL-89 ↔ CO-T2-P9			
Poutre 10	ACC-P10 → Y+			

(A) Plan d'installation des capteurs

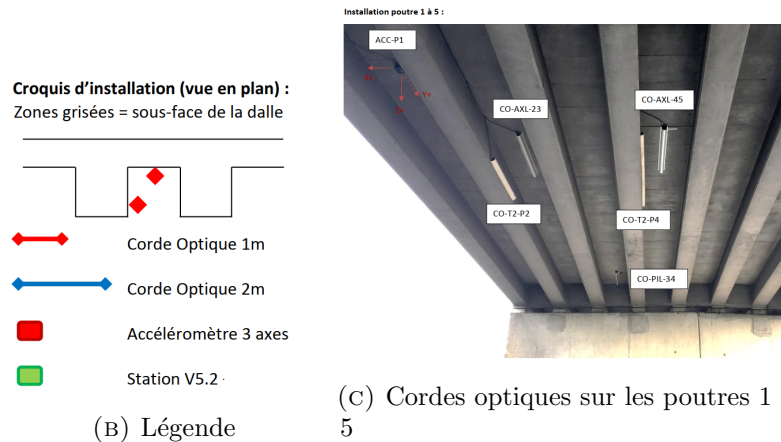


FIGURE 3.3 – Instrumentation des capteurs (Source : OSMOS).

Pile coté station	Travée 2	Pile centrale	Travée 3	Pile
Poutre 1				
Poutre 2	↔ CO-T2-P2	<b>Trottoir</b>		
Poutre 3				
Poutre 4	↔ CO-T2-P4		↔ CO-T3-P4	
Poutre 5				
Poutre 6				
Poutre 7	↔ CO-T2-P7		↔ CO-T3-P7	
Poutre 8				
Poutre 9	↔ CO-T2-P9	<b>Trottoir</b>		
Poutre 10				

FIGURE 3.4 – Les cordes optiques considérées et positions des trottoirs (Source : OSMOS).

Véhicule		1 (19 T)	2 (32 T)	3 (44 T)
Masse totale (tonne)		19.22	31.80	43.56
Nombre d'essieux		2	4	5
Largeur (m)		2.10	2.06	2.60
Répartition des charges (tonne)	P <sub>1</sub>	6.24	5.66	6.94
	P <sub>2</sub>	12.70	7.96	10.62
	P <sub>3</sub>	—	11.14	9.20
	P <sub>4</sub>	—	6.96	8.64
	P <sub>5</sub>	—	—	8.16
Distance entre deux essieux consécutifs (m)	$d_1 : 1 \rightarrow 2$	4.05	1.80	3.80
	$d_2 : 2 \rightarrow 3$	—	3.00	3.01
	$d_3 : 3 \rightarrow 4$	—	1.38	1.25
	$d_4 : 4 \rightarrow 5$	—	—	1.25

TABLEAU 3.1 – Caractéristiques détaillées des véhicules utilisés dans le test de chargement sur le pont à quatre travées.

la poutre 4 pour le passage Sud (Figure 3.4). La figure 3.5a présente les déformations des poutres instrumentées sous la travée 2 en fonction de temps lors du passage Sud du poids-lourd de type 44 T à 50 km/h. Dans la légende, le chiffre après la lettre « T » désigne le numéro de travée (T2 ou T3) alors que le chiffre qui suit la lettre « P » désigne le numéro de la poutre. Nous voyons que la poutre 4 (ligne orange) reprend la plus grande partie du poids du véhicule. En traçant les déformations des autres poutres en fonction de la déformation de la poutre 4 (le signal le plus fort), nous obtenons une forte corrélation entre les déformations des poutres (Figure 3.5b). Par régression linéaire, nous pouvons déterminer des droites de régression. Les valeurs du coefficient de détermination  $R^2$  sont très proches de 1. De la même manière, nous déterminons les droites de régression en fonction du signal maximal pour d'autres passages. Les résultats sont présentés dans le tableau récapitulatif (Tableau 3.2).

## 3.4 Modèle analytique du pont

La charge exercée par un véhicule qui passe sur le pont ne se distribue pas uniformément sur toute la largeur du tablier. Du fait que le hourdis ne soit pas infiniment rigide, toutes les poutres sous chaussée ne reprennent pas la même charge. En conséquence, le pont ne peut pas être modélisé comme une poutre unidimensionnelle. Au lieu de considérer la totalité du pont, une portion de poutre sera modélisée pour les calculs analytiques. La répartition transversale de charges dans une section droite du tablier est d'abord considérée.

### 3.4.1 Coefficient de Répartition Transversale des Charges

La détermination du Coefficient de Répartition Transversale des Charges (ou Facteur de Distribution de Charge vive – *Live load distribution factor (LDF) en anglais*) est un des calculs les plus importants pour le dimensionnement des ponts à poutres. En Europe, les actions sur les ponts dues au trafic sont définies dans l'Eurocode 1, partie 3. Dans le monde entier, plusieurs pays acceptent des normes de l'Association Américaine des Officiers des Routes Nationales et de Transportation (AASHTO) sur le calcul de LDF, spécifié dans des documents AASHTO [1] et AASHTO LRFD [2]. Il existe également un grand nombre de modèles analytiques abordant la flexion transversale dans une section de tablier. Parmi

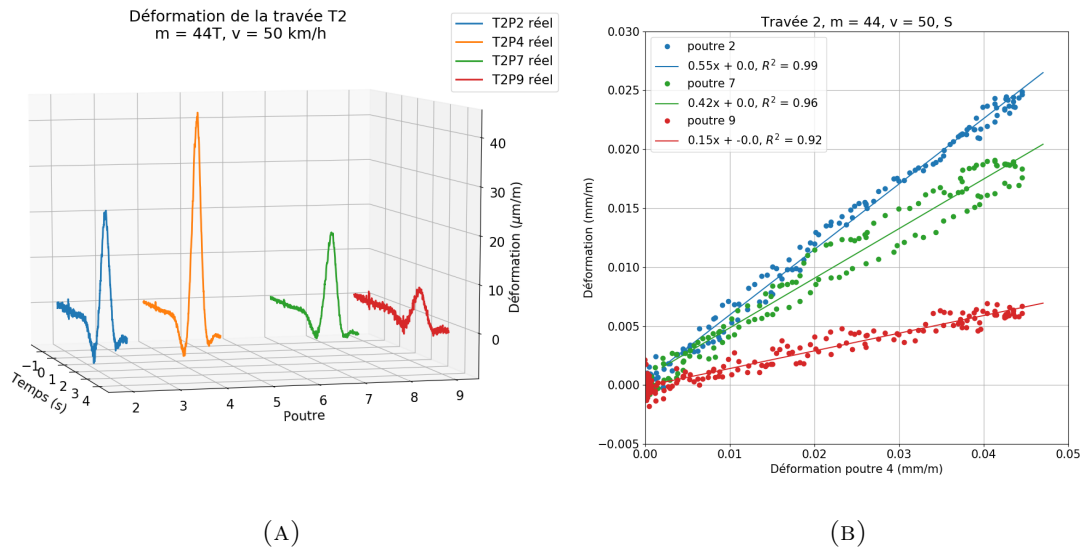


FIGURE 3.5 – Déformations des poutres sous travée T2 lors du passage du poids-lourd 44T à 50 km/h, direction Sud.

<b>NORD</b>	<b>P7 = 1</b>	<b>Travée 2</b>						<b>Travée 3</b>	
Masse	Vitesse	Poutre 9		Poutre 4		Poutre 2		Poutre 4	
		a	$R^2$	a	$R^2$	a	$R^2$	a	$R^2$
19	10	<b>0.7258</b>	0.9764	<b>0.3535</b>	0.9481	<b>0.0799</b>	0.5357	<b>0.2409</b>	0.9308
32	10	<b>0.7632</b>	0.9823	<b>0.3295</b>	0.9791	<b>0.0650</b>	0.6196	<b>0.2238</b>	0.8277
19	50	<b>0.6102</b>	0.945	<b>0.4286</b>	0.9276	<b>0.0919</b>	0.6287	<b>0.3412</b>	0.9717
32	50	<b>0.8318</b>	0.9954	<b>0.3142</b>	0.978	<b>0.0560</b>	0.6991	<b>0.2386</b>	0.9817
44	50	<b>0.8336</b>	0.9964	<b>0.3296</b>	0.9785	<b>0.0564</b>	0.6865	<b>0.2747</b>	0.968
19	80	<b>0.6248</b>	0.9633	<b>0.3124</b>	0.8936	<b>0.0640</b>	0.5423	<b>0.2974</b>	0.9439
32	70	<b>0.7651</b>	0.9841	<b>0.3093</b>	0.9645	<b>0.0631</b>	0.7185	<b>0.2213</b>	0.958
44	70	<b>0.7827</b>	0.9866	<b>0.3512</b>	0.9488	<b>0.0706</b>	0.7622	<b>0.2583</b>	0.9331
<b>SUD</b>	<b>P4 = 1</b>	<b>Travée 2</b>						<b>Travée 3</b>	
Masse	Vitesse	Poutre 2		Poutre 7		Poutre 9		Poutre 7	
		a	$R^2$	a	$R^2$	a	$R^2$	a	$R^2$
19	50	<b>0.4756</b>	0.9592	<b>0.3825</b>	0.8827	<b>0.1337</b>	0.7664	<b>0.4085</b>	0.9198
32	50	<b>0.5276</b>	0.9844	<b>0.3859</b>	0.9108	<b>0.1403</b>	0.8716	<b>0.3571</b>	0.9251
44	50	<b>0.5550</b>	0.9905	<b>0.4206</b>	0.9589	<b>0.1498</b>	0.9246	<b>0.4052</b>	0.9471
19	70	<b>0.5139</b>	0.9532	<b>0.3595</b>	0.8525	<b>0.1234</b>	0.8024	<b>0.3370</b>	0.8437
44	80	<b>0.5629</b>	0.9864	<b>0.4183</b>	0.8526	<b>0.1596</b>	0.7949	<b>0.4327</b>	0.8975

TABLEAU 3.2 – Caractéristiques détaillées des passages des véhicules dans le test de chargement sur le pont.

ces modèles, la méthode de Courbon porte les études sur une section droite indéformable alors que la méthode de Guyon-Massonnet [56] se base sur la théorie de flexion de plaque orthotrope.

Concernant le problème du pont à quatre travées, nous utilisons la méthode de Guyon-Massonnet pour déterminer le Coefficient de Répartition Transversale (CRT), dans le cas de deux charges ponctuelles de même amplitude et excentrées (le rapport entre l'excentricité du véhicule à partir de la ligne médiane de la chaussée et la moitié de la largeur du hourdis)  $e_1 = 0.56$  et  $e_2 = 0.044$ . Les charges appliquées représentent le passage du poids-lourd 44 T dans la direction Sud. La distribution des charges est présentée dans la figure 3.6. Les calculs détaillés sont présentés dans la note de calcul (Annexe B) « Calcul de Coefficient de Répartition Transversale (CRT) dans une section souple déformable par la méthode de Guyon-Massonnet : Application à un pont à quatre travées ».

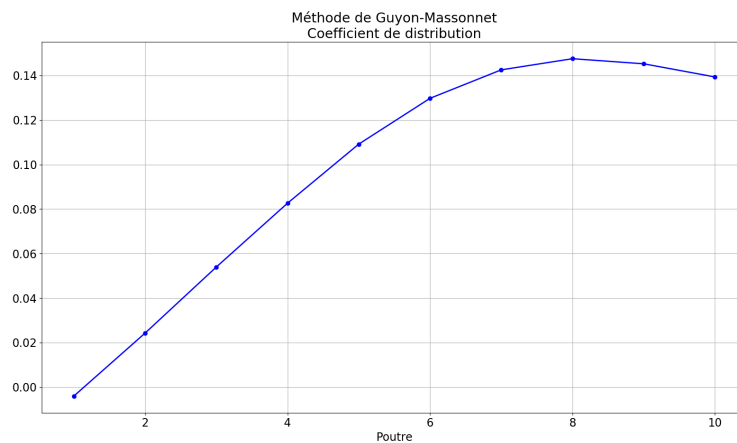


FIGURE 3.6 – Coefficient de Répartition Transversale des charges pour la section du pont (voir annexe B).

Pour simuler les passages de différents véhicules pour différents excentrement, nous changeons les excentrement des forces ponctuelles appliquées et la distance entre ces deux forces. La valeur du coefficient de répartition transversale (CRT) pour la poutre 7 est de l'ordre de 0.14. Ce coefficient sera appliqué à la charge réelle appliquée sur la portion de poutre considérée (poutre 7).

### 3.4.2 Solution analytique d'une portion de poutre

Le tablier du pont (Figure 3.1) peut être considéré comme un ensemble de dix portions de poutre de section en T, constituée de la poutre sous-chaussée et une partie du hourdis de largeur qui est égale à l'espacement des poutres (Figure 3.7b). Une portion de poutre est modélisée comme une poutre continue à quatre travées, dont la configuration longitudinale reste la même que celle du pont actuel (Figure 3.7a). Pour simplifier les calculs, la portion de poutre est supposée être constituée d'un matériau homogène (le béton). La précontrainte n'est pas prise en compte. Les paramètres géométriques et les caractéristiques du matériau constitutif utilisés pour les calculs analytiques sont présentés dans le tableau 3.3. Dix-huit premiers modes de vibration sont retenus pour calculer la réponse temporelle du pont lors des passages des véhicules, soit une masse modale effective cumulée de 87 pour cent.

Les calculs analytiques sont appliqués pour la poutre dont la déformation est maximale quand un véhicule passe sur le pont. Il s'agit de la poutre numéro 4 pour un passage Nord et la poutre numéro 7 pour un passage Sud. La charge mobile appliquée est adaptée pour chaque véhicule, dont les caractéristiques sont présentées dans le tableau 3.1. La force

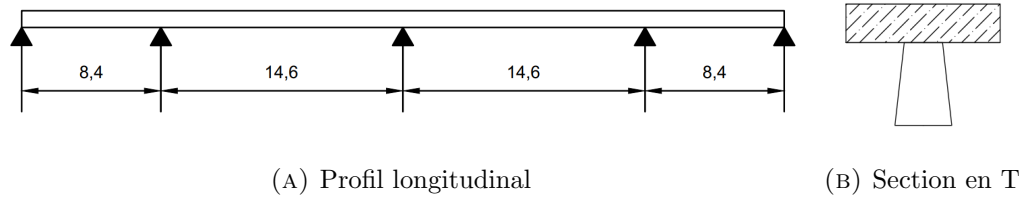


FIGURE 3.7 – Modélisation d'une portion de poutre.

Paramètres	Notation	Unité	Valeur
Longueur des travées centrales	$L_1$	m	14.6
Longueur des travées extérieures	$L_2$	m	8.4
Section	$A$	m <sup>2</sup>	0.5213
Moment d'inertie en flexion	$I_G$	m <sup>4</sup>	0.0295
Module d'élasticité instantané	$E_{cm}$	GPa	35.22
Coefficient de Poisson	$\nu$	–	0.2
Module d'élasticité	$E$	GPa	36.60
Masse volumique	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	2 500

TABLEAU 3.3 – Caractéristiques détaillées de la poutre.

exercée par chaque essieu sera pondérée par le CRT correspondant à la poutre considérée ( $CRT \approx 0.14$ ). Les autres déformations seront estimées à partir de la corrélation à la déformation maximale, dont les coefficients de corrélation sont trouvés dans le tableau 3.2.

La figure 3.8 présente les résultats du modèle analytique en comparaison avec les données mesurées correspondantes au passage Sud du poids-lourd 44 T, à 50 km/h. Le véhicule passe d'abord la travée T3, puis la travée T2. Les lignes continues représentent les résultats analytiques alors que les lignes en pointillés représentent les déformations mesurées. Nous observons que les résultats analytiques et expérimentales sont pratiquement en bon accord.

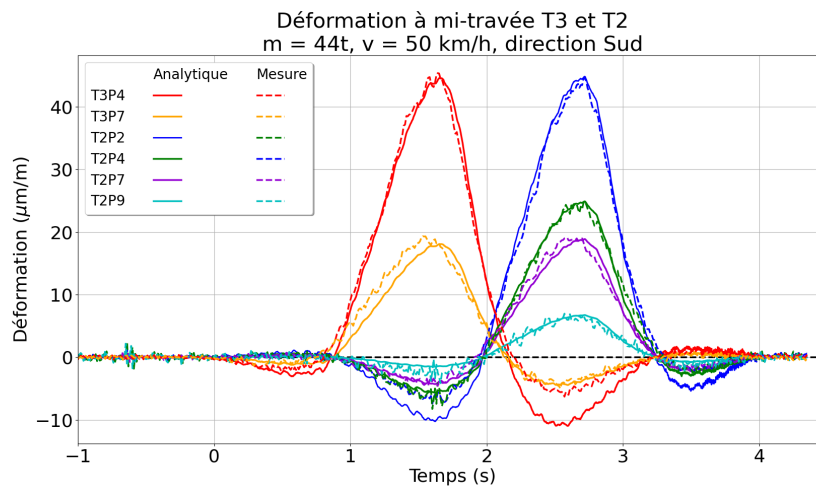


FIGURE 3.8 – Comparaison des résultats du modèle analytique avec des données mesurées.



En ce qui concerne l'intégrale des déformations mesurées, rappelons que :  $I_1 = \int \epsilon(t)dt \approx \frac{m}{v} \times F_{m,v}$  (Equation 2.84). La figure 3.9 représente les intégrales des déformations maximales mesurées lors des passages des véhicules en fonction du ratio masse - vitesse. La couleur bleue représente les signaux mesurés de la travée T2 alors que la couleur rouge représente les signaux de la travée T3. Les points ronds correspondent aux passages à 10 km/h, les triangles représentent les passages à 50 km/h et enfin, les étoiles représentent les passages à 70 - 80 km/h. La pente de la droite verte est égale à  $F_{m,v}$ , la valeur du facteur de masse-vitesse estimée pour ce pont. Nous remarquons alors qu'un certain nombre de points d'essais sont proches de la droite estimée.

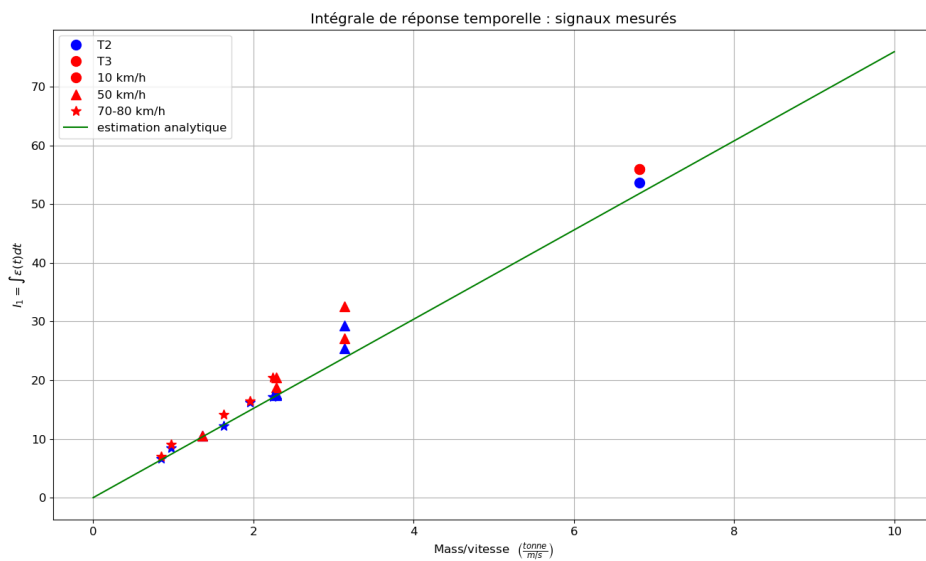


FIGURE 3.9 – Intégrale des signaux mesurés et la droite estimées.

La figure 3.10 présente la dépendance du Facteur d'Amplification Dynamique (FAD), défini par l'équation 2.83, à la vitesse correspondante au passage du poids-lourd 44 T sur le pont en direction Nord (le véhicule passe d'abord sur la travée T2, puis sur la travée T3). Les déformations au milieu des travées T2 et T3 sont exploitées. Le FAD est calculé pour le cas non-amorti (la courbe bleue pour la travée T2 et la courbe orange pour la travée T3) et pour le cas avec amortissement  $\zeta = 2\%$  (les courbes rouge et verte). Pour le pont en bon état (non-endommagé), les trois premières vitesses critiques sont :  $v_{c1} = 798$  km/h,  $v_{c2} = 962$  km/h et  $v_{c3} = 1330$  km/h. Les pics des graphes correspondants à ces vitesses critiques au cas non-amorti sont bien mis en évidence dans cette figure. Avec amortissement, les FAD diminuent, particulièrement autour des vitesses critiques. Les courbes sont plus lisses. Pour une vitesse supérieure à 485 km/h ( $v = 0.6v_{c1}$ ), les valeurs de FAD de la travée T3 sont plus grandes que celles de la travée T2.

Un zoom des courbes de FAD sur les vitesses usuelles est présenté dans la Figure 3.11, dans la plage de 10 km/h jusqu'à 250 km/h. Quand la vitesse du véhicule est inférieure à 200 km/h ( $v \leq 0.25v_{c1}$ ), l'amplification dynamique est alors inférieure à 7 %. Cependant, la vitesse maximale autorisée pour tout moyen de transport sur la structure est 80 km/h, soit une amplification dynamique de 1 %.

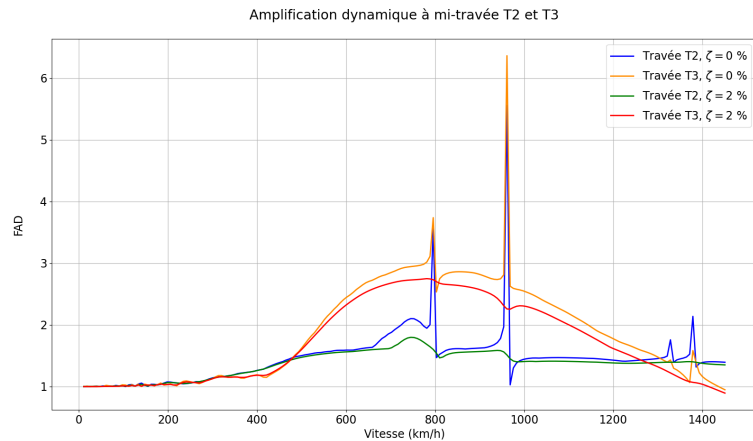


FIGURE 3.10 – Facteur d'Amplification Dynamique du pont à quatre travées.

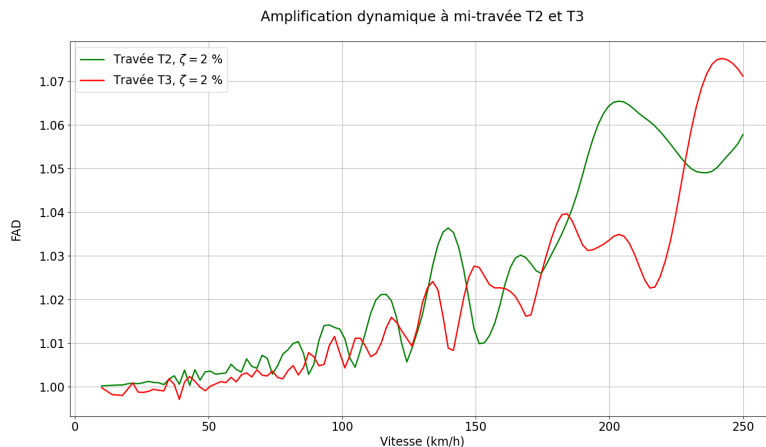


FIGURE 3.11 – Facteur d'Amplification Dynamique du pont à quatre travées. Un zoom sur les vitesses usuelles.

### 3.5 Modélisation de la structure dans *code\_Aster*

Afin d'alléger les calculs aux éléments finis, une géométrie simplifiée est considérée. Le pont est modélisé par des éléments 1D (pour les poutres, les entretoises et les appareils d'appui) et par des éléments 2D (pour le hourdis et les trottoirs). Tout d'abord, la géométrie et le maillage du pont sont construits dans la plateforme Salomé. Le solveur utilisé pour résoudre le problème mécanique est le *code\_Aster*.

#### 3.5.1 Géométrie du maillage

Le maillage du pont comprend deux parties. La partie supérieure représente le hourdis et les trottoirs. La partie inférieure contient uniquement des éléments unidimensionnels. Les détails du maillage sont décrits comme suit :

- Modélisation par les éléments 2D : C'est la partie supérieure du maillage, pour le hourdis et les trottoirs. Les éléments sont quadrangles, de type coque DKT.

- Modélisation par les éléments 1D : C'est la partie inférieure du maillage. Les poutres et les entretoises sont modélisées par les éléments de poutre droite Euler-Bernoulli. De plus, les appuis sont modélisés par des éléments discrets.

Les deux parties du maillage sont liées par des liaisons solides. Une liaison solide est décrite par un groupe qui contient deux noeuds, et la distance entre ces derniers est conservée quand la structure bouge. Les liaisons solides sont déclarées pour les noeuds des poutres et des entretoises (mot clé `LIAISON_SOLIDE` dans `code_Aster`).

La section des poutres est déclarée par un maillage d'un trapèze isocèle dont les dimensions sont trouvées dans la section 3.2.1. De même, la section des entretoises est définie dans `code_Aster` par leur largeur et leur hauteur. Pourtant, le maillage (supérieur) initial doit être modifié pour s'adapter à la géométrie des trottoirs.

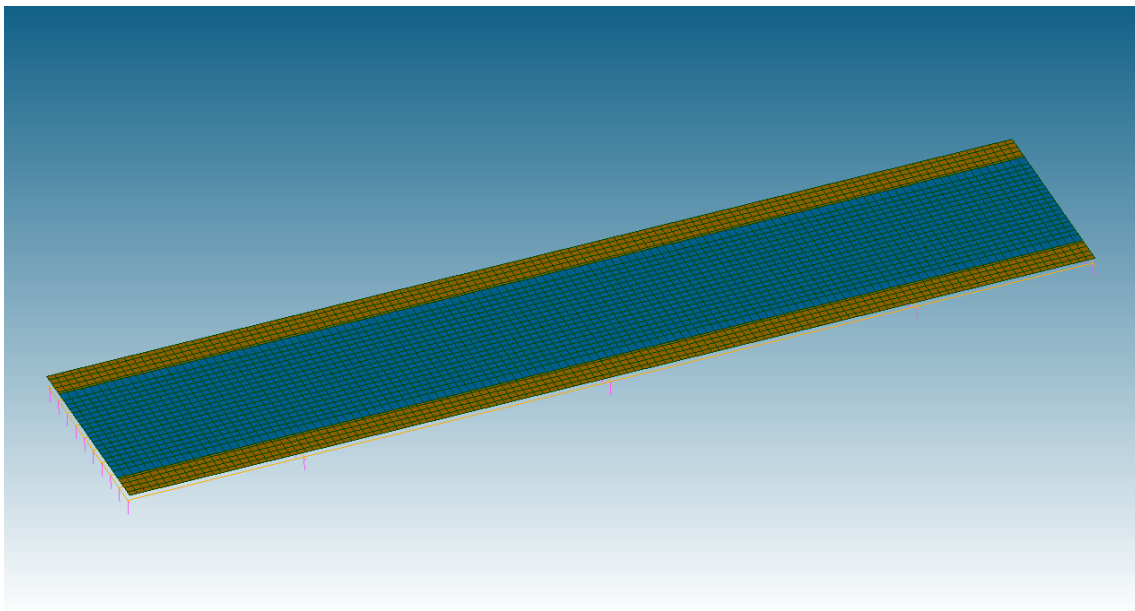


FIGURE 3.12 – Détail d'une travée du pont.

La figure 3.12 présente le maillage complet du pont à quatre travées. Ce maillage contient 3654 éléments quadrangles (2D), 3025 éléments 1D et 5280 noeuds. La taille moyenne des éléments est de 0.36 m. La partie centrale en bleu désigne la chaussée, les deux bandes en rives désignent les trottoirs alors que les lignes situées en-dessous de la plaque représentent les poutres sous-chaussée, les entretoises et les supports.

### 3.5.2 Propriétés mécaniques des composantes du pont

Les propriétés mécaniques des matériaux constituant du pont sont choisies dans la plage de valeurs habituelles et elles sont calées en se référant à certaines fréquences naturelles détectées par les accéléromètres durant le test de chargement. Les propriétés mécaniques des éléments en béton sont données dans le tableau 3.4. La masse volumique de tous les types de béton est  $2500 \text{ kg/m}^3$  et le coefficient de Poisson du béton est pris égal à 0.2.

Éléments	Module de Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Masse volumique ( $kg/m^3$ )
Les poutres longitudinales	35	0.2	2500
Les entretoises	35	0.2	2500
Le hourdis	32	0.2	2500
Les trottoirs	20	0.2	2500

TABLEAU 3.4 – Propriétés mécaniques des éléments en béton

En ce qui concerne les éléments discrets, des raideurs en translation et / ou en rotation sont définies pour chaque type d'éléments. Les appareils d'appui en néoprène sont modélisés par un élément discret de translation (DIS\_T), dont chaque noeud contient 3 degrés de liberté (DX, DY, DZ). Les raideurs de translation pour chaque appareil d'appui sont comme suit :

- Les raideurs transversales :  $k_x = k_y = 3.54 \times 10^6 N/m$
- La raideur verticale :  $k_z = 5.02 \times 10^9 N/m$

Les appareils d'appuis sont considérés comme posés sur un sol rigide. Par conséquent, les déplacements de tous les noeuds de supports sont bloqués dans les trois directions (DX = DY = DZ = 0).

Dans le cas où une poutre est fissurée, la fissure est modélisée par un élément discret de translation-rotation (chaque noeud contient 6 degrés de liberté : DX, DY, DZ, DRX, DRY, DRZ) dont les deux noeuds sont très proches. Les raideurs de translation sont prises comme très grandes ( $k_x \rightarrow \infty$ ) alors que les raideurs de rotation sont décrites par une fonction qui dépend de la profondeur de la fissure ( $k_\theta = EI/K(a/h)$ ). La modélisation d'une poutre fissurée est décrite en détail dans le Chapitre 1, section 1.5.

### 3.5.3 Modélisation des charges

Durant le test, plusieurs types de poids-lourd traversent le pont à différentes vitesses. Grâce à ce modèle tridimensionnel, la largeur de véhicule et son excentrement (excentricité du véhicule par rapport à la ligne médiane de la route) sont pris en compte (Figure 3.13). Dans ces calculs numériques, le poids-lourd 19T est modélisé comme le chargement appliqué. C'est un camion à deux essieux. Selon des pesages avant et après le test, les poids distribués sur l'essieu avant et arrière sont respectivement  $P_1 = 6.24$  tonnes et  $P_2 = 12.7$  tonnes. Dans la figure 3.13, chaque petite flèche vaut  $P_1/2$  et une grande flèche est égale à  $P_2/2$ .

## 3.6 Résultats

### 3.6.1 Analyse modale

Dans un premier temps, une analyse modale a été effectuée afin de mettre en évidence des paramètres retenus dans le modèle numérique. Dans *code\_Aster*, l'opérateur CALC\_MODES est utilisé pour calculer les modes propres de vibration. 20 premiers modes sont demandés. Parmi ces modes, les 3 premiers modes de vibration du pont à quatre travées correspondent au mouvement du corps rigide : Le pont est alors considéré comme une grosse masse unique, posée sur un système de ressorts en parallèle. Le système (tablier + poutres) repose sur les

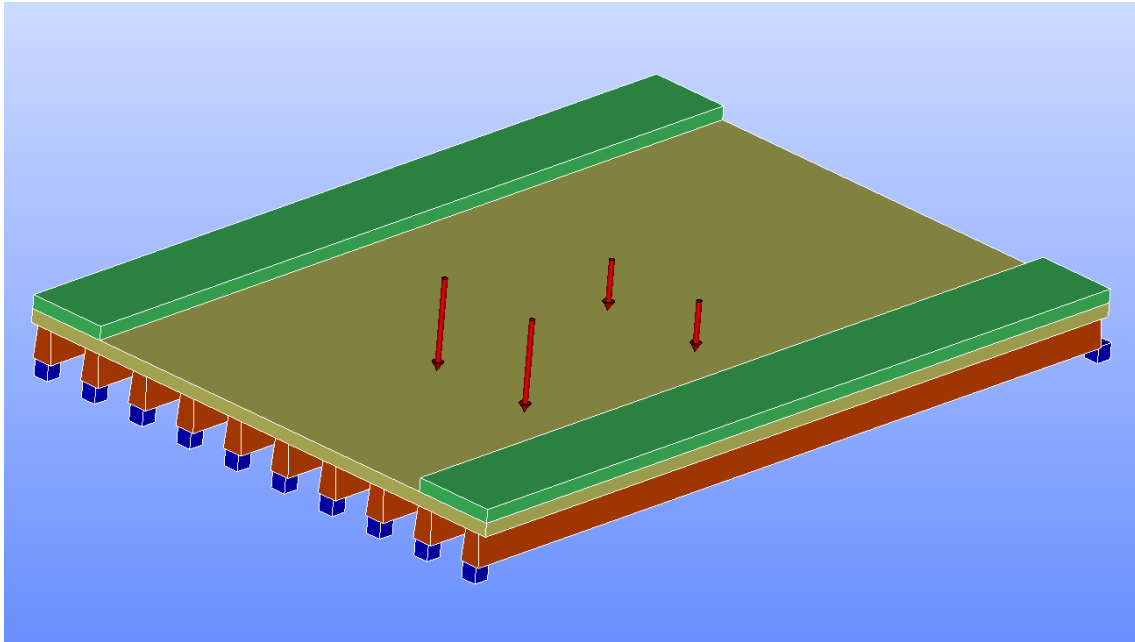


FIGURE 3.13 – Modélisation du chargement

appuis et se comporte comme un oscillateur simple. Les trois premiers modes représentent les fréquences fondamentales de cet oscillateur en trois directions X, Y, Z. Nous éliminons donc ces modes. Les six modes de vibration suivants seront présentés.

### Les modes propres

La figure 3.14 présente les six premiers modes de vibration du pont à quatre travées calculés par *code\_Aster*. Le premier mode et le troisième mode correspondent au premier et deuxième mode de flexion. Ces deux modes sont proches des résultats du modèle analytique, dans lequel le pont est modélisé comme une poutre continue. Nous relevons un écart de 3.44 % pour le premier mode et 2.67 % pour le deuxième mode (voir Tableau 3.5). Les autres modes représentent la vibration bidimensionnelle d'une plaque rectangulaire, qui ne peuvent être calculés par une modélisation unidimensionnelle.

Pour comparer les résultats des modèles analytique et numérique, nous présentons dans le tableau 3.5 les fréquences propres des quatre premiers modes de flexion en comparaison avec les résultats obtenus par le modèle analytique d'une poutre unidimensionnelle présenté dans la Section 3.4. La première colonne représente le numéro de mode dans *code\_Aster* tandis que la deuxième colonne représente le numéro de mode de flexion correspondant. En général, nous observons que les fréquences propres de vibration en flexion retrouvées par les deux méthodes sont en bon d'accord.

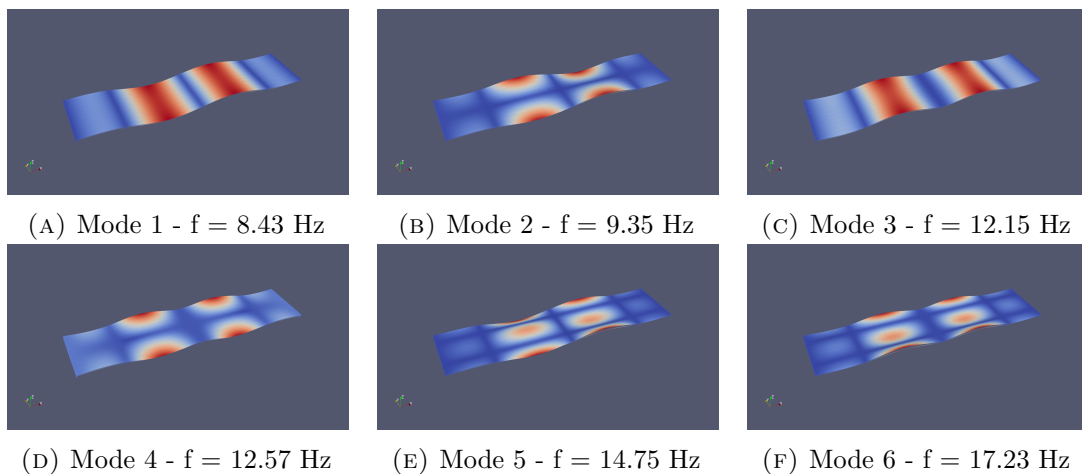


FIGURE 3.14 – Six premiers modes de vibration du pont

Mode n°	Mode de flexion	code_Aster	Modèle analytique	Différence (%)
1	1	8.43	8.14	3.44
3	2	12.15	11.83	2.67
11	3	23.12	22.60	2.25
14	4	24.64	24.34	1.21

TABLEAU 3.5 – Les quatre premières fréquences naturelles en Hz correspondantes aux modes de flexion du pont.

### Comparaison avec les mesures réelles

Comme présenté dans la partie 3.2.2 les accéléromètres étaient placés dans la zone comprise entre un tiers et la moitié de la longueur de la travée T2, à partir de son extrémité gauche. D'après les résultats de calculs aux éléments finis présentés dans la figure 3.14, aucun nœud n'est trouvé à ce point. Par conséquent, les six premières fréquences naturelles pourraient être détectées par les accéléromètres.

Le test a duré environ 5 heures (le premier passage a été enregistré à 10h09 et l'enregistrement s'est arrêté à 14h59). Les données obtenues sont donc très riches en nombre de points de mesure et en nombre de passages. Il y a plus de 1 750 000 points de mesure. Le test ayant été réalisé sans la fermeture du trafic, plusieurs passages sont aussi enregistrés en même temps que les véhicules sélectionnés pour le test de chargement.

La figure 3.15 présente à la fois les signaux mesurés par l'accéléromètre sur la poutre P1, leur DSP (*Densité Spectrale de Puissance*) et leur transformée de Fourier. Des résultats très similaires sont constatés avec les signaux mesurés sur la poutre P10. Cela peut être expliqué par la symétrie de la localisation des capteurs et du déplacement des six premiers modes retenus. Les pics relevés sont 7.90 Hz, 9.33 Hz, 12.12 Hz, 12.61 Hz, 14.72 Hz, 25.22 Hz, 31.08 Hz et 43.69 Hz. Les six premières fréquences mesurées sont comparées avec les fréquences calculées par les calculs aux éléments finis comme montré dans la figure 3.16. Les fréquences calculées et mesurées sont cohérentes. Les écarts entre celles-ci étant inférieurs à 0.3 % pour 4 des 6 paires de fréquences. Des écarts plus importants sont en effet observés pour le premier mode et le sixième mode.

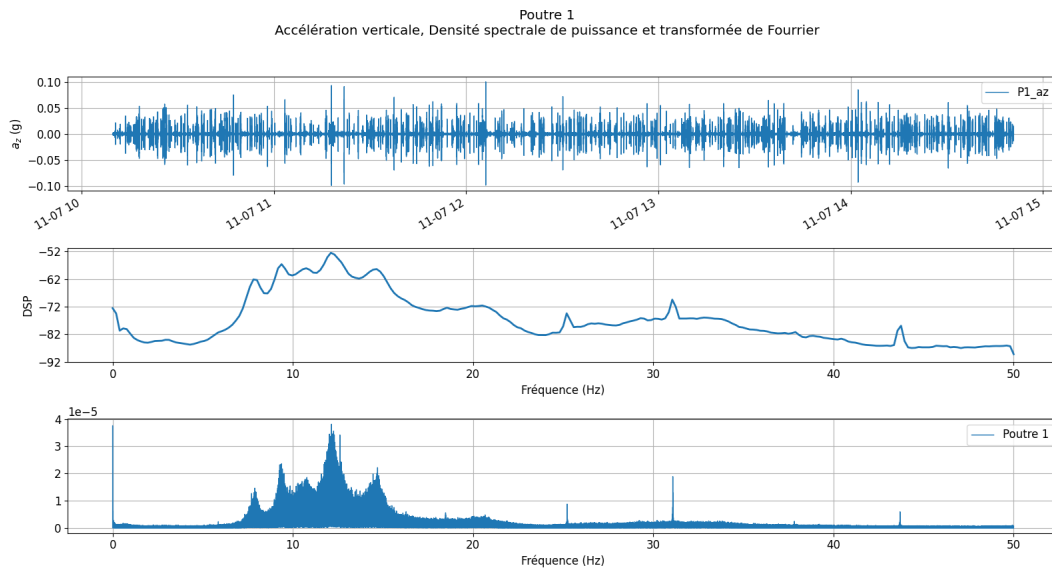


FIGURE 3.15 – Accélération de la poutre P1 mesurée pendant le test

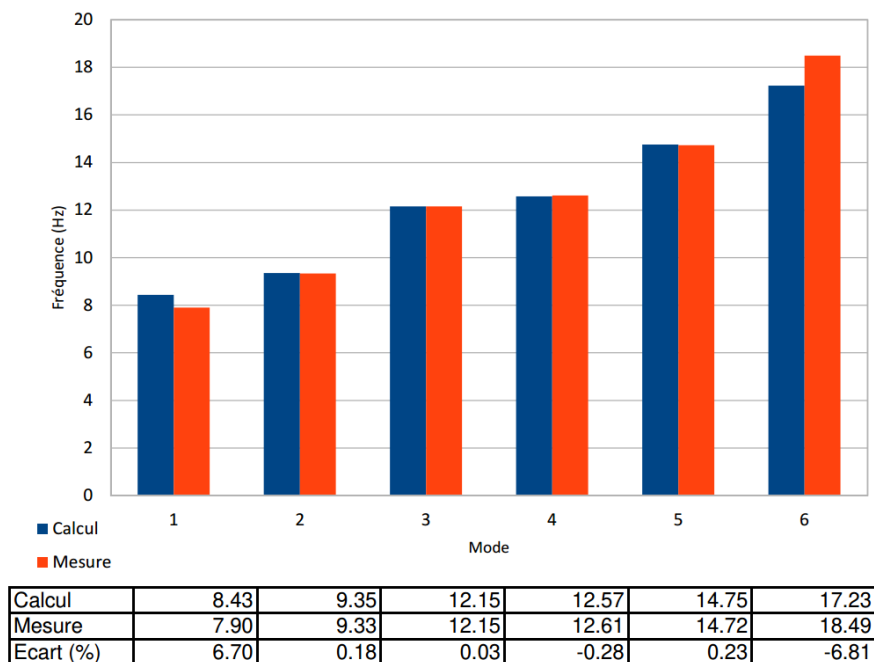


FIGURE 3.16 – Comparaison des fréquences naturelles calculées et mesurées

### 3.6.2 Réponse temporelle du passage de poids-lourd

Le poids-lourd de 19 tonnes est choisi pour valider ce modèle. C'est un véhicule à deux essieux. Les caractéristiques détaillées du passage de ce véhicule sont présentées dans le tableau 3.6.

Paramètres	Notation	Unité	Valeur
Masse totale	$m$	tonne	19.22
Charge devant	$P_1$	tonne	6.24
Charge arrière	$P_2$	tonne	12.70
Largeur entre roues	$B$	m	2.10
Distance entre 2 essieux	$d_1$	m	4.05
Excentrement	$e$	m	0.54
Vitesse	$v$	km/h	50

TABLEAU 3.6 – Caractéristiques détaillées du passage de poids-lourd 19 tonnes.

La partie inférieure du maillage contient seulement des éléments 1D. Dans les calculs, nous n'exportons que des champs de déplacements nodaux correspondant à cette partie du maillage, pour économiser de la mémoire vive (RAM) de l'ordinateur et ainsi diminuer le temps de calcul. Les poutres sont modélisées par des éléments de poutre droit de type Euler-Bernoulli (POU\_D\_E), dont les nœuds ont 6 degrés de liberté chacun (3 pour la translation DX, DY, DZ et 3 pour la rotation DRX, DRY, DRZ). Comme les cordes optiques ont une longueur considérable par rapport à la taille des travées, les déformations mesurées sont des valeurs moyennes calculées sur la longueur du capteur. Cette déformation moyenne est donnée par l'expression 3.1, où  $z_0$  est la distance entre l'axe neutre du pont et la corde optique,  $\theta_A$  et  $\theta_B$  sont respectivement la rotation de la poutre aux points A et B,  $l_{AB}$  est la distance entre A et B. Nous parlerons en détail de cette expression dans le chapitre suivant. Dans cette modélisation, nous prenons  $z_0 = 0.47\text{ m}$ .

$$\overline{\varepsilon}_{AB} = z_0 \times \frac{\theta_B - \theta_A}{l_{AB}} \quad (3.1)$$

La comparaison des déformations moyennes calculées et mesurées est présentée dans la Figure 3.17. Comme le véhicule vient de la direction Sud, il passe d'abord la travée T3, puis la travée T2. Les signaux simulés (lignes solides) sont en accord avec les signaux mesurés (lignes pointillés). Cependant nous constatons un grand écart pour la poutre P2. Cet écart important peut être expliqué par la position de la poutre P2. La poutre P2 est située au-dessous d'un trottoir. La présence de ce dernier pourrait augmenter la rigidité en flexion ( $EI$ ) du pont. De ce fait, la déformation mesurée sur la poutre T2P2 est bien inférieure aux valeurs calculées.



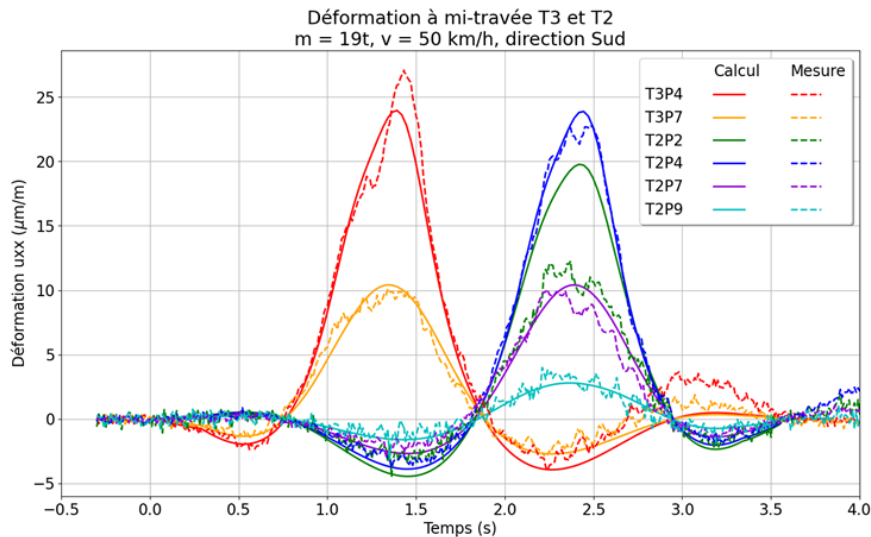


FIGURE 3.17 – Comparaison des déformations moyennes calculées et mesurées.

### 3.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord employé le modèle analytique pour reconstruire les signaux mesurés dans un essai de pesage sur un pont à quatre travées en service. La portion de poutre la plus déformée est modélisée comme une poutre continue d'Euler-Bernoulli sur cinq appuis. A l'aide de la méthode Guyon-Massonet de détermination des Coefficients de Répartition Transversale (CRT), un coefficient de 0.14 a été retenu pour être appliqué à cette portion de poutre. De plus, les autres déformations ont été calées à partir de ce résultat analytique grâce à un tableau de coefficients de corrélation correspondant à chaque passage. Les résultats obtenus par la méthode analytique sont comparables aux signaux mesurés. D'autre part, l'aire de la ligne d'influence calculée pour chaque passage est proportionnelle au ratio  $m/v$ , comme montré dans la section 3.4.2.

Ensuite, afin de compléter le modèle analytique, nous avons construit un modèle numérique du pont à l'aide de la plateforme Salomé et le code de calculs aux éléments finis *code\_Aster*. Afin d'alléger le temps de calcul, seuls les éléments 1D et 2D sont utilisés pour modéliser la structure. Les six premières fréquences naturelles obtenues par le modèle sont globalement cohérentes avec les fréquences mesurées par les accéléromètres. De plus, les déformations moyennes prédites par les calculs numériques sont en bon accord avec les valeurs mesurées.

Ce modèle simplifié nous permet de mieux comprendre le comportement du pont en trois dimensions. Il présente plusieurs avantages par rapport à la modélisation 1D : la position transversale (excentrement), la largeur de véhicule, etc. sont prises en compte. Ces nombreux paramètres d'entrée nous permettent d'effectuer des études paramétriques. Il nous sert également à créer des défauts pour réaliser des simulations avec une structure endommagée. Cela permettra de vérifier les critères de détection de l'endommagement dans la structure.

## Chapitre 4

# Influence de l'endommagement et du type de capteurs de déformation sur les réponses de structures

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>78</b>
<b>4.2</b>	<b>Déformation mesurée à l'aide de capteurs longs et courts</b>	<b>78</b>
4.2.1	Poutre simple non-fissurée	78
4.2.2	Poutre simple fissurée	82
<b>4.3</b>	<b>Application : le cas d'une poutre</b>	<b>83</b>
4.3.1	Poutre simple saine	83
4.3.2	Poutre simple avec la présence de défaut	85
<b>4.4</b>	<b>Application : le cas d'un pont</b>	<b>90</b>
4.4.1	Cas d'étude réel : Test sur le pont Moneder Gulley	90
4.4.2	Application : Pont à quatre travées	91
<b>4.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>95</b>

---

## 4.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'influence de l'endommagement dans les structures et leur évolution dans le temps. Les ponts qui peuvent être surveillés en permanence le sont en général par OSMOS avec des capteurs de déformation de type fibre optique, et éventuellement des accéléromètres et des sondes de température. Chaque passage de véhicule est un événement dynamique, pendant lequel les capteurs enregistrent les signaux avec une fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. Si le pont est au repos (il n'y a pas de véhicule qui le traverse), les mesures s'effectuent chaque 10 à 60 minutes afin de surveiller la structure à long terme [16]. A partir de ces événements dynamiques, nous proposons quelques méthodes de détection en utilisant des cordes optiques longues et des accéléromètres. Tandis que les jauges de déformation électriques mesurent une déformation moyenne sur une longueur plus petite (en l'occurrence, réalisent une moyenne des déformations sur une longueur de 150 mm au plus), les cordes optiques mesurent la déformation moyenne sur sa longueur de référence, souvent comprise entre 1 m et 2 m (*gage length* en anglais). Cela permet d'intégrer les informations sur une longue distance, qui sera utile pour donner une indication structurelle. Dans la première partie, nous comparerons ces deux types de capteur de déformation dans la section 4.2 pour le cas d'une poutre.

Les hypothèses proposées pour le cas d'une poutre seront validées pour le cas d'une structure réelle. De plus, l'influence de l'endommagement sur la réponse en fréquence et en déformation des structures de type ponts à poutre sera examinée.

## 4.2 Déformation mesurée à l'aide de capteurs longs et courts

Traditionnellement, les déformations sont mesurées à l'aide de jauges de déformation électriques, comme celles utilisées pour la caractérisation mécanique des matériaux. Pour les essais de traction d'éprouvettes en acier, les jauges de déformation utilisées ont une taille de l'ordre de quelques millimètres. Pour d'autres matériaux présentant une importante hétérogénéité comme le béton, elles sont plus longues et ont une longueur 7 mm à 70 mm. Par ailleurs, la jauge électrique va donner des informations non exploitables si elle est placée à proximité d'un défaut du fait de sa faible longueur. Cela ne sera pas le cas d'un capteur de déformation de taille longue (comme les cordes optiques, les fibres optiques, etc.). De ce fait, le choix du type de capteur dépend de l'objectif de surveillance, du matériau et du type d'élément de structure sur lequel est mesurée la déformation. Pour des ponts et des poutres, un capteur de déformation long sera capable de détecter des endommagements potentiels dans des zones sensibles de grandes longueurs [38].

Dans cette partie, nous allons comparer les déformations mesurées à l'aide d'une jauge de déformation et d'une corde optique longue (avec une longueur de référence typiquement comprise entre 1 m et 2 m). Les calculs théoriques seront présentés dans le cas d'une poutre simple soumise à une force ponctuelle. Les calculs sont limités au cas quasi-statique.

### 4.2.1 Poutre simple non-fissurée

Considérons une poutre simple saine (ne présentant pas d'endommagement) soumise à une force ponctuelle d'intensité  $P$  ( $P > 0$ ) comme montré sur la figure 4.1. Un capteur de déformation de type « corde optique longue » (trait rouge) est placé sous la poutre, et permet de mesurer la déformation moyenne sur sa longueur. Ses extrémités sont situées

en  $x_A$  et  $x_B$ . En outre, une jauge de déformation est placée au milieu de la corde optique. Cette jauge traditionnelle donne la déformation au point  $x_C = (x_A + x_B)/2$ . Nous la définissons comme « ponctuelle » en considérant que la longueur de la jauge est très faible devant celle de la corde optique.

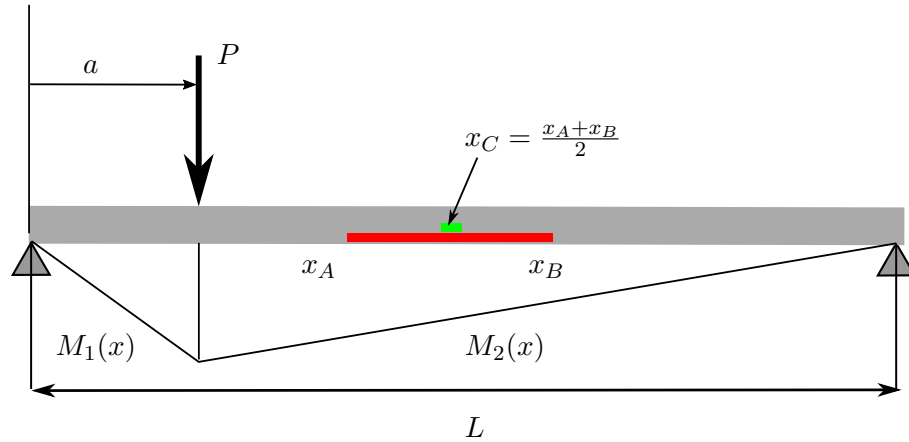


FIGURE 4.1 – Moment de flexion d'une poutre simple

La force est à distance  $a$  de l'extrémité gauche de la poutre. Le moment de flexion en un point  $x$  quelconque ( $0 < x < L$ ) sur la poutre est :

$$M_f(x) = \begin{cases} P \left(1 - \frac{a}{L}\right) x, & x \leq a \\ P \left(1 - \frac{x}{L}\right) a, & x \geq a \end{cases} \quad (4.1)$$

La déformation mesurée s'écrit :

$$\varepsilon(x) = \frac{z_0 M_f(x)}{EI} \quad (4.2)$$

Avec  $z_0$  la distance entre les capteurs et l'axe neutre de la poutre. Nous admettons que  $z_0 > 0$  si la corde optique est placée en dessous de l'axe neutre de la poutre. Cela assure que dans le cas d'un moment fléchissant positif, les fibres inférieures sont tendues et la déformation de ces fibres est positive ( $\varepsilon > 0$ ).

Nous supposons d'abord que la corde optique est parfaitement collée sur la poutre. La déformation moyenne entre  $x_A$  et  $x_B$  peut être calculée en fonction de la coordonnée du centre du segment AB ( $x_C$ ) comme suit :

$$\overline{\varepsilon}_{AB}(x_C) = \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_A}^{x_B} \varepsilon(x) dx \quad (4.3)$$

Nous étudions alors trois cas qui dépendent de la position de la force appliquée  $P$  :

— Cas 1 :  $a < x_A < x_B$

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon}_{AB}(x_C) &= \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_A}^{x_B} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) a dx = \frac{z_0 P}{EI} \frac{a}{x_B - x_A} \left[ (x_B - x_A) - \frac{x_B^2 - x_A^2}{2L} \right] \\ &= \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a = \varepsilon_C \end{aligned}$$

— Cas 2 :  $a > x_A > x_B$

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{AB}}(x_C) &= \frac{1}{x_B - x_A} \int_{x_A}^{x_B} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x dx = \frac{z_0 P}{EI} \frac{1}{x_B - x_A} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{x_B^2 - x_A^2}{2} \\ &= \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C = \varepsilon_C\end{aligned}$$

— Cas 3 :  $x_A < a < x_B$

$$\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{AB}}(x_C) &= \frac{1}{x_B - x_A} \left[ \int_{x_A}^a \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x dx + \int_a^{x_B} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) a dx \right] \\ &= \frac{z_0 P}{EI} \frac{1}{x_B - x_A} \left( a x_B - \frac{x_A^2}{2} - \frac{a}{2L} (x_B^2 - x_A^2) - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{z_0 P}{EI} \left[ a \left( \frac{1}{2} - \frac{x_C}{L} \right) - \frac{1}{2l_g} (a - x_C)^2 + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right] < \varepsilon_C\end{aligned}$$

dans lesquelles  $l_g = x_B - x_A$  est la longueur de la corde optique,  $\varepsilon_C$  est la déformation calculée au point C à l'aide de l'expression (4.2) :  $\varepsilon_C = \varepsilon(x_C)$ .

Nous constatons que, lorsque la force est en dehors de la corde optique, la déformation moyenne mesurée par cette dernière est identique à la déformation « ponctuelle » mesurée par la jauge de déformation. Lorsque la force se trouve au-dessus de la corde optique, la déformation moyenne  $\overline{\varepsilon_{AB}}$  est plus petite que celle calculée au point C  $\varepsilon_C$ .

En résumé, la déformation moyenne sur le segment  $AB$  dépend de la position de la force appliquée  $a$  et du centre de la corde optique  $x_C$  de la façon suivante :

$$\overline{\varepsilon_{AB}}(a, x_C) = \begin{cases} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a, & a \leq x_A \leq x_B \\ \frac{z_0 P}{EI} \left[ a \left( \frac{1}{2} - \frac{x_C}{L} \right) - \frac{1}{2l_g} (a - x_C)^2 + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right], & x_A \leq a \leq x_B \\ \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C, & x_A \leq x_B \leq a \end{cases} \quad (4.4)$$

Dans la réalité, la corde optique n'est pas collée mais fixée sur l'ouvrage en certains points (Figure 4.2). Nous essayons alors de trouver une autre approche pour calculer la déformation moyenne que celle donnant l'expression 4.3.

Considérons un segment de poutre comme montré dans la Figure 4.3. Nous notons  $x$  le sens longitudinal et  $z$  le sens vertical. Les axes  $(O, x, y, z)$  forment un repère direct. Supposons que la poutre suit les hypothèses d'Euler-Bernoulli, nous pouvons écrire le champ de déplacement d'un point  $M$  (point rouge sur la figure) de la poutre de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 u' \\ 0 \\ u \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où  $u$  est le déplacement de l'axe neutre (ligne verte pointillée).  $u_x, u_y, u_z$  sont respectivement les déplacements dans les directions  $x, y, z$ . L'opérateur prime  $(\star)'$  désigne la dérivée de la fonction  $(\star)$  par rapport à la variable  $x$ . Le moment de flexion est calculé à l'aide de la relation :  $M_f(x) = EIu''(x)$ .



FIGURE 4.2 – cordes optiques fixées sur le pont suivies par OSMOS (Source : OSMOS).

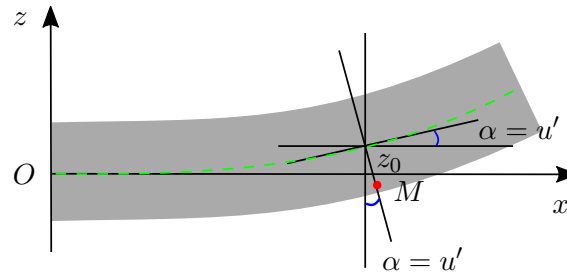


FIGURE 4.3 – Segment de poutre déformée

A partir de l'équation (4.1), la courbure  $u''(x)$  s'écrit :

$$u''(x) = \begin{cases} \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x, & x \leq a \\ \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) a, & x \geq a \end{cases} \quad (4.6)$$

En intégrant l'équation (4.6), nous obtenons la pente de l'axe neutre :

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{x^2}{2} + C_1, & x \leq a \\ \frac{P}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) a + C_2, & x \geq a \end{cases} \quad (4.7)$$

Nous avons toujours la continuité de la pente de l'axe neutre au point d'application de la force en  $x = a$  :

$$u'(a^-) = u'(a^+)$$

Nous en déduisons alors :

$$C_1 - C_2 = \frac{a^2}{2} \frac{P}{EI} \quad (4.8)$$

Nous calculons la déformation moyenne sur le segment  $AB$  à partir de son allongement  $\Delta l_{AB} = u_x(B) - u_x(A) = z_0(u'_B - u'_A)$  :

$$\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C) = \frac{\Delta l_{AB}}{x_B - x_A} = z_0 \frac{u'_B - u'_A}{x_B - x_A} \quad (4.9)$$

En reportant l'expression (4.7) dans l'équation (4.9) et en tenant compte de la condition (4.8) quand la force passe au-dessus de la corde optique, nous obtenons alors l'expression de

la déformation moyenne mesurée par un capteur long sur le segment  $AB$ . Cette expression est exactement la même que l'expression (4.4).

### 4.2.2 Poutre simple fissurée

Considérons maintenant la poutre précédente avec une fissure située en  $x = x_0$  (Figure 4.4). Nous établissons l'expression de la déformation moyenne mesurée par un capteur de déformation de grande longueur entre deux points  $x_A$  et  $x_B$ .

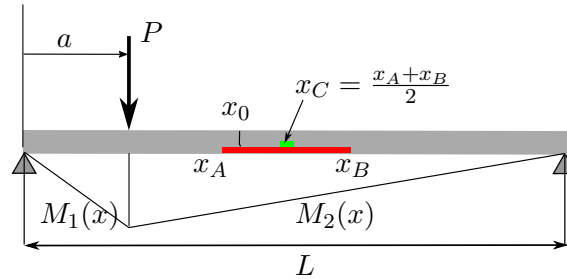


FIGURE 4.4 – Moment de flexion d'une poutre simple fissurée

Comme le moment de flexion ne change pas de part à l'autre de la fissure, l'expression de la courbure reste la même que celle donnée dans l'équation 4.6 :

$$u''(x) = \begin{cases} \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x, & x \leq a \\ \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{x}{L}\right) a, & x \geq a \end{cases} \quad (4.10)$$

Dans le cas  $a < x_0$ , l'expression de la pente de l'axe neutre s'écrit (La situation est la même si  $a > x_0$ . Nous ne considérons que ce cas) :

$$u'(x) = \begin{cases} \frac{P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) \frac{x^2}{2} + C_1, & x \leq a \\ \frac{P}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) a + C_2, & a \leq x \leq x_0 \\ \frac{P}{EI} \left(x - \frac{x^2}{2L}\right) a + C_3, & x \geq x_0 \end{cases} \quad (4.11)$$

A l'interface de la fissure, le saut de pente de la poutre est proportionnel à la courbure de la poutre à l'endroit fissuré. Nous récrivons la relation (1.31) comme suit :

$$u'(x_0^+) - u'(x_0^-) = K u''(x_0) \quad (4.12)$$

Où  $K$  est un coefficient qui dépend de la profondeur de la fissure, de la hauteur de la poutre et éventuellement du matériau constitutif de la poutre. Dans les applications numériques, nous utilisons le modèle de Rizos [74], dans lequel,  $K$  est donné par :

$$K = 6h(1 - \nu^2) J_1(a_1) \quad (4.13)$$

où  $\nu$  est le coefficient de Poisson du matériau constitutif de la poutre et  $J_1(a/h) = J_1(a_1)$  est une fonction de la profondeur relative  $a_1$  (le rapport  $a/h$ ) de la fissure :

$$J_1(a_1) = 1.8624a_1^2 - 3.95a_1^3 + 16.375a_1^4 - 37.226a_1^5 + 76.81a_1^6 - 126.9a_1^7 + 172a_1^8 - 143.97a_1^9 + 66.56a_1^{10} \quad (4.14)$$

A partir des équations (4.11) et (4.12), nous obtenons :

$$C_3 - C_2 = K \frac{M_f(x_0)}{EI} \quad (4.15)$$

avec  $M_f(x_0)$  le moment de flexion à l'endroit de la fissure.

La déformation moyenne mesurée est déterminée par l'équation (4.9) :

$$\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C) = \frac{\Delta l_{AB}}{x_B - x_A} = z_0 \frac{u'_B - u'_A}{x_B - x_A}$$

Nous constatons que, si la fissure est située en dehors de la zone couverte par la corde optique ( $x_0 \notin [x_A, x_B]$ ), il n'y a pas de discontinuité de la pente de l'axe neutre dans cette zone. La déformation mesurée prend la même valeur que dans le cas d'une poutre non-fissurée :

$$\overline{\varepsilon}_{fiss} = \overline{\varepsilon}_{nonfiss} \quad (4.16)$$

Cependant, si la fissure est située dans la zone couverte par la corde optique ( $x_0 \in [x_A, x_B]$ ), la déformation mesurée est différente de la valeur initiale :

$$\overline{\varepsilon}_{fiss} = \overline{\varepsilon}_{nonfiss} + \frac{z_0 K}{l_g EI} M_f(x_0) \quad (4.17)$$

### 4.3 Application : le cas d'une poutre

Afin de visualiser les résultats présentés dans la section précédente, nous allons maintenant présenter quelques applications numériques pour le cas d'une poutre simple avec différentes modélisations. Tout d'abord, nous considérons le cas d'une poutre saine (c.-à.-d. non-endommagée). Les lignes d'influence (réponse obtenue en un point donné en fonction de la position de la force ponctuelle appliquée sur la structure) des déformations moyennes et ponctuelles seront comparées. Avec la même démarche, nous allons considérer le cas d'une poutre fissurée. Enfin, pour compléter l'étude, un modèle numérique d'une poutre simple avec la présence d'endommagement (fissure, zone de réduction de module de Young) sera considéré. Dans cette approche, les éléments massifs en 3D sont utilisés pour modéliser la structure. Les calculs aux éléments finis sont effectués à l'aide du logiciel libre *code\_Aster*.

#### 4.3.1 Poutre simple saine

A titre d'exemple, nous réalisons une application numérique en considérant une poutre simple de longueur  $L = 10 \text{ m}$  et de section rectangulaire  $b \times h = 35 \times 60 \text{ cm}$ . Une force ponctuelle traverse très lentement la poutre à partir de l'extrémité gauche. Le processus est considéré comme quasi-statique. Au milieu de la poutre nous plaçons sur sa face inférieure une jauge de déformation ( $x_C = L/2 = 5 \text{ m}$ ) et une corde optique de longueur  $l_g = 2 \text{ m}$  dont les extrémités se trouvent aux points  $x_A = 4 \text{ m}$  et  $x_B = 6 \text{ m}$ . Le matériau constitutif est le béton ( $E = 35 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.2$ ). Une force ponctuelle d'intensité  $P = 10 \text{ kN}$  est appliquée à la distance  $a$  de l'extrémité gauche de la poutre. La distance entre les capteurs de déformation et l'axe neutre de la poutre est  $z_0 = h/2$ . Supposons que la structure travaille uniquement dans le domaine élastique linéaire, nous traçons les déformations obtenues par ces deux capteurs en fonction de la position  $a$  de la force.



