



**HAL**  
open science

# Simulation numérique du procédé de fabrication additive DED : résolution thermomécanique incrémentale complète et modèles réduits de type "inherent strain"

Joël Keumo Tematio

## ► To cite this version:

Joël Keumo Tematio. Simulation numérique du procédé de fabrication additive DED : résolution thermomécanique incrémentale complète et modèles réduits de type "inherent strain". Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2022. Français. NNT : 2022UP-SLM086 . tel-04220169

**HAL Id: tel-04220169**

**<https://pastel.hal.science/tel-04220169>**

Submitted on 27 Sep 2023

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT**  
**DE L'UNIVERSITÉ PSL**

Préparée à MINES Paris

**Simulation numérique du procédé de fabrication additive  
DED : résolution thermomécanique incrémentale complète  
et modèles réduits de type "inherent strain"**

Soutenue par

**Joel KEUMO TEMATIO**

Le 27 octobre 2022

École doctorale n°364

**Sciences fondamentales et  
appliquées**

Spécialité

**Mécanique numérique et  
matériaux**

Composition du jury :

Anne-Marie HABRAKEN *Rapporteur*  
Directrice de Recherche FNRS, Université de  
Liège, Belgique

Pierre JOYOT *Rapporteur*  
Maître de Conférences (HDR), Ecole supérieure  
des technologies industrielles avancées (ESTIA)

Anthony GRAVOUIL *Président*  
Professeur des Universités, INSA Lyon

Daniel WEISZ-PATRAULT *Examineur*  
Chargé de recherche CNRS, Ecole Polytechnique.

Michel BELLET *Directeur de thèse*  
Professeur, CEMEF Mines Paris - PSL

Yancheng ZHANG *Examineur*  
Chargé de recherche, CEMEF Mines Paris - PSL



# Résumé

Une simulation thermomécanique par éléments finis est développée pour le procédé de fabrication additive DED (directed energy deposition). La simulation est conduite à l'échelle de la pièce, en modélisant le dépôt progressif de matière et la source d'énergie. Une expression générale du module tangent consistant est dérivée et implémentée dans la résolution par éléments finis, dans le cas d'un comportement élasto-viscoplastique avec des écrouissages de type isotrope et cinématique non linéaire. Pour calculer incrémentalement les champs de déplacement, de déformation et de contrainte, une formulation théorique du problème cinématique de positionnement est proposée pour minimiser la distorsion de la fraction non construite en considérant les informations de déplacement et de déformation actuelles. L'analyse de convergence de la simulation développée est effectuée à la fois d'un point de vue temporel et spatial. La validation est effectuée par comparaison avec des résultats expérimentaux de la littérature pour les cas d'un mur rectiligne et d'une aube de turbine présentant une forte courbure. Pour réduire le temps de calcul, une méthode de type "inherent strain" est d'abord proposée, dans laquelle l'inherent strain est déterminée sur quelques cordons, de manière exacte, par une méthode inverse basée sur les résultats de simulation du calcul élasto-visco-plastique standard. Cependant, lorsqu'on applique cette inherent strain dans une simulation couche par couche de la pièce entière, les résultats sont significativement dégradés par rapport à la solution de référence donnée par le calcul standard. Ceci est confirmé, quel que soit le mode d'application de l'inherent strain : uniforme, ou distribution spatiale dans chaque couche. En particulier les écarts à la référence augmentent dans le cas courbe de l'aube de turbine. Pour résoudre ces problèmes, une nouvelle méthode dite "inherent strain rate" est proposée, consistant à linéariser le calcul de dépôt progressif. Pour ce faire, le scalaire vitesse de déformation plastique équivalente est considéré comme étant l'inherent strain rate. Au cours de la simulation du processus, le calcul basé sur la méthode inherent strain rate est combiné avec le calcul standard, conservé pour simuler les extrémités de chacun des cordons. Grâce à cette combinaison et à une mise à jour en ligne de l'inherent strain rate, des résultats parfaits sur les déformations et contraintes sont obtenus pour le mur et l'aube de turbine. Dans cette première version de recherche, la simulation est accélérée d'un facteur 5, ce qui rend la méthode inherent strain rate proposée très prometteuse pour la simulation des procédés de fabrication additive.

**Mots clés :** Fabrication additive, simulation numérique, éléments finis, Inherent strain, Inherent strain rate

# Abstract

A thermo-mechanical finite element simulation is developed for additive manufacturing by directed energy deposition (DED). The simulation is conducted at the scale of the part, by modelling the progressive deposition of matter and the energy source. A general expression of the consistent tangent modulus is derived and implemented in the finite element resolution, considering an elastic-viscoplastic behavior with both isotropic and non-linear kinematic hardening. To incrementally resolve the displacement, strain and stress fields, a theoretical formulation for the kinematic positioning is proposed to minimize the distortion of the non-constructed fraction by considering current displacement and strain in the constructed part. The convergence analysis of the developed simulation is verified by both temporal and spatial aspects. The validation is obtained by comparison with experimental results taken from the literature for the cases of a straight vertical wall and a turbine blade showing a strong curvature. To reduce the computational time, an incremental inherent strain method is first proposed, where the inherent strain is determined by an inverse method based on simulation results from the standard elastic-viscoplastic calculation applied to a few tracks. However, when applying this inherent strain in the case of a simulation of entire parts, the results are severely degraded with respect to the reference solution given by the standard simulation. This is confirmed, whatever the method to apply inherent strains: uniform, or spatially distributed in each new layer. Especially the results become worse for the highly curved turbine blade structure. To resolve such problems, a new "inherent strain rate" method is proposed, consisting of a linearization of the progressive calculation. This is obtained by considering the scalar equivalent viscoplastic strain rate as the inherent strain rate. During the process simulation, the inherent strain rate-based calculation is combined with the standard calculation which is kept to simulate the ends of each track. Thanks to this combination, and to a continuous updating of the inherent strain rate, perfect results are obtained for both the single wall and the turbine blade, with a time gain of 5. This makes the proposed inherent strain rate method very promising for additive manufacturing process simulation.

---

**Keywords :** Additive manufacturing, Numerical simulation, Finite element, Inherent strain, Inherent strain rate



# Sommaire

Résumé	i
Abstract	iii
Nomenclature	5
<b>1 État de l'art sur la modélisation thermomécanique du procédé DED</b>	<b>9</b>
1.1 Procédé DED	10
1.1.1 Définition et principe	10
1.1.2 Caractéristiques	13
1.1.3 Applications	14
1.1.4 Anomalies des pièces produites	18
1.1.5 Approches de résolution	21
1.2 Modèles thermomécaniques existants	24
1.2.1 Domaines géométriques de modélisation	24
1.2.2 Équations théoriques de la thermique et mécanique	25
1.2.3 Critère d'activation d'éléments	27
1.2.4 Analyses critiques	28
1.3 Méthode inherent strain	31
1.3.1 Approches de la méthode	32
1.3.2 Définitions du champ inherent strain	34
1.3.3 Méthode d'estimation du champ inherent strain	35
1.3.4 Quelques résultats	35
1.4 Conclusions et plan du travail effectué	39
<b>2 Modélisation thermomécanique macroscopique du procédé DED</b>	<b>43</b>
2.1 Modélisations matérielle et géométrique du procédé DED	44
2.1.1 Modélisation matérielle	44
2.1.2 Modélisation géométrique	46
2.2 Modélisation thermomécanique du procédé DED	54
2.2.1 Équations de conservation	54
2.2.2 Les lois de comportement	57

2.2.3	Formulations théoriques des problèmes thermique et mécanique du procédé DED . . . . .	62
2.2.4	Formulation théorique du problème cinématique de positionnement . . . . .	67
2.3	Modélisation thermomécanique numérique du procédé DED . . . . .	69
2.3.1	Discretisation temporelle . . . . .	69
2.3.2	Discretisation spatiale . . . . .	81
<b>3</b>	<b>Application et validation du modèle thermomécanique du procédé DED</b>	<b>93</b>
3.1	Données d'application . . . . .	94
3.1.1	Type de géométrie CAO des structures construites . . . . .	94
3.1.2	Paramètres du procédé DED . . . . .	98
3.1.3	Paramètres de modélisation . . . . .	98
3.2	Étude de convergence . . . . .	102
3.2.1	Aspect temporel de la convergence . . . . .	102
3.2.2	Aspect spatial de la convergence . . . . .	109
3.3	Étude de sensibilité thermique . . . . .	115
3.3.1	Évolution temporelle . . . . .	116
3.3.2	Distribution spatiale . . . . .	117
3.4	Étude de sensibilité mécanique . . . . .	118
3.4.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	118
3.4.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	121
3.5	Étude comparative avec la méthode quiet element . . . . .	123
3.5.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	123
3.5.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	129
3.6	Étude de l'influence de l'écroissage cinématique . . . . .	135
3.6.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	135
3.6.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	139
3.7	Validation expérimentale . . . . .	143
3.7.1	Validation thermique . . . . .	143
3.7.2	Validation mécanique . . . . .	146
<b>4</b>	<b>Méthode inherent strain</b>	<b>155</b>
4.1	Principe de la méthode . . . . .	156
4.1.1	Loi de comportement élasto-plastique . . . . .	158
4.1.2	Problème mécanique non linéaire . . . . .	162
4.1.3	Problème cinématique de positionnement . . . . .	162
4.2	Calcul du champ inherent strain incrémental et tests de validation . . . . .	164
4.2.1	Selon la méthode de Liang et al. . . . .	164
4.2.2	Nouvelle méthode proposée . . . . .	174
4.2.3	Définition . . . . .	174

---

4.3	Méthodes d'estimation et applications . . . . .	184
4.3.1	Le calcul de moyenne . . . . .	184
4.3.2	Transport de profil . . . . .	191
<b>5</b>	<b>Méthode inherent strain rate</b>	<b>201</b>
5.1	Principe de la méthode . . . . .	202
5.1.1	Linéarisation de la loi de comportement thermomécanique . . . . .	202
5.1.2	Formulation théorique du problème mécanique linéarisé . . . . .	203
5.1.3	Formulation numérique du problème mécanique linéarisé . . . . .	204
5.2	Origines de la méthode . . . . .	205
5.2.1	Filtrage et moyenne de la vitesse de déformation plastique cumulée	206
5.2.2	Étude de l'évolution de la vitesse de déformation filtrée . . . . .	207
5.3	Méthodes d'estimation de la vitesse de déformation plastique cumulée et applications . . . . .	211
5.3.1	Méthodes d'estimation . . . . .	211
5.3.2	Applications . . . . .	212
<b>6</b>	<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>227</b>
6.1	Conclusions . . . . .	227
6.2	Perspectives . . . . .	230
6.2.1	La modélisation théorique . . . . .	230
6.2.2	La modélisation numérique . . . . .	230
6.2.3	La réduction de complexité . . . . .	231
<b>7</b>	<b>Annexe : Propriétés thermophysiques et thermomécaniques de l'acier inoxydable 316L</b>	<b>233</b>
7.1	Propriétés thermophysiques . . . . .	233
7.1.1	Températures de solidus et liquidus . . . . .	234
7.1.2	Masse volumique . . . . .	234
7.1.3	Chaleur massique . . . . .	235
7.1.4	Conductivité thermique . . . . .	235
7.1.5	Coefficient de dilatation thermique . . . . .	235
7.1.6	Choix des valeurs des propriétés thermophysiques . . . . .	236
7.2	Propriétés thermomécaniques . . . . .	237
7.2.1	Comportement élastique . . . . .	237
7.2.2	Comportement viscoplastique . . . . .	237
7.2.3	Valeurs des coefficients du comportement élasto-viscoplastique . . .	241
	<b>Bibliographie</b>	<b>245</b>



# Nomenclature

## Acronymes

CAD Computer Aided Design

CAO Conception Assistée par Ordinateur

CCCs Conformal Cooling Channels

CEMEF Centre de Mise en Forme des matériaux

CFAO Conception et Fabrication Assistée par Ordinateur

DED Directed Energy Deposition

FGM&S Functionally graded materials and structures

IS Méthode inherent strain

PBF Powder Bed Fusion

WAAM Wire and Arc Additive Manufacturing

WEAM Wire and Electron Beam Additive Manufacturing

WLAM Wire and Laser Additive Manufacturing

## Corps matériels

$\Gamma_{\mathcal{M}}(t) := \partial\mathcal{M}(t) \cap \partial\mathcal{M}^{nb}(t)$  Interface matérielle à l'instant  $t$

$\mathcal{M}(t)$  Système, partie construite de  $\mathcal{M}_f$  à l'instant  $t$

$\mathcal{M}^{nb}(t)$  Partie non construite de  $\mathcal{M}_f$  à l'instant  $t$

$\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_S \cup \mathcal{M}_{Pf}$  Système total à obtenir

$\mathcal{M}_I, I = 1, \dots, N$  Système obtenu à la fin de la construction du  $I^{\text{ème}}$  cordon  $\mathcal{M}_{TI}$

$\mathcal{M}_I^{nb}, I = 1, \dots, N$  Partie non construite de  $\mathcal{M}_f$  à la fin de la construction du  $I^{\text{ème}}$  cordon  $\mathcal{M}_{TI}$

$\mathcal{M}_S$  Substrat

$\mathcal{M}_T^b(t)$  Partie construite du cordon  $\mathcal{M}_T$  à l'instant  $t$

$\mathcal{M}_T^{nb}(t)$  Partie non construite du cordon  $\mathcal{M}_T$  à l'instant  $t$

$\mathcal{M}_{Pf}$  Pièce totale à construire sur le substrat

$\mathcal{M}_{TI}, I = 1, \dots, N$  Cordons de la pièce totale  $\mathcal{M}_{Pf}$

### Domaines géométriques

$\mathcal{C}_{T0}$  Courbe axiale de la géométrie CAO  $\Omega_{T0}$

$\Omega_{\Sigma_{Tt0}}$  Domaine géométrique CAO de la source de chaleur à l'instant  $t$

$\Omega_{f0}, \Omega_{ft}, \Omega_{fI}$  Configurations CAO, déformée à l'instant  $t$ , déformée à la fin de la construction du  $I^{\text{ème}}$  cordon  $\mathcal{M}_{TI}$  du corps matériel  $\mathcal{M}_f$

$\Omega_{I0}, \Omega_{I-1,I}, \Omega_I$  Configurations CAO, intermédiaire et déformée du système  $\mathcal{M}_I$

$\Omega_{I0}^{nb}, \Omega_{I-1,I}^{nb}, \Omega_I^{nb}$  Configurations CAO, intermédiaire et déformée de la partie non construite  $\mathcal{M}_I^{nb}$

$\Omega_{t0}, \Omega_{\tau,t}, \Omega_t$  Configurations CAO, intermédiaire et déformée du système  $\mathcal{M}(t)$

$\Omega_{T0}, \Omega_{Tt}$  Configurations CAO et déformée à l'instant  $t$  du cordon  $\mathcal{M}_T$

$\Omega_{t0}^{nb}, \Omega_{\tau,t}^{nb}, \Omega_t^{nb}$  Configurations CAO, intermédiaire et déformée de la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}(t)$

$\Omega_{Tt0}^H := \Omega_{\Sigma_{Tt0}} \cap \Omega_{T0}$  Domaine géométrique CAO de la zone de chauffage du cordon  $\mathcal{M}_T$  à l'instant  $t$

### Grandeurs mécaniques

$\alpha(T)$  Coefficient de dilatation thermique

$\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^*$  Tenseur inherent strain incrémental

$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}$  Vitesse de déformation plastique cumulée

$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^*$  Inherent strain rate

$\bar{\sigma}$  Contrainte équivalente de von-Mises

$\bar{\varepsilon}$  Déformation plastique cumulée

$\Phi$  Transformation géométrique de  $\Omega_{f0}$

$\sigma_Y(T)$  Limite initiale d'élasticité

$\underline{\underline{\alpha}}_i, i = 1, \dots, N_c$  Variables tensorielles internes d'écrouissage cinématique

$\underline{\underline{\sigma}}$  Tenseur des contraintes

$\underline{\underline{\lambda}}(T)$  Tenseur des modules d'élasticité

$\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_f), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}), \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_n)$  Tenseurs des vitesses de déformation de  $\mathcal{M}_f, \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_n$

---

$\underline{\underline{\varepsilon}}^e$	Tenseur des déformations élastiques infinitésimales
$\underline{\underline{\varepsilon}}^*$	Tenseur inherent strain de base
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{pd}$	Tenseur des déformations post-dépôts infinitésimales
$\underline{\underline{\varepsilon}}^p$	Tenseur des déformations plastiques infinitésimales
$\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$	Tenseur des déformations viscoplastiques infinitésimales
$\underline{\underline{E}}_f, \underline{\underline{E}}, \underline{\underline{E}}_n$	Tenseurs des déformations de Green-Lagrange de $\mathcal{M}_f$ , $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}_n$
$\underline{\underline{F}}$	Gradient de transformation géométrique de $\Omega_{f0}$
$\underline{\underline{F}}^e, \underline{\underline{F}}^{vp}$	Transformations élastique et viscoplastique de $\Omega_{f0}$
$\underline{\underline{F}}^i, \underline{\underline{F}}^{pd}$	Transformations initiale et post-déposition de $\Omega_{f0}$
$\underline{\underline{s}}$	Composante déviatorique de $\underline{\underline{\sigma}}$
$\underline{\underline{X}}_i, i = 1, \dots, N_c$	Variables tensorielles d'écoulement cinématique
$\underline{\underline{U}}, \underline{\underline{V}}$	Champs lagrangiens de distorsion et de vitesse du système $\mathcal{M}$
$\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}$	Champs eulériens de distorsion et de vitesse du système $\mathcal{M}$
$\underline{\underline{U}}_f, \underline{\underline{V}}_f$	Champs lagrangiens de distorsion et de vitesse du système total $\mathcal{M}_f$
$\underline{\underline{u}}_f, \underline{\underline{v}}_f$	Champs eulériens de distorsion et de vitesse de la partie non construite $\mathcal{M}^{nb}$
$\underline{\underline{u}}_f, \underline{\underline{v}}_f$	Champs eulériens de distorsion et de vitesse du système total $\mathcal{M}_f$
$\underline{\underline{U}}_n, \underline{\underline{V}}_n$	Champs lagrangiens de distorsion et de vitesse de la partie non construite $\mathcal{M}^{nb}$
$p$	champ de pression
$p_{I0}$	Placement idéal (CAO) du corps matériel $\mathcal{M}_f$
$p_{II}, I = 1, \dots, N$	Placement réel du corps matériel $\mathcal{M}_f$ à la fin de la construction du $I^{\text{ème}}$ cordon $\mathcal{M}_{TI}$
$p_{It}$	Placement réel du corps matériel $\mathcal{M}_f$ à l'instant $t$
$R(T, \bar{\varepsilon})$	Fonction d'écoulement isotrope

### Symboles mathématiques

$(M, \underline{\underline{e}}_t, \underline{\underline{e}}_n, \underline{\underline{e}}_3)$	Repère local orthonormé direct en chaque point $M \in \Omega_{f0}$
$(O, \underline{\underline{e}}_1, \underline{\underline{e}}_2, \underline{\underline{e}}_3)$	Repère globale orthonormé direct constituant le référentiel fixe de l'observateur
$\mathcal{E}$	Espace affine d'espace vectoriel euclidien associé $E$ de dimension 3
$\nabla$	Opérateur de gradient

$\nabla \cdot$  Opérateur de divergence

$\underline{0}$  Vecteur nul

$\underline{\underline{0}}$  Tenseur nul d'ordre deux

$\underline{\underline{1}}$  Tenseur identité d'ordre deux

$H^1(\Omega)$  Espace de fonctions scalaires de  $L^2(\Omega)$  dont les composantes du gradient sont de carré sommable

$L^2(\Omega)$  Espace de fonctions scalaires définies dans le domaine géométrique  $\Omega$  et à carré sommable

### Grandeurs thermiques

$\dot{Q}$  Source de chaleur volumique

$\kappa(T)$  Conductivité thermique

$\rho$  Masse volumique

$\sigma$  Constante de Boltzmann

$\underline{q}$  Vecteur flux de chaleur

$\varepsilon$  Émissivité thermique

$c_p(T)$  Chaleur massique

$e(T)$  Énergie interne massique

$h$  Coefficient de convection

$P, v_H$  Puissance et vitesse du parcours du faisceau laser

$s(T)$  Entropie massique

$T$  Champ de température

$T_\infty$  Température du milieu ambiant

$T_g$  Température du gaz protecteur

$[0, t_f]$  Intervalle de temps total de construction et de refroidissement total de  $\mathcal{M}_f$

$[t_{T0}, t_{Tf}]$  Intervalle de temps de construction et de refroidissement du cordon  $\mathcal{M}_T$

$[t_{T0}^H, t_{Tf}^H]$  Intervalle de temps de chauffage du cordon  $\mathcal{M}_T$

$\tau$  Instants précédents

$dt = t - \tau$  Pas de temps

$t$  Instant actuel

$t_{I-1}, t_I^c, I = 1, \dots, N$  Instants de début et de fin de construction du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$

$t_{Tf}^c \in ]t_{T0}, t_{Tf}]$  Instant de fin de construction du cordon  $\mathcal{M}_T$

# Chapitre 1

## État de l’art sur la modélisation thermomécanique du procédé DED

Ce chapitre a pour but l’étude du contexte du présent projet. Il s’articule autour des grands points suivants :

- le procédé DED : sa description, ses caractéristiques, ses applications et sa problématique ;
- les modèles thermomécaniques existants de ce procédé ;
- la méthode inherent strain ;

### Contents

---

<b>1.1 Procédé DED</b> . . . . .	<b>10</b>
1.1.1 Définition et principe . . . . .	10
1.1.2 Caractéristiques . . . . .	13
1.1.3 Applications . . . . .	14
1.1.4 Anomalies des pièces produites . . . . .	18
1.1.5 Approches de résolution . . . . .	21
<b>1.2 Modèles thermomécaniques existants</b> . . . . .	<b>24</b>
1.2.1 Domaines géométriques de modélisation . . . . .	24
1.2.2 Équations théoriques de la thermique et mécanique . . . . .	25
1.2.3 Critère d’activation d’éléments . . . . .	27
1.2.4 Analyses critiques . . . . .	28
<b>1.3 Méthode inherent strain</b> . . . . .	<b>31</b>
1.3.1 Approches de la méthode . . . . .	32
1.3.2 Définitions du champ inherent strain . . . . .	34
1.3.3 Méthode d’estimation du champ inherent strain . . . . .	35
1.3.4 Quelques résultats . . . . .	35
<b>1.4 Conclusions et plan du travail effectué</b> . . . . .	<b>39</b>

---

## 1.1 Procédé DED

### 1.1.1 Définition et principe

Selon la norme ISO/ASTM 52900 :2021(fr) [1], la fabrication additive désigne le procédé d'assemblage de matériaux pour fabriquer des pièces à partir de données de modèle 3D, en général couche après couche, à l'inverse des méthodologies de fabrication soustractive et de mise en forme. Le procédé DED (Directed Energy Deposition), appelé encore dépôt de matière sous énergie concentrée, désigne selon la même norme le procédé de fabrication additive dans lequel l'énergie thermique focalisée est utilisée pour fusionner des matériaux en les fondant pendant leur dépôt. Le terme "énergie thermique focalisée", dans cette définition, signifie qu'une source d'énergie (par exemple, laser, faisceau d'électrons, ou arc plasma) est focalisée pour faire fondre les matériaux pendant leur dépôt. Un gaz protecteur est généralement requis afin de prévenir toute oxydation du métal fondu pendant le dépôt de matière.

Par rapport aux procédés conventionnels de fabrication mécanique, ce procédé présente les avantages suivants [2, 3, 4] :

- la diminution du temps de production et de l'intervention humaine du fait de la réduction des procédures de calibration et d'étalonnage, coûteuses en temps, et de son automatisation de la conception à la fabrication du produit par l'adoption d'une technologie de conception et fabrication assistée par ordinateur (CFAO) ;
- la réduction des coûts de fabrication du fait d'un plus grand rendement d'utilisation de la matière ;
- une plus grande aptitude à la fabrication des pièces de formes très complexes aux moindres coûts.

Il présente néanmoins quelques inconvénients :

- durée du procédé pouvant être très importante ;
- les coûts supplémentaires de stockage et de sécurité lorsque la matière d'apport est sous forme de poudre ;
- l'apparition des défauts géométriques des pièces résultantes.

En fonction de l'état de la matière d'apport, on distingue deux grands types de procédés DED [2, 5] :

- le procédé DED à base de fil pour lequel la matière d'apport est un fil métallique ;
- le procédé DED à base de poudre pour lequel la matière d'apport est à l'état de poudre de métal.

### DED à base de fil

Dans ce type de procédé, la direction d'apport du fil de métal peut correspondre ou non à celle du faisceau de chaleur et/ou de l'apport du gaz protecteur. On parle d'apport coaxial de fil (wire co-axial feeding en anglais) en cas de correspondance de direction, et d'apport non coaxial de fil (wire off-axis feeding en anglais) sinon. En fonction de la source d'énergie thermique utilisée, on distingue trois types de DED à base de fil :

- le procédé WAAM (Wire and Arc Additive Manufacturing) qui fait usage de l'arc électrique comme source d'énergie thermique (figure 1.1.(a)) ;
- le procédé WLAM (Wire and Laser Additive Manufacturing) qui utilise le faisceau laser comme source d'énergie thermique (figure 1.1.(b)) ;
- le procédé WEAM (Wire and Electron Beam Additive Manufacturing) qui utilise le faisceau d'électrons et, contrairement aux deux précédents procédés, s'effectue dans une enceinte sous vide (figure 1.1.(b)).

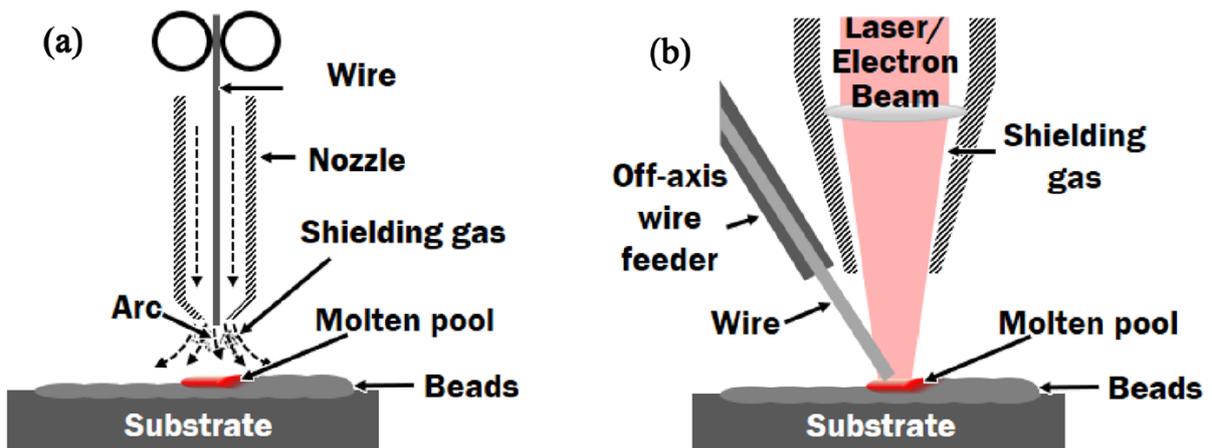


FIGURE 1.1 – Exemples de procédés DED à base de fil de métal : (a) WAAM à apport coaxial de fil ; (b) WLAM et WEAM à apport non axial de fil [2]

### DED à base de poudre de métal

Ce type de procédé fait usage d'un faisceau laser comme source d'énergie thermique, et nécessite l'apport d'un gaz protecteur. Et, tout comme le procédé DED à base de fil, la direction d'apport de matière peut correspondre ou non à celle du faisceau laser et de l'apport du gaz protecteur. On parle d'apport coaxial de poudre (powder co-axial feeding en anglais) en cas de correspondance de direction (figure 1.2.(a)), et d'apport non coaxial de poudre (powder off-axis feeding en anglais) sinon (figure 1.2.(b)).

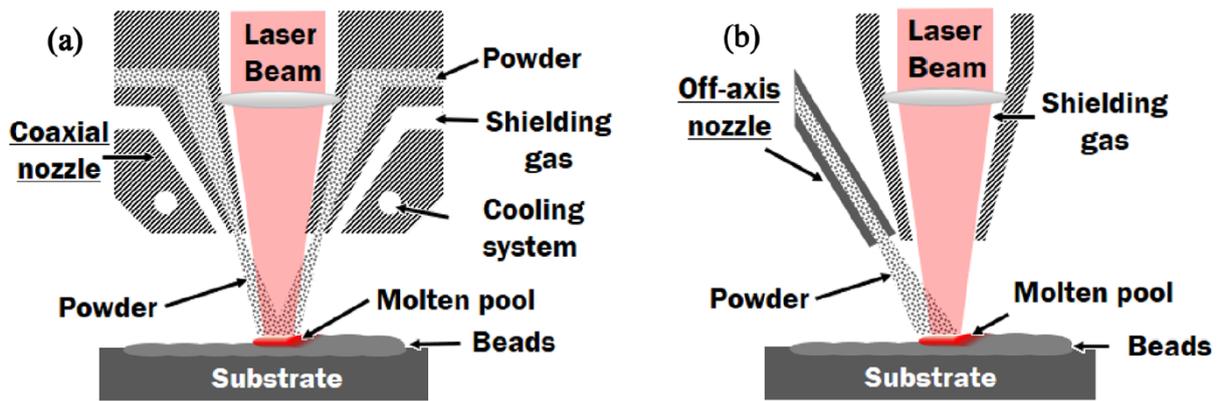


FIGURE 1.2 – Procédés DED à base de poudre de métal : (a) Apport coaxial de poudre ; (b) Apport non coaxial de poudre [2]

Dans le cas d'apport coaxial, les grains de poudre sont dirigés suivant des directions concourantes de manière à obtenir une zone de croisement des grains de poudre. Nous en distinguons deux types :

- la zone de croisement des grains de poudre située dans le bain de fusion, celle des procédés DED conventionnels (figure 1.3), permettant aux grains de fusionner dans le bain de fusion provoquée et maintenue par le faisceau laser ;
- la zone de croisement des grains de poudre située au dessus du bain de fusion, celle du procédé EHLA (Extreme High speed LAser metal deposition) [6], permettant la fusion des grains avant leur pénétration dans le bain de fusion (figure 1.3).

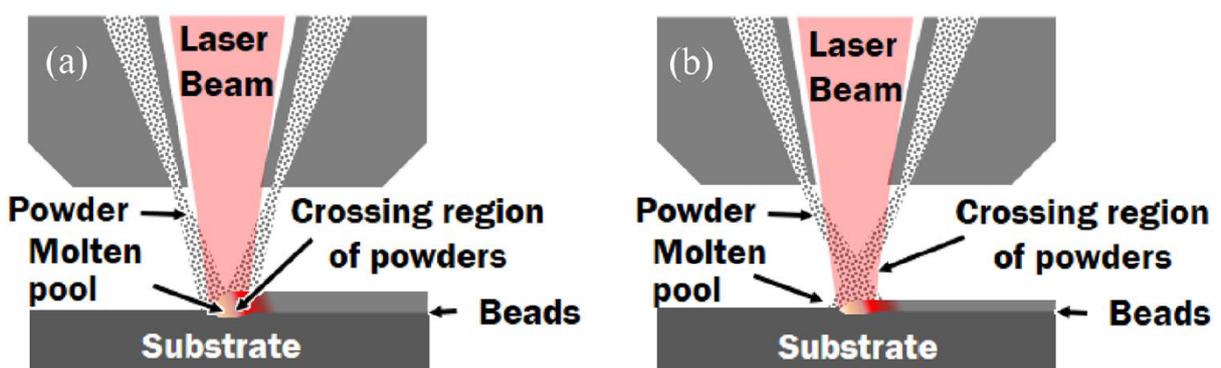


FIGURE 1.3 – Types de zone de croisement des grains de poudre : (a) Dans le bain de fusion ; (b) Au dessus du bain de fusion [2]

Dans toute la suite du présent document, nous nous intéresserons exclusivement au procédé DED à base de poudre de métal à apport coaxial et dont la zone de croisement des grains de poudre correspond au bain de fusion.

### 1.1.2 Caractéristiques

Les caractéristiques du procédé DED se regroupent en deux types : les paramètres de base directement fixés par l'opérateur, c'est-à-dire l'utilisateur de l'imprimante 3D, et les paramètres effectifs indirectement fixés par l'opérateur.

#### Les paramètres de base

Nous distinguons quatre groupes de paramètres de base [2, 7] :

1. les paramètres du faisceau laser que sont principalement :
  - la puissance thermique  $\sim 100 - 1000\text{W}$  [7, 8, 9];
  - le profil du faisceau;
  - le diamètre du faisceau  $\sim 0.1 - 1\text{mm}$  [7, 8, 9];
  - la distance de travail  $\sim 10\text{mm}$  [7];
2. les paramètres d'apport de matière et de gaz protecteur que sont principalement :
  - le type de buse de pulvérisation de poudre de métal;
  - le débit massique de poudre  $\sim 1 - 10\text{g/min}$  [7, 8, 9];
  - le débit volumique d'apport de gaz protecteur  $\sim 1 - 10\text{l/min}$ ;
3. les matériaux de construction :
  - matériau des grains de poudre;
  - distribution des diamètres des grains de poudre  $\sim 10 - 100\mu\text{m}$  [7, 8, 9];
  - forme des grains de poudre;
  - matériau du substrat;
  - traitement thermique du substrat;
  - géométrie du substrat;
4. mouvement et trajectoire de construction :
  - vitesse de balayage  $\sim 1 - 10\text{mm/s}$  [7, 9];
  - trajet de dépôt de matière;
  - durée d'arrêt de construction entre deux couches successives;
  - température d'un éventuel préchauffage.

#### Les paramètres effectifs

Nous distinguons trois groupes de paramètres effectifs [2, 7] :

1. les paramètres d'absorption que sont principalement :

- efficacité énergétique (pourcentage de puissance reçue du faisceau laser)  $< 45\%$  [5, 9];
  - pourcentage d'absorption de poudre pulvérisée  $< 60\%$  [8];
2. les paramètres du bain de fusion que sont principalement :
    - morphologie;
    - dimensions longueur  $\times$  largeur  $\times$  profondeur;
    - température maximale;
  3. les paramètres dimensionnels du cordon construit :
    - largeur  $\sim 1\text{mm}$  [2, 7];
    - hauteur  $\sim 0.1 - 1\text{mm}$  [2, 7];

### 1.1.3 Applications

Les applications actuelles du procédé DED se regroupent en cinq grands domaines [2] :

1. Pièces près des cotes (Near-net-shape parts en anglais) [10, 11, 12, 13, 14];
2. Réparation, restauration et remise à neuf [6, 14, 15, 16, 17, 18];
3. Revêtement poreux [5, 19, 20, 21, 22];
4. Matériaux et structures sur mesure [5, 3, 23, 24, 25, 26];
5. Gestion de la thermique [5, 27, 28, 29, 30].

#### Pièces près des cotes

Il est question de fabriquer des structures métalliques dont la forme et les dimensions sont très proches de celles du produit final, réduisant ainsi les coûts de finition. La figure 1.4 nous donne un exemple de pièce près des cotes produite par le procédé DED.



FIGURE 1.4 – Buse d'échappement près des cotes, d'une hauteur de quelques cm, d'une turbine à gaz produite par le procédé DED [14]

## Réparation, restauration et remise à neuf

Ce domaine d'application a pour objet la réparation des pièces endommagées, la restauration et la remise à neuf des pièces avec les formes et propriétés désirées. Les objectifs visés dans ce domaine sont :

- la réduction des délais et coûts de production, et des émissions des gaz à effet de serre ;
- le recyclage des matériaux et pièces utilisés ;
- l'amélioration des propriétés et fonctionnalités.

La figure 1.5 nous donne un exemple d'applications du DED dans la réparation d'une aube de turbine produite par le procédé DED [15].

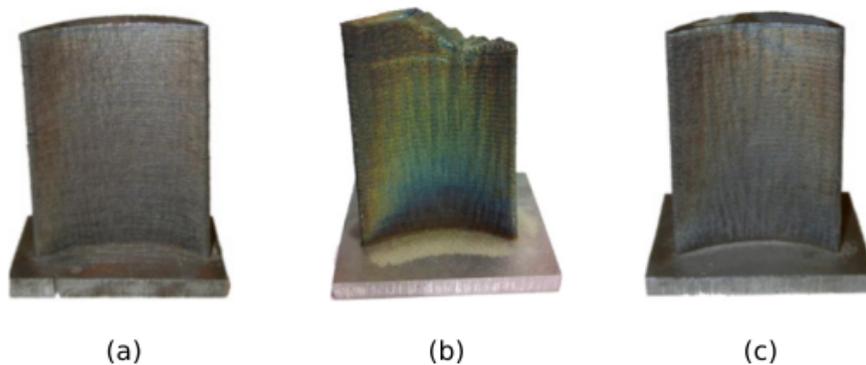


FIGURE 1.5 – Réparation par le procédé DED d'une aube de turbine fabriquée à base du DED : (a) État fonctionnel ; (b) État défaillant ; (c) État de restauration. [15]

## Revêtement poreux

Le procédé DED permet aussi la fabrication des mousses métalliques et des structures poreuses, en particulier pour les matériaux à usage bio-médical. Les objectifs visés sont :

- l'amélioration de la bio-compatibilité ;
- l'amélioration du rendement d'utilisation de la matière ;

La figure 1.6 nous donne un exemple de revêtement poreux portant sur l'impression 3D de structures poreuses à la surface d'articulations artificielles à l'aide de poudre de titane [19, 31].

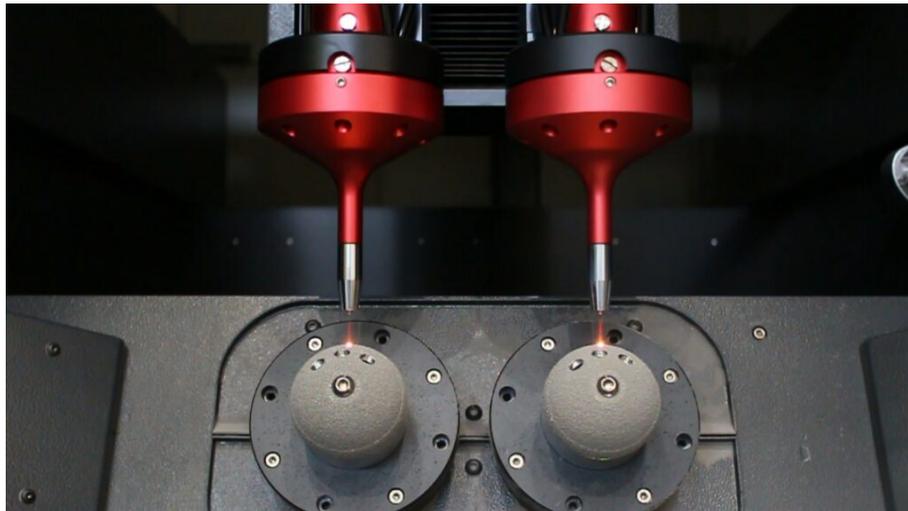


FIGURE 1.6 – Développement d’une articulation artificielle de la hanche par revêtement poreux métallique [19, 31]

### Matériaux et structures sur mesure

Ce domaine d’application a pour objet la fabrication des matériaux et structures à gradient fonctionnel (Functionally graded materials and structures (FGM&S) en anglais), le revêtement multi-couche des matériaux hétérogènes, et le revêtement dur (hardfacing en anglais). Les objectifs visés sont :

- le contrôle des propriétés des matériaux ;
- l’amélioration de la résistance des pièces à l’usure et à la corrosion ainsi que de la durée de vie en service ;
- la réduction du coût de la matière.

La figure 1.7 nous donne un exemple de revêtement dur d’un outil d’attaque du sol [23].



FIGURE 1.7 – Revêtement dur d’un outil d’attaque du sol [23]

La figure 1.8 nous donne d’autre part un exemple de FGM portant sur un cylindre composite à gradient de titane et d’alumine ( $\text{Ti}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ) [26].

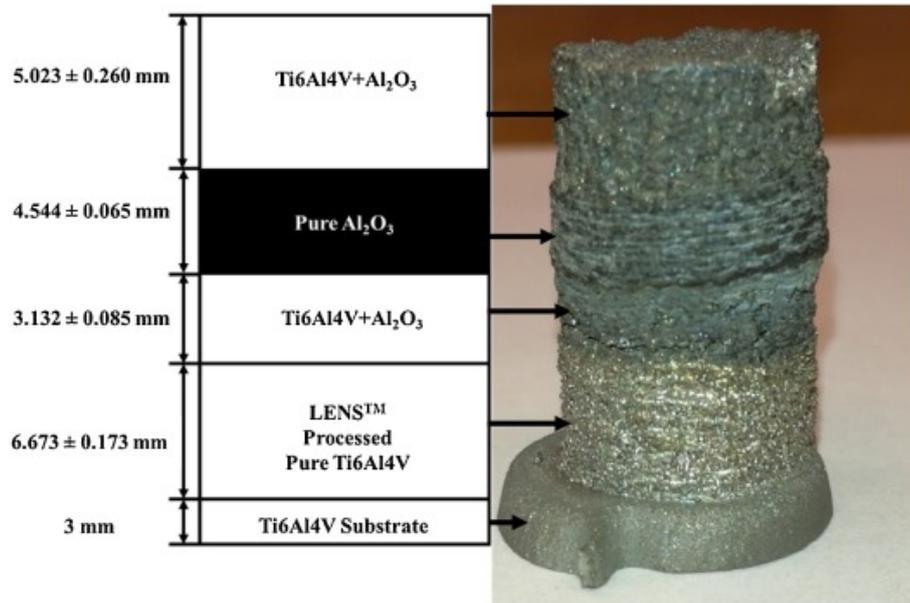


FIGURE 1.8 – Schéma et géométrie d'un cylindre composite à gradient de titane et d'alumine ( $\text{Ti}/\text{Al}_2\text{O}_3$ ) fabriqué par le procédé DED [26]

### Gestion de la thermique

Il est question dans ce domaine d'application de la fabrication par le procédé DED des outils de formage et de moulage intégrant des canaux de refroidissement conformes (Conformal Cooling Channels (CCCs) en anglais), des moules de gestion thermique et des dissipateurs de température. Les objectifs visés sont :

- le contrôle des distributions de la température ;
- la rapidité et l'uniformisation du refroidissement ;
- l'amélioration de la qualité des produits.

Dans la figure 1.9, nous avons un exemple d'application portant sur la fabrication d'un moule à injection pour matériaux polymères avec canaux de refroidissement conforme [30]. Cette figure en présente la conception et la procédure comprenant l'usinage des pièces de support, l'insertion des dits canaux suivie de la fabrication par DED des pièces de moulages.

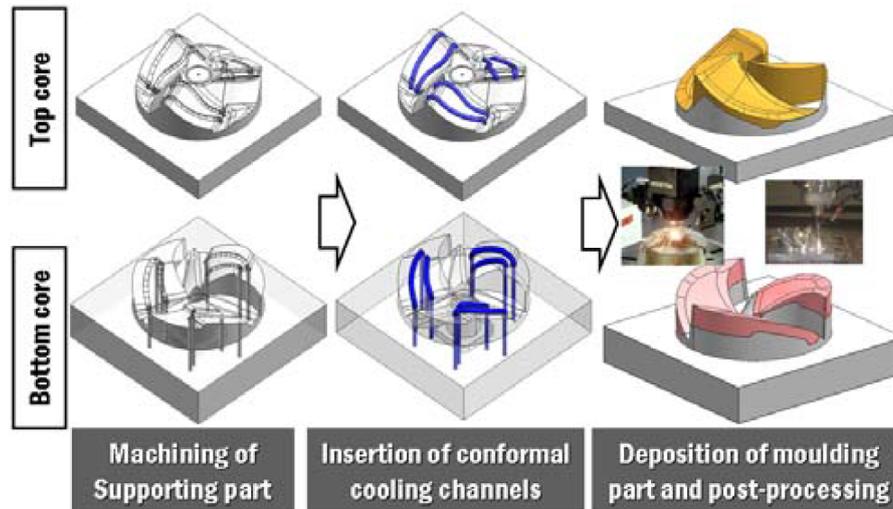


FIGURE 1.9 – Conception et procédure de fabrication d’un moule à injection avec canaux de refroidissement conforme [30]

### 1.1.4 Anomalies des pièces produites

Les anomalies des pièces produites par le procédé DED, que nous appellerons désormais pièces DED, désignent les déviations de la normale de leurs réelles propriétés. Liu et al. [32] en distinguent trois grands groupes :

1. les anomalies géométriques désignant tout écart par rapport à la géométrie nominale (forme et dimensions), c’est-à-dire la géométrie CAO ;
2. les anomalies morphologiques comprenant les défauts de surface affectant la texture de surface (rugosité, ondulation, etc.), et les défauts internes (porosité, cavité, inclusion, etc.) ;
3. les anomalies microstructurales liées à l’aspect microstructural des surfaces et sous-surfaces et correspondant aux caractéristiques structurelles indésirables (décoloration/oxydation/corrosion, non homogénéité, fissuration, anisotropie etc.) dans la microstructure.

Dans cette sous-section, nous ne détaillons que les anomalies géométriques. Il en existe plusieurs types :

- la non-uniformité des épaisseurs de couches, pouvant être causée par un mauvais positionnement du point focal du faisceau laser. La figure 1.10 nous donne une illustration de non-uniformité d’épaisseur de couche liée à une différence notable entre l’incrément de coordonnée suivant l’axe  $Z$  du point focal et l’épaisseur de couche nominale.

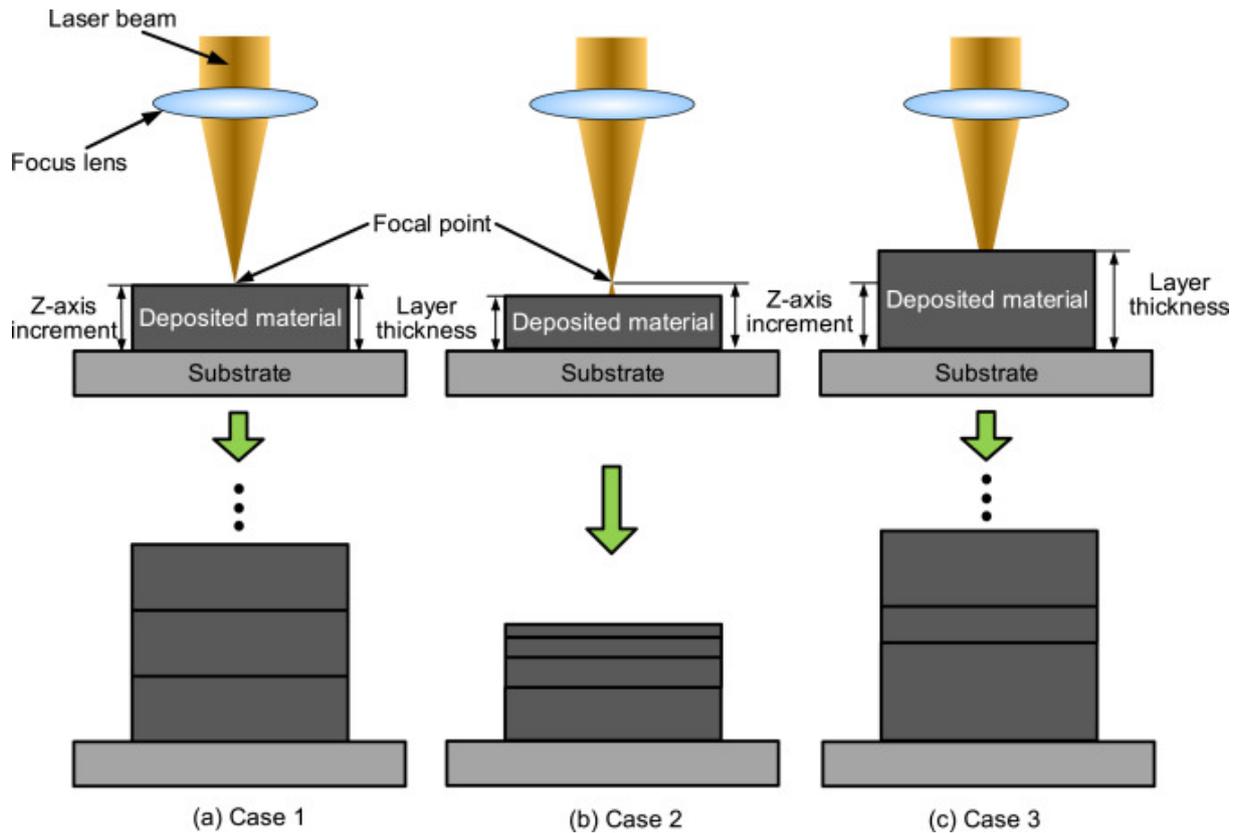


FIGURE 1.10 – Effet de la différence entre l'incrément de coordonnée suivant l'axe Z du faisceau laser et l'épaisseur de couche nominale : (a) Uniformité d'épaisseur (différence nulle); (b) Diminution d'épaisseur (différence positive); (c) Augmentation d'épaisseur (différence négative) [33]

- le gauchissement, c'est-à-dire l'ondulation de la surface supérieure causée par un apport très élevé d'énergie du laser entraînant, en l'absence d'un dissipateur de chaleur efficace, un plus profond bain de fusion (figure 1.11).



FIGURE 1.11 – Gauchissement de la surface supérieure d'une pièce DED [34]

- les défauts de bord, c'est-à-dire les écarts importants observés entre les niveaux des bords avec le niveau moyen de la surface supérieure, généralement dus à une discontinuité de dépôt de matière et à des trajets de buse inadaptés (figure 1.12).

Ils se produisent généralement en début et de fin de trajet de dépôt de matière, ou lors des changements brusques de direction du trajet de la buse.



FIGURE 1.12 – Défauts de bord d'une pièce DED [35]

- les satellites de surface apparaissant comme des saillies en boule plus ponctuelles que les défauts de bord, et généralement observés aux points de chevauchement entre les points de début et fin de dépôt de métal (figure 1.13). Ils trouvent leurs origines dans l'apparition d'éclaboussures de poudre (non fondue) et leurs accumulations en des points de la surface de la pièce.

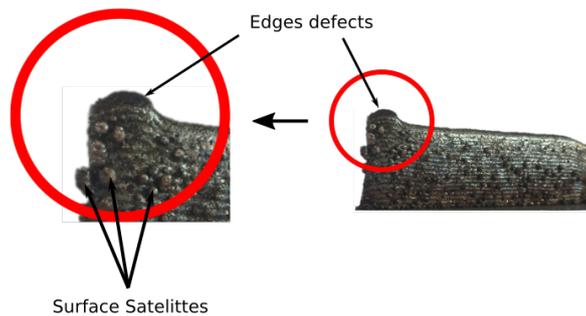


FIGURE 1.13 – Satellites de surface sur une pièce DED [35]

- le rétrécissement des couches de matière se produisant au cours de leur refroidissement et entraînant l'inclinaison des surfaces latérales de la pièce en construction.
- le gauchissement menant à un détachement du substrat, causé par une faible adhésion de la couche de matière avec le substrat réduisant ainsi la capacité de la zone de contact pièce/substrat à résister aux contraintes résiduelles générées par le procédé (figure 1.14). Cette faible adhésion est généralement liée à une faible puissance ou à une importante vitesse de parcours du faisceau laser réduisant ainsi l'apport d'énergie au substrat, et menant à un bain de fusion ni assez large, ni assez profond pour une bonne adhésion pièce-substrat [35].



FIGURE 1.14 – Gauchissement d’une pièce DED menant à son détachement du substrat [35]

### 1.1.5 Approches de résolution

Les anomalies des pièces DED étant en général fortement influencées par les paramètres de base, présentés plus haut, du procédé DED, il est donc crucial d’effectuer des choix optimaux de ceux-ci. Tel est l’objectif final des approches de résolution, lesquelles en général visent à établir des correspondances entre les paramètres de base, les paramètres effectifs et les propriétés finales des pièces DED. Nous distinguons deux types d’approches de résolution : l’approche expérimentale et l’approche de modélisation multiphysique.

#### Approche expérimentale

Dans le but d’étudier l’influence directe d’un ou plusieurs paramètres de base sur les paramètres effectifs, et les propriétés finales des pièces DED [35, 36, 37], l’approche expérimentale consiste à :

- sélectionner un groupe de paramètres de base dont on voudrait étudier l’influence ;
- définir des échantillons de pièces ;
- fixer pour chaque échantillon les valeurs des paramètres de base sélectionnés ;
- fabriquer par le procédé DED les différents échantillons suivant les valeurs fixées des paramètres de base ;
- mesurer à l’aide de dispositifs expérimentaux les paramètres effectifs et les propriétés finales.

Cette approche présente le grand avantage d’être précise, du fait de la bonne précision des instruments de mesure des dispositifs expérimentaux, mais présente l’inconvénient d’être très coûteuse, du fait de l’importante quantité de ressources requises (matière, énergie, gaz protecteur, etc.), surtout lorsqu’elle implique des matériaux coûteux à l’instar du titane et du nickel.

#### Approche de modélisation multiphysique

Le but et la démarche de cette approche sont les mêmes que ceux de la précédente approche à la seule différence qu’elle vise à reproduire numériquement, c’est-à-dire à simuler les expériences physique et mécanique des échantillons pendant et à la fin de leur

fabrication. Afin d'être un substitut économique fiable à l'approche expérimentale, l'approche de modélisation multiphysique doit être numériquement consistante (convergente en temps et en espace), suffisamment précise, simple et rapide.

Diverses approches de modélisation et simulation multiphysique du procédé DED peuvent être adoptées. Nous avons entre autres la modélisation thermo-métallurgique s'intéressant à l'évolution de la microstructure (recristallisation, changement de phase, orientation cristalline) des pièces DED sous sollicitations thermiques, et la modélisation thermomécanique s'intéressant à la réponse mécanique des pièces DED sous sollicitations thermiques et mécaniques. Un couplage de ces deux approches peut être envisagé.

En ce qui concerne la modélisation thermomécanique, nous distinguons dans la littérature scientifique en fonction de l'échelle de modélisation, différents types d'approche :

- l'approche mésoscopique à l'échelle du cordon [38, 39] (figure 1.15), visant à modéliser et à simuler :
  - le trajet, le chauffage par le laser, ainsi que l'interaction avec le bain de fusion, des grains de poudre ;
  - l'influence thermique et mécanique du gaz protecteur sur le bain de fusion ;
  - la thermo-hydrodynamique du bain de fusion ;
  - la géométrie résultante du cordon construit.

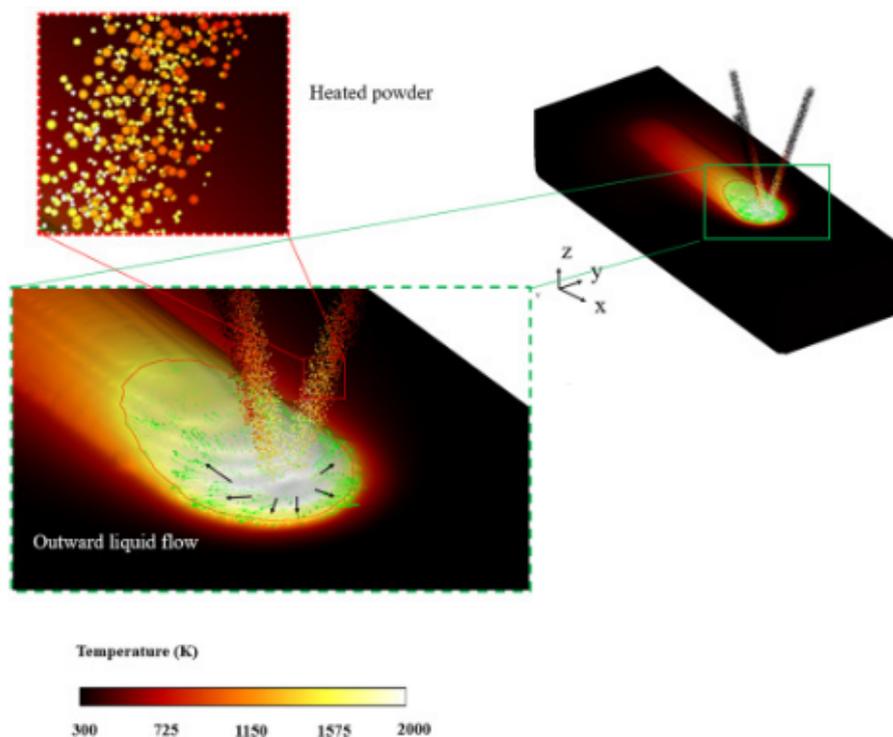


FIGURE 1.15 – Simulations du chauffage des grains de poudre et de la thermo-hydrodynamique du bain de fusion de la construction d'un cordon par le DED [38]

Les propriétés thermophysiques à l'état liquide comme à l'état solide des matériaux

utilisés, la chaleur latente de fusion, la force de tension superficielle et l'effet Marangoni au niveau de l'interface bain de fusion/gaz protecteur, doivent être pris en compte dans cette approche.

- l'approche macroscopique à l'échelle de tout le système substrat/pièce [40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47] (figure 1.16), visant à modéliser et à simuler :
  - la diffusion de chaleur dans tout le système et donc le comportement thermique global de celui-ci ;
  - les anomalies géométriques macroscopiques du système ;
  - les déformations et contraintes mécaniques au sein du système, en particulier dans les zones affectées thermiquement.

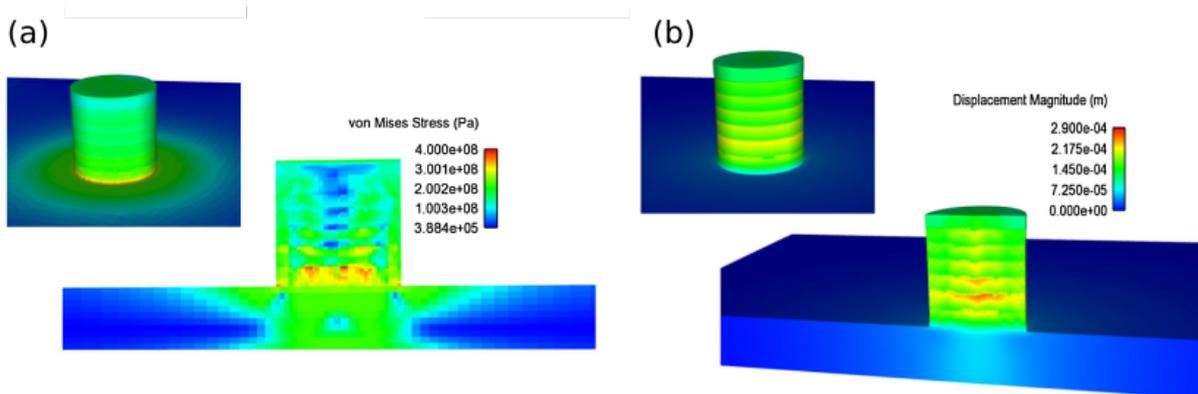


FIGURE 1.16 – Simulations de l'état final d'un cylindre construit par le DED : (a) Contraintes résiduelles équivalentes de von-Mises ; (b) Amplitude du déplacement des points du cylindre [43]

L'approche macroscopique doit donc prendre en compte, entre autres, les interactions thermiques gaz protecteur/faisceau laser et système/gaz protecteur. Cependant, n'ayant pas pour objet la simulation thermo-hydrodynamique du bain de fusion, cette approche ne nécessite pas de prendre en compte les propriétés thermophysiques liquides des matériaux utilisés, les termes d'inertie dans l'équation de la dynamique, encore moins les tensions superficielles et l'effet Marangoni à l'interface bain de fusion/gaz protecteur. Certains auteurs [43], considèrent toutefois la viscosité du métal fondu et les termes d'inertie dans l'équation de la dynamique.

L'approche macroscopique de la modélisation thermomécanique fera l'objet de toute la suite du présent document.

## 1.2 Modèles thermomécaniques existants

### 1.2.1 Domaines géométriques de modélisation

Les modèles thermomécaniques macroscopiques existant dans la littérature scientifique reposent en général sur la méthode des éléments finis appliquée sur le domaine (modèle) géométrique CAO du système  $\Omega_f$ , c'est-à-dire, l'ensemble constitué du substrat  $\Omega_S$  et de la pièce à construire  $\Omega_{Pf}$ ; cette dernière étant décomposée en différentes couches et en différents cordons. Le domaine géométrique CAO  $\Omega_f$  fait l'objet d'un maillage régulier partitionné à chaque instant  $t$  de l'intervalle de simulation  $[0, t_f]$  en deux ou trois sous-domaines :

- le domaine des éléments actifs (active elements en anglais)  $\Omega_t$ , correspondant en général à la partie construite du système total à obtenir et à laquelle sont attribuées les pleines propriétés thermomécaniques et thermophysiques solides du matériau de construction ;
- le domaine des éléments dormants (quiet elements en anglais)  $\Omega_t^q$ , correspondant à la partie du système total qui reste à construire et à laquelle sont attribuées des propriétés thermomécaniques et thermophysiques solides dégradées du matériau de construction afin de minimiser toute interaction thermique et mécanique avec le domaine des éléments actifs ;
- le domaine des éléments inactifs (inactive elements en anglais)  $\Omega_t^{in}$ , correspondant également à la partie du système total qui reste à construire et à laquelle ne sont attribuées aucune propriété thermomécanique et thermophysique solide du matériau de construction.

En fonction des volumes des deux derniers sous-domaines, nous distinguons trois types d'approche de modélisation numérique (figure 1.17) [40] :

- l'approche inactive element ( $\Omega_t^q = \emptyset$ ) [40, 43, 44], pour laquelle les calculs thermiques et/ou mécaniques ne s'effectuent que sur le domaine des éléments actifs  $\Omega_t$ . Notons que  $\Omega_t$  est en constante évolution (croissante au sens ensembliste) pendant la simulation du procédé, ce qui exige à chacune des activations d'éléments de redéfinir ce domaine sur lequel la résolution par éléments finis va s'opérer.
- l'approche quiet element ( $\Omega_t^{in} = \emptyset$ ) [40, 42, 46, 47], pour laquelle les calculs thermiques et/ou mécaniques s'effectuent sur tout le domaine  $\Omega_f$ . Le maillage de ce domaine  $\Omega_f$  étant constant, l'inconvénient que nous venons de mentionner plus haut disparaît.
- l'approche mixte ( $\Omega_t^q, \Omega_t^{in} \neq \emptyset$ ) [40, 41], pour laquelle les calculs thermiques et/ou mécaniques s'effectuent sur les deux sous-domaines  $\Omega_t$  et  $\Omega_t^q$ . Et, pour un cordon  $\Omega_T$  en cours de construction, le domaine des éléments dormants doit correspondre à la partie de  $\Omega_T$  qui reste à construire.

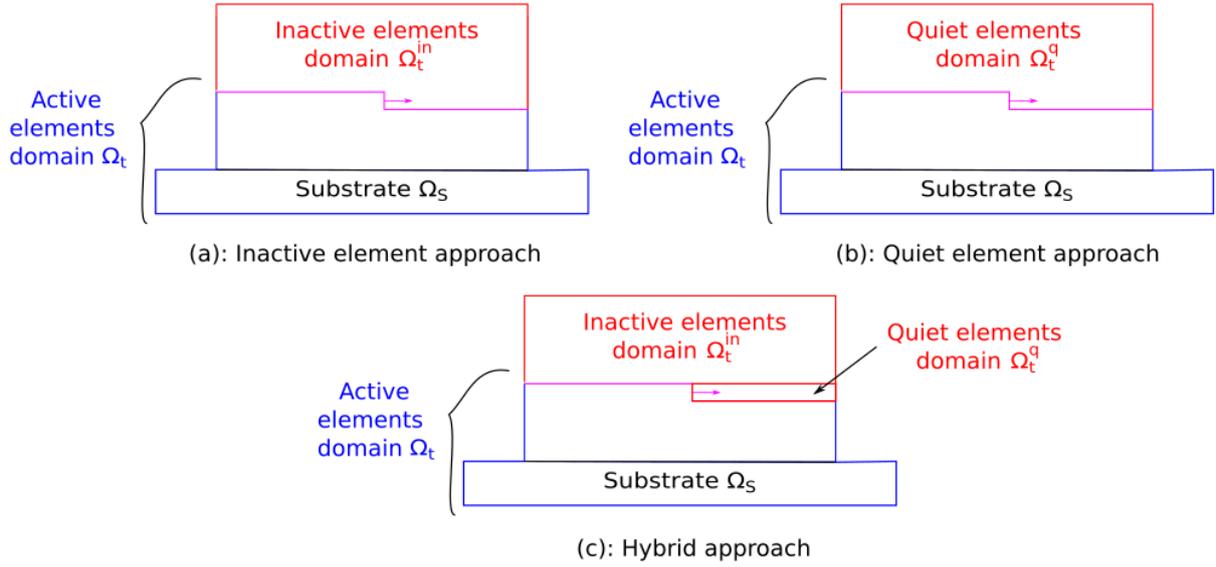


FIGURE 1.17 – Approches de modélisation numérique du DED : (a) Inactive element ; (b) Quiet element ; (c) Approche hybride

Nous pouvons conclure de cette classification, qu'en général, à chaque instant  $t \in [0, t_f]$ , le domaine de calcul  $\Omega_t^c$  de la modélisation thermique et/ou mécanique numérique se définit comme étant l'union du domaine des éléments actifs et du domaine des éléments dormants, soit  $\Omega_t^c := \Omega_t \cup \Omega_t^q$ .

## 1.2.2 Équations théoriques de la thermique et mécanique

Les équations théoriques desquelles découlent les modèles numériques thermiques et mécaniques du DED sont issues des équations de conservation, des conséquences du second principe de la thermodynamique et des lois rhéologiques. On distingue à cet effet deux groupes d'équations théoriques : les équations de la thermique et les équations de la mécanique.

### Équations de la thermique

Il s'agit, à chaque instant  $t \in [0, t_f]$  de :

- l'équation de la chaleur, dans laquelle est négligé le terme d'advection, définie dans  $\Omega_t^c$  par :

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_t \\
 & \rho c_p(T) \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} + \dot{Q}, \quad \underline{q} = -\kappa(T) \nabla T \\
 & \Rightarrow \rho c_p(T_t) \frac{T_t - T_{t-dt}}{dt} \approx \nabla \cdot (\kappa(T_t) \nabla T_t) + \dot{Q}_t \\
 & \text{Dans } \Omega_t^q \\
 & \rho s_{c_p} c_p(T_t) \frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \underline{q} + \dot{Q}, \quad \underline{q} = -s_{\kappa} \kappa(T) \nabla T \\
 & \Rightarrow s_{c_p} \rho c_p(T_t) \frac{T_t - T_{t-dt}}{dt} \approx \nabla \cdot (s_{c_p} \kappa(T_t) \nabla T_t) + \dot{Q}_t
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Avec,  $T$  champ de température,  $T_t$  champ de température à l'instant  $t$ ,  $T_{t-dt}$  champ de température à l'instant  $t-dt$ ,  $\rho$  masse volumique,  $c_p(T)$  chaleur massique, source de chaleur volumique  $\dot{Q}$ ,  $\underline{q}$  vecteur flux de chaleur,  $\kappa(T)$  conductivité thermique,  $s_{c_p} \in ]0, 1]$ ,  $s_{\kappa} \in ]0, 1[$  facteurs de dégradation respectivement de la chaleur massique et de la conductivité thermique. Selon Michaleris [40], la température  $T_{t-dt}$  doit être initialisée à la température ambiante pour tous les éléments nouvellement activés à l'instant  $t$ .

— les conditions aux limites définies sur la frontière  $\partial\Omega_t$  du domaine  $\Omega_t$  par :

$$\begin{aligned}
 & T = T^i \text{ sur } (\partial\Omega_t)^D \\
 -\underline{q} \cdot \underline{n} = & \begin{cases} q^i \text{ sur } (\partial\Omega_t)^N \\ h(T - T_{\infty}) + \sigma\varepsilon (T^4 - T_{\infty}^4) \text{ sur } (\partial\Omega_t)^R \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Avec,  $\underline{n}$  normale unitaire externe,  $\{(\partial\Omega_t)^D, (\partial\Omega_t)^N, (\partial\Omega_t)^R\}$  partitionnement de  $\partial\Omega_t$ ,  $T^i$  température imposée,  $q^i$  flux de chaleur imposée,  $T_{\infty}$  température du milieu ambiant,  $h$  coefficient de convection,  $\sigma$  constante de Boltzmann,  $\varepsilon$  émissivité thermique.

— les conditions aux limites définies sur la frontière  $\partial\Omega_t^q$  du domaine  $\Omega_t^q$ , mis à part son intersection avec la frontière  $\partial\Omega_t$ , correspondent à un flux imposé nul. Soit l'expression :

$$-\underline{q} \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_t^q \setminus (\partial\Omega_t^q \cap \partial\Omega_t) \tag{1.3}$$

## Équations de la mécanique

Il s'agit, à chaque instant  $t \in [0, t_f]$ , de :

— l'équation d'équilibre définie par :

$$\nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \underline{f}_e = \underline{0} \text{ dans } \Omega_t^c \tag{1.4}$$

Avec,  $\underline{\underline{\sigma}}$  tenseur de contraintes de Cauchy,  $\underline{f}_e$  vecteur force volumique,  $\underline{0}$  vecteur nul.

— la loi de comportement élasto-plastique définie par :

$$\begin{aligned} & \text{Dans } \Omega_t^c \\ \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} + \underline{\underline{\varepsilon}}^p, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{cases} \underline{\underline{C}}(T) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e & \text{dans } \Omega_t \\ s_C \underline{\underline{C}}(T) : \underline{\underline{\varepsilon}}^e & \text{dans } \Omega_t^q \end{cases} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{th} &= \alpha(T)(T - T_\infty), \quad \underline{\underline{\varepsilon}}^p = \begin{cases} \underline{\underline{0}} & \text{si } \bar{\sigma} < \sigma_Y(T) + R(T, \bar{\varepsilon}) \\ \lambda \underline{\underline{s}}, & \text{avec } \dot{\lambda} > 0 \text{ et } \bar{\sigma} = \sigma_Y(T) + R(T, \bar{\varepsilon}) \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Avec,  $\underline{\underline{0}}$  tenseur nul d'ordre deux,  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}^p$  désignant respectivement les tenseurs des déformations totales, élastiques, thermiques et plastiques,  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  tenseur vitesse des déformations plastiques,  $\underline{\underline{C}}(T)$  tenseur des modules d'élasticité,  $s_C \in ]0, 1[$  facteur de dégradation des modules d'élasticité,  $\alpha(T)$  coefficient de dilatation thermique,  $\underline{\underline{s}}$  composante déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\bar{\sigma} := \left(\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}}\right)^{1/2}$  contrainte équivalente de von-Mises,  $\bar{\varepsilon} := \int_0^t \frac{2}{3}\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^p$  déformation plastique cumulée,  $\sigma_Y(T)$  limite initiale d'élasticité,  $R(T, \bar{\varepsilon})$  fonction d'écrouissage isotrope. Cette dernière est habituellement ignorée par certains auteurs [41, 42, 44]. Par contre Biegler et al. [45, 46], Nain et al. [47] prennent en compte l'écrouissage du matériau solide. Cependant Nain et al. prennent en compte la relaxation des contraintes en réinitialisant à 0 la déformation plastique cumulée  $\bar{\varepsilon}$  à chaque élément du maillage dont la température à chaque nœud dépasse une température limite dite température de relaxation des contraintes.

Les conditions aux limites quant à elles, se définissent sur la frontière  $\partial\Omega_t^c$  partitionnée en deux surfaces : la surface encastrée  $(\partial\Omega_t^c)^u \subset \partial\Omega_S$  et la surface libre  $(\partial\Omega_t^c)^\sigma$ . Soit la formulation :

$$\underline{\underline{u}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } (\partial\Omega_t^c)^u, \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \text{ sur } (\partial\Omega_t^c)^\sigma \quad (1.6)$$

Avec  $\underline{\underline{u}}$  champ de déplacement.

### 1.2.3 Critère d'activation d'éléments

Deux types de critère d'activation sont identifiés dans la littérature scientifique : le critère basé sur la source de chaleur et le critère basé sur la température.