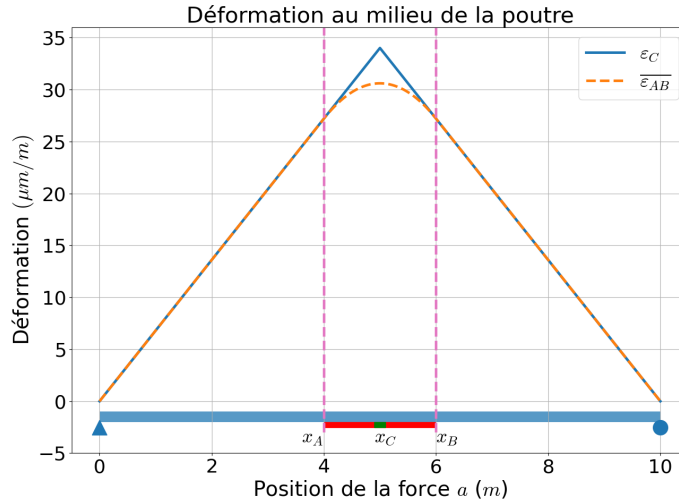


FIGURE 4.5 – Comparaison des déformations mesurées par une jauge de déformation et une corde optique.

La figure 4.5 représente les déformations statiques mesurées par la jauge de déformation (ligne bleue continue) et par la corde optique longue (ligne orange en pointillé) en fonction de la position de la force appliquée. Le schéma de la poutre se trouve en bas de la figure. La corde optique est représentée par le trait rouge, délimitée par les points  $x_A$  et  $x_B$  alors que la jauge de déformation est représentée par un petit rectangle vert. Nous observons qu'en dehors de la zone couverte par la corde optique (de  $a = x_A = 4\text{ m}$  à  $a = x_B = 6\text{ m}$ ), les signaux mesurés par les deux capteurs sont identiques. Quand la force passe au-dessus de la corde optique (zone délimitée par deux lignes verticales en rose), nous observons bien une différence entre la déformation mesurée par la jauge (ligne bleue) et celle mesurée par la corde optique (ligne orange).

Nous pouvons estimer cette différence. A partir de l'expression du moment de flexion (4.1), nous déduisons la déformation « ponctuelle » mesurée au point C :

$$\varepsilon_C(a, x_C) = \begin{cases} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C, & x_C \leq a \\ \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a, & x_C \geq a \end{cases} \quad (4.18)$$

Quand la force se trouve au-dessus de la corde optique, c.-à.-d.  $x_A \leq a \leq x_B$ , nous avons :

$$\Delta\varepsilon(a, x_C) = \varepsilon_C - \overline{\varepsilon_{AB}} = \begin{cases} \frac{z_0 P}{EI} \left[ \frac{(a-x_C)^2}{2l_g} + \frac{a-x_C}{2} + \frac{l_g}{8} \right], & x_C - l_g/2 \leq a \leq x_C \\ \frac{z_0 P}{EI} \left[ \frac{(a-x_C)^2}{2l_g} - \frac{a-x_C}{2} + \frac{l_g}{8} \right], & x_C \leq a \leq x_C + l_g/2 \end{cases} \quad (4.19)$$

Lorsque la force atteint le centre de la corde optique ( $a = x_C$ ), cette différence atteint sa valeur maximale  $\Delta\varepsilon_{max} = z_0 P l_g / (8EI)$ . Cette valeur ne dépend pas de la position de la corde optique. La différence maximale relative entre la déformation moyenne et la déformation au centre de la corde optique est :

$$\frac{\Delta\varepsilon_{max}}{\varepsilon_{C,max}} = \frac{l_g}{8 \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) x_C} \quad (4.20)$$

Cette différence est plus petite quand la corde optique est placée au milieu de la poutre, c.-à.-d. en  $x_C = L/2$ . Nous avons :  $\min(\Delta\varepsilon_{max}/\varepsilon_{C,max}) = l_g/(2L)$ . Dans le cas où la corde optique couvre totalement la poutre, le ratio  $\Delta\varepsilon_{max}/\varepsilon_{C,max}$  vaut 1/2. Autrement dit, la déformation moyenne mesurée par la corde optique est égale à la moitié de la déformation « maximale » mesurée par une jauge de déformation située au milieu de la corde optique. Ce résultat est conforme aux résultats publiés dans la littérature [69].

### 4.3.2 Poutre simple avec la présence de défaut

Dans cette section, nous présentons deux exemples d'une poutre comportant un défaut. Le premier exemple résout analytiquement le problème d'une poutre fissurée alors que l'exemple suivant concerne un modèle numérique d'une poutre en 3D. Dans un premier temps, le défaut est considéré comme une « vraie » fissure, qui est créé par la modification du maillage de la poutre initiale. Ensuite, le défaut est modélisé comme un tronçon de poutre avec une réduction de son module de Young.

#### Poutre simple fissurée

Nous utilisons la poutre présentée dans le cas d'une poutre saine, avec une fissure localisée au milieu de la poutre ( $x = L/2$ ). La profondeur de la fissure est égale à 50 % de la hauteur de la poutre (ratio  $a_1 = a/h = 0.5$ ).

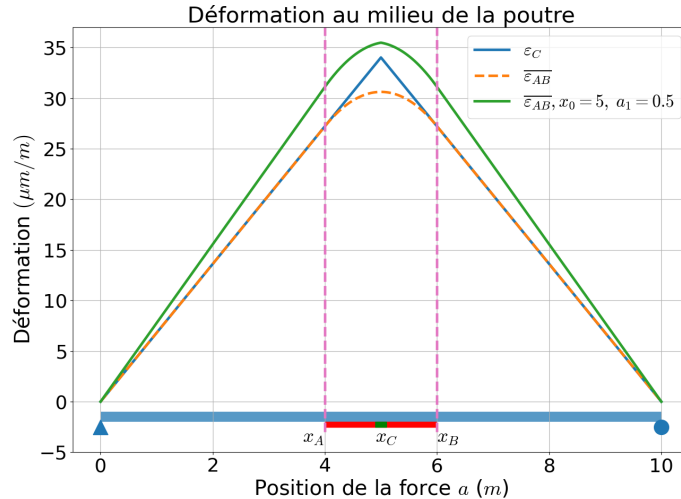


FIGURE 4.6 – Déformation moyenne mesurée des poutres saine (lignes bleue, orange) et fissurée (ligne verte).

La figure 4.6 est la reproduction de la figure 4.5, en y ajoutant la déformation moyenne pour le cas de la poutre fissurée. Les déformations moyennes sont mesurées à l'aide des cordes optiques de longueur 2 m placées au milieu des poutres. La ligne orange en pointillé représente la déformation moyenne de la poutre saine alors que la ligne verte représente celle de la poutre fissurée. Nous voyons bien la différence entre ces deux déformations. Lorsque la force se trouve au-dessus de la corde optique, l'écart entre les déformations de la poutre fissurée et de la poutre saine est d'environ 15 %. Dans cette figure, nous traçons également la déformation mesurée à l'aide d'une jauge de déformation (ligne bleue), située également

au milieu de la poutre saine. Dans le cas où la structure est non-endommagée (poutre saine), lorsque la force est située au milieu de la poutre, l'écart entre les mesures obtenues par la jauge de déformation et par la corde optique d'une poutre saine est maximale et est égale à 11 % de la valeur obtenue à l'aide de la jauge de déformation.

### Poutre simple endommagée : Calculs numériques

L'endommagement d'une poutre est souvent modélisé par une fissure. De plus, le défaut peut être également modélisé par une réduction du module de Young sur la partie endommagée de la poutre. Dans cette partie, à l'aide du logiciel de calculs aux éléments finis *code\_Aster*, nous créons un modèle de la même poutre simple, pour les états sain et endommagé. Une force ponctuelle d'intensité  $P = 10 \text{ kN}$  est appliquée au milieu de la poutre. Cette dernière est modélisée par des éléments massifs en 3D, dont les caractéristiques de la géométrie et du matériau sont présentées dans le tableau 4.1.

Paramètres	Notation	Unité	Valeur
Longueur	$L$	m	10
Hauteur	$h$	cm	60
Largeur	$b$	cm	35
Module de Young	$E$	GPa	25
Coefficient de Poisson	$\nu$	–	0.2
Masse volumique	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	2 500

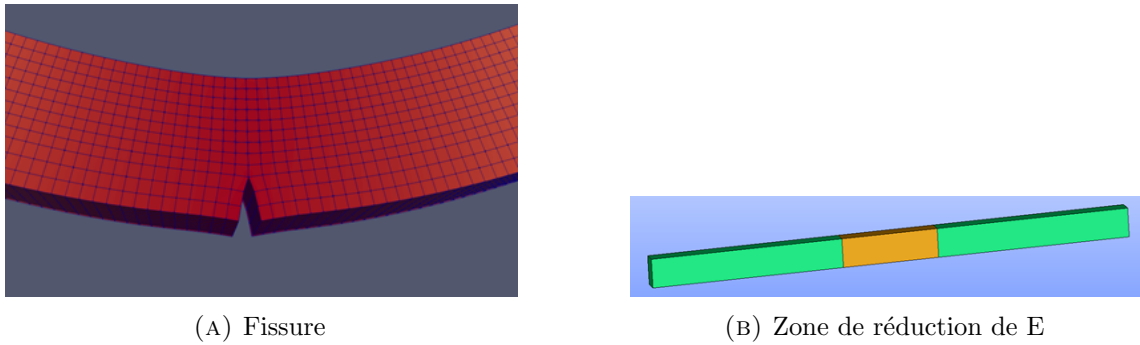
TABLEAU 4.1 – Caractéristiques détaillées de la poutre non-endommagée.

Pour la discrétisation de la poutre, nous comptons 200 éléments dans sa longueur, 8 éléments dans sa largeur et 12 éléments dans sa hauteur, soit une taille moyenne d'éléments de 5 cm. Le maillage de la poutre est constitué de 19 200 éléments 3D en hexaèdres à huit nœuds (linéaire) et de 23 517 nœuds au total. La force appliquée est répartie sur la largeur de la poutre en section d'application de la force (forces nodales).

En ce qui concerne le défaut de la poutre, nous considérons deux modélisations de l'endommagement, présentées dans le Chapitre 1 (Figure 4.7) :

- Cas 1 : le défaut est représenté par une fissure. Tandis que dans la modélisation des poutres droites avec les éléments unidirectionnels, la fissure est modélisée comme un ressort spirale, représenté par un élément discret ; dans cette modélisation en 3D, la fissure est géométriquement créée. Dans ce cas, le maillage contient une fissure de profondeur  $a = 0.25 h$ , située au milieu de la poutre (Figure 4.7a).
- Cas 2 : le défaut est modélisé comme une zone de réduction de module de Young. La zone endommagée est de longueur 2 m, située également au milieu de la poutre et le module de Young du matériau est supposé réduit de 20 % sur ce tronçon de poutre. La figure 4.7b représente cette modélisation, où les parties non-endommagées de la poutre sont en couleur verte alors que la partie endommagée est en orange.

Nous disposons une corde optique de longueur  $l_g = 2 \text{ m}$ , collée sur la face inférieure des poutres afin de mesurer la déformation moyenne sur sa longueur. Cette corde optique peut se déplacer le long de la poutre. Sa position est caractérisée par la coordonnée  $x_C$  de

FIGURE 4.7 – Modélisation de l'endommagement dans *code\_Aster*.

son centre. Avant de passer au cas de la structure endommagée, nous examinons dans un premier temps le modèle numérique de la poutre saine. La déformation en un point est obtenue par :

- Extrapolation aux nœuds des quantités aux points de Gauss (EPSI\_ELNO) [22], les calculs sont intégrés dans le fichier de commande du *code\_Aster* ;
- Calcul de la première dérivée des déplacements nodaux des nœuds situés sur une ligne de droite sur la face inférieure de la poutre, dans la direction longitudinale  $u'_x = \partial u_x / \partial x$ .

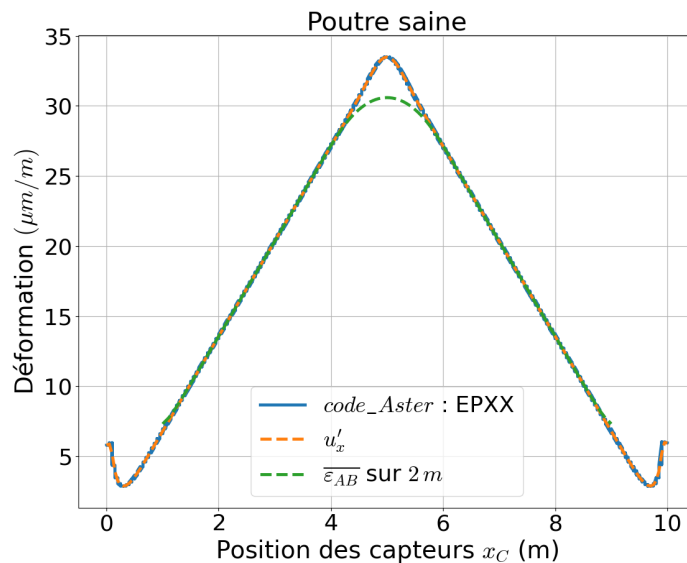


FIGURE 4.8 – Déformations le long de la poutre

La figure 4.8 représente différentes déformations obtenues le long de la poutre. La ligne bleue représente la déformation en direction X (longitudinale) calculée directement dans le *code\_Aster*. La ligne orange en pointillés représentant la déformation obtenue par la dérivée du déplacement longitudinal  $u_x$ . Nous observons que ces deux courbes sont confondues. Nous calculons alors la déformation moyenne à l'aide de l'équation (4.9) :  $\overline{\varepsilon_{AB}} = (u_x(B) - u_x(A)) / (x_B - x_A)$ , puis nous la projetons dans la même figure (courbe verte en pointillé). Nous observons des écarts entre les déformations moyennes et « ponctuelles » lorsque la force rentre dans la zone de couverture de la corde optique

( $4 \leq x_C \leq 6 \text{ m}$ ). Nous retrouvons alors des courbes de même allure que celles présentées dans la figure 4.5 (solutions analytiques).

La figure 4.9 présente les déformations moyennes mesurées à l'aide de ce capteur long, en fonction de la position de son centre  $x_C$  pour différentes modélisations de l'endommagement. Comme la corde optique peut aller d'une extrémité de la poutre à l'autre, l'abscisse est variable, de  $x_C = 1 \text{ m}$  à  $x_C = 9 \text{ m}$ . Les lignes de couleurs différentes représentent les différents scénarios d'endommagement. Tandis que la ligne bleue est obtenue pour une poutre saine, la ligne orange représente la déformation dans le cas d'une poutre fissurée. Enfin, la ligne verte désigne le deuxième cas d'endommagement, où le défaut est représenté par une zone de réduction du module de Young. En ce qui concerne le premier scénario d'endommagement (courbe orange), nous observons des « sauts » en  $x_C = 4 \text{ m}$  et en  $x_C = 6 \text{ m}$ . Ce sont les points pour lesquels une extrémité du capteur long est situé au milieu de la poutre au niveau de la fissure ( $x_C = 5 \text{ m}$ ). D'autre part, les déformations mesurées quand la poutre présente une zone endommagée restent continues (courbe verte). En  $x_C = 5 \text{ m}$ , l'écart entre les courbes obtenues pour les deux cas d'endommagement et le cas d'une poutre saine est d'environ 25 %.

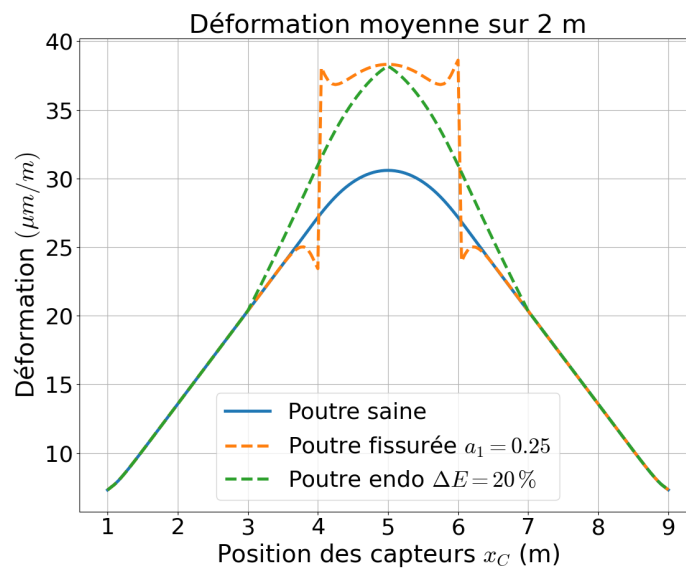


FIGURE 4.9 – Déformations moyennes le long de la poutre pour différents scénarios d'endommagements

### Poutre simple soumise à une force mobile

Jusqu'à présent, les calculs analytiques ont été validés pour le cas quasi-statique. La force est supposée se déplacer sur la poutre très lentement pour que les effets dynamiques puissent être négligeables. Considérons maintenant une poutre simple soumise à une force mobile comme montré sur la Figure 4.10. La poutre est de longueur  $L = 15 \text{ m}$ , de section rectangulaire  $b \times h = 35 \times 65 \text{ cm}$ . Le matériau constitutif de la poutre est du béton ( $E = 35 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ ). La poutre est soumise à une force mobile  $P = 1 \text{ kN}$  avec une vitesse constante  $v = 20 \text{ m/s}$ , représentant 13.6 % de la première vitesse critique de la structure. La poutre peut comporter une zone endommagée (trait orange, caractérisé par

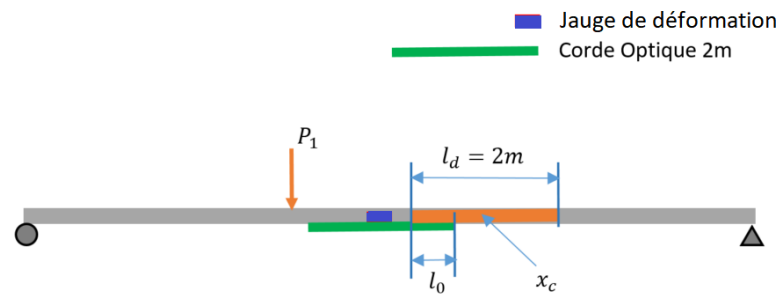


FIGURE 4.10 – Poutre endommagée avec la disposition des capteurs

la longueur  $l_d$  et la position du centre de la zone endommagée  $x_C$ ). Une corde optique de longueur 2m (trait vert) est collée au milieu de la poutre, sur sa face inférieure. Une jauge de déformation est également placée au milieu de la poutre afin de relever la déformation à ce point (le rectangle bleu qui se trouve au milieu de la poutre).

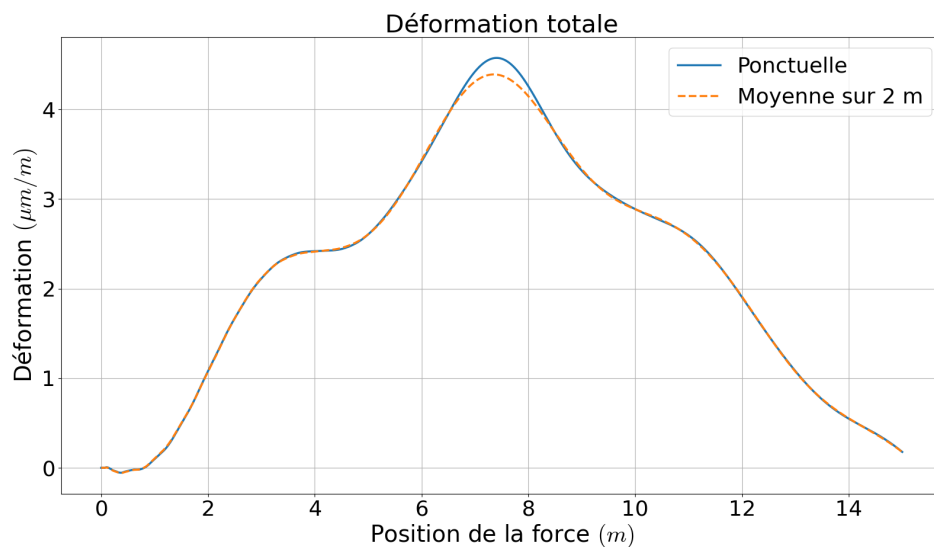


FIGURE 4.11 – Poutre simple non-endommagée : Déformation moyenne et « ponctuelle » à mi-travée.

Dans un premier temps, la poutre est supposée être non endommagée. La figure 4.11 représente la déformation moyenne mesurée par la corde optique (courbe orange) et la réponse mesurée par la jauge de déformation (courbe bleue). Les deux courbes sont en bon d'accord, sauf dans l'intervalle  $6.5 m \leq x \leq 8.5 m$ , qui correspond à la zone couverte par la corde optique. Cet exemple confirme encore le résultat dans le cas de calculs quasi-statiques : La mesure de déformation à l'aide d'un capteur long et d'une jauge électrique ne diffère que si la force est appliquée au-dessus du capteur de déformation long (la corde optique dans ce cas).

L'endommagement est ensuite modélisé en mettant une zone avec réduction du module de Young. Ici, nous prenons la longueur de la zone endommagée égale à  $2 m$  et une réduction

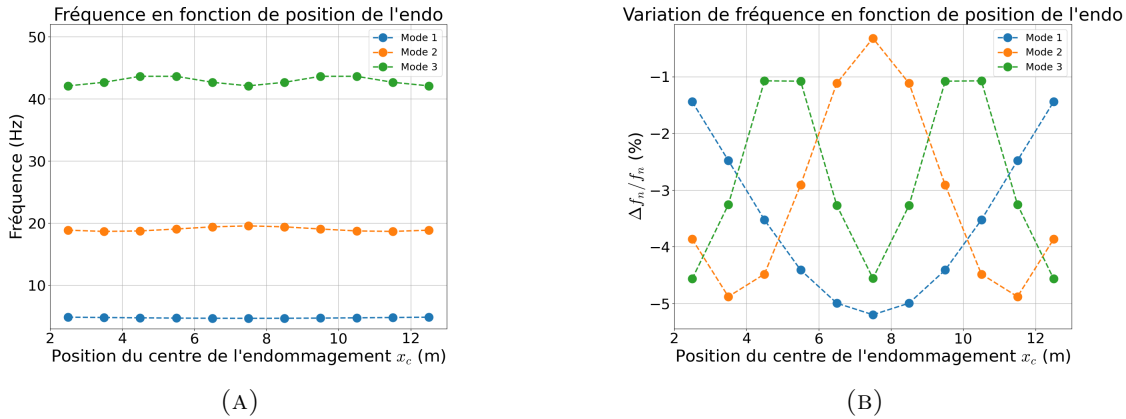


FIGURE 4.12 – a) Trois premières fréquences naturelles de la poutre en fonction de la localisation de l'endommagement et b) Leurs variations (%) par rapport aux valeurs de référence (poutre saine).

$\Delta E = 30\%$ . Sa position  $x_C$  varie de  $2.5\text{ m}$  à  $12.5\text{ m}$ . Les trois fréquences naturelles de la poutre sont calculées en fonction de la localisation de l'endommagement (Figure 4.12). La figure 4.12a présente les valeurs des fréquences naturelles alors que leurs variations par rapport aux valeurs de références (c.-à.-d. d'une poutre saine) sont présentées dans la figure 4.12b (exprimées en pourcentage). Nous constatons que les variations de fréquences naturelles atteignent une valeur (absolue) maximale lorsque la zone endommagée se trouve au niveau du ventre du mode correspondant. Cependant, cette variation est relativement petite. Sa valeur maximale est de l'ordre de 5 % pour le premier mode.

## 4.4 Application : le cas d'un pont

### 4.4.1 Cas d'étude réel : Test sur le pont Moneder Gulley

Un test a déjà été réalisé sur un pont ferroviaire qui est actuellement en service [39]. Cet ouvrage se trouve sur la ligne Benidorm–Dénia en Espagne. La structure possède une seule travée et une portée de  $22\text{ m}$  entre deux supports en néoprène. Ces derniers ne bloquent pas la rotation à l'extrémité et le pont peut être considéré comme une structure isostatique (poutre simple). Le tablier du pont a une largeur de  $5\text{ m}$  et est posé sur quatre poutres en béton précontraint préfabriquées, de section double T (Figure 4.13a). Le jour du test les auteurs ont placé deux capteurs de déformation au milieu du pont : une jauge de déformation pour mesurer la déformation en un point et une fibre optique de longueur  $1\text{ m}$  pour mesurer la déformation moyenne sur sa longueur. Les deux capteurs sont collés sur la face inférieure d'une poutre centrale (Figure 4.13b).

Le chargement du pont a été réalisé en faisant passer un train court comprenant deux voitures. Le train d'un poids total de  $558.4\text{ kN}$ , reposait sur quatre bogies. La longueur totale du train était  $34.79\text{ m}$ . Dans le test dynamique, le train avait une vitesse de  $50\text{ km/h}$ . La fréquence d'échantillonnage des capteurs était de  $100\text{ Hz}$ .

La figure 4.14 montre les résultats du test. La ligne bleue présente les déformations mesurées par la jauge de déformation alors que la ligne rouge présente celles obtenues par la fibre optique. Les deux lignes sont en bon accord. Nous observons un petit écart entre la



FIGURE 4.13 – Cordes optiques fixées sur le pont Moneder Gulley. *Source [39]*

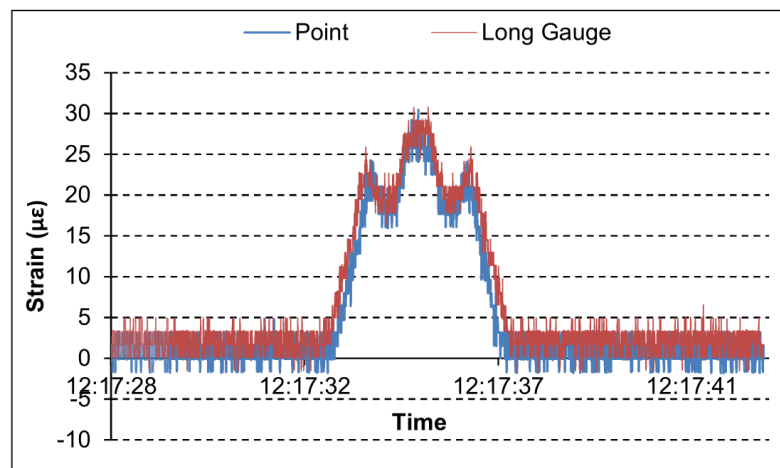


FIGURE 4.14 – Déformations mesurées par une jauge de déformation et une fibre optique longue suite au passage d'un train. *Source [39]*

ligne rouge et la ligne bleue, qui pourrait provenir de la calibration des signaux. D'après les auteurs, l'écart maximal entre les deux types de mesure était inférieur à 4.6 %.

#### 4.4.2 Application : Pont à quatre travées

Dans cette section, nous présentons l'influence de l'endommagement sur la réponse finale du pont à quatre travées présenté dans le Chapitre 3. Il s'agit d'un pont à poutres sous chaussée, qui est constitué de quatre travées et a une longueur totale de 46 m. Les deux travées centrales sont les plus longues, avec une longueur de 14.6 m chacune alors que les deux travées courtes se trouvent à l'extérieur, dont la longueur vaut seulement 8.4 m. Dans chaque travée, il y a dix poutres en béton précontraint qui supportent le tablier du pont, de même longueur que la travée qu'ils supportent. La figure 4.15 présente le profil longitudinal d'une portion de poutre.

#### Influence de l'endommagement sur la fréquence de vibration libre

Dans un premier temps, nous présentons une approche rapide qui permet d'examiner l'influence de l'endommagement sur la structure et qui consiste à construire un modèle unidimensionnel équivalent. Nous considérons une portion de poutre de section en « T » (Figure 4.15b), qui est constituée de la poutre sous chaussée et d'une partie du tablier (rectangle



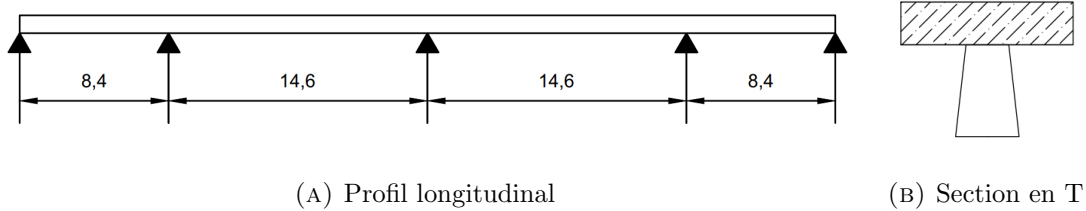


FIGURE 4.15 – Modélisation d'une portion de poutre.

hachuré). Ces deux composantes sont supposées avoir le même module d'élasticité. L'endommagement est modélisé comme une fissure de profondeur  $a$  et de localisation variable le long de la poutre. Les fréquences propres de la structure sont obtenues analytiquement à l'aide de la méthode des « matrices de transfert » présentée dans le Chapitre 2. La figure 4.16a représente la variation des fréquences fondamentales de la structure endommagée en fonction de la profondeur relative  $a_1 = a/h$  (où  $h$  est la hauteur de la poutre) et de la position de la section fissurée. Nous observons que cette variation atteint sa valeur (absolue) maximale locale lorsque la fissure se présente à proximité des ventres de la première déformée modale. Les valeurs algébriques négatives de cette variation indiquent une diminution de la fréquence fondamentale due à la présence de la fissure, ce qui diminue la rigidité en flexion de la structure. Afin de mieux présenter les résultats, nous traçons cette variation en fonction de la position de la fissure, à différents niveaux d'endommagement (représenté par la profondeur relative  $a_1$ .) Nous observons un écart maximal en fréquence fondamentale de l'ordre de 3.7%. Dans cet exemple, nous ne considérons qu'une portion de poutre. En réalité, le pont est constitué de dix portions de poutre, côte à côte. Si une poutre sous chaussée est légèrement endommagée, il est difficile de le mettre en évidence avec un critère qui est basé sur les fréquences naturelles.

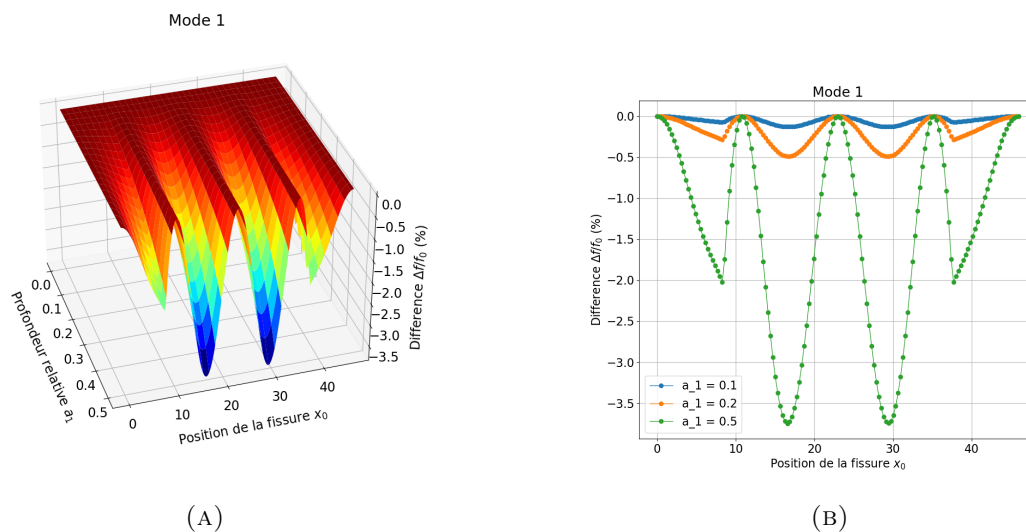


FIGURE 4.16 – Variation de fréquence naturelle du premier mode en fonction de la position et du niveau de l'endommagement

### Influence de l'endommagement sur la réponse en déformation

Nous considérons maintenant le modèle numérique complet du pont à 4 travées présenté dans le Chapitre 3. Le maillage est constitué des deux grandes parties : le hourdis est modélisé par des éléments 2D, de type coque (DKT) alors que les poutres sous chaussée sont représentées par les éléments de poutre droite Euler-Bernoulli (POU\_D\_E) dont chaque nœud possède six degrés de liberté (3 pour la translation DX, DY, DZ et 3 pour la rotation DRX, DRY, DRZ). Seulement les réponses des poutres sous chaussée sont souhaitées.

La structure est soumise au passage d'un poids-lourd de poids total 19 T : Il s'agit d'un véhicule à 2 essieux, espacés de 4 m. Les chargements appliqués par les essieux en avant et en arrière sont respectivement égaux à  $P_1 = 6.21 T$  et  $P_2 = 12.70 T$ . Dans le sens transversal, la distance entre deux roues sur un même essieu est  $b = 2 m$ . Le chargement mobile est modélisé par 4 forces ponctuelles, appliquées aux nœuds qui correspondent aux points de contact. La distance entre la médiane de la chaussée et les roues intérieures est  $e = 0.54 m$ . Le véhicule traverse le pont à une vitesse constante  $v = 50 km/h$ .

Dans cette modélisation numérique, la fissure est créée par la mise en place d'un élément discret de taille très petite. Les raideurs en translation sont supposées être très grandes ( $k_x, k_y, k_z \rightarrow \infty$ ) alors que la valeur des raideurs en rotations est obtenue à partir de la profondeur relative  $a_1 = a/h$  de la fissure :  $k_\theta = EI/K(a_1)$ , où  $EI$  est la rigidité en flexion de la poutre et la valeur de  $K(a_1) = K(a/h)$  est obtenue à partir des expressions (1.34), (1.35).

En ce qui concerne les dispositifs de mesure, nous supposons que des cordes optiques de longueur  $2 m$  sont collées sur la face inférieure des poutres sous chaussée, au milieu de la deuxième travée (la travée T2). La déformation moyenne entre deux extrémités  $A$  et  $B$  d'une corde optique est calculée par :

$$\overline{\varepsilon}_{AB} = z_0 \times \frac{\theta_B - \theta_A}{l_{AB}} \quad (4.21)$$

où  $\theta_A, \theta_B$  sont respectivement les rotations (DRY) aux points  $A, B$ ;  $l_{AB} = x_B - x_A$  est la longueur de la corde optique et  $z_0$  est la distance entre la position du capteur et l'axe neutre de la poutre considérée. Dans cet exemple, afin de faciliter les calculs, nous prenons  $z_0$  égale à l'unité.

Nous supposons qu'une fissure de profondeur  $a = 0.5h$  se trouve dans la poutre 3 et au milieu de la travée T2. La figure 4.17 représente les déformations moyennes des poutres sous cette travée au cas où aucune poutre n'est endommagée (structure saine) et au cas où seulement la poutre 3 est endommagée. Nous observons que la déformation de la poutre numéro 3 augmente alors que les déformations des autres poutres restent quasiment inchangées lorsque nous comparons les courbes 4.17a et 4.17b qui sont respectivement obtenues sans et avec endommagement. Nous pouvons tracer les courbes des déformations maximales de chaque poutre et les projeter dans le sens transversal, avec différents cas de poutres endommagées (Figure 4.18). Nous constatons que seule la poutre endommagée a une réponse en déformation influencée par l'endommagement.

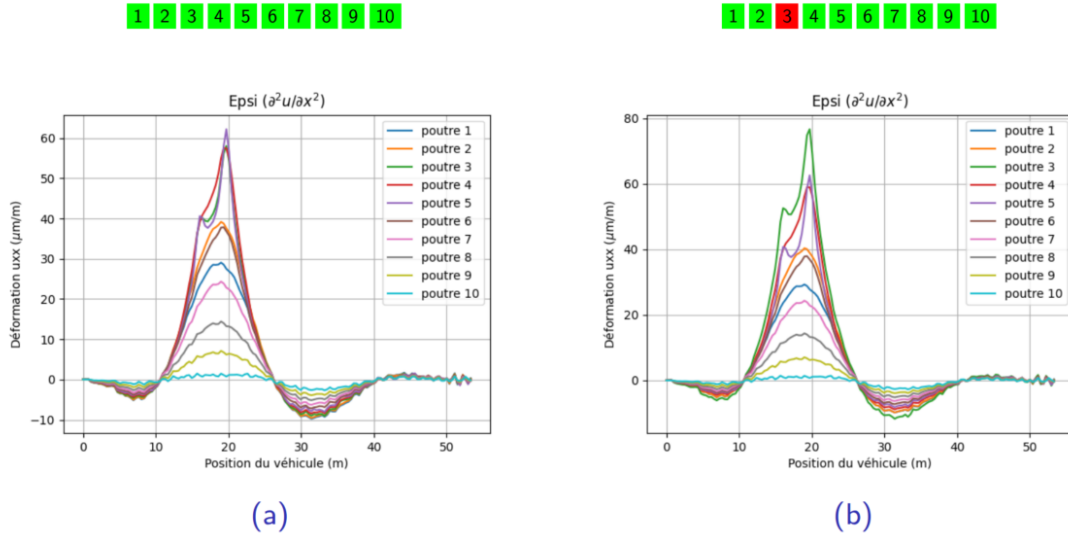


FIGURE 4.17 – Déformations des poutres au milieu de la travée T2 du pont à quatre travées : Structure saine (à gauche) et structure avec poutre numéro 3 endommagée (à droite).

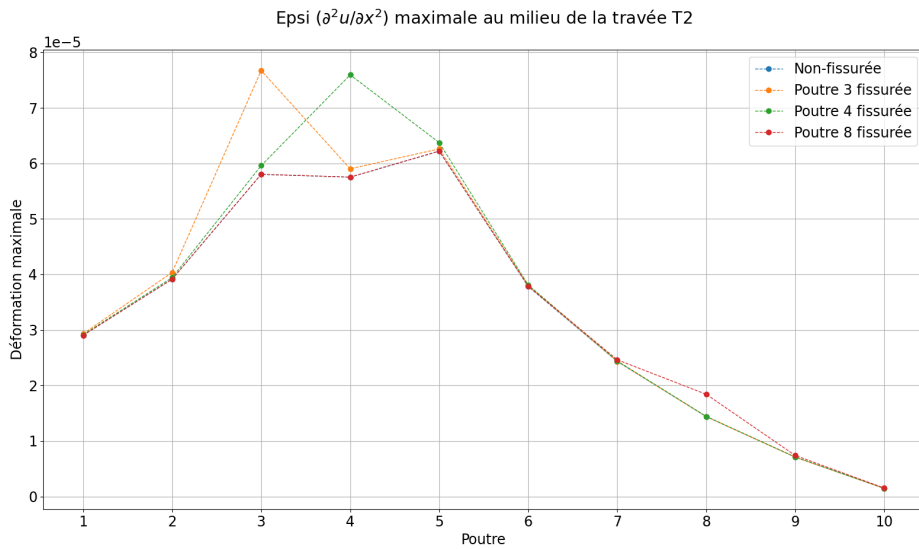


FIGURE 4.18 – Déformations maximales des poutres en milieu de la travée T2 du pont à quatre travées suivant différents scénarios d'endommagement.

## 4.5 Conclusion

Dans cette section, nous avons traité le sujet de la réponse en déformation donnée par les capteurs long et court et l'influence de l'endommagement sur les réponses de fréquences et de déformations.

Les capteurs longs de type fibre / corde optique sont maintenant largement utilisés dans le génie civil, notamment sur les applications de surveillance en continu grâce à leur durabilité, stabilité au changement environnemental (température, humidité, etc.). De plus, la zone couverte étant importante cela accroît la possibilité de détecter un endommagement s'il existe. Cependant en termes de réponses nous constatons qu'il n'existe quasiment pas de différence entre les déformations mesurées par ces types de capteurs et les jauges de déformation électriques, sauf lorsque la force passe au-dessus de la corde optique.



Deuxième partie

Problème inverse



## Chapitre 5

# Propositions de critères de détection de l'endommagement à partir des réponses globales

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>100</b>
<b>5.2</b>	<b>Détection par distribution longitudinale des déformations</b>	<b>100</b>
5.2.1	Distribution longitudinale de l'aire de l'histoire des déformations	100
5.2.2	Proposition de critères	103
5.2.3	Applications numériques : calculs avec <i>code_Aster</i>	104
<b>5.3</b>	<b>Critères à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération</b>	<b>107</b>
5.3.1	Décomposition de la solution générale : composantes particulière et homogène	109
5.3.2	Décomposition de la solution générale : composantes quasi-statique et dynamique	115
5.3.3	Critère de détection de l'endommagement	117
<b>5.4</b>	<b>Applications numériques et discussions</b>	<b>121</b>
5.4.1	Poutres saines : Validation	121
5.4.2	Poutre endommagée : Études paramétriques	124
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>

---



## 5.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté la solution du problème direct. Etant donné les propriétés de la structures (géométrie, matériaux, endommagement) et la configuration du chargement mobile (nombre d'essieux, charge par essieu, distance entre deux essieux consécutifs, vitesse, etc.), nous cherchons les réponses de la structure aux points donnés. Les solutions sont tout d'abord présentées à l'aide d'expressions analytiques explicites et ensuite, le problème a été résolu numériquement pour le cas d'un pont à quatre travées.

Dans ce chapitre et celui va suivre, nous considérons le problème inverse. A partir des réponses données, nous essayons d'identifier si un endommagement se présente dans la structure, puis de le localiser. Dans ce chapitre, nous proposons deux méthodes d'identification de l'endommagement à partir des histoires des réponses en déformation et en accélération. Une méthode est basée sur la distribution longitudinale des déformations alors que l'autre est basée sur la corrélation entre l'accélération et la déformation dynamique. Des études paramétriques seront menées pour chaque méthode proposée afin de voir la sensibilité des critères proposés en fonction des caractéristiques de l'endommagement (niveau, localisation, etc.).

## 5.2 Détection par distribution longitudinale des déformations

La mesure de déformations distribuées le long d'un pont pourrait donner des informations intéressantes. Dans cette optique nous pouvons mentionner des travaux expérimentaux en cours qui utilisent les fibres optiques pour mesurer les déformations d'un tablier de pont. Par exemple, le pont KW-51 en Belgique est instrumenté par quatre fibres optiques couvrant toute la longueur du tablier pour une surveillance en continu depuis février 2019 [7]. Chaque fibre optique contient 20 capteurs de déformation FBG. C'est un pont ferroviaire de type pont en arc avec une portée de 117 m. En Angleterre, le pont ferroviaire Underbridge 11 à Staffordshire est aussi instrumenté par des fibres optiques FBG (Fibre Bragg Gratings) et BOTDR (Brillouin Optical Time Domain Reflectometry) pour mesurer les déformations distribuées sur toute sa longueur [93]. Nous trouvons dans la littérature plusieurs recherches qui portent sur la distribution longitudinale des déformations. Wu *et al.* utilisent la distribution de la valeur maximale de chaque courbe de déformation mesurée quand un véhicule traverse le pont comme critère de détection de l'endommagement [90]. Pourtant, le critère est sensible aux bruits de mesure. Hong *et al.* reportent le problème sur la distribution de l'aire de ces courbes [44]. Cette méthode semble plus « tolérante » aux bruits. Par une autre approche, Chen *et al.* utilisent la dérivée deuxième des lignes d'influence et font une étude comparative des méthodes mentionnées [19]. Dans cette partie, nous proposons un critère de détection de l'endommagement basé sur la distribution longitudinale de l'aire de l'histoire de déformation le long d'une poutre.

### 5.2.1 Distribution longitudinale de l'aire de l'histoire des déformations

Considérons la poutre simple présentée dans le Chapitre 4 (Section 4.2.1) comme montrée dans la Figure 5.1. La poutre est soumise à une force ponctuelle  $P$  ( $P > 0$ ). Une corde optique longue est collée sur la face latérale de la poutre (trait rouge), dont  $x_A$ ,  $x_B$  sont les coordonnées des deux extrémités,  $x_C = (x_A + x_B)/2$  étant la position du centre de la corde optique.

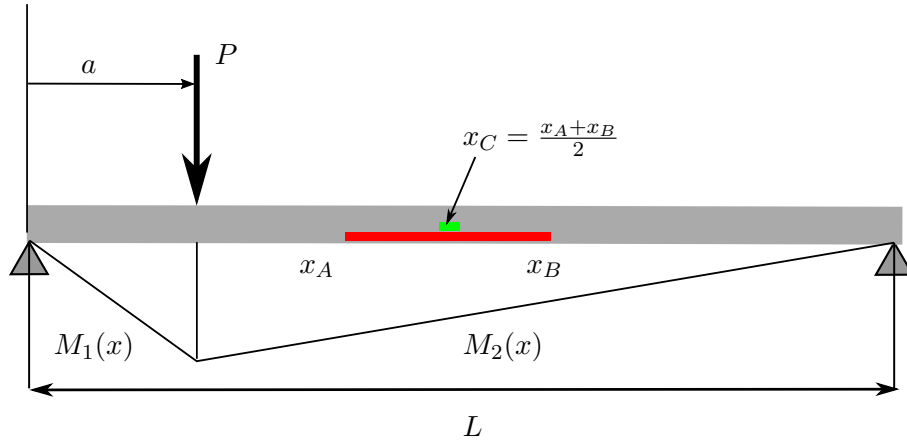


FIGURE 5.1 – Moment de flexion d'une poutre simple

Rappelons l'expression de la déformation moyenne sur le segment  $AB$  en fonction de la position de la force  $a$  et du centre de la corde optique  $x_C$  (Equation 4.4) :

$$\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C) = \begin{cases} \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a, & a \leq x_A \leq x_B \\ \frac{z_0 P}{EI} \left[ a \left(\frac{1}{2} - \frac{x_C}{L}\right) - \frac{1}{2l_g} (a - x_C)^2 + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right], & x_A \leq a \leq x_B \\ \frac{z_0 P}{EI} \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C, & x_A \leq x_B \leq a \end{cases} \quad (5.1)$$

dans laquelle  $EI$  est la rigidité en flexion de la poutre,  $z_0$  est la distance entre la corde optique et l'axe neutre de la poutre ( $z_0 > 0$  si la corde optique se trouve au-dessous de l'axe neutre) et  $l_g = x_B - x_A$  la longueur de la corde optique.

Maintenant, nous supposons que  $P = 1 N$ . En fixant la position de la corde optique  $x_C$ ,  $\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C)$  est la ligne d'influence de la déformation moyenne sur sa longueur. Calculons l'aire sous la courbe  $\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C)$  qui représente l'histoire de la réponse en déformation moyenne. Nous prenons l'intégrale du signal pour tout le domaine  $\mathcal{L} = [0, L]$  :

$$A(x_C) = \int_{\mathcal{L}} \overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C) da \quad (5.2)$$

Reportons l'expression de  $\overline{\varepsilon}_{AB}(a, x_C)$  de l'équation 5.1 dans l'équation 5.2, en mettant  $P = 1$ , nous avons :

$$A(x_C) = \frac{z_0}{EI} \left[ \int_0^{x_A} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a da + \int_{x_A}^{x_B} \left( a \left(\frac{1}{2} - \frac{x_C}{L}\right) - \frac{1}{2l_g} (a - x_C)^2 + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right) da + \int_{x_B}^L \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C da \right] \quad (5.3)$$

Considérons les intégrales :

$$\mathcal{I}_1(x_C) = \int_0^{x_A} \left(1 - \frac{x_C}{L}\right) a da + \int_{x_B}^L \left(1 - \frac{a}{L}\right) x_C da \quad (5.4)$$

et,

$$\mathcal{I}_2(x_C) = \int_{x_A}^{x_B} \left( a \left( \frac{1}{2} - \frac{x_C}{L} \right) - \frac{1}{2l_g} (a - x_C)^2 + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right) da \quad (5.5)$$

Notons que  $(x_A, x_B)$  et  $(x_C, l_g)$  sont deux bases indépendantes qui désignent la position et la longueur de la corde optique.

$$\begin{cases} x_A = x_C - l_g/2 \\ x_B = x_C + l_g/2 \end{cases} \quad (5.6)$$

Nous calculons les intégrales  $\mathcal{I}_1, \mathcal{I}_2$  en fonction de  $x_C$  et  $l_g$  :

$$\mathcal{I}_1(x_C) = \left( -\frac{1}{2} + \frac{l_g}{L} \right) x_C^2 + \left( -l_g + \frac{L}{2} \right) x_C + \frac{l_g^2}{8} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{I}_2(x_C) = -\frac{l_g}{L} x_C^2 + l_g x_C - \frac{l_g^2}{8} - \frac{l_g^2}{24} \quad (5.8)$$

Au final, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x_C) &= \frac{z_0}{EI} (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2) \\ &= \frac{z_0}{EI} \left( -\frac{1}{2} x_C^2 + \frac{L}{2} x_C - \frac{l_g^2}{24} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

L'intégrale  $\mathcal{A}(x_C)$  est une fonction quadratique de la position  $x_C$  du centre de la corde optique. Cette fonction parabolique atteint sa valeur maximale lorsque  $x_C = L/2$ . Pour le cas d'un véhicule à  $M$  essieux de poids respectifs  $P_1, P_2, \dots, P_M$ . L'aire totale sous la courbe de déformation est égale à :

$$\begin{aligned} A_{tot}(x_C) &= P_1 \mathcal{A}(x_C) + P_2 \mathcal{A}(x_C) + \dots + P_M \mathcal{A}(x_C) \\ &= (P_1 + P_2 + \dots + P_M) \mathcal{A}(x_C) \\ &= P_{tot} \mathcal{A}(x_C) \end{aligned} \quad (5.10)$$

où  $P_{tot}$  est le poids total du véhicule.

L'aire sous la courbe de déformation lors du passage d'un véhicule est le produit du poids total du véhicule par l'aire de la ligne d'influence  $\mathcal{A}(x_C)$ . De ce fait, l'aire totale de l'histoire de déformation est également un polynôme d'ordre 2 de la position du capteur  $x_C$ . Lorsque la vitesse du véhicule est suffisamment petite par rapport à la première vitesse critique de la structure ( $\gamma_1 = v/v_{c1} \leq 10\%$ ), l'aire de l'histoire de la déformation dynamique est négligeable. Une démonstration détaillée se trouve dans l'Annexe C.

Nous avons démontré que l'aire sous la courbe de déformation moyenne lors du passage d'un véhicule est une fonction quadratique de la position de la corde optique. En appliquant une chaîne de capteurs sous la poutre, les aires de toutes les courbes de déformation mesurée par chaque capteur doivent être contenues dans une parabole.

Lorsqu'une fissure se trouve dans la zone couverte par la corde optique, nous avons la relation suivante entre la déformation moyenne de la poutre fissurée et la poutre non-fissurée (Equation (4.17)) :

$$\bar{\varepsilon}_{fiss}(a, x_C) = \bar{\varepsilon}_{nonfiss} + \frac{z_0 K}{l_g EI} M_f(x_0) \quad (5.11)$$

Par conséquent, l'aire sous la courbe de déformation mesurée par cette corde optique est modifiée par rapport à celle obtenue pour une poutre saine. La distribution de l'ensemble des points n'est plus parabolique. A partir de cette caractéristique, nous pouvons alors proposer un critère de détection de l'endommagement.

Nous constatons d'autre part qu'à partir de l'expression de la déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}_{AB}(a, x_C)$  (Equation 5.1), cette déformation est aussi une fonction quadratique de sa position  $a$  lorsque la force se trouve dans la zone couverte par la corde optique. Cette fonction atteint sa valeur maximale lorsque :

$$a = x_C - x_C \frac{l_g}{L} + \frac{l_g}{2} \quad (5.12)$$

La valeur maximale de la déformation moyenne est :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{AB\max}(x_C) &= \frac{z_0 P}{EI} \left[ \frac{l_g}{2} \left( \frac{x_C}{l_g} - \frac{x_C}{L} + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{x_C^2}{2l_g} + \frac{x_C}{2} - \frac{l_g}{8} \right] \\ &= \frac{z_0 P}{EI} \left( 1 - \frac{l_g}{2L} \right) \left( -\frac{1}{L} x_C^2 + x_C \right) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Comme pour l'aire sous l'histoire des déformations, la valeur maximale de déformation moyenne  $\bar{\varepsilon}_{AB}$  est aussi une fonction quadratique de la position  $x_C$  du capteur. Cette parabole atteint également sa valeur maximale quand  $x_C = L/2$ . Pour une chaîne de capteurs placés sous la poutre, ces maximums forment une « ligne d'enveloppe » parabolique. Cette caractéristique est utilisée par Wu *et al.* [90] pour l'identification de l'endommagement. Cependant, quand la vitesse du véhicule est suffisamment importante pour que la participation de la composante dynamique à la réponse totale ne soit plus négligeable, la distribution des maximums des déformations n'est plus parabolique. Des applications numériques et discussions seront présentées dans les sections qui suivent.

### 5.2.2 Proposition de critères

Nous avons vu que la distribution de l'aire sous les courbes de déformations mesurées le long d'une poutre a une forme parabolique. Notons  $f$  la parabole formée par l'ensemble de ces points. Nous avons :

$$f(x_C) = \left( \sum_{i=1}^M P_i \right) \mathcal{A}(x_C) \quad (5.14)$$

D'autre part, nous cherchons ensuite à interpoler  $f$  par une autre parabole, dite  $\tilde{f}$ , qui est une fonction polynôme de degré 2 :

$$\tilde{f} = \tilde{a}x^2 + \tilde{b}x + \tilde{c} \quad (5.15)$$

où  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{c}$  sont des constantes réelles à déterminer.

Une fois les coefficients de la fonction  $\tilde{f}$  trouvés, nous définissons un premier critère, dit critère global, qui est la différence relative entre la parabole interpolée et les points mesurés :

$$EG = 100 \times \frac{\|\tilde{f} - f_0\|_2}{\|f_0\|_2} \quad (5.16)$$

avec  $\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2}$  la norme euclidienne du vecteur  $\mathbf{x}$ .

Si la poutre est saine, la valeur  $EG$  est pratiquement nulle. Si une partie de la poutre est endommagée, la valeur de  $EG$  augmente. Pour interpoler une parabole, il faut au moins 4 points de mesure. Une séquence de 5 cordes optiques est suffisante pour la détection de l'endommagement et sa localisation.

Pour localiser l'endommagement nous proposons aussi un autre critère, dit critère local,  $EL$ . Nous calculons le critère local  $EL_i$  pour chaque point considéré de la même façon que pour calculer le critère global  $EG$ , mais avec l'exclusion du point considéré :

$$EL_i = EG^i = 100 \times \frac{\|\tilde{f}^i - f_0^i\|_2}{\|f_0^i\|_2} \quad (5.17)$$

avec :  $f_0^i = f_0 \setminus \{\varepsilon_i\}$  avec  $f_0$  un ensemble complet des déformations :  $f_0 = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N\}$ .

Si la corde optique considérée couvre la zone endommagée, la parabole interpolée qui passe par les autres zones non-endommagées donne une valeur de  $EL_i$  très proche de zéro, alors que les autres valeurs du critère local  $EL_i$  correspondant aux zones non-endommagées sont plus grandes. En conséquence, nous pouvons localiser la zone endommagée à l'aide de ce critère local  $EL_i$ .

### 5.2.3 Applications numériques : calculs avec *code\_Aster*

#### Poutre simple : Vérification et démonstration

Commençons par un exemple introductif : Nous considérons une poutre simple de longueur  $L = 10\text{ m}$ , de section carrée ( $b = h = 10\text{ cm}$ ) soumise à un système de deux forces  $P_1$  et  $P_2$  qui se déplacent sur la poutre avec une vitesse constante  $v = 5\text{ m/s}$  (Figure 5.2). Le matériau constitutif de la poutre est l'acier ( $E = 210\text{ GPa}$ ,  $\nu = 0.3$ ). Le taux d'amortissement est  $\zeta = 2\%$ . Les deux forces,  $P_1 = 1\text{ kN}$  et  $P_2 = 2\text{ kN}$  sont espacées d'une distance  $d = 3\text{ m}$ . Les réponses de la poutre mesurées par la chaîne de cordes optiques sont calculées à l'aide du logiciel de calculs aux éléments finis *code\_Aster*. La poutre est modélisée par des éléments 1D. Le maillage contient 200 éléments de type poutre Euler-Bernoulli (POU\_D\_E).

La figure 5.3a représente les résultats calculés pour chaque corde optique. Remarquons que la vitesse de déplacement des forces est  $5\text{ m/s}$ , soit  $11\%$  de la première vitesse critique  $v_{c1} = (\pi/L)\sqrt{EI/\rho A}$ . Nous voyons bien les effets dynamiques. Si nous prenons seulement la valeur maximale des lignes d'influence, la distribution de ces valeurs extrêmes n'est pas parabolique. La figure 5.3b représente la distribution de l'aire des lignes d'influence présentées sur la figure 5.3a. Chaque point correspond à l'aire de la courbe associée. La distribution de ces points est parabolique. Nous essayons d'interpoler les points par une

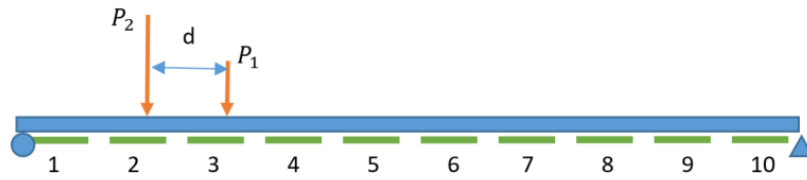


FIGURE 5.2 – Poutre simple instrumentée par une séquence de cordes optiques

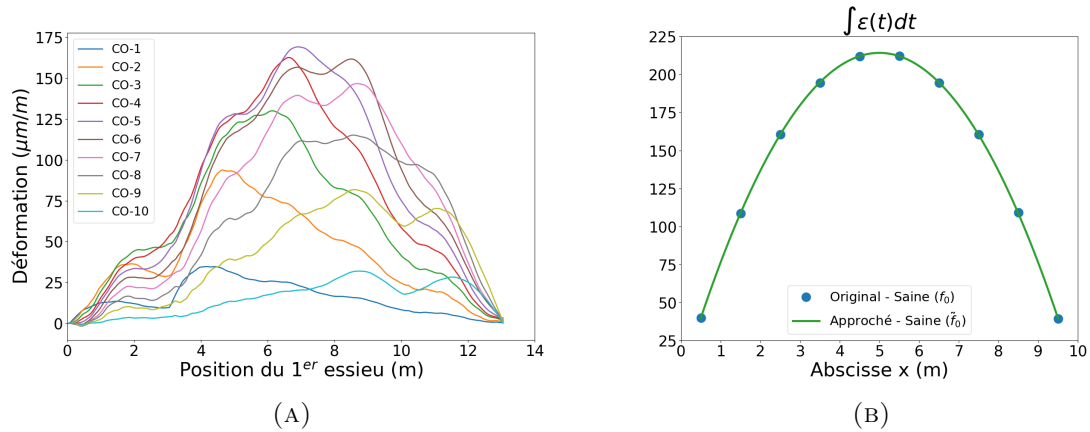


FIGURE 5.3 – Poutre saine :a) Histoire des réponses et b) Distribution de l'aire des courbes de déformation.

parabole (ligne verte).

Considérons maintenant une zone endommagée de longueur  $l_{endo} = 2\text{ m}$ , située au-dessus des cordes optiques numéros 3 et 4, comme montré sur la Figure 5.4. L'endommagement est modélisé par une réduction du module de Young sur le segment de poutre concerné. Cette réduction est égale à 10 % de la valeur du module de Young de la poutre saine.

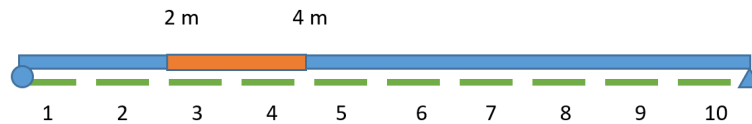


FIGURE 5.4 – Poutre endommagée instrumentée par une séquence de cordes optiques

Nous traçons les courbes de réponse en déformation moyenne pour les 10 capteurs (Figure 5.5a) et l'aire sous ces courbes en fonction de la position de chaque corde optique (Figure 5.5b). Nous observons sur les figures 5.3a et 5.5a que les histoires de la déformation moyenne obtenues par les cas sain et endommagé sont sensiblement identiques. Cependant, les deux points correspondant à la partie endommagée de la poutre (points en rouge, représentant la mesure des cordes optiques 3 et 4) sont décalés de la parabole originale (courbe verte). Nous interpolons ensemble les 10 points obtenus à l'aide d'une autre parabole, représentée par la courbe orange. L'écart de la parabole orange à l'ensemble des points (Figure 5.5b, la valeur calculée du critère global  $EG$  est égale à 4.4 %) est alors supérieur à l'écart de la courbe interpolée sur les points calculés dans le cas de la poutre

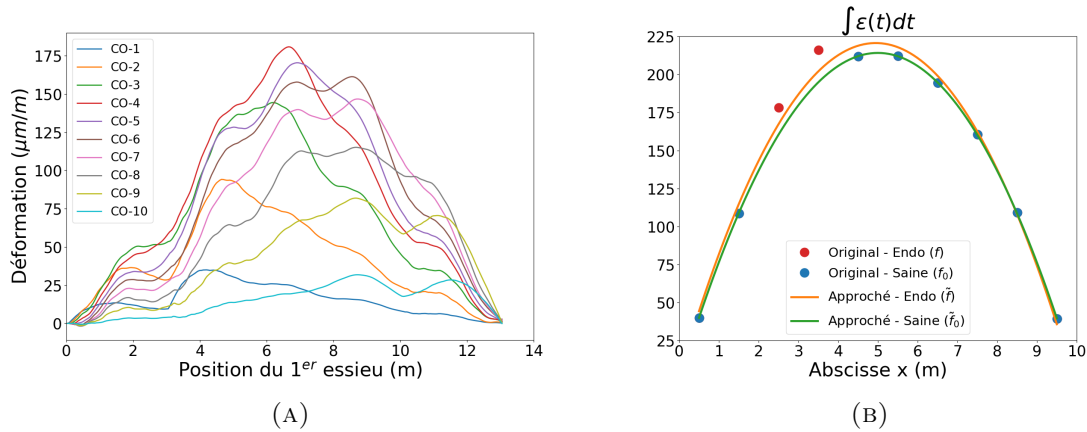


FIGURE 5.5 – Poutre endommagée : a) Histoire des réponses et b) Distribution de l'aire des courbes de déformation.

non endommagée (la courbe verte représentée sur les figures 5.3b et 5.5b, pour une valeur calculée du critère global  $EG$  valant 0.14 %).

### Étude paramétrique à l'aide du *code\_Aster*

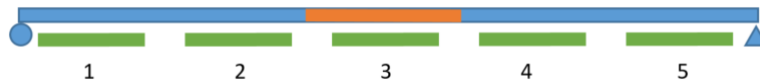


FIGURE 5.6 – Poutre simple endommagée dans *code\_Aster*

Une poutre simple identique à la poutre prise dans l'exemple introductif est modélisée dans *code\_Aster*. Nous créons également une zone d'endommagement de taille variable (de 0.5 m à 3 m) au milieu de la poutre (Figure 5.6). La réduction du module de Young dans la zone endommagée est aussi variable, de 0 à 50 %. Cinq cordes optiques de longueur 2 m sont placées sous la poutre.

Les résultats des calculs sont présentés dans la figure 5.7. La figure 5.7a présente les critères globaux calculés en perspective. La figure 5.7b montre la dépendance du critère  $EG$  à la taille de la zone endommagée. Nous constatons que, quand la taille de la zone de réduction du module de Young est égale à 2 m, le critère  $EG$  atteint sa valeur maximale. C'est aussi la longueur d'une corde optique.

La figure 5.8 présente les valeurs du critère local pour différents niveaux d'endommagement. La réduction du module de Young s'applique sur une zone de longueur 2 m au centre de la poutre. Nous pouvons voir que la zone endommagée correspond à la corde optique 3.

Les deux critères proposés nous permettent d'identifier et de localiser l'endommagement présent dans une poutre sans avoir connaissance de son état de référence. Cependant, le nombre de capteurs demandé est un point faible de cette méthode.

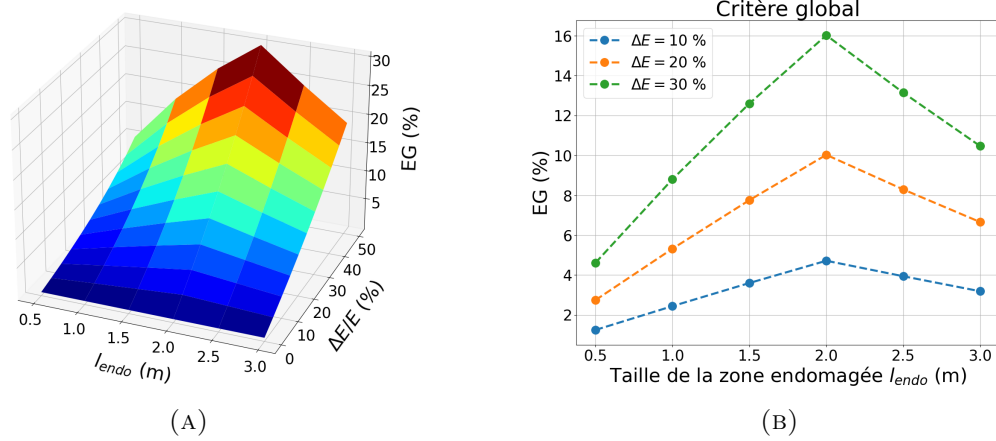


FIGURE 5.7 – Critère global EG : a) en perspective et b) en fonction de la taille de la zone endommagée.

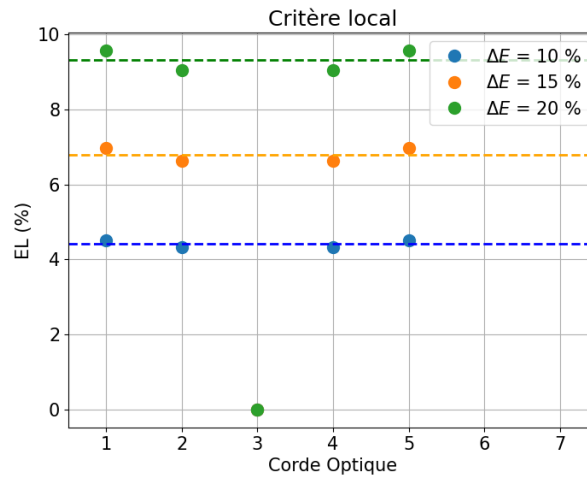


FIGURE 5.8 – Critère local  $EL_i$  à différents niveaux d'endommagement

### 5.3 Critères à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération

Avec le critère précédemment proposé, l'obtention de la distribution des aires sous les courbes de déformations mesurées dépend d'un nombre suffisant de capteurs. Dans cette partie, nous souhaitons réduire ce nombre de capteurs. Pour cela nous allons mettre en évidence la relation entre les mesures de déformation et d'accélération en un même point.

Considérons une poutre simple soumise à une force ponctuelle comme montrée dans la Figure 5.9. Une force ponctuelle  $P$  se déplace sur la poutre à vitesse constante  $v$ . Sur la poutre, au point  $x = x_0$ , nous plaçons un accéléromètre (point rouge) et une corde optique longue (trait vert) dont le centre se trouve également en  $x_0$ .

L'équation dynamique de la poutre est :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + E^* I \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + c \frac{\partial u}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \delta(x - vt), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.18)$$



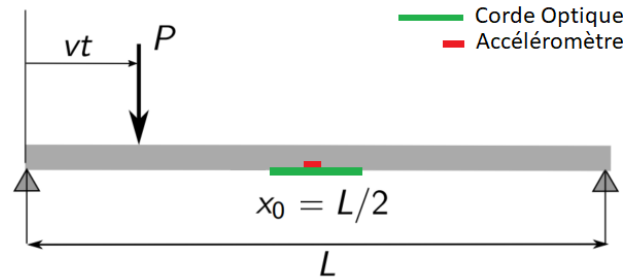


FIGURE 5.9 – Poutre simple avec capteur de déformation et d'accélération en co-localisation.

dans laquelle  $EI$  est la rigidité en flexion,  $\rho$  la masse volumique,  $S$  la section droite de la poutre,  $c$  le mécanisme d'amortissement externe et  $E^*$  le mécanisme d'amortissement interne (matériau).  $P$  est la valeur algébrique de la force appliquée.

Les conditions aux limites sont la nullité des déplacements et des moments de flexion aux extrémités :

$$u(0) = u(L) = 0, \quad u''(0) = u''(L) = 0 \quad (5.19)$$

Supposons que la poutre soit au repos en  $t = 0$ , nous avons les conditions initiales :

$$u(x, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \quad (5.20)$$

### Convention des signes :

Afin de faciliter le problème, nous admettons les quelques remarques suivantes :

- Les coordonnées  $(x, y, z)$  forment un repère direct. L'origine  $O$  est située à l'extrémité gauche de la poutre. L'axe  $Ox$  orienté gauche-droite,  $Oy$  arrière-avant et  $Oz$  bas-haut.
- Par conséquent, le sens positif du déplacement vertical  $u(x, t)$  est aussi orienté vers le haut. Quand la force passe lentement sur la poutre pour que le problème puisse être considéré comme quasi-statique, nous avons :  $u(x, t) < 0$ .
- La force appliquée est de valeur algébrique :  $P < 0$ .
- Le moment de flexion s'écrit  $M_f = EIu''(x)$ . Nous considérons dans un premier temps la déformation « ponctuelle », donnée par  $\varepsilon(x) = z_0 u''(x)$ , avec  $z_0 > 0$  la distance entre l'axe neutre et le capteur de déformation. Nous supposons que ce dernier (capteur de déformation \*de type jauge électrique, corde optique) est situé en dessous de l'axe neutre. Dans le cas contraire,  $z_0 < 0$ .
- L'accélération est :  $a(x, t) = \ddot{u}(x, t)$ . Le sens positif des accélérations est aussi vers le haut (en direction opposée de celle de la gravité).

Les signaux numériques obtenus par les accéléromètres d'OSMOS sont exprimés en multiple de  $g$ . Les valeurs chiffrées sont de la forme :  $a(t) = -1 + a_d(t)$  avec  $a_d(t)$  les valeurs dynamiques enregistrées après chaque passage de véhicule. Nous voyons que le sens positif de ces accéléromètres pointe également vers le haut.

### 5.3.1 Décomposition de la solution générale : composantes particulière et homogène

Comme présenté dans le Chapitre 2, la solution générale de l'équation (5.18) est obtenue par la superposition des réponses modales :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(x) q_n(t) \quad (5.21)$$

avec  $q_n(t)$  les coordonnées généralisées qui dépendent du temps.

L'accélération verticale est la deuxième dérivée du déplacement par rapport au temps  $t$  :

$$a(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \sum_n \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) \quad (5.22)$$

La déformation est proportionnelle à la deuxième dérivée du déplacement par rapport à la coordonnée  $x$  :

$$\varepsilon(x, t) = z_0 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = z_0 \sum_n \phi_n''(x) q_n(t) \quad (5.23)$$

Pour une poutre bi-appuyée simple, la déformée modale est donnée par :

$$\phi_n(x) = A \sin(\lambda_n x) \quad (5.24)$$

avec  $\lambda_n = n\pi/L$  et  $A = \sqrt{2/L}$ , qui est calculé par la normalisation  $\int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{mn}$ .

En substituant (5.24) dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$\varepsilon(x, t) = -z_0 \sum_n \lambda_n^2 \phi_n(x) q_n(t) \quad (5.25)$$

La partie dépendant du temps  $q_n(t)$  correspondant au  $n$ -ième mode de vibration est solution de l'équation :

$$\ddot{q}_n(t) + 2\omega_n \zeta_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \frac{P}{\rho S} \phi_n(vt) \quad (5.26)$$

où  $t \in [0, L/v]$  et  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{EI/\rho S} = \lambda_n^2 \mathcal{R}$  est la pulsation propre de la poutre correspondant au mode  $n$ . (nous notons  $\mathcal{R} = \sqrt{EI/\rho S}$  pour simplifier l'écriture).

Dans la section 2.4 (Chapitre 2), nous avons vu que les coordonnées généralisées  $q_n(t)$  peuvent être décomposées en deux composantes. L'une, dite « solution homogène », est la solution de l'équation (5.26) sans le terme à droite (Le terme à droite est égal à zéro). L'autre, dite « solution particulière » est une expression qui valide l'équation 5.26. Nous avons :

$$q_n(t) = q_n^h(t) + q_n^p(t) \quad (5.27)$$

En substituant l'équation (5.27) dans les équations (5.22) et (5.25), nous pouvons décomposer les réponses (le déplacement, la déformation et l'accélération) en terme homogène et particulier comme suit :

— Déplacement :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(x) \left( q_n^p(t) + q_n^h(t) \right) = u^p(x, t) + u^h(x, t) \quad (5.28)$$

— Déformation :

$$\varepsilon(x, t) = -z_0 \sum_n \lambda_n^2 \phi_n(x) (q_n^p(t) + q_n^h(t)) = \varepsilon^p(x, t) + \varepsilon^h(x, t) \quad (5.29)$$

— Accélération :

$$a(x, t) = \sum_n \phi_n(x) (\ddot{q}_n^p(t) + \ddot{q}_n^h(t)) = a^p(x, t) + a^h(x, t) \quad (5.30)$$

Nous nous intéressons à la participation de chaque composante à la réponse finale en déplacement, et notamment en déformation et en accélération.

### La solution particulière $q_n^p(t)$

En remplaçant (5.24) dans (5.26), on peut obtenir :

$$\ddot{q}_n^p(t) + 2\omega_n \zeta_n \dot{q}_n^p(t) + \omega_n^2 q_n^p(t) = \frac{P}{\rho S} \sin(\Omega_n t) \quad (5.31)$$

avec  $t \in [0, L/v]$  et  $\Omega_n = \lambda_n v = n\pi v/L$ .

Une solution particulière du problème (5.31) est la solution stationnaire de l'oscillateur forcé donnée par :

$$q_n^p(t) = \bar{A}_n \sin(\Omega_n t) + \bar{B}_n \cos(\Omega_n t) \quad (5.32)$$

avec :

$$\begin{aligned} \bar{A}_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P}{\rho S} \frac{\omega_n^2 - \Omega_n^2}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + (2\omega_n \zeta_n \Omega_n)^2} = \sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P}{\rho S \omega_n^2} \frac{1 - \gamma_n^2}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \\ \bar{B}_n &= -\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P}{\rho S} \frac{2\omega_n \zeta_n \Omega_n}{(\omega_n^2 - \Omega_n^2)^2 + (2\omega_n \zeta_n \Omega_n)^2} = -\sqrt{\frac{2}{L}} \frac{P}{\rho S \omega_n^2} \frac{2\zeta_n \gamma_n}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \end{aligned} \quad (5.33)$$

dans lesquelles le facteur de vitesse  $\gamma_n = \Omega_n/\omega_n = v/v_{c,n}$  est une grandeur adimensionnelle, qui est le rapport entre la vitesse du véhicule et la  $n$ -ième vitesse de résonance de la poutre.

Remarquons que  $\Omega_n t = \lambda_n v t = \lambda_n x_P$  où  $x_P = vt$  est la position de la force. Vu que la vitesse de la force est constante, la solution particulière ne dépend que de la localisation de la force.

### La solution homogène $q_n^h(t)$

Nous récrivons l'équation (5.26) avec le terme à droite nul :

$$\ddot{q}_n^h(t) + 2\omega_n \zeta_n \dot{q}_n^h(t) + \omega_n^2 q_n^h(t) = 0 \quad (5.34)$$

La solution générale de l'équation (5.34) peut s'écrire sous la forme :

$$q_n^h(t) = [\alpha_n \sin(\omega_n^d t) + \beta_n \cos(\omega_n^d t)] e^{-\omega_n \zeta_n t} \quad (5.35)$$

où  $\omega_n^d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$  la pseudo-pulsation propre du système correspondant au  $n$ -ième mode.

Les coefficients  $\alpha_n, \beta_n$  sont déterminés depuis les conditions initiales :

$$\begin{cases} q_n(0) = \dot{q}_n^p(0) + q_n^h(0) = 0 \\ \dot{q}_n(0) = \dot{q}_n^p(0) + \dot{q}_n^h(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_n = -(\gamma_n \bar{A}_n + \zeta_n \bar{B}_n) / \sqrt{1 - \zeta_n^2} \\ \beta_n = -\bar{B}_n \end{cases} \quad (5.36)$$

**La solution générale  $q_n(t)$** 

Les composantes particulières ( $\Omega_n t$ ) représentent la vibration forcée induite par la force ; alors que les composantes homogènes ( $\omega_n^d t$ ) sont les vibrations libres de la poutre avec l'amortissement. Par sommation des deux parties déterminées, nous obtenons au final l'expression analytique explicite de la solution générale pour le mode  $n$  :

$$\begin{aligned} u_n &= \phi_n(x)q_n(t) \\ &= \frac{2P}{\rho SL \omega_n^2} \frac{\sin(\lambda_n x)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \times \left\{ (1 - \gamma_n^2) \sin(\Omega_n t) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\Omega_n t) \right. \\ &\quad \left. + \left[ 2\zeta_n \gamma_n \cos(\omega_n^d t) - \frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} (1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin(\omega_n^d t) \right] e^{-\omega_n \zeta_n t} \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

Afin de voir la contribution de chaque composante à la solution générale, nous écrivons l'expression de  $u_n(x, t)$  sous forme :

$$u_n(x, t) = \frac{2P}{\rho SL} \frac{\sin(\lambda_n x)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} (u_n^{*p} + u_n^{*h} e^{-\omega_n \zeta_n t}) \quad (5.38)$$

De même, nous avons les expressions de la déformation et de l'accélération :

$$\varepsilon_n(x, t) = z_0 u_n''(x, t) = \frac{2P}{\rho SL} \frac{\sin(\lambda_n x)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} (\varepsilon_n^{*p} + \varepsilon_n^{*h} e^{-\omega_n \zeta_n t}) \quad (5.39)$$

$$a_n(x, t) = \ddot{u}_n(x, t) = \frac{2P}{\rho SL} \frac{\sin(\lambda_n x)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} (a_n^{*p} + a_n^{*h} e^{-\omega_n \zeta_n t}) \quad (5.40)$$

Faisons les mêmes décompositions avec la déformation et l'accélération, nous établissons le tableau récapitulatif des composantes particulières ( $u_n^{*p}$ ,  $\varepsilon_n^{*p}$ ,  $a_n^{*p}$ ) et des composantes homogènes sans le terme de décroissance exponentielle ( $u_n^{*h}$ ,  $\varepsilon_n^{*h}$ ,  $a_n^{*h}$ ) suivant :

Grandeur physique	Composante particulière $(\star)_n^{*p}$	Composante homogène sans le terme de décroissance exponentielle $(\star)_n^{*h}$
Déplacement	$\frac{1}{\omega_n^2} [(1 - \gamma_n^2) \sin(\Omega_n t) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\Omega_n t)]$	$\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \cdot \frac{1}{\omega_n^2} [-(1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin(\omega_n^d t) + 2\zeta_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \cos(\omega_n^d t)]$
Déformation	$\frac{z_0}{\mathcal{R}\omega_n} [-(1 - \gamma_n^2) \sin(\Omega_n t) + 2\zeta_n \gamma_n \cos(\Omega_n t)]$	$\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} \cdot \frac{z_0}{\mathcal{R}\omega_n} [(1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin(\omega_n^d t) - 2\zeta_n \sqrt{1 - \zeta_n^2} \cos(\omega_n^d t)]$
Accélération	$\gamma_n^2 [-(1 - \gamma_n^2) \sin(\Omega_n t) + 2\zeta_n \gamma_n \cos(\Omega_n t)]$	$\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} [(1 - \gamma_n^2 + 2\zeta_n^2 \gamma_n^2) \sin(\omega_n^d t) - 2\zeta_n \gamma_n^2 \sqrt{1 - \zeta_n^2} \cos(\omega_n^d t)]$

TABLEAU 5.1 – Les composantes particulière et homogène du déplacement, de la déformation et de l'accélération.

Dans le tableau 5.1, les modules des termes sinusoïdaux dans les crochets sont égaux (valant  $\sqrt{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2}$ ). Pour la déformation et le déplacement : la composante particulière est dominante par rapport à la composante homogène. Le rapport entre ces deux composantes vaut  $\sqrt{1 - \zeta_n^2}/\gamma_n$ . Réciproquement, pour l'accélération, la composante homogène est plus importante. Elle est  $1/(\gamma_n \sqrt{1 - \zeta_n^2})$  fois plus grande que la composante particulière. Dans le cas où le taux d'amortissement est suffisamment petit ( $\zeta_n \leq 10\%$ ), ce terme  $\sqrt{1 - \zeta_n^2} \approx 1 - \zeta_n^2/2$  peut être négligé. Le facteur de vitesse  $\gamma_n$  caractérise le rapport entre les composantes particulière et homogène d'une même grandeur.

A titre d'exemple, nous présentons les réponses correspondant au premier mode et les réponses finales d'une poutre simple soumise à une force mobile. Le premier facteur de vitesse vaut  $\gamma_1 = 10\%$  et le taux d'amortissement est de 2%. Les réponses sont extraites au milieu de la poutre. La figure 5.10 représente les composantes particulière (en vert) et homogène (en orange) de la réponse totale (courbes pointillées) et la réponse correspondante au premier mode de vibration de la poutre (ligne solide). Nous voyons que la valeur du pic de l'accélération particulière est très faible devant la valeur des pics de la composante homogène (Figure 5.10a). D'autre part, la première composante particulière de la déformation est environ 10 fois plus grande que la déformation homogène. De plus, les composantes homogènes de ces deux grandeurs sont bien représentées par le premier mode de vibration.

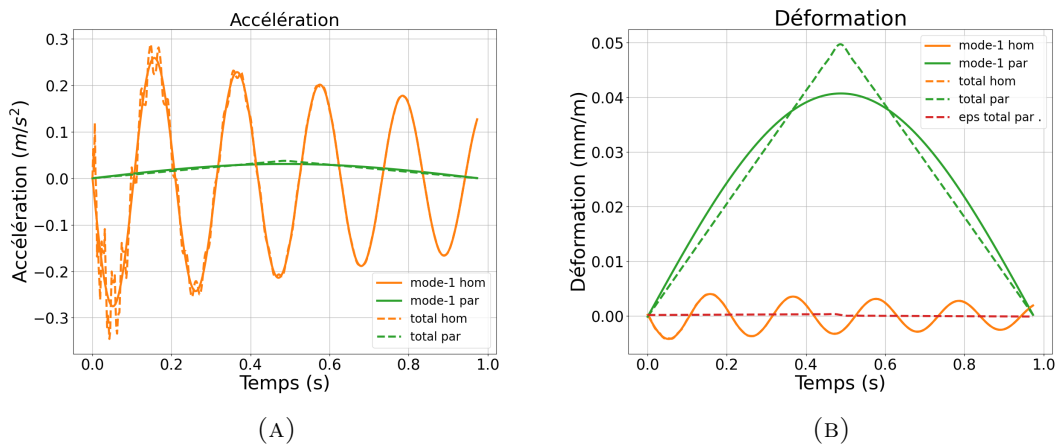


FIGURE 5.10 – Accélération (à gauche) et déformation (à droite) du 1er mode en temps

Le tableau récapitulatif nous donne aussi l'évolution de chaque composante de la réponse en fonction du numéro de mode  $n$ . Nous nous intéressons uniquement aux réponses en accélération et en déformation. L'accélération homogène est proportionnelle à  $1/n$  alors que l'amplitude de la composante particulière diminue plus vite, proportionnellement à  $1/n^2$ . La figure 5.11 présente les composantes de l'accélération des quatre premiers modes impairs.

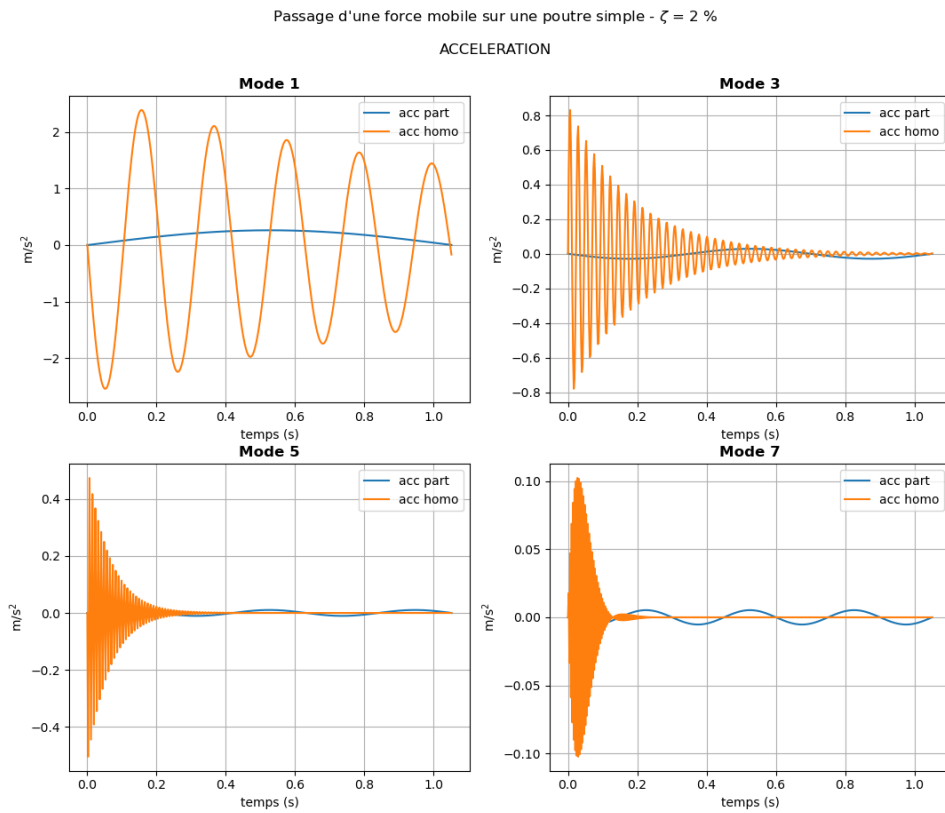


FIGURE 5.11 – Accélérations homogène et particulière en fonction du mode

Réciproquement, la composante particulière de déformation est proportionnelle à  $1/n^2$ , alors que sa composante homogène est proportionnelle à  $1/n^3$ . Les composantes de la déformation des quatre premiers modes impairs sont présentées dans la figure 5.12. La composante homogène de la déformation (en orange) s'annule très rapidement.

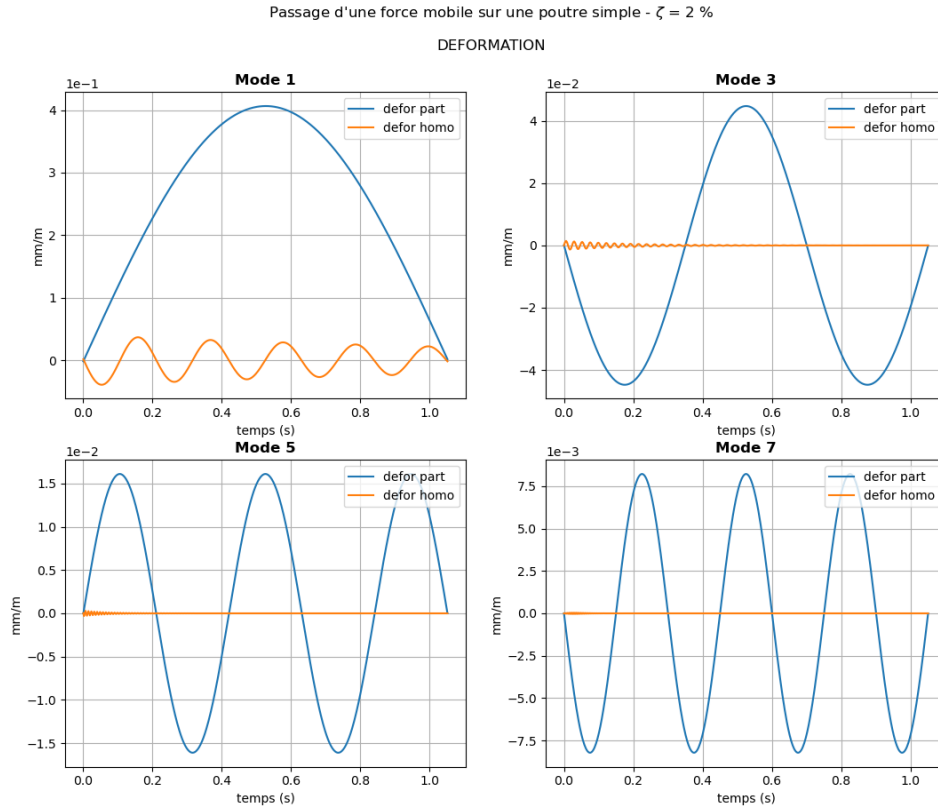


FIGURE 5.12 – Déformations homogène et particulière en fonction du mode

### 5.3.2 Décomposition de la solution générale : composantes quasi-statique et dynamique

Lorsque la force mobile traverse la poutre à une vitesse suffisamment petite pour que les effets dynamiques n'interviennent pas sur la réponse totale de la poutre, la partie « quasi-statique » est obtenue à partir de la composante particulière des coordonnées généralisées en passant à la limite quand la vitesse de la masse tend vers zéro (ou bien  $\gamma_n \rightarrow 0$ ) :

$$\begin{aligned} q_n^{s0}(\tau) &= \lim_{\gamma_n \rightarrow 0} q_n^p(\tau) = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P}{\rho S} \cdot \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\lambda_n v \frac{x_P}{v}\right) \\ &= \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P}{\rho S} \phi_n(x_P) \end{aligned} \quad (5.41)$$

où  $x_P$  est la position de la force  $P$  et  $\tau = x_P/v$  l'instant où la force se trouve à l'endroit  $x_P$ .



Nous essayons de construire une fonction  $q_n^s(t)$ , qui ne dépend que de la position de la force  $x_P = vt$  et similaire à  $q_n^{s0}(\tau)$  :

$$q_n^s(t) = \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{P}{\rho S} \phi_n(vt) \quad (5.42)$$

Nous appelons  $q_n^s(t)$  la composante quasi-statique de la réponse.

Le terme à droite de l'équation (5.31) peut être exprimé en fonction de la déformation quasi-statique comme suit :

$$\frac{P}{\rho S} \phi_n(vt) = \omega_n^2 q_n^s(t) \quad (5.43)$$

En reportant cette relation dans l'équation (5.31), nous avons :

$$\ddot{q}_n(t) + 2\omega_n \zeta_n \dot{q}_n(t) + \omega_n^2 q_n(t) = \omega_n^2 q_n^s(t) \quad (5.44)$$

Nous définissons la composante dynamique des coordonnées généralisées  $q_n^d(t)$  comme la différence entre la partie quasi-statique et la solution totale :

$$q_n^d(t) = q_n(t) - q_n^s(t) \quad (5.45)$$

En multipliant par  $\phi_n''(x)$  des deux côtés de l'équation (5.44) et divisant par  $\omega_n^2$ , nous obtenons l'équation (5.46). Dans notre cas, pour une poutre simple, nous avons  $\phi_n''(x) = -\lambda_n^2 \phi_n(x)$  :

$$-\frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2} \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \phi_n''(x) \dot{q}_n(t) + \phi_n''(x) q_n(t) = \phi_n''(x) q_n^s(t) \quad (5.46)$$

Supposons que la participation du mode fondamental est dominante et que le taux d'amortissement est constant pour tous les modes ( $\zeta_n = \zeta, \forall n$ ). Nous ne gardons que les coefficients pour le 1<sup>er</sup> mode de vibration et prenons la sommation pour les autres fonctions :

$$-\frac{\lambda_1^2}{\omega_1^2} \sum_n \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \sum_n \phi_n''(x) \dot{q}_n(t) + \sum_n \phi_n''(x) q_n(t) \approx \sum_n \phi_n''(x) q_n^s(t) \quad (5.47)$$

$$\Rightarrow -\frac{\lambda_1^2}{\omega_1^2} a(t) + \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{z_0} + \frac{\varepsilon(t)}{z_0} \approx \frac{\varepsilon^s(t)}{z_0} \quad (5.48)$$

Notons  $a = a_m$  et  $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_m$  l'accélération et la déformation « mesurées ». Nous en déduisons :

$$\varepsilon_m = z_0 \frac{\lambda_1^2}{\omega_1^2} a_m - \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \dot{\varepsilon}_m + \varepsilon^s \quad (5.49)$$

La déformation quasi-statique  $\varepsilon_s$  au point de mesure peut être exprimée en terme de ligne d'influence du moment de flexion au point concerné que nous appelons le « moment statique élémentaire  $\mathcal{M}_s^e$  » :

$$\varepsilon_s = z_0 \frac{M}{EI} = z_0 \frac{|P|}{EI} \mathcal{M}_s^e \quad (5.50)$$

Nous écrivons l'équation (5.49) sous forme plus compacte :

$$\boxed{\varepsilon_m = c_d a_m + c_s \mathcal{M}_s^e + c_z \dot{\varepsilon}_m} \quad (5.51)$$

Avec les significations des coefficients  $c_d$ ,  $c_z$ ,  $c_s$  présentées dans le tableau 5.2.

Paramètres	Notation	Expression
Coefficient lié à la structure	$c_d$	$z_0 \frac{\rho S}{\lambda_1^2 EI} = \frac{z_0}{v_{c1}^2}$
Coefficient lié à l'amortissement	$c_z$	$-\frac{2\zeta_1}{\omega_1}$
Coefficient lié au poids	$c_s$	$z_0 \frac{ P }{EI}$

TABLEAU 5.2 – Signification des coefficients  $c_d$ ,  $c_z$ ,  $c_s$

Dans lesquelles  $v_{c1} = \lambda_1 \sqrt{EI/\rho S}$  est la première vitesse critique de la poutre, qui est un paramètre qui ne dépend que des propriétés intrinsèques de la structure. Le coefficient  $c_s$  est proportionnel à la force exercée  $P$  alors que le coefficient  $c_z$  reflète le taux d'amortissement de la poutre.

L'évolution des coefficients mentionnés pourrait nous donner une idée de l'état de santé de la structure.

### 5.3.3 Critère de détection de l'endommagement

#### Poutre simple soumise à une force ponctuelle

A partir de l'équation (5.51), nous définissons une fonction objectif à optimiser :

$$J(c_d, c_s, c_z) = \|\varepsilon_m - c_d a_m - c_s \mathcal{M}_s^e - c_z \dot{\varepsilon}_m\|_2^2 \quad (5.52)$$

Nous cherchons l'ensemble de valeurs  $c_d^0, c_s^0, c_z^0$  qui minimisent la fonction  $J$  :

$$c_d^0, c_s^0, c_z^0 = \arg \min_{c_d, c_s, c_z} J(c_d, c_s, c_z) \quad (5.53)$$

#### Poutre simple soumise à plusieurs forces ponctuelles (véhicule avec essieux)

Dans le cas d'un véhicule avec plusieurs essieux (donc, plusieurs forces ponctuelles  $P_j$  appliquées à la poutre), la déformation « quasi-statique »  $\varepsilon^s(t)$  est la somme des signaux dont la partie non nulle est similaire. Comme la déformation quasi-statique est recalée à partir du moment de flexion par un multiplicateur ( $z_0/EI$ ), nous considérons alors dans un premier temps le moment de flexion de la poutre. La figure 5.13 représente la décomposition du moment de flexion à mi-travée d'une poutre simple lors du passage d'un véhicule à trois essieux. Le moment de flexion total (courbe épaisse en magenta) à mi-travée de la poutre (point rouge) est la somme des moments de flexion donnés par chaque force individuelle (représentée par des courbes bleue, rouge et verte qui correspondent respectivement aux forces  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ ) :

$$M(x) = M_1(x) + M_2(x) + M_3(x) \quad (5.54)$$

La partie non nulle des moments  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  a la même forme. Dans ce cas actuel, cette dernière est un triangle. En effet, il s'agit de la ligne d'influence du moment de flexion

( $\mathcal{M}_s^e$ ) pondérée par l'intensité de la force, avec la prise en compte du délai  $\tau_i = (\sum_{j=1}^{i-1} d_j)/v$ , avec  $d_j$  la distance entre les essieux  $j$  et  $j + 1$ . L'expression (5.54) peut être réécrite sous la forme :

$$M(x) = P_1 \mathcal{M}_s^e(t) + P_2 \mathcal{M}_s^e\left(t - \frac{d_1}{v}\right) + P_3 \mathcal{M}_s^e\left(t - \frac{d_1 + d_2}{v}\right) \quad (5.55)$$

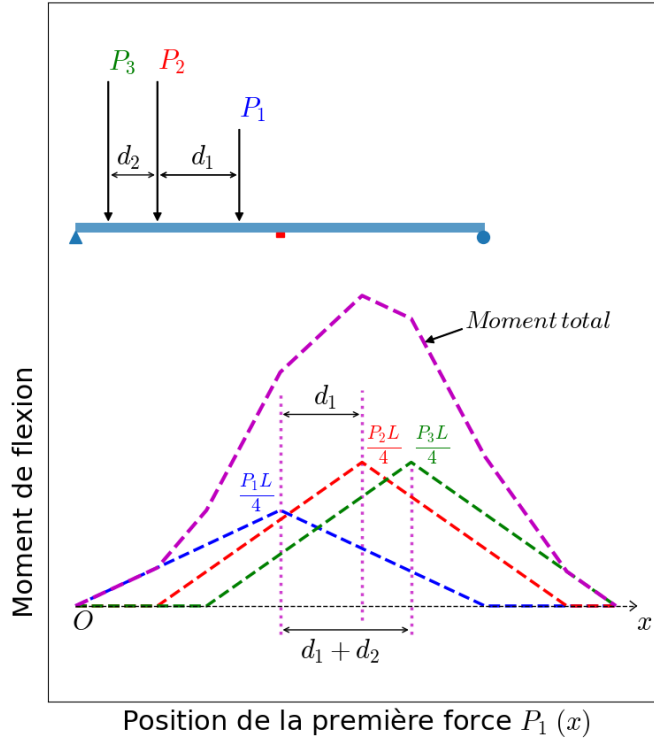


FIGURE 5.13 – Décomposition du moment de flexion

A partir de la relation (5.50) entre la déformation quasi-statique et le moment de flexion, lors du passage d'un véhicule à plusieurs essieux, cette déformation en un point donné peut être exprimée en fonction de la ligne d'influence du moment de flexion  $\mathcal{M}_s^e(x)$  du même point comme suit :

$$\varepsilon_s = \sum_i \varepsilon_{si} = \frac{z_0}{EI} \left[ P_1 \mathcal{M}_s^e(t) + P_2 \mathcal{M}_s^e\left(t - \frac{d_1}{v}\right) + P_3 \mathcal{M}_s^e\left(t - \frac{d_1 + d_2}{v}\right) + \dots \right] \quad (5.56)$$

Supposons que le véhicule possède  $M$  essieux. Nous avons alors une autre variable à optimiser, le vecteur  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_M]$  dont les éléments sont les distances entre deux essieux consécutifs. Pour une valeur de  $\mathbf{d}$  donnée, nous cherchons  $\mathbf{c}_{\min} = [c_d^{\min}, c_z^{\min}, \mathbf{c}_s^{\min}]$  qui minimise la fonction objectif  $J(\mathbf{c}, \mathbf{d})$  :

$$J(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \|\varepsilon_m - c_d a_m - c_z \dot{\varepsilon}_m - \mathbf{M}_s^e(\mathbf{d}) \mathbf{c}_s\|_2^2 \quad (5.57)$$

où :  $\mathbf{M}_s^e(\mathbf{d}) \in \mathbb{R}^{N \times M}$  est la matrice dont chaque colonne est une ligne d'influence du moment de flexion correspondant à un essieu du véhicule,  $\mathbf{c}_s = [c_{s1}, c_{s2}, \dots, c_{sM}]^T \in \mathbb{R}^M$  les coefficients

liés au chargement de chaque essieu et  $\mathbf{c} = [c_d, c_z, \mathbf{c}_s]^T = [c_d, c_z, c_{s1}, c_{s2}, \dots, c_{sM}]^T \in \mathbb{R}^{M+2}$  le vecteur qui est l'ensemble de tous les coefficients à déterminer.

A partir des coefficients  $\mathbf{c}_{\min}$  trouvés, nous essayons d'approcher la déformation en fonction de  $\mathbf{d}$  :

$$\varepsilon_{app}(\mathbf{d}) = c_d^{min}(\mathbf{d})a_m + c_z^{min}(\mathbf{d})\dot{\varepsilon}_m + \mathbf{M}_s^e(\mathbf{d})\mathbf{c}_s^{min}(\mathbf{d}) \quad (5.58)$$

Enfin, nous cherchons  $\mathbf{d}^*$  qui minimise la fonction objectif  $J_d$  :

$$J_d = \|\varepsilon_m - \varepsilon_{app}(\mathbf{d})\|_2^2 \quad (5.59)$$

afin de nous permettre de retrouver les valeurs de  $\mathbf{c}^* = [c_d^*, c_z^*, \mathbf{c}_s^*]$  associés.

### Extension de la méthode pour une poutre continue

La méthode d'identification de l'endommagement présentée peut être étendue pour une poutre continue à  $N$  travées. Nous considérons alors une poutre soumise à une force ponctuelle comme montrée dans la Figure 5.14. L'application pour le cas de plusieurs forces ponctuelles sera identique à la méthode présentée pour le cas du passage d'un véhicule avec plusieurs essieux sur une poutre simple.

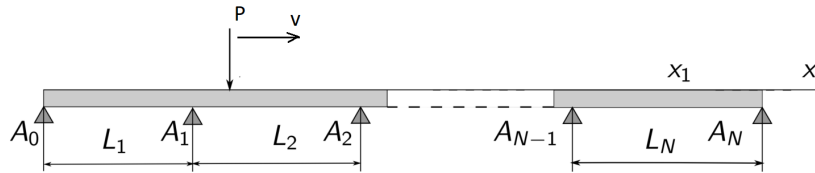


FIGURE 5.14 – Poutre continue soumise à une force mobile

L'équation dynamique de la poutre s'écrit :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + E^* I \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + c \frac{\partial u}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \delta(x - vt), \quad 0 \leq x \leq L \quad (5.60)$$

Les conditions aux limites sont :

- $u(0) = u(\sum_{i=1}^r L_i) = 0, r = 1, 2, \dots, k, \dots, N$
- $M(0) = M(L) = 0 \Rightarrow u''(0) = u''(L) = 0$

La solution générale est la somme des deux composantes : une partie homogène et l'autre particulière :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(x) q_n(t) = \sum_n \phi_n(x) (q_n^h(t) + q_n^p(t)) \quad (5.61)$$

Chaque segment de poutre possède une fonction de forme :

$$\begin{aligned} \phi_{n,r}(x) &= A_{n,r} \sin \lambda_n x_r + B_{n,r} \cos \lambda_n x_r + C_{n,r} \sinh \lambda_n x_r + D_{n,r} \cosh \lambda_n x_r \\ &= \phi_{n,r}^-(x) + \phi_{n,r}^+(x) \end{aligned} \quad (5.62)$$

avec :

$$\begin{cases} \phi_{n,r}^-(x) &= A_{n,r} \sin \lambda_n x_r + B_{n,r} \cos \lambda_n x_r \\ \phi_{n,r}^+(x) &= C_{n,r} \sinh \lambda_n x_r + D_{n,r} \cosh \lambda_n x_r \end{cases} \quad (5.63)$$

Nous déduisons la courbure modale :

$$\begin{aligned}\phi''_{n,r}(x) &= -\lambda_n^2 \phi_{n,r}^-(x) + \lambda_n^2 \phi_{n,r}^+(x) \\ &= -\lambda_n^2 [\phi_{n,r}^-(x) - \phi_{n,r}^+(x)]\end{aligned}\quad (5.64)$$

Nous reprenons les expressions (2.62) et (2.63) :

$$\bar{X}_{n,j} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & \mathbf{0} & \\ -b & a & c & d \\ \mathbf{0} & & d & c \end{array} \right) X_{n,j} = \mathbf{Q} X_{n,j}\quad (5.65)$$

où :

$$\begin{aligned}a &= \frac{1 - \gamma_{n,j}^2}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad b = \frac{2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2} \\ c &= \frac{1 + \gamma_{n,j}^2}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad d = \frac{-2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}\end{aligned}\quad (5.66)$$

Comme nous l'avons vu dans la partie précédente, la composante « quasi-statique » est obtenue à partir de la solution particulière en passant à la limite  $v \rightarrow 0$  (ou bien  $\gamma_n \rightarrow 0$ ). Quand  $v \rightarrow 0$ , les éléments hors la diagonale de la matrice  $\mathbf{Q}$  sont nuls, alors que les termes  $a, b$  valent 1. La matrice  $\mathbf{Q}$  devient une matrice identité. Nous avons :

$$[\bar{A}_{n,r}, \bar{B}_{n,r}, \bar{C}_{n,r}, \bar{D}_{n,r}]^T = \frac{P}{\rho S \omega_n^2} [A_{n,r}, B_{n,r}, C_{n,r}, D_{n,r}]^T\quad (5.67)$$

Nous en déduisons :

$$q_n^s(t) = \frac{P}{\rho S \omega_n^2} \phi_n(vt)\quad (5.68)$$

Nous devons retrouver une expression identique à l'expression (5.44). En reportant la courbure modale définie en (5.64) dans l'expression (5.44), nous avons :

$$-\frac{\lambda_n^2 \phi_n^-(x) - \phi_n^+(x)}{\omega_n^2 \phi_n^-(x) + \phi_n^+(x)} \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \phi_n''(x) \dot{q}_n(t) + \phi_n''(x) q_n(t) = \phi_n''(x) q_n^s(t)\quad (5.69)$$

Nous essayons de retenir le 1<sup>er</sup> mode pour les coefficients, puis prenons la somme :

$$-\frac{\lambda_1^2 \phi_1^-(x_0) - \phi_1^+(x_0)}{\omega_1^2 \phi_1^-(x_0) + \phi_1^+(x_0)} a(t) + \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \frac{\dot{\varepsilon}(t)}{z_0} + \frac{\varepsilon(t)}{z_0} \approx \frac{\varepsilon^s(t)}{z_0}\quad (5.70)$$

où  $x_0$  est la coordonnée du point de mesure.

De la même façon, nous en déduisons :

$$\varepsilon_m = z_0 \frac{\lambda_1^2 \phi_1^-(x_0) - \phi_1^+(x_0)}{\omega_1^2 \phi_1^-(x_0) + \phi_1^+(x_0)} a_m - \frac{2\zeta_1}{\omega_1} \dot{\varepsilon}_m + \varepsilon^s\quad (5.71)$$

ou encore sous forme plus condensée :

$$\boxed{\varepsilon_m = c_d a_m + c_s \mathcal{M}_s^e + c_z \dot{\varepsilon}_m}\quad (5.72)$$

Avec :

$$c_d = z_0 \frac{1}{\Psi_1(x_0)} \frac{\rho S}{\lambda_1^2 EI}, \quad c_z = -\frac{2\zeta_1}{\omega_1} = -\frac{2\zeta_1}{\lambda_1^2} \sqrt{\frac{\rho S}{EI}}, \quad c_s = z_0 \frac{|P|}{EI}$$

où  $\Psi_1(x_0) = [\phi_1^-(x_0) + \phi_1^+(x_0)] / [\phi_1^-(x_0) - \phi_1^+(x_0)]$ .

Pour le cas d'une poutre continue dont les travées sont de longueurs identiques, nous avons  $\phi_{1,r}^-(x) = \mathcal{A}_r \sin(\lambda_1 x_r)$  et  $\phi_{1,r}^+(x) = 0 \Rightarrow \Psi_1(x) = 1$ . Nous obtenons la même formule approchée que pour une poutre simple.

## 5.4 Applications numériques et discussions

### 5.4.1 Poutres saines : Validation

Dans cette partie, nous allons présenter quelques résultats numériques avec application de la méthode d'optimisation. Dans un premier temps, considérons le passage de véhicules sur une poutre simple de longueur  $10\text{ m}$ , de section carrée  $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ . La poutre est en acier, de module d'élasticité  $E = 210\text{ GPa}$  et de masse volumique  $\rho = 7800\text{ kg/m}^3$ . Le taux d'amortissement est pris égal à  $2\%$ .

#### Passage d'un véhicule à deux essieux

Un véhicule à 2 essieux traverse la poutre à une vitesse constante  $v = 5\text{ m/s}$ . Cette valeur est égale à environ  $11\%$  la première vitesse critique de la poutre ( $v_{c1} \approx 47.06\text{ m/s}$ ). Les forces appliquées sont  $P_1 = 1\text{ kN}$  et  $P_2 = 2\text{ kN}$ . La distance entre les deux essieux du véhicule est égale à  $4\text{ m}$ . (Figure 5.15)

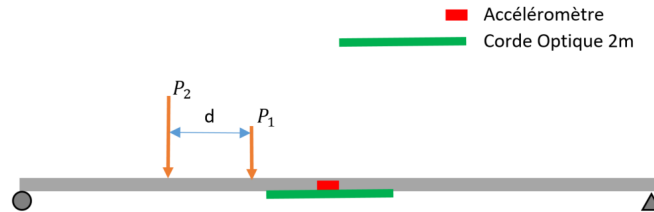


FIGURE 5.15 – Poutre simple soumise à deux forces mobiles

A partir du tableau 5.2, nous pouvons retrouver les valeurs de la vitesse critique et les forces appliquées comme suit :

$$v_{c1} = \sqrt{z_0/c_d} \quad (5.73)$$

et,

$$P_i = E I c_{si}/z_0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (5.74)$$

Les signaux original et approché sont présentés sur la figure 5.16. Nous observons que les courbes approchée et originale sont pratiquement confondues. De plus, des petites perturbations sur le signal approché sont relevées en  $x = 0$  et en  $x = 4\text{ m}$ . Ces points correspondent aux moments où les forces ponctuelles ( $P_1$  et  $P_2$ ) rentrent dans la poutre.

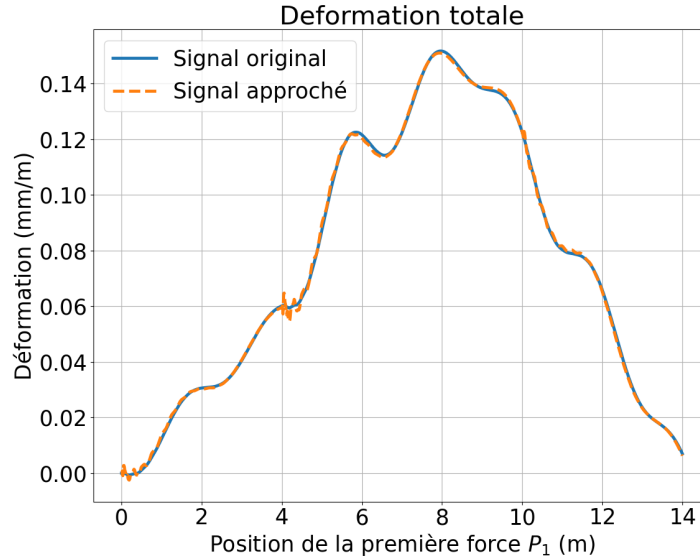
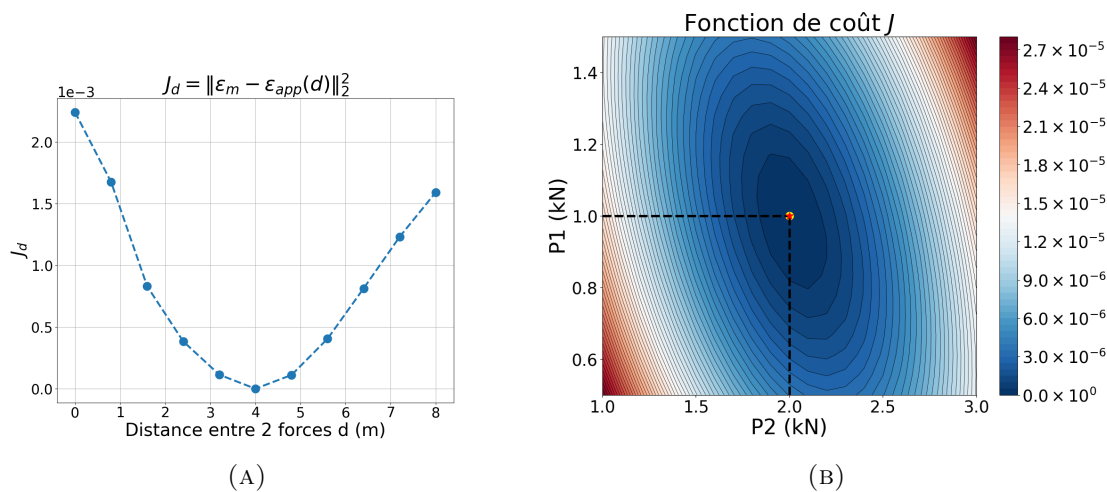


FIGURE 5.16 – Déformations originale et approchée à mi-travée

La distance entre les deux essieux du véhicule est  $d^{opt} = 4.025 \text{ m}$  (écart 0.6 %). Pour les valeurs estimées de  $c_d = 2.22 \times 10^5 \text{ m}^{-1} \text{ s}^2$  et  $c_{s,1} = 2.83 \text{ m}^{-1}$ ,  $c_{s,2} = 5.74 \text{ m}^{-1}$ , nous obtenons  $v_{c1}^{opt} = 47.69 \text{ m/s}$  (écart de 1.3 % avec la valeur d'entrée) et les forces  $P_1^{opt}$ ,  $P_2^{opt}$  sont respectivement égales à  $1.00 \text{ kN}$  et  $2.03 \text{ kN}$ . Ces valeurs sont très proches des valeurs imposées.

FIGURE 5.17 – Visualisation des fonctions objectives  $J_d$  (gauche) et  $J$  (droite)

La figure 5.17 représente la visualisation des fonctions de coût  $J_d$  et  $J$ . Dans la figure 5.17a (à gauche), nous voyons un point minimum à  $d = 4 \text{ m}$ , qui correspond à la distance entre les essieux. Sur la figure 5.17b (à droite), le point jaune représente les valeurs réelles des deux forces imposées, alors que l'étoile rouge représente leurs valeurs approchées (calculées par l'expression 5.74).

### Passage d'un véhicule à trois essieux

Considérons maintenant le passage d'un véhicule à 3 essieux sur la même poutre comme montré sur la figure 5.18.

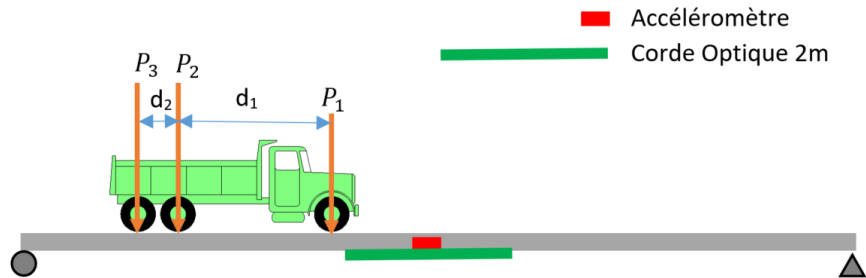


FIGURE 5.18 – Poutre simple soumise à trois forces mobiles

Le camion est supporté par trois essieux. Les forces appliquées sont  $P_1 = 1\text{ kN}$  et  $P_2 = P_3 = 2\text{ kN}$ . Les distances entre ces forces sont  $d_1 = 3.5\text{ m}$  et  $d_2 = 1.4\text{ m}$ . Le véhicule traverse la poutre avec une vitesse de  $5\text{ m/s}$ , qui est aussi égale à 11% de la première vitesse critique de la poutre ( $v_{c1}$ ). La fréquence fondamentale de la poutre est  $2.35\text{ Hz}$ . Un filtre passe-bas sur les signaux avec une fréquence de coupure  $f_c = 5f_0$  est aussi appliqué.

Après avoir appliqué le processus d'optimisation sur les signaux bruts (c.-à.-d. pas de bruits ajoutés), les bruits sont ajoutés aux signaux de la manière suivante :

$$\begin{aligned} a_m &= a_m + \mathcal{N}(0, 0.08) \text{ (m/s}^2\text{)} \\ \varepsilon_m &= \varepsilon_m + \mathcal{N}(0, 5 \times 10^{-3}) \text{ (mm/m)} \end{aligned} \quad (5.75)$$

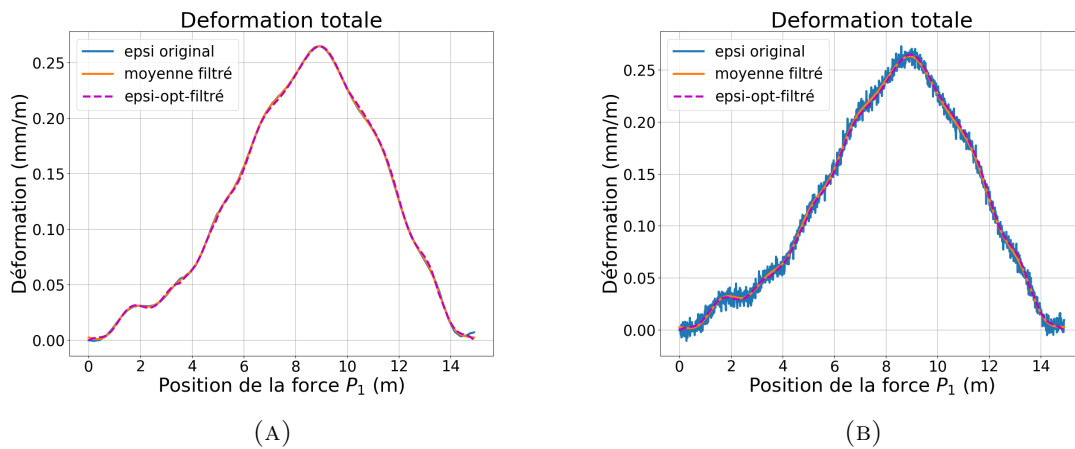


FIGURE 5.19 – Visualisation des déformations approchées au milieu de la poutre sans et avec bruits ajoutés

Une visualisation des signaux originaux et approchés est présentée dans la Figure 5.19. La courbe approchée (en magenta) suit bien le signal original (en bleu) dans les deux cas. Le tableau 5.3 présente un récapitulatif des valeurs approchées et leur écart par rapport aux valeurs imposées (ou calculées théoriquement). Nous voyons que les écarts sont relativement petits.



Grandeurs retrouvés	Sans bruits		Avec bruits	
	Valeur	Erreur (%)	Valeur	Erreur (%)
$v_{c1}$ (m/s)	47.40	0.73	47.08	0.06
$d_1$ (m)	3.49	0.1	3.52	0.72
$d_2$ (m)	1.42	1.46	1.43	2.19
$P_1$ (N)	1006.17	0.62	1015.0	1.50
$P_2$ (N)	1992.08	0.40	2059.49	2.97
$P_3$ (N)	2060.04	3.00	1982.66	0.87

TABLEAU 5.3 – Comparaison des grandeurs retrouvées avec et sans bruits

### 5.4.2 Poutre endommagée : Études paramétriques

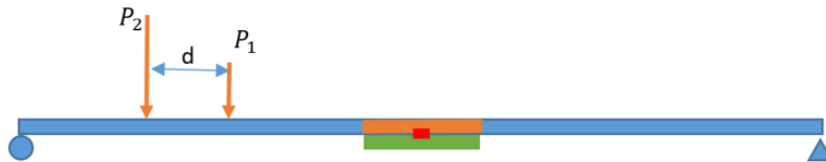


FIGURE 5.20 – Poutre simple soumise à 2 forces mobiles

Nous présentons maintenant les études paramétriques effectuées à l'aide des calculs aux éléments finis avec le *code\_Aster*. Nous avons considéré une poutre simple comprenant les mêmes détails géométriques et matériaux que la poutre présentée dans les exemples précédents. La structure est modélisée par 40 éléments de poutre droite Euler-Bernoulli. Le véhicule passe sur la poutre avec une vitesse constante  $v = 5 \text{ m/s}$ , soit une fréquence d'excitation de  $25 \text{ Hz}$  sur la structure. La fréquence d'acquisition des signaux est de  $200 \text{ Hz}$ . Le véhicule est modélisé par deux forces ponctuelles,  $P_1 = 1 \text{ kN}$  et  $P_2 = 2 \text{ kN}$ . La distance entre ces deux forces est  $d = 3 \text{ m}$ . (Figure 5.20). La poutre comprend une zone endommagée caractérisée par un module de Young réduit (zone en orange sur le schéma de la poutre). Au milieu de la poutre, une corde optique de longueur  $2 \text{ m}$  (trait vert) est placée en sous-face de la poutre, afin de mesurer la déformation moyenne sur sa longueur.

Une zone endommagée est caractérisée par sa longueur, sa localisation (position du centre de la zone endommagée) et son niveau d'endommagement, et est représentée par la réduction de son module de Young  $\Delta E$ . Nous considérons les cas d'étude :

- Cas d'étude 1 : La localisation de la zone endommagée est fixée au milieu de la poutre. Sa taille est variable, de  $0.5 \text{ m}$  à  $5 \text{ m}$ . La réduction du module de Young  $\Delta E$  varie de  $0 \%$  (poutre non endommagée) à  $50 \%$ .
- Cas d'étude 2 : La taille de la zone endommagée est fixée à  $2 \text{ m}$ . Sa localisation est variable, le centre de la zone endommagée se trouve de  $x = 2 \text{ m}$  à  $x = 8 \text{ m}$ . La réduction du module de Young  $\Delta E$  varie de  $0 \%$  à  $50 \%$ .

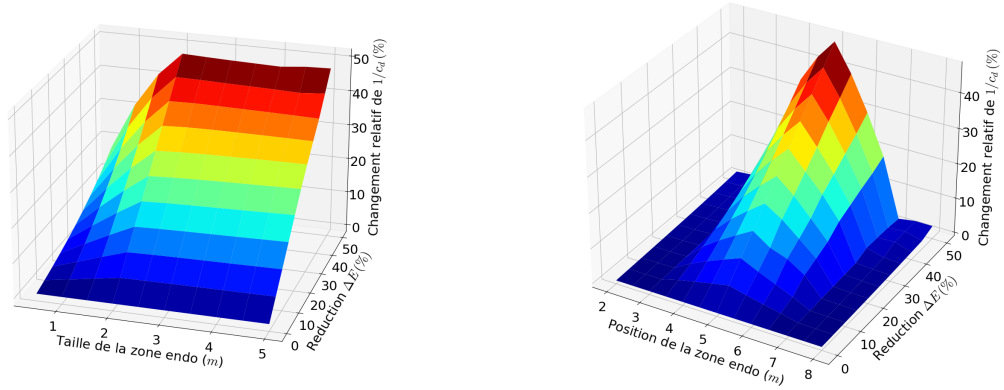
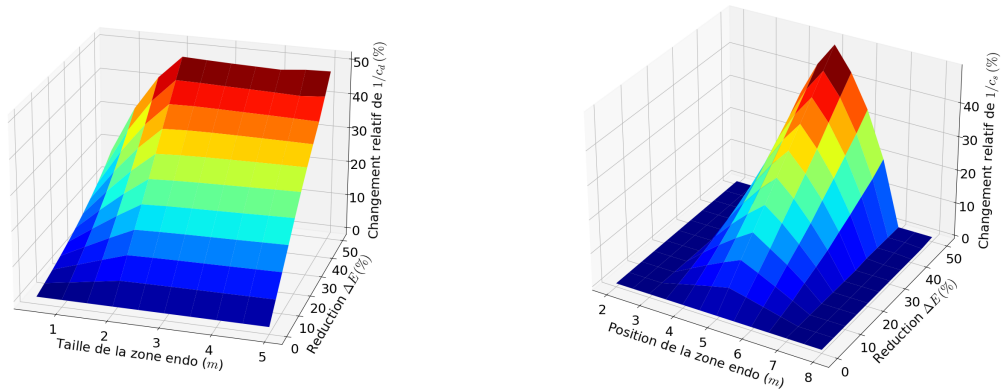
(A) Cas 1 : Changement relatif de  $1/c_d$ (B) Cas 2 : Changement relatif de  $1/c_d$ (C) Cas 1 : Changement relatif de  $1/c_s$ (D) Cas 2 : Changement relatif de  $1/c_s$ 

FIGURE 5.21 – Vues en perspectives des 2 cas

La figure 5.21 représente la vue en perspectives des changements des valeurs de  $1/c_d$  et de  $1/c_s$  par rapport à leurs valeurs de référence (théorique) calculées pour les deux cas d'études. Dans le cas du passage de véhicule à plusieurs essieux, le coefficient  $c_s$  est défini comme la somme de tous les coefficients  $c_{s,i}$  estimés pour chaque essieu :  $c_s = \sum_{i=1}^M c_{s,i}$  où  $M$  est le nombre d'essieux. Nous observons que les changements relatifs de  $1/c_d$  et de  $1/c_s$  sont relativement identiques. Par conséquent, nous nous intéressons au changement relatif de  $1/c_d$ . Nous faisons les coupes dans les deux sens des graphes 3D de  $1/c_d$  (figures 5.21a, 5.21b) afin de voir la dépendance de l'évolution de  $1/c_d$  en fonction des variables étudiées.

Les résultats du premier cas d'étude sont présentés dans la Figure 5.22. La figure de gauche (Figure 5.22a) présente les coupes à différents niveaux d'endommagement. Nous constatons que lorsque la taille de l'endommagement est plus petite que la longueur de la corde optique, le changement de  $1/c_d$  varie linéairement en fonction de la longueur de l'endommagement. Il atteint la valeur maximale quand la taille de la zone endommagée est égale à la longueur de la corde optique, puis sa valeur reste constante. Dans la figure 5.22b, nous observons la dépendance du changement de  $1/c_d$  en fonction de la réduction du module de Young  $\Delta E$ , à différentes longueurs de la zone endommagée. Au-delà du seuil  $l_{endo} = 2m$ , les lignes sont coïncidentes. Ce changement de la valeur de  $1/c_d$  est par ailleurs proportionnel à  $\Delta E$ .

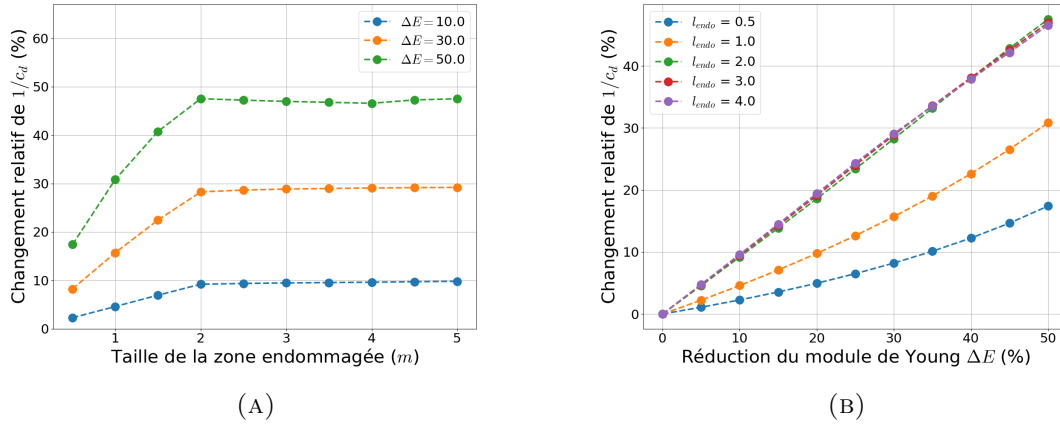


FIGURE 5.22 – Cas 1 : La localisation de l'endommagement est fixe

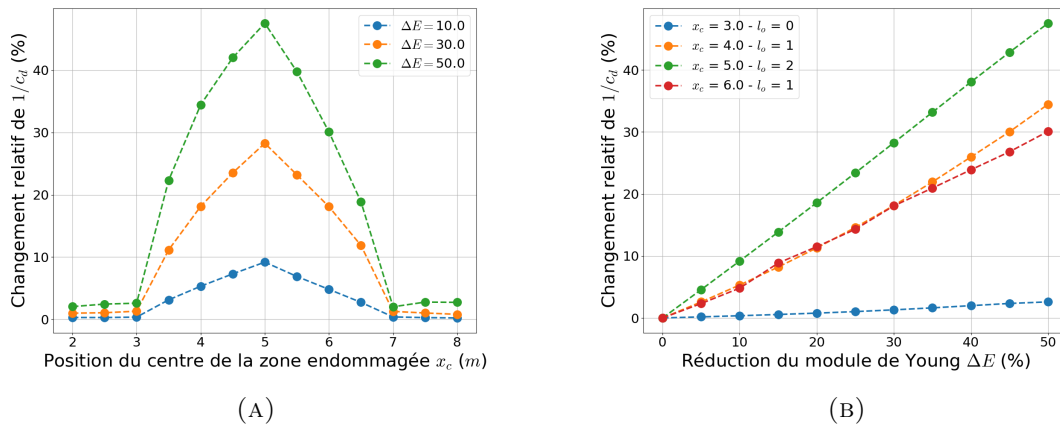


FIGURE 5.23 – Cas 2 : La longueur de la zone endommagée est fixe

La figure 5.23 présente les résultats du deuxième cas d'étude. La taille de la zone endommagée est fixée à  $2\text{ m}$ . C'est la même valeur que la longueur de la corde optique. En allant de gauche à droite, la corde optique commence à recouvrir une partie de la zone endommagée pour la position du centre de l'endommagement valant  $x_c = 3\text{ m}$  ( $l_0 = 0$ ). Le recouvrement est maximal quand  $x_c = 5\text{ m}$  ( $l_0 = 2\text{ m}$ ) et quand  $x_c = 7\text{ m}$  ( $l_0 = 0$ ), l'endommagement sort de la zone couverte par la corde optique. Nous notons  $l_0$  la longueur de la zone superposée. Cela est représenté sur la Figure 5.23a. Quand une partie de l'endommagement est couverte par la corde optique, le changement de  $1/c_d$  est pratiquement proportionnel à la longueur de la zone superposée ( $l_0$ ). Comme pour le premier cas, la variation de la valeur de  $1/c_d$  est aussi proportionnelle à la réduction du module de Young  $\Delta E$  (Figure 5.23b). De plus, sur cette figure, nous observons que lorsque le centre de la zone endommagée se trouve à  $x_c = 4\text{ m}$  ou  $x_c = 6\text{ m}$ , les courbes représentant le changement relatif de  $1/c_d$  correspondant à ces deux cas sont pratiquement identiques. La longueur de la zone superposée dans ces deux cas est égale :  $l_0 = 1\text{ m}$ .

En ce qui concerne la distance entre les deux forces, pour le premier cas, aucun écart

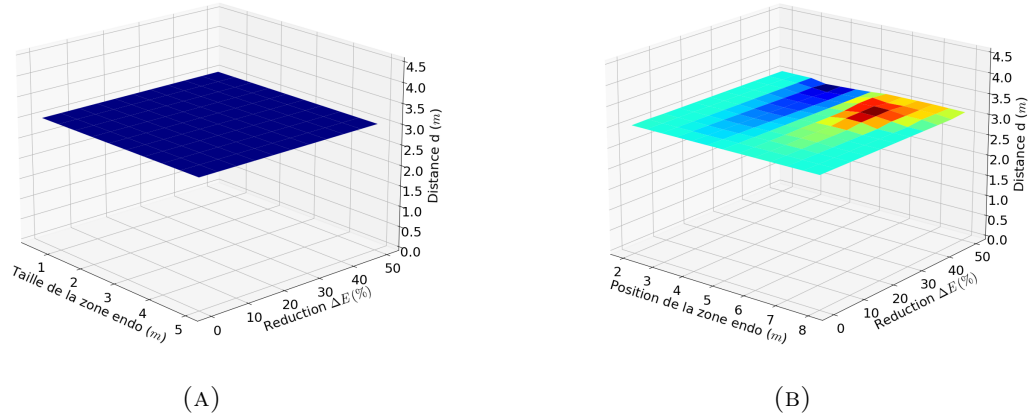


FIGURE 5.24 – Distance entre les deux forces

entre la valeur approchée et la valeur de référence ( $d = 3 \text{ m}$ ) n'est trouvée. Dans le deuxième cas d'étude, cette distance approchée varie de  $2.97 \text{ m}$  à  $3.12 \text{ m}$ , soit un écart maximal de  $4.18 \%$ .

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé deux méthodes de détection de l'endommagement. La première méthode, basée sur la distribution longitudinale des déformations le long d'une poutre, peut détecter la présence de l'endommagement dans la structure, sans connaître son état de référence. De plus, un critère complémentaire nous permet de localiser l'endommagement. Néanmoins, cette méthode nécessite un nombre de capteurs important.

La deuxième méthode d'identification est basée sur les mesures de la déformation et de l'accélération en co-localisation. Par décomposition de la réponse finale en différents termes, nous avons mis en évidence la participation des composantes homogènes (correspondant à la vibration libre de la structure) et des composantes particulières (correspondant à la vibration forcée de la structure sous sollicitation harmonique) sur la solution finale pour chaque type de réponse souhaitée. De plus, à partir de la réponse quasi-statique, l'identification par l'optimisation permet de rétro-évaluer la configuration du véhicule (distance entre des essieux et chargement lié à chaque essieu), de relever une valeur intrinsèque de la structure : la première vitesse critique, qui ne dépend pas du chargement. L'évolution de  $1/c_d$  ( $c_d$  étant un coefficient lié à la structure, s'exprimant en fonction de la première vitesse critique) est proportionnelle à la réduction du module de Young, ce qui nous donne un indice possible de l'état de santé de la structure. Enfin, nous présentons un deuxième coefficient,  $c_s$ , qui est lié au poids total du véhicule. L'évolution de  $1/c_s$  est pratiquement identique que celle de  $1/c_d$ . Malgré sa dépendance au chargement total appliqué, lorsque plusieurs paires de capteurs (corde optique – accéléromètre) sont disposées sur la structure, l'estimation de  $c_s$  à différents endroits de la structure pourrait donner des informations sur la présence éventuelle d'un endommagement. Il ne serait dans ce cas pas nécessaire de connaître le chargement par avance.