#### Critère à base de la source de chaleur

Il s'agit du critère développé par Michaleris [40] dans lequel est adopté le modèle de source de chaleur volumique à double ellipsoïdes de Goldak et al. [48]. Il se base sur l'historique des valeurs prises par la source  $\dot{Q}$  en chaque point du domaine entier  $\Omega_f$ . En effet, tout élément du maillage de  $\Omega_f$  à l'état inactif ou dormant passe à l'état actif lorsqu'au moins un de ses points d'intégration de Gauss enregistre une valeur de

$\dot{Q}$  supérieure ou égale à 5% de la valeur maximale. Ce critère est largement repris par d'autres auteurs [41, 42, 44].

### Critère basé sur la température

Il a été développé et adopté par Biegler et al. [46] qui utilisent la méthode quiet element, et par Stender et al. [43] qui quant à eux utilisent la méthode inactive element. Il se base sur l'historique des valeurs de température du domaine entier  $\Omega_f$ . En effet, selon ce critère, tout élément du maillage de  $\Omega_f$  à l'état inactif [43] ou dormant [46] passe à l'état actif lorsque sa température moyenne enregistre une valeur supérieure ou égale à la température de fusion du matériau utilisé.

Il est à noter que Stender et al. calculent la température des éléments inactifs en résolvant dans tout le domaine  $\Omega_f$  par la méthode des éléments finis une version simplifiée de l'équation de la chaleur 1.1, dans laquelle est négligée la diffusion, soit l'équation :

$$\rho c_p (T) \frac{\partial T}{\partial t} = \dot{Q} \text{ dans } \Omega_f \quad (1.7)$$

La température obtenue par cette résolution permet ainsi d'activer les éléments inactifs ayant une température moyenne au dessus de la température de fusion, d'actualiser le domaine des éléments actifs  $\Omega_t$  et d'y effectuer à nouveau l'analyse thermique dans laquelle sera résolue l'équation de chaleur 1.1 avec les conditions aux limites 1.2, suivi de l'analyse mécanique.

### 1.2.4 Analyses critiques

Les analyses critiques des modèles thermomécaniques existants du DED portent sur différents points : l'interaction thermique externe, la cinématique, l'activation des éléments, la complexité numérique.

#### L'interaction thermique externe

Il s'agit des interactions thermiques entre le domaine actif  $\Omega_t$  et le milieu externe, à chaque instant  $t \in [0, t_f]$  du procédé DED, notamment les flux de chaleur à la frontière  $\partial\Omega_t$ . Les modèles thermiques macroscopiques existants ne prennent pas en compte l'interaction thermique entre le bain de fusion à très haute température avec la matière entrante qu'est la poudre de métal chauffée à une température a priori différente de celle du bain de fusion. Cette éventuelle discontinuité de température implique une condition de flux de chaleur bien différente de celle de la convection et du rayonnement. De plus, ces modèles existants ne prennent pas en compte l'élévation de la température du gaz inerte chauffé par le faisceau laser. En effet, dans l'expression des flux de convection et de rayonnement donnée dans 1.2 modélisant l'interaction thermique du domaine actif/gaz

protecteur, la température du milieu ambiant  $T_\infty$  ne correspond pas à la température réelle du gaz protecteur. Ceci peut avoir pour conséquence un retard d'élévation de la température des points en proximité de la source de chaleur. La figure 1.18 nous en donne un exemple par la comparaison des résultats de simulation thermique de la construction d'un cordon par DED avec les mesures expérimentales effectuées sur trois thermocouples fixés sur le substrat en proximité du cordon construit, suivant les trois distances 0.6mm, 1mm et 1.1mm à l'axe du cordon. Nous y observons, des différences d'élévation de température à l'approche de la source de chaleur. En effet, les courbes expérimentales indiquent un premier chauffage des thermocouples du fait de leur contact avec le gaz protecteur chauffé, un chauffage qui n'est pas pris en compte dans le modèle thermique.

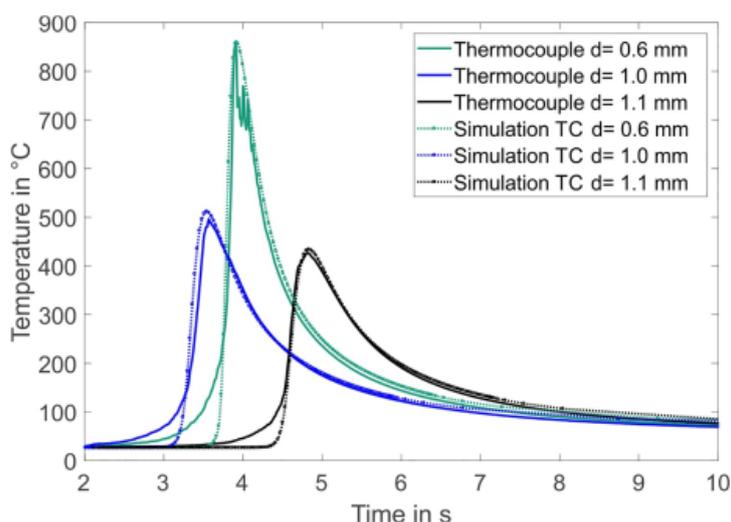


FIGURE 1.18 – Comparaison entre simulations et données expérimentales sur l'évolution de température de trois thermocouples fixés sur le substrat [45]

## La cinématique

Dans le cadre des approches inactive element et hybride, la cinématique des éléments inactifs n'est pas prise en compte. La distorsion de ces éléments au moment de leur activation n'est donc pas calculée. Ainsi, le champ de déplacement  $\underline{u}$  correspond au déplacement post-activation des éléments du maillage appartenant à la pièce à construire c'est-à-dire  $\Omega_{Pf}$ .

Dans le cadre de l'approche quiet element qui, contrairement aux précédentes approches, prend en compte la cinématique des éléments dormants (non actifs), l'application d'un faible module d'Young à ces éléments n'a pas seulement pour effet de conduire à un mauvais conditionnement de la matrice de rigidité, mais conduit également à une majoration considérable de leurs déplacements, surtout pour les éléments proches de la surface supérieure du domaine entier  $\Omega_f$ . Une illustration de cet handicap nous est donnée par la figure 1.19 présentant les résultats de calcul de déplacement sur une coupe transversale d'une aube de turbine en acier inoxydable 316L (module d'Young de l'ordre de 100GPa)

en cours de construction par le DED [46], suivant deux valeurs de faible module d'Young :  $E_{quiet} = 1\text{GPa}$  et  $E_{quiet} = 10\text{GPa}$ . Nous y observons en effet que les flèches des deux sections sont très importantes pour la plus petite valeur de  $E_{quiet}$ , et peu importantes pour la plus grande. Toutefois, l'application de cette dernière valeur comme module d'Young des éléments dormants est susceptible de provoquer une importante interaction mécanique entre le domaine des éléments actifs et le domaine des éléments dormants, pouvant générer des erreurs numériques sur la prédiction de la distorsion de la pièce fabriquée.

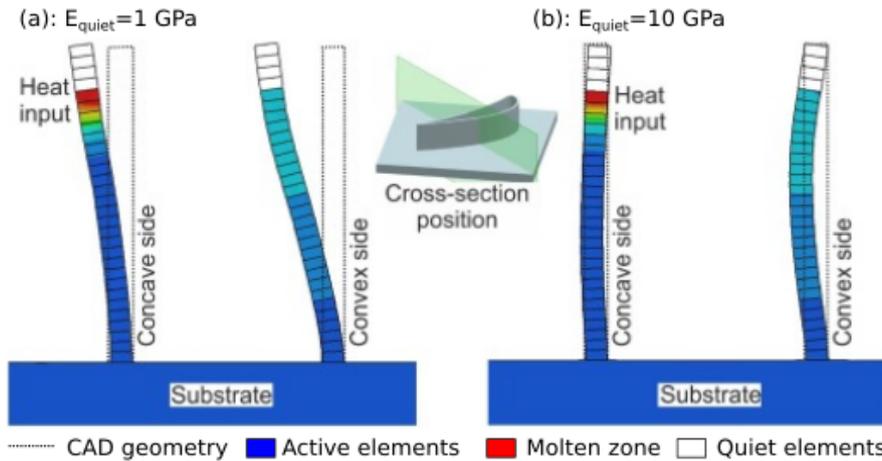


FIGURE 1.19 – Simulation du déplacement d'une aube de turbine en cours de fabrication par DED [46]

### L'activation des éléments

Les critères existants d'activation présentés ci-dessus présentent deux importants inconvénients :

1. Contrainte d'utilisation des pas de temps suffisamment petits, afin d'assurer que chaque élément ait au moins un point d'intégration de Gauss d'activation enregistrant une valeur de  $\dot{Q}$  plus importante que 5% de la valeur maximale, ou ait une température moyenne supérieure à la température de fusion, au passage de la source de chaleur.
2. Irrégularité de l'interface numérique entre domaine des éléments actifs et domaine des éléments inactifs ou tranquilles pouvant mener à des pics artificiels surtout pour les maillages triangulaires anisotropes (figure 1.20).

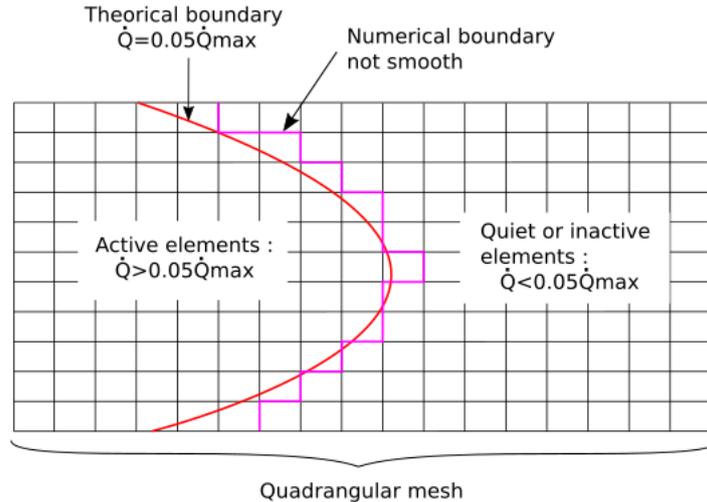


FIGURE 1.20 – Interface numérique entre les éléments actifs et les éléments tranquilles ou inactifs

### La complexité numérique

La dépendance à la température des propriétés thermophysiques, la non-linéarité de la loi de comportement mécanique adoptée conduisent à la non linéarité des problèmes thermique et mécanique à résoudre. De plus, l'usage de pas de temps assez petits pour assurer l'activation de tous les éléments au passage de la source de chaleur et la précision des résultats augmentent la fréquence de résolution de ces deux problèmes. Le maillage du domaine de calcul  $\Omega_t^c$  devant être suffisamment raffiné, cela affecte sensiblement le temps de calcul. En particulier, dans le cadre de l'approche quiet element, où la taille des problèmes sera maximale, car étant de l'ordre du nombre de nœuds du maillage du domaine entier  $\Omega_f$ , du début jusqu'à la fin du procédé.

Tout ceci peut avoir pour conséquence principale, un important temps de calcul, défavorisant ainsi par rapport à l'approche expérimentale, ces différentes approches classiques de modélisation macroscopique numérique du DED que nous conviendrons d'appeler plus loin modèle standard et calcul complet. Il s'avère donc nécessaire d'adopter des approches de réduction de complexité afin d'obtenir des solutions numériques suffisamment précises à moindre coût. La méthode inherent strain est une de ces approches et fera l'objet de la section suivante.

## 1.3 Méthode inherent strain

La méthode inherent strain (IS) est une méthode de réduction de complexité du modèle standard, ayant pour but le calcul approximatif relativement direct des distorsions et contraintes résiduelles de la pièce à la fin du procédé, après refroidissement total. Ceci, par le biais de la résolution d'un nombre limité de problèmes d'équilibre mécanique dans

lesquels intervient comme paramètre de sollicitation, en général sous forme incrémentale, un champ tensoriel connu sous le nom de champ inherent strain noté  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ . Cette méthode a initialement été développée par Ueda et al. [49, 50, 51] pour le procédé de soudage. Pour ce procédé, il était question de définir l'inherent strain comme champ de déformation plastique, d'approcher ce dernier par des méthodes heuristiques, puis de calculer l'état mécanique final d'un assemblage soudé en résolvant des problèmes se limitant à un comportement élastique linéaire. Elle a, dans les dernières décennies, vu son domaine d'application s'étendre aux procédés de fabrication additive notamment le PBF (Powder Bed Fusion) [52, 53, 54, 55, 56, 57, 58] et le DED [44]. Dans cette section, nous présenterons dans le cadre de la fabrication additive :

- les différentes approches de la méthode ;
- les différentes définitions et méthodes d'estimation du champ inherent strain ;
- quelques résultats d'application au DED.

### 1.3.1 Approches de la méthode

Dans le cadre de la fabrication additive, le calcul des distorsions et contraintes résiduelles s'effectue, selon la littérature, de manière itérative, couche par couche. En effet, pour une décomposition de la pièce finale à construire  $\Omega_{Pf}$  en  $N$  couches de matière  $\Omega_{L1}, \dots, \Omega_{LN}$ , à chaque itération  $I = 1, \dots, N$ , l'application de la méthode consiste à :

- Activer la couche  $\Omega_{LI}$  et y appliquer le champ inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  (figure 1.21) ;

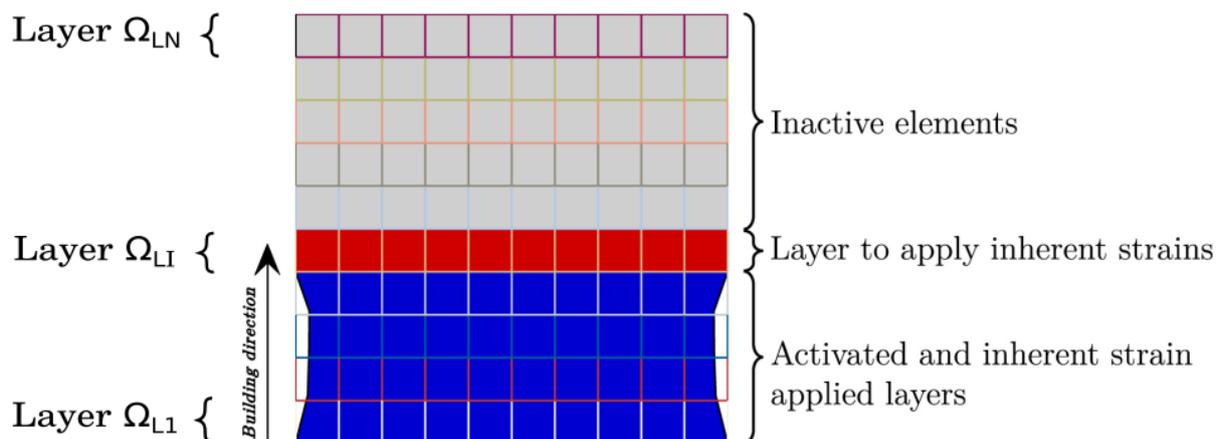


FIGURE 1.21 – Activation de la couche  $\Omega_{LI}, I = 1, \dots, N$  [56]

- Calculer les incréments de distorsions et de contraintes résiduelles par la résolution d'un unique problème mécanique défini, à température ambiante  $T_\infty$ , sur le domaine des éléments actifs actualisé  $\Omega_I$ .

En fonction de l'approche de comportement mécanique adoptée, on distingue dans la littérature scientifique, deux approches : l'approche linéaire et l'approche non linéaire.

### Approche linéaire

Dans cette approche, à chaque dépôt de couche  $\Omega_{LI}, I = 1, \dots, N$ , est adopté, un comportement élastique linéaire dans lequel, le champ inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ , appliqué à la couche  $\Omega_{LI}$ , apparaît comme la composante inélastique de l'incrément de déformation totale  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I$  [54, 55, 56]. Soit la formulation mathématique ci-dessous :

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I &= \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^e + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_I = \underline{\underline{\sigma}}_{I-1} + \underline{\underline{C}}(T_\infty) : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^e \\ \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^* &:= 1_{\Omega_{LI}} \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{I-1|_{\Omega_{LI}}} = \underline{\underline{0}} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Avec  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^e$   $I^e$ -incrément de déformation élastique,  $\underline{\underline{\sigma}}_{I-1}$  tenseurs des contraintes calculés au dépôt de la couche  $\Omega_{LI-1}$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}_I$  tenseur des contraintes à calculer au dépôt de la couche  $\Omega_{LI}$ ,  $\underline{\underline{C}}(T_\infty)$  tenseur des modules d'élasticité à la température ambiante, et  $1_{\Omega_{LI}}$  désignant la fonction indicatrice de la couche déposée  $\Omega_{LI}$  définie par :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_I, \quad 1_{\Omega_{LI}}(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \underline{x} \in \Omega_I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.9)$$

Cette approche présente l'avantage d'être très économique en raison de la linéarité du problème mécanique à résoudre, mais présente le grand inconvénient de surestimer les contraintes mécaniques car elle autorise les contraintes équivalentes à dépasser de manière non contrôlée la contrainte limite d'élasticité.

### Approche non linéaire

Cette approche est une évolution notable de l'approche précédente en ce sens que, par la loi de comportement élasto-plastique adoptée pour chaque couche  $\Omega_{LI}, I = 1, \dots, N$  déposée, elle permet de contrôler les dépassements de la contrainte limite d'élasticité [44, 53, 54, 59, 58]. Le champ inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  appliqué à la couche  $\Omega_{LI}$  apparaît comme une composante inélastique additionnelle de l'incrément de déformation totale  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I$ . Soit la formulation mathématique ci-dessous dans le cadre de la plasticité parfaite (sans écrouissage) :

$$\begin{aligned} \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I &= \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^e + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^p + \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_I = \underline{\underline{\sigma}}_{I-1} + \underline{\underline{C}}(T_\infty) : \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^e \\ \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^* &:= 1_{\Omega_{LI}} \underline{\underline{\varepsilon}}^*, \quad \underline{\underline{\sigma}}_{I-1|_{\Omega_{LI}}} = \underline{\underline{0}} \\ \bar{\sigma}_I - \sigma_Y(T_\infty) &\leq 0, \quad \bar{\sigma}_I := \left( \frac{3}{2} \underline{\underline{s}}_I : \underline{\underline{s}}_I \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

Avec  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^p$   $I^e$ -incrément de déformation plastique,  $\underline{\underline{s}}_I$ , composante déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}_I$ ,  $\bar{\sigma}_I$  contrainte équivalente de von Mises calculée au dépôt de la couche  $\Omega_{LI}$ ,  $\sigma_Y(T_\infty)$  limite d'élasticité à la température ambiante.

### 1.3.2 Définitions du champ inherent strain

Différentes définitions ont été attribuées au champ inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ . Elles peuvent être regroupées en deux grandes approches :

- définitions à base de données référentes de distorsions et contraintes résiduelles, données issues de la simulation détaillée par le modèle standard ou issues de mesures expérimentales, sur tout ou une partie du domaine  $\Omega_f$  ;
- définitions à base des propriétés thermophysiques et thermomécaniques des matériaux utilisés.

#### Définitions à base de données mécaniques référentes

Il s'agit de :

- La définition originale, celle de Ueda et al. [49, 50] pour laquelle l'inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  correspond à la déformation permanente du système (substrat/pièce) construit à l'état de refroidissement total, soit donc la déformation plastique. Cette définition est utilisée par d'autres auteurs [55, 56].
- La définition de Liang et al. [44] pour laquelle  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  est donnée par la différence :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{\varepsilon}}_i^e + \underline{\underline{\varepsilon}}_i^p - \underline{\underline{\varepsilon}}_s^e \quad (1.11)$$

Avec,  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^e$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^p$  désignant respectivement les déformations élastique et plastique dans l'état intermédiaire, et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_s^e$  désignant la déformation élastique au refroidissement total. L'état intermédiaire selon Liang et al. [44] désigne l'état d'amplitude maximale de déformation mécanique compressive suivant la direction de construction au passage de la source de chaleur.

- La définition selon Bugatti et Semeraro [55] pour laquelle  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  a les propriétés suivantes :
  - champ constant, diagonal et de composante nulle suivant la direction de construction (habituellement la direction  $Z$ ) ;
  - pour un nombre donné d'échantillons de pièces de géométrie similaire,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  minimise l'écart entre les distorsions résiduelles calculées par la méthode inherent strain et celles déterminées expérimentalement.

#### Définitions à base des propriétés thermophysiques et thermomécaniques

Il s'agit de :

- La définition de Alvarez et al. [53] pour laquelle l'inherent strain  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  est un équivalent de déformation thermique donné par l'expression :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = -\underline{\underline{P}}^{th} (T_f - T_i) \quad (1.12)$$

Avec  $\underline{\underline{P}}^{th}$  tenseur diagonal dont les composantes sont des multiples entiers du coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ ,  $T_i$  température initiale à l'activation,  $T_f$  température de fusion.

- La définition de Yaghi et al. [54] pour laquelle  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  est un tenseur sphérique dont les coefficients tous identiques sont donnés par le rapport entre la limite d'élasticité  $\sigma_Y$  et le module d'Young  $E$ , tous les deux pris à la température ambiante.

### 1.3.3 Méthode d'estimation du champ inherent strain

Cette méthode ne concerne que les champs inherent strain définis à base des données référentes de distorsions et/ou contraintes résiduelles. En effet, l'obtention de ces données étant généralement coûteuse, il est essentiel de minimiser cet effort d'obtention. Dans le cadre du procédé DED visant à fabriquer une pièce  $\Omega_f$ , la méthode proposée dans la littérature scientifique, celle de Liang et al. [44], consiste à :

- réaliser, sur une petite géométrie représentative  $\Omega_{fs}$  (typiquement quelques cordons dans le cas du DED), une simulation détaillée du procédé afin d'y calculer et moyenner le champ inherent strain résultant ;
- définir cette moyenne comme champ inherent strain qui sera utilisé dans la simulation de la géométrie  $\Omega_f$  après d'éventuels calculs de rotation tensorielle de façon à imposer les composantes du tenseur dans les directions tangentielle, transverse et éventuellement suivant la verticale par rapport à la trajectoire de la source de chaleur en chaque point.

### 1.3.4 Quelques résultats

Nous ne nous intéresserons dans cette partie qu'au procédé DED, et donc uniquement aux résultats de Liang et al. [44] portant sur la construction d'un mur sur un substrat parallélépipédique, mur constitué de couches mono-cordons. Plus précisément, il s'agit des résultats des tests de validation ; lesquels de manière générale, consistent à faire des calculs de simulation détaillée par le modèle standard sur une géométrie donnée, à calculer à partir des résultats de simulation détaillée le champ inherent strain, à appliquer la méthode inherent strain sur cette même géométrie et ensuite à en comparer les résultats avec ceux du modèle standard. Ces tests ont porté sur un mur rectiligne dont les couches sont construites suivant des sens de trajectoire alternés du faisceau laser comme montré dans la figure 1.22. En fonction du type de fixation du substrat, nous avons deux cas de test : substrat en porte à faux (figure 1.22) et substrat encastré à sa surface inférieure (figure 1.23).

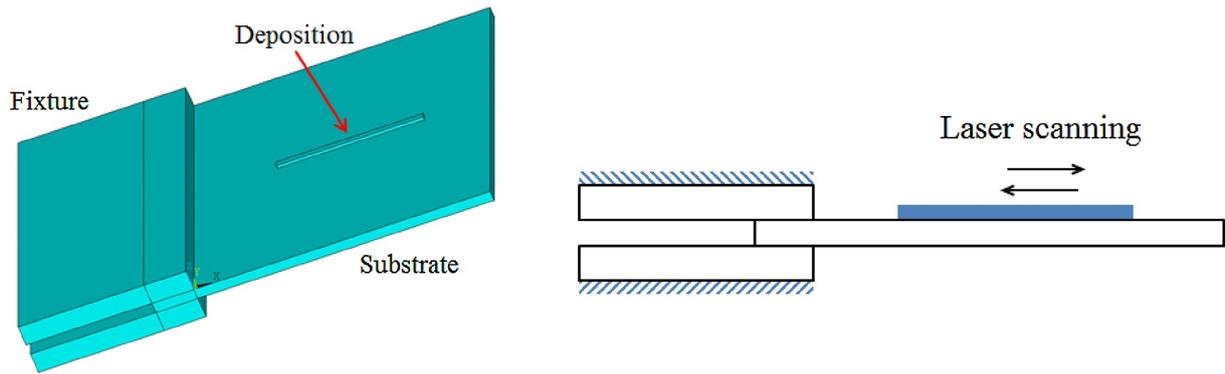


FIGURE 1.22 – Substrat et mur rectiligne à construire suivant un trajet à double sens du faisceau laser [44]

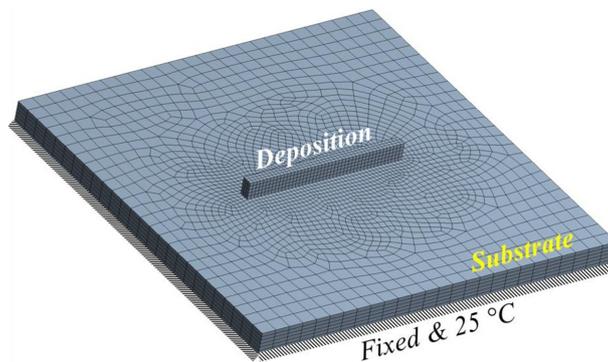


FIGURE 1.23 – Mur rectiligne à construire sur un substrat encastré à sa surface inférieure [44]

Le mur et le substrat sont en alliage de titane (Ti64). Le substrat est de dimension  $102 \times 102 \times 3.22\text{mm}^3$ , tandis que pour le mur, les dimensions, variant avec le nombre de couche, sont données dans le tableau 1.1 ci-dessous :

Nombre de couches	Longueur (mm)	Largeur (mm)	Hauteur (mm)
1	44.57	2.0	0.99
2	44.57	2.0	1.80
3	44.57	2.0	2.70
5	44.57	2.7	4.75
10	36.00	3.0	9.00

TABLE 1.1 – Dimensions du mur en alliage de titane (Ti64) [44]

### Substrat en porte à faux

Il s'agit d'effectuer une étude comparative entre les résultats de calculs de distorsions résiduelles par le modèle standard qu'on appellera *STD*, la méthode inherent strain linéaire (originale) qu'on appellera *IS<sub>Lin</sub>* (équations 1.8), et la méthode inherent strain non

linéaire selon Liang et al. qu'on appellera  $IS_{Nlin}$  (équations 1.10). Dans cette étude comparative, le substrat est en porte-à-faux (figure 1.22). En effet, le tableau ci-dessous nous donne pour chaque nombre de couches construites, et pour chacune des trois méthodes de calcul, la valeur maximale de la distorsion verticale obtenue et la durée de calcul. Nous pouvons y observer que la méthode inherent strain non linéaire de Liang et al. est plus efficace que la méthode inherent strain linéaire, en raison d'une plus grande proximité de ses résultats de distorsion avec ceux du modèle standard, et de la durée de calcul presque égale avec celle de la méthode inherent strain linéaire.

Nombre de couches	$STD$		$IS_{Lin}$		$IS_{Nlin}$	
	Distorsion (mm)	Durée de calcul (min)	Distorsion (mm)	Durée de calcul (min)	Distorsion (mm)	Durée de calcul (min)
1	0.326	21.6	0.170	1.2	0.348	1.5
2	0.502	33.0	0.299	1.8	0.557	2.1
3	0.584	43.7	0.412	2.2	0.606	2.6
5	0.937	57.6	0.672	3.2	0.956	3.5
10	0.663	114.4	0.478	4.2	0.607	4.4

TABLE 1.2 – Distorsion verticale maximale et durée de calcul des applications des trois méthodes  $STD$ ,  $IS_{Lin}$  et  $IS_{Nlin}$  [44]

Par ailleurs, pour cinq couches construites, la figure 1.24 nous donne une comparaison des distributions spatiales de la distorsion verticale du système, calculées avec les méthodes  $STD$  et  $IS_{Nlin}$ . Nous observons un très bon accord des deux distributions au niveau du substrat mais un accord moins satisfaisant au niveau du mur construit.

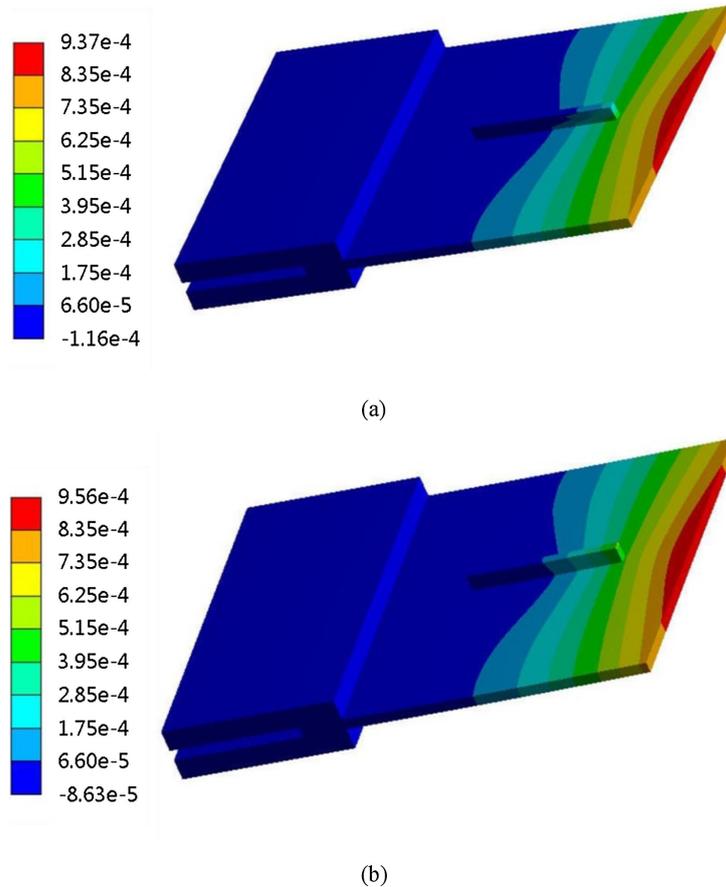


FIGURE 1.24 – Distorsion verticale du système substrat/mur de cinq couches calculée : (a) suivant la méthode  $STD$  ; (b) suivant la méthode  $IS_{Nlin}$  [44]

### Substrat encastré à sa surface inférieure

Il s'agit ici d'effectuer une étude comparative similaire à la précédente, mais uniquement entre les résultats d'application des méthodes  $STD$  et  $IS_{Nlin}$ . Pour un mur de cinq couches, la figure 1.25 nous présente les distributions spatiales de l'amplitude de distorsion sur le mur obtenues à partir de ces deux méthodes. Bien que les ordres de grandeur de la distorsion de la méthode  $IS_{Nlin}$  correspondent à ceux de la distorsion de la méthode  $STD$ , nous observons dans cette figure une importante différence des distributions des valeurs.

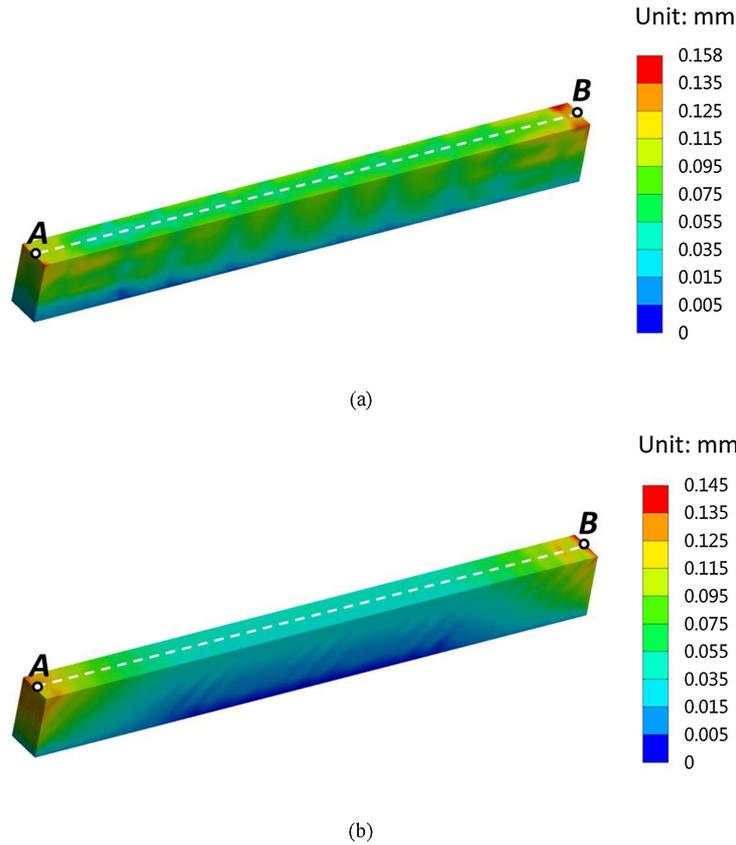


FIGURE 1.25 – Distorsion du mur de cinq couches construit sur un substrat encastré à sa surface inférieure, calculée : (a) suivant la méthode  $STD$ ; (b) suivant la méthode  $IS_{Nlin}$  [44]

Il ressort des résultats de ces tests de validation que le champ inherent strain selon Liang et al. [44] bien que permettant de bien approcher la distorsion résiduelle du substrat, se trouve limité dans le calcul approximatif des distorsions de la pièce construite. La raison de cette limite est l'inexactitude de ce champ car il ne permet pas de reproduire le profil exact du champ de distorsion résiduelle calculé avec le modèle standard et par conséquent ne peut pas reproduire le profil exact du champ de contraintes résiduelles calculé par celui-ci.

## 1.4 Conclusions et plan du travail effectué

Ce chapitre a eu pour objet :

- la description du procédé DED, ses domaines d'application et sa problématique, c'est-à-dire les défis auxquels il fait encore face, à savoir les anomalies des pièces fabriquées par ce procédé DED ;
- la description des différentes approches existantes de modélisation thermomécanique macroscopique de ce procédé, leurs principes et leurs limites ;

- la description des différentes approches existantes de la méthode inherent strain, leurs principes et les limites de l'approche de Liang et al.

Les limites des approches de modélisation thermomécanique macroscopique peuvent être résumées par les principaux points suivants :

- l'absence de calcul cinématique des éléments inactifs dans le cadre de l'approche inactive element ;
- la surestimation des déplacements des éléments dormants pour un très faible module d'Young appliqué à ces éléments ;
- le risque d'interaction mécanique entre le domaine des éléments actifs et le domaine des éléments dormants pour un module d'Young de ces derniers assez important ;
- la non prise en compte de l'interaction thermique entre la matière construite et la matière entrante ;
- la non prise en compte de l'élévation, par le faisceau laser, de la température du gaz protecteur.

En ce qui concerne la méthode inherent strain appliquée au DED, il a été montré que l'approche de Liang et al. bien qu'étant efficace dans le calcul des distorsions résiduelles au niveau du substrat plus que l'approche linéaire originale, présente des limites dans le calcul des distorsions et contraintes résiduelles au niveau du mur construit. Ceci du fait de l'inexactitude du champ inherent strain.

Dans le présent document, nous proposons d'apporter, dans le cadre de l'approche inactive element, des solutions efficaces à ces différentes limites suivant le plan de travail ci-dessous :

1. Modélisation thermomécanique macroscopique du procédé DED, où il sera question :
  - de prendre en compte l'interaction thermique entre matière déposée et matière entrante par le biais des équations d'interfaces (équations de Rankine Hugoniot) ;
  - de prendre en compte l'élévation de la température du gaz protecteur par une distribution gaussienne de celle-ci ;
  - d'adopter une loi de comportement élasto-viscoplastique à écrouissage isotrope et cinématique [60] ;
  - d'appliquer une stratégie de minimisation d'amplitude de distorsion et déformation dans le domaine des éléments inactifs dans une approche de grandes déformations ;
2. Applications et validations du modèle thermomécanique macroscopique qui consisteront principalement à :
  - Mener une étude de convergence du modèle numérique découlant du modèle théorique ;

- Effectuer une étude comparative entre le modèle numérique et la méthode "quiet element" ;
  - Étudier l'influence de la prise en compte de l'écroissage cinématique sur les résultats d'applications ;
  - Effectuer une étude comparative des résultats d'application du modèle numérique suivant différents jeux de données thermomécaniques ;
  - Effectuer la validation expérimentale.
3. Méthode inherent strain, opérée dans le cadre de l'approche non linéaire et comportant les principaux points suivants :
- description du principe de la méthode dans le cadre d'un comportement élastoplastique à écroissage isotrope et cinématique ;
  - proposition d'une nouvelle définition du champ inherent strain ;
  - tests de validation de cette nouvelle définition avec celle de Liang et al. [44] ;
  - estimation du champ inherent strain par la stratégie d'apprentissage ;
  - applications de la méthode sur différentes géométries, dans lesquelles seront montrées les limites de la méthode aux géométries complexes, du fait du défaut d'actualisation de la stratégie d'apprentissage adoptée, d'où la méthode ci-dessous.
4. Méthode inherent strain rate, version temporelle de la méthode inherent strain, comportant les principaux points suivants :
- linéarisation de la loi de comportement mécanique par l'estimation de la vitesse de déformation plastique cumulée ;
  - estimation de cette grandeur par la stratégie d'apprentissage actualisée ;
  - applications de la méthode sur différentes géométries dans lesquelles sera montrée l'efficacité de la méthode sur des géométries simples et complexes.



# Chapitre 2

## Modélisation thermomécanique macroscopique du procédé DED

La thermomécanique du procédé DED désigne l'ensemble des phénomènes thermiques et mécaniques et de leurs interactions, observés dans le système constitué du substrat et de la pièce en cours de construction. La modélisation thermomécanique théorique de ce procédé, consiste donc à développer l'ensemble des équations mathématiques faisant intervenir les grandeurs thermiques et mécaniques mises en jeu au sein de ce système. La pièce étant sujet à une évolution matérielle du fait de l'ajout de matière pendant sa construction, elle sera donc considérée comme un système thermodynamique ouvert. Cette modélisation thermomécanique, nécessitant ainsi une approche de thermomécanique des milieux continus ouverts, passera par les modélisations matérielle et géométrique de ce procédé, et sera suivie de la modélisation thermomécanique numérique.

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Modélisations matérielle et géométrique du procédé DED . . .</b>	<b>44</b>
2.1.1	Modélisation matérielle . . . . .	44
2.1.2	Modélisation géométrique . . . . .	46
<b>2.2</b>	<b>Modélisation thermomécanique du procédé DED . . . . .</b>	<b>54</b>
2.2.1	Équations de conservation . . . . .	54
2.2.2	Les lois de comportement . . . . .	57
2.2.3	Formulations théoriques des problèmes thermique et mécanique du procédé DED . . . . .	62
2.2.4	Formulation théorique du problème cinématique de positionne- ment . . . . .	67
<b>2.3</b>	<b>Modélisation thermomécanique numérique du procédé DED</b>	<b>69</b>
2.3.1	Discrétisation temporelle . . . . .	69
2.3.2	Discrétisation spatiale . . . . .	81

---

## 2.1 Modélisations matérielle et géométrique du procédé DED

### 2.1.1 Modélisation matérielle

La pièce  $\mathcal{M}_P$  et par conséquent le système  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_S \cup \mathcal{M}_P$ ,  $\mathcal{M}_S$  désignant le substrat, étant considérés comme des corps matériels<sup>1</sup>, la modélisation matérielle du procédé DED consiste en la description de l'évolution temporelle de  $\mathcal{M}$  pendant l'intervalle de temps du procédé  $[0, t_f]$ . On considère pour cela :

- La pièce finale à obtenir notée  $\mathcal{M}_{Pf}$ , c'est-à-dire le volume matériel total à construire sur le substrat  $\mathcal{M}_S$ . Le système total à obtenir est noté  $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_S \cup \mathcal{M}_{Pf}$  (figure 2.1)

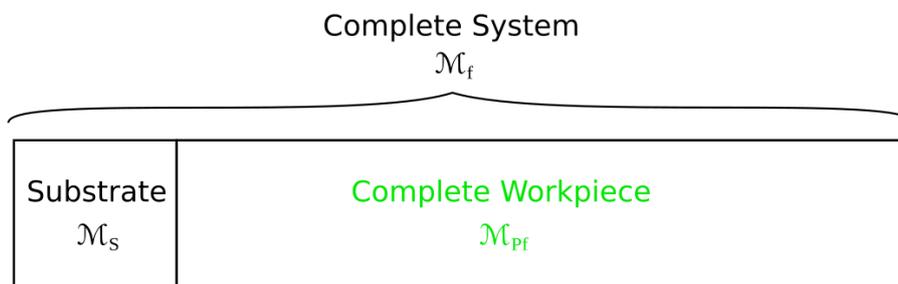


FIGURE 2.1 – Substrat et pièce finale

- La partition de  $\mathcal{M}_{Pf}$  en  $N$  parties appelées cordons (tracks en anglais)  $\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}$ <sup>2</sup> (figure 2.2)
- Les  $N + 1$  regroupements  $\mathcal{M}_0, \dots, \mathcal{M}_N$  des cordons  $\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}$  (figure 2.2), définis par :

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_S, \quad \forall I = 1, \dots, N, \quad \mathcal{M}_I = \mathcal{M}_{I-1} \cup \mathcal{M}_{TI} \quad (2.1)$$

1. Du point de vue physique, un corps matériel est un ensemble de particules ou points matériels. Du point de vue mathématique, il s'agit d'une variété différentiable munie d'un bord, c'est-à-dire d'un sous-ensemble d'un espace affine tridimensionnel, muni d'un paramétrage local presque partout différentiable, à l'aide de trois paramètres indépendants.

2. Il est à noter de possibles regroupements de cordons juxtaposés, constituant ainsi des couches de matière. Dans cet exposé, nous évitons d'évoquer cette structure intermédiaire de "couche". D'autre part, en pratique, dans le cadre de notre étude, nous nous intéressons uniquement à des couches constitués d'un seul cordon. Par ailleurs, l'indice  $T$  utilisé renvoie à la traduction anglaise "track" de cordon.

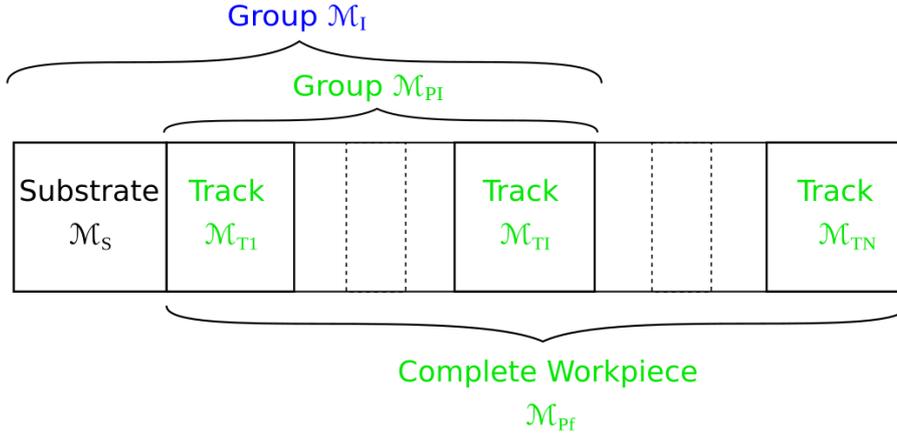


FIGURE 2.2 – Décomposition et regroupements du système total

- La décomposition de  $[0, t_f]$  en  $N$  intervalles  $[t_0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N]$ , intervalles de construction des cordons respectifs  $\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}$  vérifiant :

$$\begin{aligned} t_0 &= 0 & t_N &= t_f \\ \forall I &= 1, \dots, N, & t_{I-1} &< t_I \end{aligned} \quad (2.2)$$

- Pour chaque intervalle  $[t_{I-1}, t_I]$ ,  $I = 1, \dots, N$ , sa décomposition en deux sous-intervalles :  $[t_{I-1}, t_I^c]$ ,  $t_I^c \in ]t_{I-1}, t_I]$ , intervalle de construction effective du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ ; et  $[t_I^c, t_I]$ , intervalle de temps d'attente précédant la construction du cordon suivant  $\mathcal{M}_{TI+1}$  lorsque  $I < N$ , temps refroidissement total du système, sinon.

Ainsi, le système  $\mathcal{M}$  est donc considéré comme fonction temporelle vérifiant les propriétés suivantes (figure 2.3-2.4) :

1. Initialisation et finalisation

$$\mathcal{M}(0) = \mathcal{M}_s, \quad \mathcal{M}(t_f) = \mathcal{M}_f \quad (2.3)$$

2. Croissance au sens de l'inclusion ensembliste (figure 2.4)

$$\begin{aligned} &\forall I = 1, \dots \\ &\left\{ \begin{array}{l} \forall t \in [t_{I-1}, t_I], \mathcal{M}_{I-1} \subseteq \mathcal{M}(t) \subseteq \mathcal{M}_I \\ \forall t^a, t^b \in [t_{I-1}, t_I^c], t^a < t^b \Rightarrow \mathcal{M}(t^a) \subsetneq \mathcal{M}(t^b) \\ \forall t \in [t_I^c, t_I], \mathcal{M}(t) = \mathcal{M}_I \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.4)$$

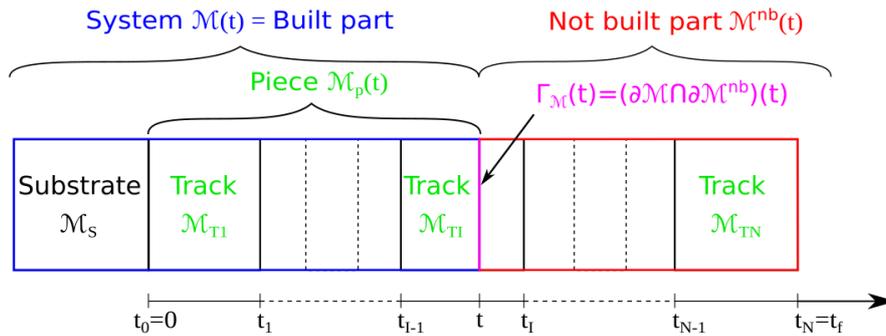


FIGURE 2.3 – Évolution temporelle du système

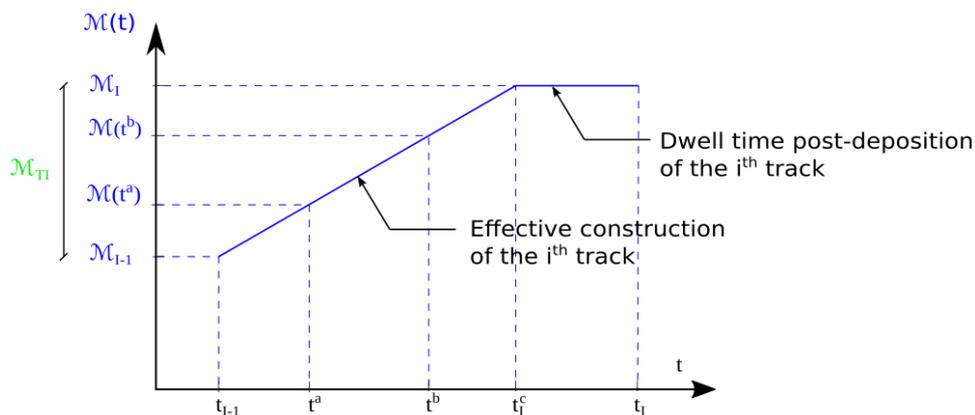


FIGURE 2.4 – Évolutions temporelles du système à la construction du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$

Dans la suite, à chaque instant  $t \in [0, t_f]$ , nous considérons :

- la partition du système total à obtenir  $\mathcal{M}_f$  en deux domaines (figure 2.3) : le système actuel  $\mathcal{M}(t)$ , partie construite de  $\mathcal{M}_f$ , et  $\mathcal{M}^{nb}(t) = \mathcal{M}_f \setminus \mathcal{M}(t)$ , la partie non-construite (restant à construire) de  $\mathcal{M}_f$  ;
- l'interface matérielle  $\Gamma_{\mathcal{M}}(t) := \partial\mathcal{M}(t) \cap \partial\mathcal{M}^{nb}(t)$  ;
- pour tout cordon  $\mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}\}$ , sa partition en deux sous-domaines :  $\mathcal{M}_T^b(t)$ , la partie construite de  $\mathcal{M}_T$ , et  $\mathcal{M}_T^{nb}(t) = \mathcal{M}_T \setminus \mathcal{M}_T^b(t)$ , la partie non-construite de  $\mathcal{M}_T$ .

### 2.1.2 Modélisation géométrique

Nous considérons au préalable l'espace affine  $\mathcal{E}$  d'espace vectoriel euclidien associé  $E$  de dimension 3 et le référentiel fixe de l'observateur  $\mathcal{R} \equiv (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , la famille  $(\underline{e}_i)_{i=1,2,3}$  étant une base orthonormée directe. La modélisation géométrique du procédé DED consiste à définir suivant  $\mathcal{R}$ , les positions géométriques idéales, dites positions CAO (Conception Assitée par Ordinateur) (CAD, Computer Aided Design, en anglais), et à chaque instant  $t \in [0, t_f]$  les positions géométriques réelles des points matériels du système  $\mathcal{M}(t)$ . Cette modélisation définit ainsi la cinématique du système au cours du procédé.

Pour cela, par application du principe du placement de corps matériels de Forest et al. [61], on définit :

- Les deux placements  $p_{t_0} : \mathcal{M}_f \rightarrow \Omega_{f_0}$  et  $p_{t_t} : \mathcal{M}_f \rightarrow \Omega_{f_t}, t \in [0, t_f]$  (figure 2.5), applications bijectives qui à tout point matériel  $M$  du système final  $\mathcal{M}_f$ , associent respectivement sa position "idéale", c'est-à-dire celle donnée dans la définition CAO du système à construire, notée  $\underline{X} = p_{t_0}(M)$  et sa position réelle à l'instant  $t$  notée  $\underline{x} = p_{t_t}(M)$ . Les domaines géométriques  $\Omega_{f_0} = p_{t_0}(\mathcal{M}_f)$  et  $\Omega_{f_t} = p_{t_t}(\mathcal{M}_f)$  désignent ainsi respectivement la configuration CAO et la configuration déformée à l'instant  $t$  de  $\mathcal{M}_f$ .
- À chaque instant  $t \in [0, t_f]$ , la transformation géométrique  $\Phi_t = \Phi(\cdot, t) := p_{t_t} \circ p_{t_0}^{-1} : \Omega_{f_0} \rightarrow \Omega_{f_t}$  (figure 2.5) appelée transformation de distorsion qui au vecteur position CAO  $\underline{X} \in \Omega_{f_0}$  du point matériel  $M$  associe son vecteur position réelle à l'instant  $t$ ,  $\underline{x} = \Phi(\underline{X}, t)$ , et qui vérifie la propriété :

$$\forall (\underline{X}, t) \in \Omega_{f_0} \times [0, t_f], \quad J(\underline{X}, t) = \det \underline{F}(\underline{X}, t) > 0, \quad \underline{F}(\underline{X}, t) := \nabla \Phi_t(\underline{X}) = \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{X}}(\underline{X}, t) \quad (2.5)$$

$\underline{F}$  est appelé tenseur gradient de transformation géométrique de  $\Phi_t$

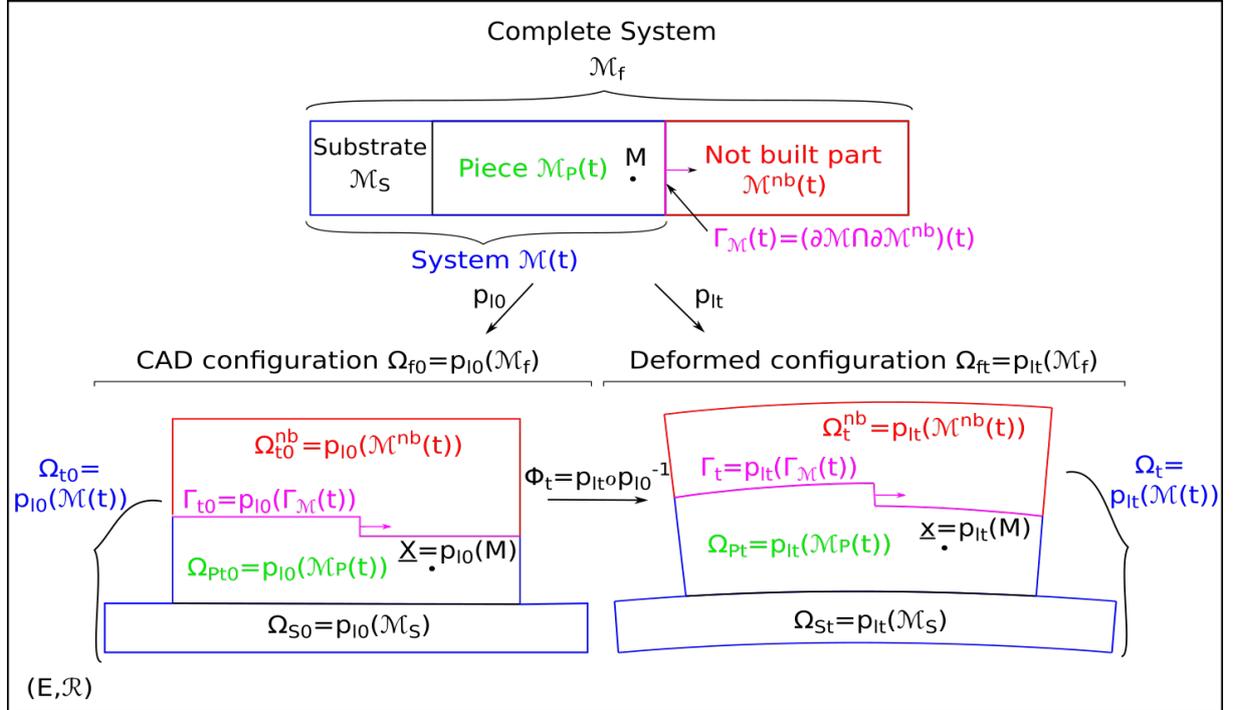


FIGURE 2.5 – Placement du système total  $\mathcal{M}_f$  dans l'espace physique muni du référentiel  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  aux instants 0 et  $t$

Ainsi, les restrictions  $p_{t_0|_{\mathcal{M}(t)}} : \mathcal{M}(t) \rightarrow \Omega_{t_0}$  et  $p_{t_t|_{\mathcal{M}(t)}} : \mathcal{M}(t) \rightarrow \Omega_t$  à l'instant  $t \in [0, t_f]$  des placements respectifs  $p_{t_0}$  et  $p_{t_t}$  au système  $\mathcal{M}(t)$ , et la restriction  $\Phi_t|_{\Omega_{t_0}} : \Omega_{t_0} \rightarrow \Omega_t =$

$p_{lt|\mathcal{M}(t)} \circ p_{l0|\mathcal{M}(t)}^{-1}$  au sous-domaine géométrique  $\Omega_{t0} = p_{l0}(\mathcal{M}(t))$ , appelé domaine géométrique actif de  $\Omega_{f0}$ , déterminent la cinématique effective du procédé. Tandis que les restrictions  $p_{l0|\mathcal{M}^{nb}(t)} : \mathcal{M}^{nb}(t) \rightarrow \Omega_{t0}^{nb}$  et  $p_{lt|\mathcal{M}^{nb}(t)} : \mathcal{M}^{nb}(t) \rightarrow \Omega_t^{nb}$  de  $p_{l0}$  et  $p_{lt}$  à  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , et la restriction  $\Phi_t|\Omega_{t0}^{nb} : \Omega_{t0}^{nb} \rightarrow \Omega_t^{nb} = p_{lt|\mathcal{M}^{nb}(t)} \circ p_{l0|\mathcal{M}^{nb}(t)}^{-1}$  au sous-domaine géométrique  $\Omega_{t0}^{nb} = p_{l0}(\mathcal{M}^{nb}(t))$ , domaine géométrique inactif de  $\Omega_{f0}$ , déterminent la cinématique de positionnement et donc d'initialisation de distorsion de ce domaine. L'interface géométrique  $\Gamma_t = \partial\Omega_t \cap \partial\Omega_t^{nb}$  ( $:= p_{lt}(\Gamma_{\mathcal{M}(t)})$ ) est donc considérée comme frontière d'activation. Nous définissons donc d'autres champs tensoriels caractéristiques de la cinématique du procédé que sont :

- Les champs lagrangiens (définis dans  $\Omega_{f0}$ ) de distorsion  $\underline{U}_f$  et de vitesse  $\underline{V}_f$ , et les champs eulériens<sup>3</sup> (définis dans  $\Omega_{ft}$ ) qui leur correspondent notés respectivement  $\underline{u}_f$  et  $\underline{v}_f$  du système total  $\mathcal{M}_f$ , par :

$$\begin{aligned}
 & \text{Champs lagrangiens :} \\
 & \forall (\underline{X}, t) \in \Omega_{f0} \times [0, t_f], \\
 & \underline{U}_f(\underline{X}, t) = \Phi(\underline{X}, t) - \underline{X}, \quad \underline{V}_f(\underline{X}, t) = \frac{\partial \underline{U}}{\partial t}(\underline{X}, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{X}, t) \quad (2.6) \\
 & \text{Champs eulériens :} \\
 & \forall (\underline{x}, t) \in \Omega_{ft} \times [0, t_f], \\
 & \underline{u}_f(\underline{x}, t) = \underline{U}_f(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), t), \quad \underline{v}_f(\underline{x}, t) = \underline{V}_f(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), t)
 \end{aligned}$$

- Les champs lagrangiens de distorsion  $\underline{U}$  et de vitesse effective  $\underline{V}$ , et les champs eulériens correspondants  $\underline{u}$  et  $\underline{v}$  du système  $\mathcal{M}(t)$  à l'instant  $t \in [0, t_f]$ , par :

$$\begin{aligned}
 & \text{Champs lagrangiens :} \\
 & \underline{U}(\cdot, t) = \underline{U}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t0}}, \quad \underline{V}(\cdot, t) = \underline{V}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t0}} \quad (2.7) \\
 & \text{Champs eulériens :} \\
 & \underline{u}(\cdot, t) = \underline{u}_f(\cdot, t)|_{\Omega_t}, \quad \underline{v}(\cdot, t) = \underline{v}_f(\cdot, t)|_{\Omega_t}
 \end{aligned}$$

- Le champ lagrangien de distorsion  $\underline{U}_n$  et de vitesse de positionnement  $\underline{V}_n$ , et les champs eulériens correspondants  $\underline{u}_n$  et  $\underline{v}_n$  du domaine matériel non construit  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , à l'instant  $t \in [0, t_f]$ , par :

$$\begin{aligned}
 & \text{Champs lagrangiens :} \\
 & \underline{U}_n(\cdot, t) = \underline{U}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t0}^{nb}}, \quad \underline{V}_n(\cdot, t) = \underline{V}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t0}^{nb}} \quad (2.8) \\
 & \text{Champs eulériens :} \\
 & \underline{u}_n(\cdot, t) = \underline{u}_f(\cdot, t)|_{\Omega_t^{nb}}, \quad \underline{v}_n(\cdot, t) = \underline{v}_f(\cdot, t)|_{\Omega_t^{nb}}
 \end{aligned}$$

---

3. L'usage du terme "eulérien" dans le présent contexte de matériau solide est certes abusif, mais toutefois jugé utile car c'est dans le but de mentionner la dépendance spatiale des champs tensoriels en général aux variables d'Euler que sont le temps et les coordonnées dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  du vecteur position réelle  $\underline{x} \in \Omega_{ft}$

- Le champ lagrangien du tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}_f$  du système total  $\mathcal{M}_f$  par :

$$\underline{\underline{E}}_f = \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}^T \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \right), \quad \underline{\underline{I}} = \delta_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \quad (2.9)$$

- Les champs lagrangiens des tenseurs des déformations de Green-Lagrange  $\underline{E}$  du système  $\mathcal{M}(t)$ , et  $\underline{E}_n$  du domaine matériel non construit  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , à l'instant  $t \in [0, t_f]$  par :

$$\underline{E}(\cdot, t) = \underline{E}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}}, \quad \underline{E}_n(\cdot, t) = \underline{E}_f(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} \quad (2.10)$$

- Le champ eulérien du tenseur taux de déformation  $\underline{\dot{\underline{v}}}_f$  de  $\mathcal{M}_f$  par :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{x}, t) \in \Omega_{ft} \times [0, t_f], \quad \underline{\dot{\underline{v}}}_f(\underline{x}, t) &= \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{v}_f + (\nabla \underline{v}_f)^T \right) (\underline{x}, t) \\ \nabla \underline{v}_f(\underline{x}, t) &:= \frac{\partial \underline{v}_f}{\partial \underline{x}}(\underline{x}, t) = \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial t} \left( \Phi_t^{-1}(\underline{x}), t \right) \underline{\underline{F}} \left( \Phi_t^{-1}(\underline{x}), t \right)^{-1} \end{aligned} \quad (2.11)$$

- Les champs eulériens des tenseurs taux de déformation  $\underline{\dot{\underline{v}}}$  de  $\mathcal{M}(t)$ , et  $\underline{\dot{\underline{v}}}_n$  de  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , à l'instant  $t \in [0, t_f]$  par :

$$\underline{\dot{\underline{v}}}(\cdot, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{v} + (\nabla \underline{v})^T \right) (\cdot, t), \quad \underline{\dot{\underline{v}}}_n(\cdot, t) = \frac{1}{2} \left( \nabla \underline{v}_n + (\nabla \underline{v}_n)^T \right) (\cdot, t) \quad (2.12)$$

En particulier, pour chaque cordon  $\mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}\}$ , nous admettrons tout d'abord que sa configuration CAO  $\Omega_{T0}$  ( $:= p_{l0}(\mathcal{M}_T)$ ) correspond à une géométrie de poutre curviligne horizontale, c'est-à-dire contenu dans le plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$  (figure 2.6), principalement caractérisée par :

- la courbe axiale  $\mathcal{C}_{T0}$  dont chaque point  $C$  est repéré par son abscisse curviligne  $s \in [0, L_T]$  ( $L_T$  longueur curviligne de  $\Omega_{T0}$ ), en particulier les points initial  $C_0 = C(0)$  et final  $C_f = C(L_T)$ ;
- la longueur curviligne algébrique  $\widehat{PQ}$  entre deux points quelconques  $P$  et  $Q$  de  $\mathcal{C}_{T0}$  d'abscisses curvilignes respectives  $s_P$  et  $s_Q$ , définie par :

$$\widehat{PQ} = s_Q - s_P \quad (2.13)$$

- le repère local orthonormé direct  $(C(s), \underline{e}_t(s), \underline{e}_n(s), \underline{e}_3(s))$ , dans lequel  $\underline{e}_t(s)$  désigne en  $C(s)$  le vecteur tangent de  $\mathcal{C}_{T0}$  et détermine la direction de de parcours de la source de chaleur et donc la direction de construction de  $\mathcal{M}_T$ , et  $\underline{e}_3(s)$  désigne au même point le vecteur directeur opposé du faisceau laser ;
- la section transversale plane et rectangulaire  $\mathcal{S}(s)$ , pour  $s \in [0, L_T]$ , de largeur et de hauteur  $l_T \times H_T$ , de repère local  $(C(s), \underline{e}_n(s), \underline{e}_3(s))$  et dont la frontière  $\partial \mathcal{S}(s)$  se partitionne en quatre segments de droite :  $(\partial \mathcal{S}(s))^t$  segment supérieur en contact direct et orthogonal avec le faisceau de chaleur,  $(\partial \mathcal{S}(s))^b$  segment droit inférieur

opposé au segment supérieur et en contact direct avec la cordon en dessous ou le substrat,  $(\partial\mathcal{S}(s))^i$  segment latéral du côté du sens de  $\underline{e}_n(s)$ , et  $(\partial\mathcal{S}(s))^o$  segment latéral du côté du sens opposé de  $\underline{e}_n(s)$ ;

- les sections initiale  $\mathcal{S}_0 := \mathcal{S}(0)$  et finale  $\mathcal{S}_f := \mathcal{S}(L_T)$  confondues ou non, de repères respectifs  $(C_0, \underline{e}_{n0}, \underline{e}_3)$  et  $(C_f, \underline{e}_{nf}, \underline{e}_3)$ .

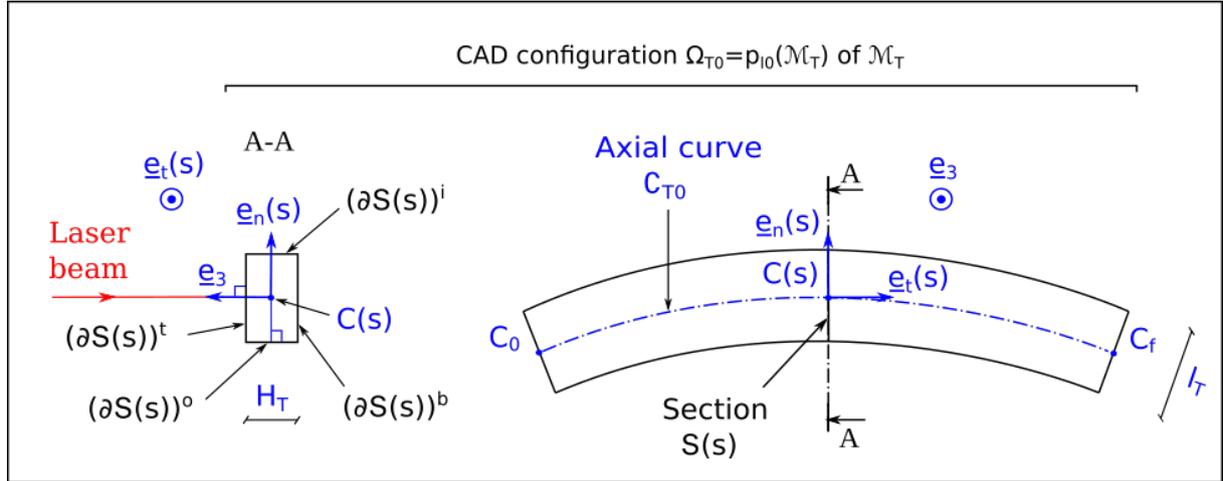


FIGURE 2.6 – Géométrie de poutre curviligne de la configuration CAO  $\Omega_{TI0}$  du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$

Nous définissons ensuite pour tout  $t \in [0, t_f]$  (figure 2.7) :

- le sous-domaine géométrique  $\Omega_{Tt0}^b = p_{t0}(\mathcal{M}_T^b(t))$  appelé domaine géométrique actif de  $\Omega_{T0}$ ;
- le sous-domaine géométrique  $\Omega_{Tt0}^{nb} = p_{t0}(\mathcal{M}_T^{nb}(t))$  appelé domaine géométrique inactif de  $\Omega_{T0}$ ;
- l'interface géométrique  $\Gamma_{Tt0} = \partial\Omega_{Tt0}^b \cap \partial\Omega_{Tt0}^{nb}$  appelée frontière d'activation de  $\Omega_{T0}$ . On admettra dans la suite qu'elle correspond à une section plane transversale de  $\Omega_{T0}$ , c'est-à-dire qu'il existe un unique  $s_t \in [0, L_T]$  tel que  $\Gamma_{Tt0} = \mathcal{S}_T(s_t)$

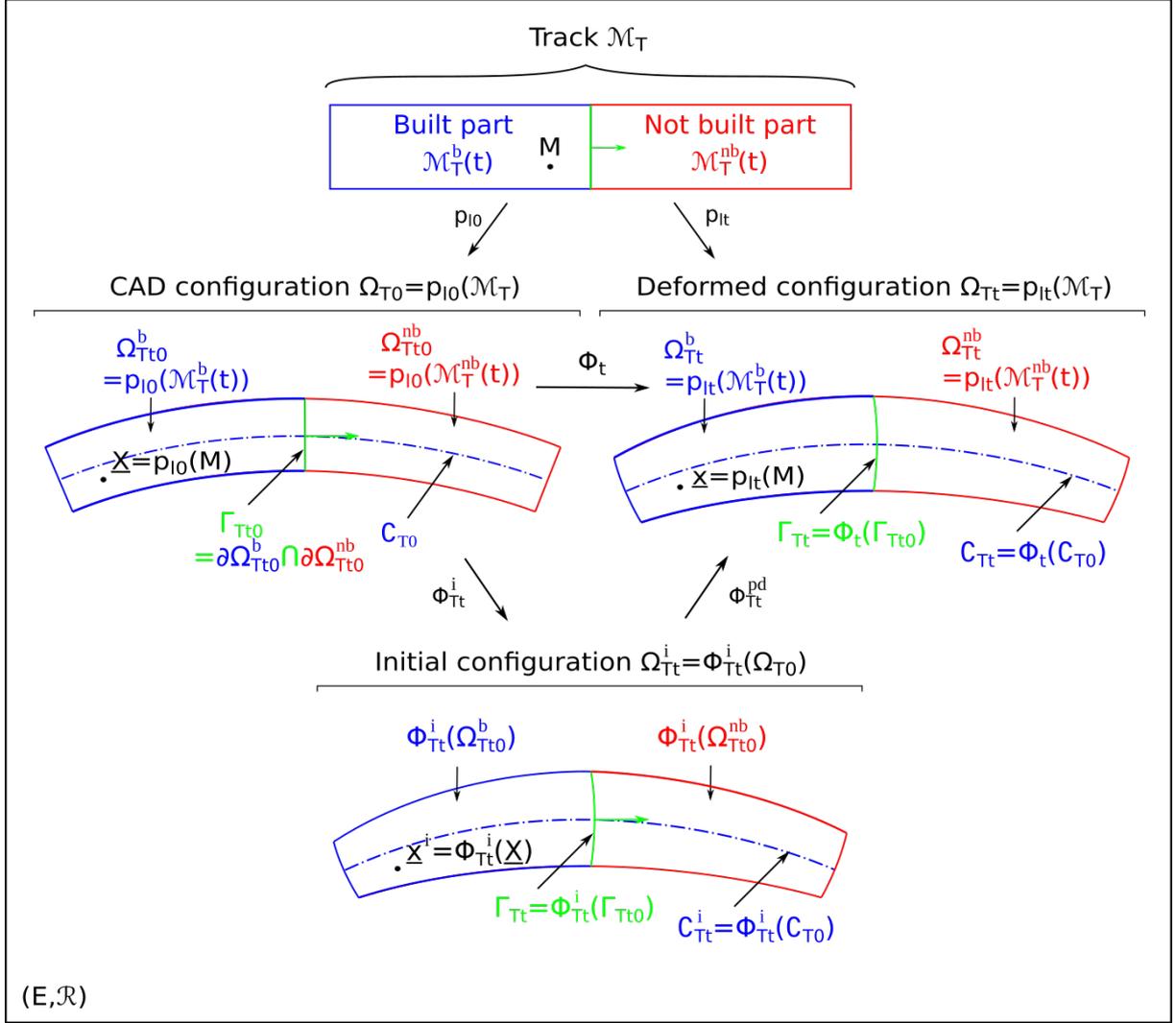


FIGURE 2.7 – Placement du cordon  $\mathcal{M}_T$  dans l'espace physique muni du référentiel  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  aux instants 0 et  $t$

Ainsi, en considérant pour tout vecteur position  $\underline{X} \in \Omega_{T0}$  son instant d'activation  $t_{Ta}(\underline{X})$  c'est-à-dire l'instant de son franchissement par la frontière d'activation par  $\Gamma_{Tt0}$ , correspondant à l'instant du dépôt de point matériel correspondant  $p_{t0}^{-1}(\underline{X}) \in \mathcal{M}_T$ , on définit à tout instant  $t \in [0, t_f]$  les transformations géométriques initiale de distorsion  $\Phi_{Tt}^i : \Omega_{T0} \rightarrow \Omega_{Tt}^i$  et post-dépôt  $\Phi_{Tt}^{pd} : \Omega_{Tt}^i \rightarrow \Omega_{Tt}$  par :

$$\forall \underline{X} \in \Omega_{T0}, \Phi_{Tt}^i(\underline{X}) = \begin{cases} \Phi_t(\underline{X}) & \text{si } t \leq t_{Ta}(\underline{X}) \Leftrightarrow \underline{X} \in \Omega_{Tt0}^{nb} \\ \Phi_{t_{Ta}(\underline{X})}(\underline{X}) & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\forall \underline{X}^i \in \Omega_{Tt}^i, \Phi_{Tt}^{pd}(\underline{X}^i) = \Phi_t(\Phi_{Tt}^{i-1}(\underline{X}^i))$$

Nous pouvons donc observer que, par définition, le champ  $\Phi_{Tt}^i$  permet de déterminer les positions des points matériels de  $\mathcal{M}_T$  à leurs instants de dépôt, tandis que le champ  $\Phi_{Tt}^{pd}$  permet de suivre l'écart géométrique entre ces positions et leurs positions actuelles. De plus  $\Phi_{Tt}^i$  et  $\Phi_{Tt}^{pd}$ , bien qu'étant continus, peuvent néanmoins ne pas être différentiables aux

interfaces géométriques respectives  $\Gamma_{Tt_0}$  et  $\Gamma_{Tt_0}^i := \Phi_{Tt}^i(\Gamma_{Tt_0})$  et leurs gradients (au sens des distributions) respectifs  $\underline{\underline{F}}_T^i(\underline{X}, t)$  et  $\underline{\underline{F}}_T^{pd}(\underline{X}^i, t)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{X} \in \Omega_{T0}, \underline{\underline{F}}_T^i(\underline{X}, t) &= \begin{cases} \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) & \text{si } \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}^{nb} \\ \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t_{Ta}(\underline{X})) & \text{sinon} \end{cases} \\ \forall \underline{X}^i \in \Omega_{Tt}^i, \underline{\underline{F}}_T^{pd}(\underline{X}^i, t) &= \begin{cases} \underline{\underline{1}} & \text{si } \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}^{nb} \\ \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t_{Ta}(\underline{X}))^{-1} & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Nous définissons en plus les champs lagrangiens (définis dans  $\Omega_{T0}$ ) de distorsion initiale  $\underline{U}_T^i$ , de déplacement post-dépôt  $\underline{U}_T^{pd}$ , et les champs eulériens (définis dans  $\Omega_{Tt}$ ) correspondants notés respectivement  $\underline{u}_T^i$  et  $\underline{u}_T^{pd}$  de  $\mathcal{M}_T$ , par :

$$\begin{aligned} &\text{Champs lagrangiens :} \\ &\forall (\underline{X}, t) \in \Omega_{T0} \times [0, t_f], \\ &\underline{U}_T^i(\underline{X}, t) = \Phi_{Tt}^i(\underline{X}) - \underline{X} = \begin{cases} \underline{U}_n(\underline{X}, t) & \text{si } \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}^{nb} \\ \underline{U}_n(\underline{X}, t_{Ta}(\underline{X})) & \text{sinon} \end{cases} \\ &\underline{U}_T^{pd}(\underline{X}, t) = \Phi_t(\underline{X}) - \Phi_{Tt}^i(\underline{X}) = \begin{cases} \underline{0} & \text{si } \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}^{nb} \\ \underline{U}(\underline{X}, t) - \underline{U}(\underline{X}, t_{Ta}(\underline{X})) & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} &\text{Champs eulériens :} \\ &\forall (\underline{x}, t) \in \Omega_{Tt} \times [0, t_f], \\ &\underline{u}_T^i(\underline{x}, t) = \underline{U}_T^i(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), t), \quad \underline{u}_T^{pd}(\underline{x}, t) = \underline{U}_T^{pd}(\Phi_t^{-1}(\underline{x}), t) \end{aligned}$$

Les extensions au système total  $\mathcal{M}_f$  de tous ces champs cinématiques sont données par :

- Les champs tensoriels lagrangiens de transformations initiale  $\underline{\underline{F}}^i$  et post-dépôt  $\underline{\underline{F}}^{pd}$  définis par :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, t_f], \forall \underline{X} \in \Omega_{S0} := p_{l0}(\mathcal{M}_S), \underline{\underline{F}}^i(\underline{X}, t) &= \underline{\underline{1}}, \quad \underline{\underline{F}}^{pd}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t) \\ \forall \mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}\}, \forall \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}, & \\ \underline{\underline{F}}^i(\underline{X}, t) &= \underline{\underline{F}}_T^i(\underline{X}, t), \quad \underline{\underline{F}}^{pd}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{F}}_T^{pd}(\Phi_{Tt}^i(\underline{X}), t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Avec,  $\Omega_{S0}$ , configuration CAO du substrat  $\mathcal{M}_S$  ;

- les champs lagrangiens de distorsion initiale  $\underline{U}_f^i$  et de déplacement post-dépôt  $\underline{U}_f^{pd}$ , et les champs eulériens correspondants notés respectivement  $\underline{u}_f^i$  et  $\underline{u}_f^{pd}$  de  $\mathcal{M}_f$ , par :

$$\begin{aligned}
 & \forall t \in [0, t_f], \\
 & \text{Champs lagrangiens :} \\
 & \quad \forall \underline{X} \in \Omega_{S_0}, \\
 & \quad \underline{U}_f^i(\underline{X}, t) = \underline{0}, \quad \underline{U}_f^{pd}(\underline{X}, t) = \underline{U}(\underline{X}, t) \\
 & \quad \forall \mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{TI}, I = 1, \dots, N\}, \quad \forall \underline{X} \in \Omega_{Tt_0}, \\
 & \quad \underline{U}_f^i(\underline{X}, t) = \underline{U}_T^i(\underline{X}, t), \quad \underline{U}_f^{pd}(\underline{X}, t) = \underline{U}_T^{pd}(\underline{X}, t)
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Champs eulériens :} \\
 & \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{St}, \\
 & \quad \underline{u}_f^i(\underline{x}, t) = \underline{0}, \quad \underline{u}_f^{pd}(\underline{x}, t) = \underline{u}(\underline{x}, t) \\
 & \quad \forall \mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TN}\}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega_{Tt}, \\
 & \quad \underline{u}_f^i(\underline{x}, t) = \underline{u}_T^i(\underline{x}, t), \quad \underline{u}_f^{pd}(\underline{x}, t) = \underline{u}_T^{pd}(\underline{x}, t)
 \end{aligned}$$

Avec,  $\Omega_{St}$ , configuration réelle du substrat  $\mathcal{M}_S$  à l'instant  $t \in [0, t_f]$ ;

Ces extensions à  $\mathcal{M}_f$  vérifient les propriétés suivantes :

— Pour  $\underline{F}^i$  et  $\underline{F}^{pd}$  :

$$\begin{aligned}
 & \underline{F} = \underline{F}^{pd} \underline{F}^i, \quad \forall t \in [0, t_f], \quad \underline{F}^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} = \underline{1}, \quad \frac{\partial \underline{F}^i}{\partial t}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}} = \underline{0} \\
 & \underline{E}_f = \underline{F}^{iT} \underline{E}_f^{pd} \underline{F}^i + \underline{E}_f^i, \quad \underline{E}_f^i = \frac{1}{2} (\underline{F}^{iT} \underline{F}^i - \underline{1}), \quad \underline{E}_f^{pd} = \frac{1}{2} (\underline{F}^{pdT} \underline{F}^{pd} - \underline{1}) \\
 & \quad \forall t \in [0, t_f], \\
 & \quad \underline{E}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} = \underline{E}_n(\cdot, t), \quad \underline{E}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} = \underline{0} \\
 & \quad \underline{E}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_{S_0}} = \underline{0}, \quad \underline{E}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{S_0}} = \underline{E}(\cdot, t)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Avec  $\underline{0}$ , tenseur nul d'ordre 2,  $\underline{E}_f^i$  et  $\underline{E}_f^{pd}$ , tenseur des déformations de Green-Lagrange initial et post-dépôts;

— pour les champs lagrangiens  $\underline{U}_f^i$  et  $\underline{U}_f^{pd}$  :

$$\begin{aligned}
 & \underline{U}_f^{pd} = \underline{U}_f - \underline{U}_f^i \\
 & \quad \forall t \in [0, t_f], \\
 & \quad \underline{U}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} = \underline{U}_n(\cdot, t), \quad \frac{\partial \underline{U}_f^i}{\partial t}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}} = \underline{0}, \quad \underline{U}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_{S_0}} = \underline{0}, \\
 & \quad \underline{U}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}^{nb}} = \underline{0}, \quad \frac{\partial \underline{U}_f^{pd}}{\partial t}(\cdot, t)|_{\Omega_{t_0}} = \underline{V}(\cdot, t), \quad \underline{U}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{S_0}} = \underline{U}(\cdot, t)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

— pour les champs eulériens  $\underline{u}_f^i$  et  $\underline{u}_f^{pd}$  :

$$\begin{aligned}
 & \underline{u}_f^{pd} = \underline{u}_f - \underline{u}_f^i \\
 & \quad \forall t \in [0, t_f], \\
 & \quad \underline{u}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_t^{nb}} = \underline{u}_n(\cdot, t), \quad \dot{\underline{u}}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_t} = \underline{0}, \quad \underline{u}_f^i(\cdot, t)|_{\Omega_{St}} = \underline{0}, \\
 & \quad \underline{u}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_t^{nb}} = \underline{0}, \quad \dot{\underline{u}}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_t} = \underline{v}(\cdot, t), \quad \underline{u}_f^{pd}(\cdot, t)|_{\Omega_{St}} = \underline{u}(\cdot, t)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Avec  $\underline{\dot{u}}_f^i$  et  $\underline{\dot{u}}_f^{pd}$ , dérivées particulières des champs respectifs  $\underline{u}_f^i$  et  $\underline{u}_f^{pd}$ .

## 2.2 Modélisation thermomécanique du procédé DED

Le système final  $\mathcal{M}_f$  étant construit progressivement, cordon par cordon, et ce, à des intervalles de temps successifs, nous nous intéressons donc, dans cette partie, à la construction d'un cordon quelconque  $\mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{T_1}, \dots, \mathcal{M}_{T_N}\}$  pendant l'intervalle de temps  $[t_{T_0}, t_{T_f}] \in \{[t_0, t_1], \dots, [t_{N-1}, t_N]\}$ .

Pour le système  $\mathcal{M}(t)$  en évolution, il s'agit de présenter :

- les équations de conservation découlant de l'application des lois de la mécanique newtonienne et des principes de la thermodynamique appliqués à des systèmes thermodynamiques ouverts ;
- les équations constitutives, c'est-à-dire les lois de comportement thermique et thermomécanique ;
- les formulations mathématiques théoriques des problèmes thermique et mécanique qui en découlent.

Et pour le domaine non construit  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , il s'agit de présenter :

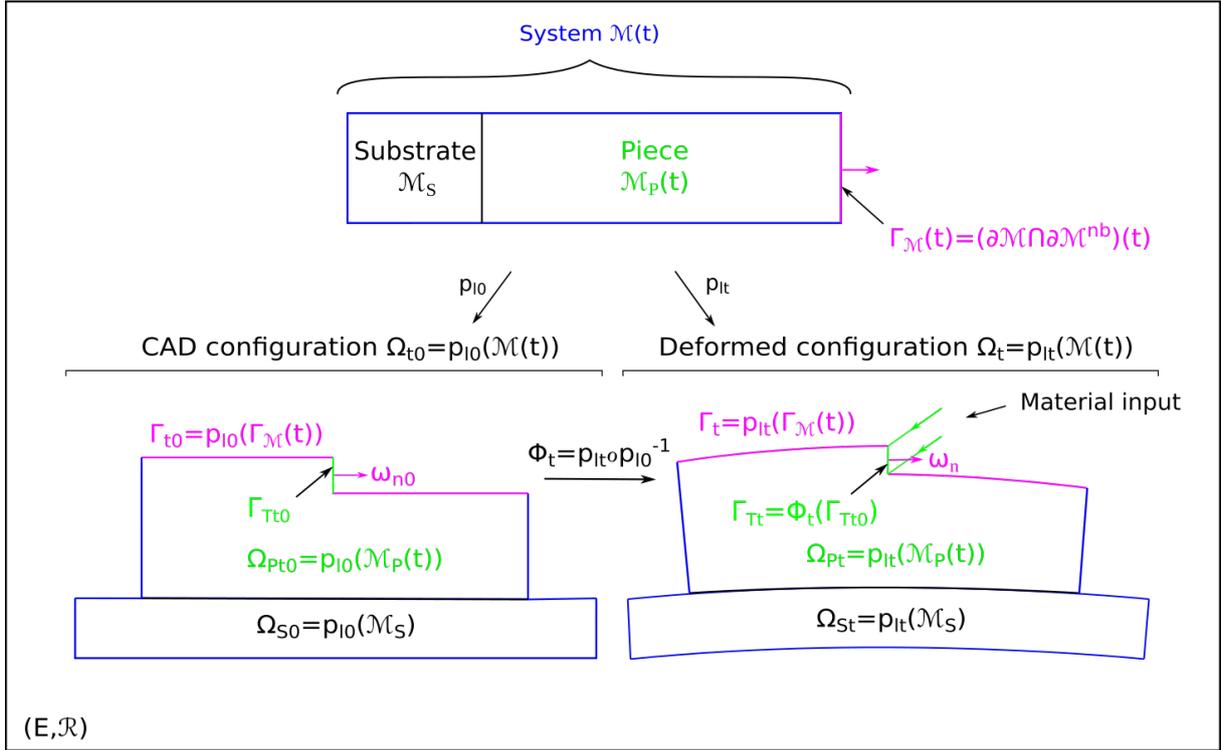
- la formulation mathématique théorique du problème cinématique de positionnement sous forme de problème d'optimisation

### 2.2.1 Équations de conservation

Il s'agit des équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'inégalité de l'entropie sera également présentée. À tout instant  $t \in [t_{T_0}, t_{T_f}]$ , nous adoptons une description eulérienne, c'est-à-dire pour toute grandeur tensorielle lagrangienne  $B(\underline{X}, t)$  définie dans la configuration de référence  $\Omega_{t_0}$ , nous travaillons avec la grandeur tensorielle eulérienne correspondante  $b(\underline{x}, t)$  définie dans la configuration déformée  $\Omega_t$  ; la dérivée particulière de cette dernière, notée  $\dot{b}(\underline{x}, t)$ , étant définie par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x} \in \Omega_t, \dot{b}(\underline{x}, t) &:= \left( \frac{\partial b}{\partial t} + \nabla b \cdot \underline{v} \right) (\underline{x}, t) \\ &= \dot{B}(\underline{X}, t) := \frac{\partial B}{\partial t}(\underline{X}, t), \quad \underline{X} = \Phi_t^{-1}(\underline{x}) \end{aligned} \tag{2.22}$$

Par ailleurs, nous appliquons la théorie de la thermomécanique des milieux continus ouverts développée par Fer [62]. Cette application, nécessite de considérer  $\Gamma_{Tt} := \Phi_t(\Gamma_{Tt_0})$ , l'interface d'activation de  $\Omega_{Tt}$  qui n'est autre que la partie de l'interface géométrique instantané  $\Gamma_t$  par où pénètre la matière (figure 2.8), c'est-à-dire le lieu de  $\Gamma_t$  où la vitesse normale de déplacement diffère de celle des points matériels.


 FIGURE 2.8 – Système  $\mathcal{M}(t)$  en construction

Pour chacune des équations de conservation, nous présentons la forme intégrale puis la forme locale à laquelle s'ajoutent les équations aux frontières, en particulier les équations d'interface que sont les équations de Rankine-Hugoniot [61, 62]. Pour ces dernières, nous admettons, que la matière pénétrante par  $\Gamma_{Tt}$ , n'étant rien d'autre que la partie non construite de  $\mathcal{M}_T$ , présente une distribution uniforme de l'ensemble de ces propriétés thermiques et mécaniques, en particulier la nullité totale du flux de chaleur et des contraintes mécaniques.

### Équation de conservation de la masse

La forme intégrale est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho = - \int_{\Gamma_{Tt}} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \quad (2.23)$$

Avec,  $\rho$  masse volumique,  $\underline{n}$  normale unitaire sortante de  $\partial\Omega_t$  et  $\omega_n$  vitesse normale de propagation de  $\Gamma_{Tt}$ .

Sous forme locale, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \text{ dans } \Omega_t \\ \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) = \rho_\infty (\underline{v}_\infty \cdot \underline{n} - \omega_n) \text{ sur } \Gamma_{Tt} \end{cases} \quad (2.24)$$

Avec,  $\rho_\infty$  masse volumique,  $\underline{v}_\infty$  vitesse moyenne de la matière pénétrante.

### Équation de conservation de la quantité de mouvement

La forme intégrale, par application de la deuxième loi de Newton, est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \underline{v} = \int_{\Omega_t} \underline{f}_e + \int_{\partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt}} \underline{t}_e - \int_{\Gamma_{Tt}} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \quad (2.25)$$

Avec,  $\underline{a} := \dot{\underline{v}} = \frac{d\underline{v}}{dt}$  vecteur accélération,  $\underline{f}_e$  vecteur force volumique externe,  $\underline{t}_e$  vecteur force surfacique externe sur  $\partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt}$ .

Sous forme locale, nous obtenons :

$$\begin{cases} \rho \underline{a} = \nabla \cdot \underline{\sigma} + \underline{f}_e \text{ dans } \Omega_t \\ \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \begin{cases} \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) (\underline{v} - \underline{v}_\infty) \text{ sur } \Gamma_{Tt} \\ \underline{t}_e \text{ sur } \partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt} \end{cases} \end{cases} \quad (2.26)$$

Avec,  $\underline{\sigma}$  tenseur (symétrique) des contraintes de Cauchy.

Par la suite, les termes d'inertie seront ignorés du fait du contexte des présents travaux, donnant ainsi lieu à des équations de quasi-statique.

### Équation de conservation de l'énergie

La forme intégrale, par application du théorème de l'énergie cinétique et du premier principe de la thermodynamique, est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) &= \int_{\Omega_t} \underline{f}_e \cdot \underline{v} + \int_{\partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt}} \underline{t}_e \cdot \underline{v} + \int_{\Omega_t} \dot{Q} + \int_{\partial\Omega_t \setminus \Sigma_t} q_e \\ &\quad - \int_{\Gamma_{Tt}} \rho \left( e + \frac{v^2}{2} \right) (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Avec,  $e$  énergie interne massique,  $\dot{Q}$  puissance volumique de chaleur,  $q_e$  flux de chaleur externe.

Sous forme locale, nous obtenons :

$$\begin{cases} \rho \dot{e} = \underline{\sigma} : \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}) - \nabla \cdot \underline{q} + \dot{Q} \text{ dans } \Omega_t \\ (\underline{q} - \underline{v} \cdot \underline{\sigma}) \cdot \underline{n} = -\rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \left( \left( e + \frac{v^2}{2} \right) - \left( e_\infty + \frac{v_\infty^2}{2} \right) \right) \text{ sur } \Gamma_{Tt} \\ -\underline{q} \cdot \underline{n} = q_e \text{ sur } \partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt} \end{cases} \quad (2.28)$$

Avec,  $e_\infty$  énergie interne massique de la matière pénétrante,  $\underline{q}$  vecteur flux de chaleur.

### Inégalité de l'entropie

La forme intégrale, par application du deuxième principe de la thermodynamique, est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho s \geq \int_{\Omega_t} \frac{\dot{Q}}{T} + \int_{\partial\Omega_t \setminus \Gamma_{Tt}} \frac{q_e}{T} - \int_{\Gamma_{Tt}} \rho s (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \quad (2.29)$$

Avec,  $s$  entropie massique.

Sous forme locale, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_t \\ \rho \dot{s} + \nabla \cdot \left( \frac{\underline{q}}{T} \right) - \frac{\dot{Q}}{T} \geq 0 \\ \Rightarrow d := \rho T \dot{s} + T \nabla \cdot \left( \frac{\underline{q}}{T} \right) - \dot{Q} \\ = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}) - \rho (\dot{\psi} + \dot{T}s) - \underline{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \geq 0 \\ \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) (s - s_\infty) + \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} \geq 0 \text{ sur } \Gamma_{Tt} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

Avec,  $s_\infty$  entropie massique de la matière pénétrante,  $d$ , dissipation volumique,  $\psi := e - Ts$ , énergie libre massique. La grandeur  $d$  admet la décomposition suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d = d^{(int)} + d^{(th)} \\ d^{(int)} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}) - \rho (\dot{\psi} + \dot{T}s), \quad d^{(th)} = -\underline{q} \cdot \frac{\nabla T}{T} \end{array} \right. \quad (2.31)$$

$d^{(int)}$  et  $d^{(th)}$  sont respectivement appelées dissipation intrinsèque et dissipation thermique et par la suite nous considérerons qu'elles sont toutes les deux positives.

Les équations de conservation faisant intervenir plus de grandeurs physiques que d'équations, celles-ci, afin d'obtenir un problème thermomécanique bien posé, doivent donc être complétées par des équations complémentaires appelées équations constitutives, c'est-à-dire les lois de comportement.

## 2.2.2 Les lois de comportement

Il s'agit essentiellement de la loi de comportement thermique et de la loi de comportement thermomécanique adoptées pour le système  $\mathcal{M}(t)$  que nous considérons, en première approche, comme un matériau isotrope.

### Loi de comportement thermique

La loi de comportement thermique, établissant la relation entre le vecteur flux de chaleur  $\underline{q}$  et le gradient de température  $T$ , dans le respect du principe de la positivité de la dissipation thermique  $d^{(int)}$ , pour un matériau isotrope est donnée par la loi de Fourier :

$$\underline{q} = -\kappa(T) \nabla T \text{ dans } \Omega_t \quad (2.32)$$

Avec,  $\kappa(T) > 0$ , conductivité thermique.

### Loi de comportement thermomécanique

De par le principe du procédé DED, la plage de variation de la température est très importante, car s'étendant de la température ambiante jusqu'à la température de fusion, voire plus. Il est démontré expérimentalement que les métaux, pour la plupart, obéissent, à une loi de comportement élasto-plastique à basse température, une loi élasto-viscoplastique à haute température avoisinant éventuellement la température de solidus notée  $T_s$ , et une loi de fluide newtonien de Stokes au delà de la température de liquidus notée  $T_l$ . Une loi viscoplastique entre les températures  $T_s$  et  $T_l$  peut cependant être adoptée afin d'assurer le passage solide à liquide et inversement [63]. Dans le présent document, en raison de l'approche macroscopique adoptée de notre modélisation thermomécanique, laquelle nous dispense des détails de modélisation d'écoulement de fluide dans la zone fondue, nous proposons d'adopter la loi de comportement d'élasto-viscoplasticité à écrouissage isotrope et cinématique [60, 64]. Pour pouvoir développer cette loi de comportement, on considère au préalable, partant des propriétés 2.19, la décomposition multiplicative de la transformation géométrique de distorsion  $\underline{\underline{F}}$  en trois composantes (figure 2.9) :

- la transformation initiale incompressible  $\underline{\underline{F}}^i$ , encore appelée transformation de positionnement, transformant un élément de volume  $dV$  avoisinant le point  $\underline{\underline{X}}$  de la configuration idéale CAO  $\Omega_{t_0}$  en un élément de volume  $dV^i$  de la configuration de référence ;
- la transformation viscoplastique incompressible  $\underline{\underline{F}}^{vp}$  transformant l'élément de volume  $dV^i$  en  $dV^r$  de la configuration intermédiaire dite relâchée ;
- la transformation élastique  $\underline{\underline{F}}^e$  transformant  $dV^r$  en  $dv$  de  $\Omega_t$ .

Nous obtenons donc l'expression :

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{F}}^{pd} \underline{\underline{F}}^i, \quad \underline{\underline{F}}^{pd} = \underline{\underline{F}}^e \underline{\underline{F}}^{vp}, \quad (2.33)$$

$$\det(\underline{\underline{F}}^i) = \det(\underline{\underline{F}}^{vp}) = 1, \quad \det(\underline{\underline{F}}^{pd}) = \det(\underline{\underline{F}}^e) = J$$

Nous admettrons dans la suite l'hypothèse de petites perturbations post-dépôts, c'est-à-

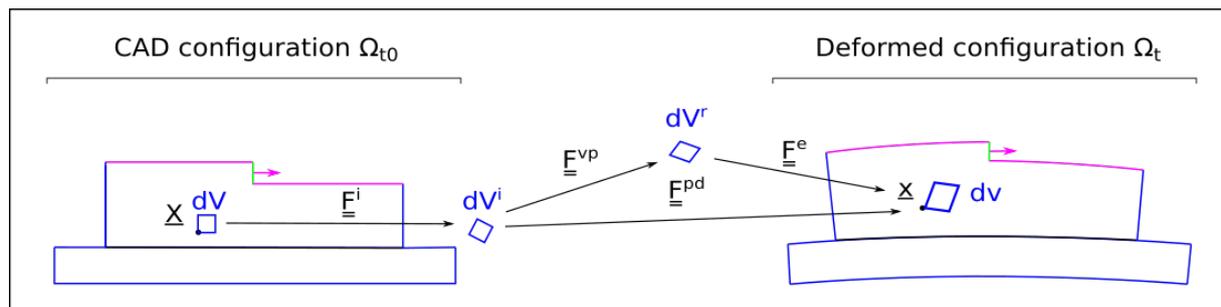


FIGURE 2.9 – Décomposition de la transformation géométrique  $\underline{\underline{F}}$

dire que les tenseurs  $\underline{\underline{F}}^{pd}$ ,  $\underline{\underline{F}}^{vp}$  et  $\underline{\underline{F}}^e$  vérifient,

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F}}^{pd} &\approx \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{pd} + \underline{\underline{\omega}}^{pd}, \quad \underline{\underline{F}}^{vp} \approx \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}, \quad \underline{\underline{F}}^e \approx \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\omega}}^e \\ &\|\underline{\underline{\varepsilon}}^{pd}\|, \|\underline{\underline{\omega}}^{pd}\|, \|\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}\|, \|\underline{\underline{\varepsilon}}^e\|, \|\underline{\underline{\omega}}^e\| \ll 1 \end{aligned} \quad (2.34)$$

avec  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{pd} := \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp} + \underline{\underline{\varepsilon}}^e$ ,  $\underline{\underline{\varepsilon}}^e, \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ , tenseurs symétriques désignant respectivement les tenseurs des déformations infinitésimales post-dépôts, élastiques et visco-plastiques, et  $\underline{\underline{\omega}}^{pd}, \underline{\underline{\omega}}^e = \underline{\underline{\omega}}^{pd}$ , tenseurs anti-symétriques désignant respectivement les tenseurs des rotations infinitésimales post-dépôts et élastiques.

Les tenseurs des déformations de Green-Lagrange  $\underline{\underline{E}}$ , et des taux de déformation  $\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v)$  admettent donc les décompositions approximatives données par :

$$\underline{\underline{E}} \approx \underline{\underline{F}}^{iT} \underline{\underline{\varepsilon}}^{pd} \underline{\underline{F}}^i + \underline{\underline{E}}^i, \quad \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(v) \approx \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{pd} \quad (2.35)$$

En plus des différentes composantes de  $\underline{\underline{F}}$ , nous considérerons d'autres variables supplémentaires, que sont la variable interne d'écouissage isotrope  $\bar{\varepsilon}$  ainsi que la variable d'écouissage associée  $\chi_{\bar{\varepsilon}}$ , et les  $N_c$  variables internes tensorielles d'écouissage cinématique  $\underline{\underline{\alpha}}_i, i = 1, \dots, N_c$ , ainsi que leurs variables d'écouissage associées respectives  $\underline{\underline{X}}_i, i = 1, \dots, N_c$ .

La loi de comportement à adopter correspondant à un matériau standard, nous considérerons donc ces trois principales fonctions permettant d'établir des relations entre des variables d'état :

— la fonction d'énergie libre volumique  $\rho_0 \psi \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \bar{\varepsilon}, (\underline{\underline{\alpha}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, T \right)$  définie par :

$$\begin{aligned} \rho_0 \psi \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^e, \bar{\varepsilon}, (\underline{\underline{\alpha}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, T \right) &= \rho_0 \psi^e \left( \underline{\underline{\varepsilon}}^e, T \right) + \int_0^{\bar{\varepsilon}} R_{\bar{\varepsilon}}(T, u) du \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c} \frac{C_i(T)}{3} \underline{\underline{\alpha}}_i : \underline{\underline{\alpha}}_i \end{aligned} \quad (2.36)$$

Avec  $\rho_0$ , masse volumique initiale,  $R_{\bar{\varepsilon}} > 0, C_i > 0, i = 1, \dots, N_c$ .

— La fonction de charge  $f(\underline{\underline{\sigma}}, (\underline{\underline{X}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, (\underline{\underline{\alpha}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, \chi_{\bar{\varepsilon}}, T)$  définie par :

$$\begin{aligned} f(\underline{\underline{\sigma}}, (\underline{\underline{X}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, (\underline{\underline{\alpha}}_i)_{i=1, \dots, N_c}, \chi_{\bar{\varepsilon}}, T) &= \bar{\sigma} - \sigma_Y(T) + \chi_{\bar{\varepsilon}} \\ + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{3}{4} \frac{\gamma_i}{C_i} \left( \underline{\underline{X}}_i : \underline{\underline{X}}_i - \frac{4}{9} C_i^2 \underline{\underline{\alpha}}_i : \underline{\underline{\alpha}}_i \right) &\leq 0, \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}) : (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}})} \end{aligned} \quad (2.37)$$

Avec  $\bar{\sigma}$  contrainte équivalente de von-Mises,  $\underline{\underline{s}} := \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}}$  composante déviatorique

de  $\underline{\underline{\sigma}}$ ,  $\underline{\underline{X}} := \sum_{i=1}^{N_c} \underline{\underline{X}}_i$  tenseur d'écouissage cinématique,  $\gamma_i > 0, i = 1, \dots, N_c$ .

Il sera montré par la suite que  $f$  ne dépend que  $\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}$  et  $\chi_{\bar{\varepsilon}}$ .

— Le potentiel dual de dissipation  $\varphi^* \left( \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{X}}, \chi_{\bar{\varepsilon}}, T \right)$  défini par :

$$\begin{aligned} \varphi^* (\underline{\sigma}, \underline{X}, \chi_{\bar{\varepsilon}}, T) &= g ([f(\underline{\sigma}, \underline{X}, \chi_{\bar{\varepsilon}})]_+, T) \\ g ([f(\underline{\sigma}, \underline{X}, \chi_{\bar{\varepsilon}})]_+, T) &= \frac{\sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp}}{1 + 1/m(T)} \left[ \frac{f(\underline{\sigma}, \underline{X}, \chi_{\bar{\varepsilon}})}{\sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp}} \right]_+^{1+1/m(T)} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Avec,  $m(T) \in [0, 1]$  sensibilité viscoplastique,  $K_{vp} > 0$  consistance viscoplastique.

La loi de comportement élasto-viscoplastique adoptée est ainsi donnée par l'ensemble des équations suivantes dites :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Lois d'état :} \\ \underline{\sigma} = \frac{\partial \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^e}, \quad s = -\frac{\partial \psi}{\partial T}, \\ \chi_{\bar{\varepsilon}} = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \bar{\varepsilon}} = -R_{\bar{\varepsilon}}, \\ \underline{X}_i = \frac{\partial \rho_0 \psi}{\partial \underline{\alpha}_i} = \frac{2}{3} C_i(T) \underline{\alpha}_i, \quad i = 1, \dots, N_c \\ \text{Lois complémentaires :} \\ \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} = g'([f]_+) \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} = \frac{3}{2} \left[ \frac{\bar{\sigma} - \sigma_Y(T) + \chi_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon})}{\sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp}(T)} \right]_+^{1/m(T)} \frac{\underline{s} - \underline{X}}{\bar{\sigma}} = \dot{\lambda} (\underline{s} - \underline{X}) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} = g'([f]_+) \frac{\partial f}{\partial \chi_{\bar{\varepsilon}}} = \left[ \frac{\bar{\sigma} - \sigma_Y(T) + \chi_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon})}{\sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp}(T)} \right]_+^{1/m(T)} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} : \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}} \\ \text{Pour } i = 1, \dots, N_c \\ \underline{\dot{\alpha}}_i = -g'([f]_+) \frac{\partial f}{\partial \underline{X}_i} = \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} - \frac{3}{2} \frac{\gamma_i}{C_i} \underline{X}_i \dot{\bar{\varepsilon}} = \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} - \gamma_i \underline{\alpha}_i \dot{\bar{\varepsilon}} \\ \text{Dissipation intrinsèque} \\ \Rightarrow d^{int} = \left( \sigma_Y(T) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{3}{2} \frac{\gamma_i}{C_i} \underline{X}_i : \underline{X}_i + \sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp} \dot{\bar{\varepsilon}}^{m(T)} \right) \dot{\bar{\varepsilon}} \end{array} \right. \quad (2.39)$$

La formulation hypoélastique de la loi d'état mécanique de 2.39 nous donne :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{\sigma}}(\underline{\varepsilon}^e, T) &= \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^{e2}}(\underline{\varepsilon}^e, T) : \underline{\dot{\varepsilon}}^e + \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^e \partial T}(\underline{\varepsilon}^e, T) \dot{T} \\ &= \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^{e2}}(\underline{\varepsilon}^e, T) : (\underline{\dot{\varepsilon}}^e - \underline{P}(\underline{\varepsilon}^e, T) \dot{T}), \quad \underline{P} := -\frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^{e2}}^{-1} : \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^e \partial T} \\ &\approx \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^{e2}}(T) : (\underline{\dot{\varepsilon}}^e - \underline{P}(T) \dot{T}), \quad \text{car } \|\underline{\varepsilon}^e\| \ll 1 \\ \underline{\dot{\sigma}}(\underline{\varepsilon}^e, T) &\approx \underline{\Lambda}(T) (\underline{\dot{\varepsilon}}^e - \underline{P}(T) \dot{T}) \end{aligned} \quad (2.40)$$

Avec,  $\underline{\Lambda}(T) := \frac{\partial^2 \rho_0 \psi_{\underline{\varepsilon}^e}}{\partial \underline{\varepsilon}^{e2}}(T)$  tenseur des modules d'élasticité,  $\underline{P}(T)$  tenseur des dilatations thermiques. L'isotropie de la matière nous permet d'obtenir des formes simplifiées de ces tenseurs :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Lambda}}(T) &= 2\mu(T)\underline{\underline{J}} + 3\chi(T)\underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{1}} - \underline{\underline{K}}, \quad \underline{\underline{K}} = \frac{1}{3}\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}} \\ \underline{\underline{P}}(T) &= \alpha(T)\underline{\underline{1}}\end{aligned}\quad (2.41)$$

Avec,  $\mu(T)$  module de cisaillement,  $\chi(T)$  module de compression,  $\alpha(T)$  coefficient de dilatation thermique,  $\underline{\underline{1}} := \delta_{ik}\delta_{jl}\underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \otimes \underline{e}_k \otimes \underline{e}_l$ , désignant le tenseur identité d'ordre 4, et  $\underline{\underline{J}}, \underline{\underline{K}}$  projecteur d'ordre 4 qui à tout tenseur symétrique d'ordre 2  $\underline{\underline{A}}$  font correspondre respectivement les composantes sphérique  $\underline{\underline{K}} : \underline{\underline{A}} = \frac{tr \underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}}$  et déviatorique  $\underline{\underline{J}} : \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}} - \frac{tr \underline{\underline{A}}}{3}\underline{\underline{1}}$ .

Par application de ces deux opérateurs au tenseur des contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$ , au tenseur taux de déformation  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v)$  et à ses composantes, dans les équations 2.35, 2.39 et 2.40 nous obtenons :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\dot{s}}} &= 2\mu(T)\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e = 2\mu(T)\left(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v) - \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{vp}\right) = 2\mu(T)\left(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v) - \dot{\lambda}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}})\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\right)\right) \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{\dot{s}}} + 2\mu(T)\dot{\lambda}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}})\left(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{X}}\right) &= 2\mu(T)\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v), \quad \underline{\underline{X}} = \sum_{i=1}^{N_c} \underline{\underline{X}}_i \\ \dot{\lambda}(\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}) &= \frac{3\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}}{2\bar{\sigma}}, \quad \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} = \left[ \frac{\bar{\sigma} - \sigma_Y(T) + \chi_{\bar{\epsilon}}(\bar{\epsilon})}{\sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp}(T)} \right]_+^{1/m(T)} \\ \text{Pour } i &= 1, \dots, N_c \\ \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i &= \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^{vp} - \gamma_i \underline{\underline{\alpha}}_i \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}, \quad \underline{\underline{X}}_i = \frac{2}{3} C_i \underline{\underline{\alpha}}_i \\ -\nabla \cdot \underline{v} - \frac{\dot{p}}{\chi(T)} + 3\alpha(T)\dot{T} &= 0\end{aligned}\quad (2.42)$$

Avec,  $p := -\frac{1}{3}tr \underline{\underline{\sigma}}$ , désignant la pression,  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v)$  et  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e$ , composantes déviatoriques respectives de  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}(v)$  et  $\underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e$ .

Par ailleurs, la loi d'état entropique de 2.39 de par l'isotropie du matériau nous donne :

$$\begin{aligned}\dot{s} &= -\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \dot{T} - \frac{\partial^2 \psi_{\underline{\underline{\epsilon}}^e}}{\partial T \partial \underline{\underline{\epsilon}}^e} : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{\epsilon}}} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial T \partial \underline{\underline{\alpha}}_i} : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i \\ &\approx \frac{1}{T} c_p \dot{T} + \frac{1}{\rho_0} \underline{\underline{\Lambda}} : \underline{\underline{P}}(T) : \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}}}{\partial T} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \frac{1}{\rho_0} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C'_i(T) \underline{\underline{\alpha}}_i : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i, \quad c_p := -T \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \\ \dot{s} &\approx \frac{1}{T} c_p(T) \dot{T} + \frac{1}{\rho_0} \times 3\chi(T) \alpha(T) tr \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + \rho_0^{-1} \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}}}{\partial T} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \rho_0^{-1} \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C'_i(T) \underline{\underline{\alpha}}_i : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i \\ \Rightarrow \rho_0 T \dot{s} &\approx \rho_0 c_p \dot{T} + 3\chi(T) \alpha(T) tr \underline{\underline{\dot{\epsilon}}}^e + T \frac{\partial R_{\bar{\epsilon}}}{\partial T} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C'_i(T) \underline{\underline{\alpha}}_i : \underline{\underline{\dot{\alpha}}}_i\end{aligned}\quad (2.43)$$

Où  $c_p(T)$  désigne la chaleur massique.

Les équations du second principe de la thermodynamique 2.30 deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_t \\ \rho T \dot{s} + \nabla \cdot \underline{q} - \dot{Q} = d^{int} \\ \Leftrightarrow \rho c_p \dot{T} + J^{-1} \left( 3\chi \alpha tr \underline{\underline{\varepsilon}}^e + T \frac{\partial R_{\underline{\underline{\varepsilon}}}}{\partial T} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C'_i(T) \underline{\underline{\alpha}}_i : \dot{\underline{\underline{\alpha}}}_i \right) + \nabla \cdot \underline{q} - \dot{Q} \\ = \left( \sigma_Y(T) + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{3}{2} \frac{\gamma_i}{C_i} \underline{\underline{X}}_i : \underline{\underline{X}}_i + \sqrt{3}^{m(T)+1} K_{vp} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{m(T)} \right) \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} \\ \text{Sur } \Gamma_{Tt} \\ \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) (s - s_\infty) + \frac{\underline{q} \cdot \underline{n}}{T} = 0 \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Dans la suite de ce rapport, pour raison de simplicité, les termes de couplages thermomécaniques de l'équation entropique seront négligés. Ainsi, on considérera que l'entropie  $s$  ne dépend que de la température. Ainsi les équations 2.32, 2.43 et 2.44 résultent en :

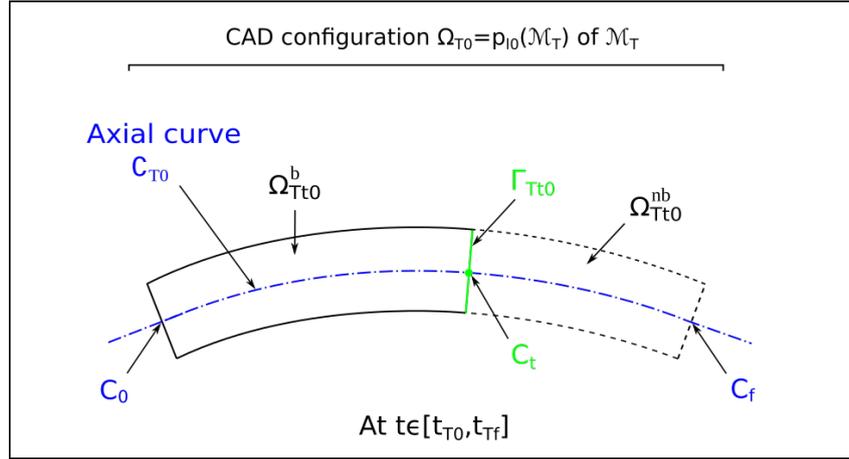
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_t \\ \rho c_p \dot{T} + \nabla \cdot \underline{q} - \dot{Q} = 0, \quad \underline{q} = -\kappa(T) \nabla T, \quad s'(T) = T^{-1} c_p(T) \\ \text{Sur } \Gamma_{Tt} \\ -\underline{q} \cdot \underline{n} = \rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) (s(T) - s(T_\infty)), \quad s_\infty = s(T_\infty) \end{array} \right. \quad (2.45)$$

Par ailleurs, du fait de l'état de poudre de l'ensemble des particules matérielles ajoutées au système  $\mathcal{M}$  lors de la construction du cordon  $\mathcal{M}_T$ , il serait judicieux d'en tenir compte en appliquant dans la zone de chauffage, qui sera décrite dans la partie suivante, les propriétés thermomécaniques minimales (du solidus). Cela consiste à remplacer les coefficients  $\mu(T)$ ,  $\chi(T)$ ,  $K_{vp}(T)$  et  $m(T)$  respectivement par  $\mu(T_s)$ ,  $\chi(T_s)$ ,  $K_{vp}(T_s)$  et  $m(T_s)$ ; l'objectif étant d'assurer des contraintes mécaniques négligeables dans cette zone.

### 2.2.3 Formulations théoriques des problèmes thermique et mécanique du procédé DED

Elles s'appuient largement sur la plupart des équations de conservation et des lois de comportement présentées ci-dessus. Par ailleurs, comme mentionné dans la partie décrivant la cinématique de  $\mathcal{M}_T$ , l'interface  $\Gamma_{Tt_0}$  est une section plane se déplaçant le long de la courbe axiale  $\mathcal{C}_{T_0}$  de  $\Omega_{T_0}$  à vitesse normale constante  $v_H$  au cours de l'intervalle  $[t_{T_0}, t_{T_f}^c] \subset [t_{T_0}, t_{T_f}]$ , intervalle de construction effective de  $\mathcal{M}_T$ , de la section initiale  $\mathcal{S}_0$  de centre  $C_0$  à la section finale  $\mathcal{S}_f$  de centre  $C_f$ . À chaque instant  $t \in [t_{T_0}, t_{T_f}^c]$ ,  $\Gamma_{Tt}$  coïncide avec une section  $\mathcal{S}_t$  de centre  $C_t$  (figure 2.10), et après la fin de construction à l'instant  $t_{T_f}^c$ ,  $\Gamma_{Tt}$  devient négligeable ( $= \emptyset$ ). Nous considérerons dans la suite l'approximation :

$$\rho (\underline{v} \cdot \underline{n} - \omega_n) \approx -\rho_0 v_H \text{ sur } \Gamma_{Tt}, \quad \forall t \in [t_{T_0}, t_{T_f}^c] \quad (2.46)$$


 FIGURE 2.10 – Cordon  $\mathcal{M}_T$  en construction

### Formulation théorique du problème thermique

On considère au préalable que la source de chaleur volumique  $\dot{Q}$  au cours du chauffage du cordon  $\mathcal{M}_T$  est uniformément distribuée en une zone localisée dite zone de chauffage à définir et à caractériser. Pour ce faire, on considère de plus :

- L'extension fictive de  $\Omega_{T_0}$ , d'une longueur de  $l_T$ , au niveau des sections extrêmes  $\mathcal{S}_0$  et  $\mathcal{S}_f$  suivant leurs normales externes correspondantes (figure 2.11.(a)) ;
- l'intervalle de temps de chauffage, intervalle de temps d'exposition du cordon  $\mathcal{M}_T$  à la source de chaleur, noté  $[t_{T_0}^H, t_{T_f}^H] \subset [t_{T_0}, t_{T_f}]$ , où  $t_{T_0}^H$  et  $t_{T_f}^H$  désignent respectivement les instants de début et de fin de chauffage de  $\mathcal{M}_T$  vérifiant :

$$t_{T_0}^H \geq t_{T_0}, \quad t_{T_f}^H \geq t_{T_f}^c \quad (2.47)$$

- À tout instant  $t \in [t_{T_0}^H, t_{T_f}^H]$ , la portion  $\Omega_{\Sigma_{Tt}^0}$  de l'extension fictive de  $\Omega_{T_0}$ , comprise entre les deux sections  $\Sigma_{Tt}^b$  et  $\Sigma_{Tt}^f$  de centres respectifs  $C_t^b$  et  $C_t^f$  (figure 2.11.(b)). Cette portion représente géométriquement la source de chaleur se déplaçant à la vitesse uniforme  $v_H$  et dont le centre  $C_t^H$  est un point de l'extension fictive de  $\mathcal{C}$  vérifiant :

$$\widehat{C_t^H C_t^b} = -\widehat{C_t^H C_t^f} = -\frac{l_T}{2} \quad (2.48)$$

La section  $\Sigma_{Tt}^f$  coïncide avec l'interface  $\Gamma_{Tt}$  en période de construction (lorsque  $t \leq t_{T_f}^c$ ) ;

- les positions initiale  $C_0^H$  et finale  $C_f^H$  de  $C_t^H$  (figure 2.11.(b)) vérifiant :

$$\widehat{C_0 C_0^H} = -\widehat{C_f C_f^H} \in \left[ -\frac{l_T}{2}, \frac{l_T}{2} \right] \Rightarrow \begin{cases} t_{T0}^H := t_{T0} + \frac{\widehat{C_0 C_0^f}}{v_H} \in \left[ t_{T0}, t_{T0} + \frac{l_T}{v_H} \right], \\ t_{Tf}^H := t_{Tf}^c + \frac{\widehat{C_f C_f^f}}{v_H} \in \left[ t_{Tf}^c, t_{Tf}^c + \frac{l_T}{v_H} \right], \\ t_{T0}^H - t_{T0} + t_{Tf}^H - t_{Tf}^c = \frac{l_T}{v_H} \end{cases} \quad (2.49)$$

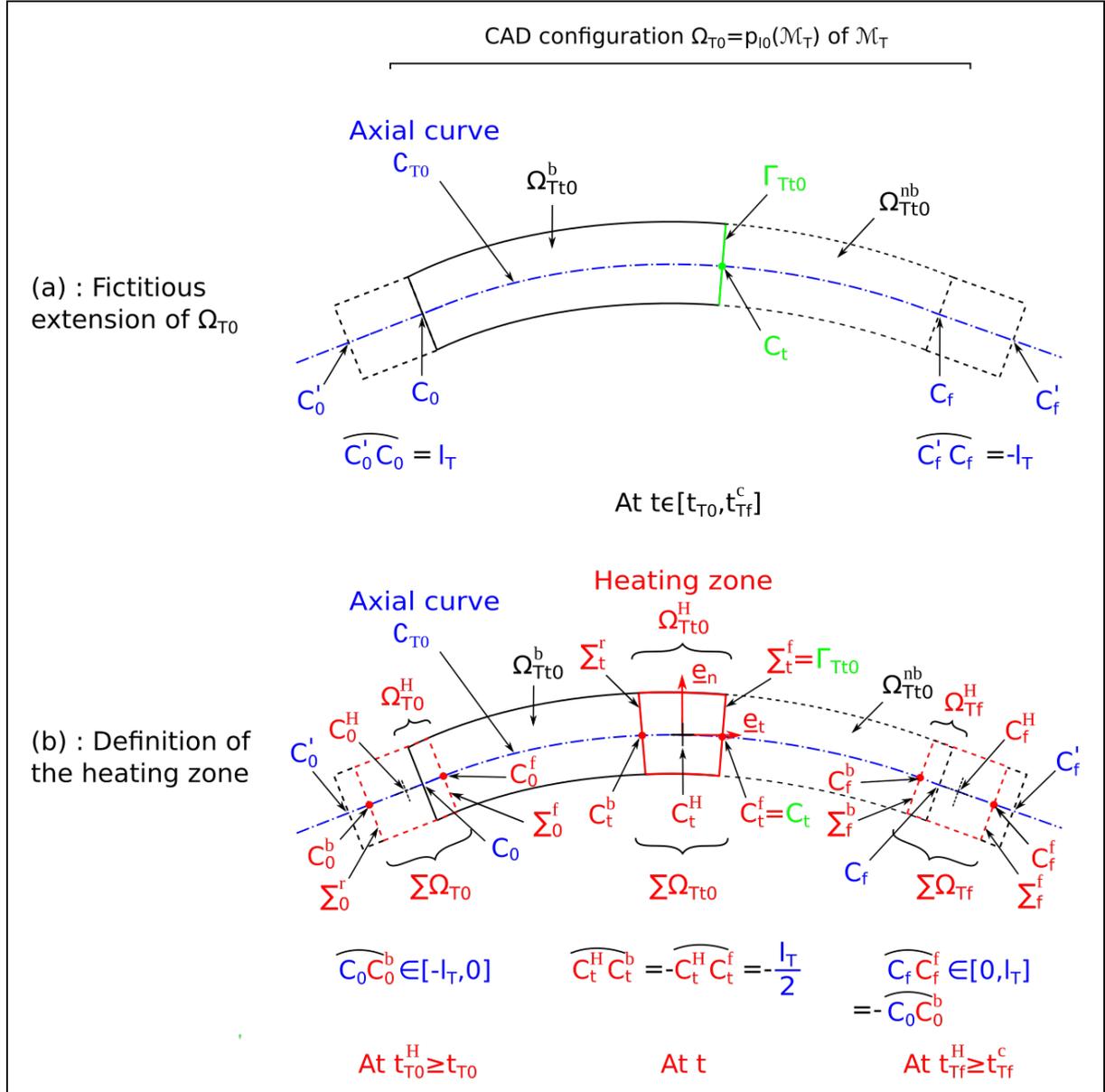
La zone de chauffage, à chaque instant  $t \in [t_{T0}^H, t_{Tf}^H]$ , notée  $\Omega_{Tt0}^H$  se définit par le lieu géométrique de  $\Omega_{T0}$  contenu dans la source de chaleur  $\Omega\Sigma_{Tt0}$  (figure 2.11.(b)), soit la formulation mathématique :

$$\Omega_{Tt0}^H = \Omega\Sigma_{Tt0} \cap \Omega_{T0}, \quad \forall t \in [t_{T0}^H, t_{Tf}^H] \quad (2.50)$$

La source de chaleur volumique  $\dot{Q}$  est ainsi définie par :

$$\dot{Q}(\Phi_t(\underline{X}), t) = \begin{cases} \forall (\underline{X}, t) \in \Omega_{t0} \times [t_{T0}, t_{Tf}], \\ \frac{\eta P}{|\Omega\Sigma_{Tt0}|} J(\underline{X}, t) 1_{\Omega_{Tt0}^H}(\underline{X}) \text{ si } t \in [t_{T0}^H, t_{Tf}^H] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (2.51)$$

Avec,  $P$  puissance de la source de chaleur,  $\eta$  coefficient d'absorption,  $|\Omega\Sigma_{Tt0}|$  volume de  $\Omega\Sigma_{Tt0}$  et  $1_{\Omega_{Tt0}^H}$  fonction de présence associée à  $\Omega_{Tt0}^H$ .


 FIGURE 2.11 – Trajet de la source de chaleur le long de  $\mathcal{C}_{T_0}$ 

En ce qui concerne les conditions aux limites, on considère la partition de  $\partial\Omega_t$  en quatre sous-ensembles :  $\Gamma_{T_t}$ , l'interface d'apport de matière déjà définie,  $(\partial\Omega_t)^d \subsetneq \partial\Omega_{St}$ , sur lequel est imposée une température  $T_d$ ,  $(\partial\Omega_t)^n \subsetneq \partial\Omega_{St}$  sur lequel est imposé un flux de chaleur connu  $q_n$ ,  $(\partial\Omega_t)^r$ , sur lequel sont imposés le flux de convection forcée faisant intervenir le coefficient de convection  $h(\underline{x}, t)$  et le flux de radiation thermique faisant intervenir la constante de Stefan-Boltzmann  $\sigma$  et l'émission  $\varepsilon$ . Comme montré dans la figure 2.12, dans le procédé DED, le gaz inerte est chauffé par la source de chaleur et se propage le long du système en période de chauffage. Les expressions des flux de convection forcée et de radiation doivent donc prendre en compte l'élévation de la température du gaz notée  $T_g(\underline{x}, t)$  pouvant atteindre des valeurs de l'ordre de  $10^3 K$  [65].

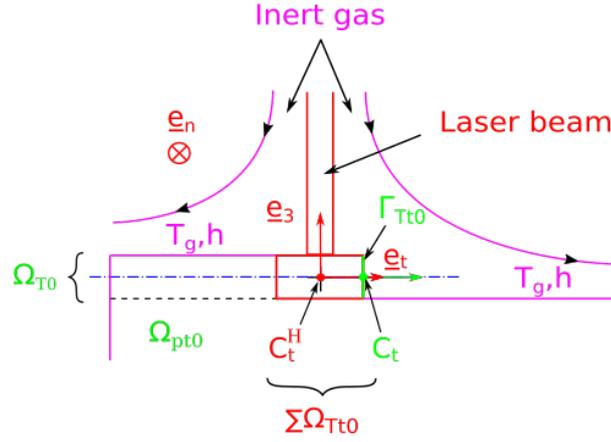


FIGURE 2.12 – Chauffage et écoulement du gaz inerte

En considérant par  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  la base locale associée au point central  $C_t^H$  de  $\Omega\Sigma_{Tt0}$ ,  $T_g(\underline{x}, t)$  est dans la suite considérée comme une distribution gaussienne ellipsoïdale définie par :

$$\forall \underline{X} \in (\partial\Omega_t)^r, \quad T_g(\Phi_t(\underline{X}), t) = T_\infty + (T_{gm} - T_\infty) \exp\left(-\frac{X_t^2}{r_t^2} - \frac{X_n^2}{r_n^2} - \frac{X_3^2}{r_3^2}\right) \quad (2.52)$$

Avec  $(X_t, X_n, X_3)$ , coordonnées de  $\underline{X}$  dans le repère  $(C_t^H, \underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$ ,  $T_{gm}$  température maximale du gaz inerte ( $= T_\infty$  en période de refroidissement),  $r_t$ ,  $r_n$  et  $r_3$  rayons caractéristiques de la distribution gaussienne ellipsoïdale de  $T_g(\underline{x}, t)$ .

Ainsi, le problème thermique théorique noté  $(\mathcal{P}_{Tt})$ ,  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.45, se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{Tt}) \begin{cases} \text{Trouver } T(., t) \in H^1(\Omega_t) \text{ vérifiant :} \\ \rho c_p \dot{T} = \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T) + \dot{Q} \text{ dans } \Omega_t \\ T = T_d \text{ sur } (\partial\Omega_t)^d \\ -\kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} = \begin{cases} q_n \text{ sur } (\partial\Omega_t)^n \\ h(T - T_g) + \sigma \varepsilon (T^4 - T_g^4) \text{ sur } (\partial\Omega_t)^r \\ \rho_0 v_l T (s(T) - s(T_\infty)) \text{ sur } \Gamma_{Tt} \end{cases} \end{cases} \quad (2.53)$$

### Formulation théorique du problème mécanique

Pour le problème mécanique, comme mentionné plus haut, du fait de l'échelle macroscopique du modèle thermomécanique du procédé, nous travaillons en quasi-statique : nous négligeons les termes d'accélération et de vitesse dans les équations de conservation de la quantité de mouvement 2.26, et négligeons toute tension de surface sur la frontière  $\partial\Omega_t$ . De plus, en raison des contraintes mécaniques très importantes au sein du système, nous négligeons les forces mécaniques volumiques.

En ce qui concerne les conditions aux limites, on considère la partition de  $\partial\Omega_t$  en deux sous-ensembles :  $(\partial\Omega_t)^u \subsetneq \partial\Omega_{St}$ , sur lequel est considéré un encastrement, et  $(\partial\Omega_t)^f$  sur

lequel aucune force n'est considérée.

Par ailleurs, pour la prise en compte des propriétés mécaniques du solidus appliquées à la zone de chauffage, à l'exception du coefficient de dilation thermique (pour lequel on prend  $\alpha(T)$ ), nous définissons le champ eulérien de température d'usage  $T^u$  par :

$$\forall t \in [t_{T0}, t_{Tf}], \forall \underline{x} \in \Omega_t, T^u(\underline{x}, t) = \begin{cases} T(\underline{x}, t) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_t \setminus \Omega_{Tt}^H \\ T_s & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.54)$$

Avec,  $\Omega_{Tt}^H := \Phi_t(\Omega_{Tt0}^H)$ , configuration réelle de la zone de chauffage à l'instant  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ . Le problème mécanique théorique noté  $(\mathcal{P}_{Mt})$ ,  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation des équations 2.24, 2.26, 2.40 et 2.54, se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{Mt}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{v}(\cdot, t) \in (H^1(\Omega_t))^3 \text{ et } p(\cdot, t) \in L^2(\Omega_t), \text{ vérifiant :} \\ \text{Dans } \Omega_t \\ \nabla \cdot \underline{s} - \nabla p = \underline{0} \\ \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}) = \underline{\dot{\varepsilon}}^e + \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} = \dot{\lambda}(\underline{s} - \underline{X}) \\ \left( \begin{array}{c} \underline{\dot{s}} \\ \dot{p} \\ \underline{\dot{\varepsilon}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} 2\mu(T^u)(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}) - \dot{\lambda}(\underline{s} - \underline{X})) \\ -\chi(T^u)(\nabla \cdot \underline{v} - 3\alpha(T)\dot{T}) \\ \left[ \frac{\bar{\sigma} - \sigma_Y(T^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(T^u)}{\sqrt{3}^{m(T^u)+1} K_{vp}(T^u)} \right]_+^{m(T^u)-1} \end{array} \right) \\ \text{Pour } i = 1, \dots, N_c \\ \underline{\dot{\alpha}}_i = \underline{\dot{\varepsilon}}^{vp} - \gamma_i(T^u) \underline{\alpha}_i \dot{\varepsilon}, \quad \underline{X}_i = \frac{2}{3} C_i(T^u) \underline{\alpha}_i, \quad \underline{X} = \sum_{i=1}^{N_c} \underline{X}_i \\ \text{Sur } \partial\Omega_t \\ \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } (\partial\Omega_t)^u, \quad \underline{\sigma} \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } (\partial\Omega_t)^f \end{array} \right. \quad (2.55)$$

## 2.2.4 Formulation théorique du problème cinématique de positionnement

Cette partie consiste à décrire l'ensemble des équations que doit vérifier le champ lagrangien de distorsion de positionnement  $\underline{U}_n$  de la partie non construite  $\mathcal{M}_t^{nb}$  (figure 2.13) de  $\mathcal{M}_f$  lors de la construction du cordon  $\mathcal{M}_T$  au cours de l'intervalle de temps  $[t_{T0}, t_{Tf}]$ . Le principe global de ces équations sera de présenter ce champ lagrangien comme celui qui minimisera l'intensité des distorsions et déformations initiales au sein de  $\Omega_{t0}^{nb}$  configuration CAO de  $\mathcal{M}_t^{nb}$ , sous la contrainte de continuité de la distorsion globale  $\underline{U}_f$  à l'interface d'activation  $\Gamma_{t0}$ , avec celle de l'incompressibilité de la transformation initiale  $\underline{F}^i$ . Cette intensité sera donnée sous la forme d'une fonctionnelle intégrale d'un quelconque

champ vectoriel  $\underline{W}_n$ , notée  $\mathcal{F}_t(\underline{W}_n)$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{W}_n : \Omega_{t_0}^{nb} &\rightarrow E \text{ suffisamment régulier,} \\ \mathcal{F}_t(\underline{W}_n) &:= \frac{1}{2} \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} \left( \underline{E}(\underline{W}_n) : \underline{E}(\underline{W}_n) + \eta_p \underline{W}_n \cdot \underline{W}_n \right) \\ \underline{E}(\underline{W}_n) &:= \frac{1}{2} \left( \underline{F}(\underline{W}_n)^T \underline{F}(\underline{W}_n) - \underline{1} \right), \quad \underline{F}(\underline{W}_n) := \underline{1} + \nabla \underline{W}_n \end{aligned} \quad (2.56)$$

Avec,  $\eta_p \in [0, 1]$  facteur de pénalisation de la distorsion.

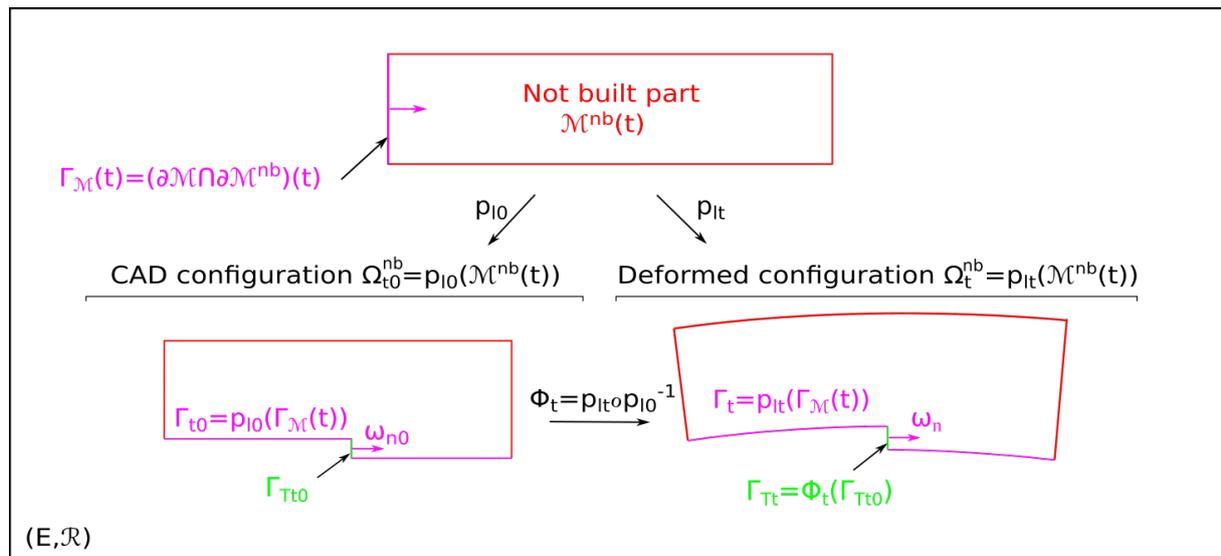


FIGURE 2.13 – Positionnement de la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}(t)$  de  $\mathcal{M}_f$

Ainsi, le problème cinématique de positionnement noté  $(\mathcal{P}_{Ct})$ ,  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , avec prise en compte de la contrainte d'incompressibilité de  $\underline{F}^i$  se formule théoriquement comme suit :

$$(\mathcal{P}_{Ct}) \begin{cases} \text{Trouver } \underline{U}_n(\cdot, t) : \Omega_{t_0}^{nb} \rightarrow E = \min \mathcal{F}_t(\underline{W}_n), \text{ vérifiant :} \\ \underline{U}_n(\cdot, t) = \underline{U}(\cdot, t) \text{ sur } \Gamma_{t_0} \\ -\det \underline{F}(\underline{U}_n(\cdot, t)) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \forall \delta R_n \in L_{loc}^1(\Omega_{t_0}^{nb}), \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} \delta R_n (-\det \underline{F}(\underline{U}_n(\cdot, t)) + 1) = 0 \end{cases} \quad (2.57)$$

Par cette contrainte d'incompressibilité, nous introduisons le multiplicateur de Lagrange associé  $Q_n(\cdot, t)$ , et la fonctionnelle  $\mathcal{G}_t(\delta R_n, \underline{W}_n)$  définie par :

$$\begin{aligned} \forall \delta R_n \in L_{loc}^1(\Omega_{t_0}^{nb}), \forall \underline{W}_n : \Omega_{t_0}^{nb} &\rightarrow E \text{ suffisamment régulier,} \\ \mathcal{G}_t(Q_n(\cdot, t), \underline{W}_n) &:= \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} \delta R_n (-\det \underline{F}(\underline{U}_n(\cdot, t)) + 1) \end{aligned} \quad (2.58)$$

Ainsi, dans l'hypothèse d'existence et d'unicité de solution, et par la différentiabilité de

$\mathcal{F}_t$  en  $\underline{U}_n(\cdot, t)$ ,  $(\mathcal{P}_{Ct})$  se reformule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{Ct}) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \underline{U}_n(\cdot, t) : \Omega_{t_0}^{nb} \rightarrow E, \text{ vérifiant :} \\
 \underline{U}_n(\cdot, t) = \underline{U}(\cdot, t) \text{ sur } \Gamma_{t_0} \\
 \forall \delta \underline{W}_n : \Omega_{t_0}^{nb} \rightarrow E \text{ suffisamment régulier, tel que } \delta \underline{W}_n = 0 \text{ sur } \Gamma_{t_0}, \\
 \left( \mathcal{F}'_t(\underline{U}_n(\cdot, t)) + \frac{\partial \mathcal{G}_t}{\partial \underline{W}_n}(Q_n(\cdot, t), \underline{U}_n(\cdot, t)) \right) \delta \underline{W}_n = 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} (\underline{E}^i : (\underline{F}^{iT} \nabla \delta \underline{W}_n) + \eta_p \underline{U}_n(\cdot, t) \cdot \delta \underline{W}_n) - \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} Q_n(\cdot, t) \frac{d \det \underline{F}}{d \underline{F}}(\underline{U}_n(\cdot, t)) : \nabla \delta \underline{W}_n = 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} (\underline{E}^i : (\underline{F}^{iT} \nabla \delta \underline{W}_n) + \eta_p \underline{U}_n(\cdot, t) \cdot \delta \underline{W}_n) \\
 - \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} Q_n(\cdot, t) \det \underline{F}(\underline{U}_n(\cdot, t)) \underline{F}(\underline{U}_n(\cdot, t))^{-T} : \nabla \delta \underline{W}_n = 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} (\underline{E}^i : (\underline{F}^{iT} \nabla \delta \underline{W}_n) + \eta_p \underline{U}_n(\cdot, t) \cdot \delta \underline{W}_n) - \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} \det \underline{F}^i Q_n(\cdot, t) \text{tr}(\nabla \delta \underline{W}_n \underline{F}^{i-1}) = 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}^i} (\underline{E}^i : (\underline{F}^{iT} \nabla \delta \underline{w}_n \underline{F}^i) + \eta_p \underline{u}_n(\cdot, t) \cdot \delta \underline{w}_n) - \int_{\Omega_{t_0}^{nb}} q_n(\cdot, t) \nabla \cdot \delta \underline{w}_n = 0 \\
 \forall \delta R_n \in L^1_{loc}(\Omega_{t_0}^{nb}), \mathcal{G}_t(\delta R_n, \underline{U}_n(\cdot, t)) = 0
 \end{array} \right. \quad (2.59)$$

Avec  $\delta \underline{w}_n$  champ eulérien correspondant du champ lagrangien  $\delta \underline{W}_n$ ,  $q_n(\cdot, t)$  désignant le champ eulérien correspondant au multiplicateur de Lagrange  $Q_n(\cdot, t)$  relatif à la contrainte d'incompressibilité.

## 2.3 Modélisation thermomécanique numérique du procédé DED

La modélisation thermomécanique numérique du procédé DED consiste en la numérisation des problèmes thermique, mécanique et cinématique de positionnement formulés ci-dessus afin d'en obtenir des problèmes numériques à résoudre. Cette numérisation passera par les discrétisations temporelle et spatiale des équations caractéristiques de ces problèmes.

### 2.3.1 Discrétisation temporelle

Nous considérons tout d'abord pour deux instants distincts  $\tau = t - dt$  ( $dt > 0$ ) et  $t$  de l'intervalle  $[t_{T0}, t_{Tf}]$ , les deux configurations réelles  $\Omega_{f\tau}$  et  $\Omega_{ft}$  du système final  $\mathcal{M}_f$  aux instant respectifs  $\tau$  et  $t$ , et la transformation géométrique intermédiaire  $\Phi_{\tau,t} := \Phi_t \circ \Phi_\tau^{-1}$  de gradient  $\underline{F}_{\tau,t} := \nabla \Phi_{\tau,t}$  (figure 2.14).