Cependant, la méthode actuelle présente aussi des inconvénients. Du fait que seulement le premier mode de vibration soit pris en compte, la méthode n'est performante que pour les cas où le premier mode est dominant par rapport aux autres. Ce ne sera donc pas le

cas lorsque la réponse finale est fortement influencée par les modes supérieurs et cette méthode ne sera plus aussi adaptée. Le chapitre 6 fera l'objet de présentations et discussions détaillées sur la limitation de cette méthode.

## Chapitre 6

# Propositions de critères de détection de l'endommagement à partir des amplitudes modales

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>130</b>
<b>6.2</b>	<b>Des limites de la méthode de détection par optimisation</b>	<b>130</b>
6.2.1	Exemple introductif	130
6.2.2	Bilan énergétique	132
<b>6.3</b>	<b>Formulation à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération</b>	<b>134</b>
<b>6.4</b>	<b>Identification des paramètres modaux par méthode de fraction rationnelle des polynômes</b>	<b>136</b>
6.4.1	Réponse impulsionnelle	138
6.4.2	Réponse à un chargement mobile	142
<b>6.5</b>	<b>Applications numériques</b>	<b>144</b>
6.5.1	Poutres soumises aux chocs	144
6.5.2	Poutres soumises aux chargements mobiles	146
<b>6.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>154</b>

---

## 6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté une méthode d'identification développée à partir des mesures de l'histoire des déformations et des accélérations. La méthode est bien adaptée au cas d'une poutre simple soumise à une ou plusieurs forces mobiles. Toutefois, quand la structure est de type poutre continue à plusieurs travées et que le véhicule est composé de plusieurs forces, les écarts entre des valeurs estimées du coefficient  $c_d$  et celles de référence augmentent.

Dans ce chapitre, nous commençons par traiter un exemple introductif afin de relever quelques limites de la méthode d'estimation par optimisation pour le cas d'une poutre continue soumise au chargement de véhicules et nous les étudions du point de vue énergétique.

Ensuite, nous nous inspirons de l'approche dans le domaine temporel pour proposer une autre approche dans le domaine fréquentiel. Les paramètres modaux sont estimés avec la présentation en fractions rationnelles des Fonctions de Réponse en Fréquence (FRFs). Enfin, un critère de détection est proposé. Des études paramétriques sont ensuite effectuées afin d'étudier la dépendance du critère proposé en fonction des caractéristiques de l'endommagement.

## 6.2 Des limites de la méthode de détection par optimisation

### 6.2.1 Exemple introductif



FIGURE 6.1 – Poutre continue soumise aux forces mobiles

Afin de mettre en évidence les limites de la méthode d'approche par optimisation, nous commençons par traiter un exemple introductif. Considérons une poutre à quatre travées de longueurs identiques  $L = 14.6\text{ m}$  chacune. La poutre est de section rectangulaire, avec une largeur de  $35\text{ cm}$  et une hauteur de  $65\text{ cm}$ . La poutre est en béton, de module d'élasticité  $E = 35\text{ GPa}$  et de masse volumique  $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$ . Le taux d'amortissement est pris à  $\zeta = 5\%$  pour tous les modes. Un véhicule à quatre essieux traverse la structure à vitesse constante  $v = 15\text{ m/s}$ , soit environ  $10\% v_{c1}$  (Figure 6.1). Dans notre exemple, la valeur de la première vitesse critique  $v_{c1}$  est  $v_{c1} = (\pi/L)\sqrt{EI/\rho S} = 151\text{ m/s}$ . Ce véhicule peut être représenté par un camion de 32 tonnes dont les caractéristiques détaillées sont présentées dans le tableau 6.1.

Une corde optique de longueur  $l_g = 2\text{ m}$  et un accéléromètre sont placés au milieu de la deuxième travée : la corde optique est implantée sur la face inférieure de la poutre ( $z_0 = h/2$ ) et l'accéléromètre se trouve au milieu de la corde optique (les deux capteurs sont représentés par un trait vert et un point rouge sur la figure 6.1). Les mesures de ces capteurs sont utilisées pour calculer les coefficients  $c_d$  et  $c_{s,i}$ , ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) ainsi que leur

Paramètres	Notation	Unité	Valeur
Masse totale	$m$	tonne	31.72
Charge de l'essieu 1	$P_1$	tonne	5.66
Charge de l'essieu 2	$P_2$	tonne	7.96
Charge de l'essieu 3	$P_3$	tonne	11.14
Charge de l'essieu 4	$P_4$	tonne	6.96
Distance essieux 1 → 2	$d_1$	m	1.80
Distance essieux 2 → 3	$d_2$	m	3.00
Distance essieux 3 → 4	$d_3$	m	1.38
Vitesse	$v$	m/s	15

TABLEAU 6.1 – Caractéristiques détaillées du passage de poids-lourd 32 tonnes.

écart avec les valeurs de référence (théoriques) :

$$c_d^{ref.} = z_0 \frac{L^2}{\pi^2} \cdot \frac{EI}{\rho S} \quad (6.1)$$

$$c_{s,i}^{ref.} = z_0 \frac{P_i}{EI} \quad (6.2)$$

Comme nous ne prenons en compte que le premier mode pour estimer les coefficients, ces signaux sont filtrés par un filtre passe-bas avec les fréquences de coupure  $f_c$  avant d'appliquer la méthode d'optimisation. Nous considérons deux fréquences de coupure :  $f_{c1} = 1.2f_0$  et  $f_{c2} = 1.5f_0$ , où  $f_0 = 5.17 Hz$  est la fréquence fondamentale de la structure.

Des calculs identiques (mêmes caractéristiques du passage) sont ensuite réalisés dans le cas d'une poutre simple bi-appuyée, de longueur identique à celle d'une travée de la poutre considérée ( $L = 14.6 m$ ). Les mesures de déformation et d'accélération sont réalisées à l'aide des capteurs qui se trouvent également au milieu de la poutre. Les résultats des calculs obtenus pour les deux cas d'étude sont présentés dans le tableau 6.2.

Coefficients estimés	$f_c = 1.2f_0$		$f_c = 1.5f_0$	
	1 travée	4 travées	1 travée	4 travées
$c_d$	-0.31	-3.89	-0.31	-13.08
$c_{s1}$	-0.21	-0.41	-0.4	-3.39
$c_{s2}$	-0.36	1.92	-0.21	3.74
$c_{s3}$	1.3	-2.97	0.92	-4.93
$c_{s4}$	-2.29	2.86	-1.6	6.61
$c_s = \sum_i c_{s,i}$	-0.17	-0.01	-0.15	0.05

TABLEAU 6.2 – Écarts des coefficients  $c_d$  et  $c_{s,i}$  (en %) par rapport aux valeurs de référence estimées durant les passages du poids-lourd de 32 tonnes.

Alors que les valeurs des coefficients  $c_d$  et  $c_{s,i}$  estimées ne semblent pas dépendantes de la valeur de la fréquence de coupure du filtre passe-bas dans le cas d'une poutre simple, les résultats sont très sensibles à la valeur de la fréquence de coupure lorsque la structure se comporte comme une poutre continue à plusieurs travées. De plus, la somme des coefficients



$c_{s,i}$  traduit un écart très faible dans les deux cas. Cela vient du fait que cette somme est proportionnelle au poids total du véhicule, qui est en concordance avec l'aire sous la courbe de l'histoire de déformation (Section 5.2).

### 6.2.2 Bilan énergétique

Pour comprendre le problème rencontré dans l'exemple introductif, nous nous plaçons du point de vue énergétique. Soit  $u(x, t)$  le déplacement de la structure. Cette réponse est obtenue par la superposition des modes :

$$u(x, t) = \sum_n \phi_n(x) q_n(t) \quad (6.3)$$

Avec  $\phi_n(x)$  la déformée modale et  $q_n(t)$  les coordonnées généralisées correspondant au mode  $n$ .

Les énergies élastique  $W_n^e(t)$  et cinétique  $W_n^c(t)$  correspondant au mode  $n$  sont déterminées par les équations suivantes :

$$W_n^e(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_{tot}} EI [u_n''(x, t)]^2 dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^{L_{tot}} EI [\phi_n''(x)]^2 dx \right) q_n^2(t) = \frac{1}{2} \mathbf{K}_n^* q_n^2(t) \quad (6.4)$$

$$W_n^c(t) = \frac{1}{2} \int_0^{L_{tot}} \rho S \dot{u}_n^2(x, t) dx = \frac{1}{2} \left( \int_0^{L_{tot}} \rho S \phi_n^2(x) dx \right) \dot{q}_n^2(t) = \frac{1}{2} \mathbf{M}_n^* \dot{q}_n^2(t) \quad (6.5)$$

Dans lesquelles :  $\mathbf{K}_n^* = \int_0^{L_{tot}} \phi_n''(x) E(x) I \phi_n''(x) dx$  est la raideur généralisée et  $\mathbf{M}_n^* = \int_0^{L_{tot}} \phi_n(x) \rho S \phi_n(x) dx$  est la masse généralisée du mode  $n$ .  $L_{tot}$  est la longueur totale de la poutre. Nous admettons que la structure est faiblement amortie. L'énergie dissipée est alors négligeable. Le taux de participation des énergies élastique et cinétique du  $n$ -ième mode à la réponse finale est calculée par :

$$p_n^e = \frac{\int_0^{L_{tot}/v} W_n^e(t) dt}{\sum_n \int_0^{L_{tot}/v} (W_n^e(t) + W_n^c(t)) dt} \quad (6.6)$$

$$p_n^c = \frac{\int_0^{L_{tot}/v} W_n^c(t) dt}{\sum_n \int_0^{L_{tot}/v} (W_n^e(t) + W_n^c(t)) dt} \quad (6.7)$$

Nous considérons les passages du véhicule présenté dans l'exemple introductif sur différentes structures. Il s'agit des poutres continues avec un nombre de travées variable, de 1 à 4. La section et le matériau des travées sont supposés être homogènes, comme la poutre que nous avons considérée dans la section 6.2.1. La longueur de chaque travée est identique  $L = 14.6 m$ . La figure 6.2 présente la participation de l'énergie des cinq premiers modes à l'énergie totale de la structure pour l'ensemble des poutres considérées. La petite partie grise en haut des colonnes colorées représente l'énergie cinétique correspondante. Nous voyons que dans tous les cas, l'énergie de déformation élastique de la poutre est dominante.

En ce qui concerne l'énergie élastique, la participation du premier mode joue un rôle primordial pour le cas d'une poutre simple, avec un taux d'environ 96 %, la participation

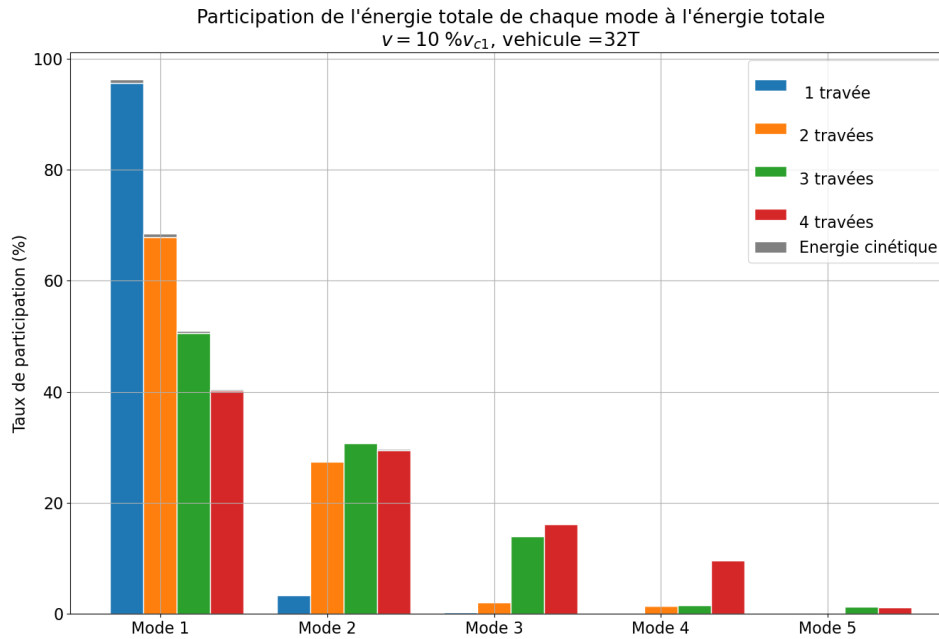


FIGURE 6.2 – Participation de l'énergie élastique à l'énergie totale en fonction du nombre de travées.

Nombre de travées	Taux de participation (%)				
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5
1	95.60	3.31	0.26	0.06	0.03
2	67.68	27.47	2.09	1.46	0.14
3	50.56	30.71	14.03	1.50	1.30
4	40.15	29.52	16.11	9.57	1.16

TABLEAU 6.3 – Participation de l'énergie élastique à l'énergie totale des 5 premiers modes en fonction du nombre de travées

du deuxième mode et du troisième mode valant respectivement 3.3% et moins de 0.3%. Lorsque le nombre de travées de la structure considérée augmente, le taux de participation du premier mode diminue rapidement. Quand la structure est comparable à une poutre continue à quatre travées, l'énergie élastique du mode fondamental ne contribue qu'à 40% de l'énergie totale, alors que la contribution des modes supérieurs devient importante. Les taux de participation détaillés des cinq premiers modes sont présentés dans le tableau 6.3.

La participation de l'énergie cinétique sur l'énergie totale est faible en gardant la même allure relative entre les modes que pour l'énergie élastique (Figure 6.3). La participation du premier mode est toujours la plus importante par rapport aux autres modes, surtout pour le cas d'une poutre bi-appuyée.

Nous avons déterminé la participation des énergies élastique et cinétique de chaque mode à l'énergie totale de la structure lors du passage d'un véhicule à quatre essieux. Quand la structure est de type poutre simple, le premier mode de vibration est largement dominant.

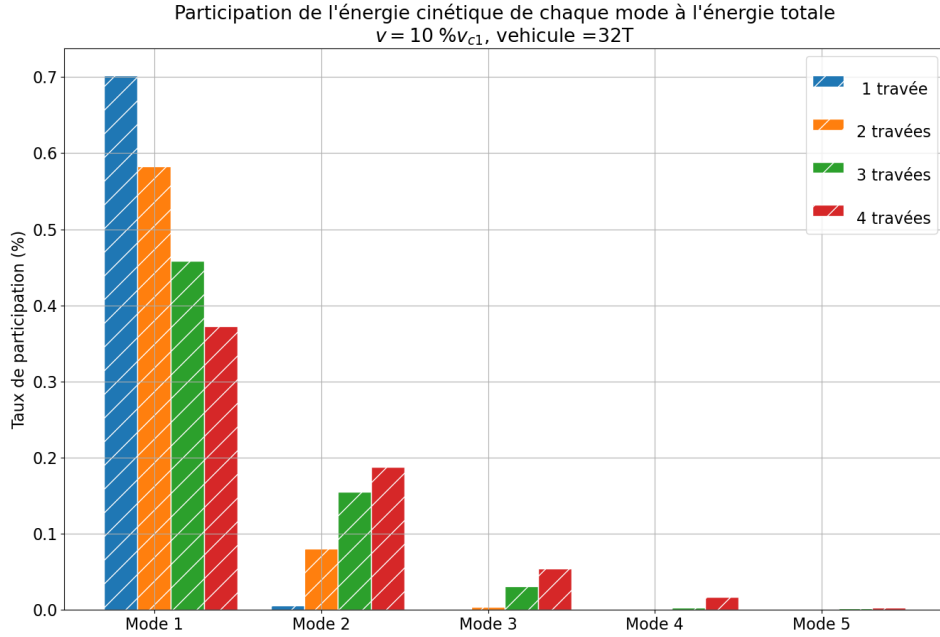


FIGURE 6.3 – Participation de l'énergie cinétique à l'énergie totale en fonction du nombre de travées.

Nous pouvons alors ignorer tous les autres modes. Cependant, la participation des modes supérieurs à la réponse finale devient de plus en plus importante avec l'augmentation du nombre de travées de la poutre.

Afin de s'affranchir de ce problème, nous proposons une autre approche. Cette approche dans le domaine fréquentiel est basée sur l'établissement d'une relation entre l'accélération et la déformation relevées en un même point de mesure.

### 6.3 Formulation à partir de la mesure de la déformation et de l'accélération

La relation entre l'accélération et la déformation au point  $x$  pour le  $n$ -ième mode de vibration (Equation 5.69) peut s'écrire de la façon suivante :

$$-\frac{\lambda_n^2 \phi_n^-(x) - \phi_n^+(x)}{\omega_n^2 \phi_n^-(x) + \phi_n^+(x)} \phi_n(x) \ddot{q}_n(t) + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \phi_n''(x) \dot{q}_n(t) + \phi_n''(x) q_n(t) = \phi_n''(x) q_n^s(t) \quad (6.8)$$

Dans laquelle :

- $\phi_n(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x) + C_n \sinh(\lambda_n x) + D_n \cosh(\lambda_n x)$  est la déformée modale ;
- $\phi_n^-(x) = A_n \sin(\lambda_n x) + B_n \cos(\lambda_n x)$ , avec  $(\phi_n^-)''(x) = -\lambda_n^2 \phi_n^-(x)$  ;
- $\phi_n^+(x) = C_n \sinh(\lambda_n x) + D_n \cosh(\lambda_n x)$ , avec  $(\phi_n^+)''(x) = \lambda_n^2 \phi_n^+(x)$ .

En notant  $\Psi_n(x) = [\phi_n^-(x) + \phi_n^+(x)] / [\phi_n^-(x) - \phi_n^+(x)]$ ,  $a_n(x, t) = \ddot{q}_n(t)$  l'accélération correspondant au mode  $n$ ,  $\varepsilon_n(x, t) = z_0 \phi_n''(x) q_n(t)$  la déformation correspondant au mode

$n$  et  $\dot{\varepsilon}_n(x, t) = z_0 \phi_n''(x) \dot{q}_n(t)$  sa dérivée par rapport au temps,  $\varepsilon_n^s(x, t) = z_0 \phi_n''(x) q_n^s(t)$  la composante quasi-statique de  $\varepsilon_n(x, t)$ , l'expression (6.8) peut être réécrite sous une forme condensée comme suit :

$$-\frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\Psi_n(x)} \cdot a_n(x, t) + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \cdot \frac{1}{z_0} \cdot \dot{\varepsilon}_n(x, t) + \frac{1}{z_0} \cdot \varepsilon_n(x, t) = \frac{1}{z_0} \cdot \varepsilon_n^s(x, t) \quad (6.9)$$

En prenant la transformée de Fourier de l'équation (6.9), nous obtenons alors :

$$-\frac{\lambda_n^2}{\omega_n^2} \cdot \frac{1}{\Psi_n(x)} \cdot \hat{a}_n(x, \omega) + \frac{2\zeta_n}{\omega_n} \cdot \frac{1}{z_0} \cdot i\omega \hat{\varepsilon}_n(x, \omega) + \frac{1}{z_0} \cdot \hat{\varepsilon}_n(x, \omega) = \frac{1}{z_0} \cdot \hat{\varepsilon}_n^s(x, \omega) \quad (6.10)$$

Nous en déduisons :

$$\hat{a}_n(x, \omega) = \frac{\Psi_n(x) \omega_n^2}{z_0 \lambda_n^2} \left[ \hat{\varepsilon}_n^d(x, \omega) + 2i\zeta_n \frac{\omega}{\omega_n} \hat{\varepsilon}_n(x, \omega) \right] \quad (6.11)$$

où  $\hat{\varepsilon}_n^d(x, \omega) = \hat{\varepsilon}_n(x, \omega) - \hat{\varepsilon}_n^s(x, \omega)$  est la transformée de Fourier de la composante dynamique de la déformation.

Remarquons que  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{EI/\rho S} = \lambda_n^2 \mathcal{R}$  (ici, nous notons  $\mathcal{R} = \sqrt{EI/\rho S}$  pour des raisons de simplification). Au voisinage de la fréquence de résonance  $\omega = \omega_n$ , la valeur de  $\mathcal{R}^2 = EI/\rho S$  peut être estimée par :

$$\mathcal{R}^2 \approx \frac{z_0}{\Psi_n \lambda_n^2} \frac{|\hat{a}_n(x, \omega)|}{|\hat{\varepsilon}_n^d(x, \omega) + 2i\zeta_n \hat{\varepsilon}_n(x, \omega)|} \Big|_{\omega=\omega_n} \quad (6.12)$$

Dans le cas où les modes de vibration sont bien distincts, nous avons  $a(x, \omega) \approx a_n(x, \omega)|_{\omega=\omega_n}$ . La valeur de  $\mathcal{R}^2$  peut être exploitée directement à partir des mesures d'accélération et de déformation. Ce cas d'étude est représenté sur la Figure 6.4a, qui présente les composantes de l'accélération exploitée à mi-travée d'une poutre simple suite au passage d'une force mobile sur la structure. La ligne rose représente la transformée de Fourier de l'accélération totale, alors que les lignes pointillées correspondent à la réponse de chaque mode individuel. Les lignes noires verticales pointillées représentent les fréquences naturelles de la poutre simple. L'accéléromètre étant placé au milieu de cette dernière, il coïncide alors avec les nœuds des modes pairs et les ventres des modes impairs. Nous voyons donc bien les modes 1, 3 et 5.

La Figure 6.4b représente la transformée de Fourier des accélérations correspondant à chaque mode et le module de leur somme, exploitées au milieu de la deuxième travée d'une poutre continue constituée de quatre travées. Les fréquences naturelles (représentées par les traits noirs verticaux) se rapprochent. En conséquence, un mode est influencé par d'autres modes. Nous voyons que les modes 2 et 3 sont fortement perturbés par leurs voisins. De ce fait, il suffit d'extraire le mode concerné avant d'estimer la valeur de  $\mathcal{R}^2$ , qui est proportionnelle à la rigidité en flexion  $EI$ . Dans la section qui suit, une méthode d'identification des paramètres modaux sera présentée ainsi que ses applications.

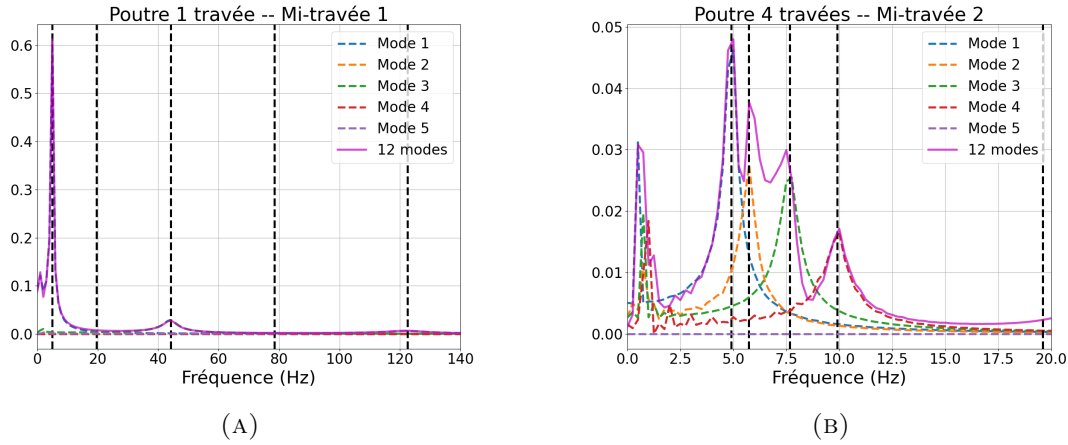


FIGURE 6.4 – Transformée de Fourier des composantes correspondant aux cinq premiers modes et de l'accélération totale pour le cas d'une poutre simple (gauche) et d'une poutre continue à 4 travées (droite).

## 6.4 Identification des paramètres modaux par méthode de fraction rationnelle des polynômes

Nous présentons maintenant une des méthodes directes qui permet d'extraire les propriétés modales d'un système à plusieurs degrés de liberté (d.d.l.). La méthode est basée sur l'ajustement de la courbe de la Fonction de Réponse en Fréquence (FRF), en décomposant cette dernière en fraction rationnelle de polynômes. La méthode a été présentée par Richardson [73] en 1982 et une autre version itérative de la méthode a par la suite été développée par Carcaterra [15]. Omar *et al.* [64] ont utilisé la même technique pour déterminer les paramètres depuis les mesures de FRFs.

Nous considérons tout d'abord un oscillateur de masse  $m$ , de raideur  $k$  et de coefficient d'amortissement visqueux  $c$ . Le système est sollicité par une force harmonique  $F(t) = F \cos(\omega t) = \text{Re}(F e^{i\omega t})$ . L'équation dynamique de l'oscillateur est :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F \cos(\omega t) \quad (6.13)$$

Ou encore sous la forme classique :

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = \frac{F}{m} \cos(\omega t) \quad (6.14)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  la pulsation propre de l'oscillateur et  $\zeta = c/(2m\omega_0)$  le taux d'amortissement.

La solution en régime stationnaire est de même pulsation que la force appliquée mais de phase différente :

$$x_p(t) = A_0 \cos(\omega t - \phi) = \text{Re}(X e^{i\omega t}) \quad (6.15)$$

où  $X = A_0 e^{-i\phi}$  est l'amplitude complexe.

L'équation (6.14) devient en considérant l'expression (6.15) et en terme d'amplitude du nombre complexe ( $\text{Re}(\star)$ ) :

$$(-\omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_0 + \omega_0^2)X = \frac{F}{m} \quad (6.16)$$

Le ratio entre la sortie ( $X(\omega)$ ) et l'entrée ( $F(\omega)$ ) du système est défini comme la fonction de réponse en fréquence (FRF). Dans le cas où la sortie est le déplacement, ce ratio s'appelle également la *Réceptance*. Nous avons :

$$\begin{aligned} H(\omega) &= \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1/m}{-\omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_0 + \omega_0^2} \\ &= \frac{\alpha}{-\omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_0 + \omega_0^2} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Le coefficient  $\alpha$  est appelé la constante modale et représente la hauteur du pic de la courbe  $H(\omega)$ . Dans ce cas, nous avons  $\alpha = 1/m$ , alors que la valeur du pic vaut  $\alpha/(2\zeta\omega_0^2)$ . La figure 6.5 représente la réceptance  $H(\omega)$  en fonction de la fréquence adimensionnelle  $\omega/\omega_0$  d'un oscillateur à 1 d.d.l. avec  $\zeta = 5\%$  et  $\alpha = 1$ . Quand la fréquence d'excitation est proche de zéro,  $H(\omega) \rightarrow \alpha/\omega_0^2$ , qui vaut 1 dans ce cas alors que lorsque  $\omega = \omega_0$ , nous avons  $H(\omega_0) = 10$ .

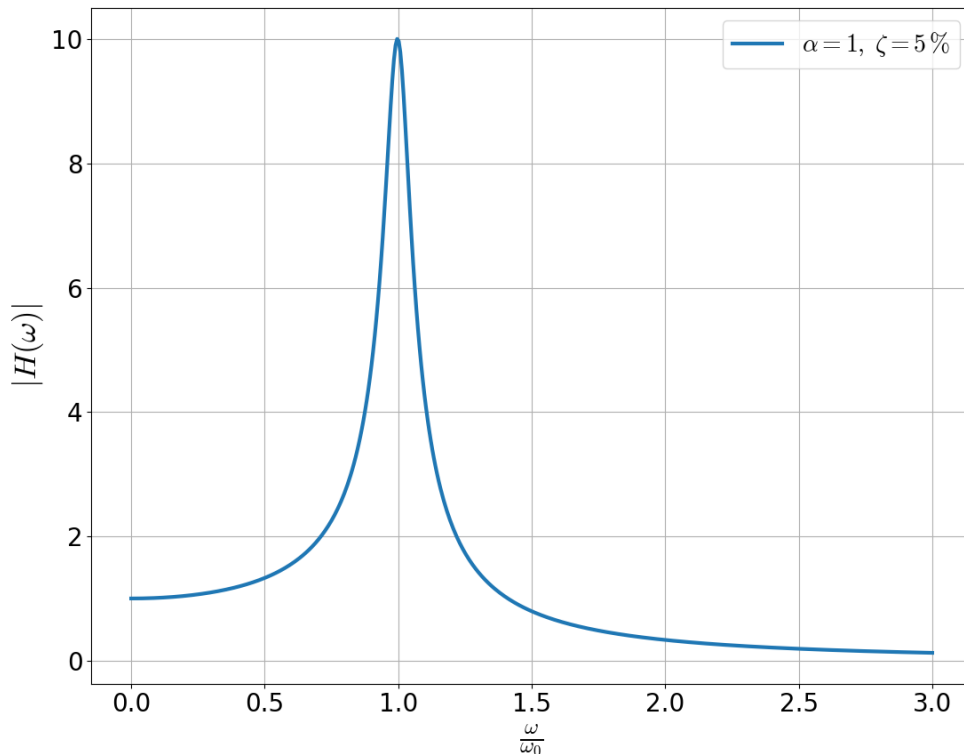


FIGURE 6.5 – Réceptance d'un oscillateur à 1 d.d.l.

L'équation (6.17) peut être décomposée sous la forme d'éléments simples :

$$H(\omega) = \frac{r}{i\omega - p} + \frac{r^*}{i\omega - p^*} \quad (6.18)$$

Où :

$$r = -i \frac{\alpha}{2\omega^d} \quad (6.19)$$

$$p = -\omega_0\zeta + i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma + i\omega^d \quad (6.20)$$

Dans l'équation (6.18), la fonction de réponse en fréquence  $H(\omega)$  est exprimée en fonction de deux nouveaux paramètres, le pôle  $p$  et le résidu  $r$  ainsi que leurs conjugués complexes  $p^*$  et  $r^*$ . Le pôle est un nombre complexe dont la partie réelle ( $\sigma = -\omega_0\zeta$ ) représente le taux de décroissance exponentielle de la vibration libre de cet oscillateur avec amortissement. La partie imaginaire du pôle,  $\omega^d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ , est la pseudo-pulsation propre de l'oscillateur. D'autre part, dans notre modèle d'oscillateur à 1 d.d.l., le résidu est un nombre purement imaginaire. Comme pour la constante modale, le module du résidu reflète également la hauteur du pic de la réponse FRF. Le maximum de la courbe  $H(\omega)$  est environ  $|r/\sigma|$ .

### 6.4.1 Réponse impulsionnelle

Dans cette partie, nous considérons la réponse de la structure soumise à un choc. Nous allons voir que la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle d'un oscillateur à 1 d.d.l. a la même forme que sa FRF. Ensuite, nous regarderons le système à plusieurs d.d.l.

#### Le cas d'un oscillateur à 1 d.d.l.

Supposons que l'oscillateur présenté est soumis à une impulsion unitaire  $F(t) = \delta(t)$ , où  $\delta(\star)$  est la fonction de Dirac. L'équation dynamique (6.13) devient :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \delta(t) \quad (6.21)$$

La réponse impulsionnelle du système est :

$$x(t) = \frac{1}{m\omega_d} \sin(\omega_d t) e^{-\zeta\omega_0 t}, (t \geq 0) \quad (6.22)$$

Nous prenons la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle :

$$\hat{x}(\omega) = \frac{1/m}{-\omega^2 + 2i\zeta\omega\omega_0 + \omega_0^2} \quad (6.23)$$

Cette expression est identique à la réceptance exprimée dans l'équation (6.17). Par conséquent, la fonction de réponse en fréquence (RFR) peut être considérée comme la transformé de Fourier de la réponse impulsionnelle.

#### Le cas d'une poutre continue

Considérons une poutre continue de section homogène  $S$  et de rigidité en flexion  $EI$  à  $N$  travées, soumise à un choc au point  $x = x_0$  (Figure 6.6). L'équation de mouvement de la poutre est :

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + E^* I \frac{\partial^5 u}{\partial t \partial x^4} + c \frac{\partial u}{\partial t} + \rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F \delta(x - x_0) \delta(t) \quad (6.24)$$

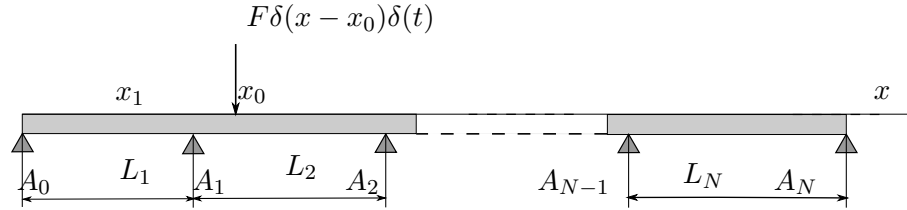


FIGURE 6.6 – Poutre continue soumise à une impulsion

Les cordonnées généralisées correspondant au mode  $n$  sont solutions de l'équation :

$$\ddot{q}_n(t) + 2\omega_n\zeta_n\dot{q}_n(t) + \omega_n^2q_n(t) = \frac{F\phi_n(x_0)}{\rho S}\delta(t) \quad (6.25)$$

Dans laquelle  $\phi_n(x)$  est la déformée modale, présentée dans le Chapitre 2, Section 2.3.3. La solution de l'équation (6.25) est :

$$q_n(t) = \frac{F\phi_n(x_0)}{\rho S\omega_n^d} \sin(\omega_n^d t) e^{-\zeta_n\omega_n t} \quad (6.26)$$

Considérons les réponses en un point  $x_1$  quelconque. La solution est obtenue par superposition des modes :

$$\begin{aligned} u(x_1, t) &= \sum_n q_n(t)\phi_n(x_1) \\ &= \frac{F}{\rho S} \sum_n \frac{\phi_n(x_0)\phi_n(x_1)}{\omega_n^d} \sin(\omega_n^d t) e^{-\zeta_n\omega_n t} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Nous remarquons alors que l'expression du terme sous la sommation est de même forme que la réponse impulsionnelle d'un oscillateur à 1 d.d.l. Comme le système est linéaire, la réceptance (FRF en déplacement) de la poutre est considérée comme la somme des FRFs de chaque oscillateur à 1 d.d.l. :

$$H_u(\omega) = \hat{u}(x_1, \omega) = \frac{F}{\rho S} \sum_n \frac{\phi_n(x_0)\phi_n(x_1)}{-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (6.28)$$

La FRF en déformation est la dérivée deuxième de  $H_u(\omega)$  par rapport à  $x$ , en multipliant par la distance  $z_0$  :

$$H_\varepsilon(\omega) = \hat{\varepsilon}(x_1, \omega) = z_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{u}(x, \omega) \Big|_{x=x_1} = z_0 \frac{F}{\rho S} \sum_n \frac{\phi_n(x_0)\phi_n''(x_1)}{-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (6.29)$$

L'accélération est la dérivée deuxième du déplacement par rapport au temps  $t$ . L'expression de l'accélération (FRF en accélération) est :

$$H_a(\omega) = \hat{a}(x_1, \omega) = (i\omega)^2 \hat{u}(x_1, \omega) = \frac{F}{\rho S} \sum_n \frac{-\omega^2 \phi_n(x_0)\phi_n(x_1)}{-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2} \quad (6.30)$$

Du point de vue paramétrique, la FRF de la déformation (Eq. 6.29) peut être également exprimée sous forme rationnelle :

$$H_\varepsilon(\omega) = \sum_n \frac{\alpha_n^\varepsilon}{-\omega^2 + 2i\zeta_n\omega_n\omega + \omega_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^M a_k \cdot (i\omega)^k}{\sum_{k=1}^N b_k \cdot (i\omega)^k}, \quad M < N \quad (6.31)$$



dans laquelle le polynôme du numérateur est de degré  $M$  alors que le dénominateur est une fonction polynôme d'ordre  $N$  paire. Dans notre cas, le nombre réel  $\alpha_n^\varepsilon$  est la constante modale correspondant au mode  $n$ . Dans le cas de la FRF en déformation, nous avons :

$$\alpha_n^\varepsilon = \frac{z_0 F}{\rho S} \phi_n(x_0) \phi_n''(x_1) \quad (6.32)$$

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, la réponse  $H_\varepsilon(\omega)$  peut s'exprimer sous forme de la somme d'éléments simples :

$$H_\varepsilon(\omega) = \sum_{k=1}^{N/2} \left( \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \right) \quad (6.33)$$

Les éléments simples sont constitués du pôle  $p_k$ , du résidu  $r_k$  et de leurs conjugués complexes  $r_k^*$  et  $p_k^*$ . Ces grandeurs indiquent les propriétés des paramètres modaux :

- Le pôle  $p_k$  contient les informations globales du système : la fréquence naturelle et le taux d'amortissement.

$$p_k = -\omega_k \zeta_k + i\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} = \sigma_k + i\omega_k^d \quad (6.34)$$

- Le résidu  $r_k$  est lié au maximum de la FRF du mode correspondant. C'est une propriété locale qui dépend des points d'excitation de la force et de mesure des réponses :

$$r_k = -i \frac{\alpha_k^\varepsilon}{2\omega_k^d} \quad (6.35)$$

Réciproquement, la fréquence naturelle et le taux d'amortissement peuvent être réestimés à partir du pôle  $p_k$  :

- La fréquence naturelle est le module du nombre complexe  $p_k$  :

$$\omega_k = |p_k| \quad (6.36)$$

- Le taux d'amortissement est déterminé à partir de la partie réelle du nombre complexe  $p_k$  :

$$\zeta_k = -\frac{\text{Re}(p_k)}{|p_k|} \quad (6.37)$$

A l'aide de la méthode des coefficients indéterminés (annexe D, équation D.9), la constante modale peut être également calculée à partir de la paire pôle – résidu ( $p_k, r_k$ ), exprimée par :

$$\alpha_k^\varepsilon = -2 [\text{Re}(r_k) \text{Re}(p_k) + \text{Im}(r_k) \text{Im}(p_k)] \quad (6.38)$$

Comme le résidu  $r_k$  est un nombre purement imaginaire (Eq. 6.35), l'expression 6.38 est équivalente à :

$$\alpha_k^\varepsilon = -2 [\text{Im}(r_k) \text{Im}(p_k)] \quad (6.39)$$

Les relations entre le pôle  $p_k$ , le résidu  $r_k$ , les propriétés dynamiques ( $\omega_k, \zeta_k$ ) et la constante modale (qui représente l'amplitude modale) sont présentées dans le tableau

Grandeur	Notation	Expression
Pôle	$p_k$	$\sigma_k + i\omega_k^d$
Résidu	$r_k$	$-i\frac{\alpha_k^\varepsilon}{2\omega_k^d}$
-----		
Fréquence naturelle	$\omega_k$	$ p_k $
Taux d'amortissement	$\zeta_k$	$-\text{Re}(p_k)/ p_k $
Constante modale	$\alpha_k^\varepsilon$	$-2[\text{Im}(r_k)\text{Im}(p_k)]$

TABLEAU 6.4 – Expressions des grandeurs de la réceptance

récapitulatif 6.4.

De la même façon, la fonction de réponse en accélération  $H_a(\omega)$  (accélération) (Eq. 6.30) est également exprimée sous forme rationnelle :

$$H_a(\omega) = \sum_n \frac{-\omega^2 \beta_n^a}{-\omega^2 + 2i\zeta_n \omega_n \omega + \omega_n^2} = \frac{\sum_{k=1}^N a_k \cdot (i\omega)^k}{\sum_{k=1}^N b_k \cdot (i\omega)^k} \quad (6.40)$$

Ici, l'ordre du numérateur est égal à celui du dénominateur, car le terme  $\omega^2$  apparaît dans les deux polynômes. L'accélération peut aussi être décomposée en éléments simples :

$$H_a(\omega) = q^a + \sum_{k=1}^{N/2} \left( \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \right) \quad (6.41)$$

Le terme  $q^a$  représente un choc initial à l'instant  $t = 0$  :  $q^a = \sum_n \beta_n^a$ . Les expressions de  $r_k$ ,  $p_k$ ,  $\alpha_k^\varepsilon$ ,  $\omega_k$  et  $\zeta_k$  sont présentées dans le tableau 6.5. Une fois le pôle et le résidu déterminés, nous pouvons retrouver la constante modale, la fréquence naturelle et le taux d'amortissement correspondants. Quant à la constante modale, sa valeur théorique vaut :

$$\alpha_k^{a-theo} = \frac{\omega_k^2 F}{\rho S} \phi_k(x_0) \phi_k(x_1) \quad (6.42)$$

Grandeur	Notation	Expression
Pôle	$p_k$	$\sigma_k + i\omega_k^d$
Résidu	$r_k$	$\omega_k \beta_k^a \left( -\zeta_k + i\frac{1-2\zeta_k^2}{2\sqrt{1-\zeta_k^2}} \right)$
-----		
Fréquence naturelle	$\omega_k$	$ p_k $
Taux d'amortissement	$\zeta_k$	$-\text{Re}(p_k)/ p_k $
Constante modale	$\alpha_k^a = \omega_k^2 \beta_k^a$	$2[\text{Re}(r_k)\text{Re}(p_k) + \text{Im}(r_k)\text{Im}(p_k)]$

TABLEAU 6.5 – Expressions des grandeurs de l'accélération

Les démonstrations détaillées permettant de mettre en évidence les expressions des grandeurs mentionnées pour les cas des FRF en déformation et en accélération se trouvent dans l'annexe D (Section D.1).

Dans les cas où la structure non-endommagée se comporte comme une poutre simple ou une poutre continue dont la longueur de chaque travée est identique, nous avons la relation suivante entre la courbure modale et la déformée modale du premier mode de vibration :

$$\phi_1''(x) = -\lambda_1^2 \phi_1(x) \quad (6.43)$$

où  $\lambda_1$  est le nombre d'onde du 1<sup>er</sup> mode.

Nous obtenons la première constante modale de la déformation (en valeur absolue) :

$$\alpha_1^\varepsilon = z_0 \frac{F}{\rho S} \phi_n(x_0) \phi_n''(x_1) = -z_0 \lambda_1^2 \frac{F}{\rho S} \phi_n(x_0) \phi_n(x_1) \quad (6.44)$$

De la même façon, nous déduisons la constante modale pour l'accélération (valeur absolue) :

$$\alpha_1^a = -\omega_1^2 \beta_1^a = -\omega_1^2 \frac{F}{\rho S} \phi_n(x_0) \phi_n(x_1) \quad (6.45)$$

La déformée modale du premier mode est nulle aux deux extrémités de la poutre et non nulle ailleurs. Nous prenons le rapport entre les deux constantes modales :

$$R_1 = \frac{\alpha_1^a}{\alpha_1^\varepsilon} = \frac{\omega_1^2}{z_0 \lambda_1^2} = \frac{1}{z_0} \lambda_1^2 \frac{EI}{\rho S} = \frac{v_{c,1}^2}{z_0} \quad (6.46)$$

Le ratio  $R_1$  nous permet de retrouver la première vitesse critique de la structure. De plus, il est proportionnel à la rigidité en flexion  $EI$ . Les exemples se trouvent dans la section 6.5.

### 6.4.2 Réponse à un chargement mobile

L'objectif de ce travail est d'identifier les modifications structurelles des ponts qui devraient pouvoir être détectées lors du passage des véhicules. Nous allons appliquer la même méthode d'identification des paramètres modaux dans les cas où les poutres sont soumises aux chargements mobiles. Tout d'abord, le cas d'une poutre simple soumise à une force ponctuelle est examiné. Ensuite, la méthode sera discutée et appliquée pour le cas d'une poutre continue.

#### Le cas d'une poutre simple

Nous reprenons le cas d'une poutre simple soumise à une force ponctuelle à vitesse constante dont les réponses sont explicitement données par des formules analytiques (Chapitre 5). La réponse en accélération de la poutre au point de mesure correspondant au mode  $n$  est la somme des deux composantes, l'une dite « particulière », induite par la force mobile et l'autre, dite « homogène », représentant la vibration libre de la poutre. Supposons que les réponses sont exploitées au point  $x = x_1$ , nous avons :

$$a_n(x_1, t) = a_n^p(x_1, t) + a_n^h(x_1, t) \quad (6.47)$$

La réponse particulière est donnée par :

$$a_n^p(x_1, t) = \frac{2P}{\rho LS} \frac{\sin(\lambda_n x_1)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \left( \widetilde{A}_n \sin(\Omega_n t) + \widetilde{B}_n \cos(\Omega_n t) \right) \quad (6.48)$$

La réponse homogène est donnée par :

$$a_n^h(x_1, t) = \frac{2P}{\rho LS} \frac{\sin(\lambda_n x_1)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \left( \widetilde{\alpha}_n \sin(\omega_n^d t) + \widetilde{\beta}_n \cos(\omega_n^d t) \right) e^{-i\omega_n \zeta_n t} \quad (6.49)$$

Les expressions analytiques de  $\widetilde{A}_n$ ,  $\widetilde{B}_n$ ,  $\widetilde{\alpha}_n$ ,  $\widetilde{\beta}_n$  peuvent être retrouvées dans le tableau 5.1. Ces coefficients ne dépendent que des facteurs de vitesse  $\gamma_n = v/v_{c,n}$  et du taux d'amortissement  $\zeta_n$ . A partir du tableau, nous constatons que la valeur maximale de la composante homogène est environ  $1/\gamma_n$  fois plus grande que le maximum de la composante particulière ( $\gamma_n \leq 0.1$ ,  $\forall n$ ). De ce fait, la composante homogène est dominante.

Dans ce cas, nous ne considérons que la composante homogène de l'accélération, qui peut être réécrite sous la forme :

$$a_n^h(t) = \left( \alpha_n \sin(\omega_n^d t) + \beta_n \cos(\omega_n^d t) \right) e^{-i\omega_n \zeta_n t} \quad (6.50)$$

La transformée de Fourier de  $a_n^h$  est :

$$\hat{a}_n^h(\omega) = \frac{\omega_n^d \alpha_n + (i\omega + \zeta_n \omega_n) \beta_n}{-\omega^2 + 2i\zeta_n \omega_n \omega + \omega_n^2} \quad (6.51)$$

Nous reprenons la même démarche que pour les cas de réponses impulsionnelles du système. La transformée de Fourier de l'accélération est réécrite sous forme d'éléments simples :

$$\hat{a}_n^h(\omega) = \sum_k \left( \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \right) \quad (6.52)$$

Les expressions des pôles, des résidus, des constantes modales, fréquences naturelles, taux d'amortissement se trouvent dans le tableau 6.6.

Grandeur	Notation	Expression
Pôle	$p_k$	$\sigma_k + i\omega_k^d$
Résidu	$r_k$	$(\beta_k - i\alpha_k)/2$
Fréquence naturelle	$\omega_k$	$ p_k $
Taux d'amortissement	$\zeta_k$	$-\text{Re}(p_k)/ p_k $
Constante modale	$\alpha_k^a$	$-2 [\text{Re}(r_k) \text{Re}(p_k) + \text{Im}(r_k) \text{Im}(p_k)] + 2i \text{Re}(r_k)  p_k $

TABLEAU 6.6 – Expressions des grandeurs de l'accélération

Les démonstrations se trouvent également à l'annexe D, dans la Section D.2 (Équations D.27–D.36).

## Identification de l'endommagement à partir des mesures d'accélération et de déformation

A partir de l'équation (6.11), remarquons que  $\omega_n = \lambda_n^2 \mathcal{R}$ . Au point de mesure  $x = x_1$ , nous avons alors :

$$\hat{a}_n(x_1, \omega) = \frac{\Psi_n(x_1) \lambda_n^2 \mathcal{R}^2}{z_0} \left[ \hat{\varepsilon}_n^d(x_1, \omega) + 2i\zeta_n \frac{\omega}{\omega_n} \hat{\varepsilon}_n(x_1, \omega) \right] \quad (6.53)$$

Si la structure considérée est une poutre simple, nous avons :  $\Psi_n(x) = 1, \forall x$ .

Nous essayons d'approcher l'accélération par deux approches : avec et sans le terme d'amortissement :

$$\varepsilon^{app1} = \hat{\varepsilon}^d(x_1, \omega_n) \quad (6.54)$$

et :

$$\varepsilon^{app2} = \hat{\varepsilon}^d(x_1, \omega_n) + 2i\zeta_n \hat{\varepsilon}_n(x_1, \omega_n) \quad (6.55)$$

Autours des pics de résonance, c.-à.d.  $\omega \approx \omega_n$ , le rapport entre le pic d'accélération et de déformation est proportionnel à  $\mathcal{R}^2 \sim EI$  :

$$\frac{\hat{a}_n(x_1, \omega_n)}{\hat{\varepsilon}_n^{app1}(x_1, \omega_n)} \sim \frac{\hat{a}_n(x_1, \omega_n)}{\hat{\varepsilon}_n^{app2}(x_1, \omega_n)} \sim \left( \frac{EI}{\rho S} \right) \frac{\lambda_n^2 \Psi_n(x_1)}{z_0} \quad (6.56)$$

Ce rapport est proportionnel à la rigidité en flexion de la structure qui est la propriété que nous avons utilisée pour modéliser l'endommagement. Ces deux approches seront discutées dans la section 6.5.

## 6.5 Applications numériques

Dans cette section, nous allons considérer quelques exemples numériques de la méthode proposée. Tout d'abord, nous considérons les réponses impulsionnelles des poutres simple et continue. Les structures soumises aux chargements mobiles seront examinées par la suite.

### 6.5.1 Poutres soumises aux chocs

Dans un premier temps, nous considérons une poutre simple de longueur  $L = 15 m$ , de section rectangulaire de largeur  $b = 35 cm$  et de hauteur  $h = 65 cm$ . La poutre est constituée de béton ( $E = 35 GPa$ ,  $\rho = 3500 kg/m^3$ ). Un choc d'intensité  $P = 1000 N$  est appliqué au point  $x_0 = 0.45L$ . Le point d'excitation des données est  $x_1 = 0.35L$  (Figure 6.7).

Nous supposons que le taux d'amortissement de la poutre est  $\zeta = 5\%$  pour tous les modes. Les 5 premiers modes sont retenus. Afin de simplifier les calculs, nous admettons que  $z_0 = 1$ . La fréquence d'échantillonnage vaut  $f_e = 200 Hz$ .

Les paramètres modaux sont estimés pour les trois premiers modes avec une méthode d'ajustement de courbe de réponse en fréquence (FRF) en utilisant des polynômes orthogonaux [73] à l'aide de MATLAB. La figure 6.8 présente les courbes approchées (cercles rouges en pointillé) et les courbes théoriques (lignes bleues) pour la déformation (Fig. 6.8a) et pour l'accélération (Fig. 6.8b). Nous voyons que les courbes sont pratiquement confondues.

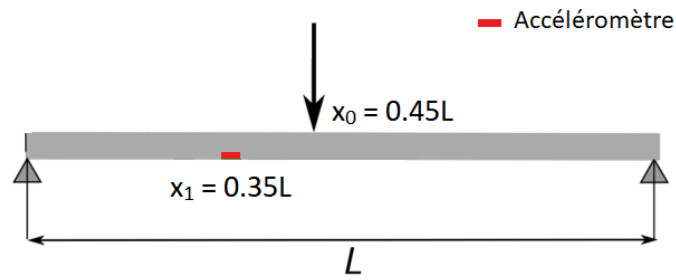


FIGURE 6.7 – Poutre simple soumise à un choc

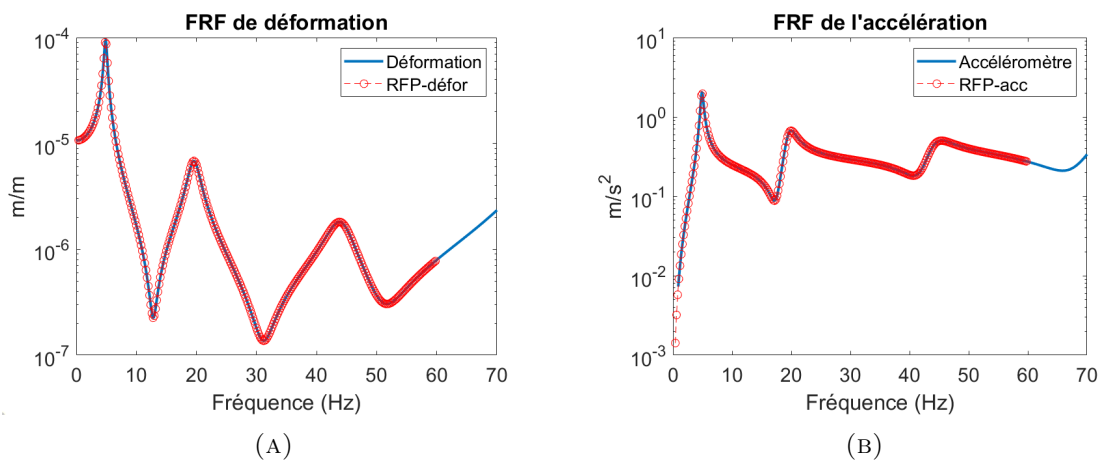


FIGURE 6.8 – La fonction de réponse en fréquence de déformation (gauche) et d'accélération (droite) d'une poutre simple.

Le tableau 6.9 présente les valeurs estimées des paramètres modaux à l'aide de MATLAB en comparaison avec leurs valeurs théoriques. Nous voyons que ces valeurs sont identiques.

Mode		Déformation			Accélération		
		$f_n$ (Hz)	$\zeta_n$	$\alpha_n^\varepsilon$ ( $\times 10^{-3}$ )	$f_n$ (Hz)	$\zeta_n$	$\alpha_n^a$
1	Valeur estimée	4.90	0.05	9.05	4.90	0.05	195.67
	Valeur de référence	4.90	0.05	9.05	4.90	0.05	195.67
2	Valeur estimée	19.61	0.05	10.28	19.61	0.05	889.38
	Valeur de référence	19.61	0.05	10.28	19.61	0.05	889.38
3	Valeur estimée	44.11	0.05	12.90	44.11	0.05	2510.3
	Valeur de référence	44.11	0.05	12.90	44.11	0.05	2510.3

FIGURE 6.9 – Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des constantes modales de la déformation et de l'accélération.

Nous considérons maintenant une poutre continue à quatre travées dont chaque travée a les mêmes caractéristiques que la poutre simple considérée. Le point d'excitation et le point

de mesure sont confondus, situés au tiers de la deuxième travée. Les courbes approchées des FRFs en déformation et en accélération sont présentées dans la figure 6.10. Les valeurs estimées et les valeurs de référence des paramètres modaux sont présentées dans le Tableau 6.11.

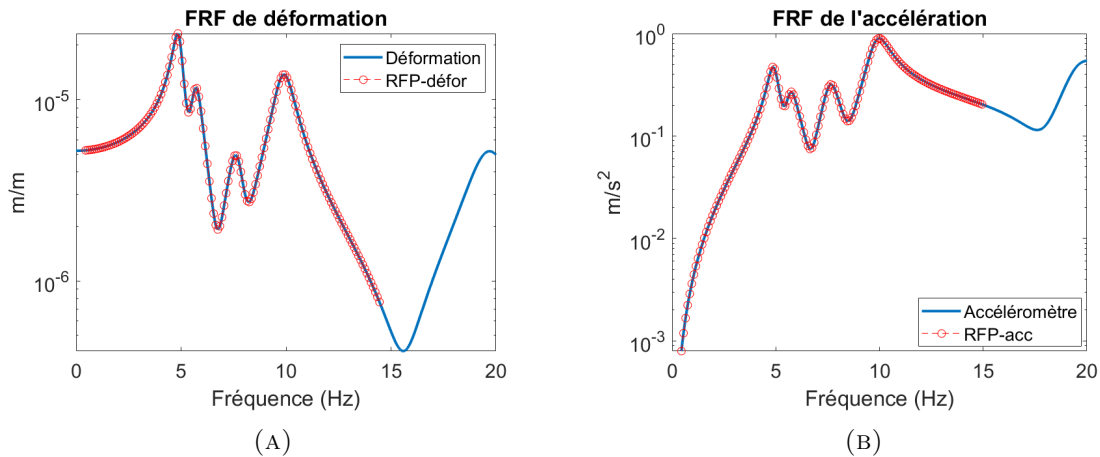


FIGURE 6.10 – La fonction de réponse en fréquence de déformation (gauche) et d'accélération (droite) d'une poutre continue à 4 travées.

Mode		Déformation			Accélération		
		$f_n$ (Hz)	$\zeta_n$	$\alpha_n^\varepsilon$ ( $\times 10^{-3}$ )	$f_n$ (Hz)	$\zeta_n$	$\alpha_n^a$
1	Valeur estimée	4.90	0.05	1.93	4.90	0.05	41.69
	Valeur de référence	4.90	0.05	1.93	4.90	0.05	41.69
2	Valeur estimée	5.71	0.05	1.24	5.71	0.05	25.95
	Valeur de référence	5.71	0.05	1.24	5.71	0.05	25.95
3	Valeur estimée	7.66	0.05	0.86	7.66	0.05	64.68
	Valeur de référence	7.66	0.05	0.86	7.66	0.05	64.68

FIGURE 6.11 – Poutre à 4 travées : Valeurs estimées et de référence des constantes modales de la déformation et de l'accélération.

Les valeurs estimées sont également identiques aux valeurs de référence.

## 6.5.2 Poutres soumises aux chargements mobiles

### Poutre simple soumise à une force mobile

Considérons la poutre simple prise dans l'exemple précédent, soumise à une force mobile d'intensité  $P = 10 \text{ kN}$  qui traverse la structure à une vitesse constante  $v = 5 \text{ m/s}$ , soit 3.4% de la première vitesse critique de la poutre. Un accéléromètre est placé à  $x_0 = L/4$ . Les trois premiers modes de la poutre sont considérés (Figure 6.12).

Le cas d'une poutre simple soumise à une force mobile est traité ici parce que les solutions sont données par des expressions analytiques. La figure 6.13 présente la Transformée

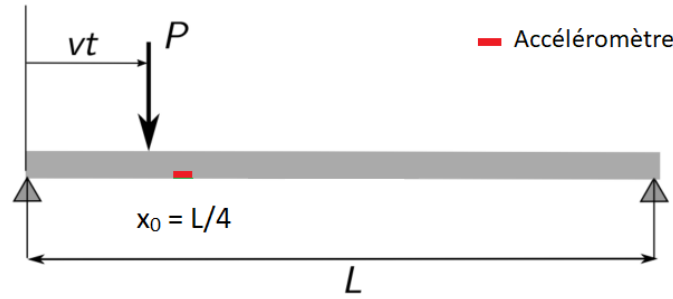


FIGURE 6.12 – Poutre simple soumise à une force mobile

de Fourier (TF) numérique calculée à l'aide de Python des accélérations « totales » correspondant à chaque mode de vibration (courbes continues avec la légende « FFT-mode  $k$  » où  $k = 1, 2, 3$ .) en comparaison avec la TF de composante homogène de chaque mode, donnée par l'expression analytique (6.51) (en pointillé, avec la légende « Analytique  $k$  » où  $k$  est le numéro du mode correspondant). Nous observons un premier pic « petit » de la TF numérique de l'accélération totale, qui est très proche de zéro et qui se trouve à  $F_1 = 0.17 Hz$  alors que la fréquence fondamentale de la poutre est  $4.9 Hz$ . Le rapport entre ces deux fréquences est aussi celui entre la vitesse du chargement et la première vitesse critique de la structure :  $F_1/f_1 = v/v_{c1} = \gamma_1 \approx 3.4 \%$ . Nous remarquons le même phénomène avec les courbes de la TF numérique pour les modes numéro 2 et 3. En effet, le premier pic de ces courbes représente la composante particulière de la réponse. Cette composante reflète la déformée modale du mode propre correspondant de la poutre, qui est une fonction sinusoïdale de pulsation liée à la vitesse du véhicule :  $\Omega_n = \lambda_n v$ , avec  $\lambda_n = n\pi/L$ . Le premier « petit » pic du mode  $n$  représente la fréquence liée à la vitesse  $F_n = \Omega_n/(2\pi)$ , tandis que le deuxième « grand » pic est la fréquence propre du mode considéré  $f_n = \omega_n/(2\pi) = \lambda_n^2 \sqrt{EI/(\rho S)}/(2\pi)$ . Nous observons que, hors de la zone des basses fréquences, les courbes obtenues par la transformée de Fourier numérique (calculées à l'aide de Python) et par les formules analytiques (Eq. 6.51) sont confondues.

Les paramètres modaux sont rétro-estimés par la méthode de fraction rationnelle des polynômes (FRP) à l'aide de MATLAB. Nous comparons ensuite les valeurs estimées des fréquences propres, des taux d'amortissement, des modules de la constante modale et du résidu avec leurs valeurs de référence pour les trois modes considérés. Nous étudions 2 cas d'étude :

- Cas 1 : L'accélération calculée par les formules analytiques présentées dans le Tableau 5.1 comme les entrées ;
- Cas 2 : Un bruit d'intensité de 2 % de l'amplitude maximale du signal est ajouté.

La constante modale du mode  $k$  est le numérateur de la fraction à droite de l'expression (6.51). Son module est calculé par :

$$|\alpha_k^a| = \sqrt{\left(\alpha_k \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} + \beta_k \omega_k \zeta_k\right)^2 + (\beta_k \omega_k)^2} \quad (6.57)$$

dans laquelle  $\alpha_k, \beta_k$  sont respectivement les coefficients des fonctions sinus ( $\sin(\omega_k^d t)$ )



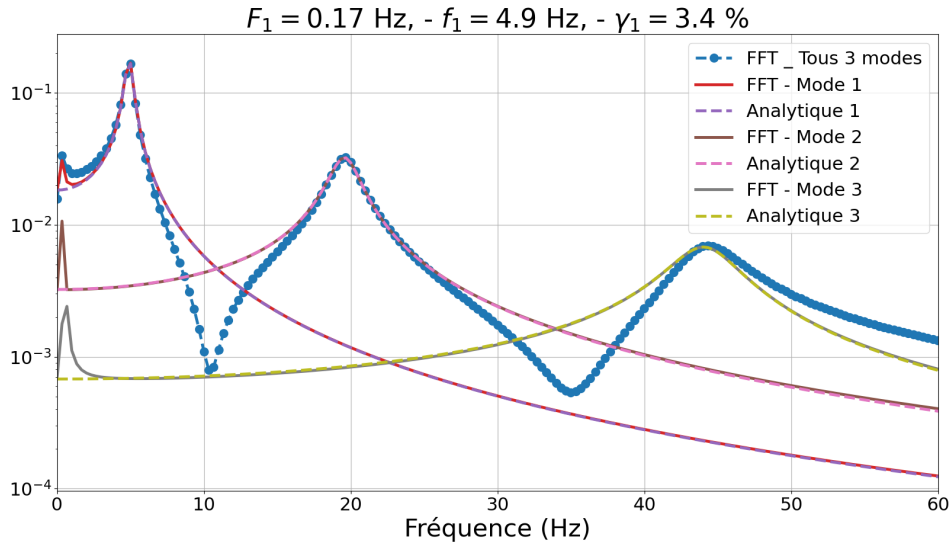


FIGURE 6.13 – Poutre simple : Transformées de Fourier numériques et analytiques des accélérations obtenues à mi-travée lors du passage d'une force ponctuelle.

et cosinus ( $\cos(\omega_k^d t)$ ) de la composante homogène de l'accélération. Les expressions des coefficients  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  se trouvent à partir des équations (6.49) et (6.50) :

$$\alpha_k = \frac{2P}{\rho SL} \sin(\lambda_k x) \frac{(1 - \gamma_k^2 + 2\zeta_k^2 \gamma_k^2) \gamma_k}{[(1 - \gamma_k^2)^2 + (2\zeta_k \gamma_k)^2] \sqrt{1 - \zeta_k^2}} \quad (6.58)$$

$$\beta_k = \frac{2P}{\rho SL} \sin(\lambda_k x) \frac{-2\zeta_k \gamma_k^3}{(1 - \gamma_k^2)^2 + (2\zeta_k \gamma_k)^2}$$

Le module du résidu  $r_k$  est déterminé à partir du tableau 6.6 :

$$|r_k| = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} \quad (6.59)$$

Nous observons que le module du résidu est la moitié de l'amplitude de la fonction sinusoïdale qui décrit l'accélération homogène du système non amorti ( $\zeta_k = 0$ ). Cette amplitude peut être calculée analytiquement par :

$$A_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = \frac{2P}{\rho SL} \frac{|\sin(\lambda_k x_0)|}{\sqrt{(1 - \gamma_k^2)^2 + (2\zeta_k \gamma_k)^2}} \frac{\gamma_k}{\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \quad (6.60)$$

où  $\lambda_k = k\pi/L$  est le nombre d'onde et  $\gamma_k = v/v_{c,k} = \Omega_k/\omega_k$  est le facteur de vitesse du mode  $k$ .

Une première visualisation générale est présentée dans la Figure 6.14. L'ajout de bruits au signal original entraîne des perturbations dans la Transformée de Fourier du signal bruité. De ce fait, un grand nombre de pôles est demandé afin de réduire ces fluctuations. Dans le premier cas, la courbe approchée est en bon accord avec la réponse en fréquence sur toute la longueur de l'intervalle considéré alors que dans le deuxième cas, ces deux courbes sont pratiquement confondues au voisinage des pics principaux de la réponse en fréquence (FRF-accélération).

Les résultats plus détaillés sont présentés dans les tableaux 6.7 et 6.8. Les valeurs de référence sont calculées à l'aide des équations présentées dans le tableau 6.6 et des expressions (6.57), (6.59). Les fréquences naturelles des trois premiers modes sont bien déterminées dans les deux cas (avec et sans bruits ajoutés). Les taux d'amortissement estimés sont relativement en bon d'accord avec leurs valeurs de référence. Les écarts des modules de constante modale et de résidu sont pratiquement identiques. Dans les deux cas, cet écart est plus grand pour le premier mode (autour de 2.5 % pour le cas 1 et environ 5 % pour le cas 2). De manière générale, les écarts des constantes modales (et des résidus) sont plus grands si le signal d'entrée est bruité (cas 2) que ceux estimés pour le cas du signal sans bruit (cas 1).

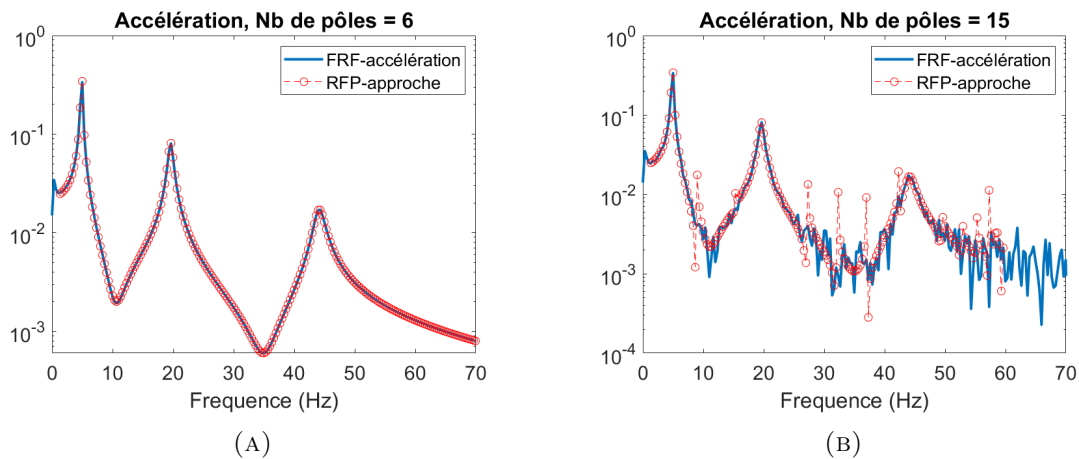


FIGURE 6.14 – Poutre simple soumise à une force mobile : FRF en accélération sans bruits (gauche) et avec bruits (droite).