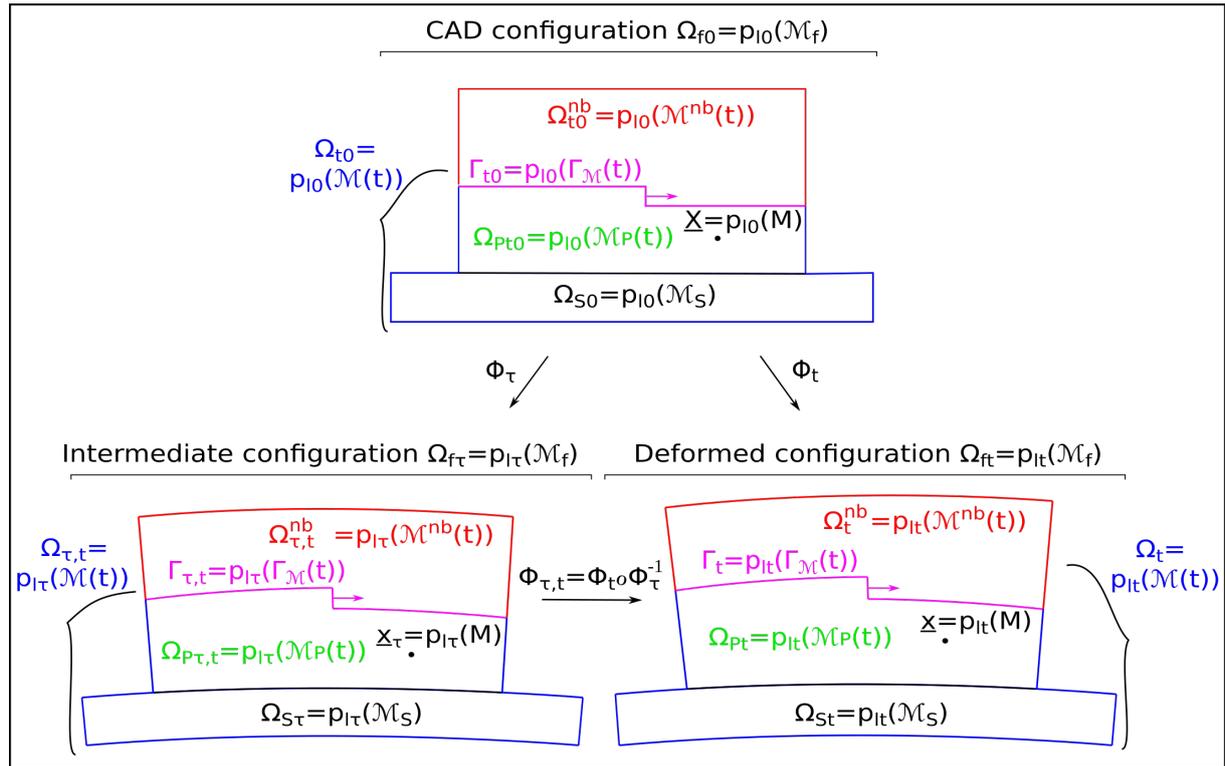


FIGURE 2.14 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{f\tau}$ ,  $\tau < t$  du système final  $\mathcal{M}_f$

Nous définissons de plus dans  $\Omega_{f\tau}$  le champ de déplacement intermédiaire  $\bar{u}_{f\tau,t}$  par :

$$\begin{aligned} \forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{f\tau}, \bar{u}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) &:= \Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) - \underline{x}_\tau \\ &= \underline{u}_f(\Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau), t) - \underline{u}_f(\underline{x}_\tau, \tau), \end{aligned} \quad (2.60)$$

Le domaine géométrique  $\Omega_{f\tau}$  est donc considéré comme configuration intermédiaire et servira de configuration lagrangienne actualisée. En effet, pour toute grandeur tensorielle eulérienne  $b_f$  définie dans tout le domaine  $\Omega_{ft}$ , nous considérons les restrictions  $b_t := b(\cdot, t)$  et  $\dot{b}_{ft} := \dot{b}_f(\cdot, t)$ , et définissons les grandeurs lagrangiennes actualisées correspondantes  $b_{f\tau,t}$  et  $\dot{b}_{f\tau,t}$  dans  $\Omega_{f\tau}$  par :

$$\forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{f\tau}, b_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) = b_{ft}(\Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau)) \quad \dot{b}_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) = \dot{b}_{ft}(\Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau)) \quad (2.61)$$

Les gradients  $\nabla b_{f\tau,t}$  et  $\nabla b_{ft}$  des champs respectifs  $b_{f\tau,t}$  et  $b_{ft}$  sont donc reliés par la relation :

$$\nabla b_{ft} = \nabla b_{f\tau,t} \underline{F}_{\tau,t}^{-1} = \nabla b_{f\tau,t} \left( \underline{1} + \nabla \bar{u}_{f\tau,t} \right)^{-1} \quad (2.62)$$

Et dans l'hypothèse de régularité temporelle suffisante, les développements limités de  $b_{f\tau,t}$  et  $\dot{b}_{f\tau,t}$  à l'instant  $t$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
 & \forall (\underline{x}_\tau, \underline{x}_t) \in \Omega_{f_\tau} \times \Omega_{f_t} \text{ tel que } \underline{x}_t = \Phi_t(\underline{x}_\tau) \\
 & \begin{cases} b_{ft}(\underline{x}_t) = b_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) + \dot{b}_{ft}(\underline{x}_t) dt - \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) \frac{dt^2}{2} + O(dt^3) \\ \dot{b}_{ft}(\underline{x}_t) = \dot{b}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) + \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) dt + O(dt^2) \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} b_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) = b_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) + \dot{b}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) dt - \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) \frac{dt^2}{2} + O(dt^3) \\ \dot{b}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) = \dot{b}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) dt + \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) dt + O(dt^2) \end{cases} \quad (2.63) \\
 \Rightarrow & \begin{cases} b_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) = b_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) + \left( \theta \dot{b}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \dot{b}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) \right) dt \\ \quad + \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) \frac{dt^2}{2} + O(dt^3) \\ \dot{b}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) = \frac{b_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) - b_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) - (1-\theta) \dot{b}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) dt}{\theta dt} \quad \forall \theta \in ]0, 1] \\ \quad + \left( 1 - \frac{1}{2\theta} \right) \ddot{b}_f(\underline{x}_t, t) \frac{dt}{2} + O(dt^2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

En particulier, pour le champ lagrangien actualisé de distorsion  $\underline{u}_{f_{\tau,t}}$ , en considération de 2.60, le développement limité à  $t$  nous donne,

$$\begin{aligned}
 \forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{f_\tau}, \quad \underline{u}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) &= \underline{u}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) + \left( \theta \underline{v}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \underline{v}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) \right) dt + O(dt^2) \\
 \Rightarrow \underline{u}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) &= \left( \theta \underline{v}_{f_{\tau,t}}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \underline{v}_{f_\tau}(\underline{x}_\tau) \right) dt + O(dt^2) \quad (2.64)
 \end{aligned}$$

L'application de 2.64 dans 2.62 nous donne :

$$\nabla b_{ft} = \nabla b_{f_{\tau,t}} \cdot \left( \underline{1} - \left( \theta \nabla \underline{v}_{f_{\tau,t}} + (1-\theta) \nabla \underline{v}_{f_\tau} \right) dt + O(dt^2) \right) \quad (2.65)$$

Cependant, pour toute grandeur tensorielle eulérienne  $b$  définie uniquement dans tout le domaine  $\Omega_t$ , nous considérons également les restrictions  $b_t := b(\cdot, t)$  et  $\dot{b}_t := \dot{b}(\cdot, t)$ , et définissons les grandeurs lagrangiennes actualisées correspondantes  $b_{\tau,t}$  et  $\dot{b}_{\tau,t}$  dans  $\Omega_{\tau,t} := \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Omega_t)$  (Figure 2.14) par :

$$\forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{\tau,t}, \quad b_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) = b_t(\Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau)) \quad \dot{b}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) = \dot{b}_t(\Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau)) \quad (2.66)$$

Ainsi, dans l'hypothèse de régularité temporelle suffisante et en application du même raisonnement que celui de la grandeur eulérienne  $b_f$  dans les équations 2.63, on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \forall (\underline{x}_\tau, \underline{x}_t) \in \Omega_{\tau,t} \times \Omega_t \text{ tel que } \underline{x}_t = \Phi_t(\underline{x}_\tau), \quad \forall \theta \in ]0, 1] \\
 b_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) &= b_\tau(\underline{x}_\tau) + \left( \theta \dot{b}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \dot{b}_\tau(\underline{x}_\tau) \right) dt + \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \ddot{b}(\underline{x}_t, t) \frac{dt^2}{2} + O(dt^3) \\
 \dot{b}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) &= \frac{b_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) - b_\tau(\underline{x}_\tau) - (1-\theta) \dot{b}_\tau(\underline{x}_\tau) dt}{\theta dt} + \left( \theta - \frac{1}{2} \right) \ddot{b}(\underline{x}_t, t) \frac{dt}{2} + O(dt^2) \\
 \nabla b_t &= \nabla b_{\tau,t} \cdot \left( \underline{1} - \left( \theta \nabla \underline{v}_{\tau,t} + (1-\theta) \nabla \underline{v}_\tau \right) dt + O(dt^2) \right) \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

Nous notons que  $\Omega_\tau$ , domaine de définition à l'instant  $\tau$  des champs  $b_\tau$  et  $\dot{b}_\tau$  a fait l'objet

d'une extension au domaine  $\Omega_{\tau,t}$  de sorte que nous ayons :

$$\forall \underline{x}_\tau \in \delta\Omega_{\tau,t} := \Omega_{\tau,t} \setminus \Omega_\tau, \quad b_\tau(\underline{x}_\tau) = b_\infty, \quad \dot{b}_\tau(\underline{x}_\tau) = 0 \quad (2.68)$$

Avec  $b_\infty$ , grandeur initiale de  $b$  définie à température ambiante  $T_\infty$ .

Nous pouvons y observer que  $\delta\Omega_{\tau,t}$ , par définition, correspond à la configuration réelle à l'instant  $\tau$  de la matière  $\delta\mathcal{M}_{\tau,t} := \mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_\tau$  ajoutée au système au cours de l'intervalle de temps  $[\tau, t]$ .

Ainsi, la discrétisation temporelle des problèmes thermique, mécanique et cinématique de positionnement reposera donc sur l'hypothèse suivante :

$$\begin{aligned} & \text{Le pas de temps } dt \text{ est suffisamment petit pour que non seulement le} \\ & \text{terme } O(dt^2) \text{ des développements limités 2.63 – 2.65 soit négligeable,} \\ & \text{mais aussi la transformation géométrique } \underline{F}_{\tau,t} \text{ soit infinitésimale,} \\ & \text{c'est – à – dire } \underline{F}_{\tau,t} = O(1) \Leftrightarrow \|\nabla \underline{u}_{\tau,t}\| \ll 1 \end{aligned} \quad (2.69)$$

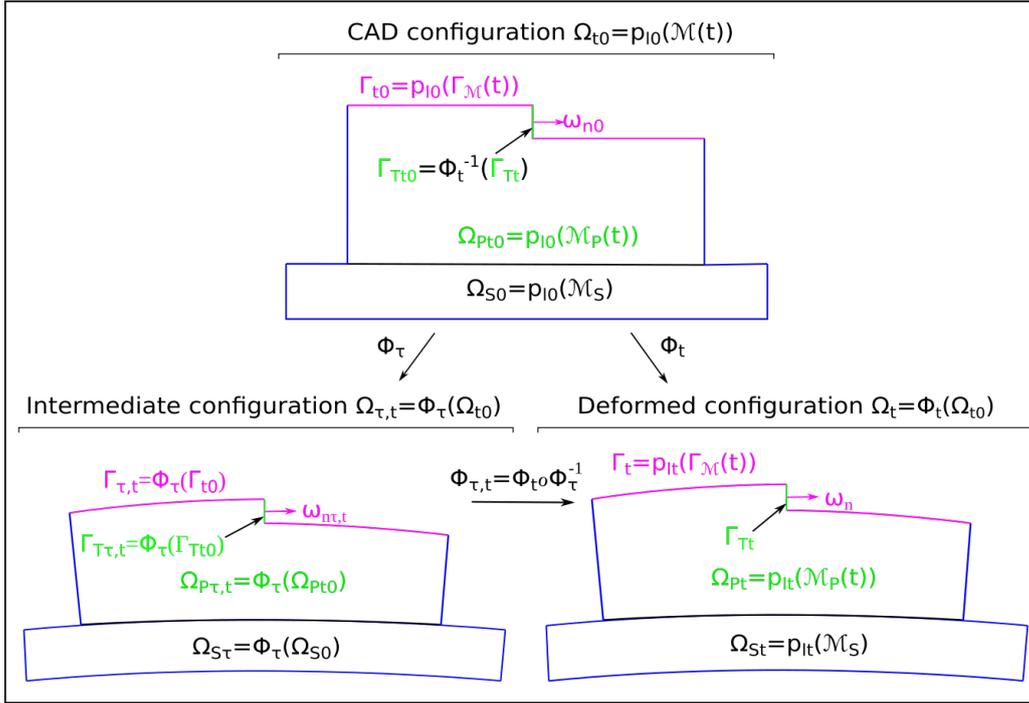
Sous cette hypothèse, les équations 2.63, 2.65 et 2.67 nous donnent, pour  $\theta \in [0, 1]$ , :

$$\begin{aligned} & \forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{f\tau}, \\ & \left\{ \begin{array}{l} b_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) \approx b_{f\tau}(\underline{x}_\tau) + \left( \theta \dot{b}_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \dot{b}_{f\tau}(\underline{x}_\tau) \right) dt \\ \underline{u}_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) \approx \left( \theta \underline{v}_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \underline{v}_{f\tau}(\underline{x}_\tau) \right) dt \\ \nabla b_{f\tau,t}(\underline{x}_t) \approx \nabla b_{f\tau,t}(\underline{x}_\tau), \quad \underline{x}_t = \Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) \end{array} \right. \\ & \forall \underline{x}_\tau \in \Omega_\tau, \\ & \left\{ \begin{array}{l} b_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) \approx b_\tau(\underline{x}_\tau) + \left( \theta \dot{b}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \dot{b}_\tau(\underline{x}_\tau) \right) dt \\ \underline{u}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) \approx \left( \theta \underline{v}_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) + (1-\theta) \underline{v}_\tau(\underline{x}_\tau) \right) dt \\ \nabla b_t(\underline{x}_t) \approx \nabla b_{\tau,t}(\underline{x}_\tau), \quad \underline{x}_t = \Phi_{\tau,t}(\underline{x}_\tau) \end{array} \right. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Il sera donc question pour la suite d'appliquer 2.70 aux équations des problèmes thermique, mécanique et cinématique de positionnement en vue de leur discrétisation temporelle.

### Discrétisation temporelle des problèmes thermique et mécanique

Ces deux problèmes portant sur le système  $\mathcal{M}_t$ , nous considérerons donc sa configuration intermédiaire  $\Omega_{\tau,t}$  servant de configuration lagrangienne actualisée. Plus précisément, nous aurons à effectuer un changement de variable spatiale afin de réaliser le passage du domaine géométrique  $\Omega_t$  au domaine  $\Omega_{\tau,t}$  (figure 2.15). Nous considérerons de plus, l'interface  $\Sigma_{\tau,t} = \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Sigma_t)$  (Figure 2.15).


 FIGURE 2.15 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{\tau,t}$ ,  $\tau < t$  du système  $\mathcal{M}_t$ 

### Discrétisation temporelle du problème thermique

Elle repose sur la discrétisation de l'équation de la chaleur 2.45 qui, en application de 2.70, est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ \rho_{\tau} c_p (T_{\tau,t}) \frac{T_{\tau,t} - T_{\tau} - (1 - \theta) \dot{T}_{\tau} dt}{\theta dt} \approx (-\nabla \cdot \underline{q}_{\tau,t} + \dot{Q}_{\tau,t}), \\ \underline{q}_{\tau,t} \approx -\kappa(T_{\tau,t}) \nabla T_{\tau,t}, \quad s'(T_{\tau,t}) = T_{\tau,t}^{-1} c_p (T_{\tau,t}) \\ \text{Sur } \Gamma_{T_{\tau,t}} := \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Gamma_{T_t}) \\ -\rho_0 v_H (s(T_{\tau,t}) - s(T_{\infty})) + \frac{\underline{q}_{\tau,t} \cdot \underline{n}}{T_{\tau,t}} = 0 \end{array} \right. \quad (2.71)$$

Ainsi le problème thermique temporellement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{T_{\tau,t}})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.71, se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{T_{\tau,t}}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T_{\tau,t} \in H^1(\Omega_{\tau,t}) \text{ vérifiant :} \\ \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ \rho_{\tau} c_p(T_{\tau,t}) \frac{T_{\tau,t} - T_{\tau} - (1 - \theta) \dot{T}_{\tau} dt}{\theta dt} = \nabla \cdot (\kappa(T_{\tau,t}) \nabla T_{\tau,t}) + \dot{Q}_{\tau,t} \\ \text{Sur } \partial\Omega_{\tau,t} \\ T_{\tau,t} = T_d \text{ sur } (\partial\Omega_{\tau,t})^d := \Phi_{\tau,t}^{-1}((\partial\Omega_t)^d) \\ -\kappa(T_{\tau,t}) \nabla T_{\tau,t} \cdot \underline{n} = \begin{cases} q_n \text{ sur } (\partial\Omega_{\tau,t})^n := \Phi_{\tau,t}^{-1}((\partial\Omega_t)^n) \\ h(T_{\tau,t} - T_g) + \sigma \varepsilon (T_{\tau,t}^4 - T_g^4) \text{ sur } (\partial\Omega_{\tau,t})^r := \Phi_{\tau,t}^{-1}((\partial\Omega_t)^r) \\ \rho_0 v_l T_{\tau,t} (s(T_{\tau,t}) - s(T_{\infty})) \text{ sur } \Gamma_{T_{\tau,t}} \end{cases} \end{array} \right. \quad (2.72)$$

Sous forme variationnelle, le problème thermique  $(\mathcal{P}_{T_{\tau,t}})$  se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{T_{\tau,t}}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T_{\tau,t} \in H^1(\Omega_{\tau,t}) \text{ tel que } T_{\tau,t}|_{(\partial\Omega_{\tau,t})^d} = T_d, \text{ vérifiant :} \\ \forall T_v \in H^1(\Omega_{\tau,t}), \text{ tel que } T_v|_{(\partial\Omega_{\tau,t})^d} = 0, \\ \int_{\Omega_{\tau,t}} \rho_{\tau} c_p(T_{\tau,t}) \frac{T_{\tau,t} - T_{\tau} - (1 - \theta) \dot{T}_{\tau} dt}{\theta dt} T_v + \int_{\Omega_{\tau,t}} \kappa(T_{\tau,t}) \nabla T_{\tau,t} : \nabla T_v \\ + \int_{(\partial\Omega_{\tau,t})^r} [h(T_{\tau,t} - T_g) + \sigma \varepsilon (T_{\tau,t}^4 - T_g^4)] T_v + \int_{\Gamma_{T_{\tau,t}}} \rho_0 v_l T_{\tau,t} (s(T_{\tau,t}) - s(T_{\infty})) T_v \\ = \int_{\Omega_{\tau,t}} \dot{Q}_{\tau,t} T_v + \int_{(\partial\Omega_{\tau,t})^n} q_n T_v \end{array} \right. \quad (2.73)$$

**Discrétisation temporelle du problème mécanique**

Elle repose principalement sur la discrétisation de la loi de comportement mécanique 2.42 qui, en application de 2.70, est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\
 & \frac{\underline{s}_{\tau,t} - \underline{s}_\tau - (1-\theta) \dot{\underline{s}}_\tau dt}{\theta dt} + 2\mu (T_{\tau,t}^u) \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) (\underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t}) \approx 2\mu (T_{\tau,t}^u) \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t}) \\
 \Rightarrow \underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t} & \approx \frac{\underline{s}_\tau + (1-\theta) \dot{\underline{s}}_\tau dt + 2\mu (T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t}) - \underline{X}_{\tau,t}}{1 + 2\mu (T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t})}, \quad \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) = \frac{3\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}}{2\bar{\sigma}_{\tau,t}} \\
 \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} & = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{\tau,t} - \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau,t})}{\sqrt{3}^{m(T_{\tau,t}^u)+1} K_{vp}(T_{\tau,t}^u)} \right]_+^{m(T_{\tau,t}^u)-1} \approx \frac{\bar{\varepsilon}_{\tau,t} - \bar{\varepsilon}_\tau - (1-\theta) \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau dt}{\theta dt} \\
 -\nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} - \frac{p_{\tau,t} - p_\tau - (1-\theta) \dot{p}_\tau dt}{\chi(T_{\tau,t}^u) \theta dt} + 3\alpha (T_{\tau,t}) \dot{T}_{\tau,t} & = 0 \\
 & \text{Pour } i = 1, \dots, N_c \\
 & \frac{\underline{\alpha}_{i\tau,t} - \underline{\alpha}_{i\tau} - (1-\theta) \dot{\underline{\alpha}}_{i\tau} dt}{\theta dt} \approx \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) (\underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t}) - \gamma_i \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \underline{\alpha}_{i\tau,t} \\
 \Rightarrow \underline{\alpha}_{i\tau,t} & \approx \frac{\underline{\alpha}_{i\tau} + (1-\theta) \dot{\underline{\alpha}}_{i\tau} dt + \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) (\underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t})}{1 + \gamma_i \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \theta dt} \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{X}_{\tau,t} \approx \underline{\tilde{X}}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) + 2h_X(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) (\underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t}) \\ h_X(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) := \sum_{i=1}^{N_c} \frac{C_i}{3(1 + \gamma_i \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \theta dt)}, \quad \underline{\tilde{X}}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) := \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C_i \frac{\underline{\alpha}_{i\tau} + (1-\theta) \dot{\underline{\alpha}}_{i\tau} dt}{1 + \gamma_i \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \theta dt} \end{array} \right. \\
 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [1 + 2(\mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}))] (\underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t}) \approx \underline{s}_{\tau,t}^p - \underline{\tilde{X}}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) \\ \underline{s}_{\tau,t}^p := \underline{s}_\tau + (1-\theta) \dot{\underline{s}}_\tau dt + 2\mu (T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t}) \end{array} \right.
 \end{aligned} \tag{2.74}$$

On remplacera dans la suite le terme "  $\approx$  " par l'égalité " = " de 2.74. De plus, nous admettrons l'équivalence :

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_{\tau,t} \geq \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau,t}) & \Leftrightarrow \bar{\sigma}_{\tau,t}^p(0) \geq \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_\tau + (1-\theta) dt \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau) \\
 \bar{\sigma}_{\tau,t}^p(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) & := \sqrt{\frac{3}{2}} (\underline{s}_{\tau,t}^p - \underline{\tilde{X}}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t})) : (\underline{s}_{\tau,t}^p - \underline{\tilde{X}}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}))
 \end{aligned} \tag{2.75}$$

En vertu de celle-ci, nous distinguons deux cas :

- 1er cas :  $\bar{\sigma}_{\tau,t}^p(0) < \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_\tau + (1-\theta) dt \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau) \Rightarrow \bar{\sigma}_{\tau,t} < \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau,t})$ , comportement purement élastique de  $\underline{s}_{\tau,t}$

Dans 2.74 on obtient,

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\
 & \underline{s}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t})) = \underline{s}_\tau + (1-\theta) \dot{\underline{s}}_\tau dt + 2\mu (T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t}) \\
 \Rightarrow \frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\varepsilon}}(\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t})) & = 2\mu (T_{\tau,t}^u) \theta dt \underline{\underline{J}} \\
 \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) & = \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} = 0
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

- 2e cas :  $\bar{\sigma}_{\tau,t}^p(0) \geq \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_\tau + (1 - \theta) dt \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau) \Rightarrow \bar{\sigma}_{\tau,t} \geq \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau,t})$ ,  
comportement élasto-viscoplastique de  $\underline{s}_{\tau,t}$

De 2.74 on obtient,

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\
 & \underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t} = \frac{\underline{s}_{\tau,t}^p - \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})}{1 + 3 \left( \mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) \theta dt \frac{\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}}{\bar{\sigma}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})}} \\
 & \Rightarrow \bar{\sigma}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) + 3 \left( \mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) \theta dt \dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t} = \bar{\sigma}_{\tau,t}^p(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \\
 & \bar{\sigma}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) = \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_\tau + ((1 - \theta) \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau + \theta \dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) dt) \\
 & \quad + \sqrt{3}^{m(T_{\tau,t}^u)+1} K_{vp}(T_{\tau,t}^u) \dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^{m(T_{\tau,t}^u)} \\
 & (1 + 2h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})) \underline{X}_{\tau,t} = \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) + 2h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \underline{s}_{\tau,t} \\
 & \Rightarrow \begin{cases} \underline{s}_{\tau,t} = (1 - h_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})) \underline{s}_{\tau,t}^p + h_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}), \\ h_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) := \frac{2\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})}{1 + 2 \left( \mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) \theta dt \dot{\lambda}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})} \end{cases}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.77)$$

Nous pouvons observer de 2.77 que  $\underline{s}_{\tau,t}$  et  $\underline{X}_{\tau,t}$  sont deux fonctions de  $\underline{\dot{\varepsilon}}(v_{\tau,t})$  et  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}$ , et que ce dernier pour  $dt$  suffisamment petit est une fonction de  $\underline{\dot{\varepsilon}}(v_{\tau,t})$ . Nous en déduisons donc que  $\underline{s}_{\tau,t}$  est une fonction de  $\underline{\dot{\varepsilon}}(v_{\tau,t})$  et la dérivée  $\frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}}$ , appelée module tangent, est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}} &= 2\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt (1 - h_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})) \underline{J} \\
 &+ 3\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \gamma_g \left( -h'_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \left( \underline{s}_{\tau,t}^p - \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) + h_s(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \tilde{X}'_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) \\
 & \quad \otimes \frac{\underline{s}_{\tau,t}^p - \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})}{\bar{\sigma}_{\tau,t}^p(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})} \\
 \gamma_g^{-1} &= (\bar{\sigma}_{\tau,t})'(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) + 3 \left( \mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \right) \theta dt + 3h'_X(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}) \theta dt \dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t} \\
 & \quad - (\bar{\sigma}_{\tau,t}^p)'(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t})
 \end{aligned} \quad (2.78)$$

En absence d'écoulement cinématique, c'est-à-dire pour  $C_i(T^u) = 0, i = 1, \dots, N_c$ , nous obtenons les simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{X}_{\tau,t} = \tilde{X}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) = \underline{0}, \quad h_X(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) = 0 \\ \underline{s}_{\tau,t} = \frac{\underline{s}_{\tau,t}^p}{1 + 3\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \frac{\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}}{\bar{\sigma}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t})}} \\ \bar{\sigma}_{\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}) + 3\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} = \bar{\sigma}_{\tau,t0}^p, \quad \bar{\sigma}_{\tau,t0}^p := \sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_{\tau,t}^p : \underline{s}_{\tau,t}^p} \end{array} \right. \quad (2.79)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}} = 2\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \left[ \beta \underline{J} - \gamma \underline{s}_{\tau,t} \otimes \underline{s}_{\tau,t} \right] \\ \beta = \frac{\bar{\sigma}_{\tau,t}}{\bar{\sigma}_{\tau,t0}^p}, \quad \gamma = \frac{3}{2\bar{\sigma}_{\tau,t}^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{3\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt} \frac{d\bar{\sigma}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}}} + \beta - 1 \right) \end{array} \right.$$

Cette expression du module tangent  $\frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}}$  correspond à celle de Jaouen [66] développée dans le cadre d'un comportement élasto-viscoplastique à écrouissage purement isotrope. Ceci démontre la généralité de l'expression 2.78 de  $\frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}}$  que nous avons développée dans le cadre de l'écrouissage mixte (isotrope et cinématique).

Nous pouvons donc conclure que le tenseur  $\underline{s}_{\tau,t}$  est, dans les deux cas énumérés ci-dessus, une fonction du tenseur  $\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t})$  et dans la suite, on conviendra de noter  $\underline{s}_{\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{\tau,t}))$ . Par ailleurs, nous notons également que la discrétisation temporelle du problème mécanique repose aussi sur la discrétisation temporelle de l'équation de conservation de la masse 2.24 donnée par :

$$\begin{aligned} & \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ & \frac{\rho_{\tau,t} - \rho_{\tau} - (1 - \theta) \dot{\rho}_{\tau} dt}{\theta dt} + \rho_{\tau,t} \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} \approx 0 \\ \Rightarrow & \rho_{\tau,t} \approx (1 - \theta dt \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t}) (\rho_{\tau} + (1 - \theta) \dot{\rho}_{\tau} dt) \end{aligned} \quad (2.80)$$

Ainsi le problème mécanique temporellement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{M\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.74 et 2.80, se formule comme suit :

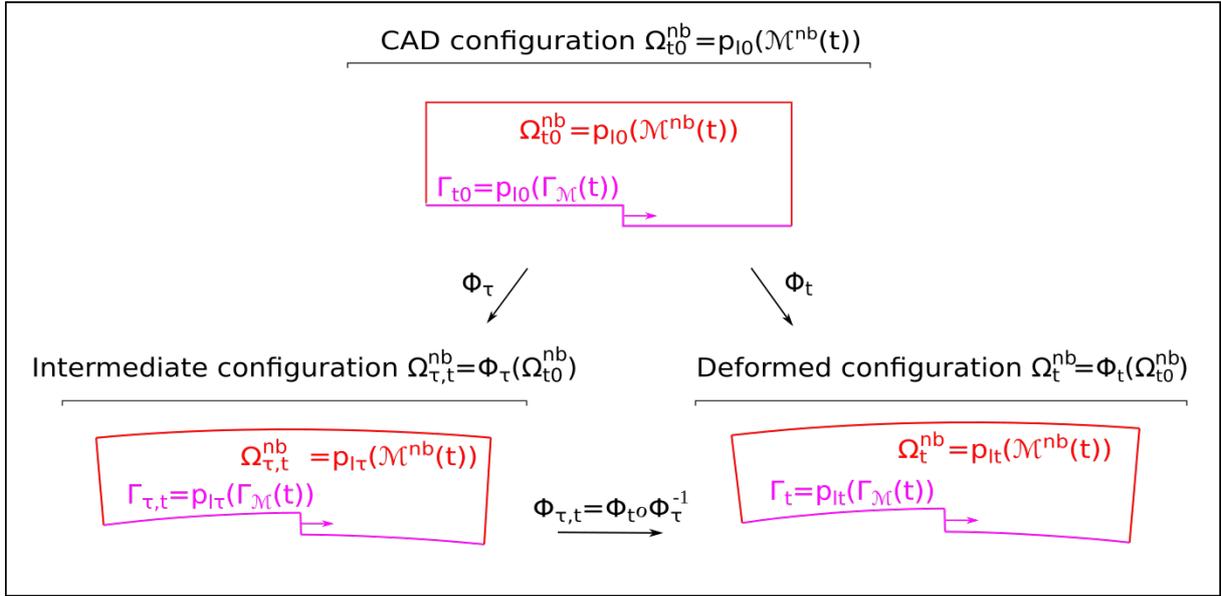
$$(\mathcal{P}_{M\tau,t}) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \underline{v}_{\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3 \text{ et } p_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t}), \text{ vérifiant :} \\
 \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\
 \nabla \cdot \underline{s}_{\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) - \nabla p_{\tau,t} = \underline{0} \\
 -\nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} - \frac{p_{\tau,t}}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} = -\frac{p_{\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{\tau} dt}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} - 3\alpha \left( T_{\tau,t} \right) \dot{T}_{\tau,t} \\
 \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) = \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^{vp}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^{vp} = \dot{\lambda} \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \left( \underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t} \right) \\
 \underline{s}_{\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) = (1 - h_s \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right)) \underline{s}_{\tau,t}^p \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) + h_s \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \underline{\tilde{X}}_{\tau} \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{\tau,t} - \sigma_Y \left( T_{\tau,t}^u \right) - R_{\bar{\varepsilon}} \left( \bar{\varepsilon}_{\tau,t} \right)}{\sqrt{3}^{m \left( T_{\tau,t}^u \right) + 1} K_{vp} \left( T_{\tau,t}^u \right)} \right]_+^{m \left( T_{\tau,t}^u \right) - 1} \\
 \rho_{\tau,t} = \left( 1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} \right) \left( \rho_{\tau} + (1-\theta) \dot{\rho}_{\tau} dt \right) \\
 \text{Sur } \partial\Omega_{\tau,t} \\
 \underline{v}_{\tau,t} = \underline{0} \text{ sur } \left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^u := \Phi_{\tau,t}^{-1} \left( \left( \partial\Omega_t \right)^u \right), \\
 \underline{\sigma}_{\tau,t} \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^f := \Phi_{\tau,t}^{-1} \left( \left( \partial\Omega_t \right)^f \right)
 \end{array} \right. \quad (2.81)$$

Sous forme variationnelle, le problème mécanique  $(\mathcal{P}_{M\tau,t})$  se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{M\tau,t}) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \underline{v}_{\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3 \text{ tel que } \underline{v}_{\tau,t}|_{\left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^u} = \underline{0} \text{ et } p_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t}) \\
 \text{vérifiant :} \\
 \forall \underline{w} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3, \text{ tel que } \underline{w}|_{\left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^u} = \underline{0}, \\
 \int_{\Omega_{\tau,t}} \underline{s}_{\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) : \underline{\varepsilon} \left( \underline{w} \right) - \int_{\Omega_{\tau,t}} p_{\tau,t} \nabla \cdot \underline{w} = 0 \\
 \forall q \in L^2(\Omega_{\tau,t}), \\
 -\int_{\Omega_{\tau,t}} q \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} - \int_{\Omega_{\tau,t}} \frac{p_{\tau,t} - p_{\tau} - (1-\theta) \dot{p}_{\tau} dt}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} q + \int_{\Omega_{\tau,t}} 3\alpha \left( T_{\tau,t} \right) \dot{T}_{\tau,t} q = 0 \\
 \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\
 \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) = \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^{vp}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}^{vp} = \dot{\lambda} \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \left( \underline{s}_{\tau,t} - \underline{X}_{\tau,t} \right) \\
 \underline{s}_{\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) = (1 - h_s \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right)) \underline{s}_{\tau,t}^p \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) + h_s \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \underline{\tilde{X}}_{\tau} \left( \underline{\tilde{\varepsilon}}_{\tau,t} \right) \\
 \underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{\tau,t} - \sigma_Y \left( T_{\tau,t}^u \right) - R_{\bar{\varepsilon}} \left( \bar{\varepsilon}_{\tau,t} \right)}{\sqrt{3}^{m \left( T_{\tau,t}^u \right) + 1} K_{vp} \left( T_{\tau,t}^u \right)} \right]_+^{m \left( T_{\tau,t}^u \right) - 1} \\
 \rho_{\tau,t} = \left( 1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} \right) \left( \rho_{\tau} + (1-\theta) \dot{\rho}_{\tau} dt \right)
 \end{array} \right. \quad (2.82)$$

**Discrétisation temporelle du problème cinématique de positionnement**

Le problème cinématique de positionnement  $(\mathcal{P}_{C_{\tau,t}})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$  portant sur le domaine matériel non construit  $\mathcal{M}^{nb}(t)$ , nous considérons donc sa configuration intermédiaire  $\Omega_{\tau,t}^{nb} := \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Omega_t^{nb})$  servant de configuration lagrangienne actualisée (figure 2.16). Plus précisément, un changement de variable spatiale sera effectué afin de passer du domaine géométrique CAO  $\Omega_{t0}^{nb}$  au domaine  $\Omega_{\tau,t}^{nb}$ . Nous considérerons de plus la configuration intermédiaire de l'interface  $\Gamma_{\tau,t} = \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Gamma_t)$  de l'interface matérielle  $\Gamma_{\mathcal{M}}(t)$  (figure 2.16).


 FIGURE 2.16 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{\tau,t}^{nb}$ ,  $\tau < t$  du domaine non construit  $\mathcal{M}_t^{nb}$ 

La discrétisation temporelle du problème cinématique de positionnement repose principalement sur l'hypothèse 2.69 selon laquelle la transformation géométrique  $\Phi_{\tau,t}$  est infinitésimale. En effet, le tenseur des déformations de Green-Lagrange  $\underline{E}_t^i := \underline{E}^i(\cdot, t)$  à l'instant  $t$ , de par sa définition, admet dans  $\Omega_{t0}^{nb}$  la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}
 \underline{E}_t^i &:= \frac{1}{2} \left( \underline{F}_t^{iT} \underline{F}_t^i - \underline{1} \right), \quad \underline{F}_t^i := \underline{F}^i(\cdot, t) \\
 &= \frac{1}{2} \left( \underline{F}_{\tau}^{iT} \underline{F}_{\tau,t}^i \underline{F}_{\tau,t}^T \underline{F}_{\tau}^i - \underline{1} \right), \quad \underline{F}_{\tau,t}^i := \underline{F}_t^i \underline{F}_{\tau}^{-1} \\
 &= \underline{F}_{\tau}^{iT} \underline{E}_{\tau,t}^i \underline{F}_{\tau}^i + \underline{E}_{\tau,t}^i, \quad \underline{E}_{\tau,t}^i := \frac{1}{2} \left( \underline{F}_{\tau,t}^{iT} \underline{F}_{\tau,t}^i - \underline{1} \right) \\
 &= \underline{F}_{\tau}^{iT} \left( \underline{\varepsilon}(\bar{u}_{n\tau,t}) + O(\|\nabla \bar{u}_{n\tau,t}\|^2) \right) \cdot \underline{F}_{\tau}^i + \underline{E}_{\tau,t}^i \\
 \underline{E}_t^i &= \underline{F}_{\tau}^{iT} \underline{\varepsilon}(\bar{u}_{n\tau,t}) \underline{F}_{\tau}^i + \underline{E}_{\tau,t}^i + O(\|\nabla \bar{u}_{n\tau,t}\|^2)
 \end{aligned} \tag{2.83}$$

Ainsi, dans la formulation variationnelle de  $(\mathcal{P}_{Ct})$  nous obtenons par application de 2.70 et 2.83 :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}'_t(\underline{U}_{nt}) \delta \underline{W}_n &= \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}} \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\underline{u}}_{n\tau,t}) \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i + \underline{\underline{E}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i + O(\|\nabla \underline{\underline{u}}_{n\tau,t}\|^2) \right) \\
 &: \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T \left( \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{\underline{u}}_{n\tau,t}^T \right) \nabla \delta \underline{w}_n \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i \right) + \eta_p \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i} \left( \underline{u}_{n\tau} + \underline{\underline{u}}_{n\tau,t} \right) \cdot \delta \underline{w}_n \\
 \mathcal{F}'_t(\underline{U}_{nt}) \delta \underline{W}_n &\approx \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i} \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T dt \left( (1-\theta) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}_{n\tau}) + \theta \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}_{n\tau,t}) \right) \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i + \underline{\underline{E}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i \right) \\
 &: \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T \nabla \delta \underline{w}_n \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i \right) + \eta_p \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i} \left( \underline{u}_{n\tau} + dt \left( (1-\theta) \underline{v}_{n\tau} + \theta \underline{v}_{n\tau,t} \right) \right) \cdot \delta \underline{w}_n \\
 \frac{\partial \mathcal{G}_t}{\partial \underline{W}_n}(\underline{Q}_{nt}, \underline{U}_{nt}) \delta \underline{W}_n &= - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} q_{n\tau,t} tr \left( \nabla \delta \underline{w}_n \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau},t}}^i \right) \\
 &= - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} q_{n\tau,t} tr \left( \nabla \delta \underline{w}_n \left( \underline{\underline{1}} + \nabla \underline{\underline{u}}_{n\tau,t} \right) \right) \\
 &\approx - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} q_{n\tau,t} \nabla \cdot \delta \underline{w}_n \\
 \frac{d\mathcal{G}_t}{dt}(\delta R_n, \underline{U}_{nt0}) &= - \int_{\Omega_{t0}^{nb}} \delta R_n \frac{d \det \underline{\underline{F}}}{d \underline{\underline{F}}}(\underline{U}_{nt0}) : \nabla \underline{V}_{nt0} = - \int_{\Omega_{t0}^{nb}} \delta R_n \det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{t}}}^i \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{t}}}^{i-T} : \nabla \underline{V}_{nt0} \\
 &= - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \delta r_n tr \left( \nabla \underline{v}_{n\tau,t} \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau},t}}^i{}^{-1} \right) \\
 &\approx \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \delta r_n \nabla \cdot \underline{v}_{n\tau,t} \\
 \underline{U}_{nt} = \underline{U}_t \text{ sur } \Gamma_{t0} &\Rightarrow \frac{d\underline{U}_{nt}}{dt} = \frac{d\underline{U}_t}{dt} \text{ sur } \Gamma_{t0} \Rightarrow \underline{v}_{n\tau,t} = \underline{v}_{\tau,t} \text{ sur } \Gamma_{\tau,t}
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Avec,  $\delta \underline{w}_n := \delta \underline{W}_n \circ \Phi_{\tau}^{-1}$  et  $\delta r_n := \delta R_n \circ \Phi_{\tau}^{-1}$ .

Ainsi le problème cinématique de positionnement temporellement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{C\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.84 et de la formulation variationnelle de  $(\mathcal{P}_{C\tau})$ , problème cinématique posé à l'instant  $\tau$  se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{C\tau,t}) \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Trouver } \underline{v}_{n\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}^{nb}) \right)^3 \text{ tel que } \underline{v}_{n\tau,t} = \underline{v}_{\tau,t} \text{ sur } \Gamma_{\tau,t} \\
 \text{et } \delta q_{n\tau,t} = q_{n\tau,t} - q_{n\tau} \in L^2(\Omega_{\tau,t}^{nb}) \text{ vérifiant :} \\
 \forall \delta \underline{w}_n \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}^{nb}) \right)^3 \text{ tel que } \delta \underline{w}_n = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_{\tau,t}, \\
 \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i} \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T dt \left( (1-\theta) \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}_{n\tau}) + \theta \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}(\underline{v}_{n\tau,t}) \right) \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i \right) : \left( \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i{}^T \nabla \delta \underline{w}_n \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i \right) \\
 + \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{\underline{F}}_{\underline{\underline{\tau}}}^i} \left( (1-\theta) \underline{v}_{n\tau} + \theta \underline{v}_{n\tau,t} \right) \cdot \delta \underline{w}_n - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \delta q_{n\tau,t} \nabla \cdot \delta \underline{w}_n = 0 \\
 \forall \delta r_n \in L^2(\Omega_{\tau,t}^{nb}), \quad - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \delta r_n \nabla \cdot \underline{v}_{n\tau,t} = 0
 \end{array} \right. \tag{2.85}$$

### 2.3.2 Discrétisation spatiale

La discrétisation spatiale du modèle thermomécanique du procédé DED repose sur la discrétisation temporelle présentée ci-dessus. En effet, pour chacun des trois problèmes discrétisés, elle consiste à :

- définir un maillage régulier et conforme du domaine du calcul, c'est-à-dire qu'au minimum la frontière de ce dernier, ainsi que sa partition doit être valablement représentée ;
- définir le/les espaces d'approximations des différentes variables mises en jeu ;
- formuler numériquement le problème en question par application de la méthode des éléments finis.

Nous adopterons dans la suite du présent document, un maillage triangulaire (d'éléments tétraèdres) en raison de sa grande flexibilité pour les géométries très complexes notamment dans les opérations d'adaptation de maillage.

#### Discrétisation spatiale du problème thermique

On considère un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_{h\tau,t}$  du domaine  $\Omega_{\tau,t}$  caractérisé par les ensembles des nœuds  $(S_I)_{I=1,\dots,\mathcal{N}}$  et des tétraèdres  $(T_l)_{l=1,\dots,\mathcal{N}_T}$ , et la connectivité  $(\mathcal{C}(l,k))_{l=1,\dots,\mathcal{N}_T,k=1,\dots,4}$  : chaque tétraèdre  $T_l, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T$  a pour sommets les quatre nœuds  $S_{\mathcal{C}(l,1)}, \dots, S_{\mathcal{C}(l,4)}$ .  $\mathcal{T}_{h\tau,t}$  doit conformément représenter les différentes parties  $(\partial\Omega_{\tau,t})^d, (\partial\Omega_{\tau,t})^n, (\partial\Omega_{\tau,t})^r$  et  $\Gamma_{T\tau,t}$  de la frontière  $\partial\Omega_{\tau,t}$ . Il doit aussi conformément représenter l'interface  $\partial\Omega_{\tau} \cap \partial\delta\Omega_{\tau,t}$  afin d'initialiser convenablement la température des éléments nouvellement activés.

On définit donc :

- les deux ensembles d'indices  $D_h = \{I = 1, \dots, \mathcal{N}, S_I \in (\partial\Omega_{h\tau,t})^d\}$  et  $D_h^c = \{1, \dots, \mathcal{N}\} \setminus D_h$  ;
- l'espace des fonctions continues  $P_1$  par morceaux  $\mathcal{V}_h = \{v \in H^1(\Omega_{h\tau,t}), v|_{T_l} \text{ est } P_1 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T\}$  ;
- la base de l'espace  $\mathcal{V}_h$  donnée par la famille des fonctions de type chapeau  $(\varphi_I)_{I=1,\dots,\mathcal{N}} \subset \mathcal{V}_h$  vérifiant  $\varphi_I(S_J) = \delta_{IJ}, \forall I, J = 1, \dots, \mathcal{N}$  ;
- l'espace des fonctions  $P_1$  par morceaux  $\mathcal{V}_h^{dis} = \{v \in L^2(\Omega_{h\tau,t}), v|_{T_l} \text{ est } P_1 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T\}$  ;
- l'espace des fonctions  $P_0$  par morceaux  $\mathcal{V}_{h0} = \{v \in L^2(\Omega_{h\tau,t}), v|_{T_l} \text{ est } P_0 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T\}$  ;
- l'opérateur de moyennisation  $\mathcal{P}_0$  qui à tout champ  $v \in \mathcal{V}_h^{dis}$  associe l'unique champ  $\mathcal{P}_0 v \in \mathcal{V}_{h0}$  vérifiant :  $\mathcal{P}_0 v|_{T_l} = \frac{1}{|T_l|} \int_{T_l} v = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 v(S_{\mathcal{C}(l,k)}), \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T$ .

Ainsi, le problème thermique spatialement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{Th\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.73, se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{Th\tau,t}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } T_{h\tau,t} = \sum_{J \in D_h^c} T_{h\tau,t}(S_J) \varphi_J + \sum_{J \in D_h} T^d(S_J) \varphi_J \in \mathcal{V}_h \text{ tel que } \forall \varphi_I, I \in D_h^c : \\ F_I(T_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \rho_\tau c_p (\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \frac{T_{h\tau,t} - T_{h\tau} - (1-\theta) \dot{T}_{h\tau} dt}{\theta dt} \varphi_I \\ \quad + \int_{\Omega_{h\tau,t}} \kappa (\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \nabla T_{h\tau,t} : \nabla \varphi_I \\ \quad + \int_{(\partial\Omega_{h\tau,t})^r} [h + \sigma \varepsilon (\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^2 + T_g^2) (\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t} + T_g)] (T_{h\tau,t} - T_g) \varphi_I \\ \quad + \int_{\Gamma_{Th\tau,t}} \rho_0 v_l (s(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) - s(T_\infty)) T_{\tau,t} \varphi_I - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \dot{Q}_{\tau,t} \varphi_I - \int_{(\partial\Omega_{h\tau,t})^n} \varphi_i = 0 \end{array} \right. \quad (2.86)$$

### Discrétisation spatiale du problème mécanique

On considère le même maillage triangulaire  $\mathcal{T}_{h\tau,t}$  du domaine  $\Omega_{\tau,t}$  que celui utilisé pour le problème thermique. En plus des propriétés de conformité vérifiées dans le cadre de la discrétisation spatiale du problème thermique,  $\mathcal{T}_{h\tau,t}$  doit également conformément représenter les différentes parties  $(\partial\Omega_{\tau,t})^u$  et  $(\partial\Omega_{\tau,t})^\sigma$  de la frontière  $\partial\Omega_{\tau,t}$ . Il doit aussi conformément représenter la zone de chauffage  $\Omega_{\tau,t}^H$  afin d'y appliquer convenablement les propriétés mécaniques à la température du solidus.

Nous proposons d'adopter la formulation d'éléments finis mixte  $P_1 + / P_1$  *mini* – *élément* telle que développée par O. Jaouen [66]. Pour cela, nous définissons :

- les deux ensembles d'indices  $U_h = \{I = 1, \dots, \mathcal{N}, S_I \in (\partial\Omega_{h\tau,t})^u\}$  et  $U_h^c = \{1, \dots, \mathcal{N}\} \setminus U_h$  ;
- l'espace des fonctions vectorielles continues par morceaux  $\mathcal{V}_h^3 = \left\{ \underline{v} = v_i \underline{e}_i \in \left( H^1(\Omega_{h\tau,t}) \right)^3, v_i \in \mathcal{V}_h \right\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions vectorielles chapeaux  $(\underline{\varphi}_{I,i} = \varphi_I \underline{e}_i)_{I=1, \dots, \mathcal{N}, i=1,2,3} \subset \mathcal{V}_h^3$  ;
- Pour chaque tétraèdre  $T_l, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T$ , son centre de gravité  $S_{Gl}$  et ses quatre sous-tétraèdres  $T_{l,1} \equiv (S_{Gl}, S_{C(l,2)}, S_{C(l,3)}, S_{C(l,4)})$ ,  $T_{l,2} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{Gl}, S_{C(l,3)}, S_{C(l,4)})$ ,  $T_{l,3} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{C(l,2)}, S_{Gl}, S_{C(l,4)})$  et  $T_{l,4} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{C(l,2)}, S_{C(l,3)}, S_{Gl})$  ;
- l'espace des fonctions bulles  $\mathcal{V}_{hb} = \left\{ v_b \in H^1(\Omega_{h\tau,t}), v_b|_{T_{l,k}} \text{ est } P_1 \text{ et } v_b|_{\partial T_l} = 0, \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T, k = 1, \dots, 4 \right\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions bulles de type chapeau  $(\varphi_{bl})_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T} \subset \mathcal{V}_{hb}$  vérifiant  $\varphi_{bl}(S_{Gl'}) = \delta_{ll'}, \forall l, l' = 1, \dots, \mathcal{N}_T$  ;
- l'espace des fonctions vectorielles bulles  $\mathcal{V}_{hb}^3 = \left\{ \underline{v} = v_{bi} \underline{e}_i \in H^1(\Omega_{h\tau,t}), v_{bi} \in \mathcal{V}_{hb} \right\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions vectorielles bulles de type chapeau  $(\underline{\varphi}_{bl,i} = \varphi_{bl} \underline{e}_i)_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T, i=1,2,3} \subset \mathcal{V}_{hb}^3$  ;

— l'espace des fonctions tensorielles symétriques  $P_0$  par morceaux

$$(\mathcal{V}_{h0})_s^{3 \times 3} = \left\{ \underline{v} = v_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in \left( L^2(\Omega_{h\tau,t}) \right)^{3 \times 3}, v_{ij} = v_{ji} \text{ et } v_{ij}|_{T_l} \text{ est } P_0 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T \right\}.$$

Ainsi, le problème mécanique spatialement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{Mh\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.82, se formule comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } \underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t} \in \mathcal{V}_h^3 \oplus \mathcal{V}_{hb}^3, \text{ avec } \underline{v}_{h\tau,t} = \sum_{J \in U_h^c} v_{jh\tau,t}(S_J) \varphi_J \underline{e}_j \in \mathcal{V}_h^3, \\
 & \underline{v}_{hb\tau,t} = \sum_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T} v_{jhl\tau,t} \varphi_{bl} \underline{e}_j \in \mathcal{V}_{hb}^3, \text{ et } p_{h\tau,t} = \sum_{J=1}^{\mathcal{N}} p_{h\tau,t}(S_J) \varphi_J \in \mathcal{V}_h \\
 & \text{vérifiant :} \\
 & \forall \varphi_{I,i}, I \in U_h^c, i = 1, 2, 3, \\
 & F_{vI,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \left( \underline{s}_{h\tau,t}(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t})) + \underline{s}_{hb\tau,t}(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{hb\tau,t})) \right) : \underline{e}(\varphi_{I,i}) \\
 & \quad - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{I,i} = 0 \\
 & \forall \varphi_{bl,i}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T, i = 1, 2, 3, \\
 & F_{bl,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \left( \underline{s}_{h\tau,t}(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t})) + \underline{s}_{hb\tau,t}(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{hb\tau,t})) \right) : \underline{e}(\varphi_{bl,i}) \\
 & \quad - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{bl,i} = 0 \\
 & \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}, \\
 & F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \\
 & \quad - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \varphi_I \nabla \cdot (\underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \frac{p_{h\tau,t} - p_{h\tau} - (1-\theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \theta dt \varphi_I \\
 & \quad + \int_{\Omega_{h\tau,t}} 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \varphi_I = 0 \\
 & \text{Dans } \Omega_{h\tau,t} \\
 & \dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t}) = \dot{\underline{e}}_{h\tau,t}^e + \dot{\underline{e}}_{h\tau,t}^{vp}, \dot{\underline{e}}_{h\tau,t}^{vp} = \dot{\lambda}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t}) (\underline{s}_{h\tau,t} - \underline{X}_{h\tau,t}) \\
 & \underline{s}_{h\tau,t}(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t})) = (1 - h_s(\dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t})) \underline{s}_{h\tau,t}^p(\dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t})) + h_s(\dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t}) \underline{X}_{h\tau,t}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t}) \\
 & \underline{s}_{h\tau,t}^p = \underline{s}_{h\tau} + (1 - \theta) \dot{\underline{s}}_{h\tau} dt + 2\mu(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt \dot{\underline{e}}(\underline{v}_{h\tau,t}), \\
 & \underline{s}_{hb\tau,t} = 2\mu(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) (1 - h_s(\dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t})) \theta dt \dot{\underline{e}}(\underline{v}_{hb\tau,t}) \\
 & \dot{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{h\tau,t} - \sigma_Y(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{h\tau,t})}{\sqrt{3}^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)+1}} K_{vp}(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \right]_+^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)-1} \\
 & \rho_{h\tau,t} = (1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{h\tau,t}) (\rho_{h\tau} + (1 - \theta) \dot{\rho}_{h\tau} dt)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.87)$$

Or, chaque fonction vectorielle bulle  $\varphi_{bl}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T$  vérifie la propriété :

$$\int_{T_l} \frac{\partial \varphi_{bl}}{\partial X_i} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (2.88)$$

En exploitation de celle-ci, et des propriétés de support réduit de ces fonctions ainsi que des fonctions  $\varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}$ , nous obtenons de 2.87,

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \forall \underline{\varphi}_{I,i}, i \in U_h^c, i = 1, 2, 3, \\
 F_{vI,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \underline{s}_{h\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{h\tau,t})) : \underline{e}(\underline{\varphi}_{I,i}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{I,i} = 0 \\
 \Leftrightarrow \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \underline{s}_{h\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t} (S_C(\nu,k)) \varphi_C(\nu,k) \underline{e}_j \right) \right) : \underline{e}(\underline{\varphi}_{I,i}) \\
 \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 p_{h\tau,t} (S_C(\nu,k)) \varphi_C(\nu,k) \nabla \cdot \underline{\varphi}_{I,i} = 0 \\
 \forall \underline{\varphi}_{bl,i}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T, i = 1, 2, 3, \\
 F_{bl,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \underline{s}_{hb\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{hb\tau,t})) : \underline{e}(\underline{\varphi}_{bl,i}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} = 0 \\
 \Leftrightarrow \int_{T_I} \underline{s}_{hb\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(v_{jhbl\tau,t} \varphi_{bl} \underline{e}_j)) : \underline{e}(\underline{\varphi}_{bl,i}) - \int_{T_I} \sum_{k=1}^4 p_{h\tau,t} (S_C(l,k)) \varphi_C(l,k) \nabla \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} = 0 \\
 K_{bbl,ij} v_{jhbl\tau,t} = \sum_{k=1}^4 K_{bpl,ik} p_{h\tau,t} (S_C(l,k)) \Leftrightarrow v_{ihbl\tau,t} = \sum_{k=1}^4 K_{bbl,ii}^{-1} K_{bpl,i'k} p_{h\tau,t} (S_C(l,k)) \\
 K_{bbl,ij} := \int_{T_I} \underline{s}_{hb\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(\varphi_{bl} \underline{e}_j)) : \underline{e}(\underline{\varphi}_{bl,i}), K_{bbl,ii}^{-1} K_{bbl,i'j} = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, 3 \\
 K_{bpl,ik} := \int_{T_I} \varphi_C(l,k) \nabla \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} = \int_{T_I} \varphi_C(l,k) \frac{\partial \varphi_{bl}}{\partial X_i} \quad \forall i = 1, 2, 3, k = 1, \dots, 4
 \end{array} \right. \quad (2.89)$$

Ainsi, par le procédé de condensation de la fonction bulle, nous pouvons obtenir une simplification de l'équation  $F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = 0, i = 1, \dots, \mathcal{N}$ . En effet, de 2.87 et 2.89, nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}, \\
 F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \varphi_I \nabla \cdot (\underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \frac{p_{h\tau,t}}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \theta dt \varphi_I \\
 \quad + \int_{\Omega_{h\tau,t}} \left( \frac{p_{h\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} + 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \right) \varphi_I = 0 \\
 \Leftrightarrow - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \varphi_I \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t} (S_C(\nu,k)) \frac{\partial \varphi_C(\nu,k)}{\partial X_j} - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} v_{jhbl\tau,t} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I \\
 \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \frac{\sum_{k=1}^4 p_{h\tau,t} (S_C(\nu,k)) \varphi_C(\nu,k)}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \theta dt \varphi_I \\
 \quad + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \left( \frac{p_{h\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} + 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \right) \varphi_I = 0 \\
 \Leftrightarrow - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \varphi_I \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t} (S_C(\nu,k)) \frac{\partial \varphi_C(\nu,k)}{\partial X_j} \\
 \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( K_{bbl',jj'}^{-1} K_{bpl',j'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I + \frac{\varphi_C(\nu,k)}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \theta dt \varphi_I \right) p_{h\tau,t} (S_C(\nu,k)) \\
 \quad + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{p_{h\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} + 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \right) (S_C(\nu,k)) \varphi_C(\nu,k) \varphi_I = 0
 \end{array} \right. \quad (2.90)$$

Étant donc dispensé du calcul de l'inconnue  $\underline{v}_{hb}$  du problème  $(\mathcal{P}_{Mh\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , nous pouvons donc le reformuler comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } \underline{v}_{h\tau,t} = \sum_{J \in U_h^c} v_{jh\tau,t}(S_J) \varphi_{J\mathbf{e}_j} \in \mathcal{V}_h^3 \text{ et } p_{h\tau,t} = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} p_{h\tau,t}(S_I) \varphi_I \in \mathcal{V}_h, \text{ vérifiant :} \\
 & \quad \forall \underline{\varphi}_{I,i}, I \in U_h^c, i = 1, 2, 3, \\
 & F_{vI,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \underline{s}_{h\tau,t} \left( \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t}(S_{C(I',k)}) \varphi_{C(I',k)} \mathbf{e}_j \right) \right) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_{I,i}) \\
 & \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 p_{h\tau,t}(S_{C(I',k)}) \varphi_{C(I',k)} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{I,i} = 0 \\
 & \quad \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}, \\
 & F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, p_{h\tau,t}) = - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \varphi_i \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t}(S_{C(I',k)}) \frac{\partial \varphi_{C(I',k)}}{\partial X_j} \\
 & \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( K_{bb'l',jj'}^{-1} K_{bpl',j'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I + \frac{\varphi_{C(I',k)}}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \varphi_I \right) p_{h\tau,t}(S_{C(I',k)}) \\
 & \quad + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{p_{h\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt} + 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \right) (S_{C(I',k)}) \varphi_{C(I',k)} \varphi_I = 0 \\
 & \quad \text{Dans } \Omega_{h\tau,t} \\
 & \quad \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{h\tau,t}) = \underline{\dot{\varepsilon}}_{h\tau,t}^e + \underline{\dot{\varepsilon}}_{h\tau,t}^{vp}, \quad \underline{\dot{\varepsilon}}_{h\tau,t}^{vp} = \dot{\lambda}(\dot{\varepsilon}_{h\tau,t}) (\underline{s}_{h\tau,t} - \underline{X}_{h\tau,t}) \\
 & \quad \underline{s}_{h\tau,t}(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{h\tau,t})) = (1 - h_s(\dot{\varepsilon}_{h\tau,t})) \underline{s}_{h\tau,t}^p(\underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{h\tau,t})) + h_s(\dot{\varepsilon}_{h\tau,t}) \underline{\tilde{X}}_{h\tau}(\dot{\varepsilon}_{h\tau,t}) \\
 & \quad \underline{s}_{h\tau,t}^p = \underline{s}_{h\tau} + (1-\theta) \dot{\underline{s}}_{h\tau} dt + 2\mu(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{h\tau,t}), \\
 & \quad \dot{\varepsilon}_{h\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{h\tau,t} - \sigma_Y(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{h\tau,t})}{\sqrt{3}^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)+1} K_{vp}(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \right]_+^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)-1} \\
 & \quad \rho_{h\tau,t} = (1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{h\tau,t}) (\rho_{h\tau} + (1-\theta) \dot{\rho}_{h\tau} dt)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.91)$$

### Discrétisation spatiale du problème cinématique de positionnement

On considère un maillage triangulaire  $\mathcal{T}_{h\tau,t}^{nb}$  du domaine inactif  $\Omega_{\tau,t}^{nb}$  caractérisé par les ensembles des nœuds  $(S_I)_{I=1,\dots,\mathcal{N}^{nb}}$  et des tétraèdres  $(T_l)_{l=1,\dots,\mathcal{N}_T^{nb}}$ , et la connectivité  $(\mathcal{C}(l,k))_{l=1,\dots,\mathcal{N}_T^{nb}, k=1,\dots,4}$  : chaque tétraèdre  $T_l, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}$  a pour sommets les quatre nœuds  $S_{C(l,1)}, \dots, S_{C(l,4)}$ .  $\mathcal{T}_{h\tau,t}^{nb}$  doit conformément représenter l'interface  $\Gamma_{\tau,t} := \partial\Omega_{\tau,t} \cap \partial\Omega_{\tau,t}^{nb}$ .

Afin de prendre en compte la contrainte de dualité sur le champ de vitesse  $\underline{v}_{n\tau,t}$ , nous proposons d'adopter la formulation d'éléments finis mixte  $P_1 + / P_1$  mini-élément suivant la même démarche que celle de la discrétisation du problème mécanique abordé ci-dessus.

Pour cela, nous définissons :

- les deux ensembles d'indices  $U_h^{nb} = \{I = 1, \dots, \mathcal{N}^{nb}, S_I \in \Gamma_{\tau,t}\}$  et  $U_h^{nb^c} = \{1, \dots, \mathcal{N}^{nb}\} \setminus U_h^{nb}$  ;

- l'espace des fonctions continues  $P_1$  par morceaux  
 $\mathcal{V}_h^{nb} = \{v \in H^1(\Omega_{h\tau,t}^{nb}), v|_{T_l} \text{ est } P_1 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}\};$
- la base de l'espace  $\mathcal{V}_h^{nb}$  donnée par la famille des fonctions chapeaux  $(\varphi_I)_{I=1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}} \subset \mathcal{V}_h$  vérifiant  $\varphi_I(S_J) = \delta_{IJ}, \forall I, J = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb};$
- l'espace des fonctions vectorielles continues par morceaux  
 $(\mathcal{V}_h^{nb})^3 = \{\underline{v} = v_i \underline{e}_i \in (H^1(\Omega_{h\tau,t}^{nb}))^3, v_i \in \mathcal{V}_h^{nb}\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions vectorielles de type chapeau  $(\underline{\varphi}_{I,i} = \varphi_I \underline{e}_i)_{I=1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}, i=1,2,3} \subset \mathcal{V}_h^{nb^3};$
- Pour chaque tétraèdre  $T_l, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}$ , son centre de gravité  $S_{Gl}$  et ses quatre sous-tétraèdres  $T_{l,1} \equiv (S_{Gl}, S_{C(l,2)}, S_{C(l,3)}, S_{C(l,4)}), T_{l,2} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{Gl}, S_{C(l,3)}, S_{C(l,4)}), T_{l,3} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{C(l,2)}, S_{Gl}, S_{C(l,4)})$  et  $T_{l,4} \equiv (S_{C(l,1)}, S_{C(l,2)}, S_{C(l,3)}, S_{Gl});$
- l'espace des fonctions bulles  
 $\mathcal{V}_{hb}^{nb} = \{v_b \in H^1(\Omega_{h\tau,t}^{nb}), v_b|_{T_{l,k}} \text{ est } P_1 \text{ et } v_b|_{\partial T_l} = 0, \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}, k = 1, \dots, 4\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions bulles de type chapeau  $(\varphi_{bl})_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}} \subset \mathcal{V}_{hb}^{nb}$  vérifiant  $\varphi_{bl}(S_{Gl'}) = \delta_{ll'}, \forall l, l' = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb};$
- l'espace des fonctions vectorielles bulles  $(\mathcal{V}_{hb}^{nb})^3 = \{\underline{v} = v_{ib} \underline{e}_i \in H^1(\Omega_{h\tau,t}^{nb}), v_{ib} \in \mathcal{V}_{hb}^{nb}\}$  et sa base donnée par la famille des fonctions vectorielles bulles de type chapeau  $(\underline{\varphi}_{bl,i} = \varphi_{bl} \underline{e}_i)_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}, i=1,2,3} \subset \mathcal{V}_{hb}^{nb^3};$
- l'espace des fonctions tensorielles  $P_0$  par morceaux  
 $(\mathcal{V}_{h0}^{nb})^{3 \times 3} = \{\underline{\underline{v}} = v_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j \in (L^2(\Omega_{h\tau,t}))^{3 \times 3}, v_{ij}|_{T_l} \text{ est } P_0 \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}\}.$

Ainsi, le problème cinématique de positionnement spatialement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{Ch\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , par exploitation de 2.85, se formule comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } \underline{v}_{nh\tau,t} + \underline{v}_{nhb\tau,t} \in (\mathcal{V}_h^{nb})^3 \oplus (\mathcal{V}_{hb}^{nb})^3, \\
 & \underline{v}_{nh\tau,t} = \sum_{J \in U_h^{nb^c}} v_{njh\tau,t} (S_J) \varphi_J \underline{e}_j + \sum_{J \in U_h^{nb}} v_{jh\tau,t} (S_J) \varphi_J \underline{e}_j \in (\mathcal{V}_h^{nb})^3, \\
 & \underline{v}_{nhb\tau,t} = \sum_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}} v_{njbh\tau,t} \varphi_{bl} \underline{e}_j \in (\mathcal{V}_{hb}^{nb})^3, \quad \delta q_{nh\tau,t} = \sum_{J=1}^{\mathcal{N}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t} (S_J) \varphi_J \in \mathcal{V}_h^{nb}, \\
 & \underline{F}_{h\tau,t} \in (\mathcal{V}_{h0}^{nb})^{3 \times 3}, \text{ vérifiant :} \\
 & \quad \forall \varphi_{I,i}, i \in U_h^{nb^c}, i = 1, 2, 3, \\
 & \quad F_{vI,i}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \underline{v}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\
 & \quad \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T dt \left( (1-\theta) \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau}) + \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau,t}) \right) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & \quad + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T dt \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nbh\tau,t}) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (1-\theta) \underline{v}_{nh\tau} + \theta \underline{v}_{nh\tau,t} + \theta \underline{v}_{nbh\tau,t} \right) \cdot \varphi_{I,i} - \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{I,i} = 0 \\
 & \quad \forall \varphi_{bl,i}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}, i = 1, 2, 3, \\
 & \quad F_{bl,i}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \underline{v}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\
 & \quad \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T dt \left( (1-\theta) \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau}) + \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau,t}) \right) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{bl,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & \quad + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T dt \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nbh\tau,t}) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{bl,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (1-\theta) \underline{v}_{nh\tau} + \theta \underline{v}_{nh\tau,t} + \theta \underline{v}_{nbh\tau,t} \right) \cdot \varphi_{bl,i} - \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{bl,i} = 0 \\
 & \quad \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}^{nb}, \\
 & \quad F_{pI}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \underline{v}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \varphi_I \left( \nabla \cdot \underline{v}_{nh\tau,t} + \nabla \cdot \underline{v}_{nbh\tau,t} \right) = 0 \\
 & \quad \underline{F}_{h\tau,t} = dt \left( (1-\theta) \nabla \underline{v}_{nh\tau} + \theta \nabla \underline{v}_{nh\tau,t} \right) \underline{F}_{h\tau}^i|_{\Omega_{\tau,t}^{nb}}
 \end{aligned} \right\} \quad (\mathcal{P}_{Ch\tau,t}) \quad (2.92)$$

Un raisonnement semblable à celui de la discrétisation spatiale du problème mécanique nous permet d'obtenir de 2.92, les simplifications ci-dessous :

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall \underline{\varphi}_{I,i}, I \in U_h^{nbc}, i = 1, 2, 3, \\ & F_{vI,i}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \underline{v}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\ & \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} (\underline{F}_{h\tau}^i)^T dt \left( (1-\theta) \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau}) + \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nh\tau,t}) \right) \underline{F}_{h\tau}^i : (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \nabla \underline{\varphi}_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \\ & + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (1-\theta) \underline{v}_{nh\tau} + \theta \underline{v}_{nh\tau,t} + \theta \underline{v}_{nhb\tau,t} \right) \cdot \underline{\varphi}_{I,i} - \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{I,i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{T_{l'}, S_I \in T_{l'}} \int_{T_{l'}} \frac{\theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{njh\tau,t} (S_C(l',k)) \varphi_{C(l',k)} \underline{e}_j \right) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \nabla \underline{\varphi}_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \\ & + \sum_{T_{l'}, S_I \in T_{l'}} \int_{T_{l'}} \frac{(1-\theta) dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \underline{\dot{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{njh\tau} (S_C(l',k)) \varphi_{C(l',k)} \underline{e}_j \right) \underline{F}_{h\tau}^i \right) : (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \nabla \underline{\varphi}_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \\ & + \sum_{T_{l'}, S_I \in T_{l'}} \int_{T_{l'}} \frac{\eta_p \theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \sum_{k=1}^4 v_{nih\tau,t} (S_C(l',k)) \varphi_{C(l',k)} + v_{nihb\tau,t} \varphi_{bl'} \right) \varphi_I \\ & + \sum_{T_{l'}, S_I \in T_{l'}} \int_{T_{l'}} \frac{\eta_p (1-\theta) dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \sum_{k=1}^4 v_{nih\tau} (S_C(l',k)) \varphi_{C(l',k)} \varphi_I \\ & - \sum_{T_{l'}, S_I \in T_{l'}} \int_{T_{l'}} \sum_{k=1}^4 \delta q_{nh\tau,t} (S_C(l',k)) \varphi_{C(l',k)} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{I,i} = 0 \end{aligned} \right. \quad (2.93)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \forall \underline{\varphi}_{bl,i}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T^{nb}, i = 1, 2, 3, \\ & F_{bl,i}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \underline{v}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\ & \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{1}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} (\underline{F}_{h\tau}^i)^T dt \theta \underline{\dot{\varepsilon}}(\underline{v}_{nhb\tau,t}) \underline{F}_{h\tau}^i : (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \nabla \underline{\varphi}_{bl,i} \underline{F}_{h\tau}^i \\ & + \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( (1-\theta) \underline{v}_{nh\tau} + \theta \underline{v}_{nh\tau,t} + \theta \underline{v}_{nhb\tau,t} \right) \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} - \int_{\Omega_{h\tau,t}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} = 0 \\ \Leftrightarrow & \int_{T_l} \frac{\theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \underline{\dot{\varepsilon}}(v_{njbhl\tau,t} \varphi_{bl} \underline{e}_j) \underline{F}_{h\tau}^i : (\underline{F}_{h\tau}^i)^T \nabla \underline{\varphi}_{bl,i} \underline{F}_{h\tau}^i \\ & + \int_{T_l} \frac{\eta_p \theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \left( \sum_{k=1}^4 v_{nih\tau,t} (S_C(l,k)) \varphi_{C(l,k)} + v_{nihb\tau,t} \varphi_{bl} \right) \varphi_{bl} \\ & + \int_{T_l} \frac{\eta_p (1-\theta) dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \sum_{k=1}^4 v_{nih\tau} (S_C(l,k)) \varphi_{C(l,k)} \varphi_{bl} - \int_{T_l} \sum_{k=1}^4 \delta q_{nh\tau,t} (S_C(l,k)) \varphi_{C(l,k)} \nabla \cdot \underline{\varphi}_{bl,i} = 0 \\ \Leftrightarrow & K_{bbl,ij} v_{njbhl\tau,t} + \sum_{k=1}^4 M_{bvl,ik} \left( \theta v_{nih\tau,t} (S_C(l,k)) + (1-\theta) v_{nih\tau} (S_C(l,k)) \right) \\ & = \sum_{k=1}^4 K_{bpl,ik} \delta q_{nh\tau,t} (S_C(l,k)) \\ \Leftrightarrow & v_{nihb\tau,t} = - \sum_{k=1}^4 K_{bbl,ii'}^{-1} M_{bvl,i'k} \left( \theta v_{nih\tau,t} (S_C(l,k)) + (1-\theta) v_{nih\tau} (S_C(l,k)) \right) \\ & + \sum_{k=1}^4 K_{bbl,ii'}^{-1} K_{bpl,i'k} \delta q_{nh\tau,t} (S_C(l,k)) \end{aligned} \right. \quad (2.94)$$

Avec,

$$\begin{aligned}
 K_{bbl,ij} &:= \int_{T_i} \frac{\theta dt}{\det \underline{\underline{F}}_{h\tau}^i} \left( \underline{\underline{F}}_{h\tau}^{i\ T} \underline{\underline{\dot{\epsilon}}} (\varphi_{bl} \underline{\underline{e}}_j) \underline{\underline{F}}_{h\tau}^i \right) : \left( \underline{\underline{F}}_{h\tau}^{i\ T} \nabla \varphi_{bl,i} \underline{\underline{F}}_{h\tau}^i \right) + \int_{T_i} \frac{\eta_p \theta dt}{\det \underline{\underline{F}}_{h\tau}^i} |\varphi_{bl}|^2 \delta_{ij} \\
 K_{bbl,ii}^{-1} K_{bbl,i'j} &= \delta_{ij}, \quad M_{bvl,ik} = \int_{T_i} \frac{\eta_p dt}{\det \underline{\underline{F}}_{h\tau}^i} \varphi_{bl} \varphi_{C(l,k)} \\
 K_{bpl,ik} &:= \int_{T_i} \varphi_{C(l,k)} \nabla \cdot \underline{\underline{\varphi}}_{bl,i} = \int_{T_i} \varphi_{C(l,k)} \frac{\partial \varphi_{bl}}{\partial X_i} \\
 &\quad \forall i, j = 1, 2, 3, k = 1, \dots, 4
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}^{nb}, \\
 F_{pI} (\underline{\underline{v}}_{nh\tau,t}, \underline{\underline{v}}_{nhb\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = - \int_{\Omega_{\tau,t}^{nb}} \varphi_I (\nabla \cdot \underline{\underline{v}}_{nh\tau,t} + \nabla \cdot \underline{\underline{v}}_{nhb\tau,t}) = 0 \\
 \Leftrightarrow - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 v_{njh\tau,t} (S_{C(I',k)}) \frac{\partial \varphi_{C(I',k)}}{\partial X_j} \varphi_I - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} v_{njbh\tau,t} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I = 0
 \end{array} \right. \tag{2.96}$$

Ainsi, par le procédé de condensation de la fonction bulle, nous pouvons obtenir une simplification de équations  $F_{pI} (\underline{\underline{v}}_{h\tau,t}, \underline{\underline{v}}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = 0, I = 1, \dots, \mathcal{N}$  et  $F_{vI,i} (\underline{\underline{v}}_{h\tau,t}, \underline{\underline{v}}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = 0, I \in U_h^{nb^c}, i = 1, 2, 3$ , et donc une reformulation du problème  $(\mathcal{P}_{Ch\tau,t})$ . En effet, de 2.92-2.96,  $(\mathcal{P}_{Ch\tau,t})$  se reformule comme suit :

$$\left. \begin{aligned}
 & \text{Trouver } \underline{v}_{nh\tau,t} = \sum_{J \in U_h^{nb^c}} v_{njh\tau,t}(S_J) \varphi_J \underline{e}_j + \sum_{J \in U_h^{nb}} v_{jh\tau,t}(S_J) \varphi_J \underline{e}_j \in (\mathcal{V}_h^{nb})^3, \\
 & \delta q_{nh\tau,t} = \sum_{J=1}^{\mathcal{N}^{nb}} \delta q_{nh\tau,t}(S_J) \varphi_J \in \mathcal{V}_h^{nb}, \underline{F}_{h\tau,t} \in (\mathcal{V}_{h0}^{nb})^{3 \times 3}, \text{ vérifiant :} \\
 & \quad \forall \varphi_{I,i}, I \in U_h^{nb^c}, i = 1, 2, 3, \\
 & \quad \quad F_{vI,i}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\
 & \quad \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \frac{\theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \underline{\sigma}_{nh} \left( \dot{\underline{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{njh\tau,t}(S_{C(l',k)}) \varphi_{C(l',k)} \underline{e}_j \right) \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \frac{(1-\theta) dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \underline{\sigma}_{nh} \left( \dot{\underline{\varepsilon}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{njh\tau}(S_{C(l',k)}) \varphi_{C(l',k)} \underline{e}_j \right) \right) : \left( \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \nabla \varphi_{I,i} \underline{F}_{h\tau}^i \right) \\
 & \quad + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \frac{\eta_p \theta dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \sum_{k=1}^4 \left( \varphi_{C(l',k)} - \theta K_{bb'l',ii'}^{-1} M_{bv'l',i'k} \varphi_{bl'} \right) \varphi_I v_{nih\tau,t}(S_{C(l',k)}) \\
 & + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \frac{\eta_p (1-\theta) dt}{\det \underline{F}_{h\tau}^i} \sum_{k=1}^4 \left( \varphi_{C(l',k)} - \theta K_{bb'l',ii'}^{-1} M_{bv'l',i'k} \varphi_{bl'} \right) \varphi_I v_{nih\tau}(S_{C(l',k)}) \\
 & - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( \varphi_{C(l',k)} \frac{\partial \varphi_I}{\partial X_i} - \theta dt K_{bb'l',ii'}^{-1} K_{bpl',i'k} \varphi_{bl'} \varphi_I \right) \delta q_{nh\tau,t}(S_{C(l',k)}) = 0 \\
 & \quad \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}^{nb}, \\
 & \quad \quad F_{pI}(\underline{v}_{nh\tau,t}, \delta q_{nh\tau,t}) = \\
 & \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{\partial \varphi_{C(l',k)}}{\partial X_j} - \theta K_{bb'l',ji'}^{-1} M_{bv'l',i'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \right) \varphi_I v_{njh\tau,t}(S_{C(l',k)}) \\
 & \quad + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 (1-\theta) K_{bb'l',ji'}^{-1} M_{bv'l',i'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I v_{njh\tau}(S_{C(l',k)}) \\
 & \quad - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 K_{bb'l',ji'}^{-1} K_{bpl',i'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I \delta q_{nh\tau,t}(S_{C(l',k)}) = 0 \\
 & \quad \quad \underline{F}_{h\tau,t} = dt \left( (1-\theta) \nabla \underline{v}_{nh\tau} + \theta \nabla \underline{v}_{nh\tau,t} \right) \underline{F}_{h\tau} |_{\Omega_{\tau,t}^{nb}}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.97)$$

Avec  $\underline{\sigma}_{nh}(\dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}_{nh})) := \underline{F}_{h\tau}^i{}^T \dot{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}_{nh}) \underline{F}_{h\tau}^i \forall \underline{w}_{nh} \in (\mathcal{V}_h^{nb})^3$ .

## Conclusion

Ce chapitre avait pour objet le développement d'un modèle numérique, appelé modèle standard, du procédé DED; un modèle numérique apportant des améliorations aux modèles existants de la littérature scientifique.

En ce qui concerne le système, c'est-à-dire la matière déjà déposée, ce modèle est issu d'un modèle théorique développé à base des équations de conservation, de l'inégalité de l'entropie et des lois de comportement thermique et mécanique. Dans le cas du modèle thermique, nous avons adopté la loi de Fourier comme loi de comportement thermique, appliqué les équations aux interfaces afin de modéliser l'interaction thermique entre sys-

tème et la matière entrante, adopté une loi gaussienne afin de modéliser l'élévation de la température du gaz par le faisceau laser. Pour ce qui concerne le modèle mécanique, nous avons, adopté la loi de comportement élasto-viscoplastique à écrouissage isotrope et cinématique, laquelle nous a permis de définir un schéma de discrétisation temporelle donnant lieu à l'expression d'un module tangent plus général que celui exprimé dans le cadre de l'écrouissage purement isotrope.

En ce qui concerne, la matière restant à déposer, afin de déterminer sa position au moment de son dépôt, le modèle numérique est issu d'un modèle théorique établi sur la base d'un problème de minimisation de distorsion et de déformation formulé dans le cadre des grandes déformations que nous avons appelé problème cinématique de positionnement. Il a été montré que le choix d'un pas de temps suffisamment petit permet de reformuler ce problème dans un cadre de petites déformations sous réserve de procéder à chaque incrément de temps à l'actualisation de la configuration lagrangienne de la matière restant à déposer.

Comme les modèles numériques DED de la littérature scientifique, notre modèle numérique fait appel à la méthode des éléments finis à la seule différence que pour le problème mécanique, l'adoption de la méthode des éléments finis s'effectue dans un cadre mixte, en formulation vitesse pression. Pour le problème cinématique de positionnement, en raison de la contrainte d'incompressibilité imposée à la matière à déposer, la méthode des éléments finis s'effectue dans le même cadre. Ainsi, la pertinence et la cohérence de notre modèle numérique restent donc à démontrer. Tel sera l'objet du chapitre suivant.



# Chapitre 3

## Application et validation du modèle thermomécanique du procédé DED

Ce chapitre a pour objectif principal de démontrer la pertinence du modèle numérique du procédé DED, dit modèle standard, développé au chapitre précédent, notamment les améliorations qu'il apporte par rapport aux modèles existant dans la littérature scientifique. Il porte sur la simulation numérique de la construction des structures par ce procédé, et s'articule autour des points suivants :

- Description mathématique de la géométrie CAO des structures construites
- Données d'applications
- Étude de convergence
- Étude de sensibilité thermique
- Étude de sensibilité mécanique
- Étude comparative avec la méthode "quiet element"
- Étude de l'influence de l'écroûissage cinématique
- Validation expérimentale

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Données d'application</b>	<b>94</b>
3.1.1	Type de géométrie CAO des structures construites	94
3.1.2	Paramètres du procédé DED	98
3.1.3	Paramètres de modélisation	98
<b>3.2</b>	<b>Étude de convergence</b>	<b>102</b>
3.2.1	Aspect temporel de la convergence	102
3.2.2	Aspect spatial de la convergence	109
<b>3.3</b>	<b>Étude de sensibilité thermique</b>	<b>115</b>
3.3.1	Évolution temporelle	116

3.3.2	Distribution spatiale . . . . .	117
<b>3.4</b>	<b>Étude de sensibilité mécanique . . . . .</b>	<b>118</b>
3.4.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	118
3.4.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	121
<b>3.5</b>	<b>Étude comparative avec la méthode quiet element . . . . .</b>	<b>123</b>
3.5.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	123
3.5.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	129
<b>3.6</b>	<b>Étude de l'influence de l'écroûissage cinématique . . . . .</b>	<b>135</b>
3.6.1	À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ . . . . .	135
3.6.2	À l'instant final $t = t_f$ . . . . .	139
<b>3.7</b>	<b>Validation expérimentale . . . . .</b>	<b>143</b>
3.7.1	Validation thermique . . . . .	143
3.7.2	Validation mécanique . . . . .	146

---

## 3.1 Données d'application

Il s'agit du type de géométrie CAO des structures construites, des paramètres du procédé DED et des paramètres de modélisation théorique et numérique.

### 3.1.1 Type de géométrie CAO des structures construites

La géométrie CAO  $\Omega_{Pf0}$  de la pièce  $\mathcal{M}_{Pf}$  à construire, est de type coque mince (figure 3.1). Afin de la décrire mathématiquement on considère, pour un système de coordonnées cartésiennes  $(X_1, X_2, X_3)$  défini dans le repère orthonormé direct  $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  :

- la courbe plane  $\mathcal{C}_b$ , appelée courbe de base, définie par :

$$\forall s \in [0, L], \underline{X}_c(s) = X_{c1}(s) \underline{e}_1 + X_{c2}(s) \underline{e}_2 \quad (3.1)$$

Avec  $L$ , longueur curviligne de  $\mathcal{C}_b$ .

- la surface moyenne  $\mathcal{S}_m$  définie à partir de  $\mathcal{C}_b$  par :

$$\forall s \in [0, L], X_3 \in [0, H], \underline{X}_s(s, X_3) = \underline{X}_c(s) + X_3 \underline{e}_3 \quad (3.2)$$

Avec  $H$  hauteur de  $\Omega_{Pf0}$ .

- la base locale  $(\underline{e}_t(s), \underline{e}_n(s), \underline{e}_3)$  définie en chaque point  $M_s \in \mathcal{S}_m$  par :

$$\underline{e}_t(s) := \frac{d\underline{X}_c}{ds}(s), \underline{e}_n(s) := \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_t(s) \quad (3.3)$$

La géométrie CAO  $\Omega_{Pf_0}$  de la pièce à construire  $\mathcal{M}_{Pf}$  est donc donnée par :

$$\Omega_{Pf_0} := \left\{ \underline{X} = \underline{X}_s(s, X_3) + X_n \underline{e}_n, s \in [0, L], X_3 \in [0, H], X_n \in \left[ -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right] \right\} \quad (3.4)$$

Avec  $l \ll \min \{L, H\}$  épaisseur de  $\Omega_{Pf_0}$ .

Ainsi tout point  $M \in \Omega_{Pf_0}$  peut donc être identifié par le triplet  $(s, X_n, X_3) \in [0, L] \times [0, H] \times \left[ -\frac{l}{2}, \frac{l}{2} \right]$ , lequel constitue un système de coordonnées locales de  $M$ . De plus, on peut définir en ce point la base locale à partir de la donnée d'abscisse curviligne  $s$ .

La géométrie CAO  $\Omega_{S_0}$  du substrat  $\mathcal{M}_S$ , de forme parallélépipédique, est quant à elle définie par :

$$\Omega_{S_0} := \left\{ \underline{X} = X_i \underline{e}_i, X_1 \in \left[ -\frac{L_S}{2}, \frac{L_S}{2} \right], X_2 \in \left[ -\frac{l_S}{2}, \frac{l_S}{2} \right], X_3 \in [-H_S, 0] \right\} \quad (3.5)$$

Avec  $L_S$ ,  $l_S$  et  $H_S$  désignant respectivement la longueur, la largeur et la hauteur de  $\Omega_{S_0}$ . Pour besoin de généralisation de la base locale à tout le domaine géométrique CAO  $\Omega_{f_0}$ , on considérera que la base locale en chaque point  $M \in \Omega_{S_0}$ , est identique à la base globale  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ .

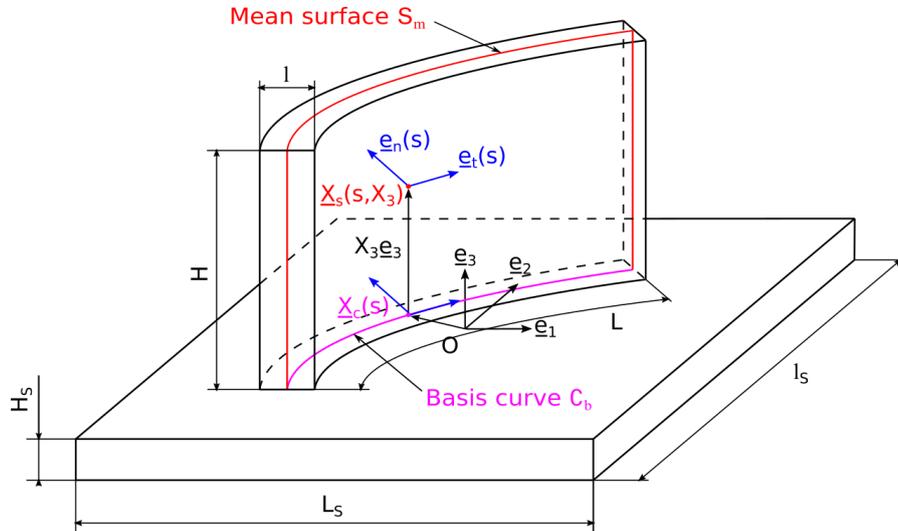


FIGURE 3.1 – Géométrie CAO  $\Omega_{f_0} = \Omega_{S_0} \cup \Omega_{Pf_0}$  du système total  $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_S \cup \mathcal{M}_{Pf}$

Ainsi, pour des champs vectoriel  $\underline{W} = W_i \underline{e}_i$  et tensoriel  $\underline{T} = T_{ij} \underline{e}_i \otimes \underline{e}_j$  quelconques définis dans  $\Omega_{f_0}$ , on considère leurs décompositions dans la base locale  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  données par :

$$\begin{aligned} \underline{W} &= W_t \underline{e}_t + W_n \underline{e}_n + W_3 \underline{e}_3 \\ \underline{T} &= T_{tt} \underline{e}_t \otimes \underline{e}_t + T_{tn} \underline{e}_t \otimes \underline{e}_n + T_{t3} \underline{e}_t \otimes \underline{e}_3 \\ &\quad + T_{nt} \underline{e}_n \otimes \underline{e}_t + T_{nn} \underline{e}_n \otimes \underline{e}_n + T_{n3} \underline{e}_n \otimes \underline{e}_3 \\ &\quad + T_{3t} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_t + T_{3n} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_n + T_{33} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Avec,  $(W_t, W_n, W_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $(T_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \{t,n,3\}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  désignant les coordonnées respectives des champs vectoriel  $\underline{W}$  et tensoriel  $\underline{T}$  dans la base locale  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$ . Leurs relations avec les coordonnées de ces derniers dans la base globale  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  notées respectivement  $(W_1, W_2, W_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $(T_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  sont données par les produits matriciels :

$$\begin{aligned} \{\underline{W}\}_{(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)} &= [R]_\varphi^T \{\underline{W}\}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)}, \quad [\underline{T}]_{(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)} = [R]_\varphi^T [\underline{T}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} [R]_\varphi \\ [R]_\varphi &:= \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Avec,  $\varphi := \widehat{mes(\underline{e}_1, \underline{e}_t)}$  mesure de l'angle orienté entre  $\underline{e}_1$  et  $\underline{e}_t$ ,  $\{\underline{W}\}_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = (W_1, W_2, W_3)$ ,  $\{\underline{W}\}_{(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)} = (W_t, W_n, W_3) \in \mathbb{R}^3$ , et  $[\underline{T}]_{(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)} = (T_{ij})_{i,j \in \{1,2,3\}}$ ,  $[\underline{T}]_{(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)} = (T_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \in \{t,n,3\}} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ .

On considère en plus, la décomposition de  $\Omega_{Pf}$  en  $N$  couches mono-cordons, donc  $N$  cordons  $\Omega_{T1,0}, \dots, \Omega_{TN,0}$  (figure 3.2). En supposant de plus une stratégie de dépôt des différentes cordons en va-et-vient horizontal, chaque cordon  $\Omega_{TI,0}, I = 1, \dots, N$ , se caractérise par :

— sa courbe axiale  $\mathcal{C}_T$  définie par :

$$\forall s_T \in [0, L], \underline{X}_{Tc}(s_T) = \begin{cases} \underline{X}_c(s_T) + \left(I - \frac{1}{2}\right) H_T \underline{e}_3 & \text{si } I \text{ impair} \\ \underline{X}_c(L - s_T) + \left(I - \frac{1}{2}\right) H_T \underline{e}_3 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.8)$$

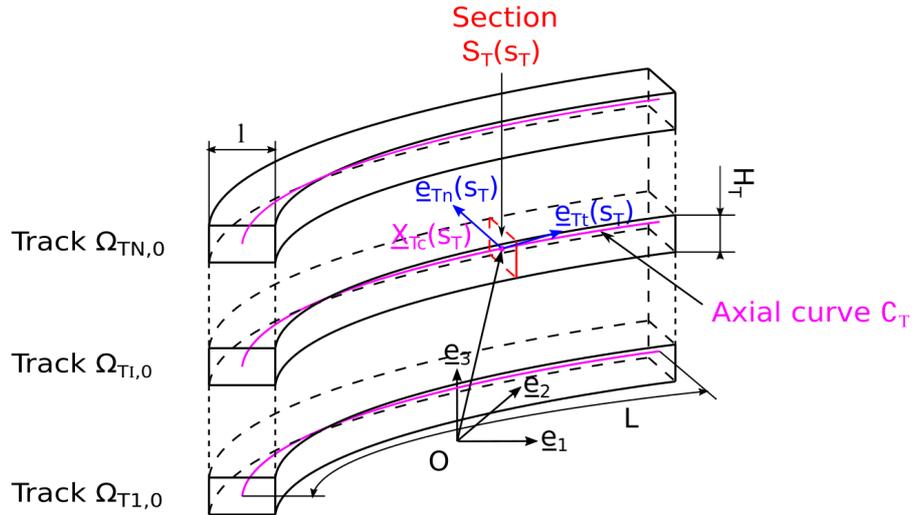
Avec  $s_T$  et  $H_T = \frac{L}{N}$  désignant respectivement l'abscisse curviligne locale et la hauteur de  $\Omega_{TI,0}$ , par opposition à  $s$  désignant l'abscisse curviligne globale.

— la base locale  $(\underline{e}_{Tt}, \underline{e}_{Tn}, \underline{e}_3)$  définie en chaque point  $C(s_T)$  de  $\mathcal{C}_T$  par :

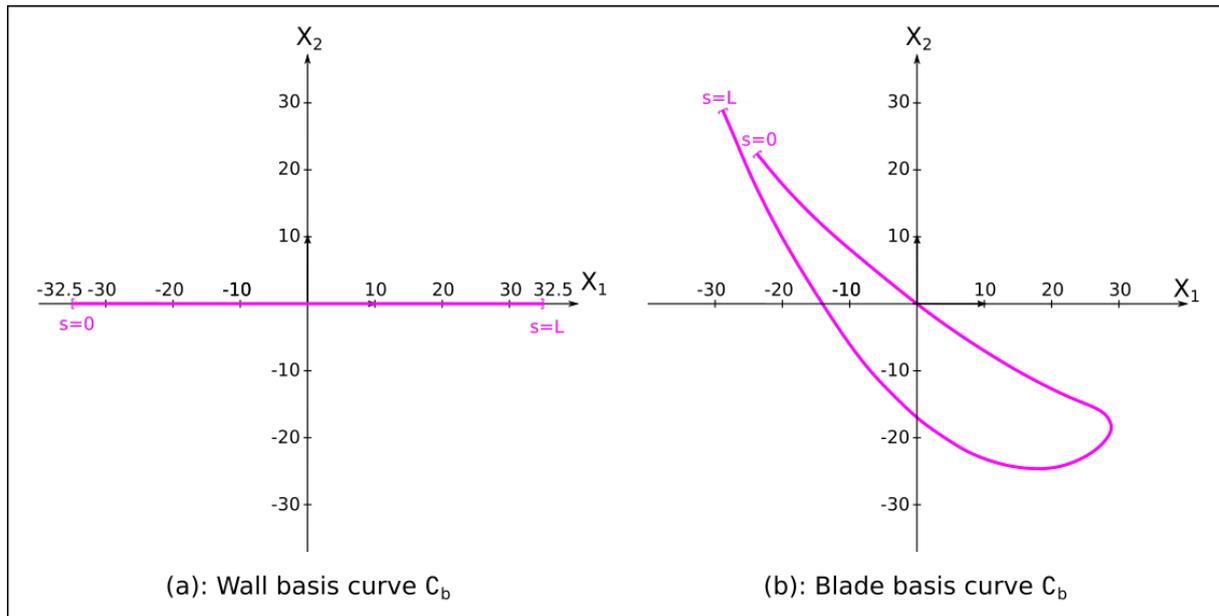
$$\begin{aligned} \forall s_T \in [0, L], \underline{e}_{Tt}(s_T) &:= \frac{d\underline{X}_{Tc}}{ds_T}(s_T) = \begin{cases} \underline{e}_t & \text{si } I \text{ impair} \\ -\underline{e}_t & \text{sinon} \end{cases} \\ \underline{e}_{Tn}(s_T) &:= \underline{e}_3 \wedge \underline{e}_{Tt}(s_T) \end{aligned} \quad (3.9)$$

— la section  $\mathcal{S}_T(s_T)$  définie par :

$$\forall s_T \in [0, L], \mathcal{S}_T(s_T) = \left\{ \begin{array}{l} \underline{X} = \underline{X}_{Tc}(s_T) + X_{Tn} \underline{e}_{Tn} + X_{T3} \underline{e}_3, \\ X_{Tn} \in \left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right], X_{T3} \in \left[-\frac{H_T}{2}, \frac{H_T}{2}\right] \end{array} \right\} \quad (3.10)$$


 FIGURE 3.2 – Décomposition de la pièce  $\Omega_{Pf_0}$  en  $N$  cordons  $\Omega_{T1,0}, \dots, \Omega_{TN,0}$ 

Dans toute la suite du présent document, les structures de Biegler et al. [45, 46] auxquelles nous nous intéresserons sont le mur rectiligne et l'aube de turbine dont les courbes de base  $\mathcal{C}_b$  sont données dans la figure 3.3.


 FIGURE 3.3 – Courbe de base  $\mathcal{C}_b$  : (a) du mur ; (b) de l'aube de turbine

Les paramètres dimensionnels de ces deux structures, sauf mention contraire, sont donnés dans le tableau 3.1 ci-dessous :

	Mur	Aube
Longueur curviligne $L$	65mm	155.4mm
Largeur/épaisseur $l$	1.4mm	1.2mm
Hauteur totale $H$	18.6mm	18mm
Nombre de cordons $N$	30	30
Hauteur des cordons $H_T$	0.62mm	0.6mm
Dimensions du substrat $L_S \times l_S \times H_S$	$100 \times 30 \times 8\text{mm}^3$	$100 \times 100 \times 6\text{mm}^3$

TABLE 3.1 – Paramètres dimensionnels [45, 46]

### 3.1.2 Paramètres du procédé DED

Les paramètres du procédé DED que nous considérerons dans toute la suite du présent document reposent essentiellement sur les données des travaux de Biegler et al [45, 46] portant sur la fabrication d'un mur et d'une aube de turbine par le procédé DED. Il s'agit des paramètres de base et des paramètres effectifs du DED, tels que présentés au chapitre 1, intervenant dans la modélisation théorique. Ce sont notamment :

- la puissance du laser ;
- le coefficient d'absorption de la puissance du laser appelé encore efficacité énergétique ;
- la vitesse de parcours du laser ;
- le matériau utilisé ;
- l'intervalle de temps d'attente inter-cordons (dwell time en anglais) ;

Le tableau 3.2 nous en donne les valeurs :

Puissance du laser	$P = 400\text{W}$ [45, 46]
Efficacité énergétique	$\eta = 0.30$
Vitesse du laser	$v_H = 10\text{mm}\cdot\text{s}^{-1}$ [45, 46]
Matériau utilisé	Acier 316L (propriétés en annexe)
Temps d'attente inter-cordons	$t_a = \begin{cases} 31\text{s} (mur) \\ 31.5\text{s} (aube) \end{cases}$ [45, 46]

TABLE 3.2 – Paramètres du procédé DED

### 3.1.3 Paramètres de modélisation

Nous en avons de deux types : paramètres de modélisation théorique, paramètres de modélisation numérique.

### Paramètres de modélisation théorique

Il s'agit de :

- données thermiques et mécaniques initiales ;
- données thermophysiques et thermomécaniques du matériau utilisé (Acier 316L) ;
- données des flux de convection et de radiation ;
- données de positions initiale et finale de la source de chaleur définie dans 2.49 ;
- Surfaces des conditions aux limites (thermique et mécanique).
- facteur de pénalisation  $\eta_p$  de la fonctionnelle  $\mathcal{F}_t(\underline{W}_n)$  définie dans l'équation 2.56.

Sauf mention contraire, elles sont données dans le tableau ci-dessous :

Données initiales	Température ambiante $T_\infty$
	État de contraintes et de déformations nulles
Données thermophysiques	Données de Kim et al. [67] (équations 7.1)
Données thermomécaniques	Données de Múransky et al. [68, 69] (table 7.4)
Coefficient de convection	$h = 35 \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ [45]
Constante de Stefan-Boltzmann	$\sigma = 5.670374 \times 10^{-8} \text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$
Émissivité	$\varepsilon = 0.6$ [45]
Température ambiante	$T_\infty = 298.15 \text{K}$ [46]
Température maximale du gaz inerte chauffé	$T_{gm} = 2600 \text{K}$
Rayons caractéristiques de la température $T_g$ du gaz protecteur définis dans 2.12	$r_t = r_n = 10 \text{mm}, r_3 = 5 \text{mm}$
Positions initiale et finale de la source de chaleur	$\widehat{C_0 C_0^H} = -\widehat{C_f C_f^H} = -\frac{l_T}{2}$
Surfaces de conditions aux limites	$(\Omega_{t0})^d = (\Omega_{t0})^n = \emptyset$ $(\Omega_{t0})^u = \{\underline{X} = X_i \underline{e}_i \in \partial\Omega_{S0}, X_3 = -H_S\}$
Facteur de pénalisation	$\eta_p = 0.05$

TABLE 3.3 – Paramètres de modélisation théorique

### Paramètres de modélisation numérique

Il s'agit essentiellement des données de discrétisations temporelle et spatiale des trois problèmes théoriques (thermique, mécanique et cinématique de positionnement).

Les données de discrétisation temporelle sont données dans le tableau ci-dessous :

	Mur	Aube
Type de schéma (valeur de $\theta$ )	Schéma implicite ( $\theta = 1$ )	Schéma implicite ( $\theta = 1$ )
Pas de temps $dt$ (chauffage)	$dt_0/4 = 0.035s$	$dt_0/2 = 0.06s$
Pas de temps $dt$ (refroidissement)	Arbitrairement variable	Arbitrairement variable

TABLE 3.4 – Données de discrétisation temporelle

Avec  $dt_0 := l_T/v_H$  désignant le pas de temps référent correspondant à la durée de parcours d'une longueur  $l_T$  de la source de chaleur.

Les paramètres de discrétisation spatiale sont la technique de génération et les données des maillages triangulaires  $\mathcal{T}_{\tau,t}$  et  $\mathcal{T}_{\tau,t}^{nb}$  des domaines respectifs  $\Omega_{\tau,t}$  et  $\Omega_{\tau,t}^{nb}$ . En effet, dans le cadre des présents travaux nous avons opté pour des maillages à topologie constante mais dont les coordonnées des différents nœuds se voient actualisées par la distorsion calculée numériquement. La technique de génération de maillage utilisée consiste en la démarche suivante :

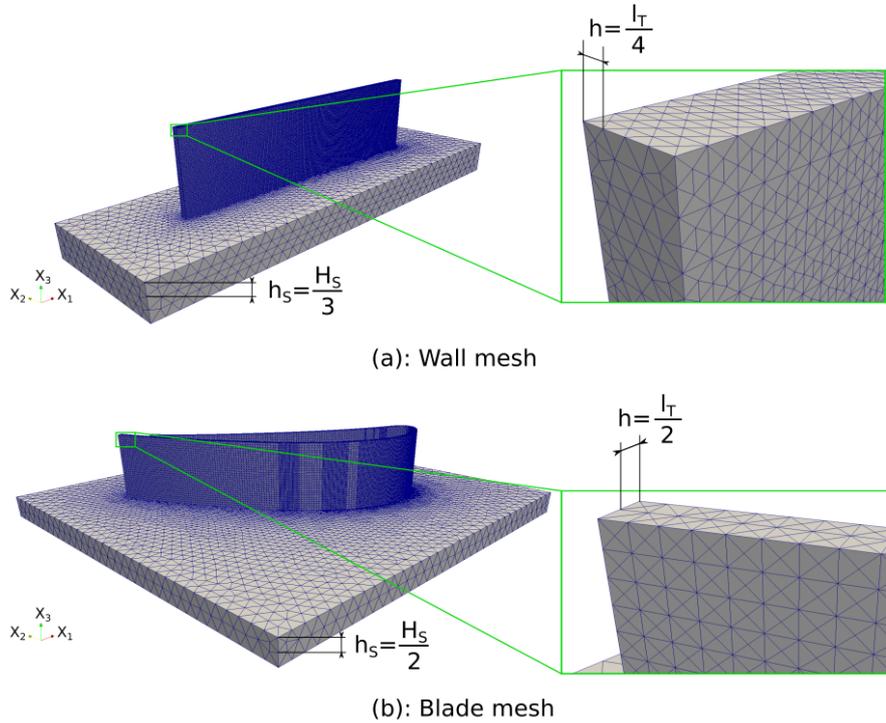
- Pour chaque  $\Omega_{TI,0}, I = 1, \dots, N$ , fractionnement en différents tronçons ;
- Définition du maillage triangulaire  $\mathcal{T}_{f_0}$  régulier et conforme du domaine CAO total  $\Omega_{f_0}$  pour lequel sont conformément représentés chaque cordon ainsi que ses tronçons constitutifs ;
- Définition du maillage triangulaire  $\mathcal{T}_{f_\tau}$  du domaine  $\Omega_{f_\tau}$  à partir du maillage  $\mathcal{T}_{f_0}$  par actualisation des coordonnées des nœuds de ce dernier ;
- Définition des maillages  $\mathcal{T}_{\tau,t}$  et  $\mathcal{T}_{\tau,t}^{nb}$  à partir du maillage  $\mathcal{T}_{f_\tau}$  par extraction d'éléments et de nœuds.

Les données des maillages sont principalement les pas de maillage utilisés. Ils sont donnés dans le tableau suivant :

	Mur	Aube
Pas de maillage $h$ (pièce)	$l_T/4 = 0.35mm$	$l_T/2 = 0.6mm$
Pas de maillage $h_S$ (substrat)	$H_S/3 \approx 2.67mm$	$H_S/2 = 3mm$

TABLE 3.5 – Données de discrétisation spatiale

À l'aide du logiciel Gmsh [70], les données ci-dessus nous permettent d'obtenir les maillages du mur et de l'aube représentés dans la figure 3.4 ci-dessous.


 FIGURE 3.4 – Maillage du domaine entier  $\Omega_{f0}$  : (a) du mur ; (b) de l'aube

Dans toute la suite du présent document, pour comparer différentes variables issues de différentes résolutions, nous considérerons pour les deux structures étudiées, leurs profils selon trois axes verticaux dénommés "initial"  $(A)_i$ , "central"  $(A)_c$  et "final"  $(A)_f$  (figures 3.5) d'équations :

$$\forall X_3 \geq 0,$$

$$(A)_i : \underline{X}(X_3) = \underline{X}_c(0) + X_3 \underline{e}_3 \quad (A)_c : \underline{X}(X_3) = \underline{X}_c\left(\frac{L_T}{2}\right) + X_3 \underline{e}_3 \quad (3.11)$$

$$(A)_f : \underline{X}(X_3) = \underline{X}_c(L_T) + X_3 \underline{e}_3$$

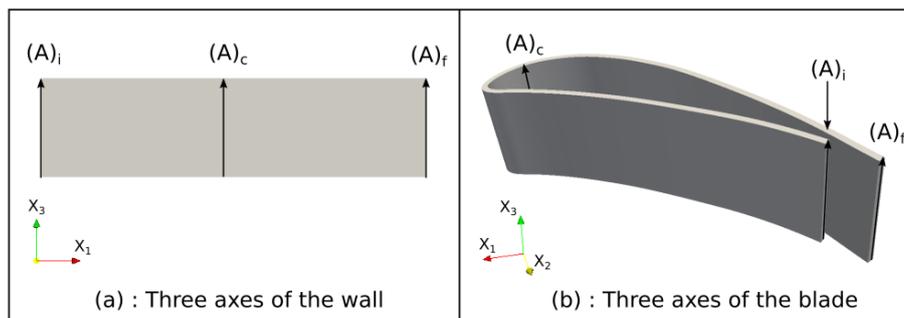


FIGURE 3.5 – Les trois axes "initial"  $(A)_i$ , "central"  $(A)_c$  et "final"  $(A)_f$  : (a) du mur ; (b) de l'aube. La dénomination des axes fait référence au sens de parcours des cordons impairs.

## 3.2 Étude de convergence

La convergence du modèle thermomécanique numérique du procédé DED est étudiée sous deux aspects :

- l’aspect temporel dans lequel pour un maillage donné suffisamment raffiné et conforme du domaine géométrique  $\Omega_{ft}$ , les solutions numériques convergent avec une discrétisation temporelle de plus en plus raffinée ;
- l’aspect spatial dans lequel pour une discrétisation temporelle donnée suffisamment raffinée, les solutions numériques convergent avec un maillage de plus en plus raffiné.

Pour raison de simplicité, l’étude de convergence ne portera que sur la simulation numérique de la construction du premier cordon du mur ( $N = 1$ ) et donc le domaine lagrangien de calcul correspondra au domaine géométrique  $\Omega_{1,0}$ .

### 3.2.1 Aspect temporel de la convergence

Dans cette étude, le maillage utilisé est un maillage uniforme et structuré au niveau du mur dont le pas  $h_0$  est sensiblement égal à  $\frac{l_1}{24}$ , soit  $h_0 \approx 58\mu\text{m}$  (Figure 3.6).

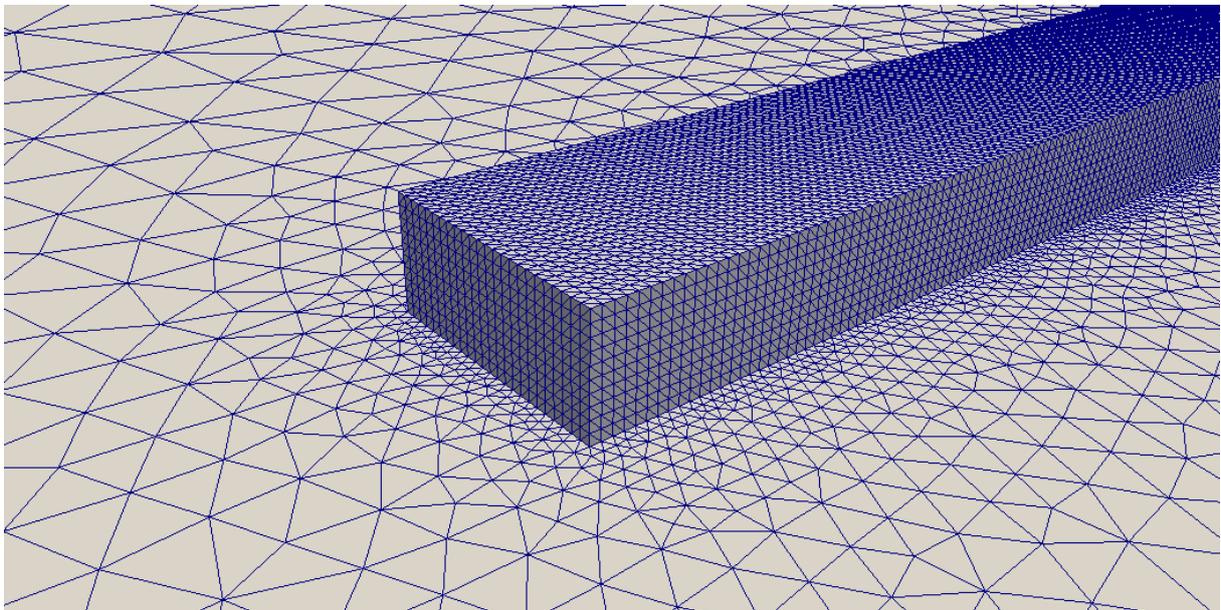


FIGURE 3.6 – Maillage raffiné du domaine géométrique CAO  $\Omega_{1,0}$

Les discrétisations temporelles adoptées en période de chauffage sont données par les fractions entières du pas de temps référent  $dt_0$  (figure 3.7) que sont :  $dt_0$ ,  $\frac{dt_0}{2}$ ,  $\frac{dt_0}{4}$  et  $\frac{dt_0}{8}$ .

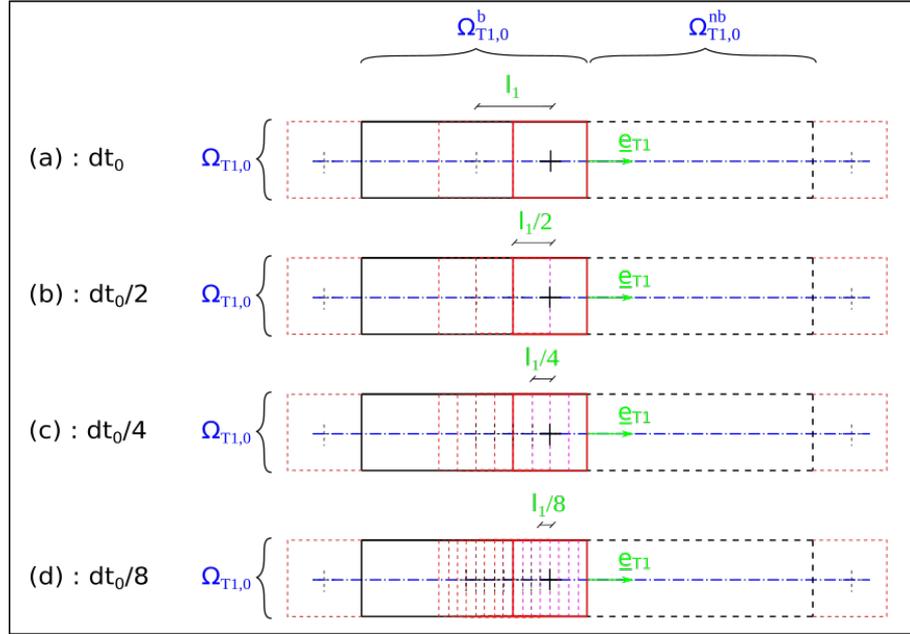


FIGURE 3.7 – Positions discrètes de la source de chaleur en fonction du pas de temps : (a)  $dt_0$ ; (b)  $\frac{dt_0}{2}$ ; (c)  $\frac{dt_0}{4}$ ; (d)  $\frac{dt_0}{8}$ ;

L'étude de convergence consiste tout d'abord en l'analyse des évolutions temporelles de la température  $T$ , de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$ , et du déplacement post-dépôt  $u_{pd}$ , observées en un capteur  $C$  fixé au point matériel correspondant au centre de  $\Omega_{T1,0}$  ( $X_C = \frac{H_1}{2}e_3 = 0.31e_3$  (mm)). Puis elle se poursuit par l'analyse des distributions spatiales, sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  de  $\Omega_{T1,0}$ , des champs de température, de dérivée temporelle de la température, de distorsion et des contraintes aux instants  $t = \frac{L_T}{2v_H} = 3.25s$  (fin de la construction de la première moitié de  $\Omega_{T1,0}$ ) et  $t = t_1 = 36.5s$  (soit 31s après la fin de la construction à  $t = 6.5s$  de  $\Omega_{T1,0}$ ). Nous effectuerons tout d'abord l'étude de convergence du modèle thermique puis celle du modèle mécanique.

## Cas du modèle thermique

### Évolutions temporelles

Les évolutions temporelles de la température et de sa dérivée temporelle, sont données dans la figure 3.8.

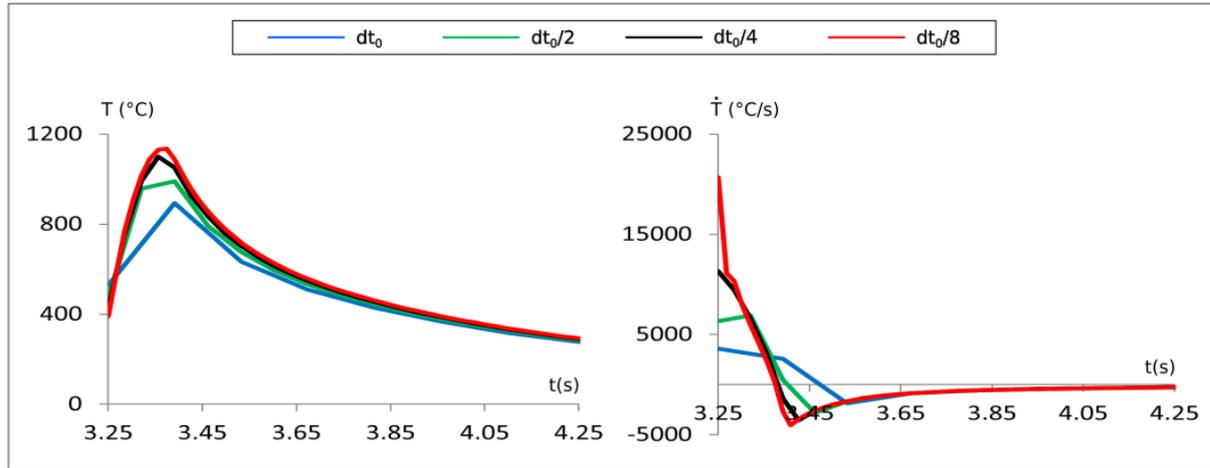


FIGURE 3.8 – Évolutions temporelles de la température  $T$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$  calculées sur le capteur  $C(0, 0, 0.31)$ (mm) pour différents pas de temps

En ce qui concerne la température, nous observons une bonne convergence de l'évolution temporelle au point C. Le comportement limite pour le maillage donné, correspond tout d'abord à un saut de température au moment de l'activation du point matériel correspondant, puis à une forte élévation de la température du fait de la proximité de ce point avec le centre de la source de chaleur, suivie de sa décroissance rapide du fait de l'éloignement de cette dernière.

En ce qui concerne la dérivée temporelle de la température, nous observons une bonne convergence mais moins régulière. En effet, en raison du saut de température observé à l'instant d'activation du point C, les courbes de cette dérivée convergent vers la dérivée temporelle au sens des distributions  $\dot{T}$  de la température  $T$ , donnée par l'expression [71] :

$$\dot{T}(C, \cdot) = (T(C, t_a(C)) - T_\infty) \delta_{t_a(C)} + \{ \dot{T}(C, \cdot) \}, \quad \{ \dot{T}(C, \cdot) \} := \dot{T}(C, \cdot)|_{[t_0, t_1] \setminus t_a(C)} \quad (3.12)$$

Avec,  $t_a(C)$  désignant l'instant d'activation du point C, soit 3.25s,  $\delta_{t_a(C)}(t)$  désignant la distribution de Dirac en  $t_a(C)$  définie par :

$$\langle \delta_{t_a(C)}, \varphi \rangle = \varphi(t_a(C)), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}([t_0, t_1]) \quad (3.13)$$

Avec  $\mathcal{D}([t_0, t_1])$  désignant l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans  $]t_0, t_1[$ , infiniment différentiables et à support compact contenu dans  $]t_0, t_1[$ .

Cependant, aux instants ultérieurs à celui de l'activation de C, nous observons une bonne convergence. Le comportement limite à ces instants correspond tout d'abord à une chute brutale à des valeurs négatives de  $\dot{T}$  liée à la diminution de la température du fait de l'éloignement de la source de chaleur, puis à une augmentation exponentielle vers la valeur nulle. Ce dernier comportement traduit la diminution de vitesse de refroidissement au fur et à mesure que la température se rapproche de la température initiale, c'est-à-dire la température ambiante  $T_\infty$ .

### Distributions spatiales

**En période de chauffage** Les distributions spatiales de la température et de sa dérivée temporelle, à l'instant  $t = 3.25s$ , sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.9.

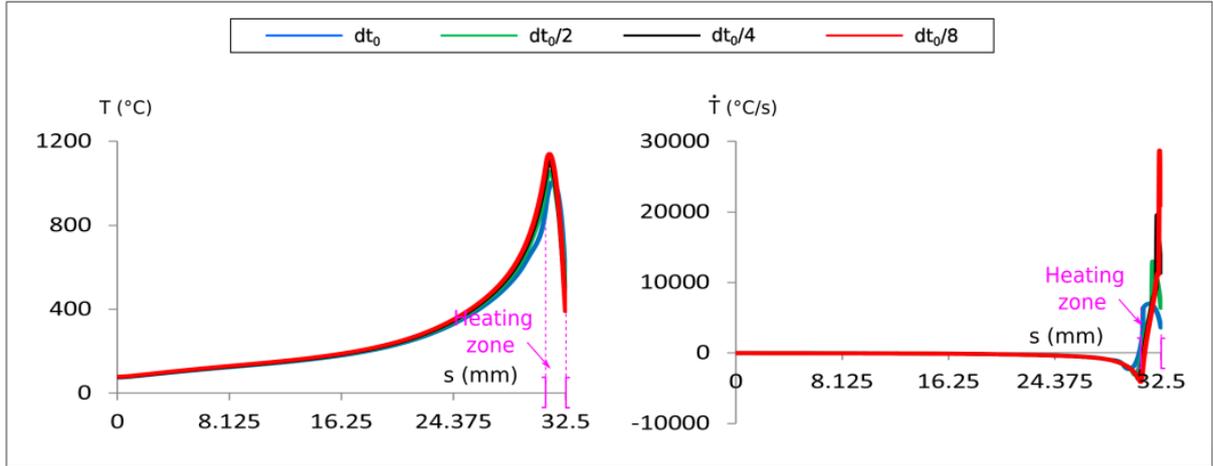


FIGURE 3.9 – Distribution spatiale de la température  $T$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 3.25s$  pour différents pas de temps

En ce qui concerne la température, nous observons une bonne convergence de la distribution spatiale. Le comportement limite correspond principalement à un saut de discontinuité observé à l'abscisse  $s = 32.5mm$  de l'interface géométrique d'activation  $\Gamma_{Tt}$  ( $t = 3.25s$ ) et à une zone d'élévation de température avoisinant la zone de chauffage.

En ce qui concerne la dérivée temporelle de la température, nous observons une bonne convergence mais moins régulière. En effet, en raison du saut de température observé à l'interface  $\Gamma_{Tt}$ , les courbes de cette dérivée convergent vers la dérivée au sens des distributions  $\dot{T}(s, t)$  de  $T$ , donnée par l'expression [71] :

$$\dot{T}(\cdot, t) = (T(\cdot, t) - T_\infty) v_H \delta_{\Gamma_{Tt}} + \left\{ \dot{T}(\cdot, t) \right\}, \quad \left\{ \dot{T}(\cdot, t) \right\} := \dot{T}(\cdot, t)|_{\Omega_{1,0} \setminus \Gamma_{Tt}} \quad (3.14)$$

Avec  $\delta_{\Gamma_{Tt}}$  désignant la distribution surfacique de Dirac sur l'interface  $\Gamma_{Tt}$  défini :

$$\langle \delta_{\Gamma_{Tt}}, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_{Tt}} \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_{1,0}) \quad (3.15)$$

Avec  $\mathcal{D}(\Omega_{1,0})$  désignant l'espace vectoriel des fonctions réelles définies dans  $\Omega_{1,0}$ , infiniment différentiables et à support compact contenu dans  $\Omega_{1,0}$ .

Cependant, aux points suffisamment éloignés de l'interface  $\Gamma_{Tt}$ , nous observons une bonne convergence. Le comportement limite en ces points, correspond à de très faibles valeurs négatives de  $\dot{T}$  pour les points très éloignés  $\Gamma_{Tt}$  ( $s < 24.375mm$ ), à des valeurs négatives im-

portantes en des points suffisamment proches de la zone de chauffage ( $24.375\text{mm} < s < 31.1\text{mm}$ ), c'est-à-dire des points venant d'être traversés par cette dernière. Cela traduit donc la décroissance rapide de la vitesse de refroidissement avec la diminution en abscisse.

**En période de refroidissement** Les distributions spatiales de la température et de sa dérivée temporelle, à l'instant  $t = 37.5\text{s}$ , sur la courbe axiale  $C_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.10.

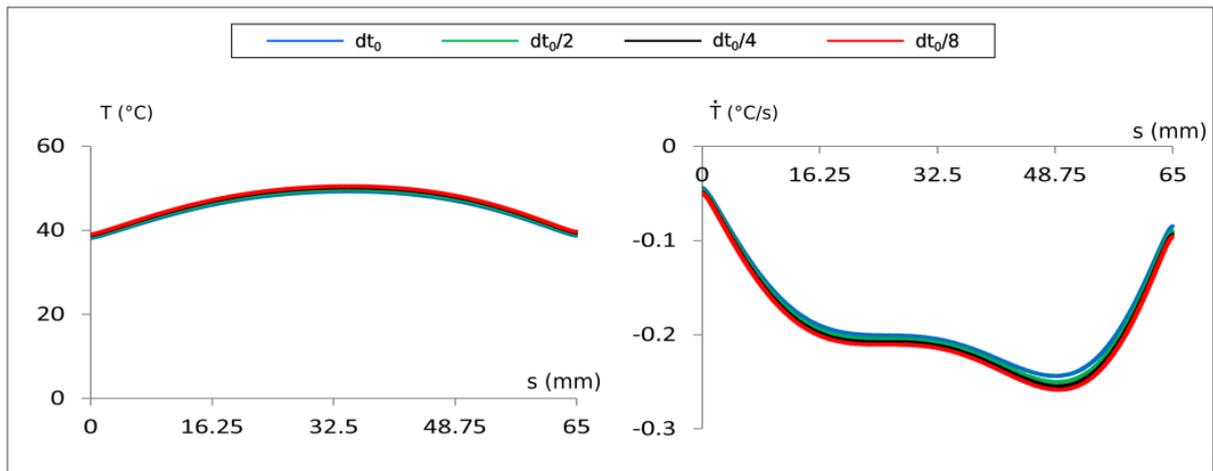


FIGURE 3.10 – Distributions spatiales de la température  $T$  et de sa vitesse  $\dot{T}$  sur la courbe axiale  $C_{1,0}$  à l'instant  $t = 37.5\text{s}$  pour différents pas de temps

En ce qui concerne la température, nous observons une bonne convergence. Le comportement limite correspond à une distribution spatiale de température autour d'une valeur moyenne proche de  $45^\circ\text{C}$ , avec un refroidissement plus prononcé aux extrémités de du cordon, ce qui est logique compte tenu du caractère tridimensionnel de l'extraction de la chaleur en ces extrémités. On constate ainsi une quasi-symétrie du profil de température (toutefois légèrement déporté vers la fin du dépôt).

En ce qui concerne la dérivée temporelle de la température, nous observons également une bonne convergence. Le comportement limite correspondant à une distribution de très faibles valeurs négatives de  $\dot{T}$  en raison des faibles variations de la température. Ces valeurs négatives sont plus faibles au niveau des extrémités auxquelles la température est plus faible.

### Cas du modèle mécanique

Comme montré dans le problème mécanique 2.55, formulé au chapitre précédent, le paramètre de sollicitation mécanique est la vitesse de dilatation thermique  $3\alpha(T)\dot{T}$ . Or il a été montré dans la section précédente, que la vitesse de température  $\dot{T}$  ne vérifie pas de régularité spatiale du fait du saut de température observé sur l'interface d'activation.

Par conséquent, pour notre étude de convergence, nous nous proposons d'adopter, pour les quatre pas de temps, les mêmes approximations de la température et de sa vitesse, compte tenu du même maillage utilisé pour ces quatre pas de temps. Pour cela, nous choisissons celles obtenues par le plus petit pas de temps, c'est-à-dire  $dt_0/8$ .

### Évolutions temporelles

L'évolution temporelle du champ de déplacement post-dépôt  $\underline{u}_{pd}$  est donnée dans la figure 3.11.

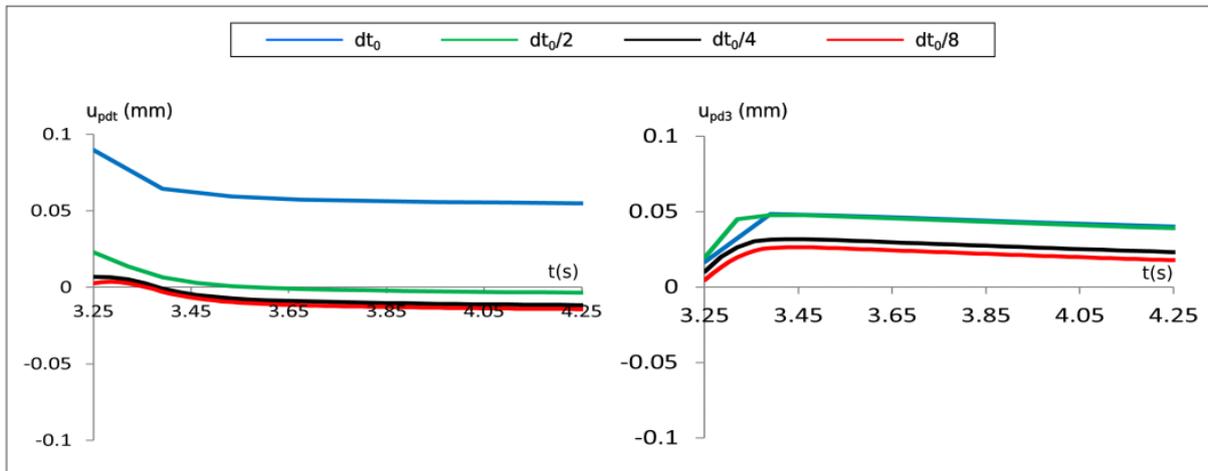


FIGURE 3.11 – Évolution temporelle du déplacement post-dépôt  $\underline{u}_{pd}$  calculée sur le capteur  $C(0,0,0.31)$  pour différents pas de temps

Nous observons une bonne convergence de l'évolution temporelle du déplacement post-dépôt suivant  $\underline{e}_t$  et  $\underline{e}_3$ . Le comportement limite correspond tout d'abord à un déplacement positif suivant les deux directions à l'approche de la source de chaleur, puis un changement de signe du déplacement tangentiel  $u_{pdt}$  et une augmentation du déplacement vertical  $u_{pds}$  au passage de celle-ci, suivi d'une augmentation du déplacement tangentiel dans le sens opposé à  $\underline{e}_t$  et d'une diminution du déplacement vertical du fait de l'éloignement de la source de chaleur. Nous constatons également la non annulation de ces deux déplacements pendant l'éloignement de la source de chaleur : cela traduit ainsi le comportement plastique et l'effet des contraintes résiduelles, observés en ce capteur.

### Distributions spatiales

**En période de chauffage** Les distributions spatiales de la distorsion et des contraintes, à l'instant  $t = 3.25s$ , sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.12.

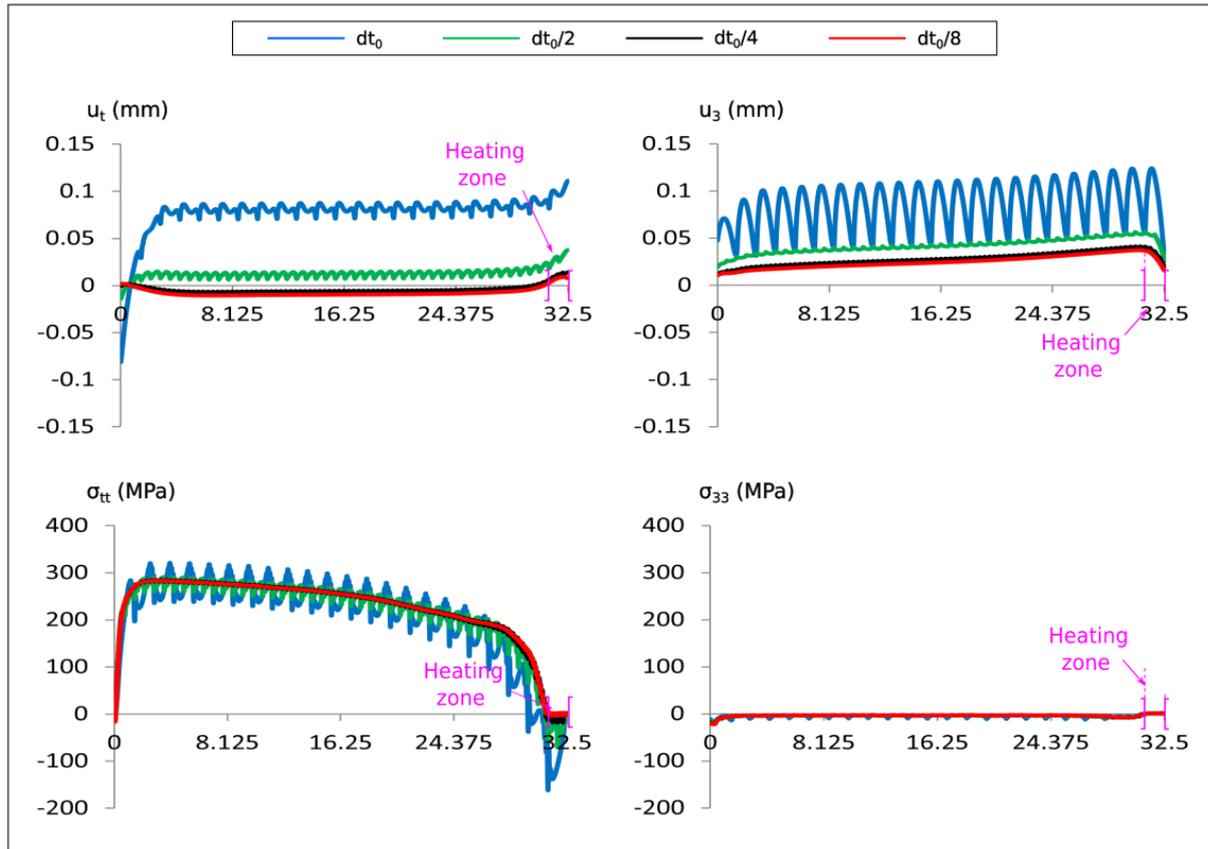


FIGURE 3.12 – Distributions spatiales de la distorsion  $\underline{u}$  et des contraintes  $\underline{\sigma}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 3.25\text{s}$  pour différents pas de temps

En ce qui concerne la distorsion, nous observons une bonne convergence. Le comportement limite suivant  $\underline{e}_t$  correspond principalement à une très large zone de valeurs négatives étant la zone franchie par la source de chaleur, et à une zone très étroite de valeurs positives étant celle à franchir par la source de chaleur. Le comportement limite suivant  $\underline{e}_3$  correspond principalement à une très large zone de valeurs fortement positives, zone franchie par la source de chaleur. Ces comportements limites traduisent ainsi non seulement le phénomène de dilatation thermique observé dans le cordon en cours de construction, mais également les contraintes mécaniques, les déformations permanentes, et l'écart géométrique entre la configuration réelle et la configuration CAO induit par le chauffage.

En ce qui concerne les contraintes, nous observons également une bonne convergence. Le comportement limite de la contrainte  $\sigma_{tt}$  correspond à une large zone de traction étant la zone franchie par la source de chaleur, et à une zone de très faible traction au voisinage la source de chaleur. Le comportement limite de  $\sigma_{33}$  correspond à une distribution relativement faible de valeurs négatives.

**En période de refroidissement** Les distributions spatiales de la distorsion et des contraintes, à l'instant  $t = 37.5\text{s}$ , sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.13.

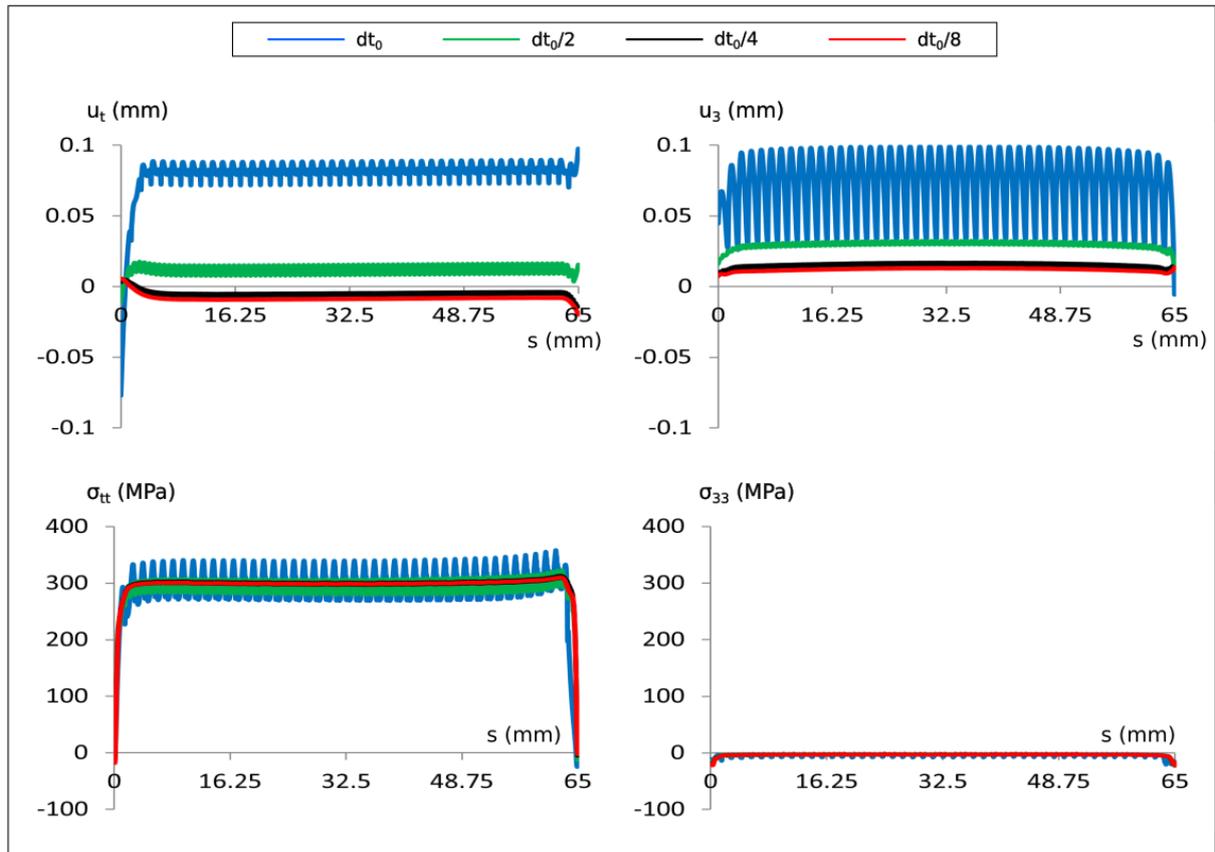


FIGURE 3.13 – Distributions spatiales de la distorsion  $\underline{u}$  et des contraintes  $\underline{\sigma}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 37.5s$  pour différents pas de temps

En ce qui concerne la distorsion, nous observons une bonne convergence. Le comportement limite suivant  $\underline{e}_t$  correspond à un déplacement négatif du cordon construit mis à part l'extrémité initiale de ce dernier. Ce déplacement négatif est presque uniforme loin des extrémités et plus important à l'extrémité finale. Globalement, le comportement suivant  $\underline{e}_t$  correspond à une compression. Le comportement suivant  $\underline{e}_3$  de la distorsion correspond à un déplacement positif quasi-uniforme (variant faiblement autour de 0.01mm) du cordon construit. Ce déplacement est plus important au centre du cordon.

En ce qui concerne les contraintes, nous observons également une bonne convergence. Le comportement limite de la contrainte  $\sigma_{tt}$  correspond à une traction quasi-uniforme (variant très faiblement autour de 300MPa) du cordon en chaque point suffisamment éloigné de ses extrémités. Le comportement limite de  $\sigma_{33}$  correspond à une distribution relativement faible de valeurs négatives.

### 3.2.2 Aspect spatial de la convergence

Dans cette étude, la discrétisation temporelle en période de chauffage repose sur le pas de temps  $dt_0/4$  en raison d'un bon compromis entre efficacité et précision. Les différents

pas de maillage utilisés au niveau du mur sont les suivants (figure 3.14) :  $6h_0$ ,  $3h_0$ ,  $1.5h_0$  et  $h_0$ .

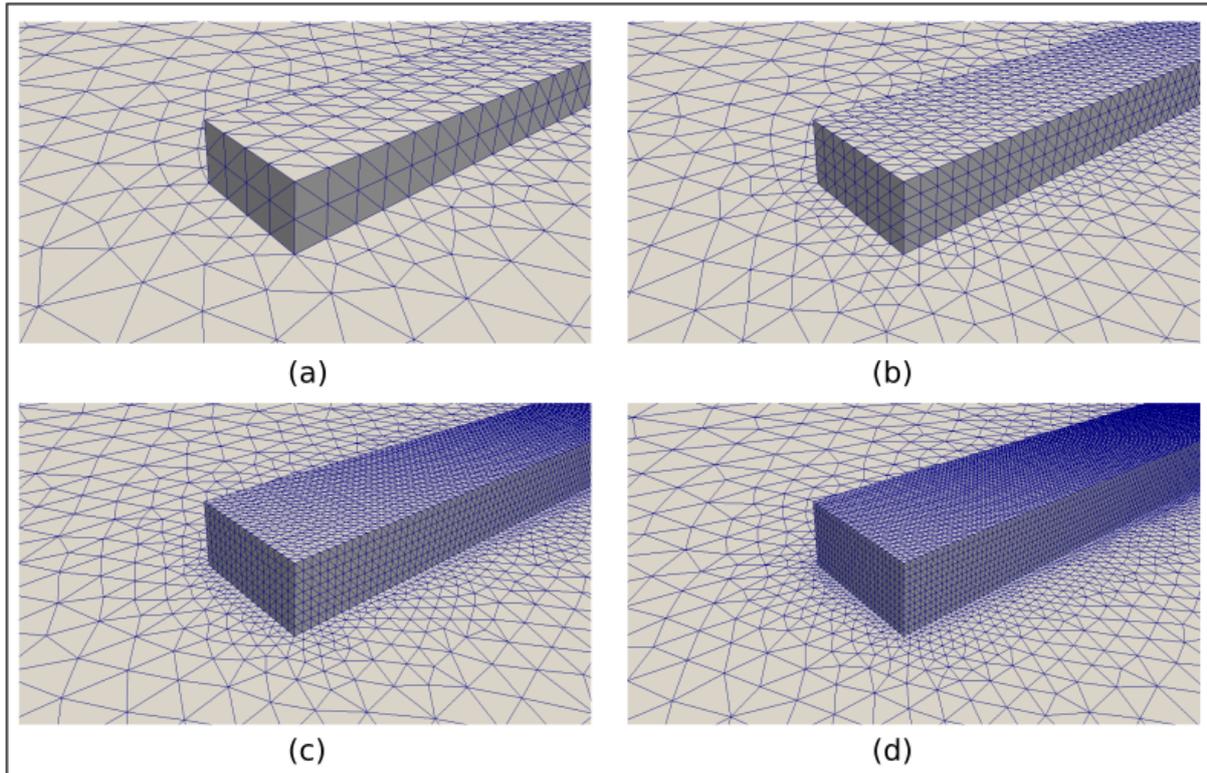


FIGURE 3.14 – Maillages d'étude de convergence spatiale en fonction du pas : (a)  $6h_0$ ; (a)  $3h_0$ ; (b)  $1.5h_0$ ; (d)  $h_0$

Tout comme pour l'aspect temporel, l'étude de convergence sous l'aspect spatial consiste tout d'abord en l'analyse des évolutions temporelles de la température  $T$ , de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$ , et du déplacement post-dépôt  $\underline{u}_{pd}$ , observées en un capteur  $C$  fixé au point matériel de position CAO correspondant au centre de  $\Omega_{T1,0}$  ( $\underline{X}_C = \frac{H_1}{2}\underline{e}_3 = 0.31\underline{e}_3$  (mm)). Puis elle se poursuit par l'analyse des distributions spatiales, sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  de  $\Omega_{T1,0}$ , des champs de température, de dérivée temporelle de la température, de distorsion et des contraintes aux instants  $t = \frac{L_T}{2v_H} = 3.25$ s (fin de la construction de la première moitié de  $\Omega_{T1,0}$ ) et  $t = t_1 = 36.5$ s (soit 31s après la fin de la construction à  $t = 6.5$ s de  $\Omega_{T1,0}$ ). Nous effectuerons tout d'abord l'étude de convergence du modèle thermique puis celle du modèle mécanique.

### Cas du modèle thermique

**Évolutions temporelles** Les évolutions temporelles de la température et de sa dérivée temporelle, sont données dans la figure 3.15.

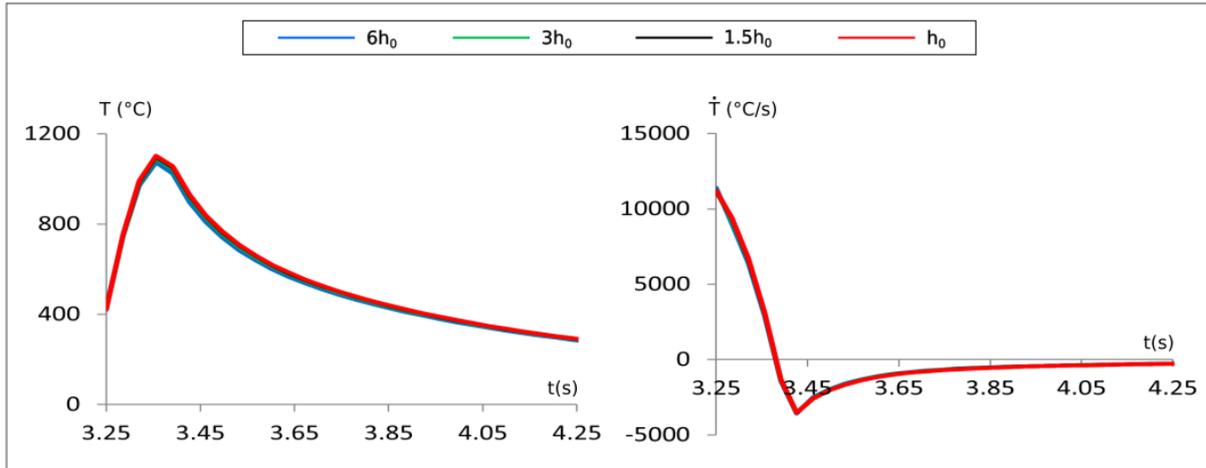


FIGURE 3.15 – Évolutions temporelles de la température  $T$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$  calculées sur le capteur  $C(0, 0, 0.31)$ (mm) pour différents pas de maillage

En ce qui concerne la température, nous observons une bonne convergence de son évolution temporelle au point C. Le comportement limite est similaire à celui trouvé dans l'aspect temporel.

En ce qui concerne la dérivée temporelle de la température, nous observons une bonne convergence régulière en raison du pas de temps fixé. Le comportement limite correspond à une élévation à de fortes valeurs positives en raison du passage de la source de chaleur, puis à une chute rapide à des valeurs négatives moins importantes (en valeur absolue) que les fortes valeurs positives mais considérables, et enfin à une croissance exponentielle vers la valeur nulle.

### Distributions spatiale

**En période de chauffage** Les distributions spatiales de la température et de sa dérivée temporelle, à l'instant  $t = 3.25$ s, sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.16.