Grandeur		Mode 1	Mode 2	Mode 3
Fréquence (Hz)	Val. estimée	4.91	19.61	44.11
	Val. de réf.	4.90	19.61	44.11
	Ecart (%)	0.10	0.00	0.00
Taux d'amortissement (%)	Val. estimée	1.95	1.99	2.00
	Val. de réf.	2.00	2.00	2.00
	Ecart (%)	2.56	0.18	0.00
Module de la constante modale	Val. estimée	17.84	49.04	52.08
	Val. de réf.	17.38	49.11	52.08
	Ecart (%)	2.67	0.14	0.00
Module du résidu	Val. estimée	0.289	0.199	0.094
	Val. de réf.	0.282	0.199	0.094
	Ecart (%)	2.30	0.14	0.00

TABLEAU 6.7 – Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des paramètres sans la prise en compte des bruits.

Grandeur		Mode 1	Mode 2	Mode 3
Fréquence (Hz)	Val. estimée	4.90	16.62	44.07
	Val. de réf.	4.90	19.61	44.11
	Ecart (%)	0.06	0.05	0.09
Taux d'amortissement (%)	Val. estimée	2.03	2.04	2.07
	Val. de réf.	2.00	2.00	2.00
	Ecart (%)	1.74	1.77	3.43
Module de la constante modale	Val. estimée	18.32	49.48	53.90
	Val. de réf.	17.38	49.11	52.08
	Ecart (%)	5.41	0.75	3.48
Module du résidu	Val. estimée	0.297	0.201	0.097
	Val. de réf.	0.282	0.199	0.094
	Ecart (%)	5.07	0.73	3.54

TABLEAU 6.8 – Poutre simple : Valeurs estimées et de référence des paramètres avec bruits 2 % de l'amplitude maximale du signal.

### Poutre continue soumise à des chargements mobiles

Considérons maintenant une poutre continue à deux travées, la longueur de chacune étant égale à 15 m. Les propriétés de la poutre restent les mêmes que celles de la poutre simple considérée. Une zone endommagée de longueur 2 m est présentée sur la première travée qui est modélisée par une réduction de la valeur du module d'élasticité  $\Delta E$  variable. Sa position est également variable. (Figure 6.15).

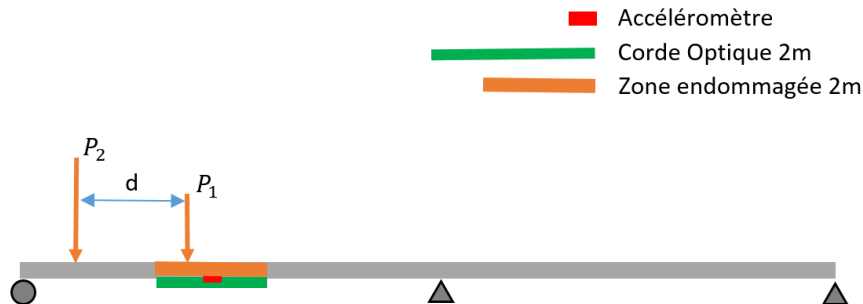


FIGURE 6.15 – Poutre continue à deux travées soumise aux chargements mobiles

Le chargement mobile peut être ponctuel ou en deux points (véhicule à deux essieux). L'intensité des forces est :  $P_1 = 10 \text{ kN}$ ,  $P_2 = 30 \text{ kN}$ . La distance entre les deux forces vaut 4 m. Dans les deux cas, la force traverse la poutre à vitesse constante  $v = 5 \text{ m/s}$ . Les données sont exploitées au milieu de la première travée de la poutre continue (corde optique de longueur 2 m et accéléromètre indiqués sur la figure 6.15).

Nous utilisons 2 approches pour estimer l'accélération totale dans le domaine fréquentiel :  
— Approche 1 : Sans le terme d'amortissement. Nous avons :

$$\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega) = \hat{\varepsilon}^d(\omega) \quad (6.61)$$

— Approche 2 : Avec le terme d'amortissement. Nous avons :

$$\hat{\varepsilon}^{(2)}(\omega) = \hat{\varepsilon}^d(\omega) + 2i\zeta_n \hat{\varepsilon}(\omega) \quad (6.62)$$

Nous calculons le rapport entre les deux constantes modales de la déformation « approchée » et de l'accélération, qui représente la hauteur des pics de résonance :

$$\frac{|\alpha_n^a|}{|\alpha_n^\varepsilon|} \sim \frac{|r_n^a|}{|r_n^\varepsilon|} \simeq \left( \frac{EI}{\rho S} \right) \frac{\lambda_n^2 \Psi_n}{z_0} \quad (6.63)$$

Lorsque la structure est non-endommagée, la valeur du rapport entre les deux constantes modales (ou résidus) est donnée par l'expression (6.63). Nous considérons le cas de la poutre saine soumise à une force mobile ponctuelle  $P_1$ . La figure 6.16 représente la transformée de Fourier de l'accélération, de la déformation dynamique (approche 1) et de la déformation dynamique avec le terme de correction lié à l'amortissement (approche 2), ainsi que leurs courbes approchées estimées par la méthode de fraction rationnelle des polynômes. Nous observons qu'à partir de 2 Hz, les courbes qui représentent les deux approches sont confondues.

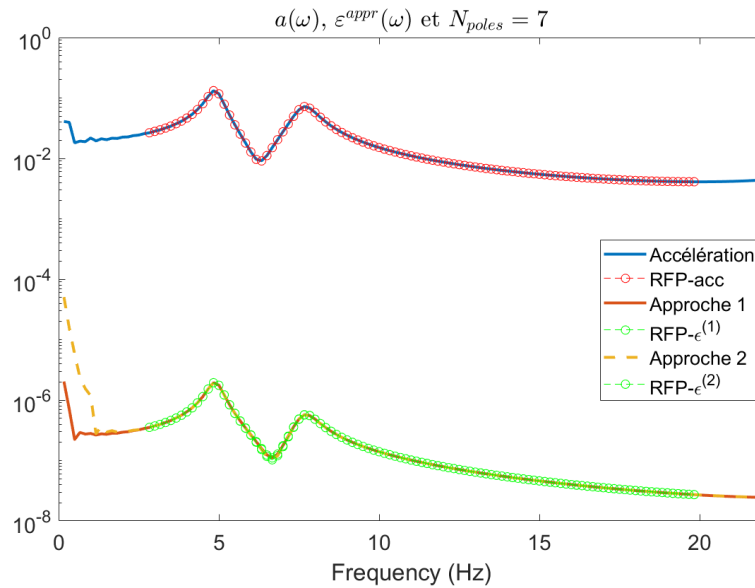


FIGURE 6.16 – Poutre à deux travées soumise à une force mobile : TF de l'accélération et des deux approches par déformation ( $\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega)$  et  $\hat{\varepsilon}^{(2)}(\omega)$ ).

Le tableau 6.9 présente la comparaison détaillée entre les valeurs estimées et celles de référence des rapports entre les modules des constantes modales (et des résidus) de l'accélération et des déformations (dynamiques) calculées par les deux approches pour les deux premiers modes de vibration. Les valeurs de référence sont calculées à l'aide de l'expression (6.63). Avec l'approche 1, le rapport entre les résidus est plus proche des valeurs de référence que ceux des constantes modales, tandis que les rapports de ces deux paramètres semblent stable dans l'approche 2 (avec la prise en compte de l'amortissement). Lorsque les rapports d'un seul paramètre (constante modale ou résidu) sont considérés, l'approche 2 donne des valeurs estimées plus précises que l'approche 1.

Dans ce qui suit, nous comparons les deux approches mentionnées avec une étude paramétrique de l'endommagement. Le rapport entre les résidus de l'accélération et de

Rapport ( $ms^{-2}$ )		Mode 1		Mode 2	
		Appr1 $\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega)$	Appr2 $\hat{\varepsilon}^{(2)}(\omega)$	Appr1 $\hat{\varepsilon}^{(1)}(\omega)$	Appr2 $\hat{\varepsilon}^{(2)}(\omega)$
	<b>Valeur de référence (<math>\times 10^3</math>)</b>	<b>66.53</b>		<b>128.40</b>	
Constante modale ( $ \alpha_n^a / \alpha_n^\varepsilon $ )	Valeur estimée ( $\times 10^3$ )	67.25	66.65	130.95	129.76
	Ecart (%)	1.08	0.18	1.98	1.06
Résidu ( $ r_n^a / r_n^\varepsilon $ )	Valeur estimée ( $\times 10^3$ )	66.91	66.65	130.30	129.77
	Ecart (%)	0.57	0.18	1.48	1.06

TABLEAU 6.9 – Poutre à deux travées : Valeurs estimées et de référence des rapports des modules des constantes modales et des résidus de l'accélération et de la déformation dynamique par deux approches.

la déformation approchée dans un même mode de vibration ( $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$ ) sera calculé. Nous traitons alors deux cas d'étude :

- Cas 1 : L'endommagement est fixé au milieu de la première travée. La réduction de la valeur du module de Young varie de 0 (structure saine) à 50 %.
- Cas 2 : La réduction de la valeur du module de Young est fixée à 30 %. La position du centre de la zone endommagée est variable.

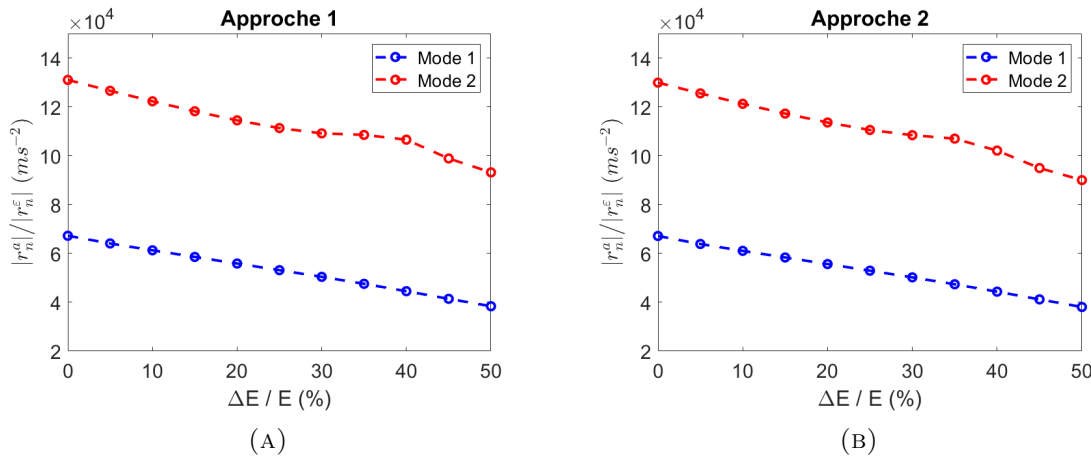


FIGURE 6.17 – Rapport entre deux résidus en fonction de la réduction de la valeur du module de Young  $\Delta E$ . Cas 1 : Sans prise en compte de l'amortissement (à gauche) et Cas 2 : avec amortissement (à droite).

La figure 6.17 présente les résultats du premier cas d'étude. Les deux approches donnent des résultats qui sont très proches. Nous observons que le rapport  $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$ ,  $k = 1, 2$ , varie linéairement en fonction de la réduction de la valeur du module de Young.

Les résultats du 2<sup>e</sup> cas d'étude sont présentés dans la figure 6.18. Nous remarquons que la valeur du ratio  $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$  est modifiée lorsqu'au moins une partie de la zone endommagée est couverte par la corde optique. Les deux approches donnent pratiquement les mêmes résultats. Lorsque le taux d'amortissement de la structure n'est pas connu, nous pouvons obtenir des résultats avec un niveau de précision suffisant avec l'utilisation de la première approche.

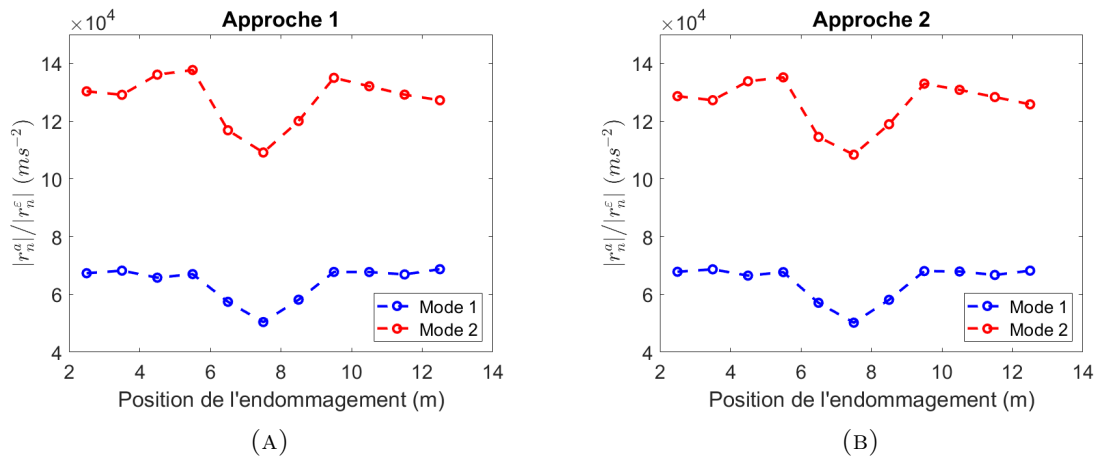


FIGURE 6.18 – Rapport entre deux résidus en fonction de la position du centre de la zone endommagée. Cas 1 : Sans prise en compte de l'amortissement (à gauche) et Cas 2 : avec amortissement (à droite).

Nous considérons maintenant le passage d'un véhicule à deux essieux sur la structure. Si nous prenons la transformée de Fourier de la totalité du signal, le résultat apparaît très bruité. Cependant, lorsque le signal est tronqué de manière qu'il présente uniquement l'intervalle où le véhicule reste totalement sur la poutre, ce résultat devient plus lisse. La transformée de Fourier calculée est donc glissante (Figure 6.19).

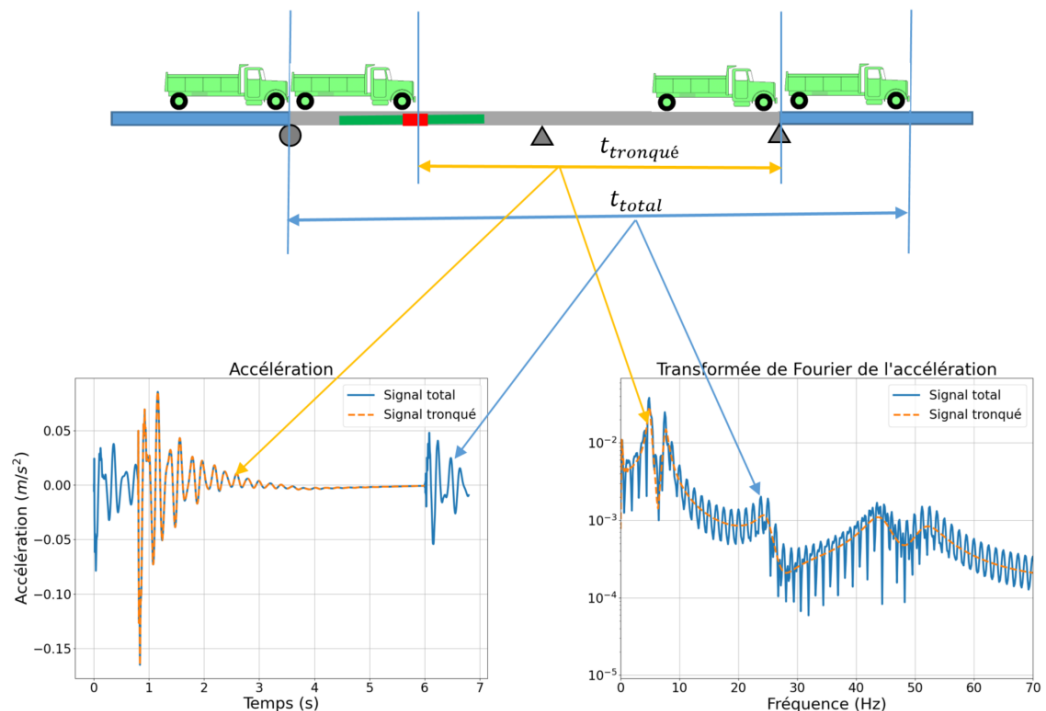


FIGURE 6.19 – Signaux total et tronqué de l'accélération mesurée au milieu de la première travée et leurs Transformées de Fourier.

Nous utilisons ensuite les signaux tronqués ( $\varepsilon^d(t)$  et  $a(t)$ ) pour estimer le rapport  $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$ . Les résultats sont présentés dans la Figure 6.20. Comme les deux approches donnent quasiment les mêmes résultats, nous utilisons seulement l'approche 1.

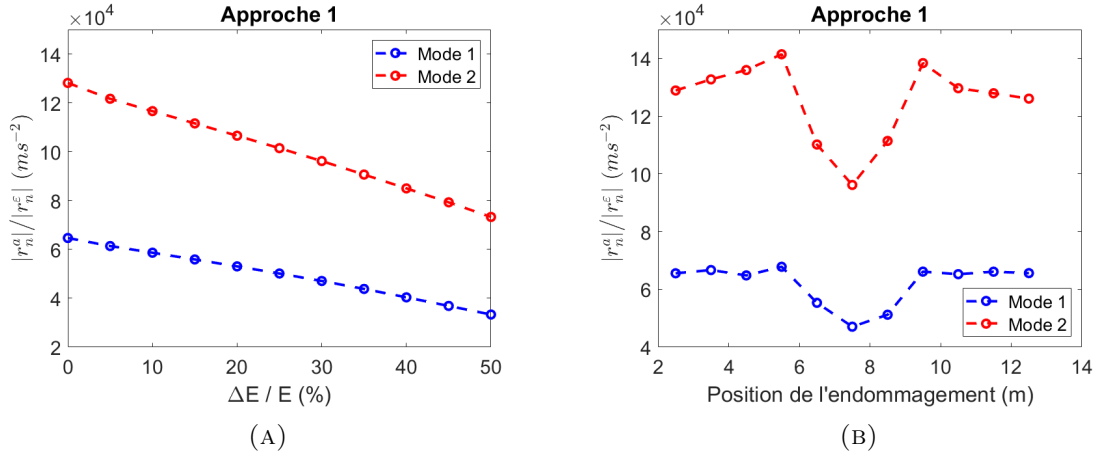


FIGURE 6.20 – Rapport entre deux résidus ( $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$ ) en fonction des caractéristiques de l'endommagement. Cas 1 : Localisation fixée,  $\Delta E$  variable (à gauche) et Cas 2 :  $\Delta E$  fixée, localisation variable (à droite).

Comme dans le cas d'une force ponctuelle, le rapport  $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$  varie linéairement en fonction de la réduction de la valeur du module de Young, tandis qu'un changement brutal est observé pour le mode 2 lorsque la corde optique couvre une partie de la zone endommagée.

Ce rapport ne dépend pas des chargements appliqués, ainsi que de la configuration du véhicule utilisé. Dans le cas de la poutre continue à deux travées soumise à deux forces ponctuelles, les rapports estimés pour la structure saine sont d'environ  $6.6 \times 10^4$  pour le premier mode et  $13 \times 10^4$  pour le deuxième mode, qui sont en bon accord avec les valeurs de référence.

## 6.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques limites de la méthode d'estimation par optimisation dans le cas où le pont est considéré comme une poutre continue à plusieurs travées. Nous constatons que plus le nombre de travées augmente, plus la participation des modes supérieurs ( $n \geq 2$ ) est importante. De ce fait, la méthode d'extraction des paramètres intrinsèques de la poutre par optimisation, basée seulement sur le premier mode de vibration de la structure n'est plus valable.

Nous avons alors présenté une approche fréquentielle qui nous permet d'extraire les paramètres modaux comme les fréquences naturelles, le taux d'amortissement et l'amplitude des pic des Fonctions de Réponse en Fréquence (FRF) en déformation et en accélération. En considérant le rapport entre deux constantes modales des FRFs de l'accélération et de la déformation au même point de mesure, nous obtenons un résultat proportionnel à la rigidité en flexion  $EI$ . L'endommagement étant traduit par une réduction de module de Young ou de l'inertie de la section fissurée, ce résultat peut présenter un lien direct avec

l'état de santé de la structure.

Nous avons ensuite présenté des cas d'exemple et des études paramétriques. Nous observons que la décroissance du rapport  $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$  est pratiquement proportionnelle à la réduction du module d'élasticité  $\Delta E$  et cela confirme la sensibilité de la méthode présentée. Des applications se basant sur les méthodes présentées seront appliquées aux structures de poutres et de ponts dans la suite du manuscrit.





Troisième partie

**Application**



# Chapitre 7

## Application au cas de poutres

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>160</b>
<b>7.2</b>	<b>Identification du chargement</b>	<b>160</b>
7.2.1	Structure saine	160
7.2.2	Structure endommagée	164
<b>7.3</b>	<b>Proposition de critères et de disposition des capteurs</b>	<b>167</b>
<b>7.4</b>	<b>Détection de l'endommagement à partir des amplitudes modales : Passages aux hasards</b>	<b>171</b>
7.4.1	Poutre continue soumise à plusieurs passages aléatoires	172
7.4.2	Convergence du rapport $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$	174
7.4.3	Évaluation de $r_{\varepsilon/a}$ en fonction de l'endommagement	175
<b>7.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>177</b>

---

## 7.1 Introduction

Ce chapitre est consacré aux applications des méthodes présentées dans les chapitres 5 et 6 pour le cas des poutres. Tout d'abord, la méthode d'identification par optimisation sera appliquée aux structures non-endommagées afin de mettre en évidence la stabilité d'un critère proposé. Ensuite, la méthode sera appliquée aux structures avec la présence d'un défaut. Une étude paramétrique sur la localisation de l'endommagement et des capteurs sera effectuée. A partir de cette étude paramétrique, nous proposons un critère qui permet de détecter la présence de l'endommagement et de le localiser.

Dans la deuxième approche, à la base de la méthode d'identification à partir des amplitudes modales, nous développons un autre critère pour la détection de l'endommagement d'une poutre soumise aux passages aléatoires de véhicules. Une étude de convergence sera menée pour démontrer la stabilité du critère en fonction du nombre de passages. Ensuite, nous examinons la dépendance de la valeur du critère en fonction de l'évolution (niveau de réduction du module d'élasticité) et de la position de l'endommagement.

## 7.2 Identification du chargement

### 7.2.1 Structure saine

Dans cette section, nous allons voir de façon plus détaillée la méthode de détection de l'endommagement à partir de mesures de déformation et d'accélération. Dans un premier temps, nous considérons des structures saines. Il s'agit de poutres simples et continues de deux à quatre travées, dont chacune possède une longueur identique  $L = 15\text{ m}$ . Les poutres sont de section rectangulaire,  $b \times h = 35\text{ cm} \times 65\text{ cm}$ , constituées de béton ( $E = 35\text{ GPa}$ ,  $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$ ). Dans ces applications numériques, les quatre types de chargements sont pris en compte. Il s'agit d'une force ponctuelle et de véhicules sur deux, quatre et cinq essieux. Les caractéristiques détaillées des chargements sont présentées dans le tableau 7.1. Les charges mobiles traversent les structures à différentes vitesses constantes à chaque passage.

Chargement		1 force (10 T)	19 T	32 T	44 T
Masse totale (tonne)		10	19.22	31.80	43.56
Nombre d'essieux		1	2	4	5
Répartition des charges (tonne)	P <sub>1</sub>	10	6.24	5.66	6.94
	P <sub>2</sub>	–	12.70	7.96	10.62
	P <sub>3</sub>	–	–	11.14	9.20
	P <sub>4</sub>	–	–	6.96	8.64
	P <sub>5</sub>	–	–	–	8.16
Distance entre deux essieux consécutifs (m)	$d_1 : 1 \rightarrow 2$	–	4.05	1.80	3.80
	$d_2 : 2 \rightarrow 3$	–	–	3.00	3.01
	$d_3 : 3 \rightarrow 4$	–	–	1.38	1.25
	$d_4 : 4 \rightarrow 5$	–	–	–	1.25

TABLEAU 7.1 – Caractéristiques détaillées des chargements mobiles.

En ce qui concerne les dispositifs de mesures, nous admettons que les paires de capteurs (corde optique – accéléromètre) sont placées sous la face inférieure de la poutre. Les cordes

optiques utilisées ont une longueur de 2 mètres et permettent de mesurer la déformation moyenne sur toute leur longueur. La position de ces couples de capteurs est variable et elle se trouve dans un intervalle compris entre  $0.1L$  et  $0.9L$  à partir de l'appui gauche de la travée considérée. Les résultats sont obtenus à l'aide de la méthode présentée dans le Chapitre 2.

Les déformations et les accélérations « mesurées » par les paires de capteurs sont utilisées comme entrée de la méthode d'estimation par optimisation présentée dans le Chapitre 5 (Section 5.3). Une fois les coefficients  $c_d$ ,  $c_{s,i}$ ,  $c_z$  déterminés, le chargement exercé par le  $i$ -ème essieu peut être rétro-estimé par :

$$P_i = \frac{EIc_{s,i}}{z_0} \quad (7.1)$$

où  $EI$  est la rigidité en flexion de la poutre et  $z_0$  est la distance entre la corde optique et l'axe neutre de la poutre. Dans notre cas,  $z_0 = h/2$ .

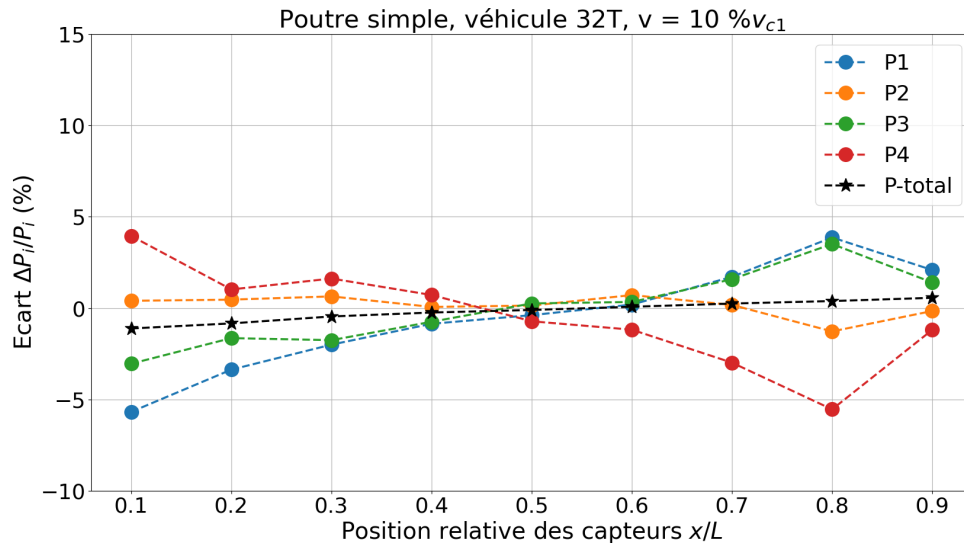


FIGURE 7.1 – Identification de charge par essieu du véhicule 32T - Poutre simple.

Considérons les passages du véhicule **32 T** sur une poutre simple et une poutre continue à quatre travées. La vitesse du véhicule lors des deux passages est fixée à 10 % de la première vitesse critique de la structure ( $v_{c,1} \approx 147 \text{ m/s}$ ). La figure 7.1 présente les écarts relatifs des charges par essieu estimées (Eq. 7.1) par rapport à leur valeur de référence, en fonction de la position des paires de capteurs (corde optique – accéléromètre). La ligne noire représente l'écart entre le chargement total estimé ( $P_{tot} = \sum_i P_i$ ) et le poids du véhicule en pour-cent. Les écarts sur chaque poids par essieu semblent faibles au milieu de la poutre simple et plus importants au voisinage des extrémités. Nous constatons que lorsque les écarts sur les charges par essieu varient en fonction de la position des capteurs, l'écart sur le poids total reste relativement faible. La figure 7.2 présente le même passage du même véhicule sur la poutre continue à quatre travées. Nous observons également le même phénomène : Les écarts sur les chargements par essieu augmentent et varient fortement en fonction de la position des capteurs (jusqu'à 15 % vers le milieu de la troisième travée). De ce fait, nous nous intéressons désormais à l'écart sur le poids total des véhicules.

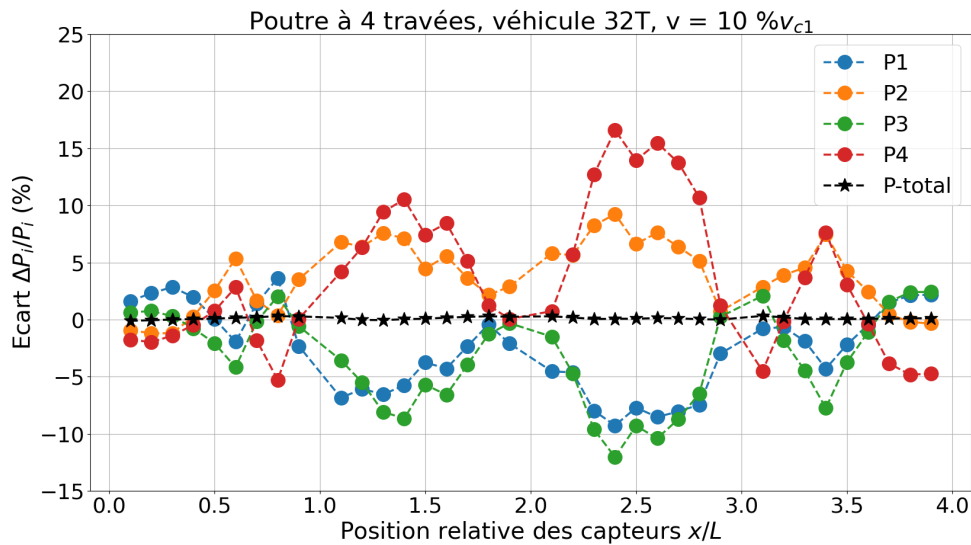


FIGURE 7.2 – Identification de charge par essieu du véhicule 32T - Poutre à quatre travées.

La figure 7.3 représente les écarts relatifs entre les poids totaux estimés des différents véhicules et leur poids donné, en fonction des positions des capteurs pour différents types de structures. Les vitesses des véhicules sont fixées à 10 % de la première vitesse critique des structures. Pour le cas d'une poutre simple, l'écart maximal est de 2.3 %, correspondant au passage d'une force ponctuelle (Figure 7.3a) lorsque la paire de capteurs se trouve à côté de l'extrémité gauche de la poutre (Position  $x/L = 0.1$ ). Si la structure est constituée de poutres continues à plusieurs travées, cette valeur maximale n'excède pratiquement pas 0.5 % (Figures 7.3b, 7.3c, 7.3d). Les lignes verticales en noire représentent les positions des appuis intermédiaires. Dans la plupart des cas, nous observons que les écarts dus aux passages d'une force ponctuelle forment l'enveloppe des courbes tracées (points bleus).

Nous considérons le cas le plus défavorable pour étudier l'influence de la vitesse des véhicules sur les résultats d'identification du chargement total : le passage d'une force ponctuelle. La figure 7.4 représente les écarts relatifs entre le chargement estimé et la valeur de référence lorsqu'une force ponctuelle traverse la poutre continue à quatre travées à différentes vitesses. Nous observons que plus la force mobile passe vite, plus sa valeur identifiée est éloignée de la valeur imposée. Cependant, cet écart reste relativement petit, même avec une vitesse qui est égale à 15 % de la première vitesse critique, soit environ  $22 \text{ m/s}$  dans ce cas (ligne rouge en pointillé), la valeur maximale des écarts étant inférieure à 1.5 %. En réalité, les vitesses usuelles du trafic ne dépassent pas 10 % de la première vitesse critique des ponts. Les valeurs estimées des chargements mobiles sont alors en bon accord avec celles de référence.

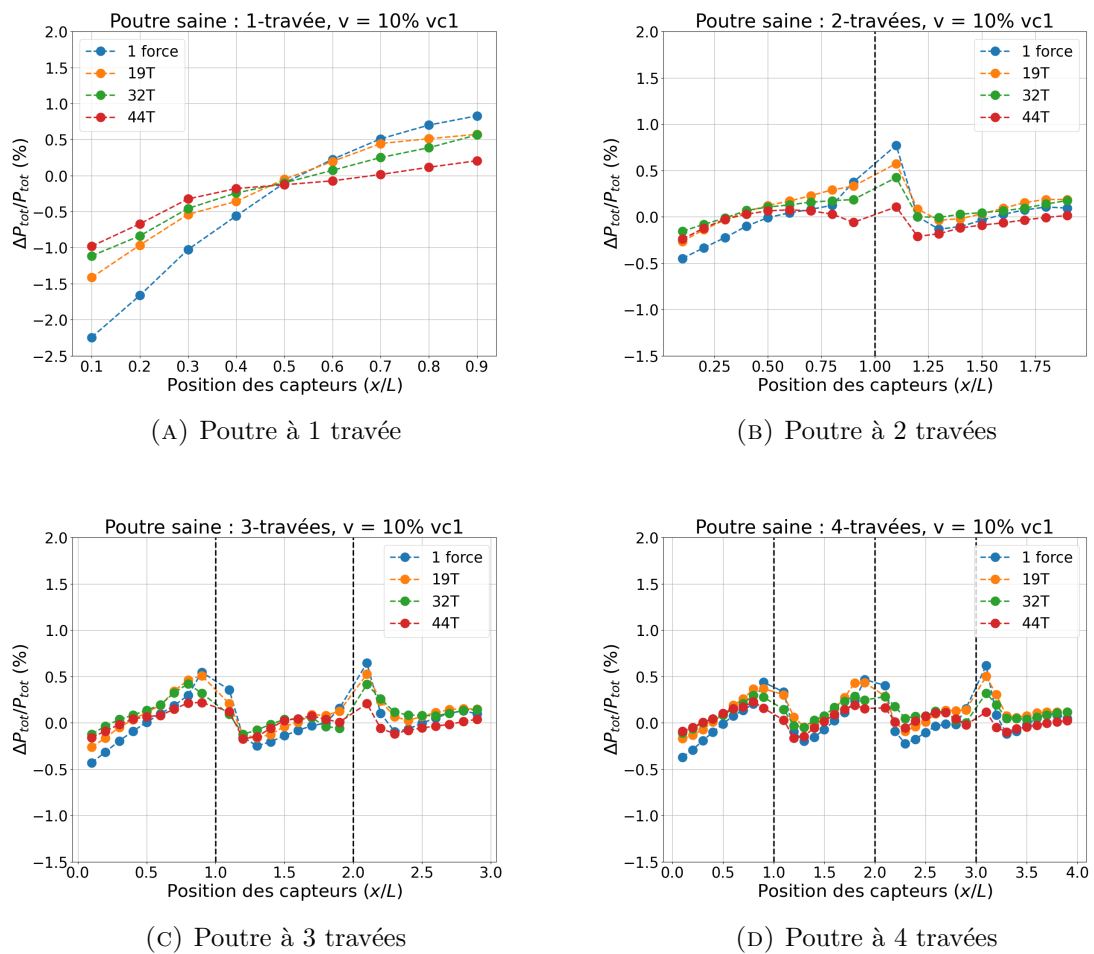


FIGURE 7.3 – Écart relatif entre les valeurs estimées et le poids total des véhicules.



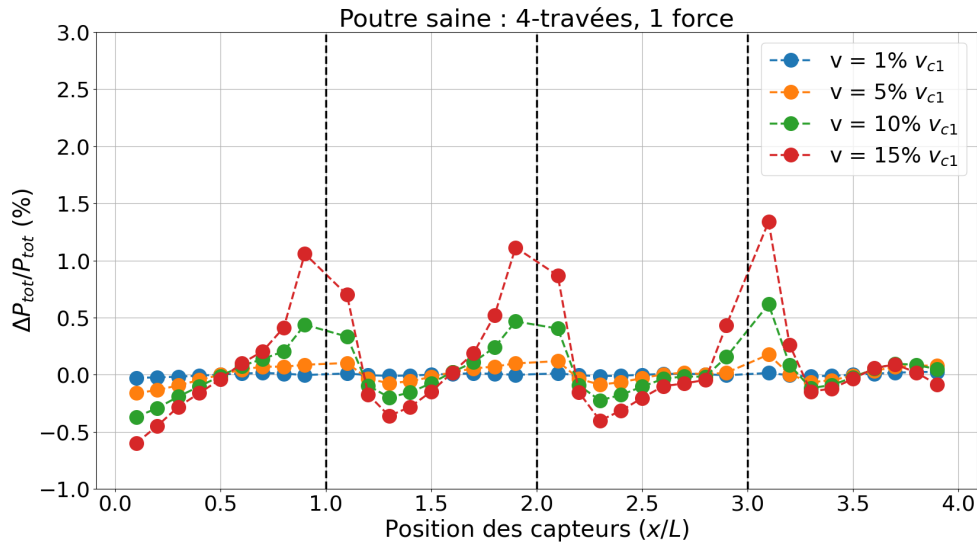


FIGURE 7.4 – Écart relatif du chargement estimé - le cas d'une force ponctuelle.

## 7.2.2 Structure endommagée

Dans un premier temps, nous considérons les passages des véhicules sur la poutre continue à 4 travées. Nous créons une zone de réduction du module de Young (zone orange sur le schéma) dans la deuxième travée (Figure 7.5). Sous la poutre, une paire de capteurs (corde optique de longueur  $2m$  – accéléromètre) est placée sur la face inférieure de la poutre. Ces capteurs sont en co-localisation et de position variable dans un intervalle compris entre  $0.1L$  et  $0.9L$  à partir de l'appui gauche de la travée considérée.

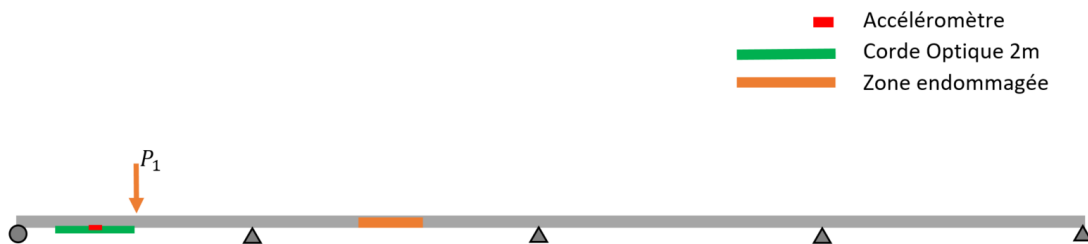


FIGURE 7.5 – Poutre endommagée à 4 travées soumise aux chargements mobiles.

La zone endommagée est de longueur  $l_e = 2m$ , de réduction du module de Young  $\Delta E = 30\%$  et se trouve au milieu de la deuxième travée de la poutre. La structure est soumise aux passages des quatre types de véhicules présentés dans la section précédente, à une vitesse constante  $v = 10\%v_{c,1}$ .

La figure 7.6 représente les écarts du chargement estimé par rapport aux valeurs de référence pour les quatre véhicules différents. Nous constatons que les courbes sont pratiquement confondues. Cela confirme l'indépendance de la configuration des véhicules pour le résultat final. Nous observons également un pic principal à l'endroit où se trouve la zone endommagée. Cet écart maximal atteint une valeur de 40% lorsque la corde optique est

située en-dessous de la zone endommagée. De plus d'autres pics de plus faibles valeurs (de l'ordre de 5 %) peuvent être relevés autour de la zone endommagée et à proximité des appuis (environ  $0.1L - 0.2L$ ).

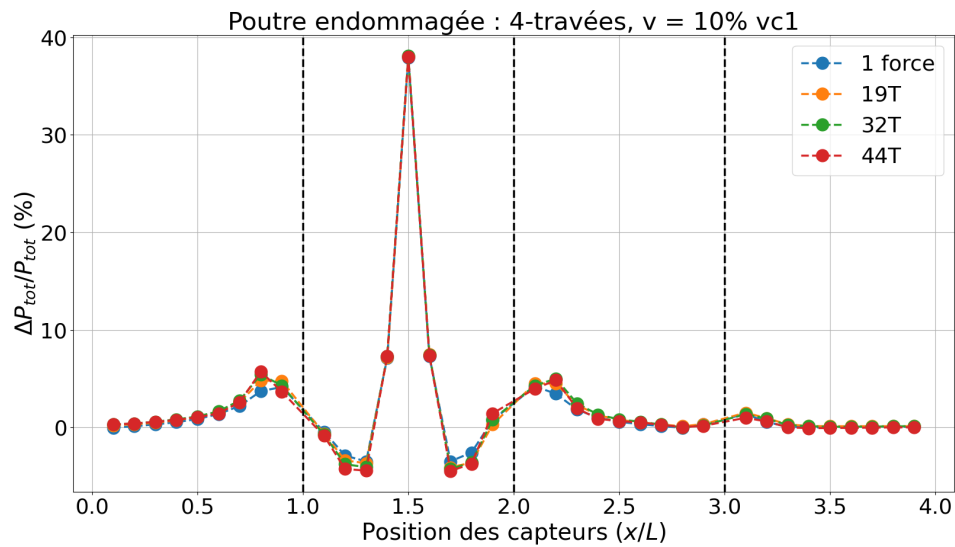


FIGURE 7.6 – Écarts relatifs du chargement estimé - poutre endommagée soumise aux différents chargements mobiles.

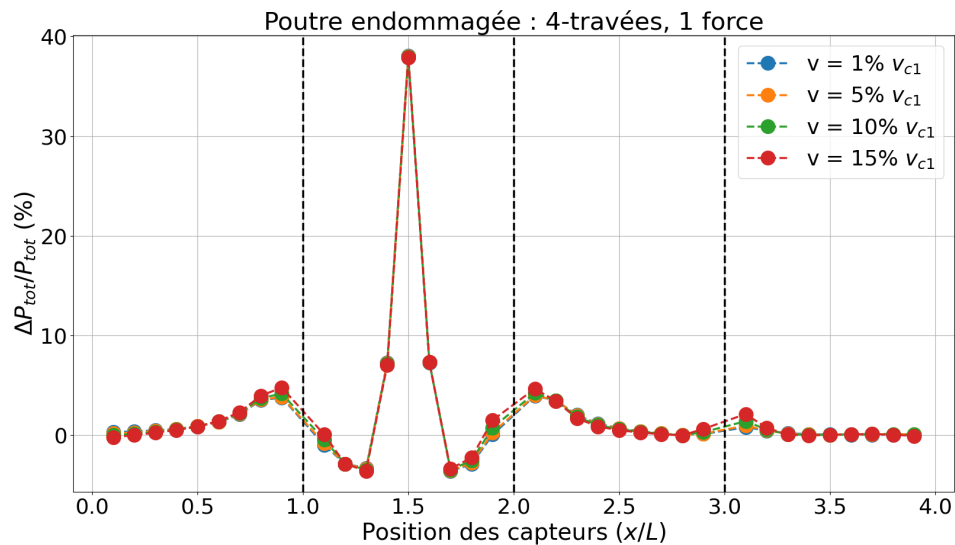
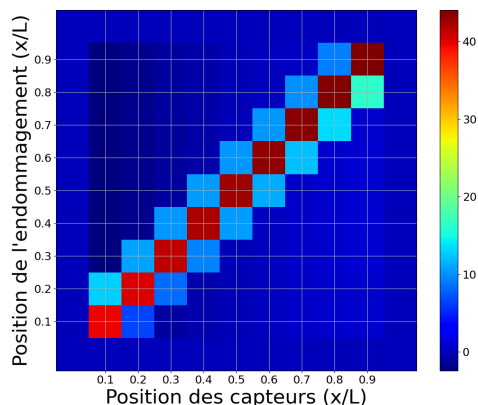
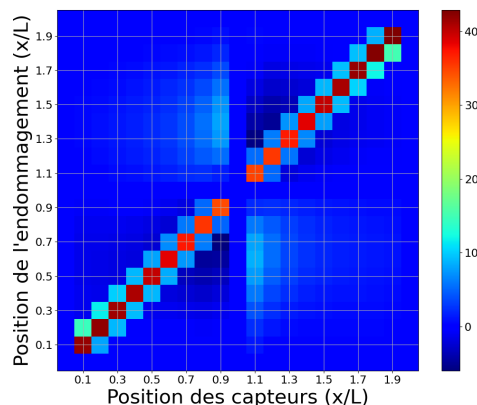


FIGURE 7.7 – Écarts relatifs du chargement estimé - poutre endommagée soumise à une force ponctuelle à différentes vitesses.

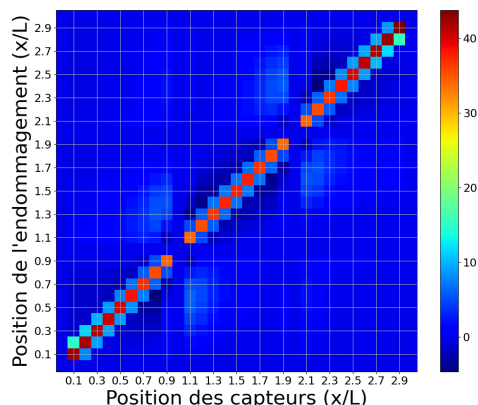
En ce qui concerne la vitesse des chargements mobiles, les différents profils de vitesses des passages de la force ponctuelle sont également examinés. La figure 7.7 représente les écarts calculés pour certaines vitesses, allant de  $1\%v_{c,1}$  à  $15\%v_{c,1}$ . Les courbes sont relativement en bon accord. De plus, lorsque les véhicules traversent la structure à vitesses

Poutre à 1 travée, véhicule 1 force,  $v = 10\%v_{c1}$ 

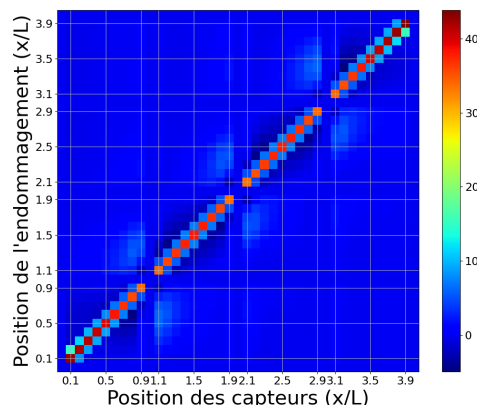
(A) Poutre à 1 travée

Poutre à 2 travées, véhicule 1 force,  $v = 10\%v_{c1}$ 

(B) Poutre à 2 travées

Poutre à 3 travées, véhicule 1 force,  $v = 10\%v_{c1}$ 

(C) Poutre à 3 travées

Poutre à 4 travées, véhicule 1 force,  $v = 10\%v_{c1}$ 

(D) Poutre à 4 travées

FIGURE 7.8 – Écarts relatifs entre les valeurs estimées et le poids total des véhicules.

faibles ( $v/v_{c,1} \leq 10\%$ ), l'influence de la vitesse sur le résultat final est faible et l'on constate que l'on pourrait négliger cet effet.

Afin d'obtenir une visualisation plus détaillée et complète de la situation, nous effectuons des études paramétriques en fonction de la localisation de l'endommagement. Nous supposons alors que la position de la zone endommagée est également variable et nous examinons les quatre structures. Les poutres sont soumises aux passages d'une force ponctuelle à la vitesse  $v = 10\%v_{c,1}$ . Comme la paire de capteurs, cet endommagement se trouve dans un intervalle compris entre  $0.1L$  et  $0.9L$ , à partir de l'appui gauche de la travée considérée. Nous traçons alors les valeurs de l'écart entre la force estimée par rapport à sa valeur de référence, en fonction de la position des capteurs et de la localisation de l'endommagement. La figure 7.8 présente les écarts de force calculés pour les quatre poutres. L'axe vertical représente la position du centre de la zone endommagée alors que l'axe horizontal désigne la position de la corde optique et de l'accéléromètre.

Pour les quatre cas, les pics principaux apparaissent à l'endroit où se trouve la zone

endommagée (cette dernière est située au-dessus de la corde optique). Pour une réduction de 30 % du module d'élasticité sur une longueur de 2 m, les écarts maximaux sont supérieurs à 40 %. A proximité des appuis intermédiaires, des petits pics (valeur de l'ordre de 5 %) peuvent être observés (carrés en cyan ou en bleu clair). Lorsque l'endommagement se trouve loin du premier appui ( $x_e/L \geq 0.4$ ), les écarts obtenus par une paire de capteurs à proximité de celui-ci sont pratiquement nuls. Nous pouvons retrouver les résultats du cas d'étude présenté au début de la section (Figure 7.6) dans la figure 7.8d. Sur la ligne horizontale qui correspond à la position relative du centre de la zone endommagée égale à  $x/L = 1.5$ , nous avons un carré rouge à  $x/L = 1.5$  (au milieu de la travée 2). Il correspond au pic principal des courbes obtenues sur les figures 7.6 et 7.7. De plus, nous observons des zones en bleu foncé autour de la diagonale rouge et, des zones en bleu clair autour des appuis intermédiaires. Ces zones représentent les petites perturbations liées aux valeurs estimées par rapport à la valeur de référence si la paire de capteurs est située à ces endroits.

En ce qui concerne le niveau d'endommagement, nous présentons dans la figure 7.9 la dépendance du pic principal des courbes dans les figures 7.6 et 7.7 par rapport à la réduction du module d'élasticité  $\Delta E$ . Le modèle de véhicule choisi est celui d'une force ponctuelle, passant sur la structure à la vitesse  $v = 0.1v_{c,1}$ ,  $v_{c,1}$  étant la première vitesse critique de la poutre. Nous observons que cet écart varie presque linéairement en fonction de la réduction du module de Young lorsque ce dernier est inférieur à 15 %. Ensuite, la valeur de cet écart augmente rapidement. Pour une valeur de réduction de 40 %, cet écart atteint environ 60 %.

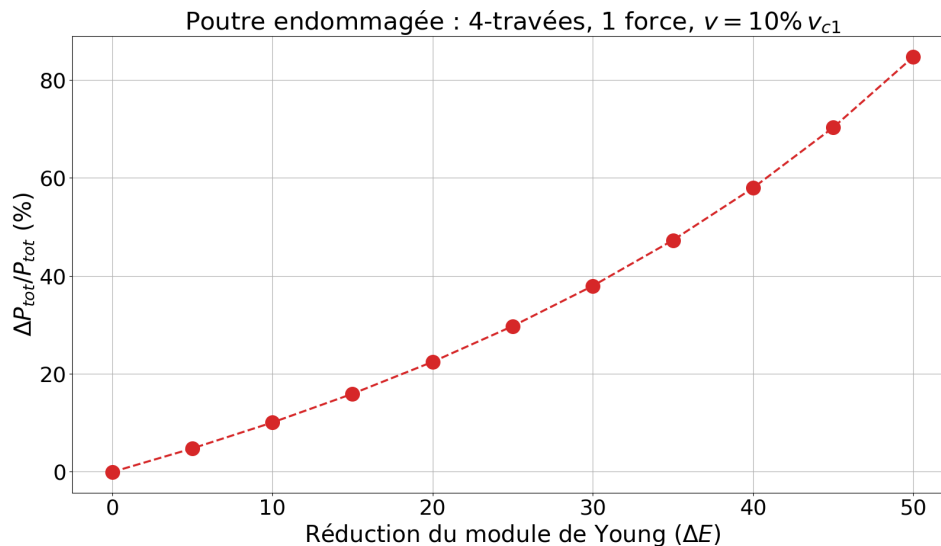


FIGURE 7.9 – Écart maximal du poids estimé en fonction de la réduction du module de Young.

### 7.3 Proposition de critères et de disposition des capteurs

A partir des résultats des études paramétriques présentées précédemment, nous formulons quelques remarques sur les critères de détection de l'endommagement et de disposition des capteurs :

- Lorsque la zone endommagée se trouve au dessus de la corde optique, l'écart entre le poids total estimé et sa valeur de référence est maximal. Cette valeur est de l'ordre de 40 %, ce qui correspond aux carrés rouges sur la diagonale des figures de 7.8a à 7.8d.
- Les capteurs situés aux deux extrémités de la poutre semblent peu sensibles à l'endommagement si ce dernier ne se trouve pas sur ces capteurs ou à côté de ces capteurs.
- Si la structure est une poutre continue à plusieurs travées, il existe des perturbations autour des appuis intermédiaires, même si la zone endommagée ne se trouve pas au même endroit que les capteurs. Cette propriété pourrait servir comme un critère de détection de la localisation de l'endommagement.

Nous prenons par exemple le cas d'une poutre continue à deux travées (Figure 7.10). Si la paire de capteurs est située à l'extrémité gauche, la réponse des capteurs sera sensible aux endommagements se trouvant aux endroits  $x/L = 0.1$  ou  $x/L = 0.2$ , c'est-à-dire lorsque la corde optique couvre une partie ou totalement la zone endommagée. Si l'endommagement est situé hors de la zone de couverture de la corde optique, il est difficile d'observer la différence entre la valeur estimée et le vrai poids du véhicule. En revanche, si la paire est située à proximité de l'appui intermédiaire, elle est capable de détecter les endommagements qui se trouvent dans un intervalle compris entre  $x/L = 0.3$  et  $x/L = 1.7$ .

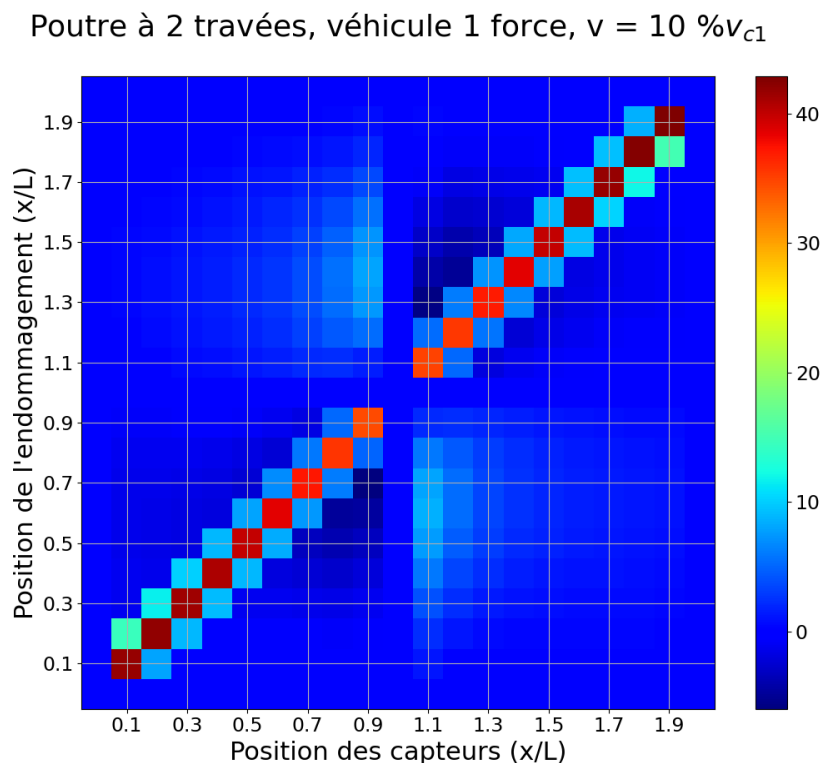


FIGURE 7.10 – Écarts relatifs du chargement estimé - poutre à deux travées

A partir des remarques ci-dessus, pour le cas d'une poutre continue, il suffit de disposer 2 paires de capteurs, qui se trouvent à proximité des appuis de la travée. Supposons que le chargement du véhicule considéré est inconnu. Comme les paires extérieures de

capteurs (aux deux extrémités de la poutre continue) sont peu sensibles à la présence de l'endommagement, la valeur estimée du poids total donnée par l'un de ces capteurs pourrait être prise comme une valeur de « référence ». Nous calculons ensuite l'écart entre les valeurs données par les autres capteurs et cette valeur de « référence ». Les écarts donnés par les autres capteurs pourront alors indiquer la localisation de l'endommagement.

La figure 7.11 présente la disposition des capteurs proposée pour le cas d'une poutre continue à deux travées. Les paires de capteurs sont placées au voisinage des appuis. Dans ce cas, nous avons quatre positions des capteurs :  $0.1L$ ,  $0.9L$ ,  $1.1L$  et  $1.9L$ , avec  $L = 15\text{ m}$  la longueur de chaque travée. De plus, nous numérotons les paires de capteurs dans l'ordre allant de gauche à droite. La paire de capteurs numéro 1 correspond dans ce cas à la position  $x = 0.1L$ .

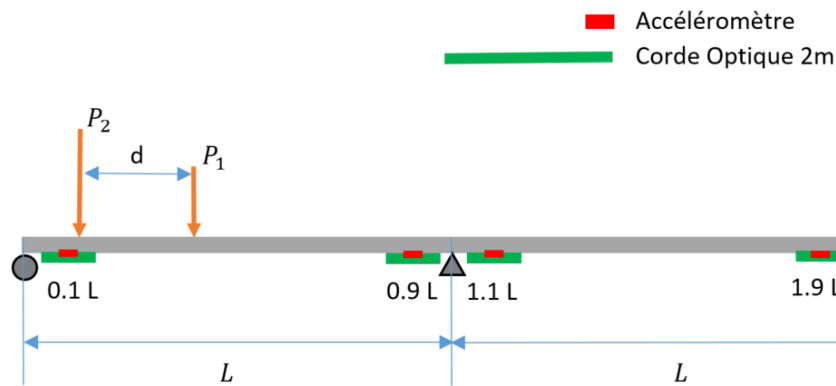


FIGURE 7.11 – Disposition des capteurs proposée pour une poutre continue à deux travées.

Avec la méthode d'auscultation proposée, une poutre continue à  $n$  travées nécessite  $2n$  paires de capteurs (accéléromètre – corde optique). Nous prenons la valeur du poids total estimé par la paire de capteurs à l'extrémité gauche de la poutre comme valeur de « référence », il reste  $2n - 1$  erreurs relatives à calculer. Soit  $P_{(i)}^e$  la valeur estimée par la  $i$ -ème paire de capteurs, l'écart relatif par rapport à la valeur donnée par la première paire de capteurs est calculé par :

$$\epsilon_{i-1}(\%) = 100 \times \left( \frac{P_{(i)}^e}{P_{(1)}^e} - 1 \right), \quad i = 2, 3, \dots, n. \quad (7.2)$$

Afin de détecter la présence de l'endommagement, nous proposons un critère global, qui est égal à la somme de la valeur absolue de tous les écarts calculés :

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{n-1} |\epsilon_k| \quad (7.3)$$

La figure 7.12 représente les écarts estimés pour différentes paires de capteurs par rapport à la première paire (se trouvant à l'extrémité gauche de la poutre) et le critère  $\mathcal{E}$  en fonction de la position de l'endommagement pour le cas d'une poutre continue à 2 travées. Le premier chiffre de la légende des lignes colorées représente la position relative ( $x/L$ ) des capteurs considérés. La ligne bleue correspond aux capteurs situés en  $x/L = 0.9$ . Cette paire de capteurs se trouve dans la première travée de la poutre, à gauche de l'appui

intermédiaire. De la même façon, les lignes orange et verte présentent les paires de capteurs situées dans la deuxième travée de la poutre. La paire représentée par la ligne orange est à droite de l'appui intermédiaire ( $x/L = 1.1$ ) alors que la ligne verte correspond à la paire de capteurs se trouvant à l'extrémité droite de la poutre ( $x/L=1.9$ ).

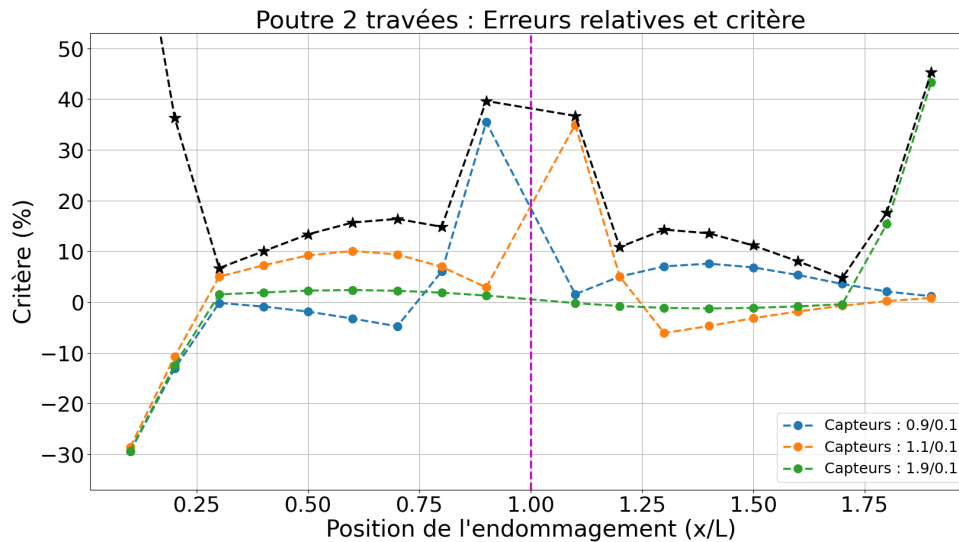


FIGURE 7.12 – Poutre à 2 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en  $x/L = 0.1$  et le critère global (ligne noire).

Si la zone endommagée se trouve à proximité de l'extrémité gauche de la poutre, les écarts retrouvés par différents capteurs sont inférieurs à zéro et pratiquement confondus. Cela traduit le fait que le poids de « référence », qui est estimé par la première paire de capteurs est plus petit que le poids réel du véhicule. Lorsque l'endommagement est situé au-dessus des capteurs, cet écart atteint sa valeur maximale. Nous observons des pics à  $x/L = 0.9, 1.1$  et  $1.9$ . Si la zone endommagée se trouve dans la zone située au milieu de la première travée, les capteurs  $1.1/0.1$  donnent des écarts positifs alors que la paire  $0.9/0.1$  donne des valeurs négatives et vice versa. Cette caractéristique donne l'information sur la localisation de l'endommagement. De plus, le critère global  $\mathcal{E}$ , présenté par la ligne noire, agit comme une enveloppe des écarts calculés. La plupart des valeurs de ce critère sont supérieures à 10 %, montrant une plus grande sensibilité à la détection de l'endommagement, par rapport à chaque écart relatif individuel.

Nous traçons les écarts relatifs et le critère pour les cas de poutres continues à trois et quatre travées (Figure 7.13 et 7.14). Dans tous les cas, la valeur du critère est de l'ordre de 40 % lorsque l'endommagement se trouve au-dessus des capteurs autour des appuis intermédiaires et supérieure à 10 % ailleurs. La combinaison des signes des écarts individuels donne des informations sur la localisation de la zone endommagée.

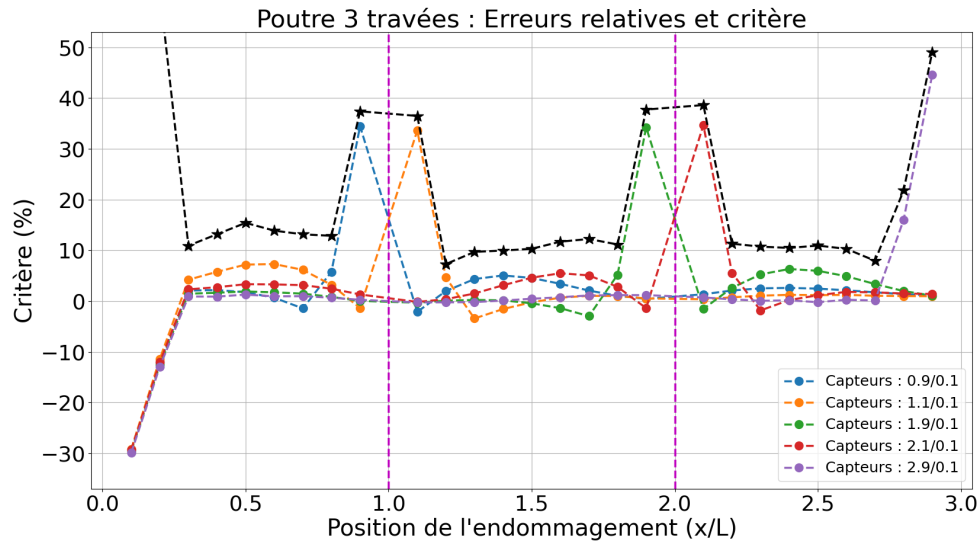


FIGURE 7.13 – Poutre à 3 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en  $x/L = 0.1$  et le critère global (ligne noire).

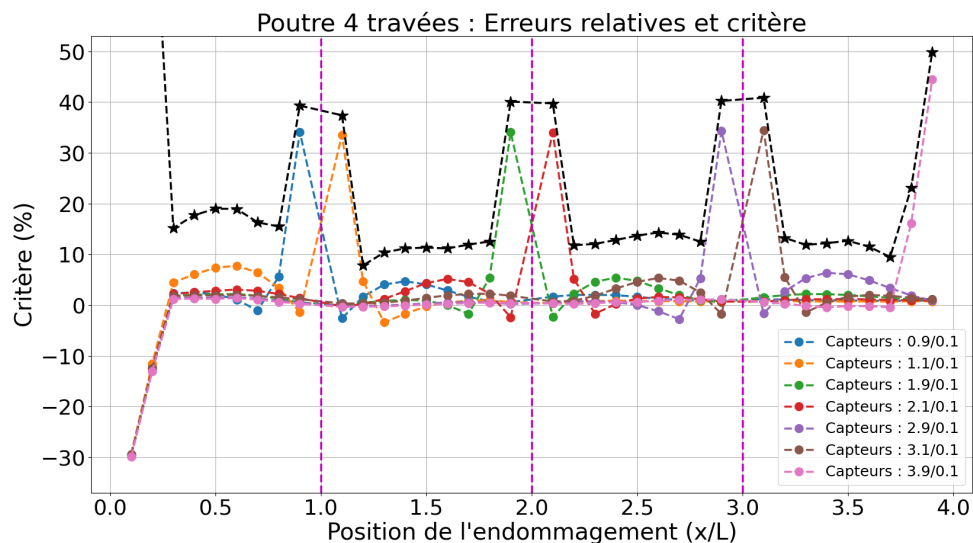


FIGURE 7.14 – Poutre à 4 travées : Écarts entre les poids estimés par différents capteurs par rapport au capteur situé en  $x/L = 0.1$  et le critère global (ligne noire).

## 7.4 Détection de l'endommagement à partir des amplitudes modales : Passages aux hasards

Dans la vie quotidienne, les structures de ponts sont soumises aux passages des différents moyens de transport routiers. En général, le chargement, ainsi que la configuration (répartition des chargements sur les essieux, distances entre les essieux, nombre de roues etc.) des véhicules ne sont pas connus à l'avance. Dans cette section, nous allons appliquer la méthode présentée dans le chapitre 6, qui est basée sur les amplitudes modales



de la déformation et de l'accélération mesurées pour chaque passage, à une suite de passages aléatoires des véhicules sur une poutre continue. Une étude de convergence du critère en fonction du nombre de passages sera effectuée afin de déterminer le seuil minimal à prendre en compte. Ensuite, l'évaluation du critère en fonction de chargement sera examinée.