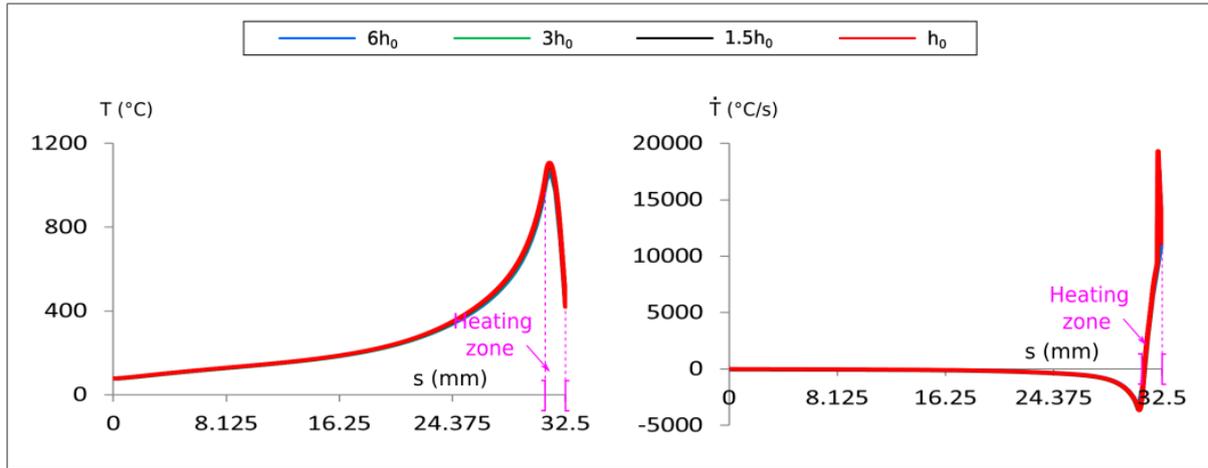


FIGURE 3.16 – Distribution spatiale de la température  $T$  et de sa dérivée temporelle  $\dot{T}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 3.25s$  pour différents pas de maillage

En ce qui concerne la température, nous observons une bonne convergence de la distribution spatiale. Le comportement limite est similaire à celui trouvé dans l'aspect temporel. En ce qui concerne la dérivée temporelle de la température, nous observons une bonne convergence en raison du pas de temps fixé. Le comportement limite, pour les points suffisamment éloignés de l'interface  $\Gamma_{T,t}$ , est similaire à celui de l'aspect temporel. Et pour les points proches de cette interface, notamment ceux situés dans la zone de chauffage, le comportement limite correspond à de fortes valeurs positives du fait de l'élévation brusque de la température causée par la source de chaleur.

**En période de refroidissement** Les distributions spatiales de la température et de sa dérivée température, à l'instant  $t = 37.5s$ , sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.17.

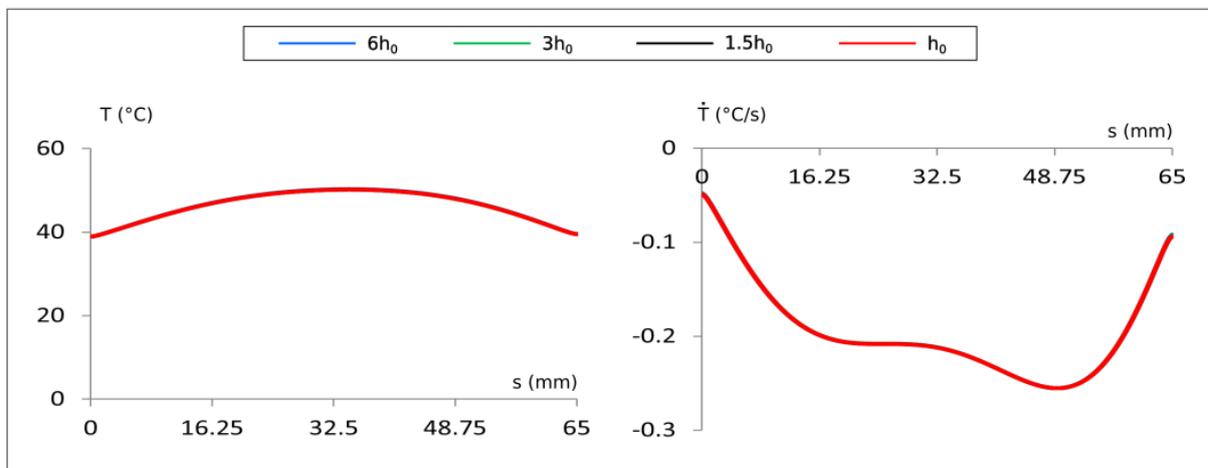


FIGURE 3.17 – Distributions spatiales de la température  $T$  et de sa vitesse  $\dot{T}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 37.5s$  pour différents pas de maillage

Nous observons une bonne convergence des distributions spatiales de la température et de sa vitesse. Les comportements limites correspondent à ceux de l'aspect temporel.

### Cas du modèle mécanique

Compte tenu de la régularité de la convergence spatiale à pas de temps fixé de la dérivée temporelle de la température, pour l'étude de convergence du modèle mécanique, on adopte pour chacun des quatre pas de maillage, le champ  $\dot{T}$  calculée.

### Évolutions temporelles

L'évolution temporelle du champ de déplacement post-dépôt  $\underline{u}_{pd}$  est donnée dans la figure 3.18.

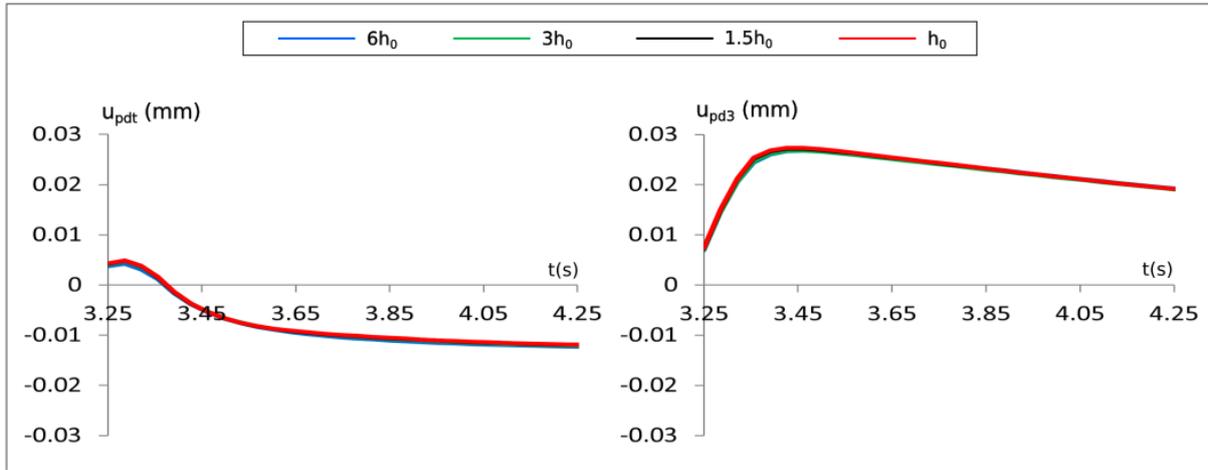


FIGURE 3.18 – Évolution temporelle du déplacement post-dépôt  $\underline{u}_{pd}$  calculée sur le capteur  $C(0,0,0.31)$  pour différents pas de maillage

Nous observons une bonne convergence de l'évolution temporelle du déplacement post-dépôt suivant  $e_t$  et  $e_3$ . Le comportement limite correspond à celui de l'aspect temporel.

### Distributions spatiales

**En période de chauffage** Les distributions spatiales de la distorsion et des contraintes, à l'instant  $t = 3.25$ s, sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.19.

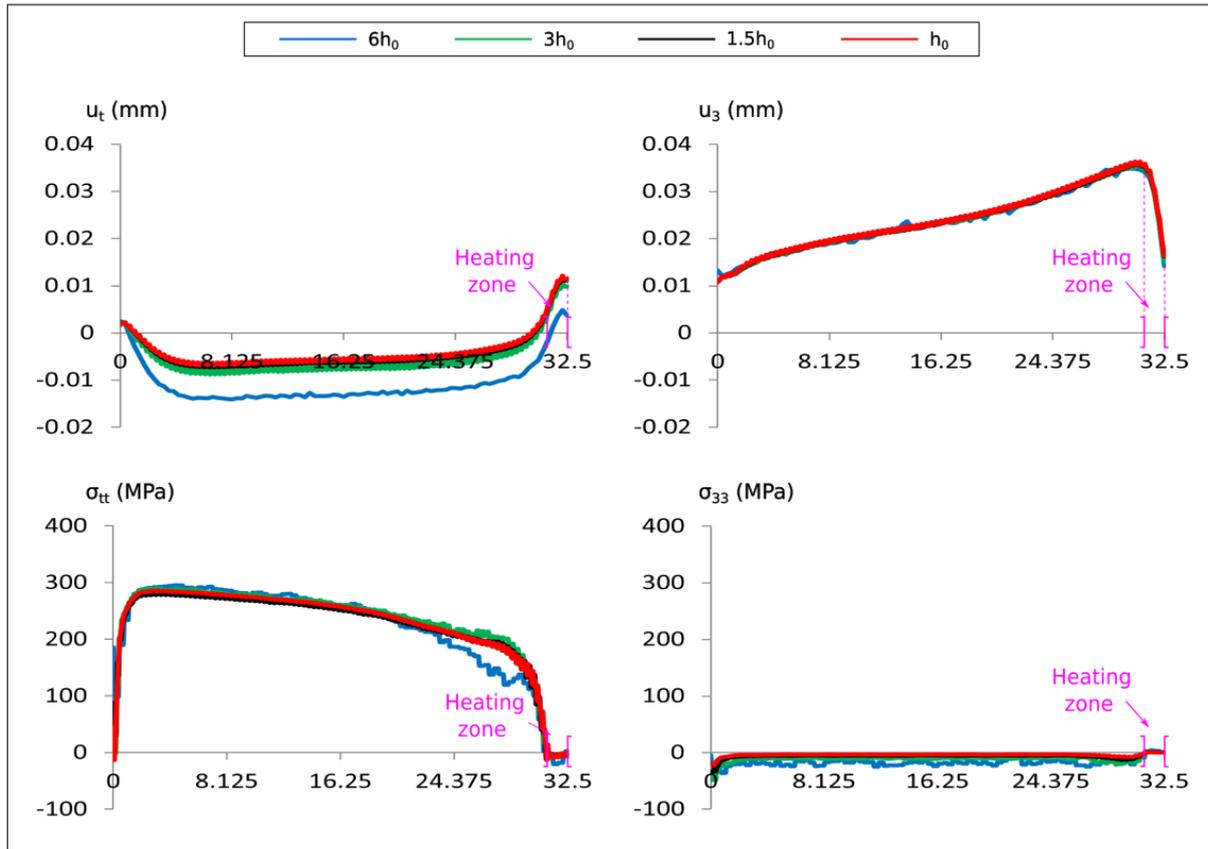


FIGURE 3.19 – Distributions spatiales de la distorsion  $\underline{u}$  et des contraintes  $\underline{\sigma}$  sur la courbe axiale  $C_{1,0}$  à l'instant  $t = 3.25$ s pour différents pas de maillage

Nous observons une bonne convergence des distributions spatiales de la distorsion et des contraintes résiduelles. Le comportement limite est similaire à celui de l'aspect temporel.

**En période de refroidissement** Les distributions spatiales de la distorsion et des contraintes, à l'instant  $t = 37.5$ s, sur la courbe axiale  $C_{1,0}$ , sont données dans la figure 3.20.

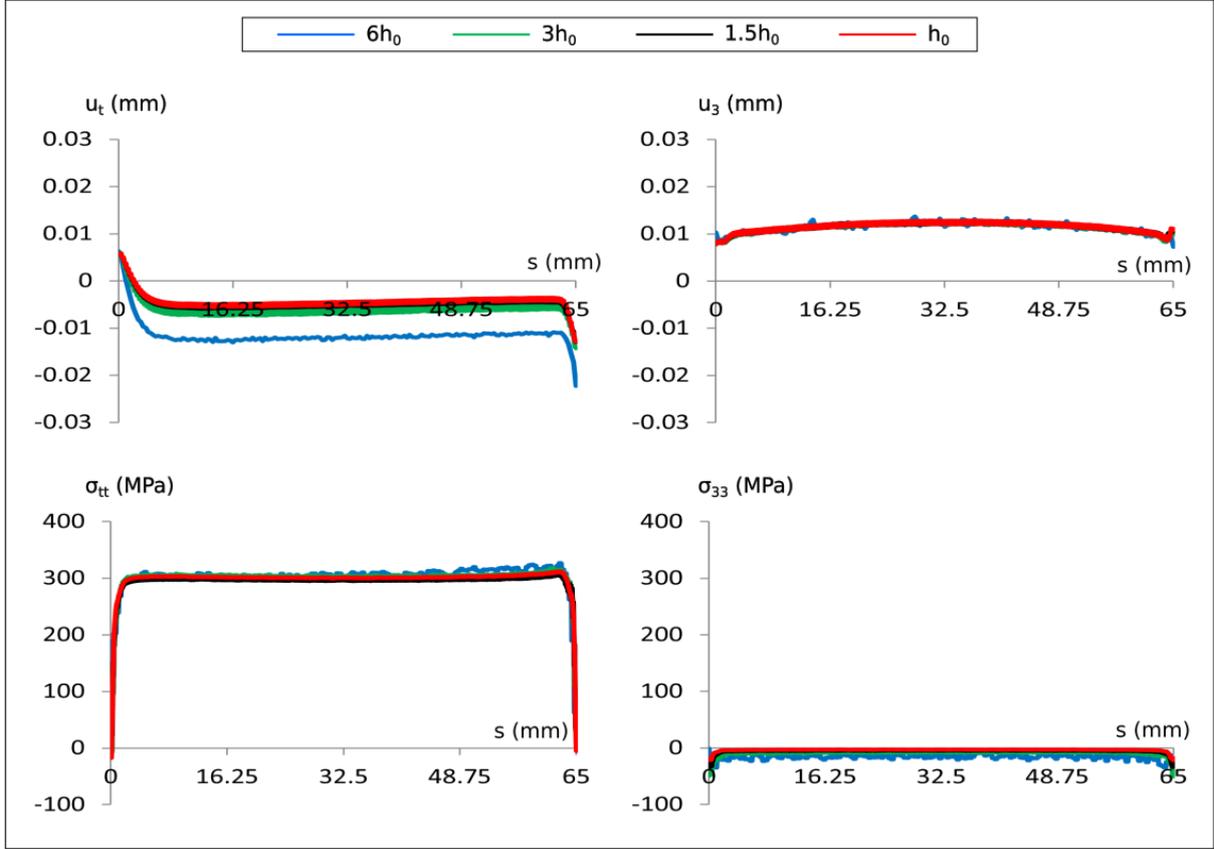


FIGURE 3.20 – Distributions spatiales de la distorsion  $\underline{u}$  et des contraintes  $\underline{\sigma}$  sur la courbe axiale  $\mathcal{C}_{1,0}$  à l'instant  $t = 37.5s$  pour différents pas de maillage

Nous observons une bonne convergence des distributions spatiales de la distorsion et des contraintes résiduelles. Le comportement limite est similaire à celui de l'aspect temporel.

### 3.3 Étude de sensibilité thermique

Il s'agit d'étudier, pour le mur, le comportement thermique du système en fonction des positions extrêmes de la source de chaleur pour chaque cordon  $\mathcal{M}_T$ , positions déterminant sa durée totale de chauffage  $t_{Tf}^H - t_{T0}^H$ . Nous considérons trois cas :

1.  $\overline{C_0 C_0^H} = -\frac{l_T}{2}$  (Figure 3.21.(a)) : Le débordement total de la source de chaleur permet aux points extrêmes (suivant la longueur) du cordon d'expérimenter une durée de chauffage identique à celle, c'est-à-dire  $dt_0$  ( $:= \frac{l_T}{v_H}$ ), des points centraux. On obtient :

$$t_{Tf}^H - t_{T0}^H = \frac{L_T + l_T}{v_H} \quad (3.16)$$

2.  $\overline{C_0 C_0^H} = 0$  (Figure 3.21.(b)) : Le débordement à moitié de la source de chaleur permet aux points extrêmes du cordon de n'expérimenter que la moitié de la durée

de chauffage des points centraux. On obtient :

$$t_{Tf}^H - t_{T0}^H = \frac{L_T}{v_H} \quad (3.17)$$

La durée de chauffage total du cordon  $\mathcal{M}_T$  est donc identique à sa durée de construction.

3.  $\overline{C_0 C_0^H} = \frac{l_T}{2}$  (Figure 3.21.(c)) : L'absence totale de débordement de la source de chaleur implique une durée de chauffage quasi-nulle des points extrêmes du cordon.

On obtient :

$$t_{Tf}^H - t_{T0}^H = \frac{L_T - l_T}{v_H} \quad (3.18)$$

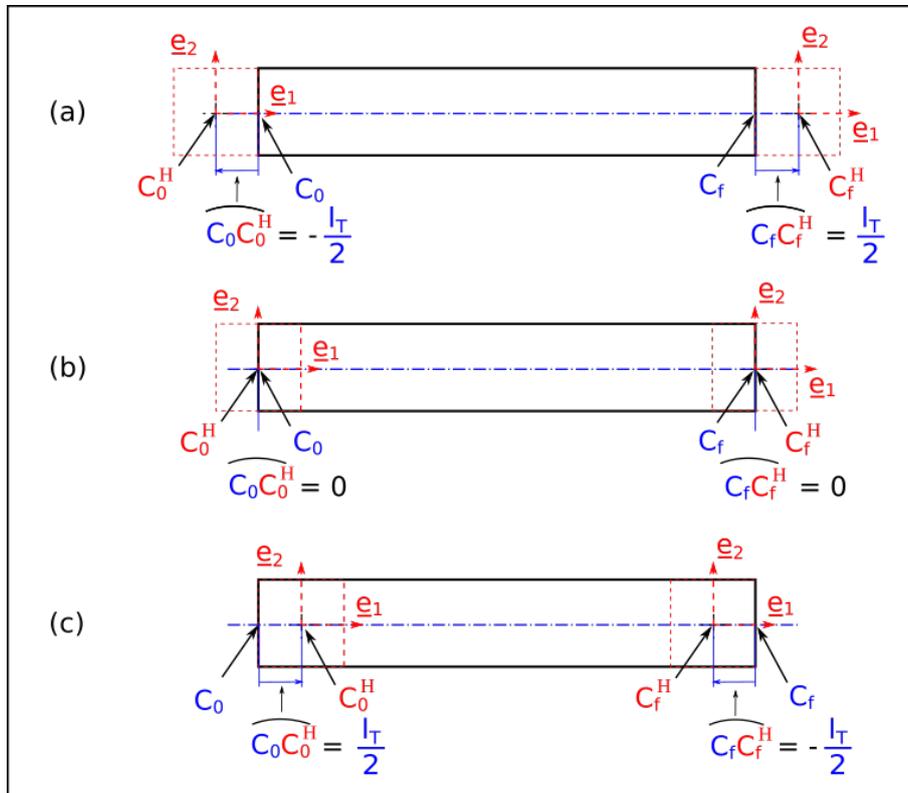


FIGURE 3.21 – Différents cas de positions extrêmes de la source de chaleur

Deux types de résultats sont présentés : l'évolution temporelle de la température en différents capteurs, et la distribution spatiale en différents instants.

### 3.3.1 Évolution temporelle

Nous intéressons ici aux trois capteurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  positionnés respectivement à l'extrémité initiale ( $s_T = 0$ ), le centre ( $s_T = L_T/2$ ) et l'extrémité finale ( $s_T = L_T$ ) de la courbe axiale  $\mathcal{C}_{T15}$  de la géométrie CAO  $\Omega_{T15,0}$  du cordon  $\mathcal{M}_{T15}$ . La figure 3.22 ci-dessous nous présente l'évolution temporelle de la température en ces trois capteurs pendant la

construction de ce cordon au cours de l'intervalle  $[t_{14}, t_{15}]$ , suivant chacun des trois cas de débordement de la source de chaleur.

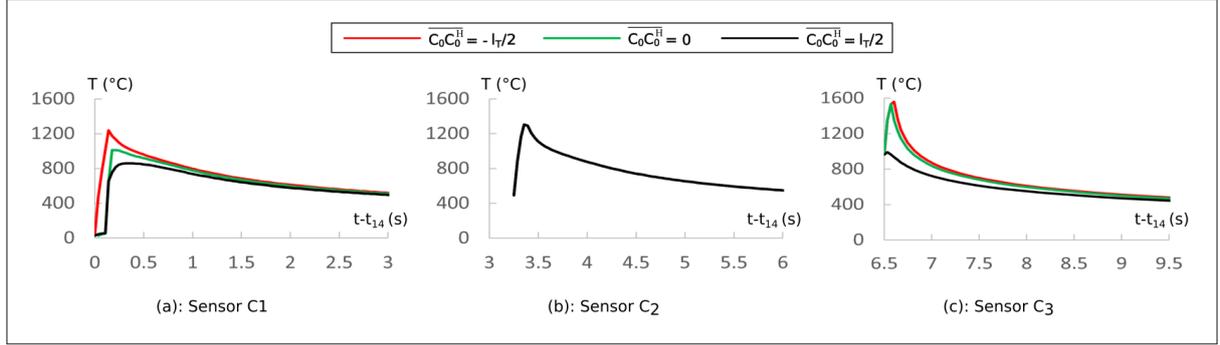


FIGURE 3.22 – Évolution temporelle de la température calculée en fonction de  $\overline{C_0 C_0^H}$  : (a) au capteur  $C_1$  ; (b) au capteur  $C_2$  ; (c) au capteur  $C_3$

Nous observons dans cette figure, que la réponse thermique des capteurs  $C_1$  et  $C_2$  situés aux extrémités de l'axe  $\mathcal{C}_{T15}$ , est nettement croissante avec le niveau de débordement de la source de chaleur. Toutefois le niveau de cette croissance diminue avec ce dernier étant donné que l'écart observé entre les réponses thermiques de ces capteurs suivant les deux premiers cas de débordement  $\overline{C_0 C_0^H} = -\frac{l_T}{2}$  et  $\overline{C_0 C_0^H} = 0$  est bien inférieur à celui observé entre celles suivant les deux derniers cas de débordement 0 et  $\overline{C_0 C_0^H} = \frac{l_T}{2}$ . Cependant, en ce qui concerne le capteur  $C_2$  situé bien loin des extrémités de l'axe  $\mathcal{C}_{T15}$ , les réponses thermiques suivant les trois cas de débordement sont quasi-identiques. L'effet de débordement de la source de chaleur est donc négligeable dans les zones suffisamment éloignées des extrémités de  $\Omega_{T15,0}$ .

### 3.3.2 Distribution spatiale

Nous nous intéressons ici à la distribution spatiale de la température suivant différents cas de débordement, aux instants  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ , fin de construction de la première moitié de  $\mathcal{M}_{T15}$ , et  $t = t_f$ , fin de refroidissement total après la construction du dernier cordon  $\mathcal{M}_{T30}$ . La figure 3.23 nous présente, à l'instant  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  la distribution spatiale de la température sur l'axe  $\mathcal{C}_{T15}$  de  $\Omega_{T15,0}$ , et à l'instant  $t = t_f$  la distribution spatiale de la température sur l'axe  $\mathcal{C}_{T30}$  de  $\Omega_{T30,0}$ .

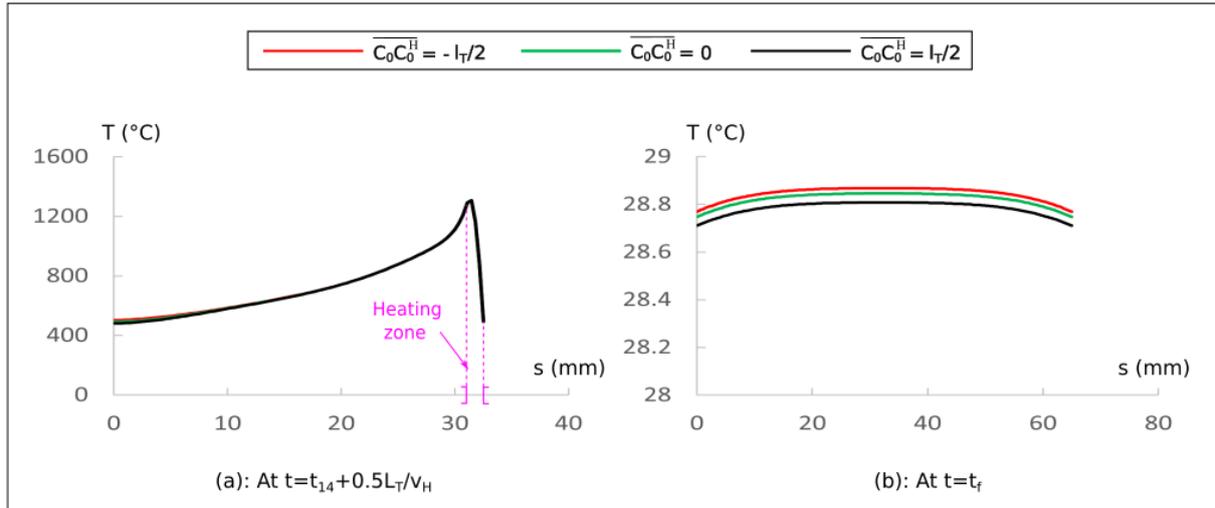


FIGURE 3.23 – Distribution spatiale de la température calculée en fonction de  $\overline{C_0 C_0^H}$  : (a) à l'axe  $\mathcal{C}_{T15}$  de  $\Omega_{T15,0}$  à l'instant  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$ ; (b) à l'axe  $\mathcal{C}_{T30}$  de  $\Omega_{T30,0}$  à l'instant  $t = t_f$

Sur la figure 3.23.(a), de légères différences ne sont observées que dans la zone proche de l'extrémité initiale de l'axe  $\mathcal{C}_{T15}$ ; ailleurs les trois courbes sont pratiquement identiques. Comme constaté dans la figure précédente (figure 3.22.(a)), l'effet de débordement de la source de chaleur ne se limite donc qu'aux extrémités de  $\Omega_{T15,0}$ .

Sur la figure 3.23.(b), les trois courbes sont quasi-identiques car l'écart maximal de l'ordre  $10^{-1}K$ . L'effet de débordement de la source de chaleur en plus d'être limité en espace, se limite également en temps, dans la mesure où il n'est que temporaire, car en période de refroidissement il devient négligeable.

### 3.4 Étude de sensibilité mécanique

Il s'agit d'étudier, pour l'aube, les comportements mécanique du système  $\mathcal{M}$ , et cinématique de la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$ , en fonction des différentes valeurs du facteur de pénalisation  $\eta_p$ . que sont : 0.05, 0.25 et 0.50. Pour cette étude, nous nous intéressons aux distributions spatiales des champs de distorsions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  aux deux instants  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  et  $t = t_f$ .

#### 3.4.1 À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$

La figure 3.24 nous présente, pour cet instant et suivant les trois valeurs de  $\eta_p$ , les différents profils des champs de distorsions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube; les profils des distorsions de la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$  étant données en traits interrompus. Nous y observons :

- un comportement convergent, avec une décroissance de l'amplitude, de la distorsion  $\underline{u}_f$  du système total  $\mathcal{M}_f$  avec l'augmentation de  $\eta_p$  ;
- pour des valeurs de  $\eta_p$  suffisamment importantes, une décroissance progressive et régulière vers des valeurs quasi-nulles de l'amplitude de la distorsion  $\underline{u}_n$  de  $\mathcal{M}^{nb}$  avec l'augmentation de la coordonnée  $X_3$  ;
- une insensibilité quasi-totale du champ de contraintes de  $\mathcal{M}$  aux différentes valeurs de  $\eta_p$ .

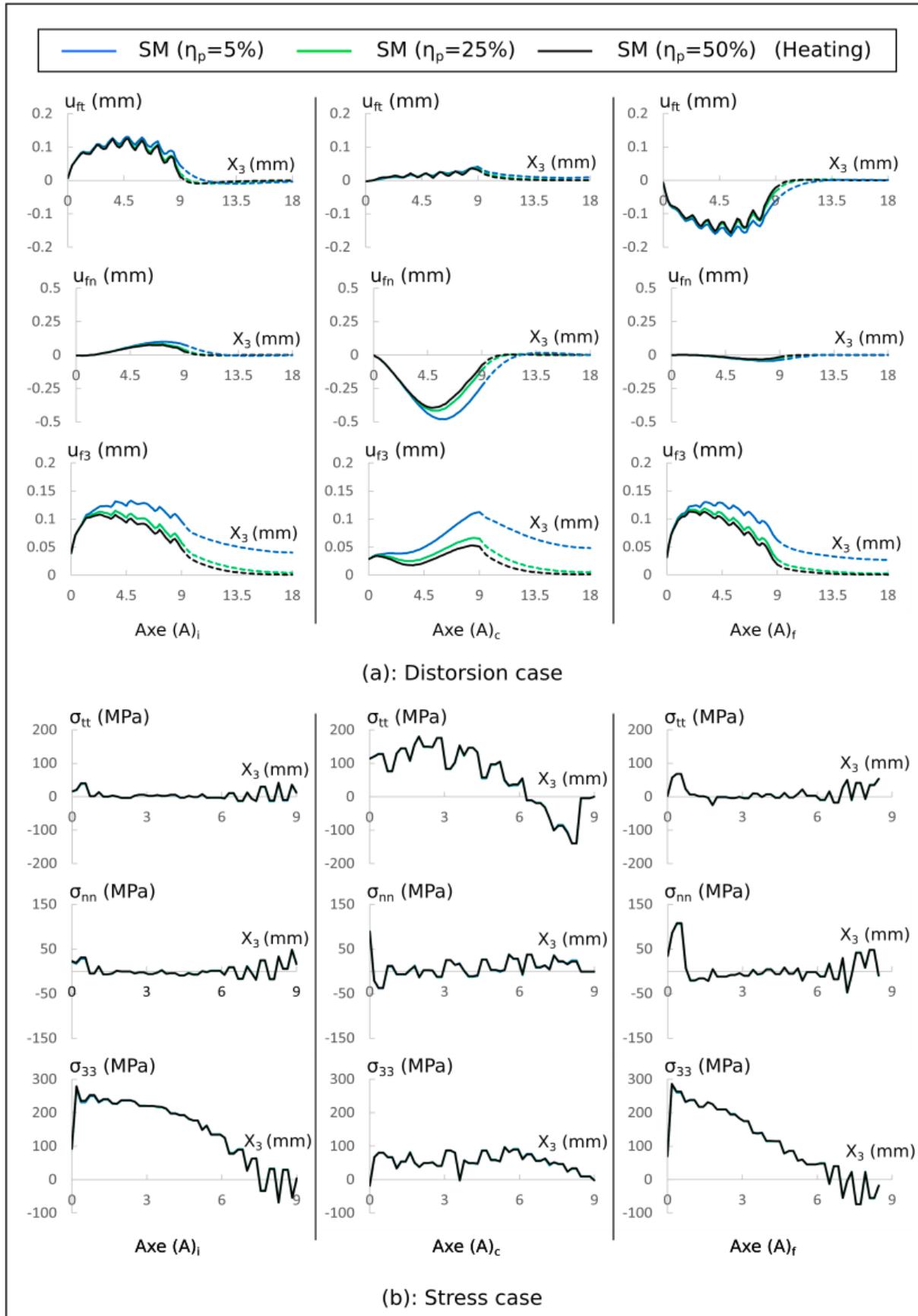


FIGURE 3.24 – Profils de distorsions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  de l'aube en fonction de  $\eta_p$  à  $t = t_{14} + t_b$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

### 3.4.2 À l'instant final $t = t_f$

La figure 3.25 nous présente, pour l'instant final et suivant les trois valeurs de  $\eta_p$ , les différents profils des champs de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube. Nous y observons :

- un comportement convergent, avec une décroissance de l'amplitude, du champ de distorsion  $\underline{u}$  avec l'augmentation de  $\eta_p$ ;
- une insensibilité quasi-totale du champ de contraintes du système  $\mathcal{M}$  aux différentes valeurs de  $\eta_p$ .

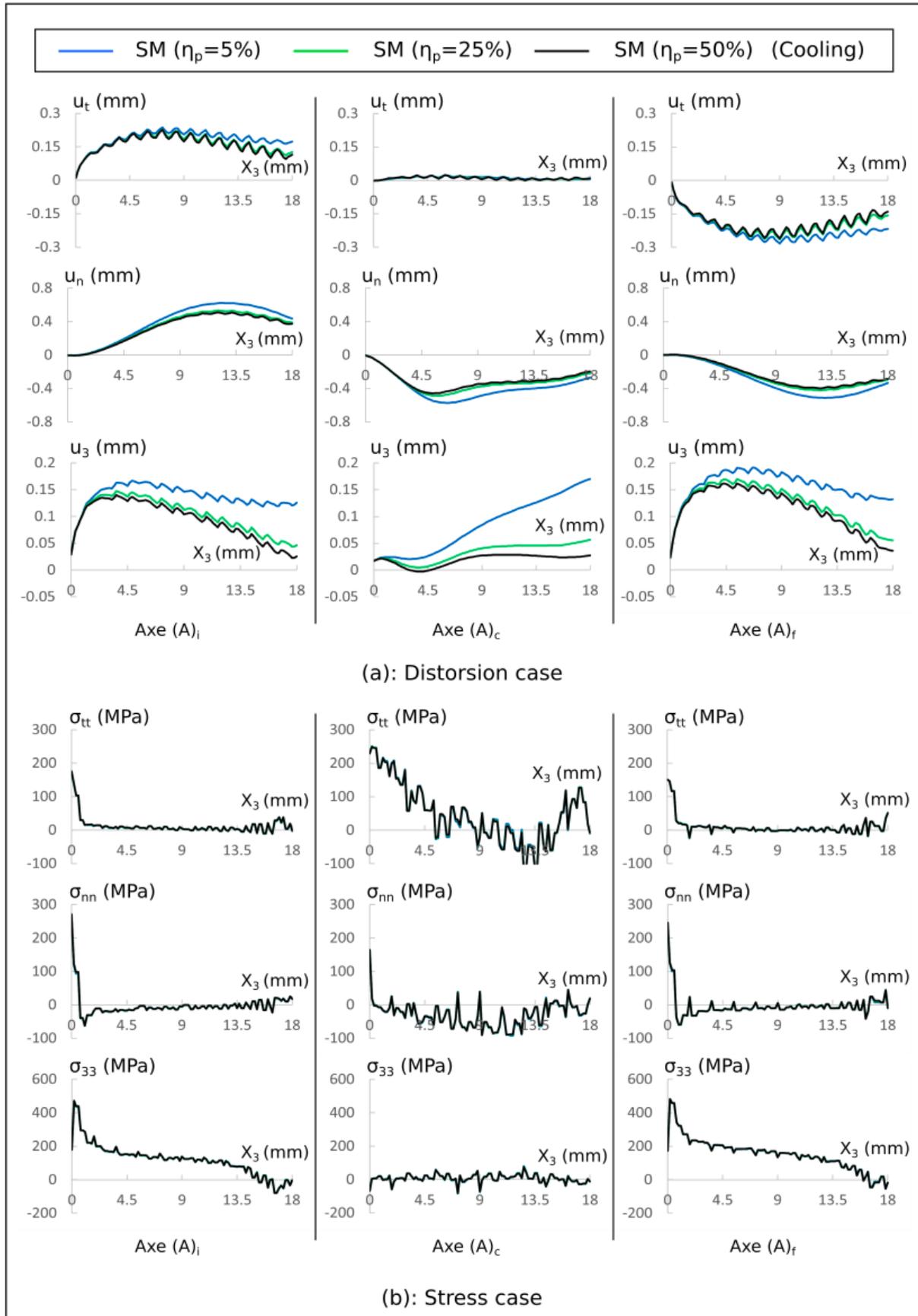


FIGURE 3.25 – Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  de l'aube en fonction de  $\eta_p$  à  $t = t_f$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

## 3.5 Étude comparative avec la méthode quiet element

Cette étude consiste à comparer, pour l'aube, les résultats d'application du modèle standard (standard model (SM)) avec ceux de la méthode quiet element (QE) suivant les deux valeurs 1GPa et 10GPa du module d'Young  $E_q$  (celle de Biegler et al. [46]) attribués au domaine non actif. Plus précisément, nous comparerons les champs de distorsions et de contraintes observés sur le système  $\mathcal{M}$  et sur la partie non construite  $\mathcal{M}$  issus des applications de ces différentes méthodes. La comparaison étant purement mécanique, le modèle thermique utilisé pour la méthode quiet element est celui du modèle standard. Pour cette étude, nous faisons usage aux données thermomécaniques de Depradeux décrites en annexe, fixons la valeur du facteur  $\eta_p$  à 0.25, et nous intéressons également aux deux instants  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  et  $t = t_f$ .

### 3.5.1 À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$

Les figures 3.26-3.30 nous présentent, pour cet instant, les champs de distorsions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  issus des applications du modèle standard (SM) pour  $\eta_p = 0.25$ , et de la méthode quiet element (QE) pour  $E_q=1\text{GPa}$  et  $E_q=10\text{GPa}$ . La partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$  est donnée en transparent les figures 3.26-3.29, et en traits interrompus dans la figure 3.30. Et, pour raisons de comparaisons, nous étendons le domaine de définition des contraintes issues du modèle standard à tout le système  $\mathcal{M}_f$ , en attribuant des valeurs nulles de contraintes dans  $\mathcal{M}^{nb}$ .

En ce qui concerne les distorsions, par rapport au modèle standard, nous observons dans ces figures :

- une importante surestimation des amplitudes de distorsions du système total  $\mathcal{M}_f$ , en particulier dans la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$  de la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$  ;
- une importante surestimation des amplitudes de distorsions dans la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$  de la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$  ;
- une proximité moyennement bonne des distorsions suivant la direction tangentielle  $\underline{e}_t$ , une diminution d'amplitude des distorsions suivant la direction normale  $\underline{e}_n$ , des distorsions suivant la direction verticale  $\underline{e}_3$  très négatives de la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

En ce qui concerne les contraintes, par rapport au modèle standard, nous observons dans ces figures :

- une bonne approximation des contraintes de la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$  ;

- une importante surestimation des amplitudes des contraintes au niveau de l'interface entre le système  $\mathcal{M}$  et la partie non construite  $\mathcal{M}^{nb}$  de la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ , et donc une moins bonne approximation des contraintes.

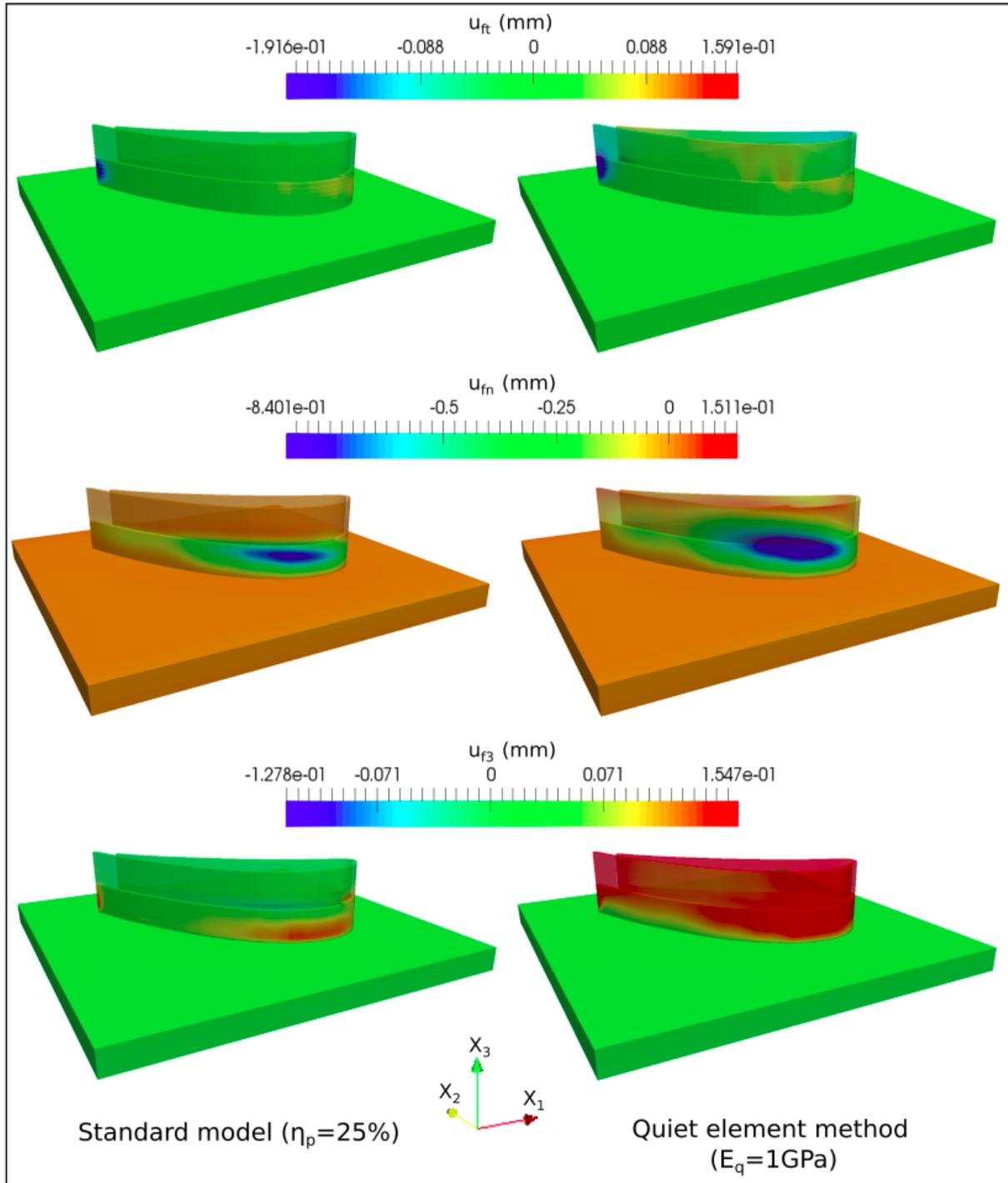


FIGURE 3.26 – Champs de distortions  $\underline{u}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$ ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$ .

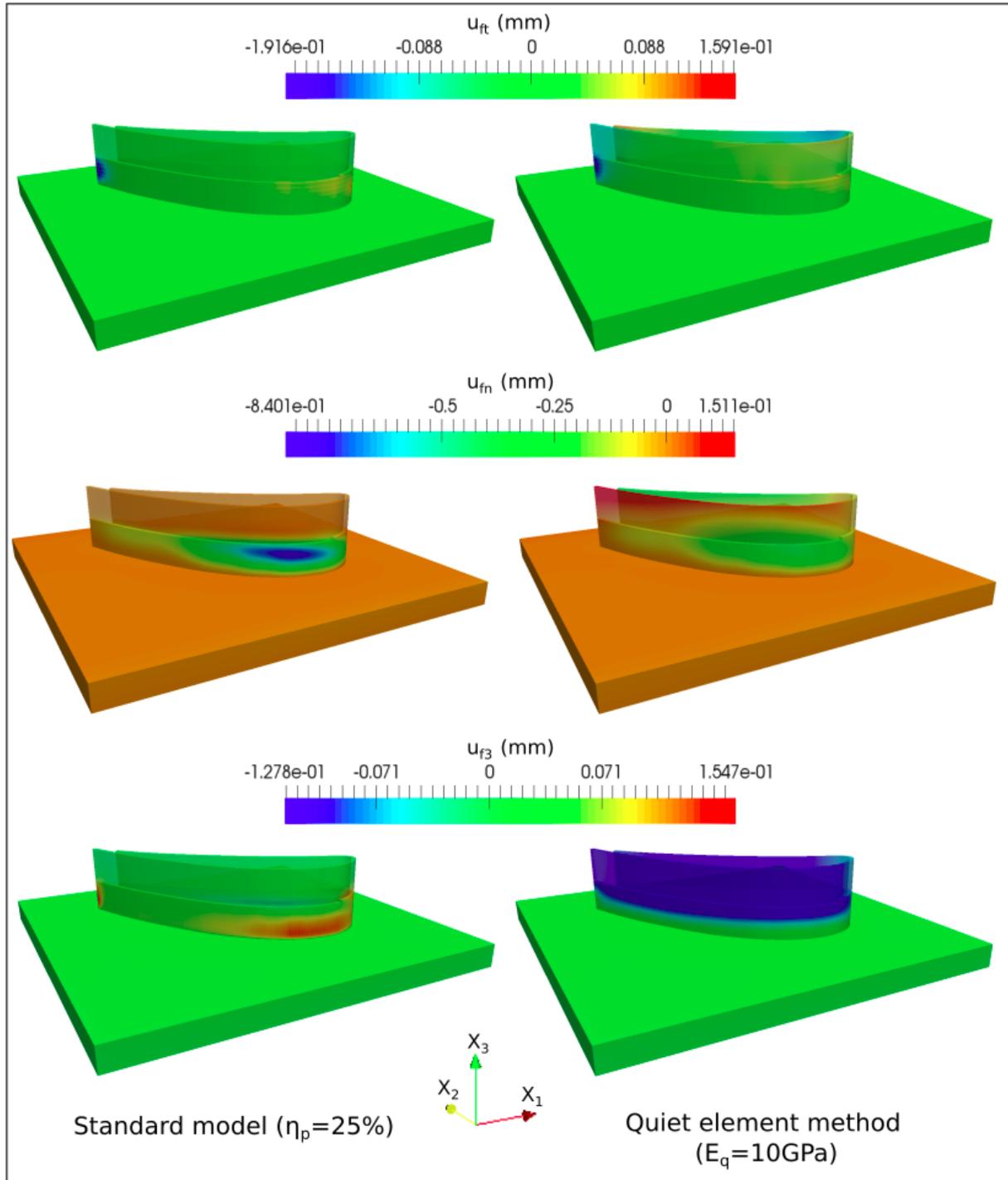


FIGURE 3.27 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$ ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

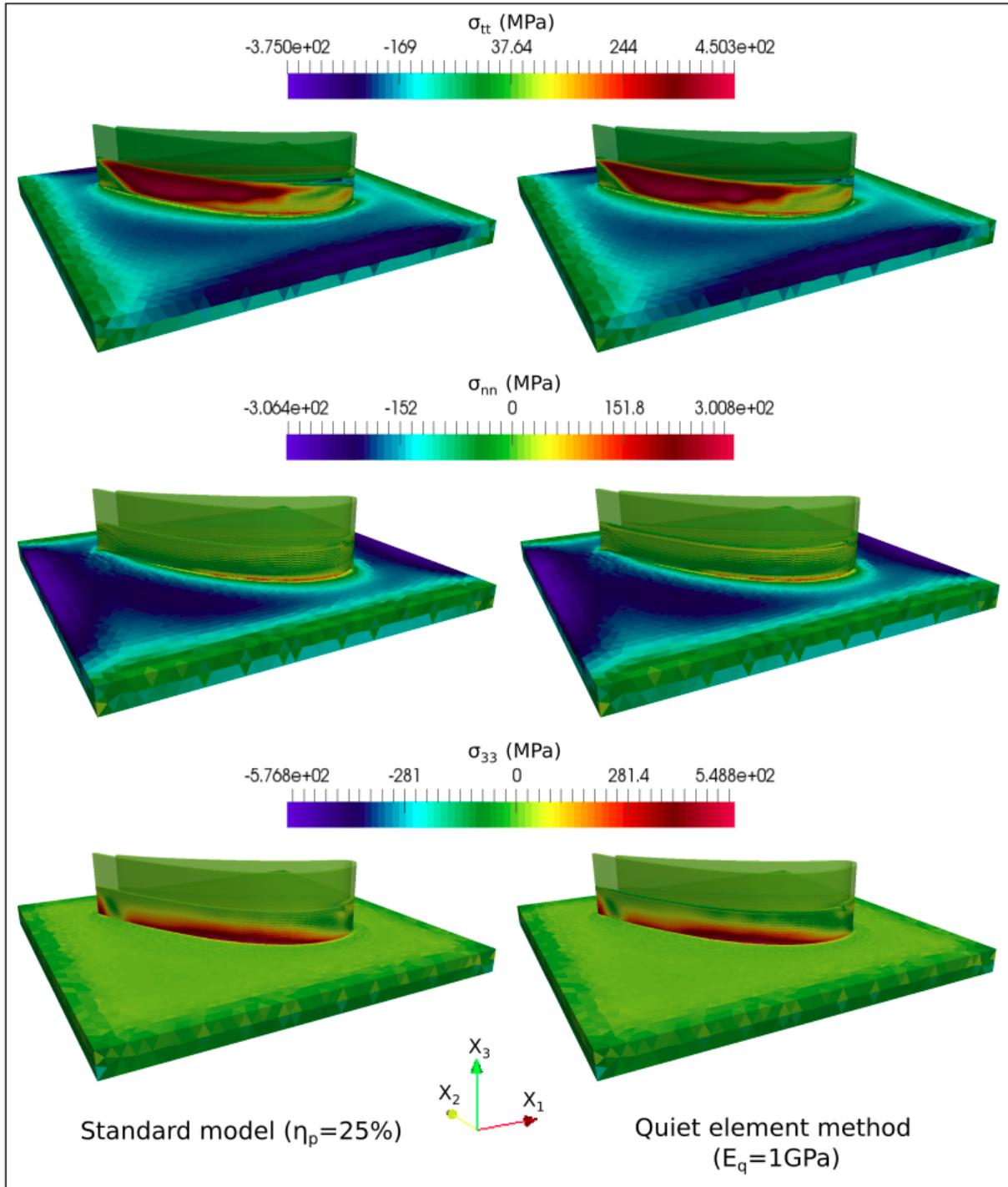


FIGURE 3.28 – Champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$ ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$ .

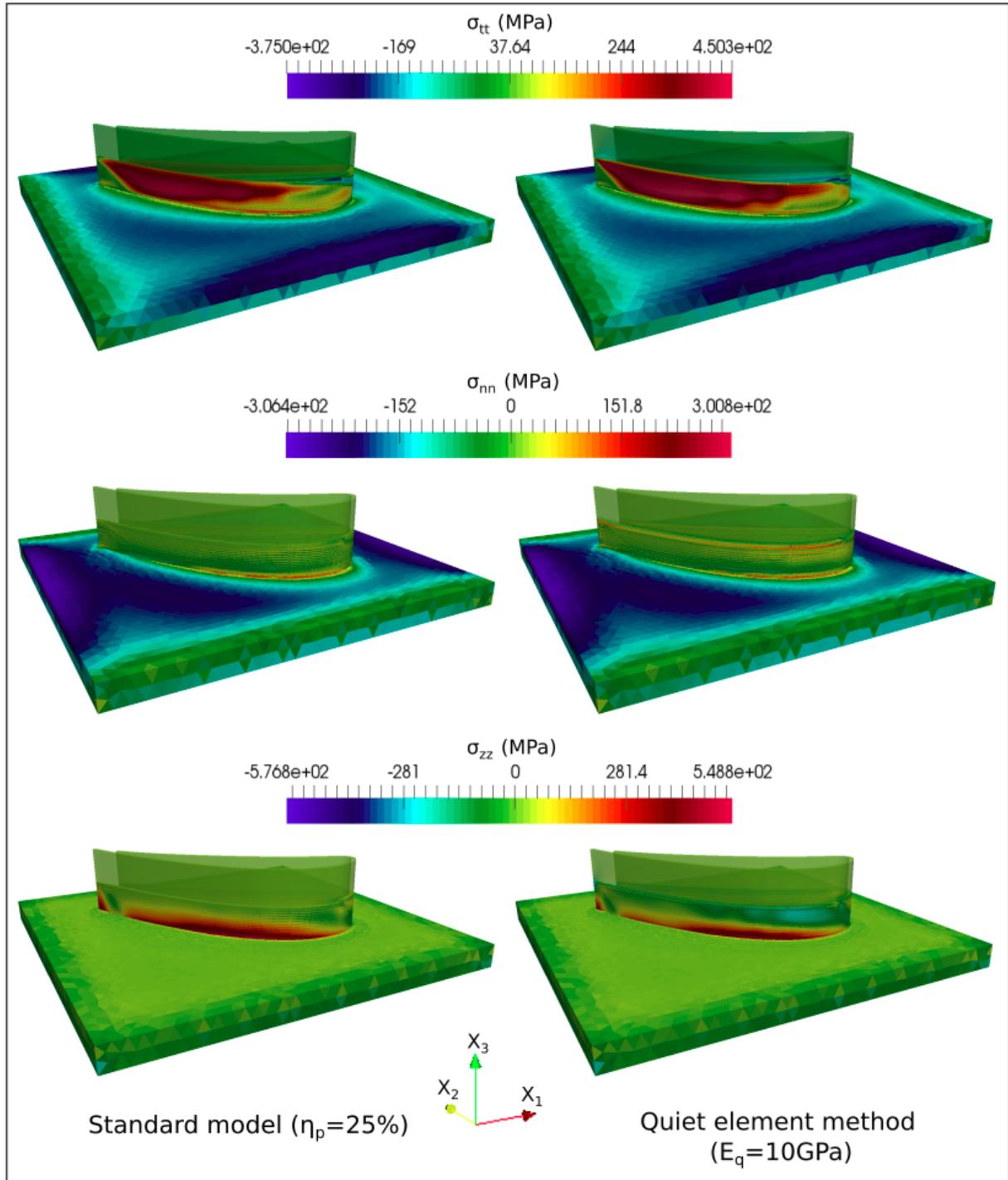


FIGURE 3.29 – Champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$ ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

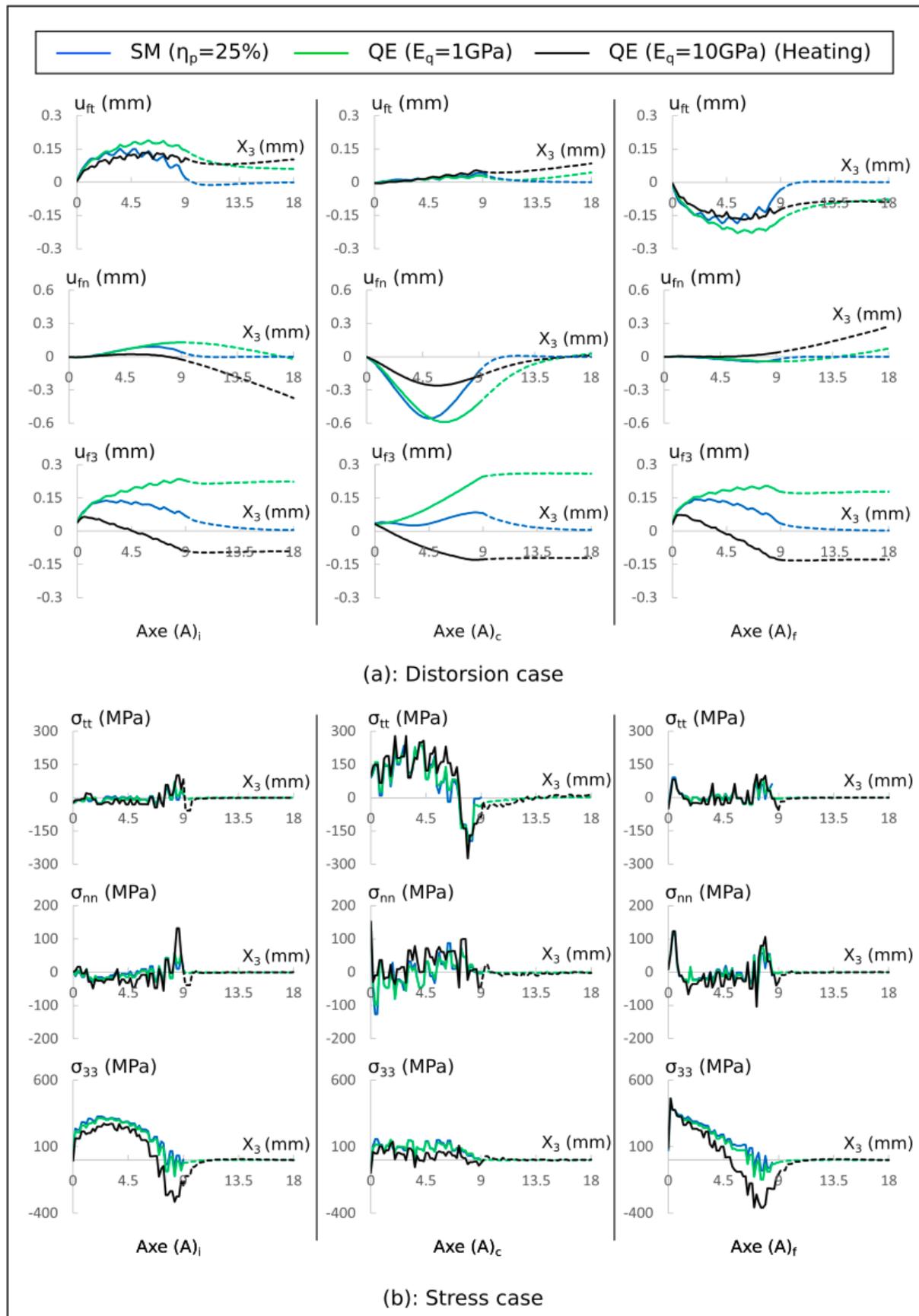


FIGURE 3.30 – Applications du modèle standard (SM) pour  $\eta_p = 0.25$ , et de la méthode quiet element (QE) pour  $E_q=1\text{GPa}$  et  $E_q=10\text{GPa}$  : Profils de distortions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

### 3.5.2 À l'instant final $t = t_f$

Les figures 3.31-3.35 nous présentent, pour l'instant final, les champs de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  issus des applications du modèle standard (SM) pour  $\eta_p = 0.25$ , et de la méthode quiet element (QE) pour  $E_q=1\text{GPa}$  et  $E_q=10\text{GPa}$ .

En ce qui concerne les distorsions, par rapport au modèle standard, nous observons dans ces figures :

- une importante surestimation des amplitudes des distorsions de la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$ ;
- une importante surestimation des amplitudes des distorsions suivant la direction tangentielle  $\underline{e}_t$ , une diminution d'amplitude des distorsions suivant la direction normale  $\underline{e}_n$  et des distorsions suivant la direction verticale  $\underline{e}_3$  très négatives de la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

En ce qui concerne les contraintes, par rapport au modèle standard, nous observons dans ces figures :

- une très bonne approximation des contraintes de la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$ ;
- une bonne approximation des contraintes de la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

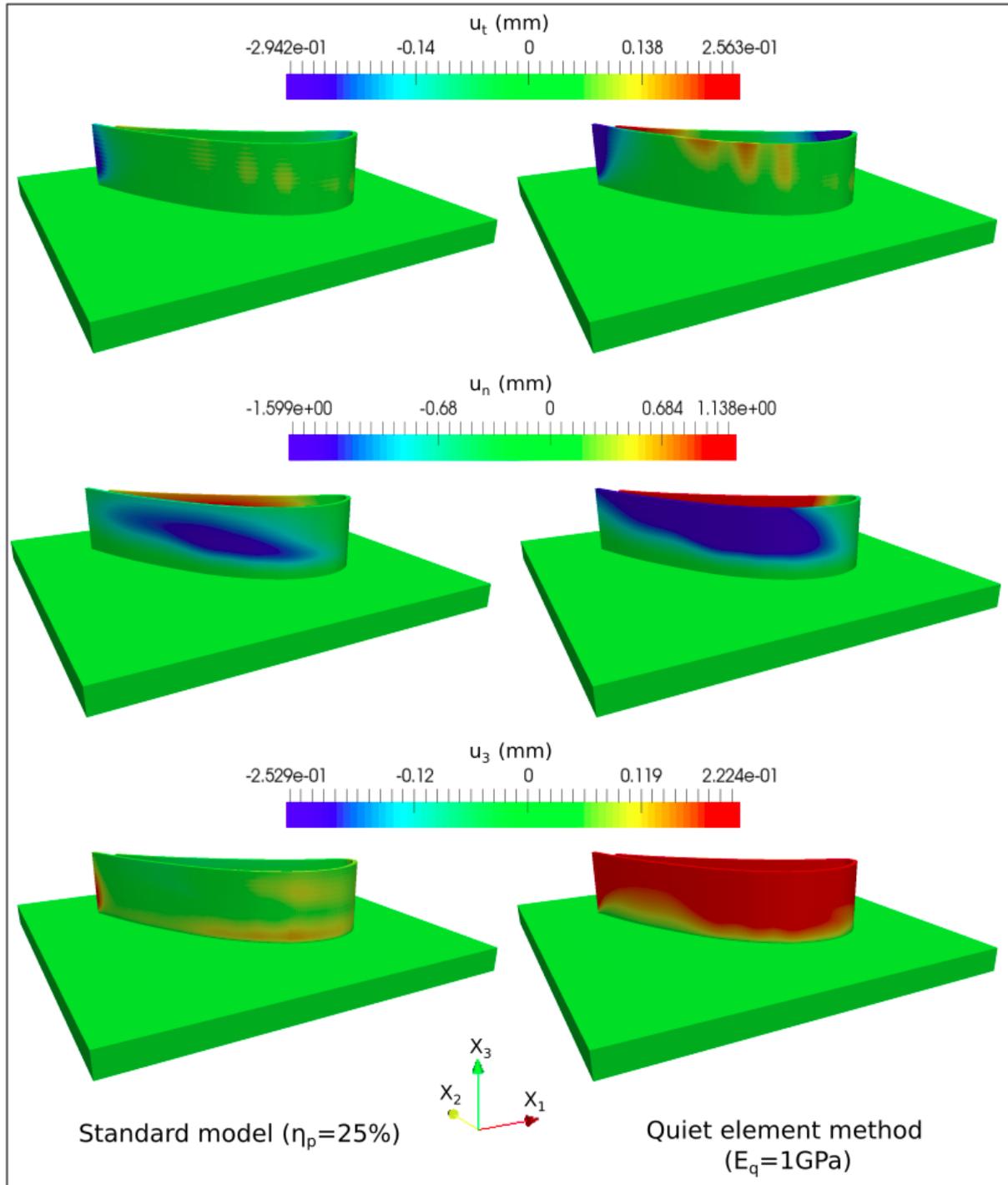


FIGURE 3.31 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$  ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q = 1\text{GPa}$ .

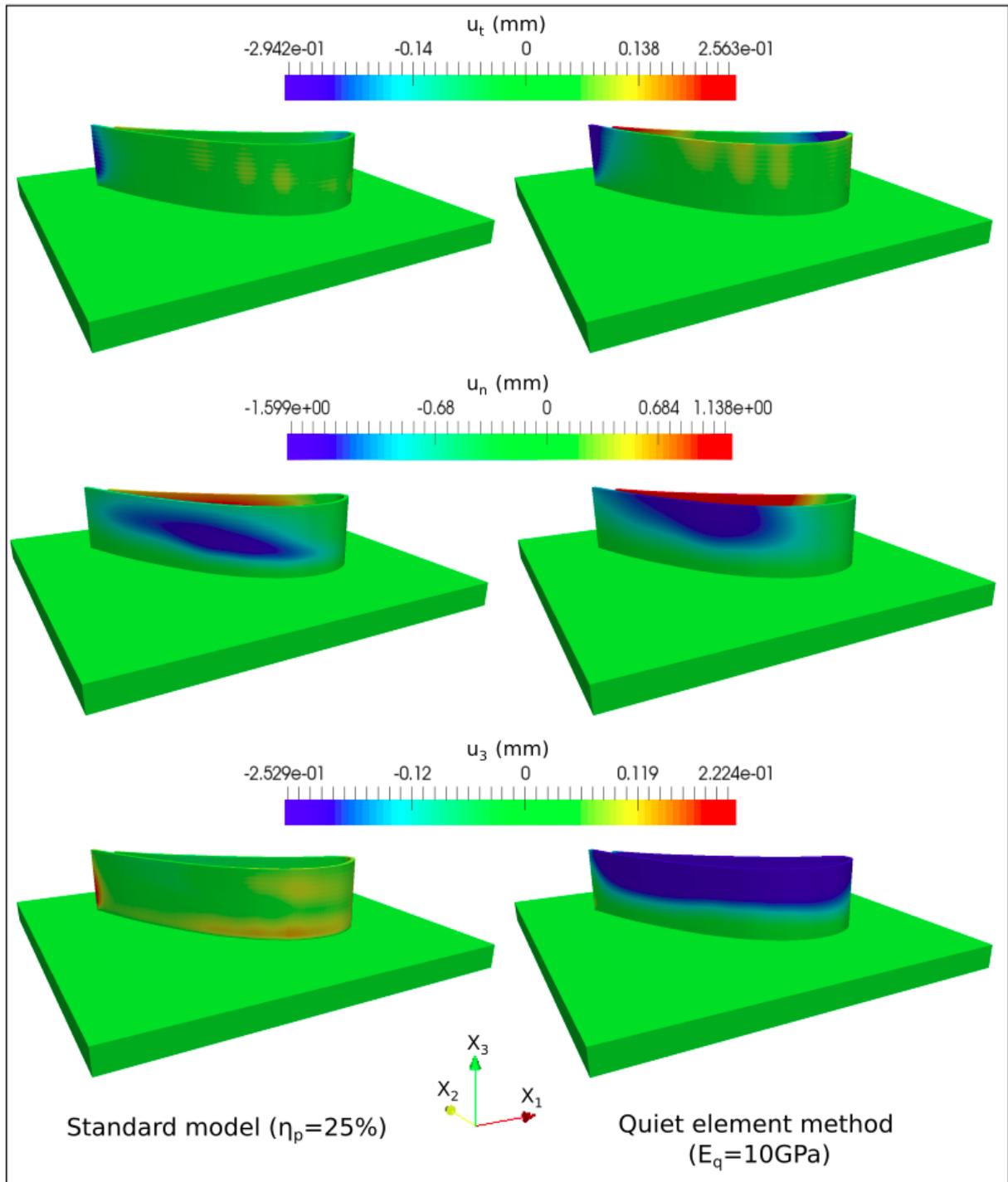


FIGURE 3.32 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$  ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

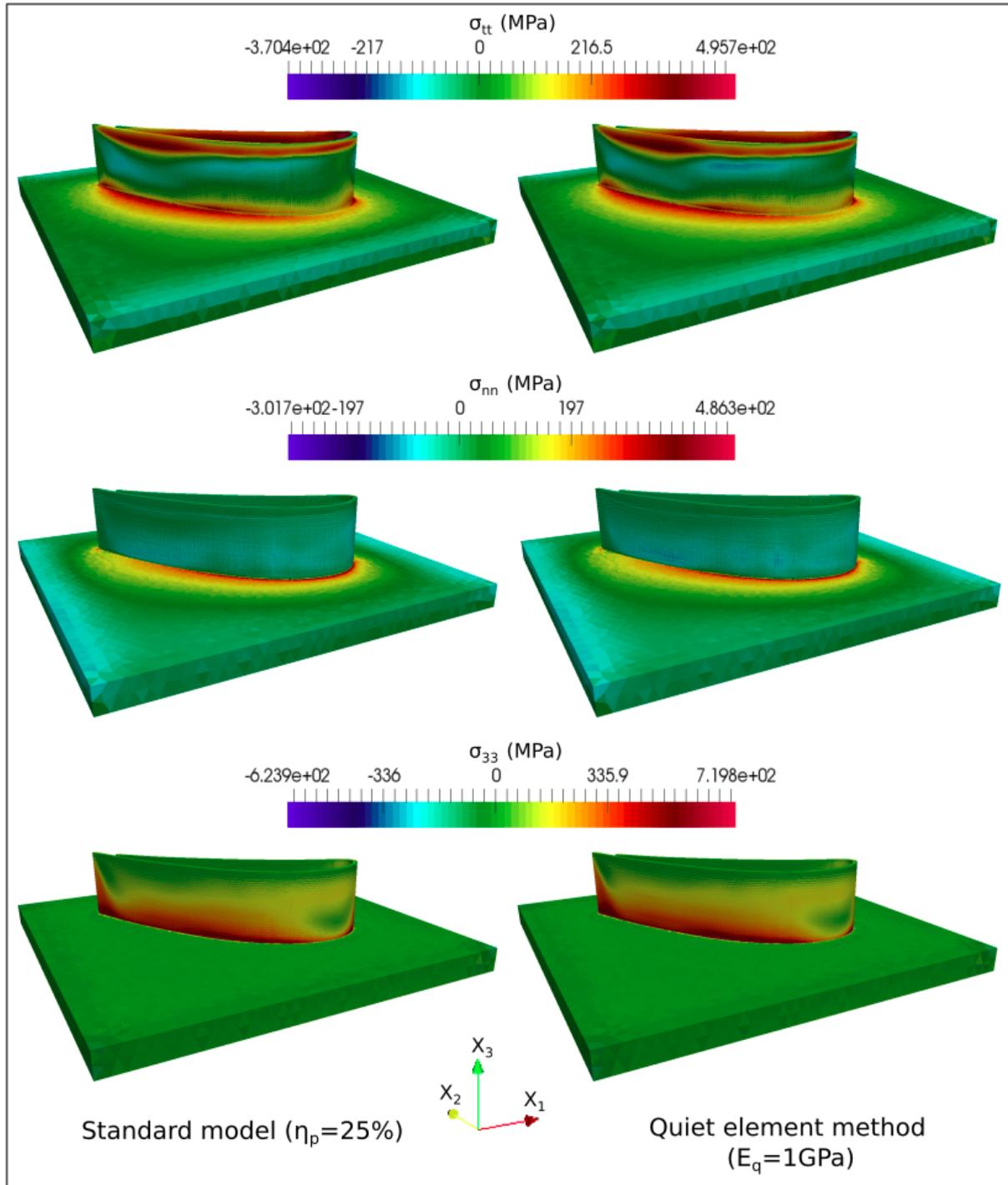


FIGURE 3.33 – Champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$  ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=1\text{GPa}$ .

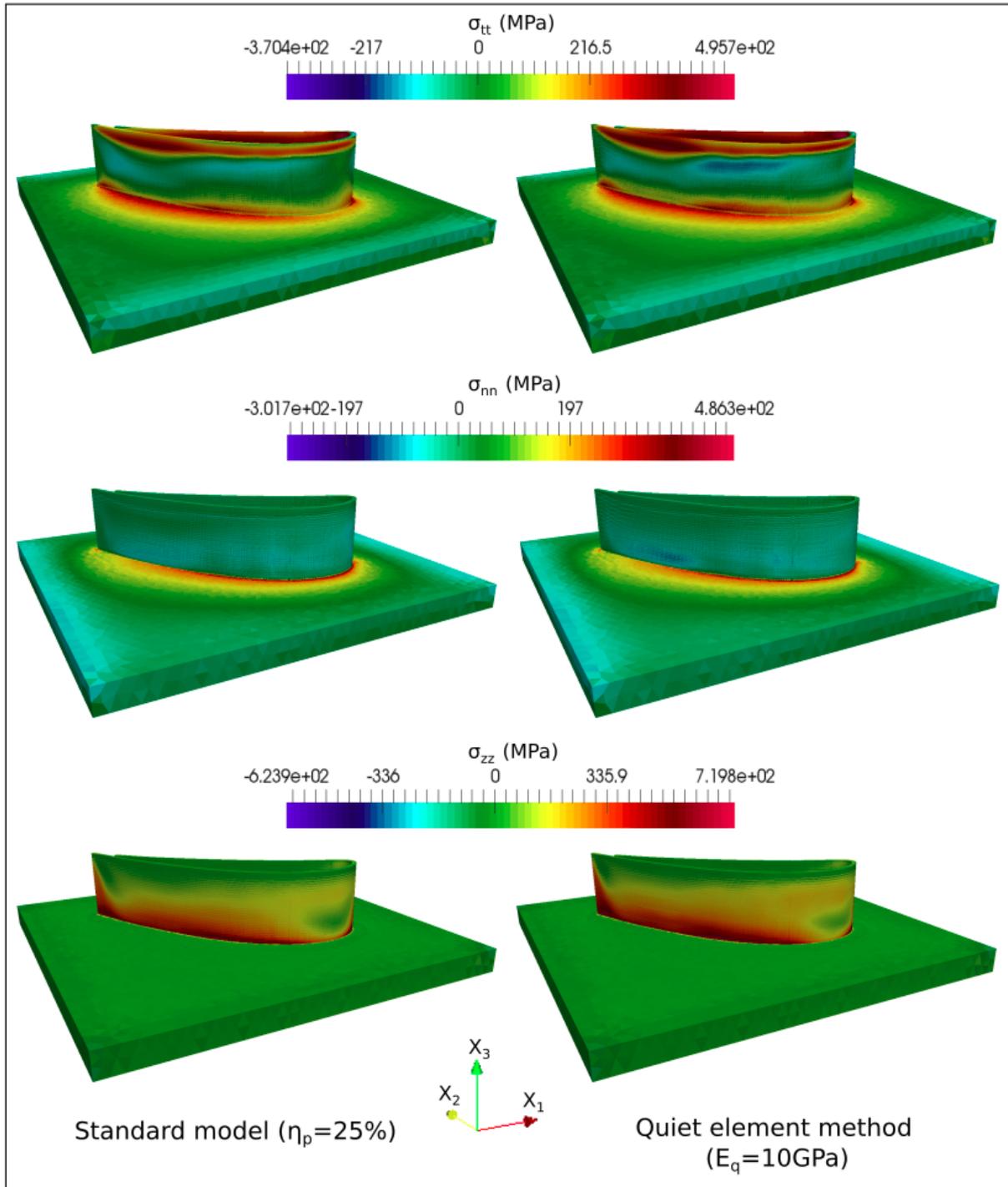


FIGURE 3.34 – Champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard pour  $\eta_p = 0.25$  ; à droite les résultats obtenus par la méthode quiet element pour  $E_q=10\text{GPa}$ .