#### 7.4.1 Poutre continue soumise à plusieurs passages aléatoires

Nous considérons une poutre continue à deux travées comme présentée dans les exemples précédents. Chaque travée est de longueur identique,  $L = 15\text{ m}$ . La poutre est de section rectangulaire, de largeur  $b = 35\text{ cm}$  et de hauteur  $h = 65\text{ cm}$ . Le matériau constitutif est le béton ( $E = 35\text{ GPa}$ ,  $\rho = 2500\text{ kg/m}^3$ ). Une paire de capteurs constituée d'une corde optique de longueur  $2\text{ m}$  et d'un accéléromètre est placée au milieu de la première travée. Une zone de réduction du module de Young de longueur  $2\text{ m}$  est localisée au milieu de la première travée (Figure 7.15).

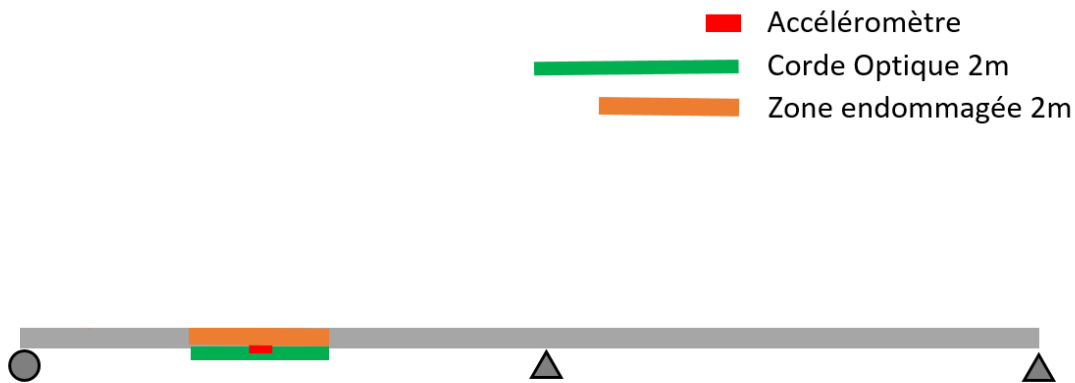


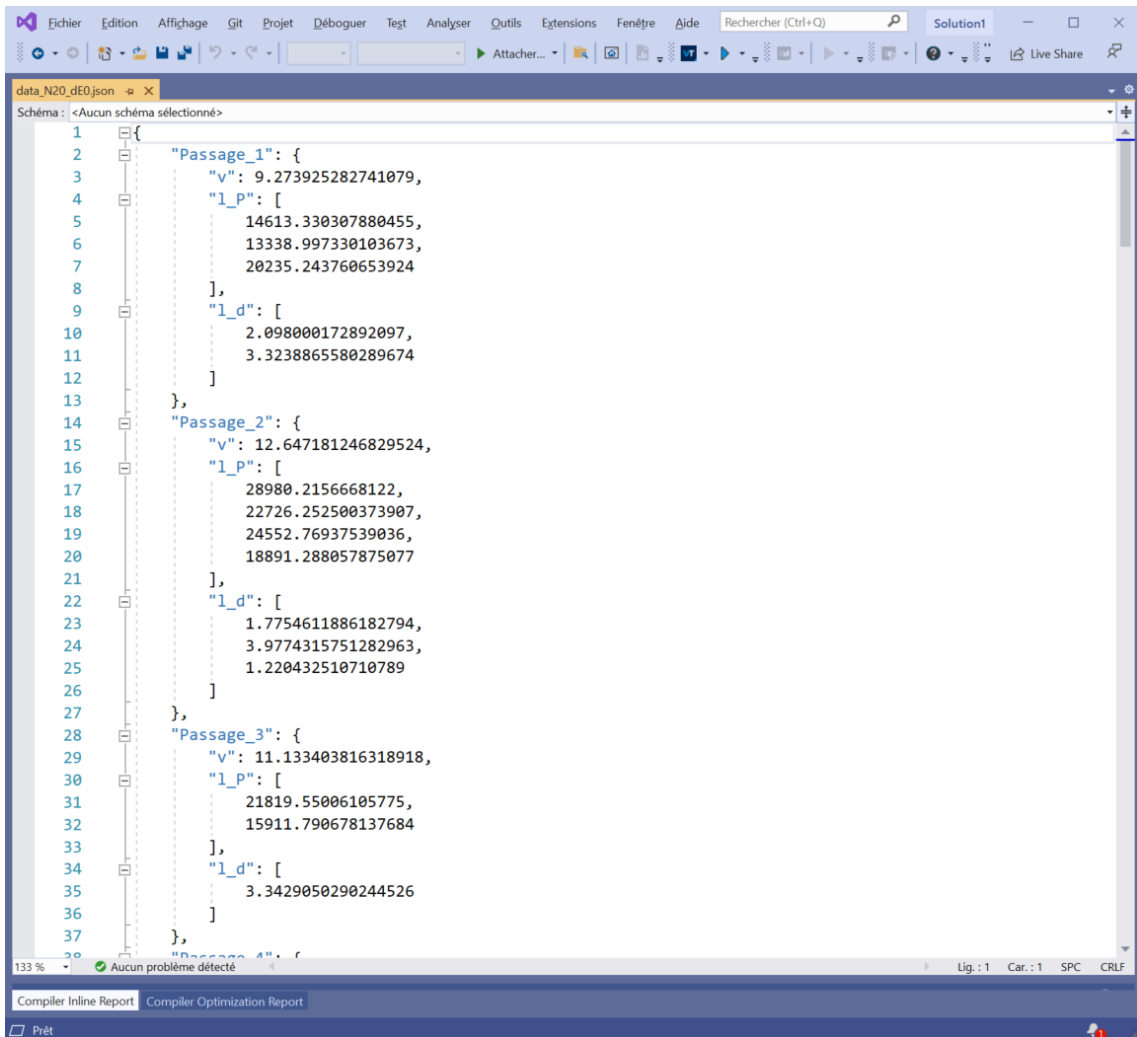
FIGURE 7.15 – Poutre continue à deux travées avec la présence de l'endommagement

Les caractéristiques des passages, du nombre d'essieux, du chargement par essieu, la distance entre deux essieux consécutifs et la vitesse du véhicule sont choisis de manière aléatoire. Ces grandeurs sont obtenues à l'aide du package `numpy.random` dans Python suivant la loi de distribution uniforme  $\mathcal{U}[a, b]$ ,  $b > a$  sur l'intervalle ouvert  $[a, b]$  (la loi uniforme discrète pour le nombre d'essieux et la loi uniforme continue pour les autres paramètres). La vitesse du passage varie de 5 à 15 m/s, soit 3.4% à 10.2% de la première vitesse critique  $v_{c,1}$ . Le nombre d'essieux est compris entre 2 et 5. Le chargement par essieu est choisi aléatoirement entre 10 kN à 30 kN, tandis que la distance entre deux essieux consécutifs est comprise entre 1 et 4 m. L'écart entre deux passages est pris égal à 2 fois le temps nécessaire pour qu'une force ponctuelle puisse traverser la poutre continue à la même vitesse que celle du passage en amont. Cette durée est également une grandeur aléatoire. Une présentation détaillée des caractéristiques des passages se trouve dans le tableau 7.2.

Un exemple des passages attribués aléatoirement est présenté dans la Figure 7.16. Les notations  $v$ ,  $1\_P$ ,  $1\_d$  désignent respectivement la vitesse du véhicule ( $m/s$ ), le chargement par essieu ( $N$ ) et la distance entre deux essieux consécutifs ( $m$ ). Les résultats sont calculés à l'aide de la méthode analytique directe présentée dans le chapitre 2.

Paramètres	Notation	Unité	Valeur	Note
Vitesse	$v$	m/s	$\mathcal{U}[5, 15)$	$3.4 - 10.2\%v_{c,1}$
Nombre d'essieux	$N_P$	–	2, 3, 4, 5	
Chargement par essieu	$P_i$	kN	$\mathcal{U}[10, 30)$	$i \in [1, N_P]$
Distance entre 2 essieux	$d_j$	m	$\mathcal{U}[1, 4)$	$j \in [1, N_P - 1]$

TABLEAU 7.2 – Caractéristiques détaillées des passages.



```

1  {
2  "Passage_1": {
3    "v": 9.273925282741079,
4    "l_p": [
5      14613.330307880455,
6      13338.997330103673,
7      20235.243760653924
8    ],
9    "l_d": [
10     2.098000172892097,
11     3.3238865580289674
12   ]
13  },
14  "Passage_2": {
15    "v": 12.647181246829524,
16    "l_p": [
17     28980.2156668122,
18     22726.252500373907,
19     24552.76937539036,
20     18891.288057875077
21   ],
22    "l_d": [
23     1.7754611886182794,
24     3.9774315751282963,
25     1.220432510710789
26   ]
27  },
28  "Passage_3": {
29    "v": 11.133403816318918,
30    "l_p": [
31     21819.55006105775,
32     15911.790678137684
33   ],
34    "l_d": [
35     3.3429050290244526
36   ]
37  },
38  "Passage_4": {
39    "v": 10.543210987654321,
40    "l_p": [
41     12345.678901234567,
42     98765.432109876543,
43     54321.098765432109,
44     21098.765432109876
45   ],
46    "l_d": [
47     1.2345678901234567,
48     2.3456789012345678,
49     3.4567890123456789,
50     4.5678901234567890
51   ]
52  }
53  }

```

FIGURE 7.16 – Exemples de passages aléatoires

Afin de traiter un grand nombre de passages, au lieu de déterminer les amplitudes modales de l'accélération et de la déformation dynamique, nous calculons la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de l'intégralité du signal, puis nous prenons le rapport entre les valeurs maximales de la DSP de l'accélération et de la déformation dynamique :

$$r_{\varepsilon/a} = \frac{\max DSP(a)}{\max DSP(\varepsilon^d)} \quad (7.4)$$

Comme le véhicule n'est pas connu, la déformation dynamique est déterminée par l'extraction de la composante quasi-statique du signal total. La déformation quasi-statique

$\varepsilon^s$  est obtenue dans ce cas en passant le signal initial dans un filtre passe-bas avec la fréquence de coupure  $f_c = 0.8f_0$ , où  $f_0$  est la fréquence fondamentale de la structure. La composante dynamique de la déformation mesurée par la corde optique s'écrit alors :

$$\varepsilon^d(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon^s(t) \quad (7.5)$$

La figure 7.17 représente les Densités Spectrales de Puissance (DSP) de l'accélération (courbe bleue) et de la déformation dynamique (courbe orange) de 1000 passages sur la structure non endommagée. Les DSP sont calculées à l'aide de Python. Les deux courbes sont pratiquement similaires. Nous observons que le pic principal de la DSP de l'accélération et de la déformation dynamique se trouve à la fréquence 4.9 Hz, qui correspond à la fréquence fondamentale de la structure.

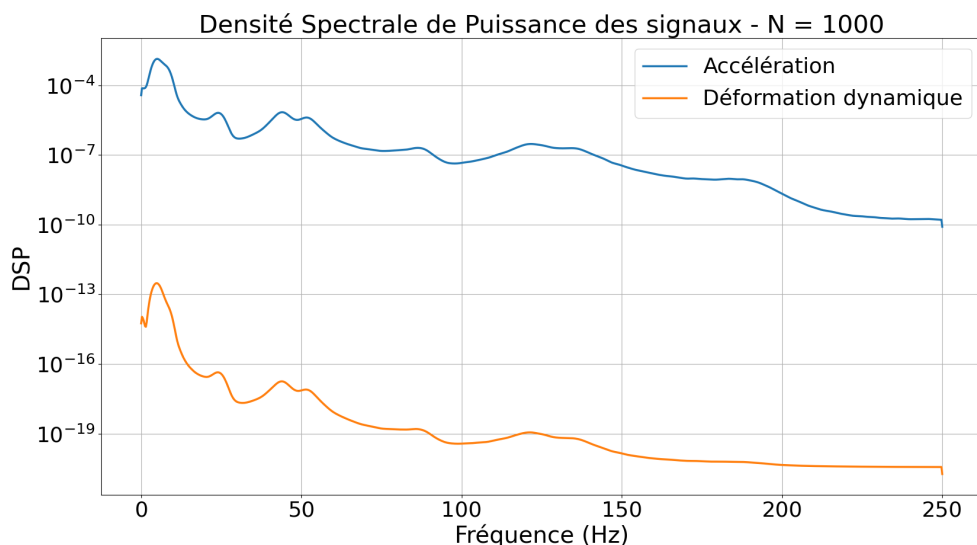


FIGURE 7.17 – Exemple de DSP de 1000 passages aléatoires

#### 7.4.2 Convergence du rapport $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$

Afin de voir l'influence de la quantité des signaux d'entrée sur le résultat obtenu, nous effectuons une étude de convergence du rapport  $r_{\varepsilon/a} = \max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$  en fonction du nombre de passages des véhicules. Nous remarquons que la Densité Spectrale de Puissance (DSP) est définie comme le carré du module de la transformée de Fourier (TF) divisé par le temps d'intégration. Les signaux de l'accélération et de la déformation dynamique sont de même longueur et leur DSP est calculée de même manière. Le rapport entre la valeur maximale des DSPs de l'accélération et de la déformation dynamique mesurées en un même point ( $r_{\varepsilon/a}$ ) est donc le carré du rapport entre deux résidus (ou constantes modales) de ces deux signaux (présenté dans le Chapitre 6 section 6.5.2).

Les caractéristiques des passages sont choisis de manière aléatoire comme présentées dans le tableau 7.2. Nous considérons les signaux d'accélération et de déformation de 5 à 10 000 passages. Pour la structure présentée, la valeur de référence du rapport  $|r_n^a|/|r_n^\varepsilon|$  est  $66.53 \times 10^3 (ms^{-2})$ , nous déduisons donc la valeur de référence de  $r_{\varepsilon/a} = (66.53 \times 10^3)^2 \approx 4.43 \times 10^9 (m^2s^{-4})$ . Sur la figure 7.18, nous observons qu'à partir de 100 passages, ce rapport est pratiquement compris entre  $4.5 \times 10^9 (m^2s^{-4})$  et  $4.6 \times 10^9 (m^2s^{-4})$ , soit un

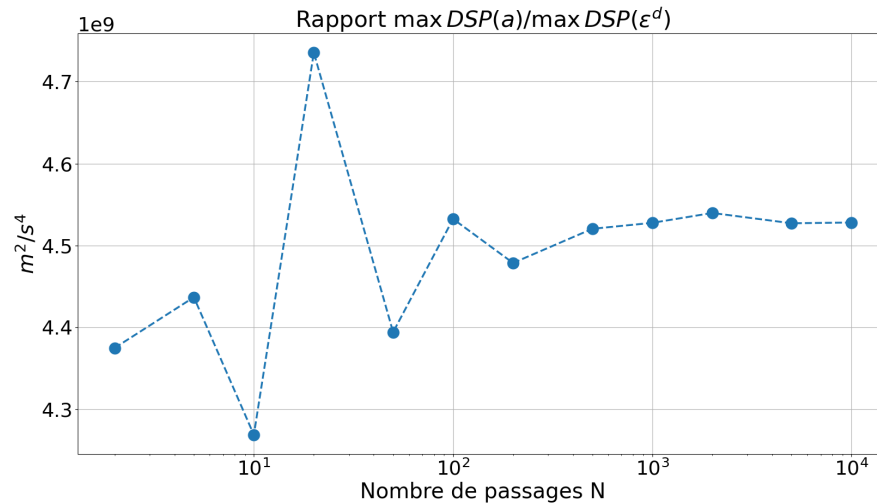


FIGURE 7.18 – Étude de convergence du rapport  $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$

écart compris entre 1.6 % et 3.8 % par rapport à la valeur de référence. Le rapport entre les valeurs maximales de la DSP de l'accélération et de la déformation dynamique pourrait servir comme un critère d'identification de l'endommagement.

### 7.4.3 Évaluation de $r_{\varepsilon/a}$ en fonction de l'endommagement

Nous considérons maintenant la structure endommagée. Un tronçon de poutre de longueur  $l_e = 2m$  avec une réduction du module de Young  $\Delta E$  variable est situé au milieu de la première travée. La figure 7.19 représente la dépendance du rapport  $r_{\varepsilon/a} = \max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$  en fonction de la réduction du module de Young  $\Delta E$  avec différents nombres de passages considérés. Les signaux sont constitués de  $N = 5, 10, 100, 200, 500$  passages.

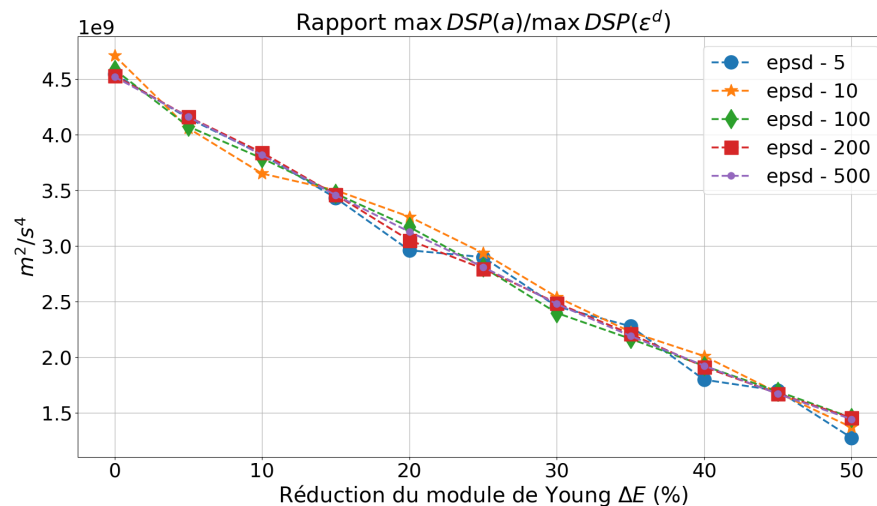


FIGURE 7.19 – Rapport  $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$  en fonction du niveau de l'endommagement.

Plus le nombre de passage augmente, plus la relation entre la valeur calculée du rapport  $r_{\varepsilon/a}$  et la réduction du module de Young devient linéaire. Même avec très faible nombre de passages considérés ( $N = 5$  et  $N = 10$ ), nous constatons que les courbes obtenues (en bleu et en orange) sont pratiquement linéaires et qu'elles suivent bien la droite violette, qui désigne les rapports calculés avec des signaux correspondant à 500 passages.

Afin de voir la sensibilité de ce critère par rapport aux propriétés de l'endommagement, nous considérons 2 cas d'études comme présentés dans le chapitre 6 :

- Cas 1 : L'endommagement est fixé au milieu de la première travée. La réduction de la valeur du module de Young varie de 0 (structure saine) à 50 %.
- Cas 2 : La réduction de la valeur du module de Young est fixée à 30 %. La position du centre de la zone endommagée est variable.

Les passages sont générés de manière aléatoire dans les plages de valeurs présentées dans le tableau 7.2. Dans cette étude paramétrique, une suite de  $N = 200$  passages est prise en compte.

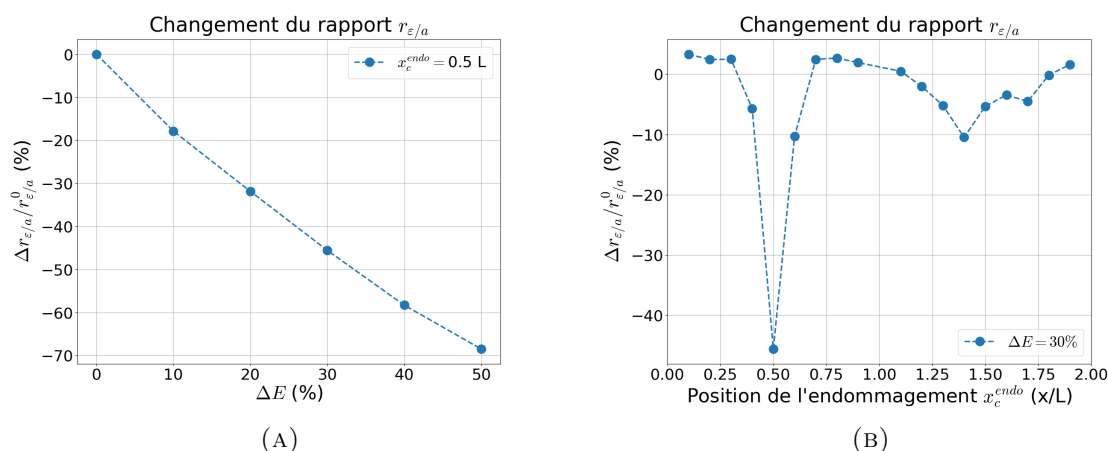


FIGURE 7.20 – Rapport entre deux résidus ( $|r_k^a|/|r_k^\varepsilon|$ ) en fonction des caractéristiques de l'endommagement. Cas 1 : Localisation fixée,  $\Delta E$  variable (à gauche) et Cas 2 :  $\Delta E$  fixée, localisation variable (à droite).

La figure 7.20 représente l'évolution du quotient  $\max DSP(a)/\max DSP(\varepsilon^d)$  par rapport à la valeur qui correspond au cas d'une structure non-endommagée, exprimée en pourcentage. La figure 7.20a présente cette évolution en fonction de la réduction de module de Young (cas 1) alors que la figure 7.20b représente cette valeur dans le cas où la localisation de l'endommagement est variable (cas 2). Comme nous l'avons observé dans la figure 7.19, le changement relatif du rapport  $r_{\varepsilon/a}$  par rapport à sa valeur de référence (obtenue si la structure est non-endommagée,  $r_{\varepsilon/a}^0$ ) varie (presque) linéairement en fonction de la réduction du module de Young ( $\Delta E$ ). En ce qui concerne la position de la zone endommagée, nous constatons un pic principal lorsque l'endommagement se trouve en-dessous de la paire de capteurs. De plus, nous relevons un deuxième pic de l'ordre de 10 % si l'endommagement se trouve au niveau du milieu de l'autre travée.

## 7.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et développé quelques applications des méthodes d'identification de l'endommagement proposées dans la deuxième partie du manuscrit. Les deux approches présentées sont applicables au cas où les caractéristiques du véhicule ne sont pas connues à l'avance.

La première approche est basée sur les écarts entre le poids total du véhicule estimé par différentes positions de capteurs lors de son passage et la valeur de référence, ainsi que la précision de cette estimation. Une combinaison entre les écarts obtenus en comparant différents capteurs par rapport à l'un des capteurs situés aux extrémités de la structure donne une indication sur la présence de l'endommagement tandis que le signe de chaque rapport individuel pourrait fournir des informations sur la localisation du défaut.

La deuxième approche est développée à partir de la méthode de détection par les amplitudes modales. Lorsque les caractéristiques du passage (configuration de véhicule, vitesse, etc.) ne sont pas connues à l'avance, les calculs de DSP fournissent la valeur moyenne de l'énergie des signaux sur une durée longue. Les études de convergence et les études paramétriques montrent la stabilité du critère proposé par rapport aux différents facteurs.



# Chapitre 8

## Application aux ponts

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>180</b>
<b>8.2</b>	<b>Généralités sur la structure et le modèle numérique raffiné</b>	<b>180</b>
8.2.1	Présentation générale de la structure	180
8.2.2	Modèle numérique raffiné	182
8.2.3	Comparaison des résultats numériques aux données réelles	183
<b>8.3</b>	<b>Critère d'endommagement basé sur l'identification des charge- ments</b>	<b>185</b>
8.3.1	Structure saine	186
8.3.2	Structure endommagée	188
8.3.3	Structure rigidifiée	192
<b>8.4</b>	<b>Application aux données réelles</b>	<b>193</b>
8.4.1	Direction longitudinale	193
8.4.2	Direction transversale	195
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>196</b>

---



## 8.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté quelques applications pour des poutres rectilignes. Ce chapitre est maintenant consacré aux applications sur des ponts à quatre travées présentés dans le chapitre 3. Contrairement aux structures unidimensionnelles, le pont présente des comportements mécaniques bidirectionnels comme c'est le cas pour une plaque. Cela nous permet d'observer les critères proposés dans les deux directions : longitudinale et transversale.

Afin d'approcher le plus la situation réelle, le maillage original du modèle numérique de la structure est raffiné. Dans un premier temps, la structure est supposée être non-endommagée. Nous allons effectuer différents calculs aux éléments finis de ce modèle raffiné puis, nous comparerons les résultats numériques avec les mesures obtenues pour quelques passages sélectionnés lors de la campagne d'essai de chargement sur la structure pour la validation du nouveau modèle.

Nous appliquerons ensuite les démarches proposées dans le chapitre précédent aux résultats des calculs numériques dans le *code\_Aster* et aux mesures expérimentales réalisées sur la structure. Avec la modélisation numérique, nous pouvons examiner les structures saines et endommagées, afin de mettre en évidence l'évolution des critères en fonction de l'endommagement.

## 8.2 Généralités sur la structure et le modèle numérique raffiné

### 8.2.1 Présentation générale de la structure

Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 3, la structure est un passage supérieur routier à quatre travées, avec une longueur totale de 46 m. Les deux travées centrales sont plus longues, de portée 14,6 m chacune, alors que les travées externes sont de longueur 8,4 m chacune (Figure 8.1). Chaque travée est supportée par dix poutres préfabriquées en béton précontraint, portant la même longueur que la travée qu'elles supportent.

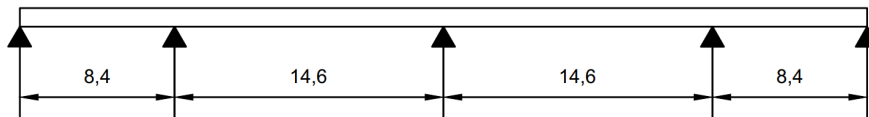


FIGURE 8.1 – Profil longitudinal de la structure

Le pont est instrumenté par la société OSMOS depuis 2011. Des nombreux capteurs comme les cordes optiques d'OSMOS, extensomètres, sondes de températures, accéléromètres, etc. ont été installés sur la structure. Dans le travail présent, nous nous sommes seulement intéressés aux cordes optiques collées sur les poutres de sous-chaussées et les deux accéléromètres (carrés rouges) installés sur les poutres P1 et P10, comme montrés sur la Figure 8.2. Les traits rouges représentent les cordes optiques de longueur 1 m tandis que les traits bleus désignent celles plus longues, de longueur 2 m. Lors d'un événement

dynamique (par exemple le passage d'un véhicule sur la structure), les cordes optiques et les accéléromètres peuvent effectuer des mesures à la fréquence d'échantillonnage de 100 Hz. Les poutres sont numérotées de 1 à 10. Les travées sont dénotées par les chiffres 2 et 3 comme indiqué sur la figure. Nous distinguons les deux sens de passages : un passage est dit « Nord » lorsque le véhicule emprunte la voie qui est au-dessus des poutres 6 à 10. Le véhicule passe de la travée 2 (T2) à la travée 3 (T3). Réciproquement, un passage sur la voie supportée par les poutres 1 à 5 est dit le passage « Sud ». Le véhicule rencontre tout d'abord la travée 3 puis la travée 2.

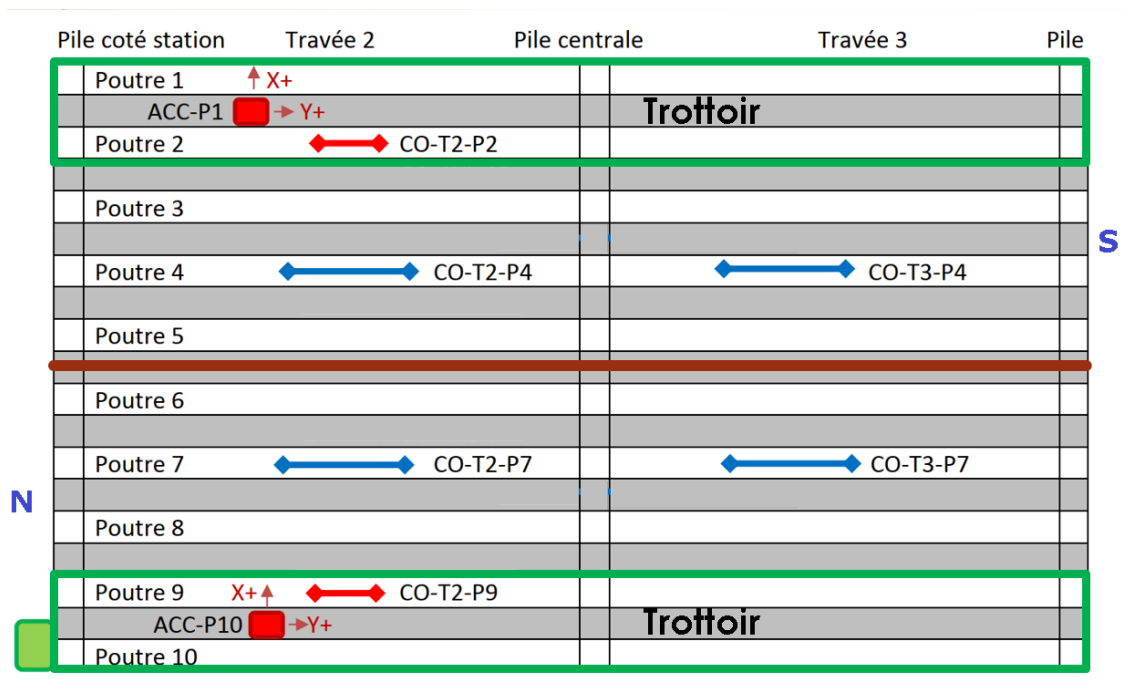


FIGURE 8.2 – Plan d'instrumentation des capteurs considérés (Source OSMOS)

En 2019, une campagne d'essais de chargement sur le pont a été effectuée par la société OSMOS et ses partenaires. Trois poids-lourds ont été utilisés pour les essais. Ces véhicules sont nommés par leur poids total. Il s'agit des véhicules de 19 T, 32 T et 44 T dont les détails principaux de chargements et de géométrie sont comme suit :

- Véhicule 19 T : Chargement par essieu avant :  $P_1 = 6.24 t$ , chargement par essieu arrière :  $P_2 = 12.70 t$ . Distance entre 2 essieux :  $d_1 = 4.05 m$ .
- Véhicule 32 T : Les chargements sur les essieux  $P_1, P_2, P_3, P_4$  sont respectivement  $5.66 t, 7.96 t, 11.14 t$  et  $6.96 t$ . Les distances entre 2 essieux consécutifs sont :  $d_1 = 1.80 m, d_2 = 3.00 m$  et  $d_3 = 1.38 m$ .
- Véhicule 44 T : Les chargements sur les essieux  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  sont respectivement  $6.94 t, 10.62 t, 9.20 t, 8.64 t$  et  $8.16 t$ . Les distances entre 2 essieux consécutifs sont :  $d_1 = 3.80 m, d_2 = 3.01 m$  et  $d_3 = d_4 = 1.25 m$ .

Une présentation détaillée de l'essai se trouve dans la Section 3.3, Chapitre 3. Les caractéristiques détaillées des véhicules utilisés dans ces essais sont également présentées dans le tableau 3.1 (Chapitre 3).

Dans cette phase d'application, nous allons modéliser les passages des trois véhicules passant sur la structure à différentes vitesses et pour différentes excentricités (l'écart entre les roues internes d'un véhicule et la ligne médiane de la chaussée). Différents scénarios d'endommagement seront pris en compte.

### 8.2.2 Modèle numérique raffiné

Dans ces travaux, afin de mieux s'adapter à la situation actuelle des essais, le maillage du pont a été raffiné. Dans ce modèle, le hourdis et les trottoirs sont modélisés par des éléments de type coque DKT, alors que les autres composantes rectilignes (poutres sous chaussée, entretoises) sont modélisées par les éléments de poutre droite Euler-Bernoulli (POU\_D\_E). Nous comptons 208 éléments sur sa longueur, 36 éléments sur sa largeur, soit un nombre total de 7 904 éléments quadrangles (2D), 3 025 éléments 1D et 10 486 nœuds (Figure 8.3). Chaque travée courte contient 38 éléments de poutre alors que chaque travée longue contient 66 éléments. En comparaison avec le modèle numérique présenté au Chapitre 3, la taille moyenne des éléments passe de  $0.36\text{ m}$  à  $0.22\text{ m}$ . Pour un passage de véhicule à une vitesse de  $50\text{ km/h}$ , la fréquence d'échantillonnage du modèle est désormais environ  $63\text{ Hz}$ .

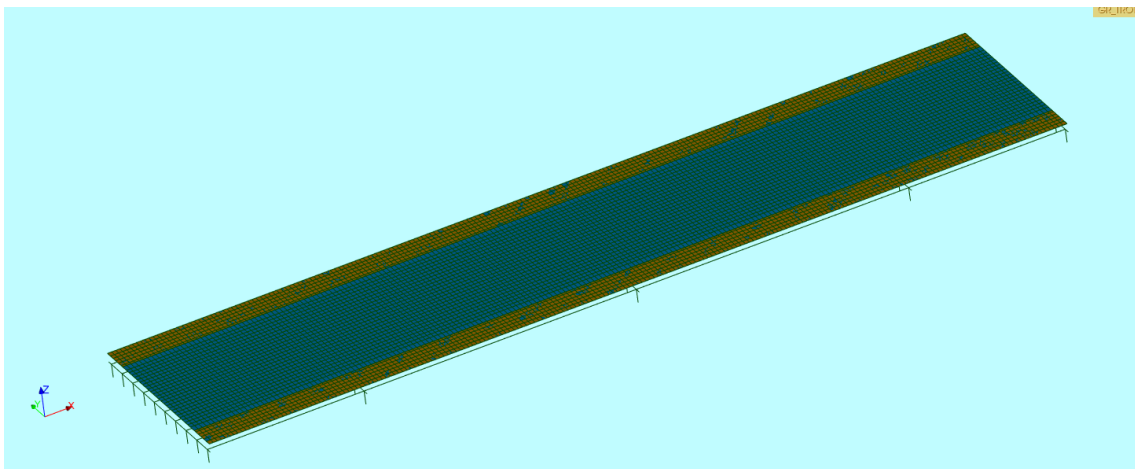


FIGURE 8.3 – Maillage raffiné du pont à quatre travées

En ce qui concerne les propriétés mécaniques du matériau, la masse volumique du béton est prise égale à  $2500\text{ kg/m}^3$ , son coefficient de Poisson est  $0.2$ . Le module d'élasticité des poutres et des entretoises est égal à  $35\text{ GPa}$ , tandis que celui du hourdis est de  $32\text{ GPa}$  et de  $20\text{ GPa}$  pour les trottoirs. Le taux d'amortissement est pris à  $5\%$  pour les calculs dynamiques. Des présentations détaillées du modèle numérique du pont (propriétés des matériaux, modélisation des composantes de la structure et leurs liaisons, etc.) se trouvent à la section 3.5, Chapitre 3.

Dans ce modèle de calculs numériques, les passages des véhicules sont effectués en sens unique, le long de l'axe X (Figure 8.3). Les passages modélisés dans le modèle numérique correspondent aux passages « Nord » sur la structure réelle. En admettant que le pont est symétrique, lorsque nous considérons les passages « Sud », l'ordre des travées et des poutres est inversé.

### 8.2.3 Comparaison des résultats numériques aux données réelles

Afin de valider le modèle numérique, nous allons comparer les résultats numériques obtenus par le modèle avec les mesures *in situ*. Nous disposons des capteurs (cordes optiques, accéléromètres) au milieu des travées centrales comme indiqué dans la figure 8.4. Les traits verts représentent les cordes optiques longues, de longueurs 2 m alors que les points rouges représentent les accéléromètres.

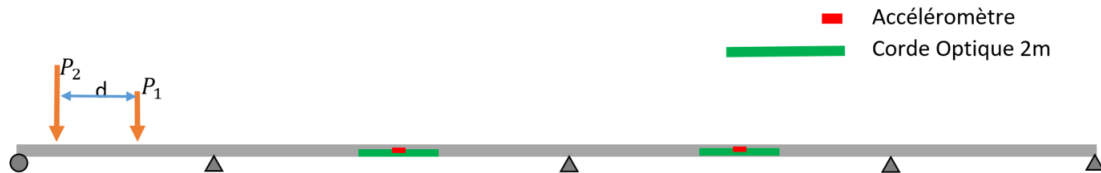


FIGURE 8.4 – Disposition des capteurs sur le pont à quatre travées

Plusieurs passages ont été effectués le jour du test. Nous choisissons cinq passages des véhicules de test qui sont :

- Trois passages « Sud » des véhicules 19 T, 32 T et 44 T ;
- Le passage « Nord » du véhicule 32 T ;
- Le passage « Sud » et « centré » du véhicule 32 T. Le véhicule se trouve au milieu de la route pour ce passage.

Les valeurs des excentricités prises en compte dans le modèle des passages « Nord » et « Sud » sont 0.54 m pour les véhicules 19 T, 32 T et 0.27 m pour le véhicule 44 T. Pour le cas du passage « centré », le véhicule traverse le pont de telle manière qu'il soit centré sur la ligne médiane. De plus, la distance entre les deux roues d'un même essieu dans le sens transversal pour le cas du véhicule de 44 T est de 2.45 m, contre 2 m pour les autres véhicules. Tous les passages se font à 50 km/h. La déformation moyenne sur la longueur du capteur est calculée par :

$$\overline{\varepsilon}_{AB} = z_0 \times \frac{\theta_B - \theta_A}{l_{AB}} \quad (8.1)$$

où  $\theta_A$ ,  $\theta_B$  sont respectivement les rotations en direction Y aux deux extrémités de la corde optique (A, B). Ces données sont obtenues directement à l'aide des calculs aux éléments finis dans le solveur *code\_Aster* (degré de liberté DRY). Dans ce cas, nous prenons  $z_0 = 0.47$  m et  $l_{AB} = 2$  m.

La figure 8.5 représente les résultats des calculs numériques en comparaison avec les données réelles lors des passages dans les sens « Nord » et « Sud » des véhicules de test. Pour les passages « Sud » (Figures 8.5a, 8.5b, 8.5c), les courbes « numériques » et « expérimentales » avec une grande amplitude de déformations sont en relativement bon accord. Ces courbes sont obtenues par les capteurs installés sous les poutres situées au milieu des voies (T2P4, T3P4). Seules les courbes représentant la déformation de la poutre instrumentée sous le trottoir du côté de passage (courtes vertes, T2P2) montrent un écart important entre les déformations mesurées et celles obtenues par le solveur *code\_Aster*. Cela vient probablement des comportements non-linéaires des trottoirs que nous ne prenons pas correctement en compte. Contrairement aux passages « Sud », lors du passage « Nord » du

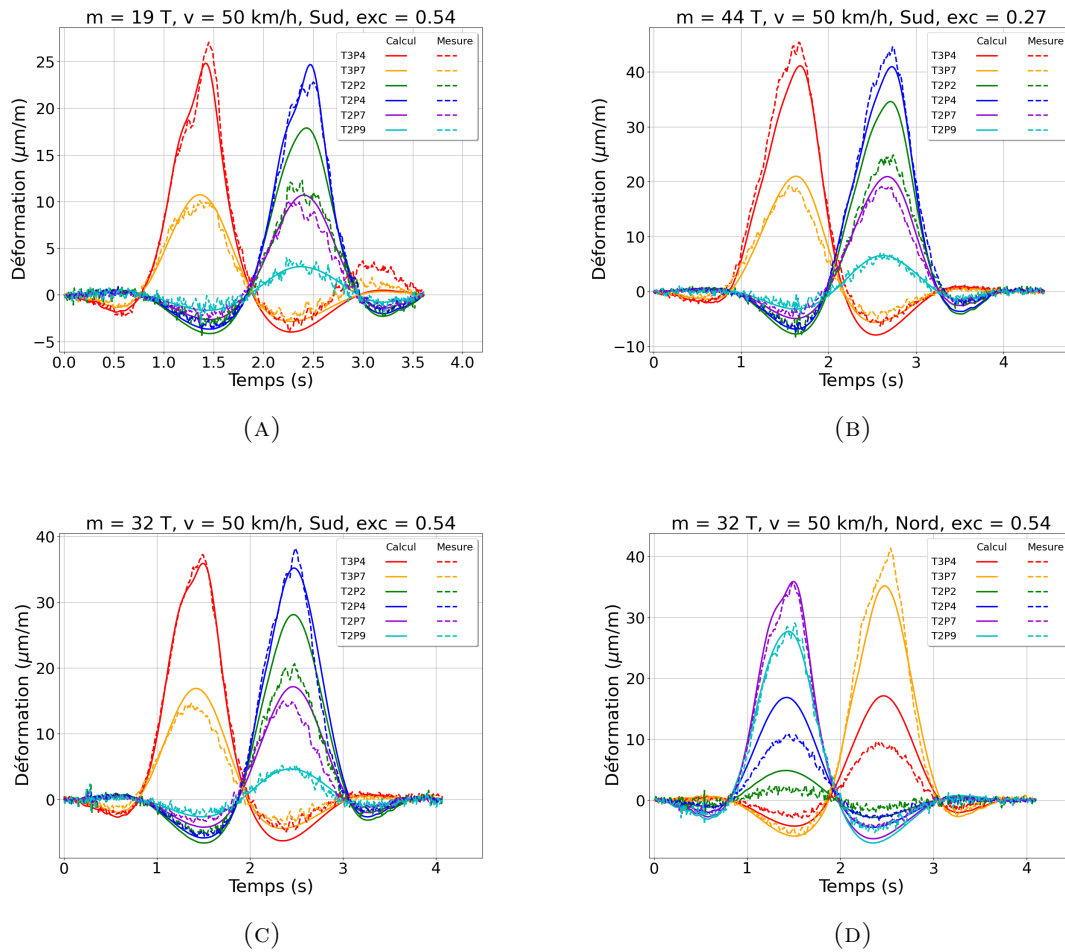


FIGURE 8.5 – Comparaison des résultats des calculs numériques et des mesures réelles : Passages « Sud » et « Nord » des véhicules.

véhicule 32 T (figure 8.5d), nous observons un bon accord entre les courbes de grande amplitude de la travée T2 : les courbes en violet, obtenues sur la poutre au milieu de la voie « Nord » (T2P7) et celles en cyan, obtenues sur la poutre au-dessous du trottoir Nord (T2P9). Cependant, un écart plus important est observé pour les courbes donnant la poutre au milieu de la voie Nord supportant la travée T3 (T3P7 - lignes oranges). Pour la plupart des passages « Nord », nous observons que la valeur maximale des déformations de la poutre P7 de la travée 3 (T3P7) est de 15 % à 20 % plus grande que celle obtenue pour la même poutre de la travée 2 (T2P7). Nous observons une dissymétrie du comportement mécanique de la structure, alors que le modèle est supposé être symétrique.

La figure 8.6 représente les résultats du modèle numérique et les mesures réelles obtenues pour le passage centré-Sud du véhicule 32 T. Comme le modèle est symétrique, les déformations calculées sont identiques pour les paires de poutres : P2 et P9, P4 et P7. De ce fait, nous observons qu'une seule courbe en continue pour ces paires de poutres. Les déformations des poutres P4 et P7 dans les deux travées (T2 et T3) mesurées sont légèrement différentes. Les courbes « expérimentales » et « numériques » de grande amplitude sont en bon accord. Des écarts plus importants sont observés pour les déformations des poutres sous trottoirs (T2P2, T2P9).

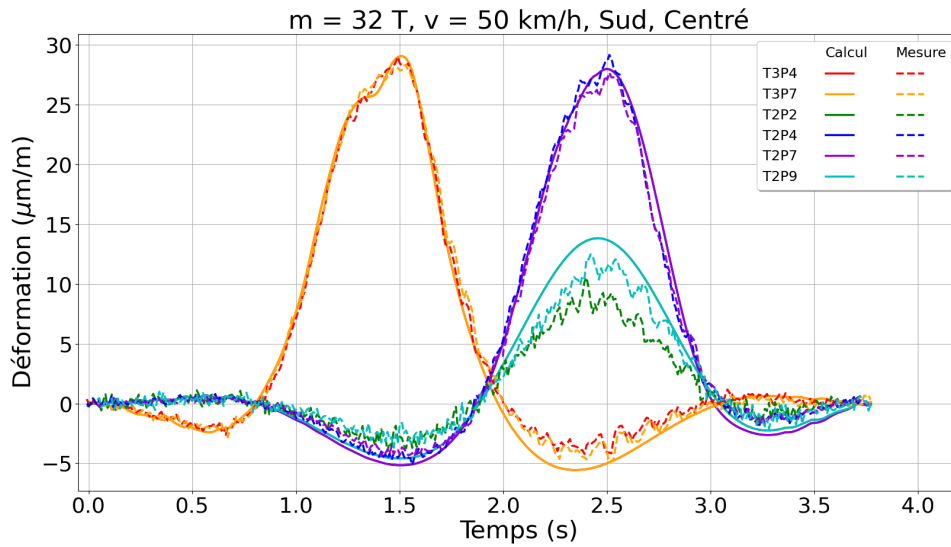


FIGURE 8.6 – Comparaison des résultats des calculs numériques et des mesures réelles : Passage centré du véhicule 32 T.

### 8.3 Critère d'endommagement basé sur l'identification des chargements

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode d'identification des chargements par optimisation (Chapitre 5) à la structure. Dans un premier temps, le modèle de calculs numériques par éléments finis est considéré. Nous présentons quelques applications d'un critère d'endommagement basé sur l'identification de chargements appliqués à une structure saine, puis aux structures endommagées.

Pour la modélisation des chargements, le chargement par essieu est divisé par deux dans le sens transversal. La figure 8.7a représente le cas du passage d'un véhicule à deux essieux (ici, il s'agit du cas du véhicule 19 T). Pour le chargement quasi-statique, nous utilisons les deux forces ponctuelles espacées de la même largeur dans le sens transversal et de même excentricité que celles du véhicule considéré (figure 8.7b).

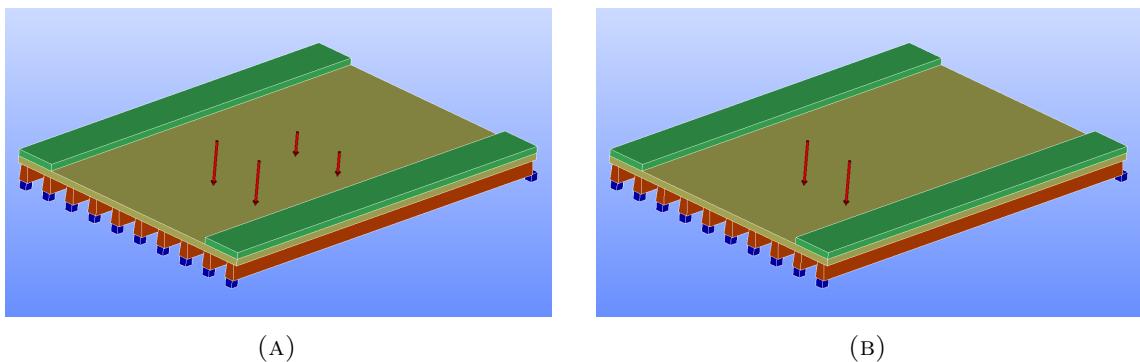


FIGURE 8.7 – Modélisation des chargements sur le pont. A gauche : Véhicule à 2 essieux (19 T) et à droite : Chargement pour calculer les moments statiques unitaires ( $M_{se}$ ).

### 8.3.1 Structure saine

Dans un premier temps, la structure est supposée être non-endommagée. Nous examinons les passages des trois véhicules (19T, 32T, 44T). Contrairement au cas des poutres rectilignes unidimensionnelles (Chapitre 7), les écarts portant sur le poids total des véhicules sont calculés dans les deux sens : transversal et longitudinal.

#### Direction transversale

La figure 8.8 présente le schéma d'instrumentation de la structure dans le sens transversal. Nous supposons que les paires de capteurs (corde optique et accéléromètre, représentées par un rectangle rouge sur ce schéma) sont installées au milieu des poutres de la deuxième travée. Afin d'éviter les déformations négatives, les deux poutres de rive (P1 et P10) ne sont pas prises en considération. Seules huit poutres (de P2 à P9) sont prises en compte. Sur le schéma, les appuis sont représentés par des lignes noires en pointillé et les poutres par les lignes blanches. Nous supposons que les véhicules ne traversent le pont que dans la direction « Sud ». Par conséquent, la numérotation des poutres est inversée par rapport à celle présentée dans le schéma d'instrumentation de la structure réelle. En terme de glossaire, nous parlons également des travées « première, deuxième, troisième et quatrième » pour distinguer les travées T1, T2, T3, T4 du pont à quatre travées (structure réelle).



FIGURE 8.8 – Instrumentation de la structure dans le sens transversal

Nous déterminons alors dans un premier temps les écarts entre les poids totaux estimés lors de passages des différents véhicules et leurs valeurs de référence. La figure 8.9 représente ces écarts en fonction des poutres considérées. Lorsque la structure est non-endommagée, nous observons que ces écarts sont pratiquement nuls pour toutes les poutres.

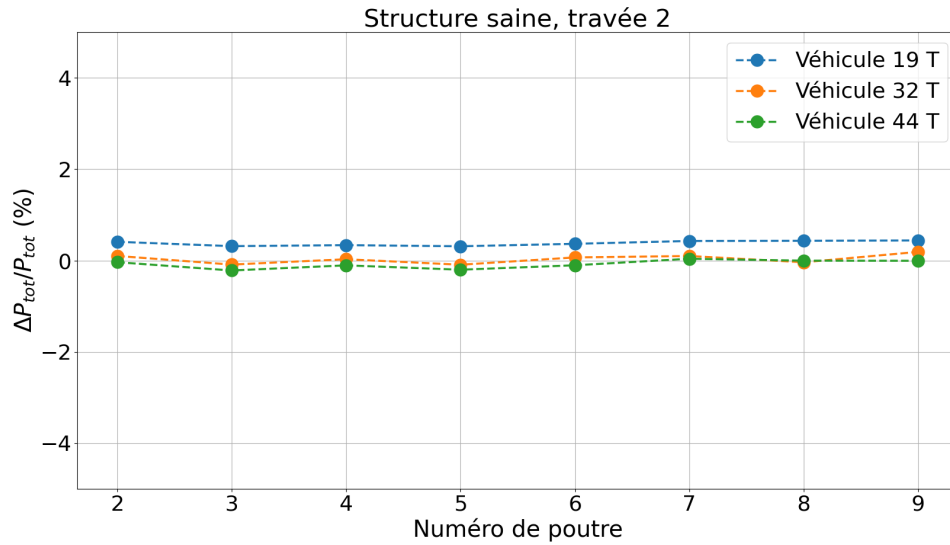


FIGURE 8.9 – Écarts relatifs des chargements estimés : Le sens transversal

### Direction longitudinale

En ce qui concerne la direction longitudinale, nous plaçons trois paires de capteurs sous les poutres sélectionnées des travées courtes (les travées extérieures : la première travée et la quatrième travée) et cinq paires de capteurs sous celles des travées longues (c.-à.d. les travées centrales, la deuxième travée et la troisième travée), soit 16 paires de capteurs au total dans la direction longitudinale. Sous une poutre courte (de longueur  $L_1 = 8.4\text{ m}$ ), elles se trouvent à 1.5 m, 4.2 m et 6.9 m de l'extrémité gauche. De la même façon, les cinq paires de capteurs se trouvent à 1.5 m, 4.5 m, 7.3 m, 10.1 m et 13.1 m de l'extrémité gauche d'une poutre longue (de longueur  $L_2 = 14.6\text{ m}$ ). Le schéma d'instrumentation des paires de capteurs disposées le long de la structure est présenté dans la figure 8.10.



FIGURE 8.10 – Instrumentation des capteurs le long de la structure

Les écarts des poids totaux estimés par les paires de capteurs placées sous la poutre 8 par rapport aux poids totaux des véhicules lors des trois passages sont présentés dans la figure 8.11. Nous observons que ces écarts relatifs sont relativement faibles pour tous les trois véhicules, notamment pour les véhicules 19 T et 44 T. Pour le passage du poids lourd 32 T, les écarts estimés par les paires de capteurs placées aux travées 3 et 4 sont plus importants. Ces écarts de grande amplitude pourraient venir de l'ajustement des distances entre les essieux en fonction de la taille du maillage. Les éléments dans les travées longues sont légèrement plus grands que ceux dans les travées courtes (de l'ordre de 0.1 %). Dans les zones où la rotation des nœuds du maillage de la poutre considérée (DRY) varie rapidement, les distances arrondies entre les forces nodales pourraient affecter la reconstruction des



signaux et donner un écart plus important. Nous n’observons pas ces écarts de grande amplitude sur les poids estimés dans le modèle analytique de poutre unidimensionnelle, dans laquelle la discrétisation en direction  $X$  est plus fine (comprise entre 1  $mm$  et 1  $cm$ ).

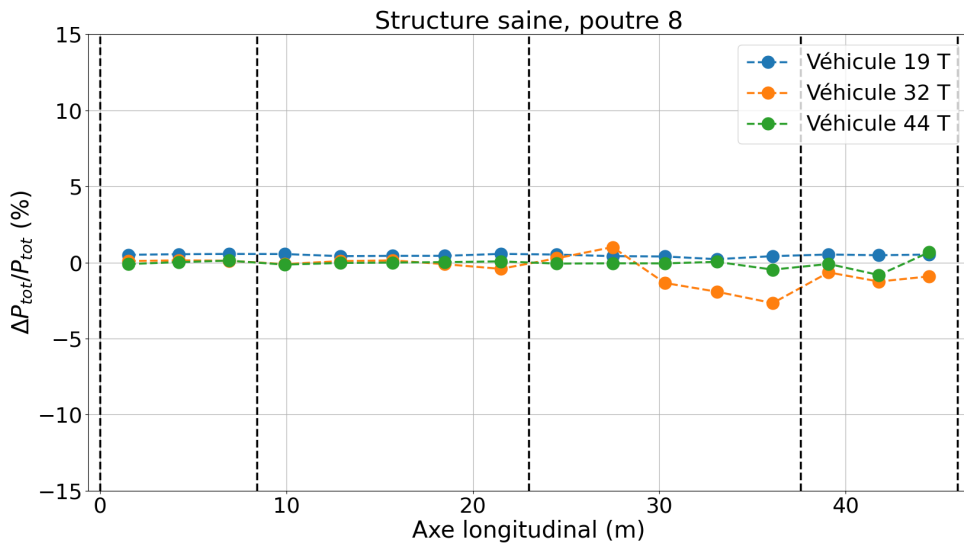


FIGURE 8.11 – Écarts relatifs des chargements estimés : Le sens longitudinal

### 8.3.2 Structure endommagée

Nous passons maintenant au cas où la structure est endommagée. Nous supposons que seules les poutres sous chaussée peuvent être endommagées. Dans notre modèle numérique, l’endommagement est modélisé comme un tronçon de poutre avec un module de Young réduit. De ce fait, un endommagement est caractérisé par la réduction du module d’élasticité  $\Delta E$ , exprimée en pourcentage et par la longueur du tronçon endommagé, en *mètre*.

Nous supposons que l’endommagement se trouve au milieu d’une poutre longue sous la deuxième travée (Figure 8.12). En raison de la taille des éléments utilisés, dans notre modèle numérique de la structure, la zone endommagée est constituée de 10 éléments 1D (POU\_D\_E), soit une longueur de 2.212  $m$ . Dans le sens longitudinal (l’axe  $X$ ), ses extrémités se trouvent à  $x_1 = 14.594 m$  et  $x_2 = 16.806 m$ . Dans le cadre de l’étude présente, chaque scénario d’endommagement correspond uniquement à une seule zone de modification du module de Young dans une seule poutre sous chaussée.

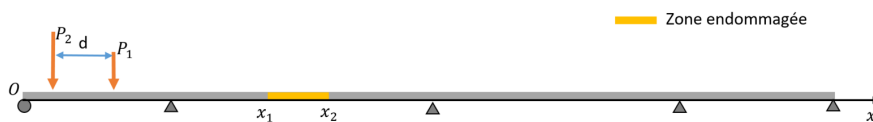


FIGURE 8.12 – Structure endommagée

Dans notre étude, les poutres 4, 7 et 8 sont successivement considérées comme étant endommagées. La réduction du module de Young est variable entre 0 % (structure saine)

et 50 % (structure gravement endommagée). La structure endommagée est soumise aux passages des poids lourds 19 T et 32 T à une vitesse de  $v = 50 \text{ km/h}$ . Les paires de capteurs sont placées au milieu de la deuxième travée pour les études dans la direction transversale, comme indiqué sur le schéma de la figure 8.8. Dans le cas où la direction longitudinale est prise en considération, les paires de capteurs sont placées le long des poutres considérées comme montré sur la figure 8.10.

### Direction transversale

Nous considérons les passages du véhicule 19 T dans les cas où les poutres 4, 8 sont endommagées. De même, les passages du poids lourd 32 T sont également considérés lorsque les poutres 4 et 7 sont successivement endommagées. Ici, nous prenons deux niveaux d'endommagement. La réduction de module de Young est de 25 % et de 50 %. Nous traçons les écarts sur les poids propres estimés par les paires de capteurs situées au milieu des poutres sous la deuxième travée. Les écarts relatifs sur les poids estimés dans le sens transversal lors des passages de différents véhicules dans les différents scénarios d'endommagement sont présentés sur la figure 8.13.

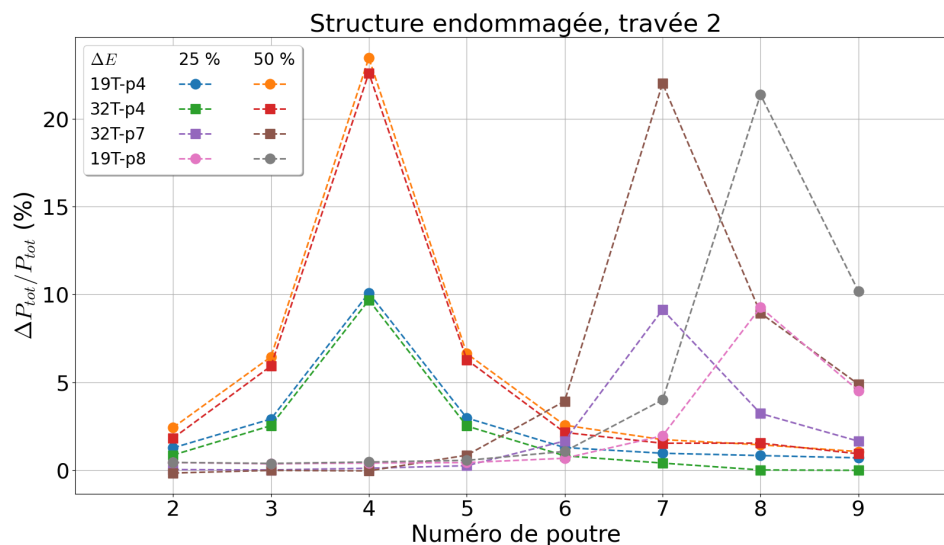


FIGURE 8.13 – Écarts relatifs des chargements estimés : Structure endommagée

Dans la figure 8.13, la légende est de type  $\text{XXT-pY}$ . Les deux premiers chiffres ( $\text{XX}$ ) désignent le type du véhicule (19 T, 32 T ou 44 T) alors que le dernier chiffre après la lettre « p » ( $\text{Y}$ ) représente le numéro de la poutre endommagée (4 ou 7). Pour chaque passage, nous observons un pic de plus grande amplitude qui correspond à la poutre endommagée. De plus, les écarts sur les poids propres calculés à partir des paires de capteurs situées sur les poutres voisines de celle endommagée ne sont pas nuls. Ces écarts déterminés pour les poutres voisines ont des valeurs pouvant être comprises entre 20 % et 40 % de la valeur des pics principaux.

La figure 8.14 représente les écarts relatifs maximaux sur les chargements estimés (les pics principaux des courbes sur la figure 8.13) en fonction de la réduction du module de Young. Nous constatons une relation pratiquement linéaire entre les écarts relatifs sur les poids propres estimés des véhicules et la réduction du module d'élasticité. Les écarts sur

les poids propres atteignent 5 % lorsque la réduction du module de Young est de 15 % tandis que l'écart maximal estimé est de l'ordre de 22 % quand la poutre est gravement endommagée ( $\Delta E = 50 \%$ ). Ces écarts estimés sont inférieurs aux écarts estimés pour le cas d'une poutre simple soumise aux chargements mobiles (Chapitre 7) en raison de la répartition des chargements sur l'ensemble des poutres sous chaussées.

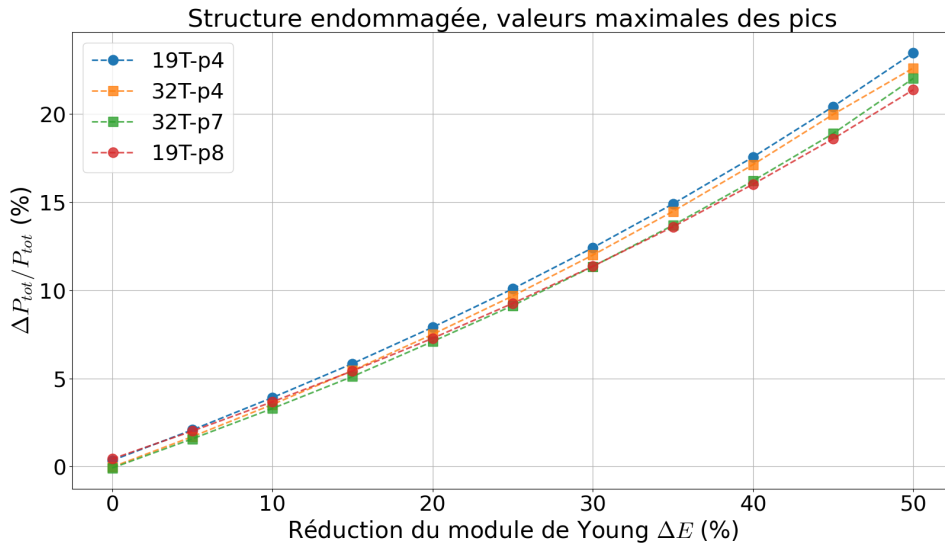


FIGURE 8.14 – Écarts relatifs des chargements estimés en fonction de l'endommagement

### Direction longitudinale

Concernant le sens longitudinal, nous disposons les paires de capteurs le long de la poutre 8 comme montré sur la figure 8.10. De plus, nous supposons également que la poutre 8 est endommagée. Cette dernière est modélisée par une zone de réduction du module de Young de longueur  $2.12 m$  au milieu de la deuxième travée (Figure 8.12). La réduction du module d'élasticité de cette zone est variable. La structure est soumise au passage du véhicule 19 T à  $50 km/h$ .

Dans cette direction, nous faisons l'hypothèse que le poids du véhicule n'est pas connu à l'avance. Nous avons vu dans le chapitre 7 pour le cas d'une poutre continue, à l'exception du cas pour lequel la zone endommagée se trouve en-dessous du premier couple de capteurs, que le poids total estimé par celui-ci est très proche du poids de référence et que sa valeur est assez stable. Nous prenons cette valeur comme celle de référence. Soit  $n_c$  le nombre total des couples de capteurs, nous pouvons calculer les écarts relatifs de la façon suivante (notons que  $\epsilon_1 = 0$ ) :

$$\epsilon_i = 100 \times \left( \frac{P_{[i]}^e}{P_{[1]}^e} - 1 \right), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (8.2)$$

Pour détecter la présence de l'endommagement, nous prenons la somme de ces écarts comme un critère global :

$$\mathcal{E} = \sum_{k=1}^{n_c} |\epsilon_k| \quad (8.3)$$

La figure 8.15 représente les écarts entre le poids estimé du véhicule 19 T par différents couples de capteurs et celui estimé par le premier couple. Nous observons un pic principal à l'endroit où se trouve l'endommagement. De plus, nous constatons d'autres pics de plus faibles valeurs autour de la zone endommagée.

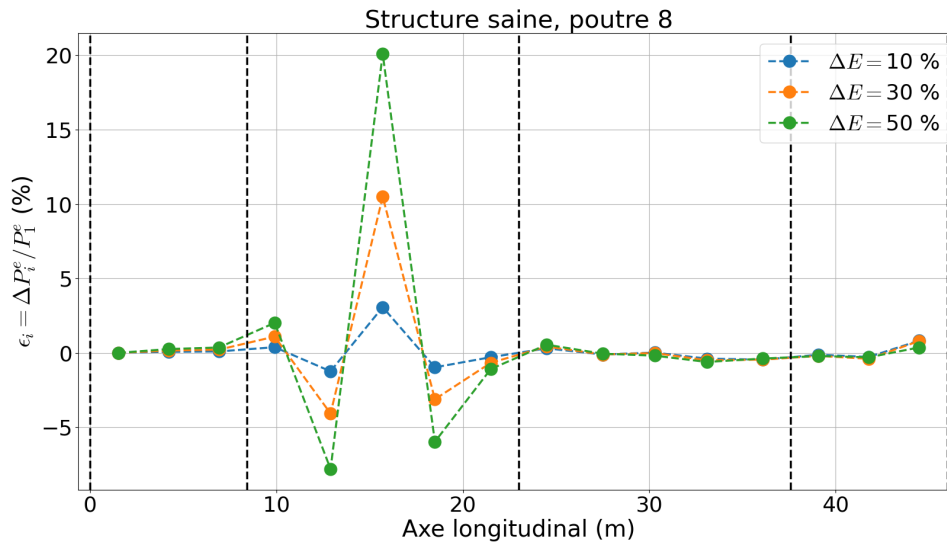


FIGURE 8.15 – Écarts relatifs des chargements estimés : poutre 8 endommagée – Direction longitudinale.

Nous présentons ensuite la relation entre le critère global  $\mathcal{E}$  et la réduction du module de Young  $\Delta E$  (Figure 8.16). Nous observons une relation pratiquement linéaire de  $\mathcal{E}$  en fonction du niveau d'endommagement. Nous remarquons également que la valeur de ce critère global dépend du plan d'installation des couples de capteurs.

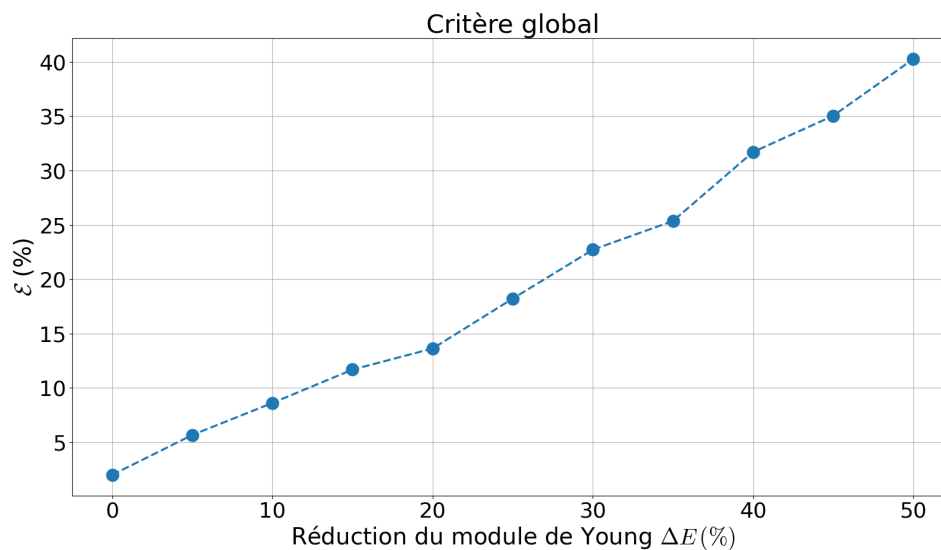


FIGURE 8.16 – Critère global  $\mathcal{E}$  (exprimé en pourcentage)

### 8.3.3 Structure rigidifiée

Nous considérons le cas où la zone « endommagée » de la poutre présente une réduction négative du module d'élasticité. Autrement dit, la structure est maintenant rigidifiée. Le tronçon de poutre avec une augmentation du module de Young reste à la même position que la zone endommagée présentée dans la section précédente. Il s'agit d'une zone de longueur  $2\text{ m}$ , située au milieu de la deuxième travée de la structure.

L'augmentation du module d'élasticité est opérée pour les poutres 2, 4 et 7. La structure est soumise également aux passages des poids lourds 19 T et 32 T à une vitesse de  $50\text{ km/h}$ . Dans cette étude, nous nous intéressons seulement à la direction transversale.

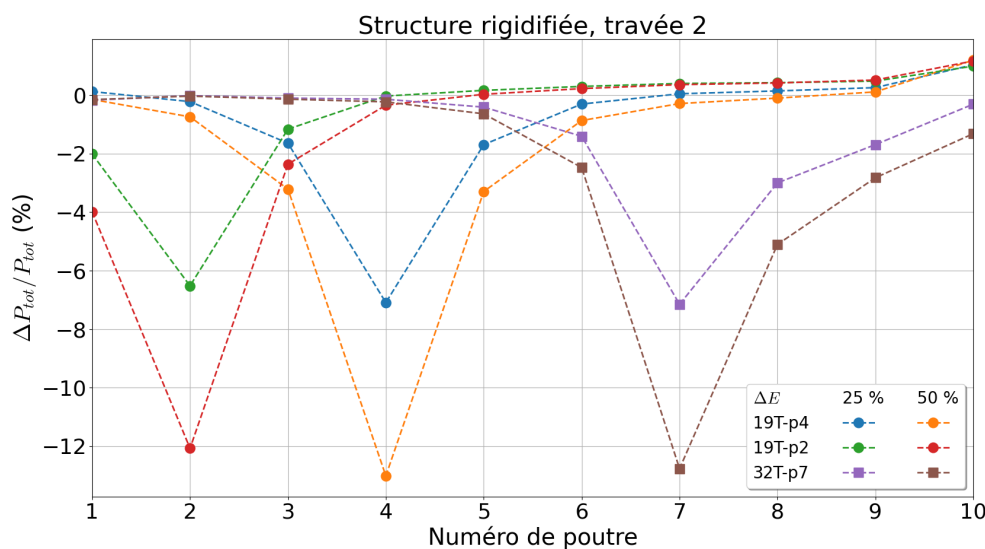


FIGURE 8.17 – Écarts relatifs des chargements estimés : Structure rigidifiée

La figure 8.17 représente deux niveaux de rigidification avec un ajout de 25 % et de 50 % du module de Young initial au tronçon sélectionné. Nous observons des écarts négatifs entre le poids estimé et le vrai poids des véhicules. Cela traduit le fait qu'avec la présence d'une section rigidifiée, la déformation obtenue dans cette dernière est plus petite que celle mesurée dans une section normale (structure saine). Par conséquent, le poids estimé en utilisant les données fournies par cette section est inférieur au poids de référence du véhicule et entraîne un écart négatif. Avec une augmentation de 50 % du module d'élasticité initial, nous observons des écarts maximaux de l'ordre 12 % à 13 %.

La figure 8.18 représente la dépendance des écarts maximaux (valeurs absolues) entre le poids estimé et le poids de référence des véhicules en fonction du niveau de rigidification. Nous obtenons une relation pratiquement linéaire entre les valeurs des pics principaux et l'augmentation du module de Young, mais dans le sens opposé en comparaison avec les courbes présentées dans la figure 8.14 (le cas où la structure est endommagée avec une réduction du module de Young). De plus, la pente de ces courbes est plus faible que le cas de structure endommagée. Comme la déformation est proportionnellement inverse à la rigidité en flexion ( $EI$ ) de la structure, une réduction de 50 % du module de Young implique une déformation qui est deux fois plus grande que celle obtenue pour une structure

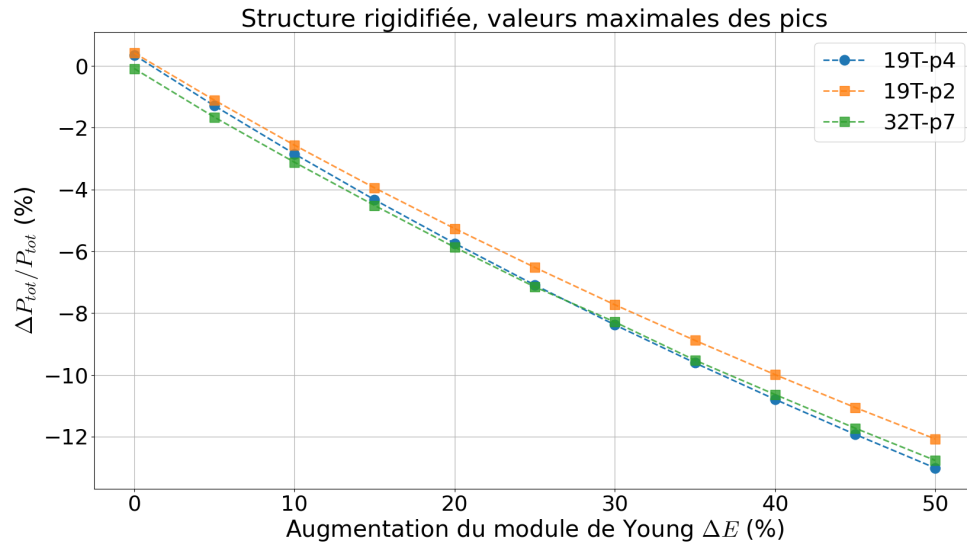


FIGURE 8.18 – Écarts relatifs des chargements estimés en fonction du niveau de rigidification

saine (soit un changement de 100 %), alors que l'ajout de 50 % au module de Young initial entraîne seulement une réduction de 33 % de la déformation finale.

## 8.4 Application aux données réelles

Dans cette partie, nous allons appliquer la méthode d'identification présentée aux résultats de mesures obtenus lors de la campagne d'essais de chargement sur la structure réelle. Dans la section 8.2.3, nous avons observé une cohérence entre les données mesurées et le modèle numérique de la structure saine. De ce fait, nous supposons alors que le pont est non endommagé. Les données entrées sont les résultats de mesures obtenues durant les passages « Sud » des véhicules, à vitesse  $50 \text{ km/h}$ , à l'aide de l'accéléromètre sur la poutre P1 (ACC-P1), des cordes optiques collées sur la face latérale des poutres 2, 4, 7, 9 de la travée T2 et de deux cordes optiques collées sur les poutres 4 et 7 de la travée P3 (figure 8.19). Nous supposons que l'excentricité des passages des véhicules 19 T et 32 T est de  $0.54 \text{ m}$  alors que celle du passage du poids lourds 44 T, qui possède une largeur entre les roues d'un même essieu plus importante, est de  $0.27 \text{ m}$ .

Nous allons considérer les capteurs dans deux directions : longitudinale et transversale. Comme présenté sur la figure 8.19, en ce qui concerne la direction longitudinale, nous considérons deux axes 1 et 2 (lignes oranges), le long des poutres P4 et P7. Les mesures des cordes optiques bleues seront prises en compte. Quant à la direction transversale, nous considérons alors l'axe A-A (ligne vertical en violet). Les mesures des quatre cordes optiques dans la section seront utilisées.

### 8.4.1 Direction longitudinale

Nous ne disposons que de deux cordes optiques dans la direction longitudinale (sur les axes 1 et 2). En supposant que le poids des véhicules est inconnu, nous prenons alors les poids estimés à l'aide des cordes optiques de la travée T2 comme valeurs de référence. Nous

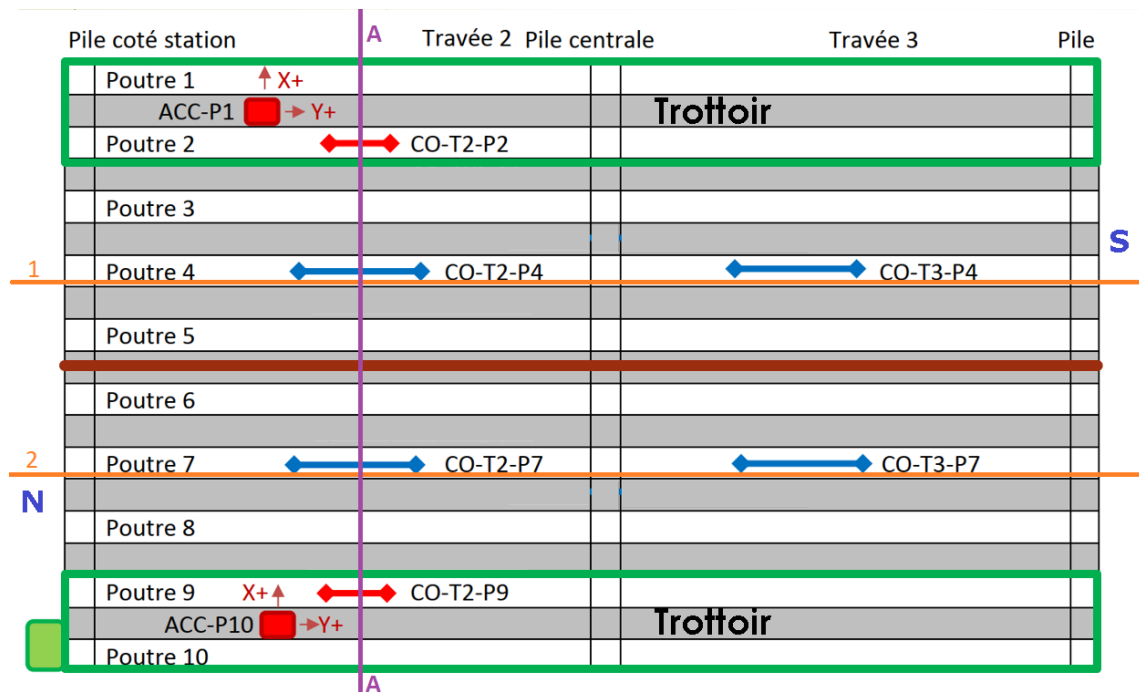


FIGURE 8.19 – Plan d'instrumentation avec les axes choisis

calculons l'écart entre les valeurs estimées par les mesures dans la travée T3 par rapport à celles obtenues dans la travée T2.

$$\epsilon_2 (\%) = 100 \times \left( \frac{P_{tot}^{(T3)}}{P_{tot}^{(T2)}} - 1 \right) \quad (8.4)$$

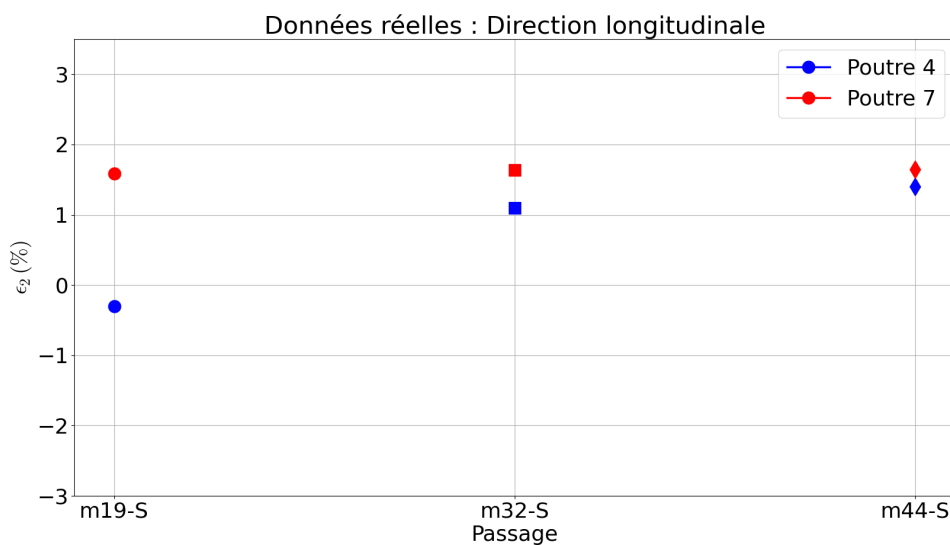


FIGURE 8.20 – Écarts relatifs des chargements estimés : Structure réelle

La figure 8.20 représente les écarts  $\epsilon_2$  entre les poids estimés à l'aide des mesures sur les poutres numéros 4 et 7 de la travée T3 et T2. Nous observons que ces écarts sont

relativement petits, et qu'ils traduisent un bon accord entre les mesures de déformation des poutres sous les voies de ces deux travées.

#### 8.4.2 Direction transversale

Nous considérons maintenant le sens transversal, où les déformations des poutres instrumentées dans la travée T2 sont exploitées.

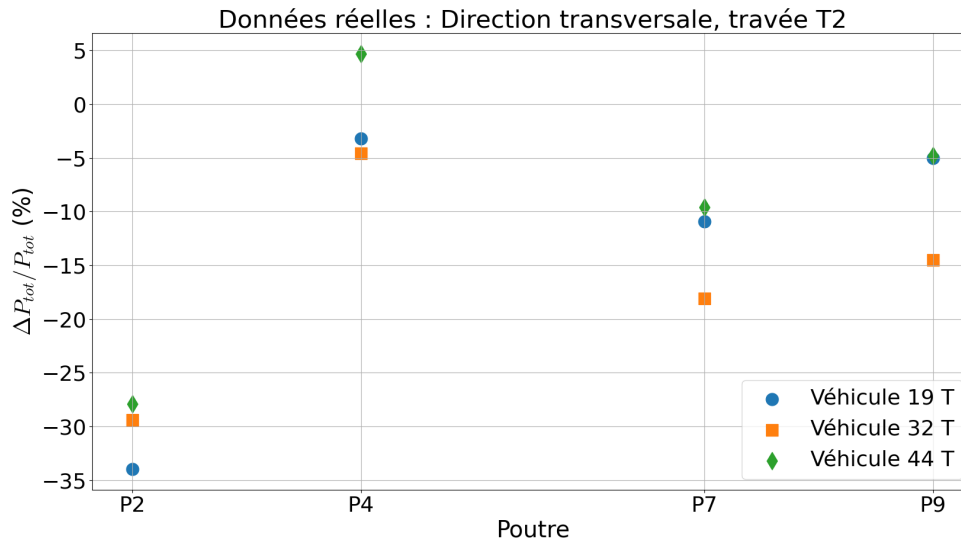


FIGURE 8.21 – Écarts relatifs des chargements estimés : Structure réelle

La figure 8.21 représente les écarts relatifs entre les poids estimés et les poids des véhicules utilisés dans la campagne d'essais. Nous observons des écarts les plus importants (de l'ordre de 25 % à 35 %) sur la poutre P2. Ces écarts importants, de valeurs négatives impliquent une « rigidification » de la structure réelle par rapport au modèle numérique. En effet, la poutre 2 est particulière, parce qu'elle est située sur le trottoir. La présence de ce dernier augmente la rigidité en flexion de la structure. De plus, les éléments accessoires comme le garde-corps, les corniches, etc. contribuent aussi à l'augmentation du moment quadratique de cette partie de la structure. L'état de précontrainte dans les poutres sous-chaussée est également un facteur qui pourrait influencer le résultat. Dans le modèle numérique, les éléments accessoires et la précontrainte des poutres ne sont pas pris en compte. Pour des mesures obtenues à la poutre 4, ces écarts sont les plus faibles (compris entre -5 % et 5 %). Pour les autres poutres situées sous la voie en sens inverse (poutres numéros 7 et 9), ces écarts varient de 5 % à 20 %. Ces résultats sont compatibles avec la comparaison des courbes des histoires des déformations que nous avons dans la partie 8.2.3 (figure 8.5). Les écarts entre les déformations calculées numériquement et les mesures réelles entraînent les écarts les plus importants entre les poids estimés des véhicules avec ceux en réalité. Au contraire, la bonne concordance des courbes de déformation de grande amplitude obtenues numériquement et par la mesure fait que les écarts relevés par la corde optique sous la poutre P4 sont faibles. Les écarts ne sont pas parfaitement nuls parce qu'en pratique, il est difficile de connaître les vraies excentricités (distance entre les roues internes du véhicule et la ligne médiane de la route). Enfin, la vitesse réelle des véhicules n'est pas exactement à 50 km/h.



En ce qui concerne l'estimation à partir des amplitudes modales, dans notre modèle de structures de poutres rectilignes, l'accéléromètre et le capteur de déformation sont supposés être placés aux mêmes endroits (l'accéléromètre se trouve au milieu de la corde optique). Dans la structure réelle, les accéléromètres sont placés sur les poutres de rive (P1, P10) alors que les capteurs de déformation sont collés sur les faces latérales des poutres sélectionnées (P2, P4, P7 et P9). De ce fait, l'hypothèse faite de co-localisation de ces deux capteurs n'est pas totalement assurée. Enfin, les applications aux données réelles sur le critère à partir des amplitudes modales de l'accélération et de la déformation mesurées en même point restent à faire dans des travaux futurs.

## 8.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté quelques applications des méthodes d'identification proposées à une structure réelle. Les critères proposés sont appliqués aux résultats numériques ainsi qu'aux mesures réalisées sur ouvrage.

Le pont à quatre travées présente des comportements géométriques et mécaniques bidimensionnels. Nous avons examiné l'identification du chargement total du véhicule dans le sens transversal et proposé un critère de détection de l'endommagement basé sur l'estimation de la charge dans le sens longitudinal. Dans le sens transversal, lorsqu'une poutre sous chaussée du pont est endommagée, les écarts sur le poids total du véhicule estimé à partir de l'histoire des déformations de ses poutres voisines sont également influencés. De plus, nous observons une relation pratiquement linéaire entre les écarts maximaux estimés et la réduction du module de Young. Quant au critère dans le sens longitudinal, nous obtenons une relation linéaire de ce critère global en fonction du niveau de l'endommagement (caractérisée par la réduction du module de Young  $\Delta E$ ).

# Conclusions et perspectives

## Conclusions générales

Dans la première partie, nous avons traité un problème direct, en cherchant à déterminer les réponses des structures sous sollicitations du trafic en des points donnés. Un modèle de calcul analytique de poutres continues saines et endommagées soumises à des chargements mobiles a été développé. Ce modèle utilise les matrices de transfert comme les éléments-clés qui connectent deux segments voisins entre eux. Les réponses finales de la poutre (déplacement, déformation ponctuelle en un point, déformation moyenne sur une longueur, accélération, etc.) sont obtenues rapidement par la superposition des modes propres de vibration permettant d'effectuer plusieurs études paramétriques. L'endommagement présent dans la poutre est modélisé par deux approches différentes : l'une par un ressort spiral qui connecte deux segments de la travée fissurée alors que l'autre est caractérisée par une réduction du module de Young dans un tronçon de poutre. Le modèle analytique est validé par les calculs numériques comparatifs effectués à l'aide du logiciel de calculs aux éléments finis *code\_Aster*.

Ensuite, afin de mieux connaître les comportements mécaniques de la structure réelle étudiée dans ce travail, un modèle numérique complet de cette structure, un pont à quatre travées, est construit à l'aide de la plateforme *Salomé* (pour le maillage) et du logiciel *code\_Aster* (pour les calculs aux éléments finis). En plus des modes de flexion d'une portion de poutre 1D, les effets bidimensionnels sont également déterminés à l'aide de cette modélisation. Nous pouvons alors expliquer la présence de certaines fréquences de vibration de plaques obtenues à partir des données mesurées par un accéléromètre situé sur une poutre de rive dans l'une des travées centrales. Les valeurs de six premières fréquences calculées à partir des données réelles sont pratiquement confondues avec celles obtenues à l'aide du modèle numérique de la structure. Les études sur l'influence de la longueur des capteurs et de l'endommagement sur la réponse en déformation font l'objet du troisième chapitre de cette partie (Chapitre 4). A partir de la formulation mathématique et des données expérimentales, nous constatons que la déformation obtenue par une corde optique longue et par une jauge de déformation située au milieu de cette corde optique est identique, sauf lorsque la force passe au-dessus de la corde optique.

La deuxième partie est dédiée au problème inverse. Dans un premier temps, nous avons proposé des critères basés sur la distribution de l'aire sous les courbes de déformation. Les critères (global et local) permettent d'identifier la présence de l'endommagement sur une poutre ainsi que le localiser. Cependant, de nombreux capteurs longs de déformation (de type corde optique) sont nécessaires pour cela. Ensuite, nous avons développé des critères basés sur les mesures de capteurs en co-localisation à savoir une jauge de déformation et un accéléromètre. Les deux signaux nous donnent pour l'un la dérivée deuxième du

déplacement par rapport à l'espace et pour l'autre, la dérivée deuxième du déplacement par rapport au temps. Ces signaux montrent une corrélation particulière en regardant les composantes dynamiques et quasi-statiques. Les critères qui sont retrouvés par optimisation des signaux bruts ont été appliqués aux cas de passages des véhicules sur une poutre simple et montrent leur sensibilité à la présence de l'endommagement et leur faible dépendance aux bruits de mesure. Dans le cas où la structure est non-endommagée, les critères pourraient être utilisés pour la rétro-estimation des propriétés du véhicule. Les mesures réelles obtenues résultent de la superposition de différentes réponses modales. Par conséquent, la méthode présentée est bien adaptée avec les types de structures pour lesquels la participation à la réponse finale des modes supérieurs est négligeable. Nous avons ensuite cherché une seconde approche pour l'estimation des critères dans le domaine fréquentiel. Dans cette deuxième approche, nous avons utilisé les données provenant de la déformation et de l'accélération mesurées en un même point pour l'identification des paramètres modaux à l'aide de la méthode de fraction rationnelle des polynômes. Les modules des valeurs de pôles et de constantes modales estimées sont proportionnels au taux de participation du mode correspondant à la réponse finale (ou la hauteur de pic de la transformée de Fourier des signaux pour chaque mode individuel). De ce fait, nous constatons que le rapport entre le module des pôles (ou constante modale) de l'accélération et de la déformation est pratiquement proportionnel à la rigidité en flexion  $EI$  de la poutre, et qu'il pourrait être envisagé de l'utiliser comme un critère de détection de l'endommagement.

Enfin, les critères proposés ont été appliqués aux structures de poutres (poutres simples et continues, avec ou sans la présence de l'endommagement) et de pont. C'est le sujet de la dernière partie qui est la partie applicative. Dans un premier temps, à partir des écarts entre les poids estimés et le poids propre du véhicule à différents endroits, nous avons pris la somme de ces écarts comme un indicateur de la présence de l'endommagement alors que la combinaison des signes des rapports individuels calculés donne des informations sur la localisation du défaut. Cet indicateur semble indépendant du type de véhicule et de la vitesse du chargement. Dans la deuxième application basée sur les critères de détection à partir des amplitudes modales, nous avons calculé le rapport des valeurs maximales de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) de l'accélération et de la déformation mesurées en un même point. Les signaux contiennent de nombreux passages aléatoires. Les rapports retrouvés semblent indépendants du nombre de passages (caractérisés par la longueur des signaux d'entrée) et montrent leur sensibilité à l'endommagement. Après avoir appliqué ces critères aux poutres rectilignes, nous les avons appliqués à une structure réelle : le pont à quatre travées. Ce dernier présente des comportements mécaniques et géométriques bidimensionnels. Les critères ont été examinés dans les directions : longitudinale et transversale. Lorsqu'une poutre sous chaussée est endommagée, les critères obtenus dans les poutres voisines sont aussi influencés. Par ailleurs, en appliquant ces critères sur les données réelles, nous avons constaté que le rapport entre les valeurs maximales des DSP de l'accélération et de la déformation mesurées ne dépend pas de la quantité des signaux.

## Perspectives et discussions

### Le problème direct

### Le modèle analytique

Nous avons développé dans un premier temps un modèle analytique de poutres continues soumises à des chargements mobiles. Ce modèle pourrait encore être développé pour enrichir

les études paramétriques et les scénarios d'endommagements de la structure :

- Dans ce travail, le **modèle de véhicules** ne tient compte que des forces mobiles. Les effets dynamiques et d'inertie du chargement sont donc considérés négligeables. Dans les travaux qui suivent, ceux-ci pourraient alors être pris en compte par l'ajout d'une masse mobile ou encore, d'un système de masse suspendue (sprung-mass) ;
- **L'endommagement** est modélisé par un ressort spiral (le cas d'une fissure) ou une zone de réduction du module d'élasticité. Cependant, nous nous intéressons seulement à la présence d'un endommagement dans la structure. Nous pourrions augmenter par la suite le nombre d'endommagements. De plus, le défaut pourrait être modélisé par d'autres approches (modification de la géométrie, etc.) ;
- L'état de précontrainte de la structure n'est pas pris en compte : c'est une piste à développer.
- **Autres facteurs** différents pouvant être pris en compte : profil de la chaussée, vitesse du véhicule variable, raideur des appuis ...

### Le modèle numérique

Nous avons développé des modèles numériques bidimensionnels de la structure avec différentes tailles du maillage pour être le plus adaptés aux données réelles. En général, le résultat des simulations est en relativement en bon accord avec les données mesurées sur la structure réelle. Cependant, les déformations négatives et les déformation des poutres situées loin du trajet des véhicules sont moins corrélées avec les mesures. Dans nos modèles les points d'application des charges sont des nœuds du maillage de la chaussée. L'écart entre deux charges dans le sens transversal (largeur entre deux roues d'un même essieu) n'est pas assuré. Pour être plus proche de la situation actuelle, les points d'application des charges (et par conséquent, l'excentricité de véhicule) pourraient être créées par une modification éventuelle du maillage de la structure. De plus, les propriétés des différentes composantes du pont sont prises à titre indicatif et les comportements mécaniques de ces composantes sont supposés être élastiques linéaires. Une vérification plus détaillée pourrait être utile pour avoir des résultats calculés plus proches des données réelles. En ce qui concerne les scénarios d'endommagement, pour aller plus loin, le nombre d'endommagements pourrait être augmenté pour enrichir les études paramétriques.

### Le problème inverse

Dans la partie traitant du problème inverse nous avons développé deux grandes approches : L'identification à partir des histoires de l'accélération et de la déformation mesurées au même endroit (approche par optimisation), et d'autre part, à partir des amplitudes modales de ces signaux (approche modale). Dans la première approche, les modèles analytiques et numériques montrent des résultats pertinents dans le cas de passages des chargements mobiles sur une poutre simple. Dans le cas où le nombre de travées de la structure augmente, la participation des modes supérieurs a une influence sur la réponse. Nous nous plaçons alors dans le cadre de la deuxième approche pour laquelle les signaux sont regardés dans le domaine fréquentiel. La troncature des signaux entrés et le choix des paramètres sont également des sujets à développer.

### Travaux expérimentaux

Afin de mettre en évidence les critères de détection de l'endommagement proposés ainsi que le modèle analytique des poutres continues endommagées, des travaux expérimentaux

permettant de reproduire le passage d'un chargement sur une poutre à l'échelle du laboratoire pourraient être effectuées. Dans un premier temps, une expérience consistant à tester une poutre simple, soumise à plusieurs types de chargement (choc, force mobile, etc.) nous permettrait de vérifier nos modèles analytiques. Ensuite, un défaut pourrait être créé sur la poutre pour examiner les critères proposés. Par la suite, une maquette de poutre plus complexe pourrait être réalisée.

## Communications

P.-T. SON et al. "Dynamic response of a cracked multi-span continuous beam subjected to a moving multi-axle vehicle load". In : *International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure : Transferring Research into Practice, SHMII-10*, 2021-June.July (2021), p. 1819-1825. ISSN : 25643738.

P.-T. SON et al. "Response and Damage Identification by Long-Gauge Strain Sensor of Beam-Like Bridges Under the Loads of Vehicle : A Comparison of the Analytical Model and in Situ Measurement". In : *Recent Advances in Manufacturing Engineering and Processes*. Sous la dir. de R. K. AGARWAL. Singapore : Springer Nature Singapore, 2023, p. 197-207. ISBN : 978-981-19-6841-9.

P.-T. SON et al. "Load identification and damage evaluation of a beam subjected to moving loads by using co-located strain and acceleration measurements". In : *International Association for Bridge and Structural Engineering Symposium, IABSE-2023*, 2023-Avril (2023).

# Annexes



# Annexe A

## Matrices de transfert

Cet annexe concerne le calcul des matrices de transfert introduites dans le Chapitre 2.

La fonction de forme du segment  $j$  de la poutre est donnée par l'expression suivante :

$$\phi_j(x_j) = A_j \sin(\lambda_j x_j) + B_j \cos(\lambda_j x_j) + C_j \sinh(\lambda_j x_j) + D_j \cosh(\lambda_j x_j) \quad (\text{A.1})$$

dans laquelle  $\lambda_j$  est le nombre d'onde et  $x_j$  est la coordonnée locale du segment concerné.  $A_j, B_j, C_j, D_j$  sont des constantes réelles. A partir de la relation (2.6), nous avons  $\lambda_j^4 E_j I = \rho S \omega^2 = \text{const}$ , puisque la pulsation  $\omega$  représente une propriété globale du système.

### A.1 Matrice de transfert à l'interface de la section fissurée

Considérons l'interface de section fissurée (Figure 2.2). De part et d'autre de la fissure, le déplacement, le moment de flexion et l'effort tranchant restent inchangés. Cela implique les égalités suivantes des déformées modales et ses dérivées :

$$\begin{aligned} \phi_{k_1}(L_{k_1}) &= \phi_{k_2}(0) \\ E_{k_1} I \phi_{k_1}''(L_{k_1}) &= E_{k_2} I \phi_{k_2}''(0) \\ E_{k_1} I \phi_{k_1}'''(L_{k_1}) &= E_{k_2} I \phi_{k_2}'''(0) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Le saut de pente de la poutre est proportionnel au moment de flexion à la section fissurée :

$$\phi_{k_2}'(0) - \phi_{k_1}'(L_{k_1}) = K \phi_{k_2}''(0) \quad (\text{A.3})$$

avec  $K = E I c_\theta = 6h(1-\nu^2)J_1(a_1)$  le coefficient de proportion en section fissurée.  $J_1(a/h) = J_1(a_1)$  une fonction de la profondeur relative (le rapport  $a/h$ ) de la fissure :

$$\begin{aligned} J_1(a_1) &= 1.8624a_1^2 - 3.95a_1^3 + 16.375a_1^4 - 37.226a_1^5 + 76.81a_1^6 \\ &\quad - 126.9a_1^7 + 172a_1^8 - 143.97a_1^9 + 66.56a_1^{10} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Notons que  $E_{k_1} = E_{k_2} = E$ , en reportant l'expression de la déformée modale  $\phi_j(x_j)$  (Equation A.1,  $j = k_1, k_2$ ) aux expressions (A.2) et (A.3), nous avons :

$$\begin{aligned} A_{k_1} \sin(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + B_{k_1} \cos(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + C_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + D_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) &= B_{k_2} + D_{k_2} \\ -A_{k_1} \sin(\lambda_{k_1} L_{k_1}) - B_{k_1} \cos(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + C_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + D_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) &= -B_{k_2} + D_{k_2} \\ -A_{k_1} \cos(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + B_{k_1} \sin(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + C_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + D_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) &= -A_{k_2} + C_{k_2} \\ -A_{k_1} \cos(\lambda_{k_1} L_{k_1}) + B_{k_1} \sin(\lambda_{k_1} L_{k_1}) - C_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) - D_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1} L_{k_1}) &= -A_{k_2} - C_{k_2} \\ &\quad + \lambda_{k_1} K (-B_{k_2} + D_{k_2}) \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



En résolvant le système linéaire (A.5), nous pouvons exprimer  $X_{k_2} = [A_{k_2}, B_{k_2}, C_{k_2}, D_{k_2}]^T$  en fonction de  $X_{k_1} = [A_{k_1}, B_{k_1}, C_{k_1}, D_{k_1}]^T$  sous forme matricielle :

$$X_{k_2} = \mathbf{T}_{k_1} X_{k_1} \quad (\text{A.6})$$

dans laquelle :

$$\mathbf{T}_{k_1} = \begin{bmatrix} -b.s + c & -s - b.c & b.sh & b.ch \\ s & c & 0 & 0 \\ -b.s & -b.c & b.sh + ch & sh + b.ch \\ 0 & 0 & sh & ch \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

avec :

$$b = \frac{K\lambda_{k_1}}{2} = 3h(1 - \nu^2)J_1(a_1)\lambda_{k_1}$$

$$s = \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}), c = \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1})$$

$$sh = \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1}), ch = \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1})$$

## A.2 Matrice de transfert à l'interface de la zone endommagée

A l'interface de la zone endommagée (figure 2.3), le déplacement vertical, la pente de l'axe neutre, le moment de flexion et l'effort tranchant restent également inchangés. Cela implique les égalités suivantes des déformées modales et ses dérivées :

$$\begin{aligned} \phi_{k_1}(L_{k_1}) &= \phi_{k_2}(0) \\ \phi'_{k_1}(L_{k_1}) &= \phi'_{k_2}(0) \\ E_{k_1}I\phi''_{k_1}(L_{k_1}) &= E_{k_2}I\phi''_{k_2}(0) \\ E_{k_1}I\phi'''_{k_1}(L_{k_1}) &= E_{k_2}I\phi'''_{k_2}(0) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

En reportant l'expression de la déformée modale  $\phi_j(x_j)$  (Equation A.1 avec  $j = k_1, k_2$ ) au système des équations (A.8), nous avons :

$$\begin{aligned} A_{k_1} \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + B_{k_1} \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + C_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + D_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1}) &= B_{k_2} + D_{k_2} \\ \lambda_{k_1} (A_{k_1} \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1}) - B_{k_1} \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + C_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + D_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1})) &= \lambda_{k_2} (A_{k_2} + C_{k_2}) \\ \lambda_{k_1}^2 E_{k_1} I (-A_{k_1} \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}) - B_{k_1} \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + C_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + D_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1})) &= -\lambda_{k_2}^2 E_{k_2} I B_{k_2} \\ &+ \lambda_{k_2}^2 E_{k_2} I D_{k_2} \\ \lambda_{k_1}^3 E_{k_1} I (-A_{k_1} \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + B_{k_1} \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + C_{k_1} \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1}) + D_{k_1} \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1})) &= -\lambda_{k_2}^3 E_{k_2} I A_{k_2} \\ &+ \lambda_{k_2}^3 E_{k_2} I C_{k_2} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Pour simplifier les expressions, nous notons :

$$s = \sin(\lambda_{k_1}L_{k_1}), c = \cos(\lambda_{k_1}L_{k_1})$$

$$sh = \sinh(\lambda_{k_1}L_{k_1}), ch = \cosh(\lambda_{k_1}L_{k_1})$$

Remarquons que  $\lambda_{k_1}^4 E_{k_1} I = \lambda_{k_2}^4 E_{k_2} I$ . Nous notons également  $\sigma = \sigma_{12} = \sqrt[4]{E_{k_1}/E_{k_2}} = \lambda_{k_2}/\lambda_{k_1}$ . Les équations (A.9) deviennent :

$$\begin{aligned} A_{k_1} s + B_{k_1} c + C_{k_1} sh + D_{k_1} ch &= B_{k_2} + D_{k_2} \\ (1/\sigma) (A_{k_1} c - B_{k_1} s + C_{k_1} ch + D_{k_1} sh) &= A_{k_2} + C_{k_2} \\ \sigma^2 (-A_{k_1} s - B_{k_1} c + C_{k_1} sh + D_{k_1} ch) &= -B_{k_2} + D_{k_2} \\ \sigma (-A_{k_1} c + B_{k_1} s + C_{k_1} ch + D_{k_1} sh) &= -A_{k_2} + C_{k_2} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En résolvant le système linéaire (A.10), nous pouvons exprimer  $X_{k_2}$  en fonction de  $X_{k_1}$  sous forme matricielle :

$$X_{k_2} = \mathbf{T}_{k_1} X_{k_1} \quad (\text{A.11})$$

dans laquelle :

$$\mathbf{T}_{k_1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1 + \sigma^2)c/\sigma & -(1 + \sigma^2)s/\sigma & (1 - \sigma^2)ch/\sigma & (1 - \sigma^2)sh/\sigma \\ (1 + \sigma^2)s & (1 + \sigma^2)c & (1 - \sigma^2)sh & (1 - \sigma^2)ch \\ (1 - \sigma^2)c/\sigma & -(1 - \sigma^2)s/\sigma & (1 + \sigma^2)ch/\sigma & (1 + \sigma^2)sh/\sigma \\ (1 - \sigma^2)s & (1 - \sigma^2)c & (1 + \sigma^2)sh & (1 + \sigma^2)ch \end{bmatrix} \quad (\text{A.12})$$

### A.3 Matrice de transfert aux appuis intermédiaires<sup>1</sup>

Considérons la  $j$ -ième travée (figure 2.4). Nous supposons qu'aucun défaut n'est présent dans cette travée (travée saine). Les deux extrémités de la travée sont bloquées. Cela implique que la déformée modale locale  $\phi_j(x_j)$  est nulle aux bords :

$$\begin{aligned} \phi_j(0) &= 0 \\ \phi_j(L_j) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

De plus, d'un côté à l'autre de l'appui gauche de la travée considérée, la pente de l'axe neutre de la poutre et le moment de flexion restent inchangés. Nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_j'(0) &= \phi_{j-1}'(L_{j-1}) \\ E_j I \phi_j''(0) &= E_{j-1} I \phi_{j-1}''(L_{j-1}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

En reportant l'expression de la déformée modale pour les travées  $j$  et  $j - 1$  ( $\phi_j(x_j)$ ,  $\phi_{j-1}(x_{j-1})$ ) aux expressions (A.13) et (A.14). Afin de simplifier les expressions, nous notons  $s$ ,  $c$ ,  $sh$ ,  $ch$  les fonctions sinusoïdales et sinusoïdales hyperboliques de la  $(j - 1)$ -ième travée :

$$\begin{aligned} s &= \sin(\lambda_{j-1}L_{j-1}), \quad c = \cos(\lambda_{j-1}L_{j-1}) \\ sh &= (\sinh \lambda_{j-1}L_{j-1}), \quad ch = \cosh(\lambda_{j-1}L_{j-1}) \end{aligned}$$

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\begin{aligned} B_j + D_j &= 0 \\ A_j \sin(\lambda_j L_j) + B_j \cos(\lambda_j L_j) + C_j \sinh(\lambda_j L_j) + D_j \cosh(\lambda_j L_j) &= 0 \\ \lambda_{j-1} (A_{j-1}c - B_{j-1}s + C_{j-1}ch + D_{j-1}sh) &= \lambda_j (A_j + C_j) \\ \lambda_{j-1}^2 E_{j-1} I (-A_{j-1}s - B_{j-1}c + C_{j-1}sh + D_{j-1}ch) &= \lambda_j^2 E_j I (-B_j + D_j) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

En notant  $\sigma = \sqrt[4]{E_{j-1}/E_j} = \lambda_j/\lambda_{j-1}$ , nous exprimons le vecteur des coefficients  $X_j = [A_j, B_j, C_j, D_j]^T$  en fonction de  $X_{j-1} = [A_{j-1}, B_{j-1}, C_{j-1}, D_{j-1}]^T$  sous forme matricielle  $X_j = \mathbf{S}_{4 \times 4} X_{j-1}$  nous avons l'expression de la matrice  $\mathbf{S}$  :

$$\mathbf{S}_{4 \times 4} = \frac{1}{2\sigma} \begin{bmatrix} -\sigma^3 \kappa s + 2\eta c & -\eta s - \sigma^3 \kappa c & \sigma^3 \kappa sh + 2\eta ch & 2\eta sh + \sigma^3 \kappa ch \\ \sigma^3 s & \sigma^3 c & -\sigma^3 sh & -\sigma^3 ch \\ \sigma^3 \kappa s + 2\varepsilon c & -2\varepsilon s + \sigma^3 \kappa c & -\sigma^3 \kappa sh + 2\varepsilon ch & 2\varepsilon sh - \sigma^3 \kappa ch \\ -\sigma^3 s & -\sigma^3 c & \sigma^3 sh & \sigma^3 ch \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

1. A l'exception de l'appui gauche de la travée endommagée

Par ailleurs, la matrice  $\mathbf{S}_{4 \times 4}$  pourrait être également exprimée sous forme de produit des matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} -\kappa & \eta \\ 1 & 0 \\ \kappa & \varepsilon \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & c & -sh & -ch \\ c & -s & ch & sh \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}_j \boldsymbol{\Sigma}_{j-1,j} \mathbf{W}_{j-1} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

dans laquelle les fonctions  $\kappa$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon$  ne contiennent que les informations sur la  $j$ -ième travée :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\cos \lambda_j L_j - \cosh \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j} \\ \eta &= -\frac{\sinh \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j} \\ \varepsilon &= 1 - \eta = \frac{\sin \lambda_j L_j}{\sin \lambda_j L_j - \sinh \lambda_j L_j} \end{aligned}$$

Remarquons que la matrice  $\mathbf{S}$  est singulière (la somme de la deuxième et la quatrième ligne étant nulle).

#### A.4 Matrice de transfert à l'appui gauche de la travée endommagée

Nous considérons enfin l'appui gauche de la travée endommagée (figure 2.5). Nous avons les mêmes relations qu'un appui intermédiaire ordinaire, à l'exception la relation  $\phi_j(L_j) = 0$ . Nous avons les relations comme le système d'équations (A.15), sauf la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} B_j + D_j &= 0 \\ \lambda_{j-1} (A_{j-1}c - B_{j-1}s + C_{j-1}ch + D_{j-1}sh) &= \lambda_j (A_j + C_j) \\ \lambda_{j-1}^2 E_{j-1} I (-A_{j-1}s - B_{j-1}c + C_{j-1}sh + D_{j-1}ch) &= \lambda_j^2 E_j I (-B_j + D_j) \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

L'extrémité droite du segment  $k_e$  est liée à l'appui  $A_k$  ( $e = 2$  si l'endommagement est une fissure,  $e = 3$  si cette dernière est modélisée par une zone endommagée). Le déplacement de cet appui est bloqué. Nous avons :

$$u_{k_e}(L_{k_e}) = 0 \quad (\text{A.19})$$

$$\Rightarrow A_{k_e} \sin \lambda_{k_e} L_{k_e} + B_{k_e} \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} + C_{k_e} \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} + D_{k_e} \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e} = \mathbf{b}_{k_e}^T X_{k_e} = 0 \quad (\text{A.20})$$

Avec  $\mathbf{b}_{k_e} = [\sin \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e}]^T$  et,  $X_{k_e} = [A_{k_e}, B_{k_e}, C_{k_e}, D_{k_e}]^T$ .

En reportant la relation (A.6) en section fissurée dans l'équation (A.20), nous obtenons :

$$\mathbf{b}_{k_e}^T \mathbf{T} X_{k_1} = 0 \quad (\text{A.21})$$

avec :

$$\begin{cases} \mathbf{T} = \mathbf{T}_1(K, L_{k_1}), & \text{si } c_\theta \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}_2(\sigma_{12}, L_{k_2}) \cdot \mathbf{T}_1(\sigma_{21}, L_{k_1}), & \text{si } \Delta E \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Nous notons  $\sigma = \sqrt[4]{E_{j-1}/E_j} = \lambda_j/\lambda_{j-1}$ , en exprimant  $X_{j-1}$  en fonction de  $X_j$  sous forme matricielle  $X_j = \mathbf{G}_{4 \times 4} X_{j-1}$  nous avons l'expression de la matrice  $\mathbf{G}$  :

$$\mathbf{G}_{4 \times 4} = \frac{1}{2\sigma} \begin{bmatrix} -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot s + 2\eta \cdot c & -\eta \cdot s - \sigma^3 \cdot \kappa \cdot c & \sigma^3 \cdot \kappa \cdot sh + 2\eta \cdot ch & 2\eta \cdot sh + \sigma^3 \cdot \kappa \cdot ch \\ \sigma^3 \cdot s & \sigma^3 \cdot c & -\sigma^3 \cdot sh & -\sigma^3 \cdot ch \\ \sigma^3 \cdot \kappa \cdot s + 2\varepsilon \cdot c & -2\varepsilon \cdot s + \sigma^3 \cdot \kappa \cdot c & -\sigma^3 \cdot \kappa \cdot sh + 2\varepsilon \cdot ch & 2\varepsilon \cdot sh - \sigma^3 \cdot \kappa \cdot ch \\ -\sigma^3 \cdot s & -\sigma^3 \cdot c & \sigma^3 \cdot sh & \sigma^3 \cdot ch \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Comme la matrice  $\mathbf{S}$ , la matrice  $\mathbf{G}$  pourrait être également exprimée sous forme de produit des matrices :

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{4 \times 4} &= \begin{bmatrix} -\kappa & \eta \\ 1 & 0 \\ \kappa & \varepsilon \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & c & -sh & -ch \\ c & -s & ch & sh \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{V}_k \mathbf{\Sigma}_{k-1, k_1} \mathbf{W}_{k-1} \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

La matrice  $\mathbf{G}$  a une structure identique à la matrice  $\mathbf{S}$ , et les modifications à apporter concernent les expressions des fonctions  $\kappa$ ,  $\eta$ ,  $\varepsilon$  :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_2 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_4}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \\ \eta &= -\frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_3}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \\ \varepsilon &= 1 - \eta = \frac{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1}{\mathbf{b}^T \mathbf{t}_1 - \mathbf{b}^T \mathbf{t}_3} \end{aligned}$$

Avec  $\mathbf{b}_{k_e} = [\sin \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cos \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \sinh \lambda_{k_e} L_{k_e} \quad \cosh \lambda_{k_e} L_{k_e}]^T$  et  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) sont les colonnes de  $\mathbf{T}$ , qui est la matrice résultante des matrices de transfert en section fissurée. Comme la matrice  $\mathbf{S}$ , la matrice  $\mathbf{G}$  est aussi singulière.

## A.5 Matrice de relation entre la réponse forcée et la déformée modale

Considérons le segment de poutre  $j$  et le mode de vibration  $n$ . La réponse forcée  $q_{n,j}^p(t_j)$  à la force réduite  $p_{n,j}(t_j) = \phi_{n,j}(vt_j)$  doit satisfaire l'équation différentielle (2.54) quelque soit la valeur de  $t$ . Cela implique l'équation suivante :

$$\ddot{q}_{n,j}^p(t_j) + 2\omega_n \zeta_n \dot{q}_{n,j}^p(t_j) + \omega_n^2 q_{n,j}^p(t_j) = \phi_{n,j}(vt_j) \quad (\text{A.25})$$

A partir de l'expression de la déformée modale  $\phi_j(x)$  (2.8), nous avons :

$$\begin{aligned} \phi_{n,j}(vt_j) &= A_{n,j} \sin \lambda_{n,j} vt_j + B_{n,j} \cos \lambda_{n,j} vt_j + C_{n,j} \sinh \lambda_{n,j} vt_j + D_{n,j} \cosh \lambda_{n,j} vt_j \\ &= [\sin \lambda_{n,j} vt_j \quad \cos \lambda_{n,j} vt_j \quad \sinh \lambda_{n,j} vt_j \quad \cosh \lambda_{n,j} vt_j] X_{n,j} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

avec  $X_{n,j} = [A_{n,j} \ B_{n,j} \ C_{n,j} \ D_{n,j}]^T$  le vecteur de coefficients de ce segment correspondant au mode  $n$ .

Nous supposons que l'expression  $q_{n,j}^p(t_j)$  est de même forme que la déformée modale  $\phi_{n,j}(vt_j)$  (voir l'équation 2.61) :

$$\begin{aligned} q_{n,j}^p(t_j) &= \bar{A}_{n,j} \sin(\lambda_{n,j}vt_j) + \bar{B}_{n,j} \cos(\lambda_{n,j}vt_j) \\ &\quad + \bar{C}_{n,j} \sinh(\lambda_{n,j}vt_j) + \bar{D}_{n,j} \cosh(\lambda_{n,j}vt_j) \\ &= [\sin \Omega_{n,j}t_j \ \cos \Omega_{n,j}t_j \ \sinh \Omega_{n,j}t_j \ \cosh \Omega_{n,j}t_j] \bar{X}_{n,j} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

où  $\bar{X}_{n,j} = [\bar{A}_{n,j} \ \bar{B}_{n,j} \ \bar{C}_{n,j} \ \bar{D}_{n,j}]^T$  est le vecteur de coefficients de la solution particulière à déterminer et  $\Omega_{n,j} = \lambda_{n,j}v$  la pulsation liée à la vitesse.

Les dérivées première et deuxième de l'expression (A.27) par rapport au temps sont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{q}_{n,j}^p(t_j) &= \lambda_{n,j}v [\bar{A}_{n,j} \cos(\lambda_{n,j}vt_j) - \bar{B}_{n,j} \sin(\lambda_{n,j}vt_j) \\ &\quad + \bar{C}_{n,j} \cosh(\lambda_{n,j}vt_j) + \bar{D}_{n,j} \sinh(\lambda_{n,j}vt_j)] \\ &= \Omega_{n,j} [\cos \Omega_{n,j}t_j \ -\sin \Omega_{n,j}t_j \ \cosh \Omega_{n,j}t_j \ \sinh \Omega_{n,j}t_j] \bar{X}_{n,j} \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_{n,j}^p(t_j) &= (\lambda_{n,j}v)^2 [-\bar{A}_{n,j} \sin(\lambda_{n,j}vt_j) - \bar{B}_{n,j} \cos(\lambda_{n,j}vt_j) \\ &\quad + \bar{C}_{n,j} \sinh(\lambda_{n,j}vt_j) + \bar{D}_{n,j} \cosh(\lambda_{n,j}vt_j)] \\ &= \Omega_{n,j}^2 [-\sin \Omega_{n,j}t_j \ -\cos \Omega_{n,j}t_j \ \sinh \Omega_{n,j}t_j \ \cosh \Omega_{n,j}t_j] \bar{X}_{n,j} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

En reportant les expressions (A.26, A.27, A.28, A.29) à l'équation (A.25), nous avons :

$$\begin{aligned} & -\Omega_{n,j}^2 \bar{A}_{n,j} \sin(\Omega_{n,j}t_j) - \Omega_{n,j}^2 \bar{B}_{n,j} \cos(\Omega_{n,j}t_j) \\ & + \Omega_{n,j}^2 \bar{C}_{n,j} \sinh(\Omega_{n,j}t_j) + \Omega_{n,j}^2 \bar{D}_{n,j} \cosh(\Omega_{n,j}t_j) \\ & + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{A}_{n,j} \cos(\Omega_{n,j}t_j) - 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{B}_{n,j} \sin(\Omega_{n,j}t_j) \\ & + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{C}_{n,j} \cosh(\Omega_{n,j}t_j) + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{D}_{n,j} \sinh(\Omega_{n,j}t_j) \\ & + \omega_n^2 \bar{A}_{n,j} \sin(\Omega_{n,j}t_j) + \omega_n^2 \bar{B}_{n,j} \cos(\Omega_{n,j}t_j) \\ & + \omega_n^2 \bar{C}_{n,j} \sinh(\Omega_{n,j}t_j) + \omega_n^2 \bar{D}_{n,j} \cosh(\Omega_{n,j}t_j) \\ & = A_{n,j} \sin(\Omega_{n,j}t_j) + B_{n,j} \cos(\Omega_{n,j}t_j) + C_{n,j} \sinh(\Omega_{n,j}t_j) + D_{n,j} \cosh(\Omega_{n,j}t_j), \forall t_j. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Nous avons le système d'équations comme suit :

$$\begin{cases} -\Omega_{n,j}^2 \bar{A}_{n,j} - 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{B}_{n,j} + \omega_n^2 \bar{A}_{n,j} &= A_{n,j} \\ -\Omega_{n,j}^2 \bar{B}_{n,j} + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{A}_{n,j} + \omega_n^2 \bar{B}_{n,j} &= B_{n,j} \\ \Omega_{n,j}^2 \bar{C}_{n,j} + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{D}_{n,j} + \omega_n^2 \bar{C}_{n,j} &= C_{n,j} \\ \Omega_{n,j}^2 \bar{D}_{n,j} + 2\omega_n \zeta_n \Omega_{n,j} \bar{C}_{n,j} + \omega_n^2 \bar{D}_{n,j} &= D_{n,j} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{n,j} &= \frac{(\omega_n^2 - \Omega_{n,j}^2)A_{n,j} + 2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j}B_{n,j}}{(\omega_n^2 - \Omega_{n,j}^2)^2 + (2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j})^2} \\
\bar{B}_{n,j} &= \frac{-2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j}A_{n,j} + (\omega_n^2 - \Omega_{n,j}^2)B_{n,j}}{(\omega_n^2 - \Omega_{n,j}^2)^2 + (2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j})^2} \\
\bar{C}_{n,j} &= \frac{(\omega_n^2 + \Omega_{n,j}^2)C_{n,j} - 2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j}D_{n,j}}{(\omega_n^2 + \Omega_{n,j}^2)^2 - (2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j})^2} \\
\bar{D}_{n,j} &= \frac{-2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j}C_{n,j} + (\omega_n^2 + \Omega_{n,j}^2)D_{n,j}}{(\omega_n^2 + \Omega_{n,j}^2)^2 - (2\omega_n\zeta_n\Omega_{n,j})^2}
\end{aligned} \tag{A.32}$$

En divisant à la fois le numérateur et le dénominateur des fractions dans les expressions (A.32) par  $\omega_n^4$  et notons  $\gamma_{n,j} = \Omega_{n,j}/\omega_n$  le facteur de vitesse du segment  $j$  correspondant au mode  $n$ . Nous avons :

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{n,j} &= \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{(1 - \gamma_{n,j}^2)A_{n,j} + 2\zeta_n\gamma_{n,j}B_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2} \\
\bar{B}_{n,j} &= \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{-2\zeta_n\gamma_{n,j}A_{n,j} + (1 - \gamma_{n,j}^2)B_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2} \\
\bar{C}_{n,j} &= \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{(1 + \gamma_{n,j}^2)C_{n,j} - 2\zeta_n\gamma_{n,j}D_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2} \\
\bar{D}_{n,j} &= \frac{1}{\omega_n^2} \cdot \frac{-2\zeta_n\gamma_{n,j}C_{n,j} + (1 + \gamma_{n,j}^2)D_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2}
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Les relations (A.33) peuvent être réécrites sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{n,j} \\ \bar{B}_{n,j} \\ \bar{C}_{n,j} \\ \bar{D}_{n,j} \end{bmatrix} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & \mathbf{0} & \\ -b & a & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d & c \end{array} \right) \begin{bmatrix} A_{n,j} \\ B_{n,j} \\ C_{n,j} \\ D_{n,j} \end{bmatrix} \tag{A.34}$$

ou encore sous la forme plus courte :

$$\bar{X}_{n,j} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & \mathbf{0} & \\ -b & a & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & c & d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & d & c \end{array} \right) X_{n,j} = \mathbf{Q}X_{n,j} \tag{A.35}$$

dans laquelle :

$$\begin{aligned}
a &= \frac{1 - \gamma_{n,j}^2}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2}, \quad b = \frac{2\zeta_n\gamma_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2} \\
c &= \frac{1 + \gamma_{n,j}^2}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2}, \quad d = \frac{-2\zeta_n\gamma_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n\gamma_{n,j})^2}
\end{aligned} \tag{A.36}$$

Nous retrouvons l'expression (2.62).



## Annexe B

# Coefficients de distribution de charge

### Préambule

Cette note a pour but de calculer le coefficient de répartition transversale (CRT) dans la section du pont à quatre travées présenté dans ce manuscrit.

La méthode utilisée pour les calculs est la méthode de Guyon-Massonnet [56].

Les calculs effectués sont basés sur les documents BOA-71 [18] et un cours d'ouvrage d'art de l'Ecole Nationale d'Ingénieur de Tunis [12]

### B.1 Introduction

Pour obtenir les sollicitations moyennes appliquées à une poutre à partir des sollicitations longitudinales appliquées à l'ouvrage (le tablier d'un pont, par exemple), on doit calculer le coefficient de répartition transversale (CRT).

Pour une poutre :

Sollicitation moyenne = CRT x Sollicitation globale

Une sollicitation peut être un moment fléchissant ou un effort tranchant.

### B.2 Méthode de Guyon-Massonnet

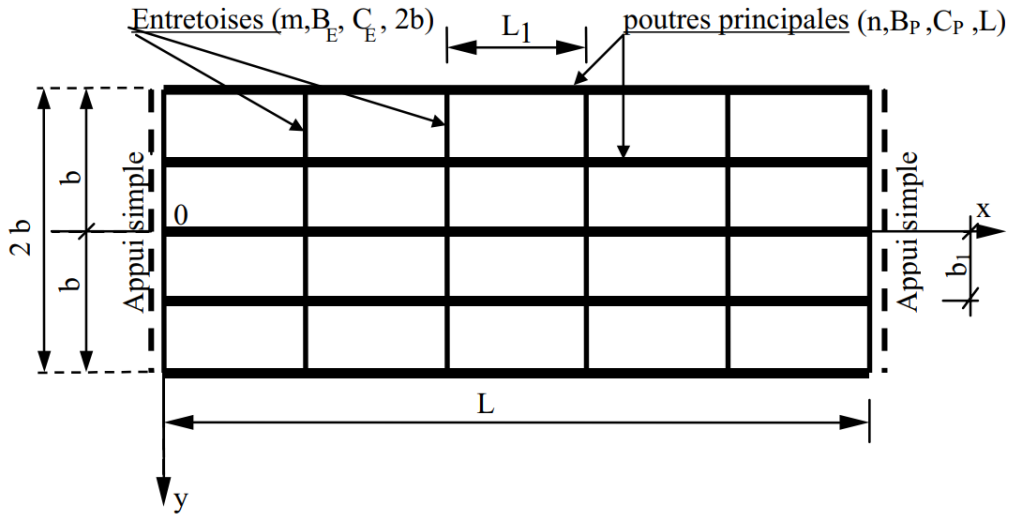
#### B.2.1 Principes fondamentaux de la méthode

- Le premier principe fondamental est de substituer au pont réel un pont à structure continue qui a les mêmes rigidités moyennes à la flexion et à la torsion que l'ouvrage réel.
- Le deuxième principe est d'analyser de façon approximative l'effet de la répartition transversale des charges en admettant que cette répartition est la même que si la distribution des charges selon l'axe du pont est sinusoïdale (Séries de Fourier).

#### B.2.2 Paramètres fondamentaux

Considérons une travée indépendante, de portée  $L$ , de largeur  $2b$  dont l'ossature est constituée de  $n$  poutres longitudinales (portée  $L$ , espacement  $b_1$ ) et  $m$  entretoises (portée  $2b$ , espacement  $L_1$ ).





Toutes les poutres sont identiques et caractérisées par :

- leur rigidité à la flexion  $B_P = EI_P$
- leur rigidité à la torsion  $C_P = GJ_P$

Toutes les entretoises sont identiques et caractérisées par :

- leur rigidité à la flexion  $B_E = EI_E$
- leur rigidité à la torsion  $C_E = GJ_E$

Avec :

- $E$  : Module de Young.
- $G = E/(2(1 + \nu))$  : Module de cisaillement.
- $I_P$  : Moment d'inertie de flexion des poutres.
- $J_P$  : Moment d'inertie de torsion des poutres.
- $I_E$  : Moment d'inertie de flexion des entretoises.
- $J_E$  : Moment d'inertie de torsion des entretoise.

Par unité de longueur :

Rigidité de flexion :

$$\rho_P = \frac{B_P}{b_1} = \frac{EI_P}{b_1}$$

$$\rho_E = \frac{B_E}{L_1} = \frac{EI_E}{L_1}$$

Rigidité de torsion :

$$\gamma_P = \frac{C_P}{b_1} = \frac{GJ_P}{b_1}$$

$$\gamma_E = \frac{C_E}{L_1} = \frac{GJ_E}{L_1}$$

Le comportement du pont est complètement défini par 2 paramètres principaux :

- Paramètre de torsion :  $\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2\sqrt{\rho_P \rho_E}}$
- Paramètre de flexion :  $\theta = \frac{b}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}}$

Le paramètre de torsion  $\alpha$  prend en compte en plus des rigidités de flexion  $\rho_P$  et  $\rho_E$  celles de la torsion  $\gamma_P$  et  $\gamma_E$ . Il caractérise donc l'influence de la torsion et varie entre 0 et 1.

- $\alpha = 0 \Rightarrow \gamma_E + \gamma_P = 0$  : La résistance à la torsion est négligeable.
- $\alpha = 1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_P = \rho_E = \rho \\ \gamma_E + \gamma_P = 2\rho \end{cases}$  : Le pont est une dalle isotrope

Ainsi, pour le calcul d'un tablier de ponts dalles, on suppose que la dalle est isotrope et par conséquent on prend  $\alpha = 1$ .

Les structures réelles des ponts à poutres ont un comportement intermédiaire entre ces 2 cas particuliers.

Lorsque le pont est très allongé ou que les entretoises sont très rigides, le paramètre d'entretoisement  $\theta$  est voisin de zéro. Pour  $\alpha < 0.3$ , on peut admettre que les entretoises sont infiniment rigides, ce qui correspond à  $\alpha = 0$ . Dans ce cas, on utilise la méthode de Courbon.

### B.2.3 Coefficient de Répartition Transversale

- Principe : Résoudre l'équation différentielle

$$\rho_P \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (\gamma_P + \gamma_E) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \rho_E \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = p(x, y)$$

- Moment de flexion :

$$M_x(x, y) = \sum_i M_i^{(xm)}(x) K_i(e_i, y)$$

Avec :

- $y$  : Position de la poutre considérée
- $e$  : Excentrement de charge
- Coefficient de participation :  $K = K(y, e, \theta, \alpha)$  donnée par les tables de Guyon-Massonnet.
- Coefficient de Répartition Transversale (CRT) pour chaque file de poutre est donné par :

$$\eta_i = \frac{K_i}{n}$$

Notons  $K_0$  et  $K_1$  les valeurs de  $K$  correspondantes à  $\alpha = 0$  et  $\alpha = 1$ . Pour une valeur quelconque de  $\alpha$ , l'interpolation n'est pas linéaire.

Par Massonnet :

$$K = K_0 + (K_1 - K_0)\sqrt{\alpha}$$

Pour plus de précision, Sattler a proposé les relations suivantes :

$$\begin{cases} K = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha^{0.05} & 0 \leq \theta \leq 0.1 \\ K = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha(1 - e^{\theta_0}) & 0.1 \leq \theta \leq 1 \text{ avec } \theta_0 = \frac{0.065 - \theta}{0.663} \\ K = K_0 + (K_1 - K_0)\sqrt{\alpha} & \theta > 1 \end{cases}$$

$K_0$  et  $K_1$  sont donnés par les tables de Guyon-Massonnet en fonction de  $\theta$ ,  $e$  et  $y$ .

Pour une poutre d'ordonnée  $y$ , nous procédons à une interpolation linéaire entre les valeurs de  $y$  données dans les tableaux de Guyon-Massonnet. Une interpolation linéaire peut se faire par rapport à  $\theta$ .

## B.3 Application au pont à quatre travées

### B.3.1 Géométrie

Le pont est constitué de 4 travées et a une géométrie symétrique. Les deux travées centrales ont une longueur identique :  $L_{int} = 14.6 \text{ m}$  alors que les deux travées extérieures ont une longueur  $L_{ext} = 8.4 \text{ m}$ . Chaque travée se compose de 10 poutres sous chaussée préfabriquées en béton précontraint (pont de type PRAD). Ces poutres sont identiques, avec une section homogène en forme d'un trapèze isocèle. Le hourdis en béton armé a été coulé sur place, d'épaisseur 27 cm.

Le tablier du pont est de largeur 10.08 m et a 2 voies en sens opposé.

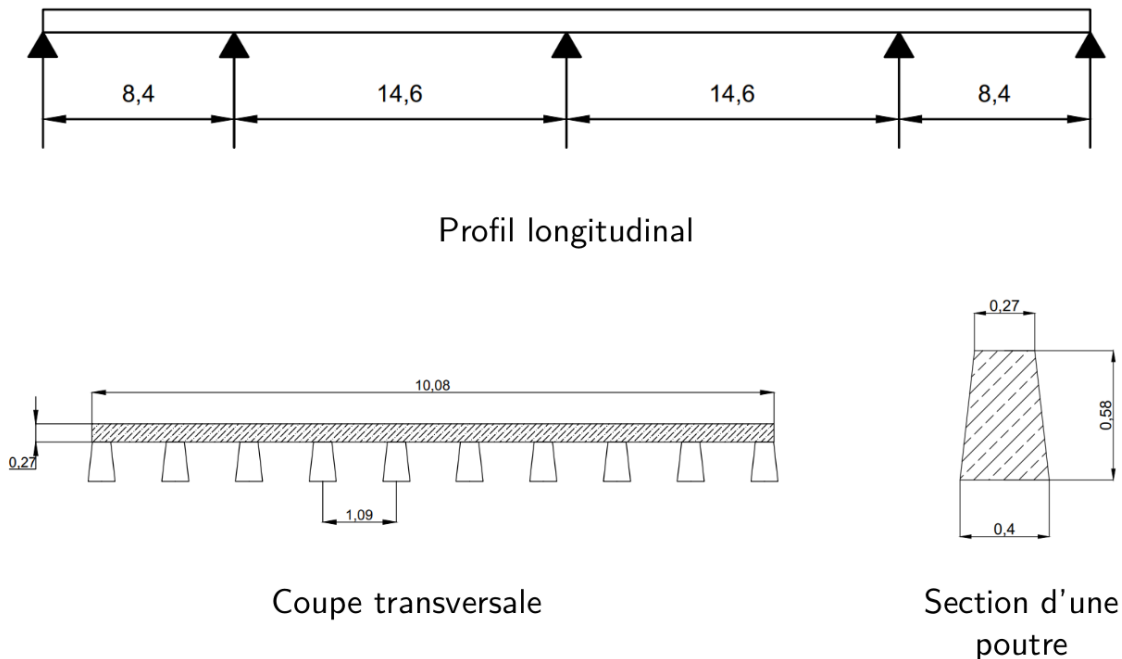


FIGURE B.1 – Dimension du pont.

Le pont est surveillé par OSMOS, grâce à un réseau de Cordes Optiques installées à mi-travée sur des poutres en travée 2 et travée 3 (les deux travées centrales), sur la face inférieure du hourdis et à l'appui central.

### B.3.2 Calcul des CRT pour le pont à quatre travées

Pour calculer les Coefficients de Répartition Transversale, on considère une travée centrale comme une travée indépendante, simplement appuyée à ses deux extrémités.