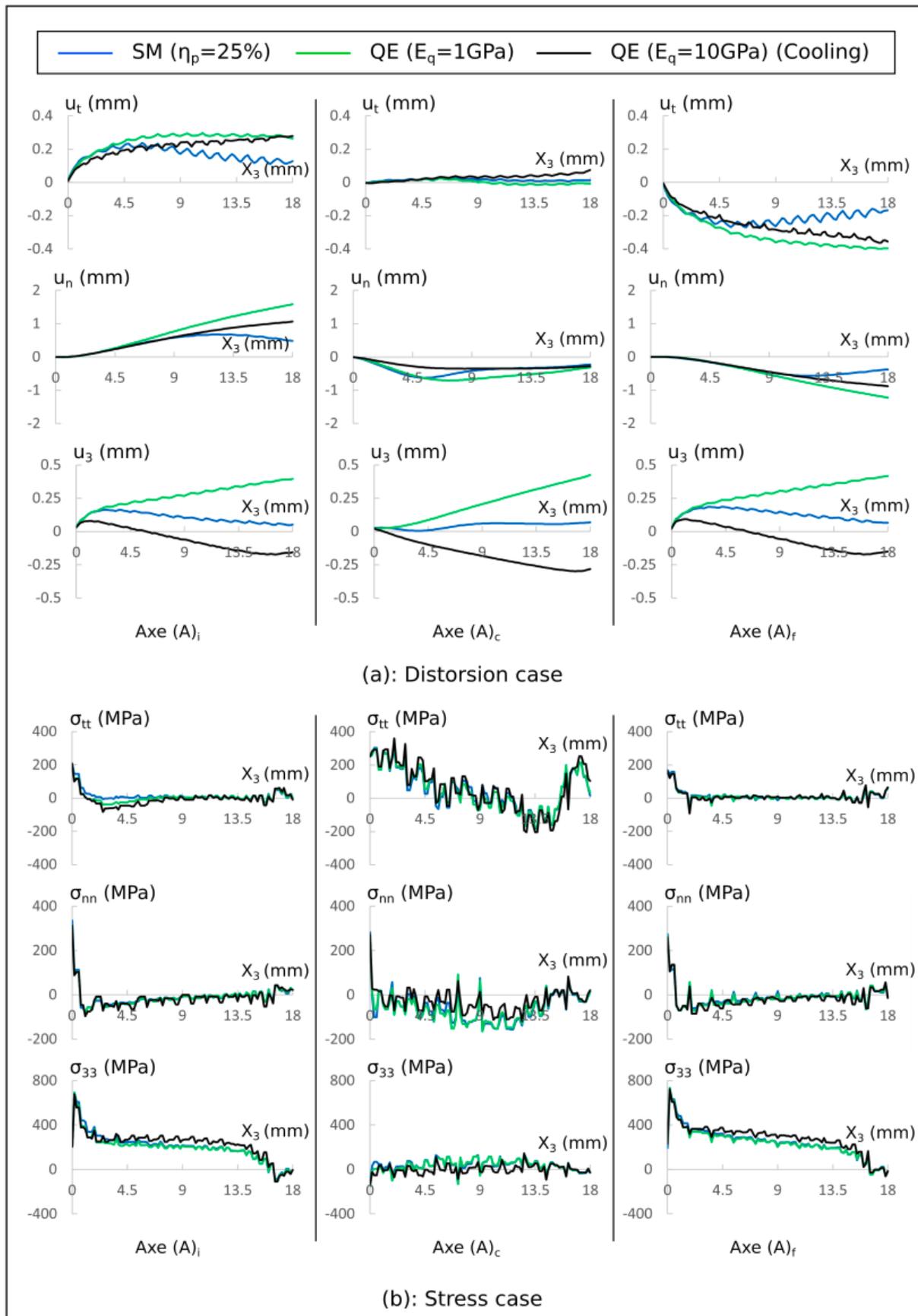


FIGURE 3.35 – Applications du modèle standard (SM) pour  $\eta_p = 0.25$ , et de la méthode quiet element (QE) pour  $E_q = 1\text{GPa}$  et  $E_q = 10\text{GPa}$  : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_f$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

## 3.6 Étude de l'influence de l'écouissage cinématique

Cette étude, s'effectuant dans le cadre des données thermomécaniques de Múransky, consiste en une étude comparative des résultats d'application du modèle standard suivant les coefficients du comportement élasto-viscoplastique à écouissage mixte et ceux à écouissage isotrope. Nous nous intéressons également aux deux instants  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  et  $t = t_f$ .

### 3.6.1 À l'instant $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$

Les figures 3.36-3.38 nous présentent, pour cet instant, les champs de distorsions  $\underline{u}_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  issus des applications du modèle standard à écouissage mixte et à écouissage isotrope.

En ce qui concerne les distorsions, par rapport au modèle standard à écouissage isotrope, le modèle standard en écouissage mixte présente suivant chaque direction, de bonnes correspondances avec toutefois des amplitudes légèrement moins importantes. En ce qui concerne les contraintes, par rapport au modèle standard à écouissage isotrope, le modèle standard en écouissage mixte présente globalement :

- des fluctuations de valeurs de plus faibles amplitudes, en particulier dans les zones avoisinant l'axe central  $(A)_c$  ;
- des contraintes de plus faibles amplitudes, en particulier les contraintes tangentielles  $\sigma_{tt}$  et verticales  $\sigma_{33}$ .

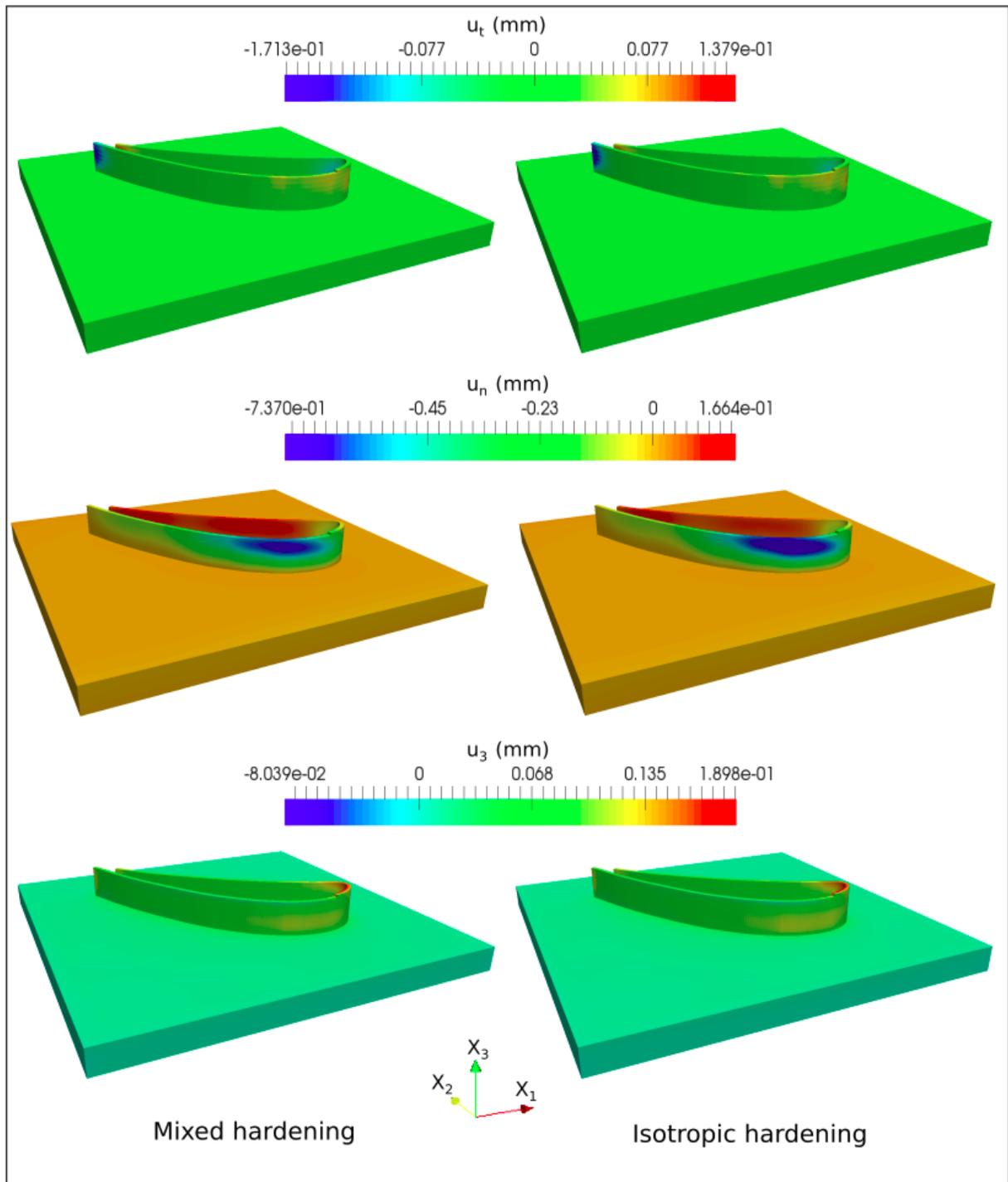


FIGURE 3.36 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard à écrouissage mixte ; à droite les résultats obtenus par le modèle standard à écrouissage isotrope.

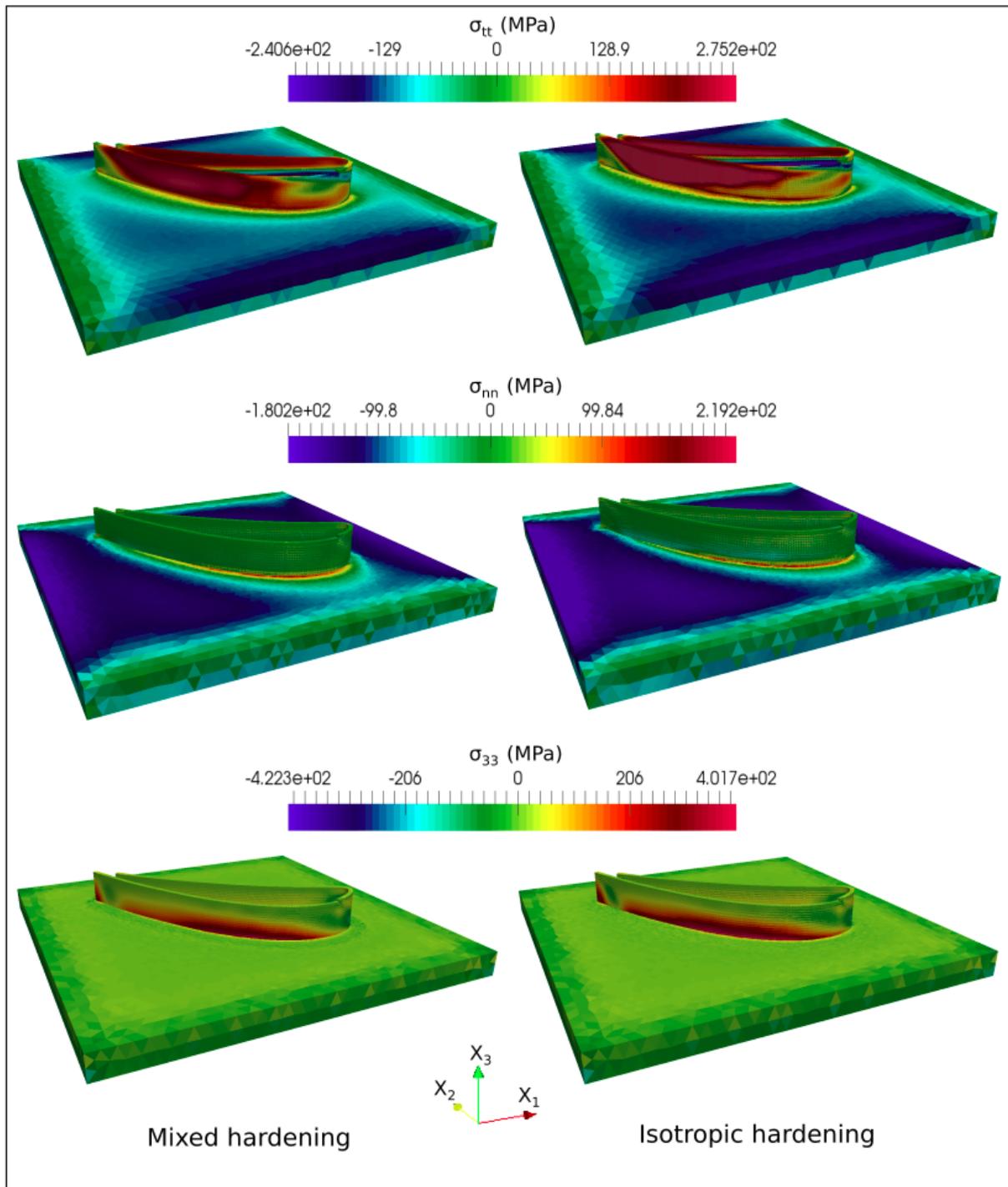


FIGURE 3.37 – Champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard à écrouissage mixte; à droite les résultats obtenus par le modèle standard à écrouissage isotrope.

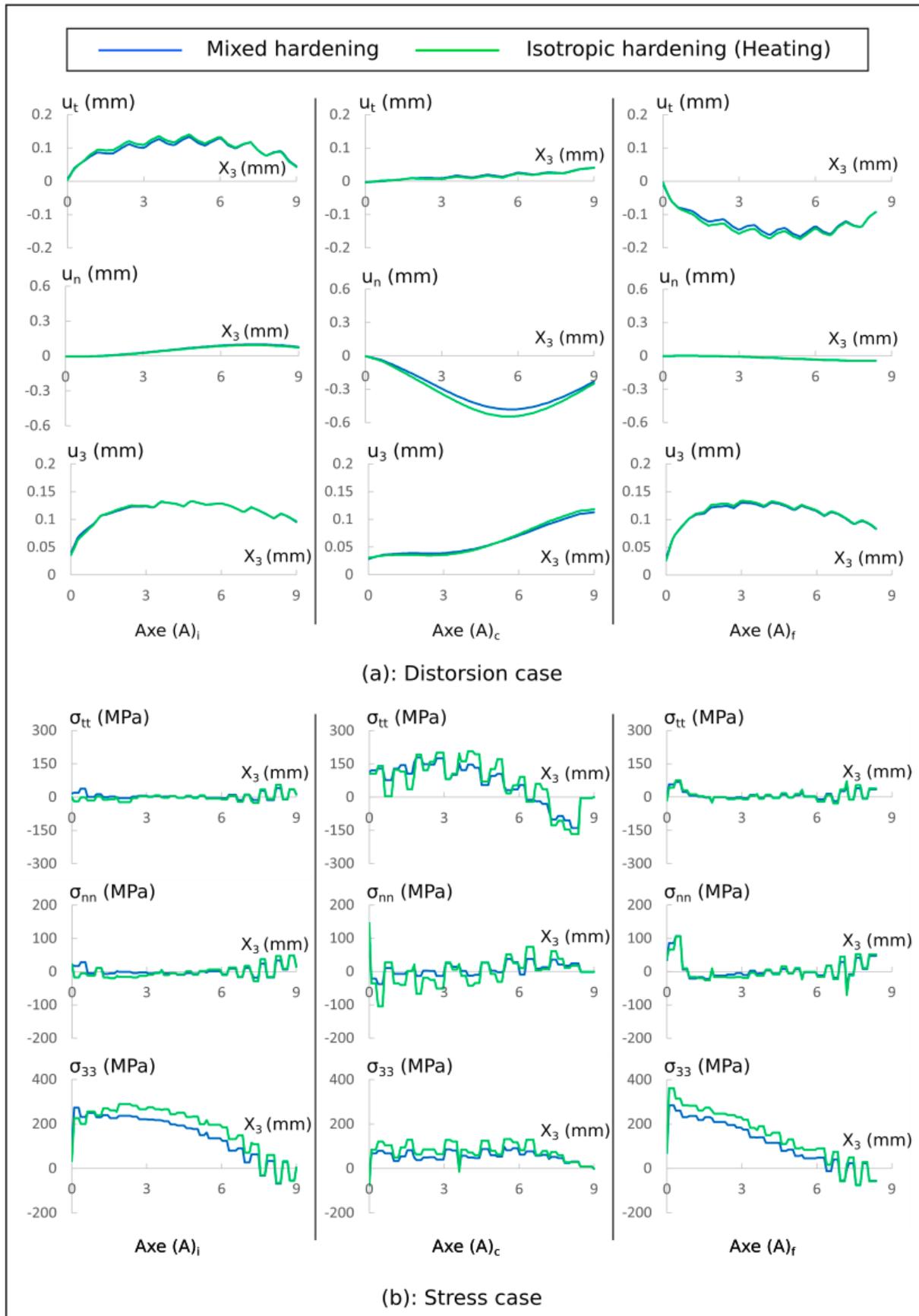


FIGURE 3.38 – Applications du modèle standard (SM) à écoulement mixte et à écoulement isotrope : Profils de distorsions  $u_f$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_{14} + 0.5L_T/v_H$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

### 3.6.2 À l'instant final $t = t_f$

Les figures 3.39-3.41 nous présentent, pour l'instant final, les champs de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  issus des applications du modèle standard à écouissage mixte et à écouissage isotrope.

En ce qui concerne les distorsions, par rapport au modèle standard à écouissage isotrope, le modèle standard à écouissage mixte présente globalement des distorsions tangentielles  $u_t$  et  $u_3$  de plus grandes amplitudes et des distorsions normales  $u_n$  de plus faibles amplitudes.

En ce qui concerne les contraintes, par rapport au modèle standard à écouissage isotrope, le modèle standard en écouissage mixte présente globalement :

- des fluctuations de valeurs de plus faibles amplitudes, en particulier dans les zones avoisinant l'axe central  $(A)_c$  ;
- des contraintes de plus faibles amplitudes, en particulier les contraintes tangentielles  $\sigma_{tt}$  et verticales  $\sigma_{33}$ .

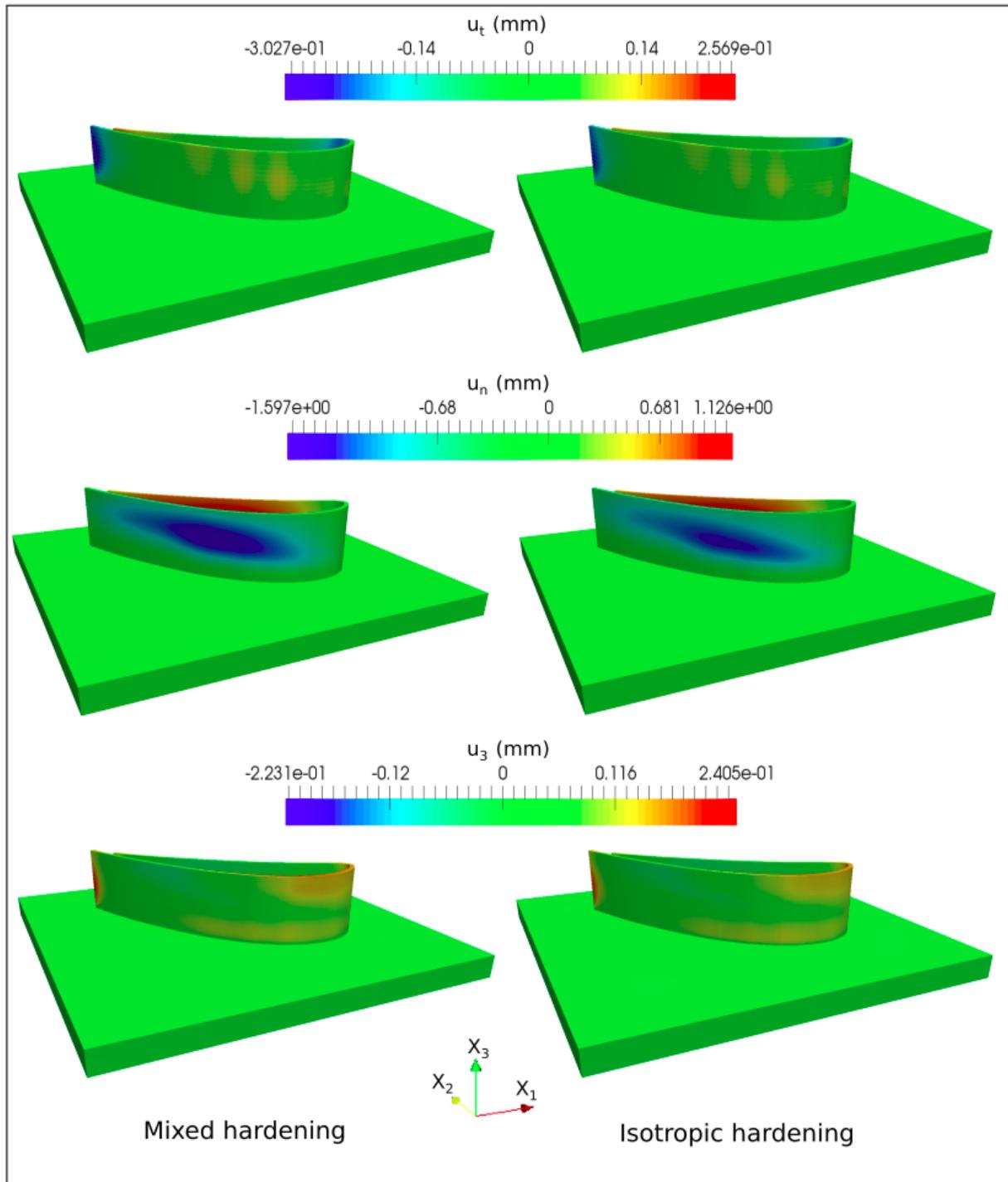


FIGURE 3.39 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard en écouissage mixte; à droite les résultats obtenus par le modèle standard à écouissage isotrope.

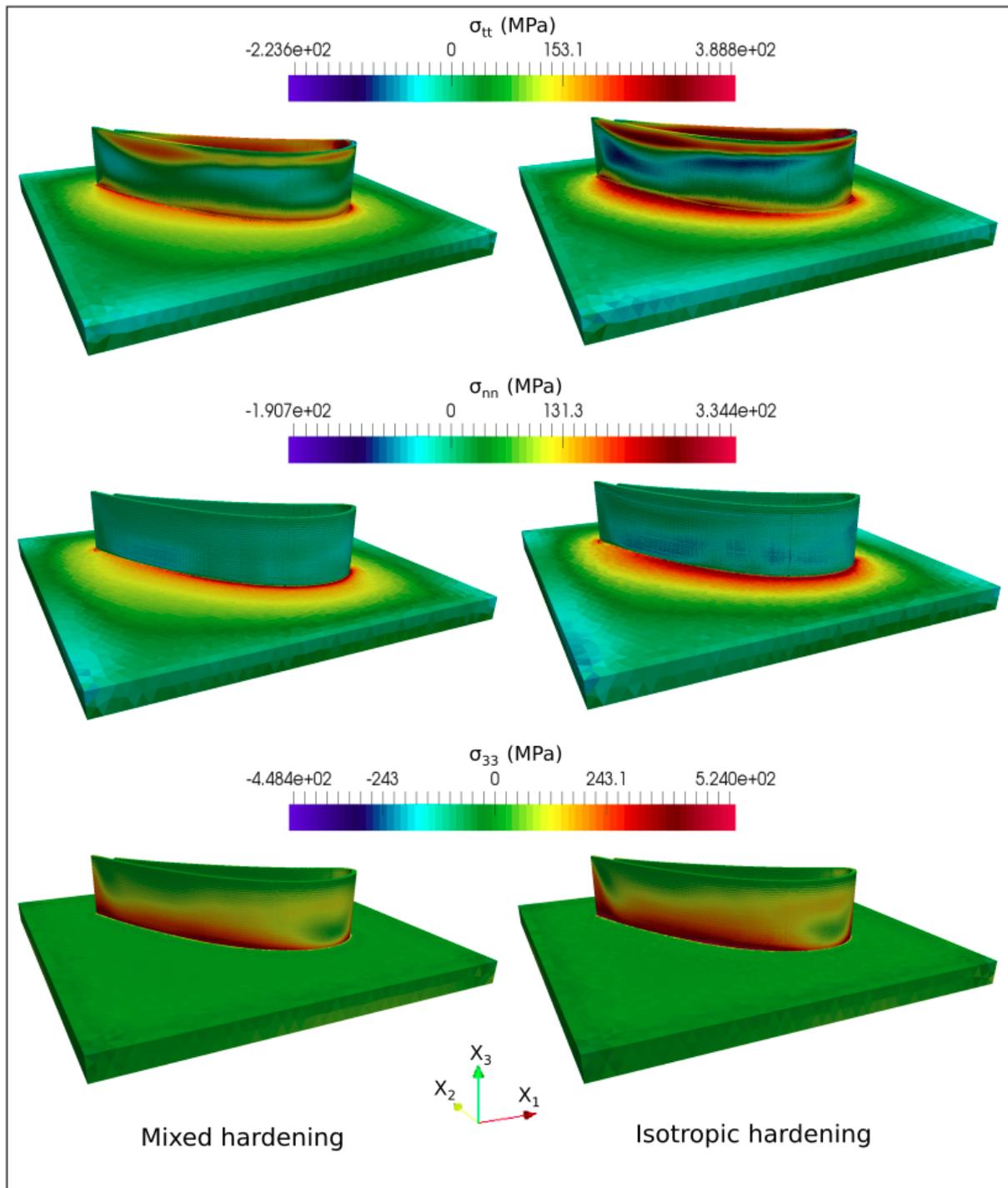


FIGURE 3.40 – Champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le modèle standard en écouissage mixte; à droite les résultats obtenus par le modèle standard à écouissage isotrope.

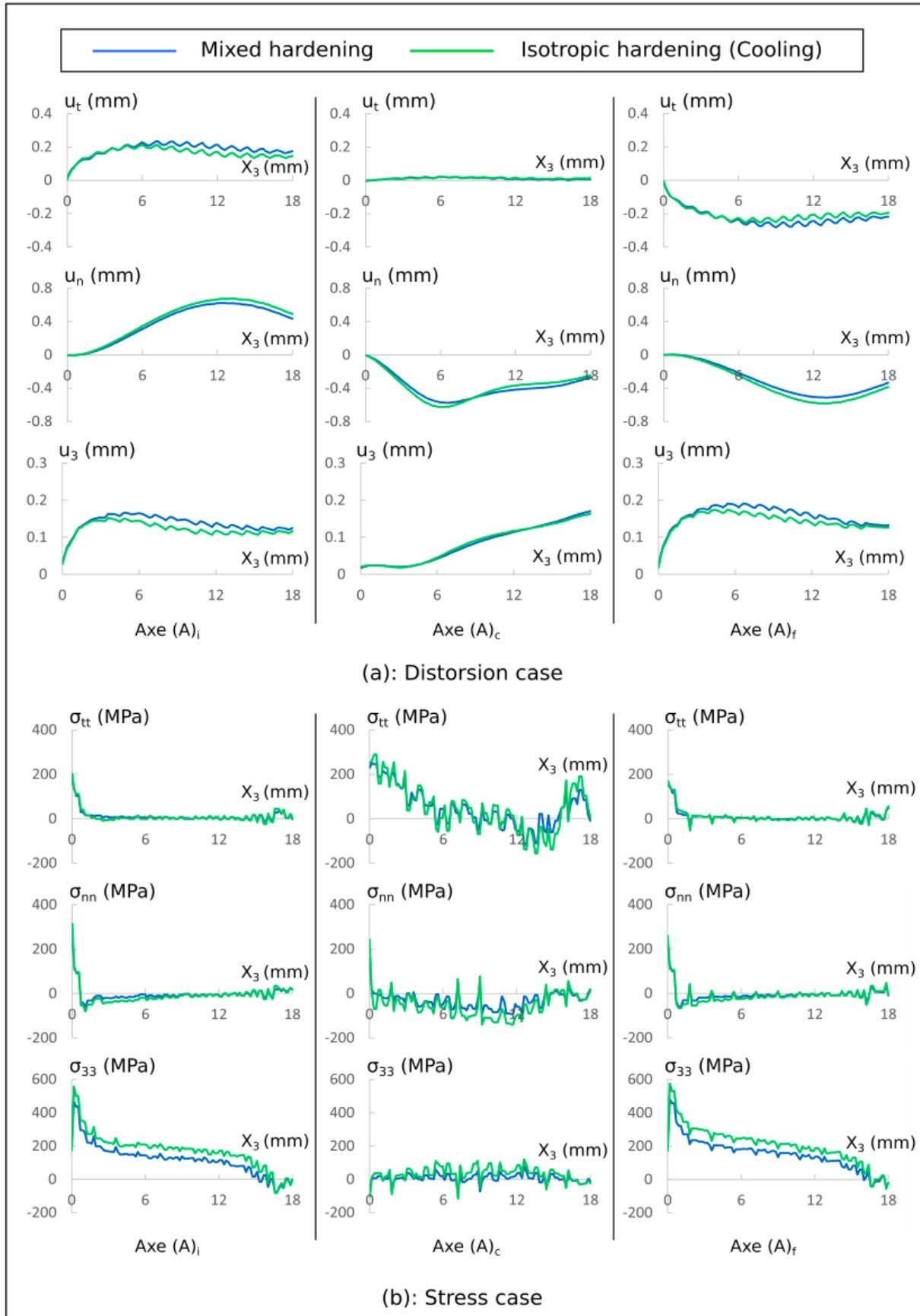


FIGURE 3.41 – Applications du modèle standard (SM) en écrouissage mixte et en écrouissage isotrope : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_f$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

## 3.7 Validation expérimentale

La validation expérimentale du modèle thermomécanique DED consiste en une étude comparative des simulations numériques à des données expérimentales. Ces dernières, issues des articles de Biegler et al. [45, 46], consistent en des enregistrements par des capteurs des évolutions temporelles des champs de température et de déplacement en différents points de la structure pendant le procédé. Nous avons donc deux types de validation expérimentale : validation thermique et validation mécanique.

### 3.7.1 Validation thermique

Elle ne concerne que le mur. Deux validations sont effectuées :

#### Première validation

Les données expérimentales portent sur l'évolution de la température mesurée sur trois capteurs thermiques  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  fixés sur le substrat (figure 3.42), pendant la construction du premier cordon.

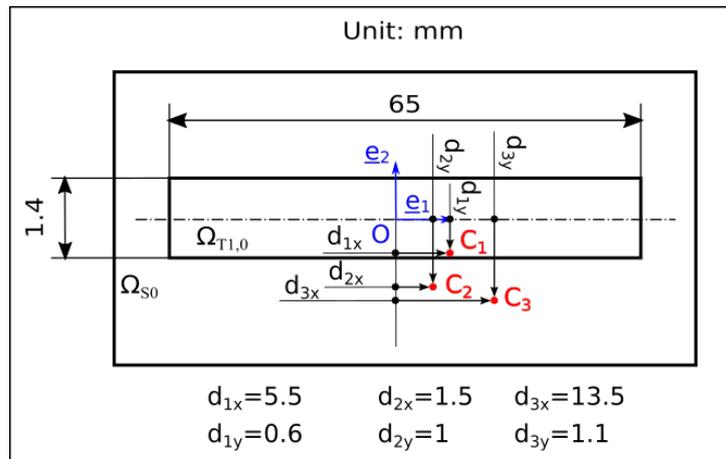


FIGURE 3.42 – Trois capteurs thermiques fixés sur le substrat

En ce qui concerne la simulation numérique, les calculs thermiques ont été effectués suivant deux approches :

- l'approche 1 pour laquelle l'élévation de la température du gaz protecteur n'est pas prise en compte (soit  $T_{gm} = 25^\circ\text{C}$ ) et l'efficacité énergétique  $\eta$  est fixée à 60% (celle de Biegler et al. [45]) ;
- l'approche 2 pour laquelle nous considérons l'élévation de la température du gaz inerte et l'efficacité suivant les données d'application décrites ci-dessus

La figure 3.43 nous donne pour ces deux approches, les comparaisons entre données expérimentales et simulation numérique de l'évolution de la température en ces trois capteurs.

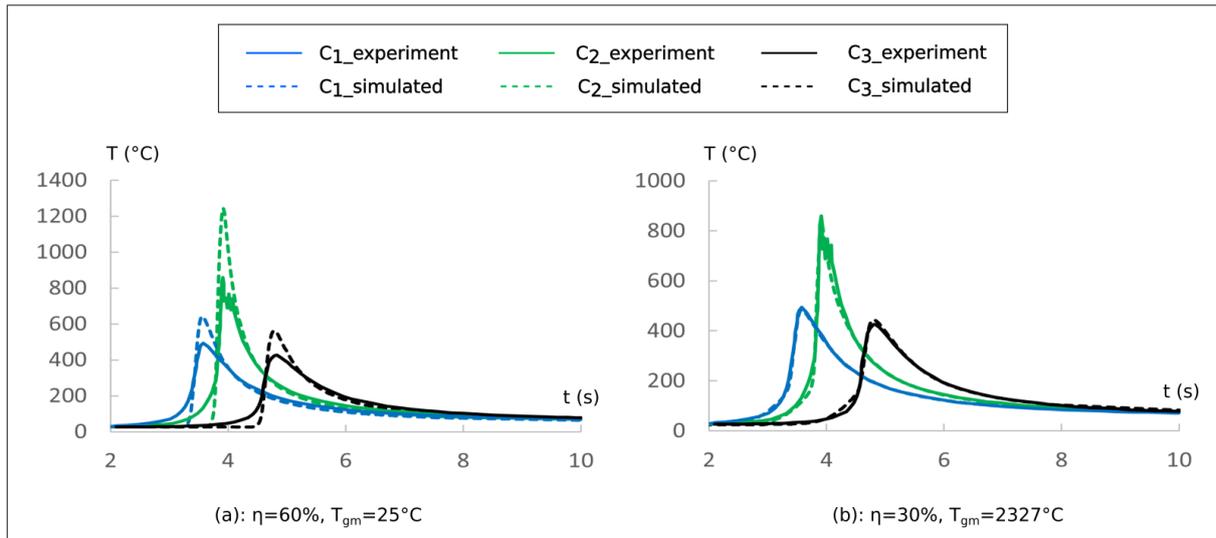


FIGURE 3.43 – Comparaison entre les données expérimentales et les simulations numériques des évolutions temporelles de la température pour les trois capteurs fixés sur le substrat au cours de la construction du premier cordon  $\mathcal{M}_{T_1}$  : (a) Cas de l’approche 1 ( $T_{gm} = 25^\circ\text{C}$ ,  $\eta = 0.60$ ) ; (b) Cas de l’approche 2 ( $T_{gm} = 2327^\circ\text{C}$ ,  $\eta = 0.30$ ) ;

Dans la figure 3.43.(a) en chaque capteur, les simulations, par rapport aux données expérimentales, ont les comportements suivants :

- retard d’élévation de la température à l’approche de la source de chaleur du fait de la non prise en compte de l’élévation de température du gaz protecteur ;
- surestimation de la température au passage de la source de chaleur du fait de la surestimation de l’efficacité énergétique ;
- correspondance pendant l’éloignement de la source de chaleur.

Tandis que dans la figure 3.43.(b) nous observons une bonne correspondance entre les données expérimentales et les simulations à l’approche, au passage et à l’éloignement de la source de chaleur. Cela met donc en évidence l’intérêt de la prise en compte de l’élévation de la température du gaz protecteur chauffé par le faisceau laser.

### Seconde validation

Les données expérimentales portent sur l’évolution de la température mesurée sur deux capteurs thermiques fixés  $C_1$  et  $C_2$  sur le mur (figure 3.44), pendant la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}, I = 21, \dots, 30$ . Ces deux capteurs ont été installés sur les 20 premiers cordons suite à la construction de ces derniers et de leur refroidissement à la température ambiante.

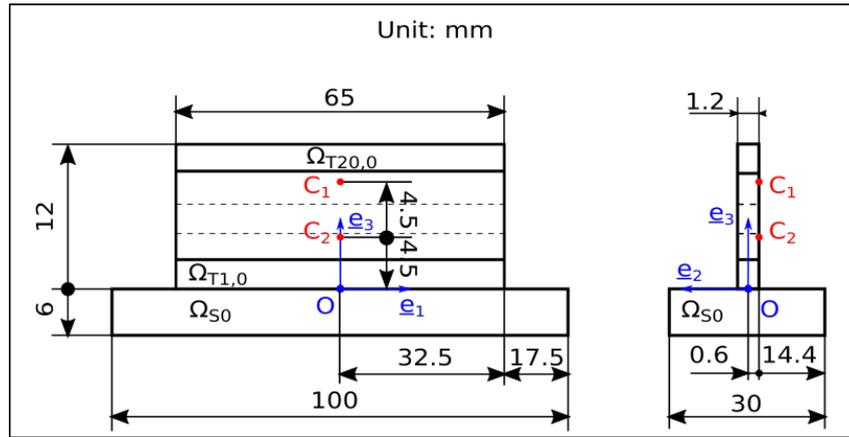


FIGURE 3.44 – Deux capteurs thermiques fixés sur le mur

Dans ce cas particulier d'étude, quelques modifications sur la géométrie et le maillage du domaine CAO total  $\Omega_{f0}$ , données dans le tableau 3.6 sont à considérer :

Largeur/épaisseur $l$	1.2mm
Hauteur totale $H$	18mm
Hauteur des cordons $H_T$	0.6mm
Hauteur du substrat $H_S$	6mm
Pas de maillage du substrat $h_S$	$H_S/3 = 2\text{mm}$
Pas de maillage du mur $h$	$l_T/4 = 0.3\text{mm}$

TABLE 3.6 – Paramètres dimensionnels et de maillage modifiés du mur [46]

Ainsi, la figure 3.45 ci-dessous nous donne les comparaisons entre données expérimentales et simulation numérique de l'évolution de la température en ces deux capteurs.

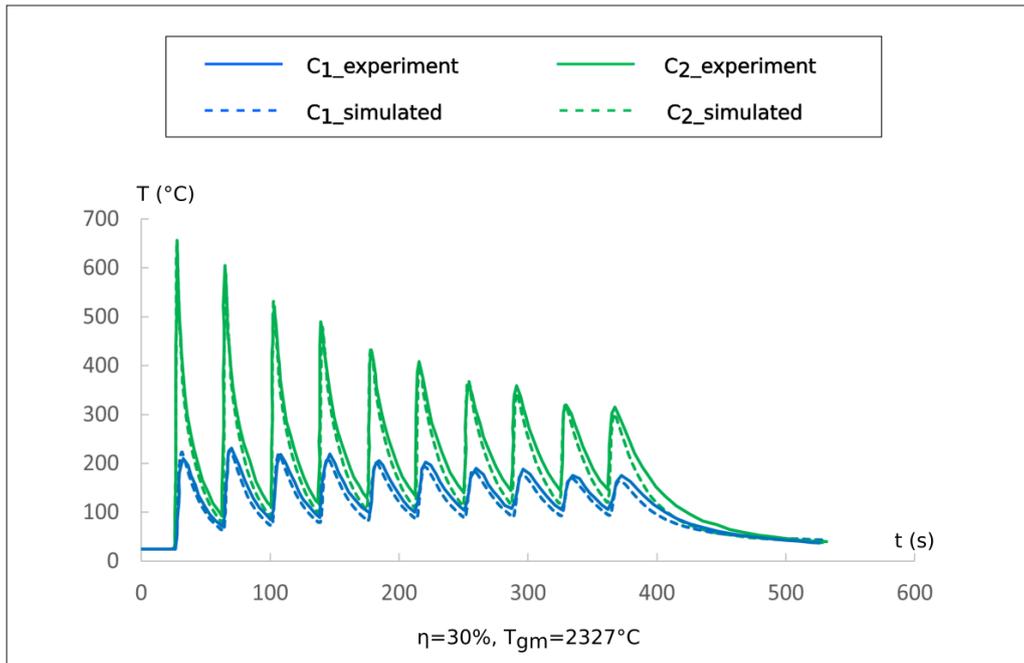


FIGURE 3.45 – Comparaison entre les données expérimentales et les simulations numériques des évolutions temporelles de la température pour les deux capteurs fixés sur le mur au cours de la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}, I = 21, \dots, 30$

Nous observons pour ces deux capteurs une bonne correspondance des courbes expérimentales et numériques en période de chauffage, et moyennement bonne en période de refroidissement. En effet, les simulations numériques surestiment la vitesse de refroidissement, notamment après le dépôt du dernier cordon  $\mathcal{M}_{T30}$ . Ceci peut être lié à une éventuelle surestimation globale du coefficient de convection  $h$  (fixé à  $35\text{W/m}^2\text{K}$ ) ou à une éventuelle sous-estimation globale de la température ambiante  $T_\infty$  (fixé à  $25^\circ\text{C}$ ) en période de refroidissement.

### 3.7.2 Validation mécanique

Elle concerne le mur et l'aube. Les calculs mécaniques sont effectués suivant les ensembles de données thermomécaniques de Biegler, de Depradeux, puis de Muránsky (table 7.4) décrits en annexe. Deux validations sont effectuées :

#### Première validation : cas du mur

Les données expérimentales portent sur l'évolution des déplacements mesurés sur six capteurs de déplacement  $C_k, k = 1, \dots, 6$  fixés sur le mur (figure 3.46), pendant la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}, I = 21, \dots, 30$ . Ces six capteurs ont été installés sur les 20 premiers cordons suite à la construction de ces derniers et de leur refroidissement à la température ambiante.

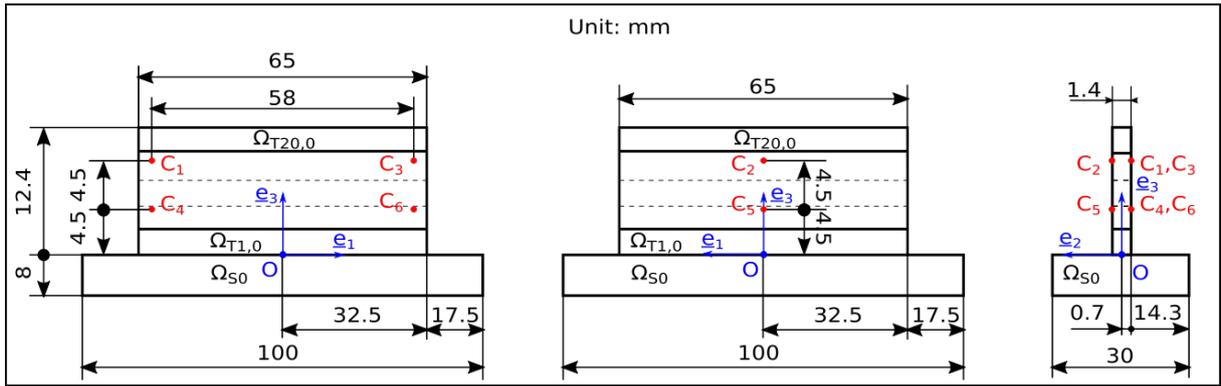
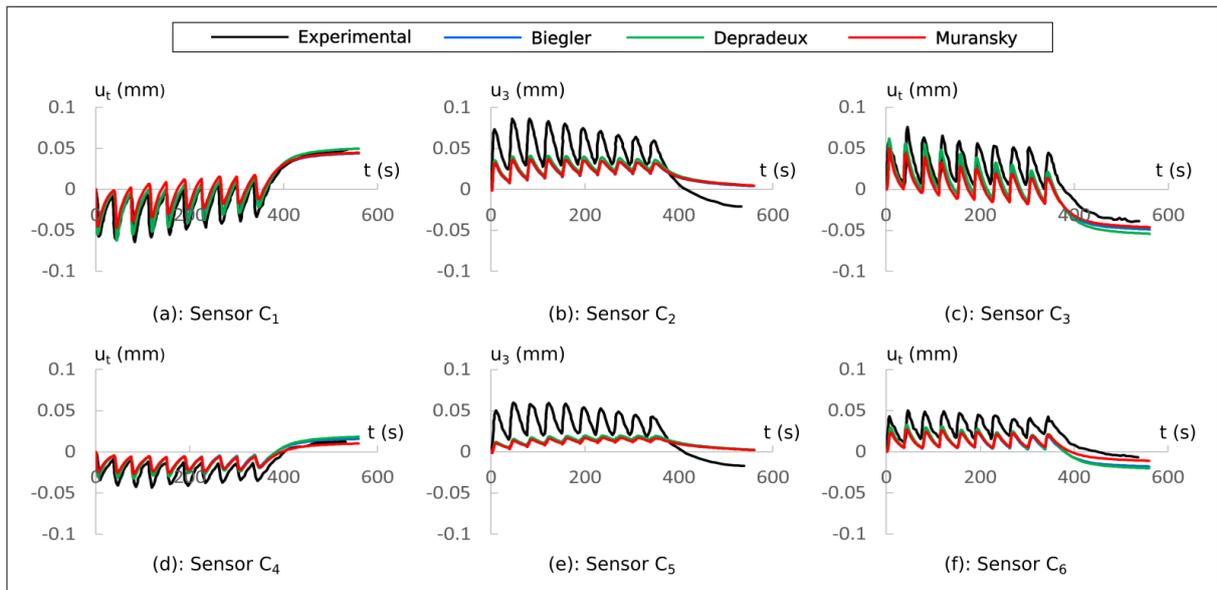


FIGURE 3.46 – Six capteurs de mesure de déplacement fixés sur le mur

Ainsi, la figure 3.47 ci-dessous nous donne les comparaisons entre données expérimentales et simulation numérique suivant ces trois ensembles de données thermomécaniques, des déplacements mesurés dès l'instant  $t = t_{20}$  (instant de début de construction du cordon  $\mathcal{M}_{T20}$ ), suivant la direction tangentielle  $\underline{e}_t$  pour les capteurs  $C_1$ ,  $C_3$ ,  $C_4$  et  $C_6$ , et suivant la direction verticale  $\underline{e}_3$  pour les capteurs  $C_2$  et  $C_5$ .

FIGURE 3.47 – Comparaison entre les données expérimentales et les simulations numériques des évolutions temporelles du déplacement pour les six capteurs fixés sur le mur au cours de la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I = 21, \dots, 30$ 

Nous observons dans cette figure :

- une assez bonne correspondance entre les déplacements suivant la direction  $\underline{e}_t$  simulés et expérimentaux pour les capteurs  $C_1$  et  $C_3$  (extrémités des cordons haut de pièce) ;
- une sous-estimation globale importante de l'amplitude des déplacements suivant la direction  $\underline{e}_3$  pour les capteurs  $C_2$  et  $C_5$  (milieu de cordon) ;

- une sous-estimation globale, de moindre importance, des déplacements suivant la direction  $\underline{e}_t$  des capteurs  $C_4$  et  $C_6$  (extrémités des cordons, mi-hauteur de pièce) ;
- une légère différence des déplacements calculés suivant les trois différents ensembles de données thermomécaniques. En effet, les données de Depradeux conduisent globalement, par rapport aux autres données, à des déplacements présentant une plus forte amplitude, notamment pour les capteurs  $C_1$  et  $C_3$ . Les données de Muránsky conduisent globalement, par rapport aux autres données, à des déplacements de plus faibles amplitude.
- un bon accord qualitatif entre les déplacements expérimentaux et les déplacements numériques.

Dans l'ensemble, les déplacements numériques par rapport aux déplacements expérimentaux sont de plus faibles amplitudes et la correspondance entre ces déplacements n'est que qualitative. Cela peut avoir pour cause :

- une mauvaise définition des conditions aux limites en déplacement ; notamment des conditions de bridage de la pièce ;
- une sous-estimation de la réponse thermique du mur au chauffage par le faisceau laser ;
- la non prise en compte d'un éventuel effet d'anisotropie dans la loi de comportement élasto-viscoplastique adoptée dans notre modèle thermomécanique ; anisotropie qui pourrait être due à l'orientation de la structure de grains résultant de la solidification dans le contexte DED.

### Deuxième validation : Cas de l'aube

Les données expérimentales portent également sur l'évolution des déplacements mesurés sur six capteurs de déplacement  $C_k, k = 1, \dots, 6$  fixés sur l'aube à une altitude de 9mm ( $X_3 = 9\text{mm}$ ) (figure 3.48), pendant la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}, I = 21, \dots, 30$ . Ces six capteurs ont été installés sur les 20 premiers cordons suite à la construction de ces derniers et de leur refroidissement à la température ambiante.

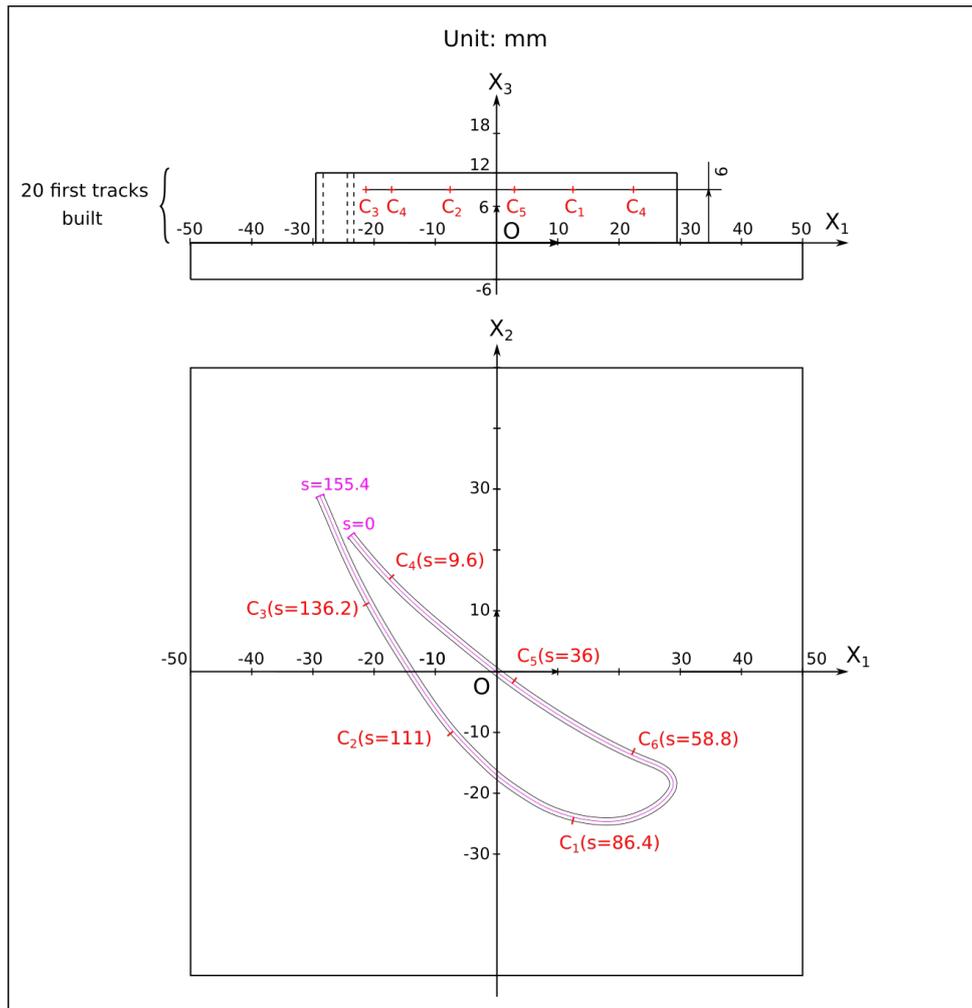


FIGURE 3.48 – Six capteurs de mesure de déplacement fixés sur l'aube

Ainsi, la figure 3.49 ci-dessous nous donne les comparaisons entre données expérimentales et simulation numérique suivant ces trois ensembles de données thermomécaniques, des déplacements suivant les trois directions  $\underline{e}_t$ ,  $\underline{e}_n$  et  $\underline{e}_3$  mesurés dès l'instant  $t = t_{20}$  (instant de début de construction du cordon  $\mathcal{M}_{T20}$ ) sur ces six capteurs.

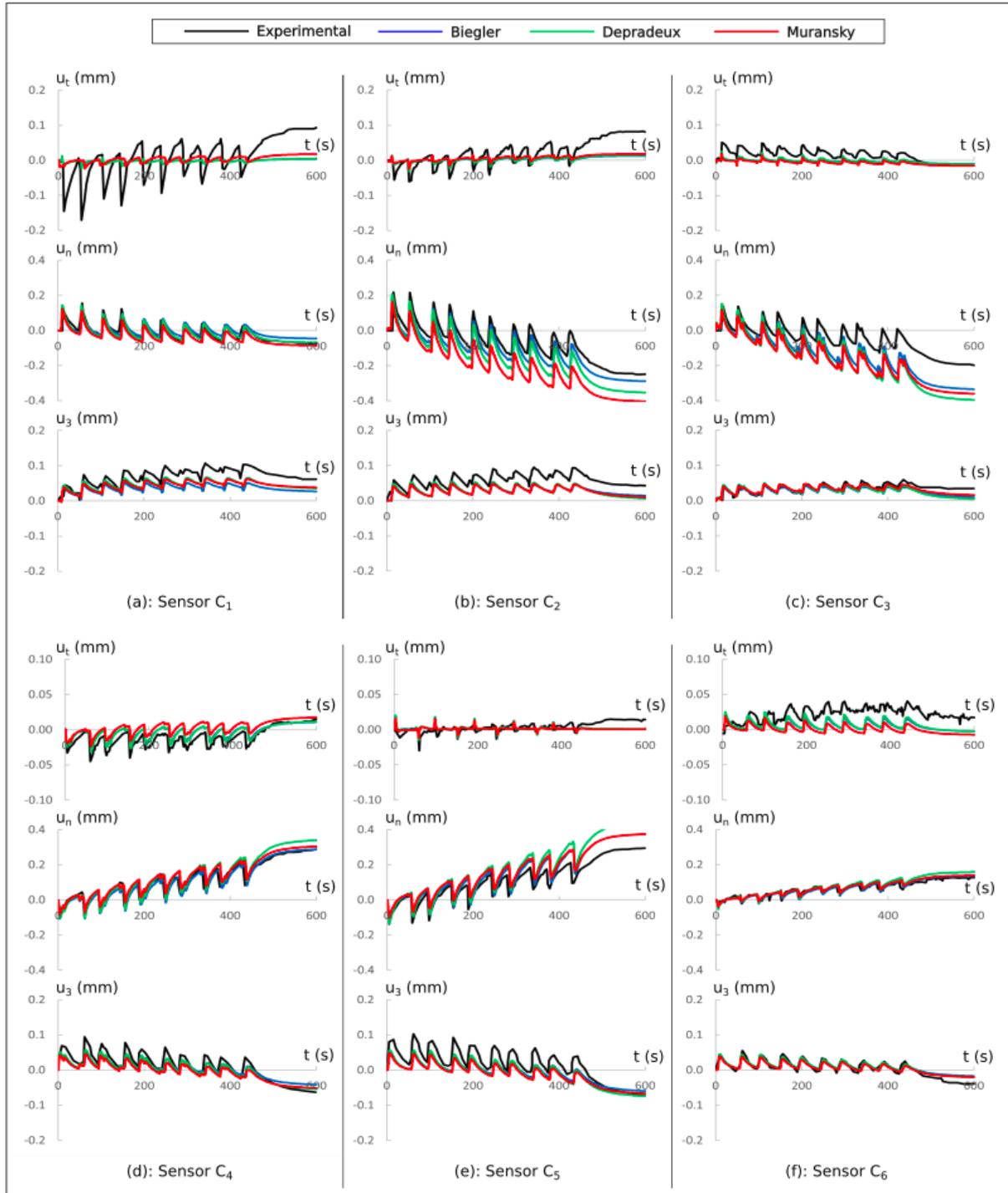


FIGURE 3.49 – Comparaison entre les données expérimentales et les simulations numériques des évolutions temporelles du déplacement pour les six capteurs fixés sur l’aube au cours de la construction des dix derniers cordons  $\mathcal{M}_{TI}, I = 21, \dots, 30$

Dans cette figure, nous observons :

1. En ce qui concerne les déplacements suivant la direction  $\underline{e}_t$  :
  - une bonne correspondance entre les déplacements suivant les données de Biegler et de Depradeux, et les déplacements expérimentaux sur le capteur  $C_4$

contrairement aux déplacements numériques issus des autres données étant de plus faibles amplitudes ;

- une sous-estimation globalement importante des déplacements sur les autres capteurs ;
- un manque global d'accord qualitatif entre les déplacements expérimentaux et les déplacements numériques ;
- des écarts notables des réponses numériques des déplacements suivant les trois différents ensembles de données thermomécaniques.

Ces importants écarts entre données expérimentales et résultats numériques peuvent trouver leurs origines dans d'éventuelles erreurs de mesures expérimentales des déplacements sur chaque capteurs suivant leurs directions tangentielles respectives ; d'autant que les ordres de grandeurs des déplacements tangentielles se rapprochent de ceux des déplacements normaux (suivant la direction  $\underline{e}_n$ ). La non prise en compte de l'anisotropie dans notre modèle thermomécanique peut également être à l'origine de ces écarts.

2. En ce qui concerne les déplacements suivant la direction normale  $\underline{e}_n$  :
  - une bonne correspondance entre les déplacements numériques et les déplacements expérimentaux sur les capteurs  $C_1$ ,  $C_4$  et  $C_6$ . Toutefois, les déplacements suivant les données de Depradeux surestiment légèrement les déplacements expérimentaux.
  - une surestimation importante des déplacements sur les autres capteurs ; toutefois, les déplacements suivant les données de Biegler approchent mieux les déplacements expérimentaux sur le capteur  $C_2$  ;
  - un accord qualitatif global entre les déplacements expérimentaux et les déplacements numériques ;
  - des différences notables des réponses numériques des déplacements suivant les trois différents ensembles de données thermomécaniques.

La surestimation des déplacements normaux des capteurs  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_5$  peut avoir les mêmes causes que celles des écarts importants entre déplacements expérimentaux et déplacements numériques suivant la direction  $\underline{e}_t$  présentées ci-dessus. Elle peut aussi trouver son origine dans une éventuelle surestimation de l'efficacité énergétique  $\eta$  entraînant une surestimation de la réponse thermique en période de chauffage.

3. En ce qui concerne les déplacements suivant la direction normale  $\underline{e}_3$  :
  - une bonne correspondance entre les déplacements numériques et les déplacements expérimentaux sur les capteurs  $C_3$  et  $C_6$ . Toutefois, les déplacements numériques deviennent moins importants pendant la période de refroidissement à la température ambiante.

- une sous-estimation des déplacements sur les autres capteurs ; toutefois, les déplacements numériques approchent mieux les déplacements expérimentaux pendant et après la construction des 10 derniers cordons.
- un accord qualitatif global entre les déplacements expérimentaux et les déplacements numériques ;
- de légers écarts des réponses numériques des déplacements suivant les trois différents ensembles de données thermomécaniques.

La sous-estimation constatée des déplacements suivant  $\underline{e}_3$  des capteurs  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_4$  et  $C_5$  est très probablement liée à une éventuelle mauvaise définition des conditions aux limites en déplacement. En effet, nous avons considéré un encastrement à la surface inférieure du substrat. Or le substrat échange de la chaleur avec son support, entraînant ainsi le chauffage de ce dernier. Le support du substrat subit donc un effet de dilatation thermique conduisant à un déplacement non négligeable de sa frontière de contact avec le substrat, en particulier suivant la direction  $\underline{e}_3$ . La non prise en compte de ce déplacement dans notre modèle entraîne sans doute une sous-estimation de déplacement. Nous notons également que l'absence d'anisotropie dans notre modèle thermomécanique peut également être à l'origine de cet écart.

## Conclusion

Ce chapitre a eu pour objet l'application du modèle numérique du procédé DED, dit modèle standard, développé dans le précédent chapitre. Ceci dans le but de démontrer sa pertinence et sa cohérence. Cette application a été faite dans le cadre de la simulation numérique de la construction par DED du mur et de l'aube de turbine de Biegler et al. [45, 46]. Elle a consisté en des études de convergence, de sensibilités thermique et mécanique, des comparaisons à la méthode *quiet element*, des études d'influence de l'écrouissage cinématique et de validation expérimentale.

En ce qui concerne l'étude de convergence, faite sur le premier cordon du mur, l'aspect temporel de cette étude a démontré une très bonne convergence du modèle thermique, avec toutefois une convergence moins régulière de la dérivée temporelle de la température en période de construction. Sur la base de l'application de l'uniformisation du choix de la dérivée temporelle approchée de la température pour le modèle mécanique, l'aspect temporel de l'étude de convergence a démontré une très bonne convergence. L'aspect spatial, en raison du pas temps fixé, a également démontré une très bonne convergence des modèles thermique et mécanique.

En ce qui concerne l'étude de sensibilité thermique, faite sur le mur, il a été démontré que le niveau de débordement de la source au niveau des extrémités cordons construits n'avait d'influence considérable qu'en ces extrémités pendant une durée limitée. Il a également

été démontré que le cas du débordement total et celui du débordement à moitié menaient à des écarts de réponse thermique plus faibles que ceux menés par le cas du débordement à moitié et celui du débordement nul.

En ce qui concerne l'étude de sensibilité mécanique, un comportement convergent du champ de distorsion avec l'augmentation du facteur de pénalisation  $\eta_p$  a été observé, ceci avec une diminution de l'amplitude de ce champ. Une insensibilité quasi-totale du champ des contraintes au facteur  $\eta_p$  a également été observé.

En ce qui concerne la comparaison à la méthode quiet element, il a été démontré que la méthode quiet element appliquée avec un module d'Young des éléments non actifs, relativement important ( $E_q=10\text{GPa}$ ) bien qu'approchant les contraintes obtenues par le modèle standard, ne permet pas de résoudre le problème de surestimation globale des distorsions en période de chauffage, comme en période de refroidissement total. De plus, par rapport au modèle standard, elle mène à une diminution de l'amplitude des distorsions normales et en un sens opposé des distorsions verticales. Par conséquent, le modèle cinématique de positionnement du modèle standard se révèle donc être une solution alternative efficace pour le calcul des distorsions des éléments non actifs car il permet d'assurer une décroissance progressive et régulière avec la coordonnée verticale  $X_3$  de l'amplitude des distorsions de ces éléments.

En ce qui concerne l'étude de l'influence de l'écroutissage cinématique, il a été démontré que le modèle standard à écroutissage mixte, par rapport au modèle standard à écroutissage isotrope, mène globalement à des contraintes de plus faibles amplitudes, et à des distorsions, très approximatives en période de chauffage, et de plus importantes amplitudes en période de refroidissement total hors mis celles suivant la direction normale. En ce qui concerne, l'étude de validation expérimentale, deux types d'études ont menés : la validation thermique et la validation mécanique.

La validation thermique, faite sur le mur, a démontré une bonne efficacité du modèle thermique, en particulier celle de la prise en compte de l'élévation de la température du gaz protecteur causée par le faisceau laser.

La validation mécanique, faite sur le mur et l'aube suivant différentes données mécaniques du matériau utilisé (Acier 316L), a dans l'ensemble présenté un bon accord avec les mesures expérimentales. Toutefois, certains désaccords ont été observés, possiblement imputables à l'anisotropie du comportement non prise en compte dans nos simulations, ou à une représentation non fidèle des conditions aux limites dans l'expérience. Cette étude a aussi mis en évidence quelques différences notables entre les résultats numériques obtenus suivant les différentes données du matériau utilisé. Les données de Depradeux ont eu tendance à donner des déplacements de grande amplitude, tandis que les données de Muránsky ont eu tendance à donner des déplacements de faible amplitude. En conclusion de cette étude, les données numériques pourront mieux approcher les données expérimentales, sous réserve de mieux définir les conditions aux limites en déplacements,

de mieux prendre en compte l'éventuelle variation de l'efficacité énergétique effective du procédé, de mieux caractériser le matériau utilisé, de mieux mesurer expérimentalement les déplacements dans les bases locales (intrinsèques) des structures étudiées.

Au delà de ces constatations, le modèle standard est, par définition et par principe, très coûteux en temps de calcul (de l'ordre de 6 jours pour une parallélisation à mémoire partagée, avec 32 cœurs de calcul). Il est donc essentiel de réduire sa complexité. Tel sera l'objet des chapitres suivants.

# Chapitre 4

## Méthode inherent strain

La méthode inherent strain (IS) développée dans ce chapitre est une amélioration de l'approche non linéaire de Liang et al. [44]. En effet, dans son développement, nous intégrons l'érouissage dans la loi de comportement élasto-plastique adoptée, lequel nous sert à proposer une définition plus exacte du champ inherent strain, champ de sollicitation mécanique. Ce chapitre s'articule donc autour des points suivants :

- description du principe de la méthode, dans une approche de grande déformation ;
- Amélioration de la définition du champ inherent strain, ainsi que ses tests de validation ;
- Méthodes d'estimation de ce champ et applications.

Les exemples d'illustration et d'application porteront sur le mur et l'aube de turbine présentés au chapitre 3.

### Contents

---

<b>4.1 Principe de la méthode</b> . . . . .	<b>156</b>
4.1.1 Loi de comportement élasto-plastique . . . . .	158
4.1.2 Problème mécanique non linéaire . . . . .	162
4.1.3 Problème cinématique de positionnement . . . . .	162
<b>4.2 Calcul du champ inherent strain incrémental et tests de validation</b> . . . . .	<b>164</b>
4.2.1 Selon la méthode de Liang et al. . . . .	164
4.2.2 Nouvelle méthode proposée . . . . .	174
4.2.3 Définition . . . . .	174
<b>4.3 Méthodes d'estimation et applications</b> . . . . .	<b>184</b>
4.3.1 Le calcul de moyenne . . . . .	184
4.3.2 Transport de profil . . . . .	191

---

## 4.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode inherent strain comporte deux grands points : la loi de comportement élasto-plastique adoptée, le problème mécanique non linéaire qui en découle, et le problème de cinématique de positionnement. Leurs présentations nécessitent tout d'abord de considérer pour chaque  $I = 1, \dots, N$ , la construction successive sur le substrat  $\mathcal{M}_S$  des cordons  $\mathcal{M}_{T1}, \dots, \mathcal{M}_{TI}$ , avec un refroidissement jusqu'à la température ambiante  $T_\infty$  après la fin de la construction effective du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$  à l'instant  $t_I^c$  (figure 4.1).

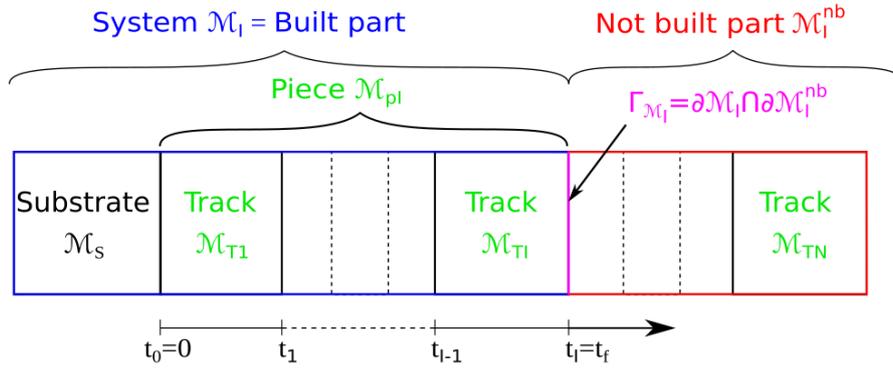


FIGURE 4.1 – Construction du système  $\mathcal{M}_I$  suivi du refroidissement total

On considère ensuite l'ensemble des grandeurs mécaniques et cinématiques qui en résultent. Nous avons parmi ces grandeurs :

- la transformation géométrique de distorsion  $\Phi_I : \Omega_{f0} \rightarrow \Omega_{fI}$  et son gradient associé  $\underline{\underline{F}}_I := \nabla \Phi_I$  (figure 4.2) ;
- les champs tensoriels lagrangiens  $B_{fI}(\underline{X})$  définis dans  $\Omega_{f0}$  et les champs eulériens correspondants  $b_{fI}(\underline{x})$  définis dans  $\Omega_{fI}$  ;
- les champs tensoriels lagrangiens  $B_I(\underline{X})$  définis dans  $\Omega_{I0} := p_{I0}(\mathcal{M}_I)$  et les champs eulériens correspondants  $b_I(\underline{x})$  définis dans  $\Omega_I := p_{II}(\mathcal{M}_I)$ ,  $\mathcal{M}_I$  désignant la partie construite du système total  $\mathcal{M}_f$  et  $p_{II}$  le placement réel de ce dernier ;
- les champs tensoriels lagrangiens  $B_{nI}(\underline{X})$  définis dans  $\Omega_{I0}^{nb} := p_{I0}(\mathcal{M}_I^{nb})$  et les champs eulériens correspondants  $b_{nI}(\underline{x})$  définis dans  $\Omega_I^{nb} := p_{II}(\mathcal{M}_I^{nb})$ ,  $\mathcal{M}_I^{nb} := \mathcal{M}_f \setminus \mathcal{M}_I$  désignant la partie non construite de  $\mathcal{M}_f$ .

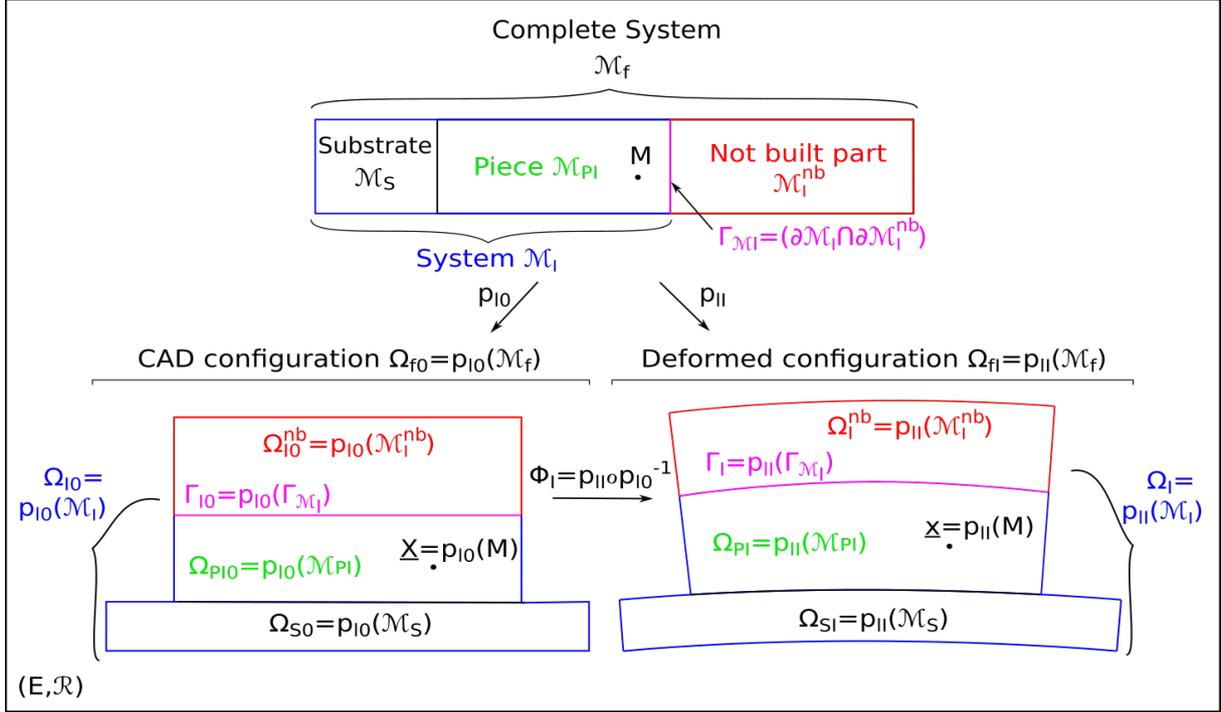


FIGURE 4.2 – Placement du système total  $\mathcal{M}_f$  dans l'espace physique muni du référentiel  $(\mathcal{E}, \mathcal{R})$  aux instants 0 et  $t_I$

On définit ainsi la transformation géométrique de distorsion  $\Phi_{I-1,I} := \Phi_I \circ \Phi_{I-1}^{-1} : \Omega_{fI-1} \rightarrow \Omega_{fI}$ , transformant la configuration géométrique déformée intermédiaire  $\Omega_{fI-1} := p_{I-1}(\mathcal{M}_f)$ , c'est-à-dire la configuration déformée après dépôt du cordon  $\mathcal{M}_{T_{I-1}}$  et refroidissement à  $T_\infty$ , en  $\Omega_{fI}$  (configuration déformée après dépôt du cordon  $\mathcal{M}_{T_I}$  et refroidissement à  $T_\infty$ ) et son gradient associé  $\underline{F}_{I-1,I} := \nabla \Phi_{I-1,I}$  (figure 4.3).