#### Calcul des caractéristiques géométriques

##### Poutre de section trapèze isocèle :

- Petite base :  $b_p = 0.27$  m
- Grande base :  $a_p = 0.40$  m
- Hauteur de la poutre :  $h_p = 0.58$  m

Position du barycentre de la poutre de la face inférieure :

$$y_{Gp} = \frac{h_p}{3} \frac{2a_p + b_p}{a_p + b_p} = 0.31 \text{ m}$$

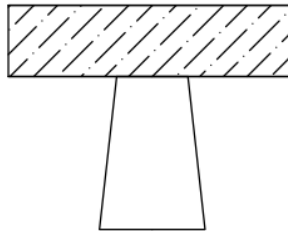
Moment quadratique de la poutre :

$$I_p = \frac{h_p^3((a_p + b_p)^2 + 2a_p b_p)}{36(a_p + b_p)} = 53.78 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Section de la poutre :

$$A_p = \frac{h_p(a_p + b_p)}{2} = 0.1943 \text{ m}^2$$

##### Pour une file de poutre (en T) :



- largeur du hourdis (partie chapeau du « T ») :  $b_h = 1.09$  m
- hauteur du hourdis :  $h_h = 0.3$  m

Barycentre du hourdis :

$$y_{Gh} = h_p + \frac{h_h}{2} = 0.73 \text{ m}$$

Moment quadratique et section du hourdis :

$$I_h = \frac{b_h h_h^3}{12} = 24.52 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$A_h = b_h h_h = 0.327 \text{ m}^2$$

Barycentre de la file de poutre (en T) :

$$y_G = \frac{A_p y_{Gp} + A_h y_{Gh}}{A_p + A_h} = 0.573 \text{ m}$$

Moment quadratique de la file de poutre courante (les files de poutre intérieures) :

$$I_c = I_p + \mu_p + I_h + \mu_h = 294.58 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Avec :  $\mu_j$ , ( $j = p, h$ ) le terme Huygens de la poutre et du hourdis.

$$\mu_j = A_j(y_G - y_{Gj})$$

Pour calculer le **moment d'inertie de torsion** d'une section rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  ( $b > a$ ), on utilise la formule :

$$J = k \left( \frac{b}{a} \right) ba^3 \quad (\text{B.1})$$

Avec :

$$k \left( \frac{b}{a} \right) = k(r) = \frac{1}{3} - \left( 0.051 + \frac{0.168}{r} \right) e^{-0.13r}, \quad r = \frac{b}{a}$$

(Selon [18] (page 34), pour plus information concernant l'inertie de torsion, voir les dossiers pilotes VIPP 67 - pièce 2, 2ème partie et PRAD 73 - pièce 3, chapitre 3).

Pour la file de poutre courante en « T », le moment d'inertie de torsion est la somme des moments d'inertie de torsion des deux parties :

$$J_c = J_p + J_h$$

Afin d'estimer le moment d'inertie de torsion de la poutre en section d'un trapèze isocèle, considérons la poutre rectangulaire équivalente de hauteur  $h_{pe} = h_p = 0.58 \text{ m}$  et de largeur  $b_{pe} = (a_p + b_p)/2 = 0.335 \text{ m}$ .

Il en résulte une augmentation de 1.27% du moment quadratique pour la poutre rectangulaire équivalente :

$$\begin{cases} I_{p, \text{trapeze}} & = 53.78 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \\ I_{p, \text{rectangle}} & = 54.47 \times 10^{-4} \text{ m}^4 \end{cases}$$

L'expression (B.1) est valable pour le calcul du moment l'inertie de torsion de la poutre seule. De plus, pour tenir compte de l'analogie de la membrane, (comme indiqué dans le dossier pilote VIPP 67 - pièce 2.5, 2ème partie), dans le cas d'une âme de poutre, on calcule le coefficient  $k \left( \frac{b}{a} \right)$  avec une hauteur double de la hauteur réelle [18].

Selon [12], à partir du document VIPP :

- Pour l'âme des poutres et la nervure des entretoises le coefficient  $k$  est calculé avec une hauteur double par rapport à la hauteur réelle.
- Pour le hourdis, la valeur à retenir n'est que la moitié de celle donnée par la formule.

Moment d'inertie de torsion de la poutre :

$$J_p = k \left( \frac{2h_{pe}}{b_{pe}} \right) h_{pe} b_{pe}^3 = 5.885 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Moment d'inertie de torsion du hourdis :

$$J_h = \frac{1}{2} k \left( \frac{b_h}{h_h} \right) b_h h_h^3 = 4.481 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Pour la file de poutre courante :

$$J_c = J_p + J_h = 10.366 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

Aux deux rives, la file de poutre a la forme en «  $\Gamma$  ». Les inerties de flexion et de torsion sont modifiées. En posant comme largeur du hourdis de ces files de poutre  $b_{h,rive} = 0.68 \text{ m}$ , les calculs des caractéristiques géométriques restent les mêmes.

Nous obtenons donc :

$$I_r = 245.67 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_r = 8.497 \times 10^{-3} \text{ m}^4$$

### Matériau

Le matériau constitutif du pont est supposé être un béton courant dont les caractéristiques sont :

- Module instantané :  $E_{cm} = 35.220 \text{ GPa}$
- Coefficient du Poisson :  $\nu = 0.2$
- Module de rigidité :  $E_{rig} = \frac{E_{cm}}{1-\nu^2} = 36.687 \text{ GPa}$
- Module de cisaillement :  $G = \frac{E_{cm}}{2(1+\nu)} = 14.675 \text{ GPa}$

### Calcul des paramètres

**Pour les files de poutre courantes :** Rigidité de flexion et rigidité de torsion par unité de longueur :

$$\rho_c = \frac{E_{rig} I_c}{b_h} = 991.51 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

$$\gamma_c = \frac{G J_c}{b_h} = 139.56 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

**Pour les files de poutre de rive :**

$$\rho_r = \frac{E_{rig} I_r}{b_{h,rive}} = 1325.46 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

Extrait du [18], page 37 : *Caractéristiques mécaniques de la dalle équivalente. Pour établir les caractéristiques mécaniques de la dalle équivalente à l'ensemble du tablier, on fait plusieurs hypothèses :*

- *La rigidité de flexion longitudinale retenue pour le tablier complet est obtenue par intégration des rigidités des files courantes et de rive ;*
- *La rigidité de torsion longitudinale retenue pour le tablier complet est celle des poutres courantes, qui est supposée contrôler majoritairement le comportement global du tablier ;*
- *Les rigidités transversales de flexion et de torsion sont identiques à celles de l'ouvrage No 1, car la géométrie des sections transversales est identique pour les 2 ouvrages.*

Rigidité à la flexion :

$$\rho_P = \frac{8\rho_c + 2\rho_r}{8 + 2} = 1058.30 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

Rigidité à la torsion :

$$\gamma_P = \gamma_c = 139.56 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

**Dans le sens transversal (flexion + torsion autour de l'axe longitudinal) :**

**Remarque [12] :** La méthode de Guyon-Massonnet considère une structure comprenant des poutres principales et des entretoises, mais les entretoises ne sont pas supposées infiniment rigides ; A la limite, il est possible d'appliquer la méthode à un tablier de ponts à poutres sans entretoises intermédiaires : c'est alors le hourdis qui joue le rôle des entretoises.

$$I_{h,E} = \frac{Lh_h^3}{12} = 328.5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

$$J_{h,E} = \frac{Lh_h^3}{6} = 657 \times 10^{-4} \text{ m}^4$$

Par unité de longueur :

$$\rho_E = \frac{E_{rig} I_{h,E}}{L} = 82.55 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

$$\gamma_E = \frac{G J_{h,E}}{L} = 66.04 \text{ MN.m}^2/\text{ml}$$

Paramètre de torsion :

$$\alpha = \frac{\gamma_P + \gamma_E}{2\sqrt{\rho_P \rho_E}} = 0.3478$$

Paramètre d'entretoisement (paramètre de flexion) :

$$\theta = \frac{b}{L} \sqrt[4]{\frac{\rho_P}{\rho_E}} = 0.6532 > 0.3$$

En utilisant les tableaux de Guyon-Massonnet pour  $\theta = 0.65$  et  $\theta = 0.70$ , par interpolation linéaire par rapport à  $\theta$  nous obtenons les valeurs de  $K(\theta = 0.653)$  correspondantes à  $\alpha = 0$  et à  $\alpha = 1$  ( $K_0(0.6532)$  et  $K_1(0.6532)$ ), pour les valeurs spécifiques de la position de poutre considérée ( $y$ ) et l'excentrement de la charge ( $e$ ).

Comme  $\theta = 0.6532 \in [0.1, 1]$ , nous calculons  $K_\alpha(\theta)$  par l'expression suivante :

$$K = K_0 + (K_1 - K_0)\alpha \left(1 - e^{\theta_0}\right), \quad \text{avec } \theta_0 = \frac{0.065 - \theta}{0.663}$$

Pour une charge d'excentrement donnée, la ligne d'influence par rapport à une poutre sera calculée par interpolation linéaire à partir de la valeur de la table  $K_\alpha(\theta)$  que nous venons de calculer.

Si plusieurs charges (ponctuelles) sont appliquées à la fois sur une section considérée, nous prenons la valeur moyenne des CRT calculée pour chaque charge.

Pour 2 charges ponctuelles d'excentrement  $e_1 = 0.56$  et  $e_2 = 0.044$  et de même magnitude, nous obtenons la répartition de charge suivante :

$\theta=0,65$		$\alpha = 0 \Rightarrow K_0$								
$y \backslash e$	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b	
0	0,1776	0,6223	1,0524	1,4121	1,5752	1,4121	1,0524	0,6223	0,1776	
b/4	-0,2731	0,1624	0,6014	1,0347	1,4121	1,6143	1,5180	1,2565	0,9520	
b/2	-0,5207	-0,1690	0,1974	0,6014	1,0524	1,5180	1,8946	2,0666	2,1547	
3b/4	-0,6691	-0,4303	-0,1690	0,1624	0,6223	1,2565	2,0666	2,9669	3,8208	
b	-0,7883	-0,6691	-0,5207	-0,2731	0,1776	0,9520	2,1547	3,8208	5,8338	
$\theta=0,65$		$\alpha = 1 \Rightarrow K_1$								
$y \backslash e$	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b	
0	0,7485	0,8588	0,9965	1,1468	1,2310	1,1468	0,9965	0,8588	0,7485	
b/4	0,5289	0,6330	0,7702	0,9493	1,1468	1,2818	1,2516	1,1561	1,0648	
b/2	0,3823	0,4734	0,5966	0,7702	0,9965	1,2516	1,4559	1,5073	1,5005	
3b/4	0,2860	0,3648	0,4734	0,6330	0,8588	1,1561	1,5073	1,8418	2,0659	
b	0,2171	0,2860	0,3823	0,5289	0,7485	1,0648	1,5005	2,0659	2,7342	

$\theta=0,70$		$\alpha = 0 \Rightarrow K_0$								
$y \backslash e$	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b	
0	0,0216	0,5464	1,0580	1,4938	1,6955	1,4938	1,0580	0,5464	0,0216	
b/4	-0,3589	0,1095	0,5862	1,0670	1,4938	1,7118	1,5548	1,1934	0,7809	
b/2	-0,5114	-0,1756	0,1798	0,5862	1,0580	1,5548	1,9393	2,0554	2,0618	
3b/4	-0,5575	-0,3794	-0,1756	0,1095	0,5464	1,1934	2,0554	3,0254	3,9282	
b	-0,5733	-0,5575	-0,5114	-0,3589	0,0216	0,7809	2,0618	3,9282	6,2464	
$\theta=0,70$		$\alpha = 1 \Rightarrow K_1$								
$y \backslash e$	-b	-3b/4	-b/2	-b/4	0	b/4	b/2	3b/4	b	
0	0,7080	0,8319	0,9923	1,1737	1,2783	1,1737	0,9923	0,8319	0,7080	
b/4	0,4808	0,5905	0,7407	0,9437	1,1737	1,3307	1,2824	1,1589	1,0461	
b/2	0,3342	0,4253	0,5535	0,7407	0,9923	1,2824	1,5134	1,5539	1,5262	
3b/4	0,2417	0,3171	0,4253	0,5905	0,8319	1,1589	1,5539	1,9305	2,1668	
b	0,1782	0,2417	0,3342	0,4808	0,7080	1,0461	1,5262	2,1668	2,9395	

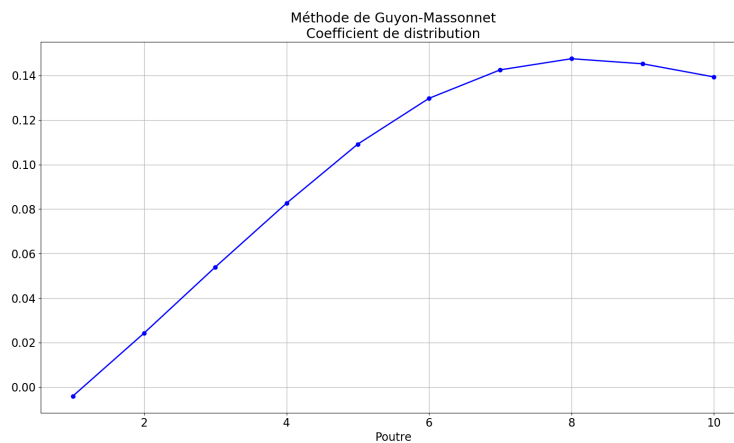


FIGURE B.2 – Coefficient de Répartition Transversale des charges pour la section du pont.





## Annexe C

# Aire de l'histoire des déformations

Dans le Chapitre 5, nous avons vu que l'aire des histoires des déformations mesurées le long d'une poutre simple forme une parabole dans l'approche polynomiale. Dans cette annexe, nous allons démontrer que dans le cas de réponse dynamique de la poutre, l'aire de la composante dynamique est négligeable devant celle de la composante homogène (quasi-statique).

Considérons la poutre simple soumise à une force ponctuelle  $P$  à la vitesse  $v$ . Le déplacement de la poutre est obtenue par la superposition des modes :

$$u = \sum_n u_n(x, t) = \sum_n \phi_n(x) q_n(t) \quad (\text{C.1})$$

A partir de l'équation 5.37, nous récrivons l'expression explicite du déplacement  $u_n$  correspond au mode  $n$  en fonction de la position de la force  $a = vt$  :

$$u_n(x, a) = \frac{2P}{\rho S L \omega_n^2} \frac{\sin(\lambda_n x)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \times \left\{ (1 - \gamma_n^2) \sin(\lambda_n a) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\lambda_n a) \right. \\ \left. + \left[ -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} (1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) + 2\zeta_n \gamma_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v} a} \right\} \quad (\text{C.2})$$

Dans laquelle  $\lambda_n = n\pi/L$  est le nombre d'onde,  $\omega_n = \lambda_n^2 \sqrt{EI/\rho S}$  la pulsation,  $\omega_n^d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}$  la pseudo-pulsation et  $\gamma_n = v/v_{c,n} = v/(\lambda_n \sqrt{EI/\rho S})$  le facteur de vitesse.

La déformation moyenne entre  $x_A$  et  $x_B$  est :

$$\overline{\varepsilon_{AB}} = z_0 \frac{u'_B - u'_A}{x_B - x_A} \quad (\text{C.3})$$

Notons  $x_C = (x_A + x_B)/2$  la position du centre de la Corde Optique et  $l_g = x_B - x_A$  sa longueur. La déformation moyenne du mode  $n$  est :

$$\overline{\varepsilon_{AB}}^n = \frac{2P z_0}{\rho S L l_g \omega_n^2} \frac{-2\lambda_n \sin(\lambda_n x_C) \sin(\lambda_n l_g/2)}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2} \times \left\{ (1 - \gamma_n^2) \sin(\lambda_n a) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\lambda_n a) \right. \\ \left. + \left[ -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} (1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) + 2\zeta_n \gamma_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v} a} \right\} \quad (\text{C.4})$$

Pour simplifier les expressions, nous écrivons  $\overline{\varepsilon_{AB}}^n$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon_{AB}}^n(x, a) = \mathcal{C}_n \times & \left\{ \lambda_n [(1 - \gamma_n^2) \sin(\lambda_n a) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\lambda_n a)] \right. \\ & \left. + \lambda_n \left[ -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} (1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) + 2\zeta_n \gamma_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n^d}{v} a} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

avec  $\mathcal{C}_n = (2Pz_0/\rho S L l_g \omega_n^2) \times (-2\lambda_n \sin(\lambda_n x_C) \sin(\lambda_n l_g/2) / [(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_n)^2])$ . La composante dans les accolades dans la première ligne désigne la réponse particulière (quasi-statique si  $\gamma_n \rightarrow 0$ ) tandis que la deuxième ligne de l'expression C.5 correspond à la réponse homogène.

Nous calculons ensuite l'aire de l'histoire de réponse en déformation pour le mode  $n$  :

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^L \overline{\varepsilon_{AB}}^n(x, a) da \\ &= \mathcal{C}_n \times \left\{ \lambda_n \int_0^L [(1 - \gamma_n^2) \sin(\lambda_n a) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\lambda_n a)] da \right. \\ & \quad \left. + \lambda_n \int_0^L \left[ -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1 - \zeta_n^2}} (1 - \gamma_n^2 - 2\zeta_n^2) \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) + 2\zeta_n \gamma_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v} a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n^d}{v} a} da \right\} \\ &= \mathcal{C}_n (\mathcal{S}_n^p + \mathcal{S}_n^h) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

## C.1 Comparaison de l'aire des composantes particulière $\mathcal{S}_n^p$ et homogène $\mathcal{S}_n^h$

Comme  $\mathcal{C}_n$  est un facteur en commun et qu'il ne dépend pas de la position de la force, nous calculons seulement les valeurs de  $\mathcal{S}_n^p$  et  $\mathcal{S}_n^h$ .

Pour la composante particulière, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_n^p &= \lambda_n \int_0^L [(1 - \gamma_n^2) \sin(\lambda_n a) - 2\zeta_n \gamma_n \cos(\lambda_n a)] da \\ &= \lambda_n \cdot \frac{1}{\lambda_n} \left[ -(1 - \gamma_n^2) \cos\left(\frac{n\pi}{L} a\right) \Big|_{a=0}^L - 2\zeta_n \gamma_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} a\right) \Big|_{a=0}^L \right] \\ &= 2(1 - \gamma_n^2), \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots, 2k + 1. \text{ avec } k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Pour calculer l'aire de la composante homogène, nous utilisons les primitives suivantes (obtenues par l'intégration par parties) :

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin bx - b \cos bx) + c \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos bx + b \sin bx) + c \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n,1}^h &= \lambda_n \int -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}} (1-\gamma_n^2-2\zeta_n^2) \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} da \\
&= -\frac{\lambda_n \gamma_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}} \frac{1-\gamma_n^2-2\zeta_n^2}{\left(\frac{\omega_n^d}{v}\right)^2 (1+\zeta_n^2)} \left[ -\zeta_n \frac{\omega_n}{v} \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) - \sqrt{1-\zeta_n^2} \frac{\omega_n}{v} \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} \quad (\text{C.9}) \\
&= -\frac{\gamma_n}{\sqrt{1-\zeta_n^2}} \frac{\lambda_n (1-\gamma_n^2-2\zeta_n^2)}{\left(\frac{\omega_n^d}{v}\right)^2 (1+\zeta_n^2) (1-\zeta_n^2)} \left(\frac{\omega_n}{v}\right) \left[ -\zeta_n \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) - \sqrt{1-\zeta_n^2} \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] \\
&\quad \times e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a}
\end{aligned}$$

Notons que  $\gamma_n = \lambda_n v / \omega_n$ , nous avons :

$$\mathcal{S}_{n,1}^h = \frac{\gamma_n^2 (1-\gamma_n^2-2\zeta_n^2)}{(1-\zeta_n^4) \sqrt{1-\zeta_n^2}} \left[ \zeta_n \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) + \sqrt{1-\zeta_n^2} \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} \quad (\text{C.10})$$

De même, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{n,2}^h &= \lambda_n \int \zeta_n \gamma_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} da \\
&= \frac{2\zeta_n \gamma_n \lambda_n}{\left(\frac{\omega_n^d}{v}\right)^2 (1+\zeta_n^2)} \left[ -\zeta_n \frac{\omega_n}{v} \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) + \sqrt{1-\zeta_n^2} \frac{\omega_n}{v} \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} \quad (\text{C.11}) \\
&= \frac{2\zeta_n \gamma_n \lambda_n}{\left(\frac{\omega_n^d}{v}\right)^2 (1+\zeta_n^2) (1-\zeta_n^2)} \left(\frac{\omega_n}{v}\right) \left[ -\zeta_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) + \sqrt{1-\zeta_n^2} \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] \\
&\quad \times e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S}_{n,2}^h = \frac{2\zeta_n \gamma_n^2}{1-\zeta_n^4} \left[ \sqrt{1-\zeta_n^2} \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) - \zeta_n \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} \quad (\text{C.12})$$

En général, le taux d'amortissement et le facteur de vitesse sont petits ( $\zeta_n, \gamma_n \leq 0.1$ ). Nous admettons que  $\zeta_n^2, \gamma_n^2 \ll 1 \Rightarrow (1-\zeta_n^2)^\alpha \approx 1 - \alpha \zeta_n^2/2$ . En négligeant les termes de grand ordre, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_n^h &= \mathcal{S}_{n,1}^h + \mathcal{S}_{n,2}^h \Big|_{a=0}^L \\
&\approx \gamma_n^2 \left[ 3\zeta_n \sin\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) + \cos\left(\frac{\omega_n^d}{v}a\right) \right] e^{-\zeta_n \frac{\omega_n}{v}a} \Big|_{a=0}^L \quad (\text{C.13})
\end{aligned}$$

Comme  $\gamma_n^2 \ll 1$  et la valeur de  $\mathcal{S}_n^h$  est bornée. Nous avons  $\mathcal{S}_n^h \ll \mathcal{S}_n^p$ . La participation de la composante « dynamique » à l'aire de l'histoire de la déformation totale est donc négligeable.

## C.2 Distribution de l'aire de l'histoire de la déformation totale

Lorsque la vitesse de la force est suffisamment petite, nous pouvons négliger le terme du second ordre des facteurs de vitesse  $\gamma_n$ . L'aire de l'histoire de la réponse en déformation

est :

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_n C_n \mathcal{S}_n^p, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots \\
 &= \frac{8|P|z_0}{EILl_g} \sum_n \frac{\sin(\frac{n\pi}{L}x_C) \sin(\frac{n\pi}{L}\frac{l_g}{2})}{(\frac{n\pi}{L})^4}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots
 \end{aligned}
 \tag{C.14}$$

A titre d'illustration, nous mettons les valeurs de  $|P|$ ,  $z_0$ ,  $EI$  égales à 1. Nous avons l'aire calculée par l'approche modale :

$$\mathcal{A}_{mod}(x_C) = \frac{8}{Ll_g} \sum_n \frac{\sin(\frac{n\pi}{L}x_C) \sin(\frac{n\pi}{L}\frac{l_g}{2})}{(\frac{n\pi}{L})^4}, \quad n = 1, 3, 5, 7, \dots
 \tag{C.15}$$

Nous comparons la valeur de l'aire  $A$  calculée par l'expression (C.15) avec celle donnée par l'approche polynomiale (Équation 5.9) :

$$\mathcal{A}_{pol}(x_C) = -\frac{1}{2}x_C^2 + \frac{L}{2}x_C - \frac{l_g^2}{24}
 \tag{C.16}$$

Nous considérons une poutre simple de longueur  $L = 2m$ . Une corde optique de longueur  $2m$  et de position variable est placée sous la poutre. La figure C.1 représente l'aire des courbes de déformation en fonction de la position du centre de la Corde Optique par deux approches : Les courbes colorées correspondent aux sept premiers modes impairs (obtenues par l'expression C.5) tandis que la ligne noire en pointillé représente l'aire des courbes de déformation calculée dans le cas du chargement statique, obtenue par l'expression (C.16).

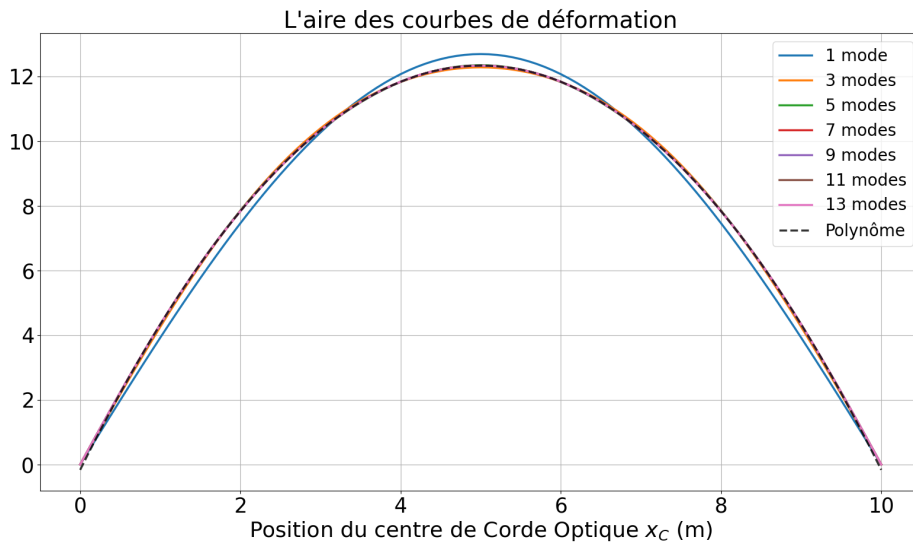


FIGURE C.1 – Distribution de l'aire des courbes de déformation

Nous observons sur la figure C.1 des petits écarts entre l'aire des courbes de déformation obtenue par la superposition modale dans le cas où seul le premier mode est pris en compte. Plus le nombre de modes augmente, plus les valeurs de cette l'aire s'approche de la solution analytique.

Afin de mettre en évidence l'influence du nombre de modes, nous traçons la norme euclidienne des écarts entre l'aire obtenue par approche modale  $\mathcal{A}_{mod}$  et celle calculée par l'expression (C.16)  $\mathcal{A}_{pol}$  :  $\|\mathcal{A}_{mod} - \mathcal{A}_{pol}\|_2/N$  avec  $N$  la longueur des vecteurs  $\mathcal{A}_{mod}$ ,  $\mathcal{A}_{pol}$  (nombre de points). La figure C.2 représente la valeur de cette norme en fonction du nombre de modes pris en compte pour la solution approchée. Nous observons que si le nombre de modes pris en compte est supérieur à cinq, les valeurs des aires calculées par les deux approches sont confondues.

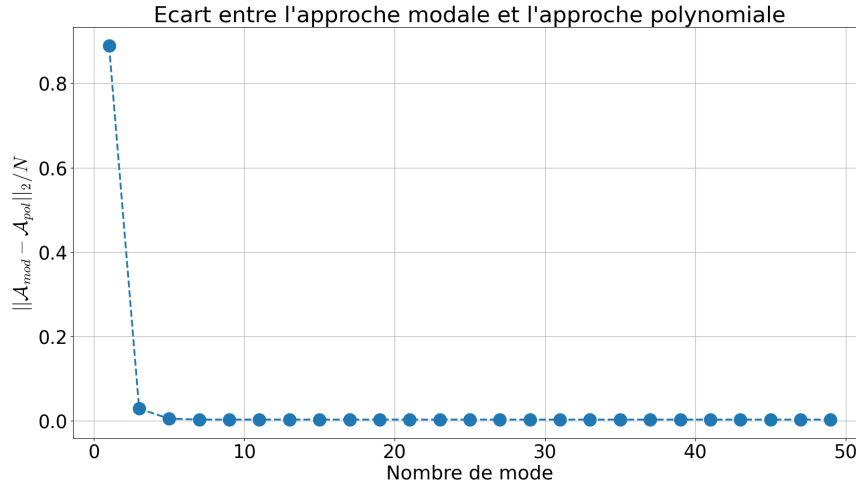


FIGURE C.2 – Différence entre les valeurs de l'aire obtenues par l'approche modale et par l'approche polynomiale.

### C.3 Influence de la vitesse et de l'amortissement sur l'aire de l'histoire de la déformation calculée

Pour voir l'influence de la vitesse et de l'amortissement sur le résultat final de l'aire calculée, nous considérons la fonction  $f(\gamma_n, \zeta_n)$  comme suit :

$$f(\gamma_n, \zeta_n) = \frac{1 - \gamma_n^2}{(1 - \gamma_n^2)^2 + (2\zeta_n\gamma_n)^2} = \frac{A}{A_{stat}} \quad (\text{C.17})$$

dans laquelle  $A$  est l'aire des courbes de déformations avec la prise en compte de la vitesse du chargement et de l'amortissement.  $A_{stat}$  est calculé par l'expression C.14.

Nous traçons alors la fonction  $f(\gamma_n, \zeta_n)$  en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$  à différents taux d'amortissement  $\zeta_n$  (Figure C.3).

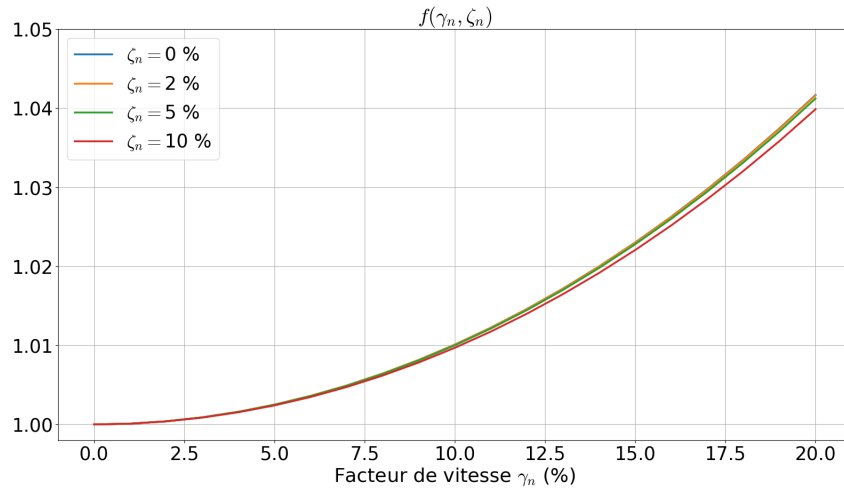


FIGURE C.3 – Valeur de  $f(\gamma_n, \zeta_n)$  en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$

En général, la vitesse de véhicule n'excède pas 10 % de la première vitesse critique de la structure  $v_{c,1}$ . Si nous prenons en compte l'effet de la vitesse et de l'amortissement, les valeurs de l'aire des courbes de déformation calculées sont de l'ordre de 1 % plus grande que l'aire quasi-statique. Les vitesses critiques correspondant aux modes supérieurs sont plus grandes que la première vitesse critique. Cela implique que la valeur du facteur de vitesse est diminuée en fonction du mode. Nous pouvons donc négliger l'effet de la vitesse du chargement et de l'amortissement.

#### C.4 Influence de la vitesse et de l'amortissement sur la matrice $\mathbf{Q}$

La matrice  $\mathbf{Q}$  permet d'exprimer les coefficients du terme dépendant de temps de la réponse forcée ( $q_{n,j}^p(t_j)$ ) en fonction du vecteur des coefficients de la déformée modale correspondante (équation 2.62) :

$$\bar{X}_{n,j} = \frac{1}{\omega_n^2} \left( \begin{array}{cc|cc} a & b & \mathbf{0} & \\ -b & a & c & d \\ \mathbf{0} & & d & c \end{array} \right) X_{n,j} = \mathbf{Q} X_{n,j} \quad (\text{C.18})$$

avec :

$$a = \frac{1 - \gamma_{n,j}^2}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad b = \frac{2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 - \gamma_{n,j}^2)^2 + (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2} \\ c = \frac{1 + \gamma_{n,j}^2}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2}, \quad d = \frac{-2\zeta_n \gamma_{n,j}}{(1 + \gamma_{n,j}^2)^2 - (2\zeta_n \gamma_{n,j})^2} \quad (\text{C.19})$$

Dans cette section, nous traçons des termes  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$  et du taux d'amortissement  $\zeta_n$ .

La figure C.4 représente les termes  $a$  et  $c$  en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$  avec différents taux d'amortissement  $\zeta_n$ . Nous observons que les fonctions  $a(\gamma_n, \zeta_n)$  et  $c(\gamma_n, \zeta_n)$

sont pratiquement symétriques. De plus, les courbes représentant la fonction  $a(\gamma_n, \zeta_n)$  sont relativement confondues. Nous avons la même conclusion pour les courbes représentant le terme  $c(\gamma_n, \zeta_n)$ . Pour une vitesse qui est inférieure ou égale à 10 % de la vitesse critique ( $\gamma_n \leq 10\%$ ), les écarts entre les fonctions  $a$ ,  $c$  et 1 sont inférieurs à 1 %.

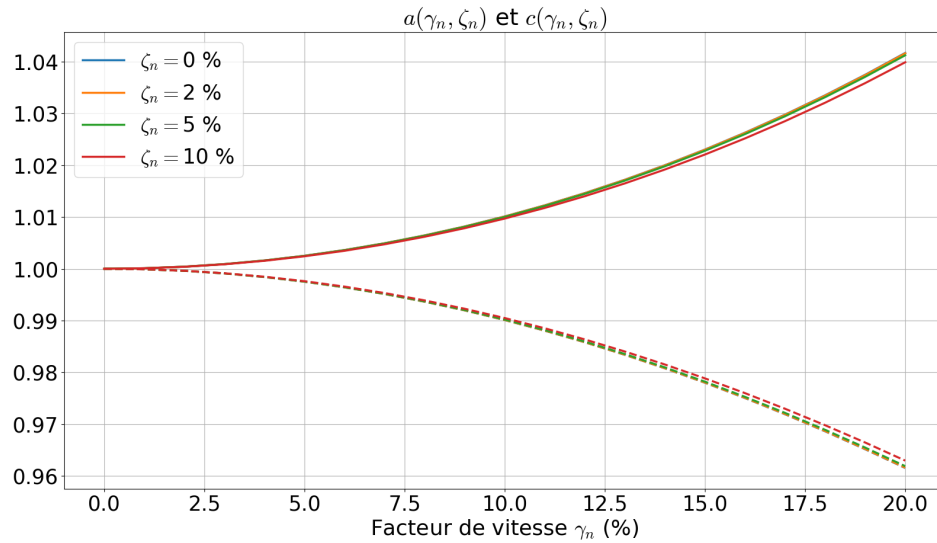


FIGURE C.4 – Valeur de  $a(\gamma_n, \zeta_n)$  (courbes continues) et de  $c(\gamma_n, \zeta_n)$  (courbes pointillées) en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$

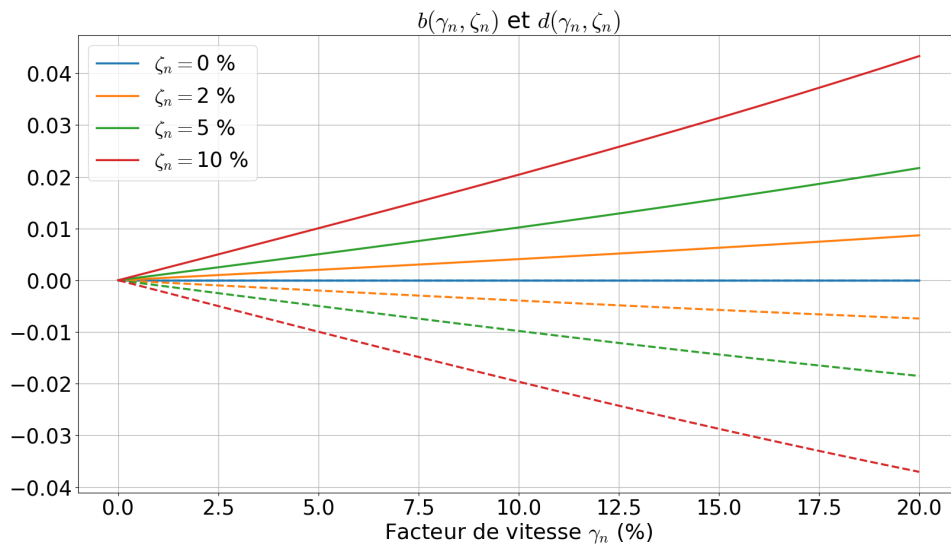


FIGURE C.5 – Valeur de  $b(\gamma_n, \zeta_n)$  (lignes continues) et de  $d(\gamma_n, \zeta_n)$  (lignes pointillées) en fonction du facteur de vitesse  $\gamma_n$

La figure C.5 représente les fonctions  $b(\gamma_n, \zeta_n)$  et  $d(\gamma_n, \zeta_n)$ . Avec une vitesse égale à 10 % de la vitesse critique et avec  $\zeta_n = 5\%$ , les valeurs des fonctions  $b$  et  $d$  sont de  $\pm 0.01$  (courbes vertes en continu et pointillé).





## Annexe D

# Détermination des coefficients de la méthode de Fraction rationnelle des polynômes

### D.1 Poutre soumise à une impulsion

#### D.1.1 Réponse en déplacement (réceptance)

Considérons le  $k$ -ième mode de vibration, dont le terme sous la sommation  $\Sigma_n$  peut être décomposé en terme d'éléments simples :

$$\frac{\alpha_k^\varepsilon}{-\omega^2 + 2i\zeta_k\omega_k\omega + \omega_k^2} = \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \quad (\text{D.1})$$

Nous écrivons le terme à droite de l'équation (D.1) sous forme équivalente :

$$\frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} = \frac{r_k(i\omega - p_k^*) + r_k^*(i\omega - p_k)}{(i\omega - p_k)(i\omega - p_k^*)} \quad (\text{D.2})$$

Nous avons les deux équations suivantes quelque soit la valeur de  $\omega$  :

$$-\omega^2 - i\omega(p_k + p_k^*) + p_k p_k^* = -\omega^2 + 2i\omega\zeta_k\omega_k + \omega_k^2, \quad \forall \omega \quad (\text{D.3})$$

et :

$$i\omega(r_k + r_k^*) - (r_k p_k^* + r_k^* p_k) = \alpha_k^\varepsilon, \quad \forall \omega \quad (\text{D.4})$$

Étant donné un nombre complexe  $z = a + ib$ , ( $a, b \in \mathbb{R}$ ), nous avons :

$$\begin{cases} z + z^* = 2a & = 2 \operatorname{Re}(z) \\ z z^* = a^2 + b^2 & = |z|^2 \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

A partir des équations (D.3) et (D.5), nous avons :

$$\begin{cases} p_k + p_k^* = -2\omega_k\zeta_k & = 2 \operatorname{Re}(p_k) \\ p_k p_k^* = \omega_k^2 & = |p_k|^2 \end{cases} \quad (\text{D.6})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(p_k) & = -\omega_k\zeta_k \\ \operatorname{Im}(p_k) & = \sqrt{|p_k|^2 - (\operatorname{Re}(p_k))^2} = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \end{cases} \quad (\text{D.7})$$

Nous en déduisons le pôle complexe  $p_k$  :

$$p_k = -\omega_k \zeta_k + i\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} = \sigma_k + i\omega_k^d \quad (\text{D.8})$$

Pour déterminer le résidu  $r_k$  en terme des constantes modales  $\alpha_k$  et  $\omega_k$ ,  $\zeta_k$ , à partir de l'équation (D.4), nous avons :

$$\begin{cases} r_k + r_k^* = 0 & = 2 \operatorname{Re}(r_k) \\ -(r_k p_k^* + r_k^* p_k) = \alpha_k^\varepsilon & = -2 [\operatorname{Re}(r_k) \operatorname{Re}(p_k) + \operatorname{Im}(r_k) \operatorname{Im}(p_k)] \end{cases} \quad (\text{D.9})$$

Nous en déduisons :

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(r_k) & = 0 \\ \operatorname{Im}(r_k) & = -\alpha_k^\varepsilon / (2 \operatorname{Im}(p_k)) = -\alpha_k^\varepsilon / (2\omega_k^d) \end{cases} \quad (\text{D.10})$$

L'expression du résidu est (équation 6.35) :

$$r_k = -i \frac{\alpha_k^\varepsilon}{2\omega_k^d} \quad (\text{D.11})$$

Réciproquement, la pulsation propre  $\omega_k$ , le taux d'amortissement  $\zeta_k$  et la constante modale  $\alpha_k$  (il s'agit d'un nombre réel dans ce cas) sont déterminés en fonction des valeurs du résidu  $r_k$  et du pôle  $p_k$  par :

$$\omega_k = |p_k| \quad (\text{D.12})$$

$$\zeta_k = -\frac{\operatorname{Re}(p_k)}{|p_k|} \quad (\text{D.13})$$

$$\alpha_k^\varepsilon = -2 \operatorname{Im}(r_k) \operatorname{Im}(p_k) = 2 |\operatorname{Im}(r_k) \operatorname{Im}(p_k)| \quad (\text{D.14})$$

Nous retrouvons les relations présentées dans le tableau 6.4.

### D.1.2 Réponse en accélération (accélération)

Reprenons la fonction de réponse en accélération  $H_a(\omega)$  correspondant au mode  $k$  (Eq. 6.40) et sa représentation sous forme d'éléments simples (Eq. 6.41) :

$$\frac{-\omega^2 \beta_k^a}{-\omega^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega + \omega_k^2} = q_k^a + \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \quad (\text{D.15})$$

Nous avons deux équations équivalentes comme suit :

$$-\omega^2 - i\omega(p_k + p_k^*) + p_k p_k^* = -\omega^2 + 2i\omega \zeta_k \omega_k + \omega_k^2, \quad \forall \omega \quad (\text{D.16})$$

et :

$$(i\omega - p_k)(i\omega - p_k^*)q_k^a + i\omega(r_k + r_k^*) - (r_k p_k^* + r_k^* p_k) = -\omega^2 \beta_k^a, \quad \forall \omega \quad (\text{D.17})$$

Comme la démonstration dans les équations (D.3, D.5–D.7), le pôle complexe est :

$$p_k = -\omega_k \zeta_k + i\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} = \sigma_k + i\omega_k^d \quad (\text{D.18})$$

A partir de l'équation (D.17) et à l'aide de la méthode des coefficients indéterminés, nous avons :

$$q_k^a = \beta_k^a \quad (\text{D.19})$$

et,

$$2i\omega [\zeta_k \omega_k \beta_k^a + \text{Re}(r_k)] + \omega_k^2 \beta_k^a + 2 \text{Re}(r_k) \zeta_k \omega_k - 2\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \text{Im}(r_k) = 0, \forall \omega \quad (\text{D.20})$$

Nous avons alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Re}(r_k) &= -\zeta_k \omega_k \beta_k^a \\ \text{Im}(r_k) &= \frac{1 - 2\zeta_k^2}{2\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \omega_k \beta_k^a \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

L'expression du résidu est :

$$r_k = \omega_k \beta_k^a \left( -\zeta_k + i \frac{1 - 2\zeta_k^2}{2\sqrt{1 - \zeta_k^2}} \right) \quad (\text{D.22})$$

Pour déterminer la constante modale correspondant au mode  $k$ ,  $\alpha_k^a = \omega_k^2 \beta_k^a$ , nous partons de l'équation (D.17), étant donné que  $q_k^a = \beta_k^a$  (Eq. D.19) et que  $(i\omega - p_k)(i\omega - p_k^*) = -\omega^2 + 2i\omega \zeta_k \omega_k + \omega_k^2$  (Eq. D.16) :

$$(-\omega^2 + 2i\omega \zeta_k \omega_k + \omega_k^2) \beta_k^a + i\omega(r_k + r_k^*) - (r_k p_k^* + r_k^* p_k) = -\omega^2 \beta_k^a, \forall \omega \quad (\text{D.23})$$

En reportant les expressions de  $p_k$  et de  $r_k$  (Eqs. D.18, D.22) à l'équation (D.23), nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_k^a &= \omega_k^2 \beta_k^a \\ &= r_k p_k^* + r_k^* p_k \\ &= 2 [\text{Re}(r_k) \text{Re}(p_k) + \text{Im}(r_k) \text{Im}(p_k)] \end{aligned} \quad (\text{D.24})$$

De même, les propriétés modales du mode concerné sont obtenues à partir de la valeur du pôle complexe  $p_k$  :

$$\omega_k = |p_k| \quad (\text{D.25})$$

$$\zeta_k = -\frac{\text{Re}(p_k)}{|p_k|} \quad (\text{D.26})$$

Nous retrouverons alors les expressions dans le tableau 6.5.

## D.2 Poutre soumise à une force mobile

Dans le cas d'une poutre simple soumise à une force mobile, nous reprenons la fonction transformée de Fourier de la composante homogène de l'accélération  $\hat{a}_k^h(\omega)$  correspondant au mode  $k$  (Eq. 6.51) et sa représentation sous forme d'éléments simples (Eq. 6.52) :

$$\frac{\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \alpha_k + (i\omega + \zeta_k \omega_k) \beta_k}{-\omega^2 + 2i\zeta_k \omega_k \omega + \omega_k^2} = \frac{r_k}{i\omega - p_k} + \frac{r_k^*}{i\omega - p_k^*} \quad (\text{D.27})$$

De même façon, nous avons les deux équations suivantes :

$$-\omega^2 - i\omega(p_k + p_k^*) + p_k p_k^* = -\omega^2 + 2i\omega \zeta_k \omega_k + \omega_k^2, \quad \forall \omega \quad (\text{D.28})$$

et :

$$i\omega(r_k + r_k^*) - (r_k p_k^* + r_k^* p_k) = \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \alpha_k + (i\omega + \zeta_k \omega_k) \beta_k, \quad \forall \omega \quad (\text{D.29})$$

A partir de l'équation (D.28), nous avons toujours :

$$p_k = -\omega_k \zeta_k + i\omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} = \sigma_k + i\omega_k^d \quad (\text{D.30})$$

En reportant la valeur du pôle  $p_k$  de l'équation (D.30) à l'équation (D.29), nous avons :

$$i\omega [2 \operatorname{Re}(r_k) - \beta_k] + \left[ \zeta_k \omega_k (2 \operatorname{Re}(r_k) - \beta_k) - \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} (2 \operatorname{Im}(r_k) + \alpha_k) \right] = 0, \quad \forall \omega \quad (\text{D.31})$$

Nous en déduisons :

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(r_k) &= \beta_k/2 \\ \operatorname{Im}(r_k) &= -\alpha_k/2 \end{cases} \quad (\text{D.32})$$

L'expression du résidu est :

$$r_k = \frac{1}{2} (\beta_k - i\alpha_k) \quad (\text{D.33})$$

Réciproquement, la constante modale est maintenant un nombre complexe et est de valeur :

$$\begin{aligned} \alpha_k^a &= \omega_k \sqrt{1 - \zeta_k^2} \alpha_k + (i\omega_k + \zeta_k \omega_k) \beta_k \\ &= i\omega_k (r_k + r_k^*) - (r_k p_k^* + r_k^* p_k) \\ &= 2i \operatorname{Re}(r_k) |p_k| - 2 [\operatorname{Re}(r_k) \operatorname{Re}(p_k) + \operatorname{Im}(r_k) \operatorname{Im}(p_k)] \end{aligned} \quad (\text{D.34})$$

Les propriétés modales sont obtenues à partir de la valeur du pôle complexe  $p_k$  :

$$\omega_k = |p_k| \quad (\text{D.35})$$

$$\zeta_k = -\frac{\operatorname{Re}(p_k)}{|p_k|} \quad (\text{D.36})$$

Nous retrouverons alors les expressions dans le tableau 6.6.

# Bibliographie

- [1] AASHTO. *Standard Specifications for Highway Bridges*. 16<sup>e</sup> éd. Washington, D.C. : American Association of State Highway et Transportation Officials, 1996.
- [2] AASHTO-LRFD. *Bridge Specifications*. 2<sup>e</sup> éd. Washington, D.C. : American Association of State Highway et Transportation Officials, 1998.
- [3] M. M. ABDEL WAHAB et G. DE ROECK. “Damage detection in bridges using modal curvatures : Application to a real damage scenario”. In : *Journal of Sound and Vibration* 226 (2 sept. 1999), p. 217-235. ISSN : 0022460X.
- [4] AFGC. *Conception des bétons pour une durée de vie donnée des ouvrages - Maîtrise de la durabilité vis-à-vis de la corrosion des armatures et de l'alcali-réaction*. Rapp. tech. Paris : Association Française de Génie Civil, 2004, p. 252.
- [5] AFNOR. *NF EN 206/CN : «spécifications, performances, production et conformité»*. Association Française de Normalisation, 2014.
- [6] R. ALLEMANG. “The Modal Assurance Criterion (MAC) : Twenty Years of Use and Abuse”. In : *Sound and Vibration* 37 (jan. 2003), p. 14-23.
- [7] D. ANASTASOPOULOS, G. DE ROECK et E. REYNDERS. “Automated operational modal analysis of a steel arch bridge from dynamic sub-microstrain Fiber Bragg Grating data”. In : *Proceedings of the International Conference on Structural Dynamic , EURODDYN 1* (2020), p. 1096-1108.
- [8] M. ATTAR, A. KARRECH et K. REGENAUER-LIEB. “A lattice spring model for dynamic analysis of damaged beam-type structures under moving loads”. In : *European Journal of Mechanics - A/Solids* 60 (2016), p. 196-207. ISSN : 0997-7538.
- [9] S. E. AZAM, M MOFID et R. A. KHORASKANI. “Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass”. In : *Scientia Iranica* 20.1 (2013), p. 50-56. ISSN : 1026-3098.
- [10] R. BAKKER. *Model to calculate the rate of carbonation resistance of concrete under different climatic conditions*. Rapp. tech. Pays-Bas : CEMIJ bv Laboratorium, 1993.
- [11] B. BELL. *European Railway Bridge Demography*. Rapp. tech. 2004, p. 15.
- [12] M. BEN OUEZDOU. *Cours d'Ouvrage d'Art*. Ecole National d'Ingénieur de Tunis, 2008, p. 158.
- [13] C BILELLO et L. A. BERGMAN. “Vibration of damaged beams under a moving mass : Theory and experimental validation”. In : *Journal of Sound and Vibration* 274 (3-5 juill. 2004), p. 567-582. ISSN : 0022460X.
- [14] J. M. W. BROWNJOHN. “Assessment of structural integrity by dynamic measurements”. Thèse de doct. University of Bristol, 1988.
- [15] A. CARCATERRA et W. D'AMBROGIO. “An iterative rational fraction polynomial technique for modal identification”. In : *Meccanica* 30.1 (1995), p. 63-75. ISSN : 00256455.

- [16] F.-B. CARTIAUX, P. PELLETIER et J. SEMIAO. “Traffic and Temperature Effects Monitoring on Bridges by Optical Strands Strain Sensors”. In : *5th International Conference on Smart Monitoring, Assessment and Rehabilitation of Civil Structures*. Potsdam, Germany, 2019.
- [17] A. CASTEL et al. “Modelling the Stiffness Reduction of Corroded Reinforced Concrete Beams after Cracking”. In : *Modelling of Corroding Concrete Structures*. Sous la dir. de C. ANDRADE et G. MANCINI. Dordrecht : Springer Netherlands, 2011, p. 219-230. ISBN : 978-94-007-0677-4.
- [18] CEREMA. *Bulletin Ouvrages d’Art - No. 71*. Rapp. tech. Sétra.
- [19] S. Z. CHEN, D. C. FENG et W. S. HAN. “Comparative study of damage detection methods based on long-gauge fbg for highway bridges”. In : *Sensors (Switzerland)* 20.13 (2020). ISSN : 14248220.
- [20] T. G. CHONDROS, A. D. DIMAROGONAS et J. YAO. “A continuous cracked beam vibration theory”. In : *Journal of Sound and Vibration* (1998). ISSN : 0022460X.
- [21] S. CHRISTIDES et A. D. S. BARR. “One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 26.11 (1984), p. 639-648.
- [22] CODE\_ASTER. *U2.01.05 : Contraintes, efforts, forces et déformations*. Rapp. tech. 2020.
- [23] C. CRÉMONA, Y. GAUTIER et R. LÉCONTE. *Guide technique : Investigations et évaluations dynamiques des ponts*. Paris : Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC), 2009, p. 123.
- [24] R. DE CASSIA SILVA. “Contribution to the probabilistic analysis of reinforced concrete bridge performance”. Thèse de doct. Ecole des Ponts ParisTech, 2004.
- [25] M. DEKOSTER. “Étude du comportement mécanique des structures en béton armé dégradé par la corrosion”. Thèse de doct. Université de Lille I, 2003.
- [26] A. D. DIMAROGONAS. *Vibration for engineers*. West Publishers, St. Paul, Minnesota, 1976.
- [27] A. D. DIMAROGONAS, S. A. PAIPETIS et T. G. CHONDROS. *Analytical methods in rotor dynamics*. Elsevier Applied Science, London, 1983.
- [28] E. DROUET. “Impact de la température sur la carbonatation des matériaux cimentaires : prise en compte des transferts hydriques”. Thèse de doct. Ecole Normale Supérieure de Cachan, 2010.
- [29] Y. A. DUGUSH et M. EISENBERGER. “Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads”. In : *Journal of Sound and Vibration* 254 (5 juill. 2002), p. 911-926. ISSN : 0022460X.
- [30] S. A. EFTEKHARI et A. A. JAFARI. “Coupling Ritz Method and Triangular Quadrature Rule for Moving Mass Problem”. In : *Journal of Applied Mechanics* 79.2 (fév. 2012). ISSN : 0021-8936.
- [31] W. FAN et P. QIAO. “Vibration-based Damage Identification Methods : A Review and Comparative Study”. In : *Structural Health Monitoring* 10.1 (2011), p. 83-111.
- [32] fib : *Bulletin 34 - Model code for service life design*. Rapp. tech. Fédération Internationale du Béton, 2016.
- [33] M. A. FODA et Z. ABDULJABBAR. “A dynamic green function formulation for the response of a beam structure to a moving mass”. In : *Journal of Sound and Vibration* 210 (3 fév. 1998), p. 295-306. ISSN : 0022460X.

- [34] R. FRANÇOIS, S. LAURENS et F. DEBY. *La corrosion et ses conséquences sur les ouvrages en béton armé*. Great Britain : ISTE Editions, 2018, p. 224. ISBN : 978-1784054182.
- [35] M. I. FRISWELL et J. E. T. PENNY. “Crack Modeling for Structural Health Monitoring”. In : *Structural Health Monitoring* 1.2 (2002), p. 139-148.
- [36] L. FRÝBA. *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*. 1999.
- [37] G. GLADWELL et A. MORASSI. “Estimating damage in a rod from changes in node positions”. In : *Inverse Problems in Engineering* 7.3 (1999), p. 215-233.
- [38] B. GLISIC et D. INAUDI. *Fibre optics methods for structural health monitoring*. Chichester : John Wiley et Sons Ltd, 2007.
- [39] B. T. GÓRRIZ, P. RINAUDO et P. GARCÍA. “Comparison between point and long-gage FBG-based strain sensors during a railway bridge load test”. In : *Strain* 53 (2017), p. 1-14.
- [40] M.-F. GREEN et D. CEBON. “Dynamic Response of Highway Bridges to Heavy Vehicle Loads : Theory and Experimental Validation”. In : *Journal of Sound and Vibration* 170.1 (1994), p. 51-78. ISSN : 0022-460X.
- [41] D. A. HAUSMANN. “Steel corrosion in concrete—How does it occur?” In : *Materials protection* 6.11 (1967), p. 19-23.
- [42] G. HEARN et R. B. TESTA. “Modal Analysis for Damage Detection in Structures”. In : *Journal of Structural Engineering* 117 (10 oct. 1991), p. 3042-3063. ISSN : 0733-9445.
- [43] T. HOANG et al. “Calculation of force distribution for a periodically supported beam subjected to moving loads”. In : *Journal of Sound and Vibration* 388 (2017), p. 327-338. ISSN : 10958568.
- [44] W. HONG, Y. CAO et Z. WU. “Strain-Based Damage-Assessment Method for Bridges under Moving Vehicular Loads Using Long-Gauge Strain Sensing”. In : *Journal of Bridge Engineering* 21.10 (2016), p. 04016059. ISSN : 1084-0702.
- [45] M. ICHIKAWA, Y. MIYAKAWA et A. MATSUDA. “Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass”. In : *Journal of Sound and Vibration* 230.3 (2000), p. 493-506. ISSN : 0022460X.
- [46] I. KHAN, R. FRANÇOIS et A. CASTEL. “Mechanical Behavior of Long-Term Corroded Reinforced Concrete Beam”. In : *Modelling of Corroding Concrete Structures*. Sous la dir. de C. ANDRADE et G. MANCINI. Dordrecht : Springer Netherlands, 2011, p. 243-258. ISBN : 978-94-007-0677-4.
- [47] C. KUMAR SUDHEESH, C. SUJATHA et K SHANKAR. “Vibration of simply supported beams under a single moving load : A detailed study of cancellation phenomenon”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 99 (2015), p. 40-47. ISSN : 0020-7403.
- [48] H. P. LEE. “(Received 6”. In : *Mechanics Research Communications* 22.4 (1995), p. 371-376.
- [49] S.-K. LEE. *Current State of Bridge Deterioration in the U.S.—Part 1*. Rapp. tech. National Association of Corrosion Engineers, 2012, p. 62-67.
- [50] N. A. J. LIEVEN et D. J. EWINS. “Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)”. In : *Proceedings of the 6th international modal analysis conference*. T. 1. Kissimmee Florida, USA. 1988, p. 690-695.



- [51] H. P. LIN et S. C. CHANG. “Forced responses of cracked cantilever beams subjected to a concentrated moving load”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 48 (12 déc. 2006), p. 1456-1463. ISSN : 00207403.
- [52] M. A. MAHMOUD et M. A. ABOU ZAID. “Dynamic response of a beam with a crack subject to a moving mass”. In : *Journal of Sound and Vibration* 256.4 (2002), p. 591-603. ISSN : 0022460X.
- [53] S. MALLAT et W. L. HWANG. “Singularity detection and processing with wavelets”. In : *IEEE Transactions on Information Theory* 38.2 (1992), p. 617-643. ISSN : 15579654.
- [54] G. MALUMBELA, P. MOYO et M. ALEXANDER. “Longitudinal strains and stiffness of RC beams under load as measures of corrosion levels”. In : *Engineering Structures* 35 (2012), p. 215-227. ISSN : 0141-0296.
- [55] S. MORADI, P. RAZI et L. FATAHI. “On the application of bees algorithm to the problem of crack detection of beam-type structures”. In : *Computers and Structures* 89.23-24 (2011), p. 2169-2175. ISSN : 00457949.
- [56] M. MULS. “Flexion transversale des ouvrages à poutres Poutres sous chaussées et poutres latérales”. In : *ENPC – MSGCE – Projet d’ouvrage d’art 2015*. Ecole des Ponts ParisTech, 2015.
- [57] P. MUSEROS, E. MOLINER et M. MARTÍNEZ-RODRIGO. “Free vibrations of simply-supported beam bridges under moving loads : Maximum resonance, cancellation and resonant vertical acceleration”. In : *Journal of Sound and Vibration* 332.2 (2013), p. 326-345. ISSN : 0022-460X.
- [58] A. NEVILLE. “Chloride attack of reinforced concrete : an overview”. In : *Materials and Structures* 28.2 (1995), p. 63-70.
- [59] *NF EN1998-1 Eurocode 8 : Calcul des structure pour leur résistance aux séismes - Partie 1 : Règles générales, actions sismiques et règles pour les bâtiments*. Norme. Bruxelles, Belgique : Comité européen de normalisation, 1998.
- [60] *NF EN1998-2 Eurocode 8 : Calcul des structure pour leur résistance aux séismes - Partie 2 : Ponts*. Norme. Bruxelles, Belgique : Comité européen de normalisation, 1998.
- [61] V.-H. NGUYEN et D. DUHAMEL. “Finite element procedures for nonlinear structures in moving coordinates. Part II : Infinite beam under moving harmonic loads”. In : *Computers and Structures* 86.21 (2008), p. 2056-2063. ISSN : 0045-7949.
- [62] Z. NIE et al. “Bridge condition monitoring under moving loads using two sensor measurements”. In : *Structural Health Monitoring* 19.3 (2020), p. 917-937. ISSN : 17413168.
- [63] M. OLSSON. “Finite element, modal co-ordinate analysis of structures subjected to moving loads”. In : *Journal of Sound and Vibration* 99.1 (1985), p. 1-12. ISSN : 0022-460X.
- [64] O. OMAR et al. “An optimized rational fraction polynomial approach for modal parameters estimation from FRF measurements”. In : *Journal of Mechanical Science and Technology* 24.3 (2010), p. 831-842. ISSN : 1738494X.
- [65] W. M. OSTACHOWICZ et M. KRAWCZUK. “Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam”. In : *Journal of Sound and Vibration* 150.2 (1991), p. 191-201. ISSN : 10958568.

- [66] V. PAKRASHI, A. O'CONNOR et B. BASU. "A bridge-vehicle interaction based experimental investigation of damage evolution". In : *Structural Health Monitoring* 9.4 (2010), p. 285-296. ISSN : 14759217.
- [67] M. PALACZ et M. KRAWCZUK. "Vibration parameters for damage detection in structures". In : *Journal of Sound and Vibration* 249 (5 jan. 2003), p. 999-1010. ISSN : 0022460X.
- [68] A. K. PANDEY, M. BISWAS et M. M. SAMMAN. "Damage detection from changes in curvature mode shapes". In : *Journal of Sound and Vibration* 145 (2 mars 1991), p. 321-332. ISSN : 10958568.
- [69] H. S. PARK et al. "Mathematical models for assessment of the safety of steel beams based on average strains from long gage optic sensors". In : *Sensors and Actuators, A : Physical* 125.2 (2006), p. 109-113. ISSN : 09244247.
- [70] A. PESTEREV et al. "Some Recent Results in Moving Load Problems with Application to Highway Bridges". In : *The Proceedings of the International Conference on Motion and Vibration Control* 6.1 (jan. 2002).
- [71] M. POURBAIX. *Atlas of Electrochemical Equilibria in Aqueous Solutions*. Texas : National Association of Corrosion Engineers, 1966, p. 644.
- [72] H. A. RAZAK et F. C. CHOI. "The effect of corrosion on the natural frequency and modal damping of reinforced concrete beams". In : *Engineering Structures* 23.9 (2001), p. 1126-1133. ISSN : 01410296.
- [73] M. H. RICHARDSON et D. L. FORMENTI. "Parameter Estimation From Frequency Response Measurements Using Rational Fraction Polynomials." In : *Proceedings of the International Modal Analysis Conference and Exhibit*. 1982, p. 167-181.
- [74] P. F. RIZOS, N. ASPRAGATHOS et A. D. DIMAROGONAS. "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes". In : *Journal of Sound and Vibration* 138.3 (1990), p. 381-388. ISSN : 10958568.
- [75] C. RODRIGUES, D. INAUDI et B. GLIŠIĆ. "Long-gauge fibre optic sensors : performance comparison and applications". In : *International Journal of Lifecycle Performance Engineering* 1.3 (2013). PMID : 58196, p. 209-233.
- [76] N. ROVERI et A. CARCATERRA. "Damage detection in structures under traveling loads by Hilbert-Huang transform". In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 28 (avr. 2012), p. 128-144. ISSN : 08883270.
- [77] A. RYTTER. "Inspection of Civil Engineering Structures". Thèse de doct. Aalborg University, Denmark, 1993.
- [78] A. V. SAETTA, B. A. SCHREFLER et R. V. VITALIANI. "2 - D model for carbonation and moisture/heat flow in porous materials". In : *Cement and Concrete Research* 25.8 (1995), p. 1703-1712. ISSN : 00088846.
- [79] O. S. SALAWU. "Detection of structural damage through changes in frequency : a review". In : *Engineering Structures* 19.9 (1997), p. 718-723.
- [80] M. SOLÍS, Q. MA et P. GALVÍN. "Damage detection in beams from modal and wavelet analysis using a stationary roving mass and noise estimation". In : *Strain* 54.2 (2018), p. 1-26. ISSN : 14751305.

- [81] P.-T. SON et al. “Dynamic response of a cracked multi-span continuous beam subjected to a moving multi-axle vehicle load”. In : *International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure : Transferring Research into Practice, SHMII 2021*-June.July (2021), p. 1819-1825. ISSN : 25643738.
- [82] G. G. STOKES. *Discussion of a differential equation relating to the breaking of railway bridges*. Printed at the Pitt Press by John W. Parker, 1849.
- [83] C SVEDHOLM et al. “Vibration of damped uniform beams with general end conditions under moving loads”. In : *Engineering Structures* 126 (2016), p. 40-52. ISSN : 0141-0296.
- [84] S.-P. TIMOSHENKO. “On the forced vibrations of bridges”. In : *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 43.257 (1922), p. 1018-1019.
- [85] A. TORRES-ACOSTA et al. “Influence of Corrosion on the Structural Stiffness of Reinforced Concrete Beams”. In : *Corrosion* 60 (sept. 2004).
- [86] K. TUUTTI. “Corrosion of steel in concrete”. Thèse de doct. Swedish Cement et Concrete Research Institute, Stockholm, 1982.
- [87] K. VAN BALEN et D. VAN GEMERT. “Modeling lime mortar carbonation”. In : *Materials and Structures* 27.7 (1994), p. 393 -398.
- [88] E.-J. WALLBANK. *The performance of concrete in bridges : a survey of 200 highway bridges*. London : Her Majesty’s Stationery Office, 1989, p. 96. ISBN : 0115508775.
- [89] J. WILSON et D. WILSON. “Responses of continuous, inertialess beams to traversing mass—A generalization of Stokes’ problem”. In : *International Journal of Mechanical Sciences* 26.2 (1984), p. 105-112. ISSN : 0020-7403.
- [90] B. WU, G. WU et C. YANG. “Parametric study of a rapid bridge assessment method using distributed macro-strain influence envelope line”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 120 (2019), p. 642-663. ISSN : 10961216.
- [91] B. WU et al. “Damage identification method for continuous girder bridges based on spatially-distributed long-gauge strain sensing under moving loads”. In : *Mechanical Systems and Signal Processing* 104 (mai 2018), p. 415-435. ISSN : 10961216.
- [92] Y. YANG et J. YANG. “State-of-the-Art Review on Modal Identification and Damage Detection of Bridges by Moving Test Vehicles”. In : *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 18 (mai 2017), p. 1850025.
- [93] C. YE et al. “Assessment of structural behaviour and structural utilisation of a multi-girder concrete bridge using fibre optic sensing”. In : *Proceedings of the 10th International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure, SHMII 10* 1.July (2021), p. 1-6.
- [94] L. YU et al. “Structural performance of RC beams damaged by natural corrosion under sustained loading in a chloride environment”. In : *Engineering Structures* 96 (2015), p. 30-40. ISSN : 0141-0296.
- [95] Z. YU et al. “Bridge Damage Identification from Moving Load Induced Deflection Based on Wavelet Transform and Lipschitz Exponent”. In : *International Journal of Structural Stability and Dynamics* 16.5 (2016). ISSN : 17936764.
- [96] W. ZHU et R. FRANCOIS. “Effect of corrosion pattern on the ductility of tensile reinforcement extracted from a 26-year-old corroded beam”. In : *Advances in Concrete Construction* 1.2 (2013), p. 121-136.

- [97] X. Q. ZHU et S. S. LAW. "Wavelet-based crack identification of bridge beam from operational deflection time history". In : *International Journal of Solids and Structures* 43.7-8 (2006), p. 2299-2317. ISSN : 00207683.