Dans toute la suite, la transformation  $\underline{F}_{I-1,I}$  sera considérée comme infinitésimale. Ainsi, pour toute grandeur eulérienne  $b_{fI}$  définie dans  $\Omega_{fI}$ , nous définissons la grandeur lagrangienne actualisée  $b_{fI-1,I}$  et sa variation  $\delta b_{fI}$  par :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{x}_{I-1}, \underline{x}_I) \in \Omega_{fI-1} \times \Omega_{fI} \text{ tel que } \underline{x}_I = \Phi_{I-1,I}(\underline{x}_{I-1}), \\ b_{fI-1,I}(\underline{x}_{I-1}) = b_{fI}(\underline{x}_I), \quad \delta b_{fI}(\underline{x}_{I-1}) = b_{fI-1,I}(\underline{x}_{I-1}) - b_{fI-1}(\underline{x}_{I-1}) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Par contre, pour toute grandeur eulérienne  $b_I$  définie dans  $\Omega_I$ , nous définissons la grandeur lagrangienne actualisée  $b_{I-1,I}$  et sa variation  $\delta b_I$  définie dans  $\Omega_{I-1,I} := \Phi_{I-1}(\Omega_{I0})$  par :

$$\begin{aligned} \forall (\underline{x}_{I-1}, \underline{x}_I) \in \Omega_{I-1,I} \times \Omega_I \text{ tel que } \underline{x}_I = \Phi_{I-1,I}(\underline{x}_{I-1}), \\ b_{I-1,I}(\underline{x}_{I-1}) = b_I(\underline{x}_I), \quad \delta b_I(\underline{x}_{I-1}) = b_{I-1,I}(\underline{x}_{I-1}) - b_{I-1}(\underline{x}_{I-1}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous notons que dans cette dernière équation,  $\Omega_{I-1}$ , domaine de définition du champ  $b_{I-1}$  fait l'objet d'une extension au domaine  $\Omega_{I-1,I}$  de sorte que, mis à part le champ de

distorsion  $\underline{u}_{I-1}$ , nous avons :

$$\forall \underline{x}_{I-1} \in \delta\Omega_I := \Omega_{I-1,I} \setminus \Omega_{I-1}, \quad b_{I-1}(\underline{x}_{I-1}) = b_\infty \quad (4.3)$$

Avec  $b_\infty$ , grandeur initiale de  $b$  définie à température ambiante  $T_\infty$ .

Dans la suite de ce chapitre, pour des raisons de simplicité de notation, nous conviendrons de confondre les champs eulériens  $b_{fI}$  et  $b_I$  avec leurs champs lagrangiens actualisés respectifs  $b_{fI-1,I}$  et  $b_{I-1,I}$  à leurs domaines de définition près.

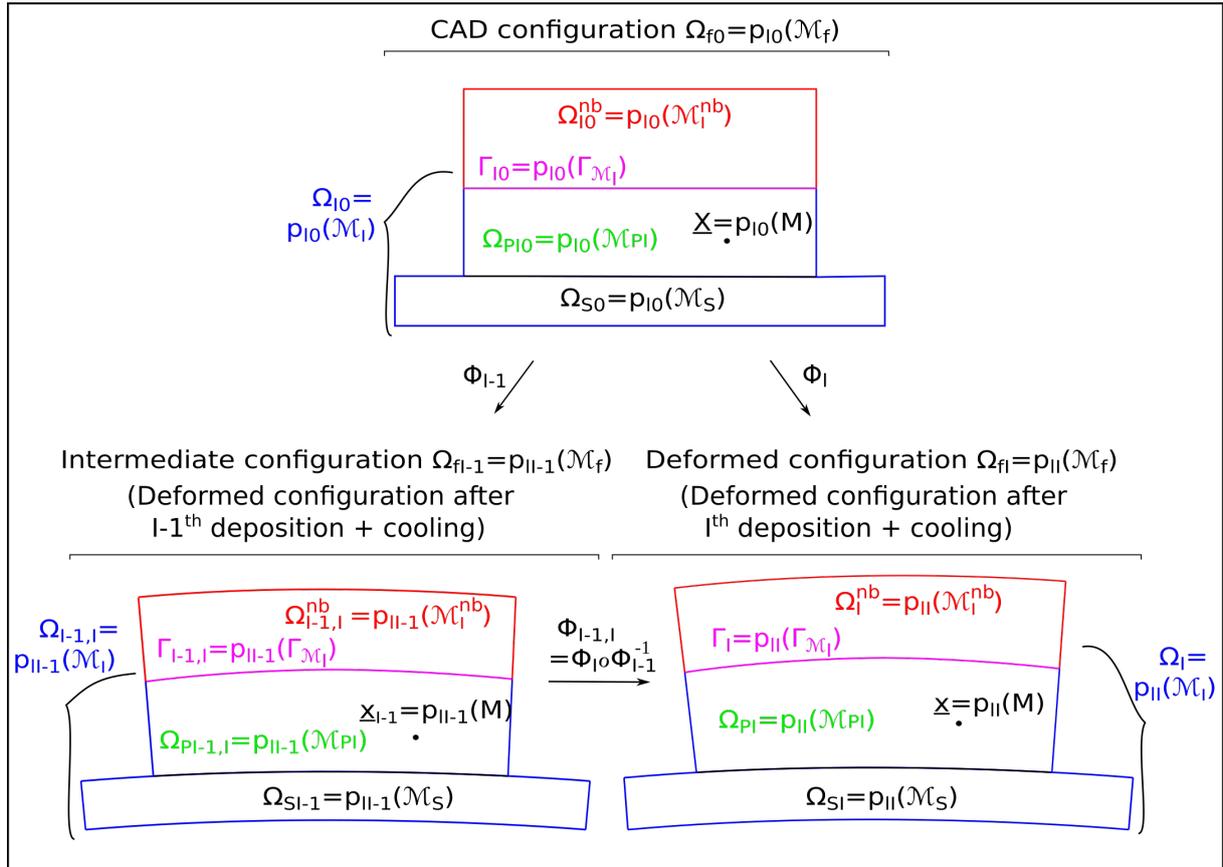


FIGURE 4.3 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{fI-1}$  du système final  $\mathcal{M}_f$

### 4.1.1 Loi de comportement élasto-plastique

La loi de comportement élasto-plastique, dans le cadre de la présente méthode, est formulée sous forme incrémentale dans la configuration intermédiaire  $\Omega_{I-1,I}$  du système  $\mathcal{M}_I$  (figure 4.4). En effet, elle est issue de la discrétisation temporelle totalement implicite et à pas de temps unitaire de la loi d'élasto-viscoplasticité (présentée au chapitre 2) à température ambiante et dans laquelle est négligé tout éventuel effet de viscosité observé à cette température (soit  $K_{vp}(T_\infty) = 0$ ). La transformation géométrique  $\underline{F}_I$  admet ainsi la décomposition suivante :

$$\underline{F}_I = \underline{F}_I^e \cdot \underline{F}_I^p \cdot \underline{F}_I^* \quad (4.4)$$

Avec  $\underline{F}_I^e$ , transformation élastique,  $\underline{F}_I^p$ , transformation plastique incompressible et symétrique, et  $\underline{F}_I^*$  l'inherent transformation.

En considérant  $\underline{F}_I^e$  et  $\underline{F}_I^p$  infinitésimales, on obtient :

$$\begin{aligned} \underline{F}_I^e &\approx \underline{1} + \underline{\omega}_I^e + \underline{\varepsilon}_I^e, \quad \underline{F}_I^p \approx \underline{1} + \underline{\varepsilon}_I^p, \quad \|\underline{\omega}_I^e\|, \|\underline{\varepsilon}_I^e\|, \|\underline{\varepsilon}_I^p\| \ll 1 \\ \Rightarrow \begin{cases} \underline{F}_I \approx (\underline{1} + \underline{\omega}_I^e + \underline{\varepsilon}_I^e) \cdot (\underline{1} + \underline{\varepsilon}_I^p) \cdot \underline{F}_I^* \\ d\underline{F}_I \cdot \underline{F}_I^{-1} \approx d\underline{\omega}_I^e + d\underline{\varepsilon}_I^e + d\underline{\varepsilon}_I^p + d\underline{F}_I^* \cdot \underline{F}_I^{*-1} \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$

En considérant de plus, l'hypothèse selon laquelle  $\underline{F}_{I-1,I}$  est infinitésimale, c'est-à-dire  $\underline{F}_{I-1,I} = O(\underline{1})$ , nous obtenons de 4.5 :

$$\begin{aligned} \nabla \delta u_I &\approx \delta \underline{\omega}_I^e + \delta \underline{\varepsilon}_I^e + \delta \underline{\varepsilon}_I^p + \delta \underline{F}_I^* \cdot \underline{F}_{I-1}^{*-1}, \quad \delta \underline{F}_I^* := \underline{F}_I^* - \underline{F}_{I-1}^* \\ &\Rightarrow \underline{\varepsilon}(\delta u_I) \approx \delta \underline{\varepsilon}_I^e + \delta \underline{\varepsilon}_I^p + \delta \underline{\varepsilon}_I^*, \quad (4.6) \\ \delta \underline{\varepsilon}_I^* &:= \frac{1}{2} \left( (\delta \underline{F}_I^* \cdot \underline{F}_{I-1}^{*-1})^T + \delta \underline{F}_I^* \cdot \underline{F}_{I-1}^{*-1} \right) \end{aligned}$$

Dans la suite nous remplacerons, dans l'équation 4.6, le terme "  $\approx$  " par l'égalité " = ", et le tenseur  $\delta \underline{\varepsilon}_I^*$  désignera le  $I^{ème}$  champ inherent strain incrémental, associé au dépôt du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ .

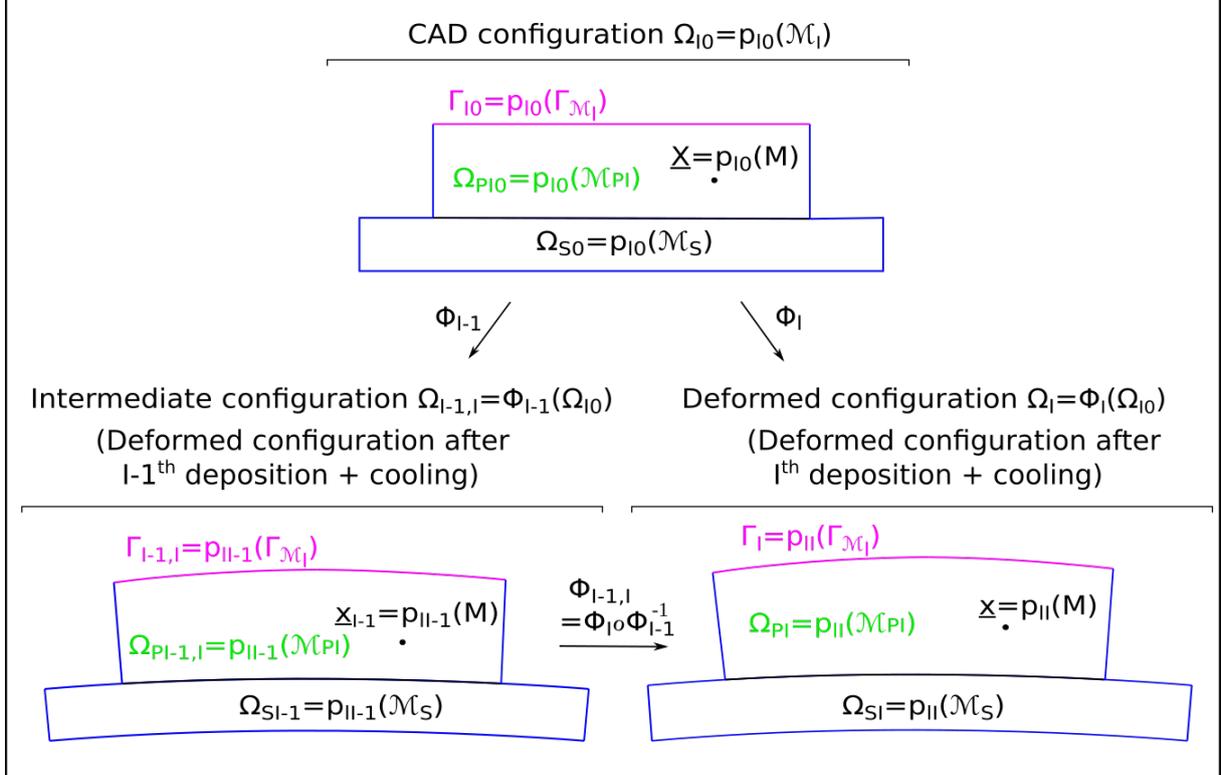


FIGURE 4.4 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{I-1,I}$  du système  $\mathcal{M}_I$

Ainsi, la loi de comportement mécanique adoptée, pour le dépôt du cordon  $\mathcal{M}_T$ ,  $I =$

$1, \dots, N$ , dans le cadre de notre méthode inherent strain, est donnée par l'ensemble des équations ci-dessous :

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{I-1,I} \\
 & \delta \underline{s}_I = 2\mu(T_\infty) \delta \underline{e}_I^c = 2\mu(T_\infty) \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{\varepsilon}_I^p - \delta \underline{\varepsilon}_I^* \right) \\
 & = 2\mu(T_\infty) \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I) \left( \underline{s}_I - \underline{X}_I \right) - \delta \underline{\varepsilon}_I^* \right) \\
 \Leftrightarrow & \delta \underline{s}_I + 2\mu(T_\infty) \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I) \left( \underline{s}_I - \underline{X}_I \right) = 2\mu(T_\infty) \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{\varepsilon}_I^* \right) \\
 & \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I) = \frac{3\delta \bar{\varepsilon}_I}{2\bar{\sigma}_I}, \quad \underline{X}_I = \sum_{i=1}^{N_c} \underline{X}_{iI} \\
 & \bar{\sigma}_I - \sigma_Y(T_\infty) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I) \leq 0 \\
 & \text{Pour } i = 1, \dots, N_c \\
 & \delta \underline{\alpha}_{iI} = \delta \underline{\varepsilon}_I^p - \gamma_i \underline{\alpha}_{iI} \delta \bar{\varepsilon}_I, \quad \underline{X}_{iI} = \frac{2}{3} C_i \underline{\alpha}_{iI} \\
 & -\nabla \cdot \delta \underline{u}_I - \frac{\delta p_I}{\chi(T_\infty)} + \text{tr} \delta \underline{\varepsilon}_I^* = 0
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Avec  $\delta \underline{e}_I^* := \delta \underline{\varepsilon}_I^* - \frac{\text{tr} \delta \underline{\varepsilon}_I^*}{3} \underline{1}$ .

Par un raisonnement analogue à celui de la discrétisation temporelle de la loi de comportement élasto-viscoplastique présenté au chapitre 2, nous obtenons de 4.7 l'ensemble d'équations :

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{I-1,I} \\
 & \underline{s}_I = (1 - h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \underline{s}_I^p + h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I) \underline{X}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I), \\
 & [1 + 2(\mu(T_\infty) + h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I)] \left( \underline{s}_I - \underline{X}_I \right) = \underline{s}_I^p - \underline{X}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I), \\
 h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I) := & \frac{2\mu(T_\infty) \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I)}{1 + 2(\mu(T_\infty) + h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I)}, \quad h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I) := \sum_{i=1}^{N_c} \frac{C_i}{3(1 + \gamma_i \delta \bar{\varepsilon}_I)}, \\
 \underline{s}_I^p := & \underline{s}_{I-1} + 2\mu(T_\infty) \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{e}_I^* \right), \quad \underline{X}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I) := \sum_{i=1}^{N_c} \frac{2}{3} C_i \frac{\underline{\alpha}_{iI-1}}{1 + \gamma_i \delta \bar{\varepsilon}_I} \\
 & \bar{\sigma}_I - \sigma_Y(T_\infty) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I) \leq 0 \\
 & -\nabla \cdot \delta \underline{u}_I - \frac{\delta p_I}{\chi(T_\infty)} + \text{tr} \delta \underline{\varepsilon}_I^* = 0
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Nous admettons également l'équivalence :

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}_I \geq \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I) & \Leftrightarrow \bar{\sigma}_I^p(0) \geq \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{I-1}) \\
 \bar{\sigma}_I^p(\delta \bar{\varepsilon}_I) := & \sqrt{\frac{3}{2}} \left( \underline{s}_I^p - \underline{X}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I) \right) : \left( \underline{s}_I^p - \underline{X}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I) \right)
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

En vertu de celle-ci, nous distinguons deux cas :

- 1er cas :  $\bar{\sigma}_I^p(0) < \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{I-1}) \Rightarrow \bar{\sigma}_I < \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I)$ , comportement purement élastique de  $\underline{s}_I$   
 Nous obtenons de 4.8,

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{I-1,I} \\
 & \underline{s}_I \left( \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) \right) = \underline{s}_{I-1} + 2\mu(T_\infty) \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{e}_I^* \right) \\
 & \frac{d\underline{s}_I}{d\underline{\varepsilon}} \left( \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) \right) = 2\mu(T_\infty) \underline{J} \\
 & \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I) = \delta \bar{\varepsilon}_I = 0
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

— 2e cas :  $\bar{\sigma}_I^p(0) \geq \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{I-1}) \Rightarrow \bar{\sigma}_I \geq \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I)$ , comportement élasto-plastique de  $\underline{s}_I$

De 4.8 on obtient,

$$\begin{aligned}
 & \text{Dans } \Omega_{I-1,I} \\
 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{s}_I = (1 - h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \underline{s}_I^p + h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I) \underline{\tilde{X}}_{I-1}^p(\delta \bar{\varepsilon}_I), \\ [1 + 2(\mu(T_\infty) + h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I) \delta \lambda(\delta \bar{\varepsilon}_I))] (\underline{s}_I - \underline{X}_I) = \underline{s}_I^p - \underline{\tilde{X}}_{I-1}(\delta \bar{\varepsilon}_I) \\ \bar{\sigma}_I(\delta \bar{\varepsilon}_I) + 3(\mu(T_\infty) + h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \delta \bar{\varepsilon}_I = \bar{\sigma}_I^p(\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}), \\ \bar{\sigma}_I(\delta \bar{\varepsilon}_I) = \sigma_Y(T_\infty) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{I-1} + \delta \bar{\varepsilon}_I) \\ \frac{d\underline{s}_I}{d\underline{\varepsilon}} = 2\mu(T_\infty) (1 - h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \underline{J} \\ \otimes \frac{\underline{s}_I^p - \underline{\tilde{X}}_{I-1}(\delta \bar{\varepsilon}_I)}{\bar{\sigma}_I^p(\delta \bar{\varepsilon}_I)} \\ \gamma_g^{-1} = (\bar{\sigma}_I)'(\delta \bar{\varepsilon}_I) + 3(\mu(T_\infty) + h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I)) + 3h_X'(\delta \bar{\varepsilon}_I) \delta \bar{\varepsilon}_I \\ - (\bar{\sigma}_I^p)'(\delta \bar{\varepsilon}_I) \end{array} \right. \tag{4.11}
 \end{aligned}$$

En absence d'écouissage cinématique, c'est-à-dire pour  $C_i(T) = 0, i = 1, \dots, N_c$ , nous obtenons les simplifications :

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} \underline{X}_I = \underline{\tilde{X}}_{I-1}(\delta \bar{\varepsilon}_I) = \underline{0}, \quad h_X(\delta \bar{\varepsilon}_I) = 0 \\ \underline{s}_I = \frac{\underline{s}_I^p}{1 + 3\mu(T_\infty) \frac{\delta \bar{\varepsilon}_I}{\bar{\sigma}_I(\delta \bar{\varepsilon}_I)}} \\ \bar{\sigma}_I(\delta \bar{\varepsilon}_I) + 3\mu(T_\infty) \delta \bar{\varepsilon}_I = \bar{\sigma}_{I0}^p, \quad \bar{\sigma}_{I0}^p := \sqrt{\frac{3}{2} \underline{s}_I^p : \underline{s}_I^p} \\ \frac{d\underline{s}_I}{d\underline{\varepsilon}} = 2\mu(T_\infty) \left[ \beta \underline{J} - \gamma \underline{s}_I \otimes \underline{s}_I \right] \\ \beta = \frac{\bar{\sigma}_I}{\bar{\sigma}_{I0}^p}, \quad \gamma = \frac{3}{2\bar{\sigma}_I^2} \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{3\mu(T_\infty)} \frac{d\bar{\sigma}_I}{d\delta \bar{\varepsilon}_I}} + \beta - 1 \right) \end{array} \right. \tag{4.12}
 \end{aligned}$$

Nous pouvons donc conclure que le tenseur  $\underline{s}_I$  est, dans les deux cas énumérés ci-dessus, une fonction du tenseur  $\underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I)$  et dans la suite, on conviendra de noter  $\underline{s}_I(\underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I))$ .

### 4.1.2 Problème mécanique non linéaire

Le calcul des distorsions et contraintes résiduelles par la méthode inherent strain, consiste à résoudre séquentiellement les  $N$  problèmes mécaniques non linéaires  $(\mathcal{P}_{MI})$ ,  $I = 1, \dots, N$  visant à déterminer respectivement les  $N$  déplacements incrémentaux  $\delta \underline{u}_I$ ,  $I = 1, \dots, N$  et les  $N$  contraintes  $\underline{\sigma}_I$ ,  $I = 1, \dots, N$ . Il sera question dans cette partie de présenter leurs formulations théoriques et numériques. Pour cela, pour chaque  $I = 1, \dots, N$ , nous définissons les conditions aux limites du problème mécanique  $(\mathcal{P}_{MI})$ , en partitionnant la frontière  $\partial\Omega_{I-1,I}$  en deux sous-ensembles :  $(\partial\Omega_{I-1,I})^u \subsetneq \partial\Omega_{SI-1,I}$ , sur lequel est considéré un encastrement, et  $(\partial\Omega_{I-1,I})^f$  sur lequel aucune force n'est considérée.

#### Formulation théorique

Le problème mécanique  $(\mathcal{P}_{MI})$ ,  $I = 1, \dots, N$  se formule comme suit :

$$(\mathcal{P}_{MI}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{u}_I \in \left( H^1(\Omega_{I-1,I}) \right)^3, \bar{\varepsilon}_I \in L^2(\Omega_{I-1,I}), \\ \underline{\sigma}_I \in \left( H(\text{div}, \Omega_{I-1,I}) \right)_s^3, \underline{\varepsilon}_I^e, \underline{\varepsilon}_I^p \in \left( L^2(\Omega_{I-1,I}) \right)^6, \\ \text{vérifiant :} \\ \text{Dans } \Omega_{I-1,I} \\ \nabla \cdot \underline{s}_I \left( \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) \right) - \nabla p_I = \underline{0} \\ -\nabla \cdot \delta \underline{u}_I - \frac{\delta p_I}{\chi(T_\infty)} + \text{tr} \delta \underline{\varepsilon}_I^* = 0 \\ \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) = \delta \underline{\varepsilon}_I^e + \delta \underline{\varepsilon}_I^p + \delta \underline{\varepsilon}_I^*, \delta \underline{\varepsilon}_I^p = \delta \lambda (\delta \bar{\varepsilon}_I) \left( \underline{s}_I - \underline{X}_I \right) \\ \underline{s}_I \left( \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) \right) = (1 - h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I)) \underline{s}_I^p \left( \underline{\varepsilon}(\delta \underline{u}_I) \right) + h_s(\delta \bar{\varepsilon}_I) \underline{X}_{I-1}^{\tilde{X}}(\delta \bar{\varepsilon}_I) \\ \bar{\sigma}_I - \sigma_Y(T_\infty) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_I) \leq 0 \\ \rho_I = (1 - \nabla \cdot \delta \underline{u}_I) \rho_{I-1} \\ \text{Sur } \partial\Omega_{I-1,I} \\ \delta \underline{u}_I = \underline{0} \text{ sur } (\partial\Omega_{I-1,I})^u, \\ \underline{\sigma}_I \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } (\partial\Omega_{I-1,I})^f \end{array} \right. \quad (4.13)$$

### 4.1.3 Problème cinématique de positionnement

Dans le cadre de la méthode inherent strain, le calcul de la distorsion résiduelle de positionnement nécessite de résoudre séquentiellement les  $N - 1$  problèmes cinématiques de positionnement  $(\mathcal{P}_{CI})$ ,  $I = 1, \dots, N - 1$  visant à déterminer respectivement les  $N - 1$  déplacements incrémentaux  $\delta \underline{u}_{nI}$ ,  $I = 1, \dots, N - 1$  définis dans les  $N - 1$  domaines géométriques inactifs respectifs  $\Omega_{I-1,I}^{nb} := \Phi_{I-1} \left( \Omega_{I0}^{nb} \right)$ ,  $I = 1, \dots, N - 1$  considérés chacun comme configurations lagrangiennes actualisées (figure 4.5). Ce calcul repose sur l'hypothèse selon laquelle, les  $N - 1$  transformations géométriques  $\underline{F}_{I-1,I}$ ,  $I = 1, \dots, N$  sont infinitésimales. Le tenseur des déformations initiales de Green-Lagrange  $\underline{E}_I^i$  admet donc

la décomposition suivante :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{E}}_I^i &:= \frac{1}{2} \left( \underline{\underline{F}}_I^i{}^T \cdot \underline{\underline{F}}_I^i - \underline{\underline{1}} \right) \\ \underline{\underline{E}}_I^i &= \underline{\underline{F}}_{I-1}^i{}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}_{nI}) \cdot \underline{\underline{F}}_{I-1}^i + \underline{\underline{E}}_{I-1}^i + O\left(\|\nabla \delta \underline{\underline{u}}_{nI}\|^2\right) \\ &\approx \underline{\underline{F}}_{I-1}^i{}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}_{nI}) \cdot \underline{\underline{F}}_{I-1}^i + \underline{\underline{E}}_{I-1}^i\end{aligned}\quad (4.14)$$

Il sera question dans cette partie de présenter, pour chaque  $I = 1, \dots, N - 1$ , les formulations théorique et numérique du problème cinématique de positionnement ( $\mathcal{P}_{CI}$ ). On considère pour cela la configuration intermédiaire  $\Gamma_{I-1,I} := \Phi_{I-1}(\Gamma_{I0})$  de l'interface  $\Gamma_{\mathcal{M}_I}$  (Figure 4.5).

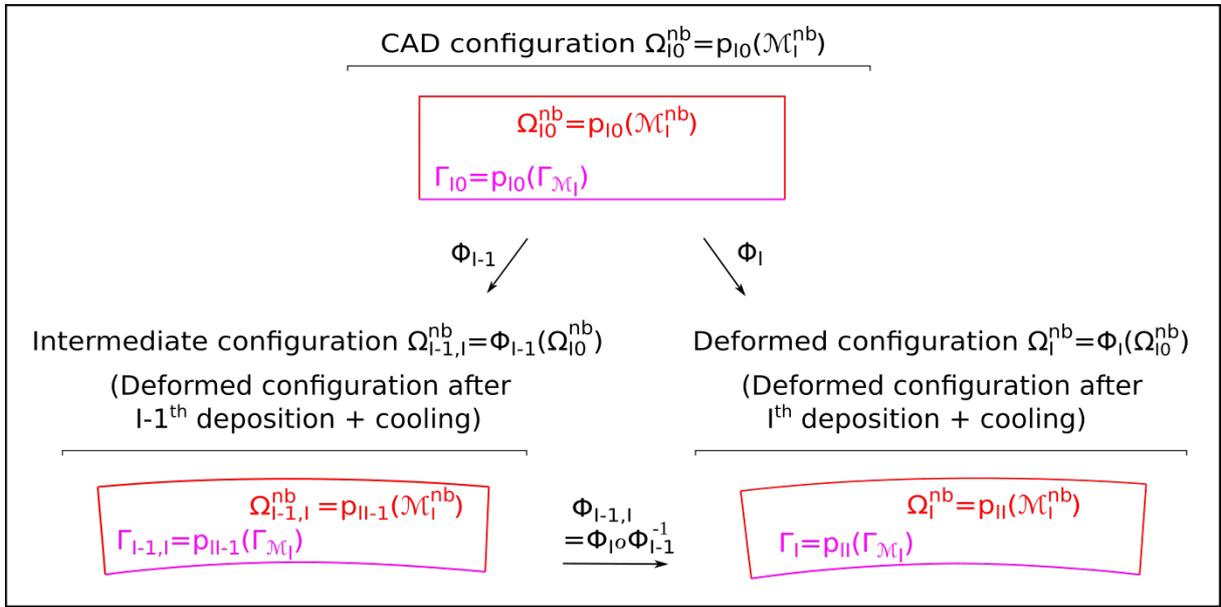


FIGURE 4.5 – Configuration intermédiaire  $\Omega_{I-1,I}^{nb}$  du domaine non construit  $\mathcal{M}_I^{nb}$

### Formulation théorique

Par un raisonnement analogue à celui du chapitre 2, le problème cinématique de positionnement ( $\mathcal{P}_{CI}$ ),  $I = 1, \dots, N - 1$ , avec prise en compte de l'incompressibilité de  $\underline{\underline{F}}_I^i$ , se formule comme suit :

$$\left( \mathcal{P}_{C\tau,t} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \delta \underline{\underline{u}}_{n\tau,t} \in \left( H^1 \left( \Omega_{I-1,I}^{nb} \right) \right)^3 \text{ tel que } \delta \underline{\underline{u}}_{nI} = \delta \underline{\underline{u}}_I \text{ sur } \Gamma_{I-1,I} \\ \text{et } \delta q_{nI} = q_{nI} - q_{nI-1}|_{\Omega_{I-1,I}^{nb}} \in L^2 \left( \Omega_{I-1,I}^{nb} \right) \text{ vérifiant :} \\ \forall \delta \underline{\underline{w}}_n \in \left( H^1 \left( \Omega_{I-1,I}^{nb} \right) \right)^3 \text{ tel que } \delta \underline{\underline{w}}_n = \underline{\underline{0}} \text{ sur } \Gamma_{I-1,I}, \\ \int_{\Omega_{I-1,I}^{nb}} \left( \underline{\underline{F}}_{I-1}^i{}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}_{nI}) \cdot \underline{\underline{F}}_{I-1}^i \right) : \left( \underline{\underline{F}}_{I-1}^i{}^T \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{w}}_n) \cdot \underline{\underline{F}}_{I-1}^i \right) \\ + \eta_p \int_{\Omega_{I-1,I}^{nb}} \delta \underline{\underline{u}}_{nI} \cdot \delta \underline{\underline{w}}_n - \int_{\Omega_{I-1,I}^{nb}} \delta q_{nI} \nabla \cdot \delta \underline{\underline{w}}_n = 0 \\ \forall \delta r_n \in L^2 \left( \Omega_{I-1,I}^{nb} \right), - \int_{\Omega_{I-1,I}^{nb}} \delta r_n \nabla \cdot \delta \underline{\underline{u}}_{nI} = 0 \end{array} \right. \quad (4.15)$$

## 4.2 Calcul du champ inherent strain incrémental et tests de validation

Cette partie a pour objet de décrire les méthodes de calcul des  $N$  champs inherent strain incrémentaux  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, N$ . Celles-ci reposent sur l'application du modèle thermomécanique standard développé au chapitre 2 dans la simulation du procédé dans l'intervalle de temps  $[0, t_f]$ . Deux méthodes y seront présentées : la méthode de Liang et al. [44] et la nouvelle méthode développée dans le cadre des présents travaux. Pour chacune de ces deux méthodes, il sera présenté la définition, quelques exemples de calcul ainsi qu'une étude de validation.

### 4.2.1 Selon la méthode de Liang et al.

#### Définition

Selon Liang et al. [44], les champs inherent strain incrémentaux  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, N$ , se définissent à partir d'un champ inherent strain de base lagrangien  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  défini dans  $\Omega_{f0}$ . Ils sont donnés par les expressions :

$$\forall I = 1, \dots, N, \forall \underline{x} \in \Omega_I, \delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*(\underline{x}) = \begin{cases} \underline{\underline{\varepsilon}}^*(\Phi_I^{-1}(\underline{x})) & \text{si } \underline{x} \in \Omega_{TI} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.16)$$

Avec  $\Omega_{TI} := \Phi_I(\Omega_{TI0})$ , configuration déformée du cordon  $\mathcal{M}_{TI}$  après dépôt et refroidissement. Afin de définir le champ inherent strain de base  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$ , Liang et al. considèrent :

- le tenseur de déformation purement mécanique instantané  $\underline{\underline{\varepsilon}}_t^m$ ,  $t \in [0, t_f]$  défini dans  $\Omega_t$  et dont la "vitesse" est donnée par :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t^m &:= \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}(v_t) - \alpha(T_t) \dot{T}_t \underline{1} \\ &= \frac{\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t}{2\mu(T_t^u)} - \frac{\dot{p}_t}{3\chi(T_t^u)} \underline{1} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_t^{vp} \end{aligned} \quad (4.17)$$

- l'état dit "intermédiaire" de chaque point matériel du système final  $\mathcal{M}_f$  se définit selon les auteurs comme étant l'état de déformation mécanique compressive maximale suivant la direction  $\underline{e}_t$  au passage de la source de chaleur. La figure 4.6 nous donne, pour le mur, l'état intermédiaire du capteur C situé à hauteur de  $H_T$  à mi-longueur du premier cordon ( $s = \frac{L_T}{2}$ ), état observé sur les courbes d'évolution temporelle de la déformation mécanique tangentielle  $\varepsilon_{tt}$  et de la température en C. La déformation compressive maximale suivant  $\underline{e}_t$  de ce capteur est en effet obtenue au second passage de la source de chaleur.

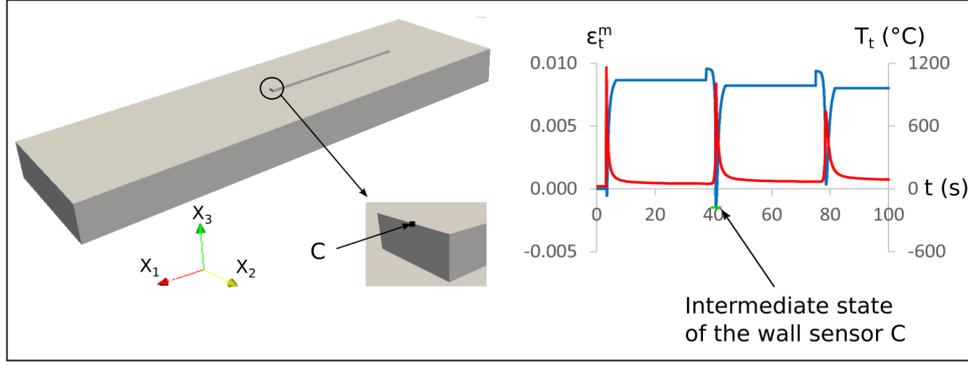


FIGURE 4.6 – État intermédiaire du capteur C du mur

- L'état stable correspondant à l'état de refroidissement à  $T_\infty$  après le dépôt du dernier cordon  $\mathcal{M}_{TN}$ , et caractérisé entre autres par la déformation élastique  $\underline{\underline{\varepsilon}}_s^e$ .

Ainsi, le champ tensoriel  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  est donné par la différence :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^* = \underline{\underline{\varepsilon}}_i^m - \underline{\underline{\varepsilon}}_s^e \quad (4.18)$$

Avec  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i^m$ , tenseur de déformation mécanique caractéristique de l'état intermédiaire.

### Tests de validation sur une construction de quelques cordons

Nous ne nous intéressons, dans cette partie, qu'aux huit premiers cordons du mur et de l'aube de turbine. La validation consiste tout d'abord à appliquer la méthode inherent strain aux huit premiers cordons du mur et de l'aube, avec les champs inherent strain incrémentaux  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I$ ,  $I = 1, \dots, 8$  calculés suivant la méthode de Liang et al., et ensuite à en comparer les résultats avec ceux issus du modèle standard. Pour chacune de ces deux structures sont tout d'abord présentés ci-dessous :

- une distribution des composantes diagonales du champ inherent strain de base  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  suivant la base locale  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  (figure 4.7), le long des trois axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  (figure 3.5) ;
- un tableau de valeurs moyennes (tables 4.1-4.2), obtenues au sein de chaque cordon respectif  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I = 1, \dots, 8$ <sup>1</sup>, des composantes des champs incrémentaux obtenus  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$  suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  par la formule :

$$\forall \mathcal{M}_{TI}, I = 1, \dots, 8, \forall \alpha, \beta \in \{t, n, 3\}, \quad \delta\varepsilon_{I\alpha\beta}^* := \frac{1}{|\Omega_{TI}|} \int_{\Omega_{TI}} \delta\varepsilon_{I\alpha\beta}^* \quad (4.19)$$

1. Nous notons que le maillage utilisé décrit dans le chapitre 3 permet de représenter conformément la géométrie CAO et déformée de chaque cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I = 1, \dots, N$  de toute la pièce  $\mathcal{M}_P$ , rendant ainsi évident le calcul précis des différentes moyennes.

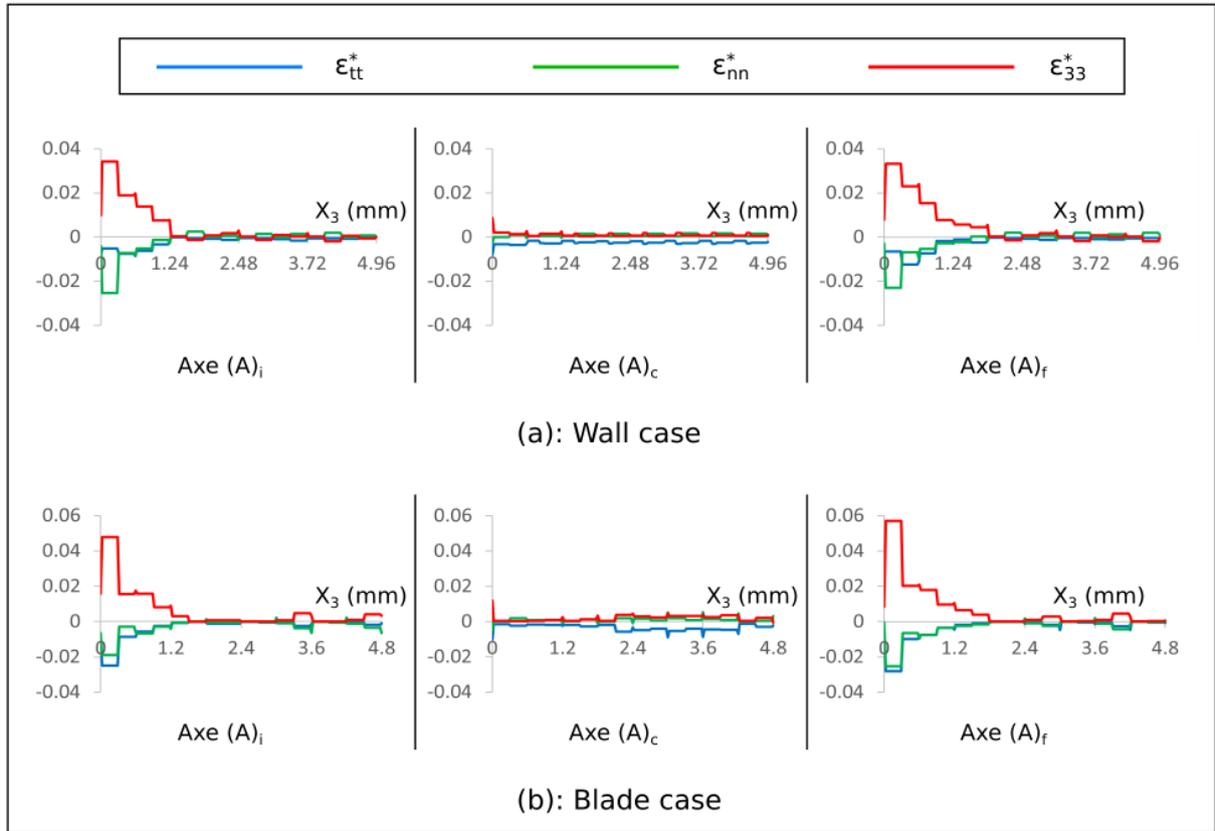


FIGURE 4.7 – Profils des composantes  $\varepsilon_{tt}^*$ ,  $\varepsilon_{nn}^*$  et  $\varepsilon_{33}^*$  de  $\underline{\underline{\varepsilon}}^*$  au sens de Liang et al. tracés le long des axes verticaux  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  : (a) dans le cas du mur de huit cordons ; (b) dans le cas de l’aube de huit cordons. L’origine du profil est prise sur le substrat.

Cordons $\mathcal{M}_{TI}$	$\delta\varepsilon_{Itmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{Innmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I33moy}^*$	$\delta\varepsilon_{Itnmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{It3moy}^*$	$\delta\varepsilon_{In3moy}^*$
$\mathcal{M}_{T1}$	-0.0024	-0.0002	0.0017	0.	0.0002	0.
$\mathcal{M}_{T2}$	-0.0020	0.0003	0.0012	0.	-0.0001	0.
$\mathcal{M}_{T3}$	-0.0020	0.0006	0.0009	0.	0.	0.
$\mathcal{M}_{T4}$	-0.0022	0.0007	0.0009	0.	-0.0001	0.
$\mathcal{M}_{T5}$	-0.0022	0.0007	0.0009	0.	0.0001	0.
$\mathcal{M}_{T6}$	-0.0022	0.0008	0.0009	0.	-0.0002	0.
$\mathcal{M}_{T7}$	-0.0022	0.0007	0.0009	0.	0.0002	0.
$\mathcal{M}_{T8}$	-0.0019	0.0006	0.0007	0.	-0.0001	0.

TABLE 4.1 – Moyennes tronquées à  $10^{-5}$  des composantes de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  au sens de Liang et al. suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  en chacun des huit cordon du mur

Cordons $\mathcal{M}_{TI}$	$\delta\varepsilon_{I_{tt}moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I_{nn}moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I_{33}moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I_{tn}moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I_{t3}moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I_{n3}moy}^*$
$\mathcal{M}_{T1}$	-0.0025	-0.0007	0.0014	0.	0.0004	-0.0002
$\mathcal{M}_{T2}$	-0.0026	0.0004	0.0008	0.	-0.0004	0.
$\mathcal{M}_{T3}$	-0.0030	0.0008	0.0007	0.	0.0006	0.
$\mathcal{M}_{T4}$	-0.0037	0.0011	0.0008	0.	-0.0008	0.
$\mathcal{M}_{T5}$	-0.0036	0.0011	0.0010	0.0001	0.0012	0.
$\mathcal{M}_{T6}$	-0.0037	0.0011	0.0011	-0.0001	-0.0012	0.
$\mathcal{M}_{T7}$	-0.0036	0.0011	0.0011	0.0001	0.0014	0.
$\mathcal{M}_{T8}$	-0.0030	0.0008	0.0007	0.	-0.0012	0.

TABLE 4.2 – Moyennes tronquées à  $10^{-5}$  près des composantes de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  au sens de Liang et al. suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  en chacun des huit cordons de l’aube

Nous observons dans la figure 4.7 et les tableaux 4.1-4.2 :

- des chutes d’ordre de grandeur, suivant la coordonnée  $X_3$ , des valeurs des composantes diagonales  $\varepsilon_{tt}^*$ ,  $\varepsilon_{nn}^*$  et  $\varepsilon_{33}^*$  de  $10^{-2}$  vers  $10^{-3}$ , surtout au niveau des extrémités des deux premiers cordons. Ces chutes sont suivies de valeurs quasi-stationnaires de même ordre de grandeur ( $10^{-3}$ ) pour les cordons suivants. Nous notons toutefois que les chutes d’ordre de grandeur au niveau des centres des cordons sont moins importantes qu’à leurs extrémités. Cependant, les valeurs aux centres sont de l’ordre de  $10^{-3}$  comme celles des extrémités des cordons supérieurs.
- Pour  $I$  croissant, de faibles variations des valeurs moyennes, lesquelles étant de l’ordre de  $10^{-3}$ , négatives pour  $\delta\varepsilon_{I_{tt}}^*$  et positives pour les autres composantes diagonales  $\delta\varepsilon_{I_{nn}}^*$  et  $\delta\varepsilon_{I_{33}}^*$  (cf 3 premières colonnes des tableaux 4.1-4.2) ;
- la composante  $\delta\varepsilon_{I_{nn}}^*$  présentant des valeurs moyennes faibles mais non négligeables par rapport à celles de  $\delta\varepsilon_{I_{tt}}^*$  et  $\delta\varepsilon_{I_{33}}^*$  ;
- la composante de cisaillement  $\delta\varepsilon_{I_{t3}}^*$  ayant des valeurs moyennes positives pour les cordons impairs et négatives pour ceux impairs, et contrairement à celles de  $\delta\varepsilon_{I_{tn}}^*$  et  $\varepsilon_{I_{n3}}^*$ , sont non négligeables par rapport à celles des composantes diagonales.

Nous notons que l’ordre de grandeur de  $10^{-3}$  des valeurs moyennes des composantes diagonales de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  ne correspond pas à l’ordre de grandeur de  $10^{-2}$  des valeurs moyennes calculées par Liang et al. sur le mur de cinq couches construit sur un substrat également encastré par le bas, présenté au chapitre 1 (figure 1.23). En effet ces valeurs moyennes sont données par :  $\delta\varepsilon_{I_{tt}moy}^* = -0.013$ ,  $\delta\varepsilon_{I_{nn}moy}^* = -0.003$  et  $\delta\varepsilon_{I_{33}moy}^* = 0.012$ . Cette grande différence peut être liée à l’intégration de l’érouissage et de la visco-plasticité dans la loi de comportement adoptée dans notre modèle standard.

Ces valeurs d'inherent strain ayant été obtenues, nous nous intéressons maintenant, comme annoncé, à la simulation du dépôt de ces huit cordons en appliquant la méthode inherent strain. Cette simulation consiste donc en huit résolutions non linéaires, avec à chaque fois ajout d'un cordon entier et prise en compte du tenseur inherent strain incrémental  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  extrait de  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}^*$ .

Les figures 4.8-4.12 nous présentent les distorsions  $\underline{u}_{I=8}$  et les contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_{I=8}$  résiduelles du mur et de l'aube, obtenues par nos propres simulations pour le calcul complet (modèle standard) et d'autre part pour le calcul inherent strain (méthode inherent strain).

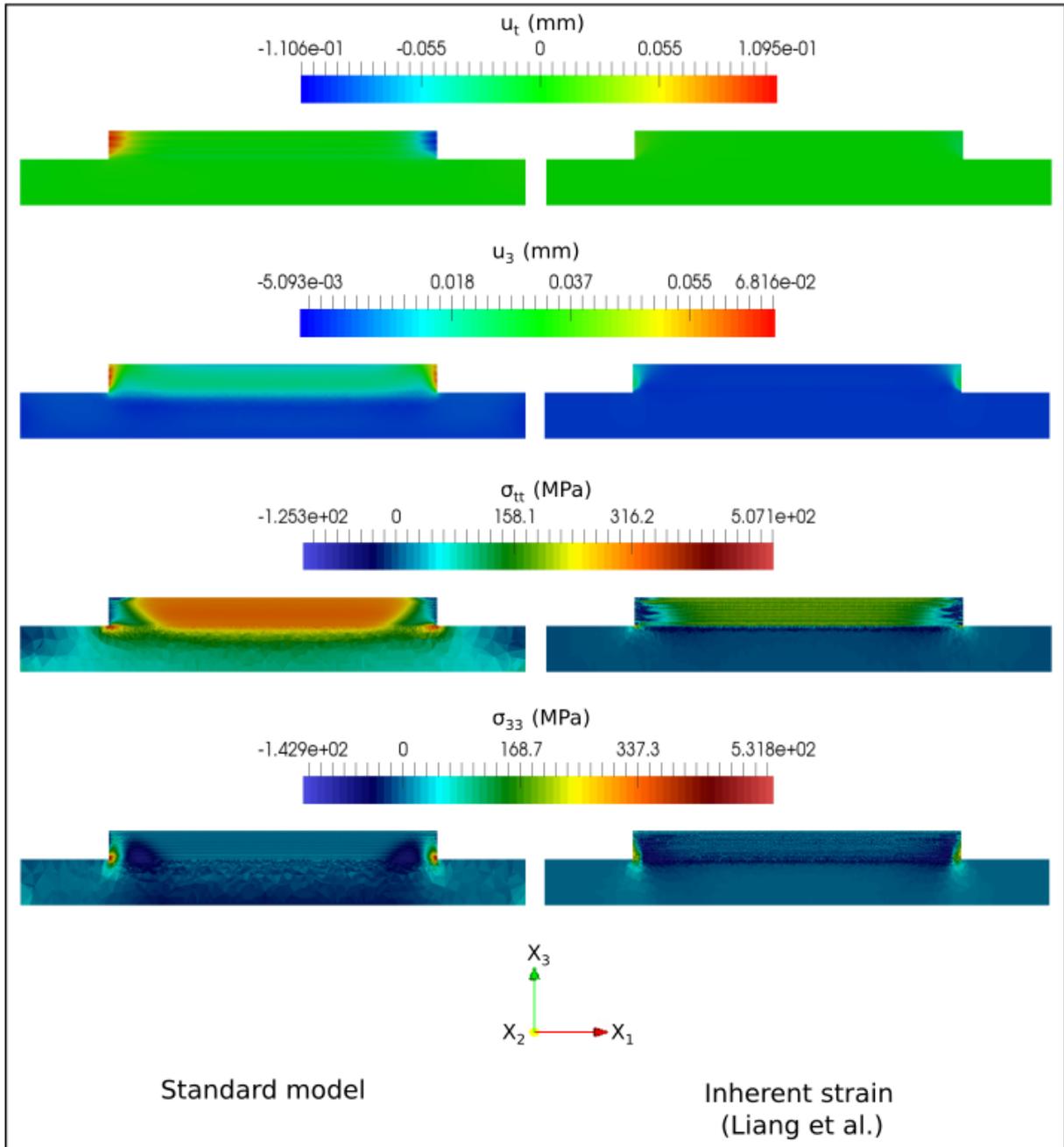


FIGURE 4.8 – Test de validation de la méthode inherent strain selon Liang et al : Champs de distorsions  $\underline{u}_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles du mur de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

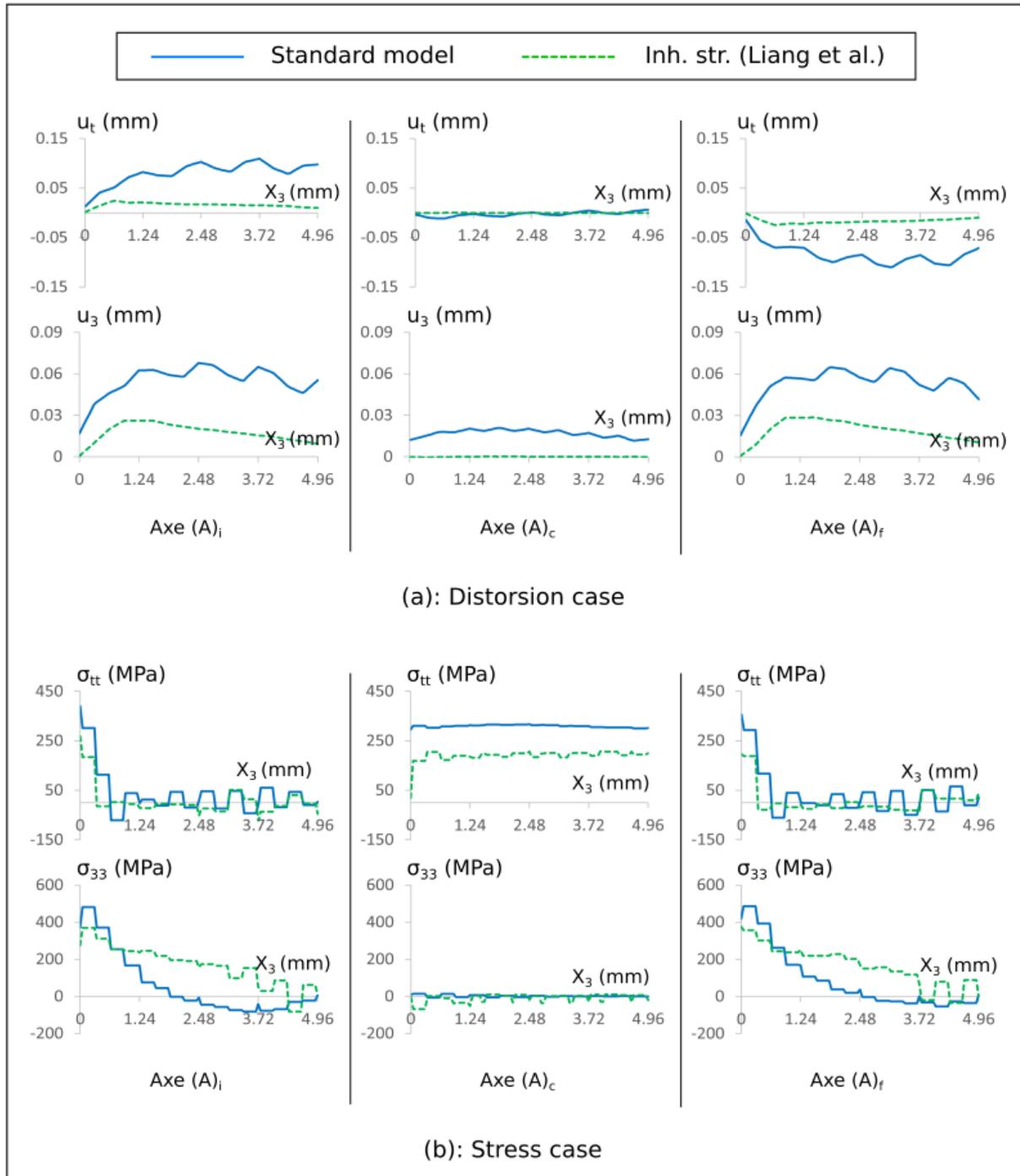


FIGURE 4.9 – Test de validation de la méthode inherent strain selon Liang et al : Profils de distorsions  $\underline{u}_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur de huit cordons.

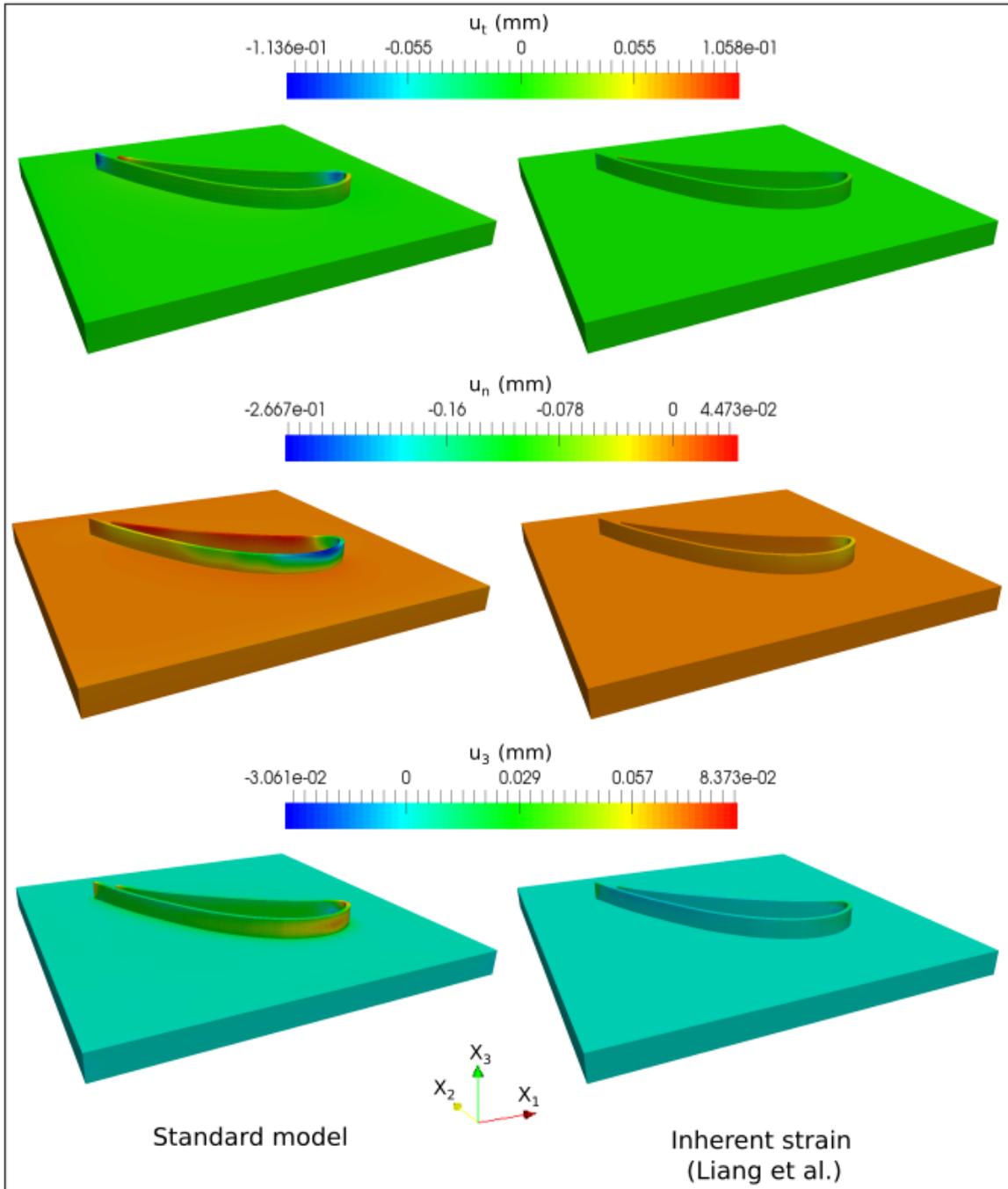


FIGURE 4.10 – Test de validation de la méthode inherent strain selon Liang et al : Champs de distorsions  $\underline{u}_{I=8}$  résiduelles de l'aube de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

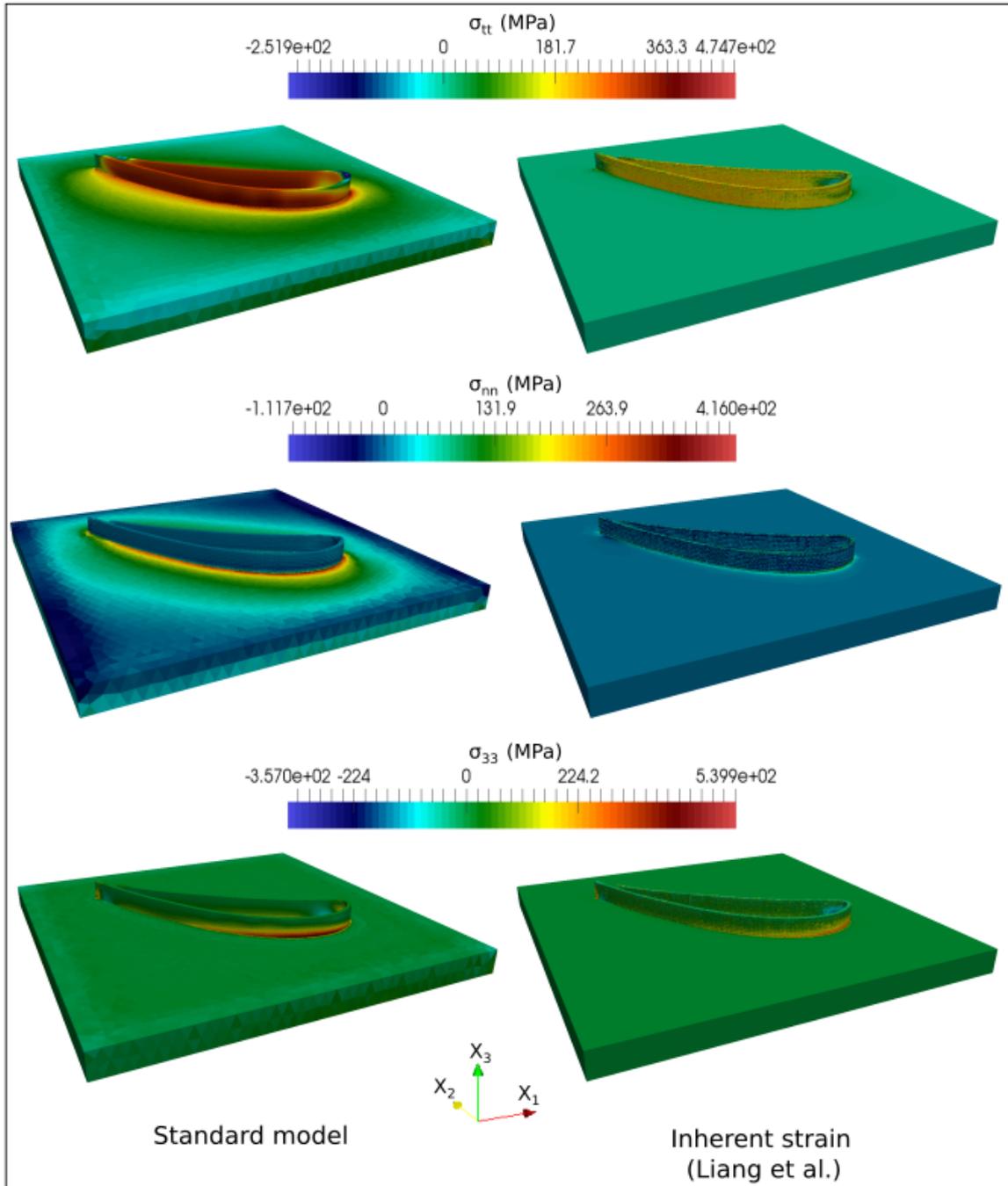


FIGURE 4.11 – Test de validation de la méthode inherent strain selon Liang et al : Champs de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles de l'aube de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

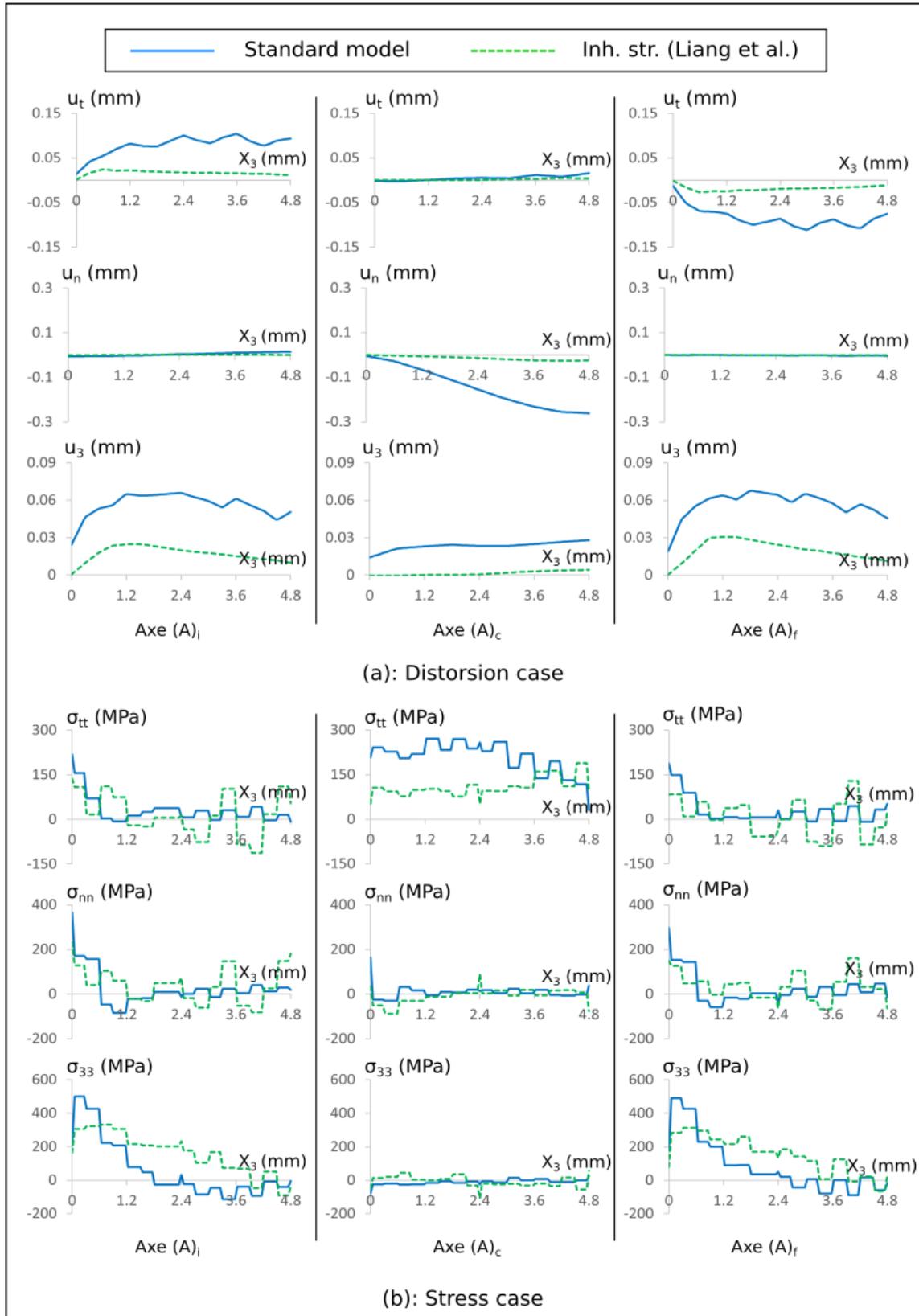


FIGURE 4.12 – Test de validation de la méthode inherent strain selon Liang et al : Profils de distorsions  $u_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube de huit cordons.

Nous observons dans ces figures :

- les distorsions résiduelles du calcul inherent strain de très faibles ordre de grandeur par rapport à celles du calcul standard ; cela est contraire aux résultats bibliographique de Liang et al. présentés au chapitre 1 dans la figure 1.25. Cette différence est très certainement liée à celle constatée ci-dessus des ordres de grandeur des inherent strain.
- les contraintes résiduelles du calcul inherent strain de même ordre de grandeur et approchant plus ou moins bien les contraintes résiduelles du calcul complet.

En conclusion, l'approche de Liang et al. ne permet pas de reproduire les distorsions et contraintes résiduelles issues du calcul complet.

## 4.2.2 Nouvelle méthode proposée

### 4.2.3 Définition

La nouvelle méthode de calcul des champs inherent strain incrémentaux  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, N$  que nous proposons repose sur un principe d'analyse inverse. En effet, il s'agit pour chaque  $I = 1, \dots, N$  :

- d'effectuer les calculs des champs de distorsions  $\underline{u}_I$  et contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_I$  résiduelles par le modèle standard ;
- de déterminer le champ inherent strain incrémental  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  de manière à ce que les champs  $\delta\underline{u}_I$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}_{I-1}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_I$  vérifient la loi de comportement non linéaire décrite dans la section précédente.

En effet, en ce qui concerne la trace  $tr\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ , la linéarité de l'équation de la pression  $p_I$  nous permet de la calculer par l'expression :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_{I-1,I}, \quad tr\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*(\underline{x}) = \nabla \cdot \delta\underline{u}_I(\underline{x}) + \frac{\delta p_I}{\chi(T_\infty)}(\underline{x}) \quad (4.20)$$

En revanche, en ce qui concerne la composante déviatorique  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ , il a été montré dans la section précédente que les champs  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I$  et donc  $\underline{\underline{s}}_I$  sont, en chaque point  $\underline{x} \in \Omega_{I-1,I}$ , des fonctions non linéaires de la différence  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ , soit les formulations  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*)$  et  $\underline{\underline{s}}_I = f(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*)$ . Ainsi, le calcul de  $\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$  se fera par la résolution, en chacun des points  $\underline{x} \in \Omega_{I-1,I}$  de l'équation non linéaire locale :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{s}}_I(\underline{x}) &= f\left(\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*\right)(\underline{x})\right) \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{s}}_I(\underline{x}) &= \left(1 - h_s\left(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I\left(\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*\right)(\underline{x})\right)\right)\right) \left(\underline{\underline{s}}_{I-1}(\underline{x}) + 2\mu(T_\infty)\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*\right)(\underline{x})\right) \\ &\quad + h_s\left(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I\left(\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*\right)(\underline{x})\right)\right) \tilde{\underline{\underline{X}}}_{I-1}^p\left(\delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I\left(\left(\underline{\underline{\varepsilon}}(\delta\underline{u}_I) - \delta\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*\right)(\underline{x})\right)\right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

L'application de l'algorithme de Newton-Raphson en chaque point  $\underline{x} \in \Omega_{I-1,I}$  nous permet de calculer très approximativement le tenseur  $\delta \underline{e}_I^*(\underline{x})$ . En effet, cet algorithme consiste à déterminer de façon récurrente, pour tout  $\underline{x} \in \Omega_{I-1,I}$ , la suite de tenseur  $\left(\delta \underline{e}_I^{*(k)}(\underline{x})\right)_{k \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $\delta \underline{e}_I^*(\underline{x})$ .  $\delta \underline{e}_I^{*(k+1)}(\underline{x})$  se calcule à partir de  $\delta \underline{e}_I^{*(k)}(\underline{x})$  par :

$$\begin{aligned} \delta \underline{e}_I^{*(k+1)}(\underline{x}) &= \delta \underline{e}_I^{*(k)}(\underline{x}) - \left( \frac{d \underline{s}_I^k}{d \delta \underline{e}_I^*} \right)^{-1} \left( \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{e}_I^{*(k)}(\underline{x}) \right) : \left( \underline{s}_I^k - \underline{s}_I \right)(\underline{x}) \right) \\ \underline{s}_I^k(\underline{x}) &= f \left( \left( \underline{e}(\delta \underline{u}_I) - \delta \underline{e}_I^{*(k)}(\underline{x}) \right)(\underline{x}) \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Dans le cadre de la méthode des éléments finis, le champ  $\delta \underline{e}_I^*$  est approché par un champ tensoriel  $P_0$  calculé en chaque centre des différents tétraèdres du maillage.

### Test de validation sur une construction de quelques cordons

Tout comme pour la méthode de Liang, nous nous limitons également, pour valider la méthode proposée, aux huit premiers cordons du mur et de l'aube. Sont présentés ci-dessous pour chacune de ces deux structures :

- une distribution des composantes diagonales de chaque champ inherent strain incrémental  $\delta \underline{e}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$ , suivant la base locale  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  (figures 4.13-4.14), le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  ;
- un tableau de valeurs moyennes (tables 4.3-4.4), obtenues au sein de chaque cordon respectif  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I = 1, \dots, 8$ , des composantes des champs incrémentaux  $\delta \underline{e}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$  suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$ , suivant la formule 4.19.

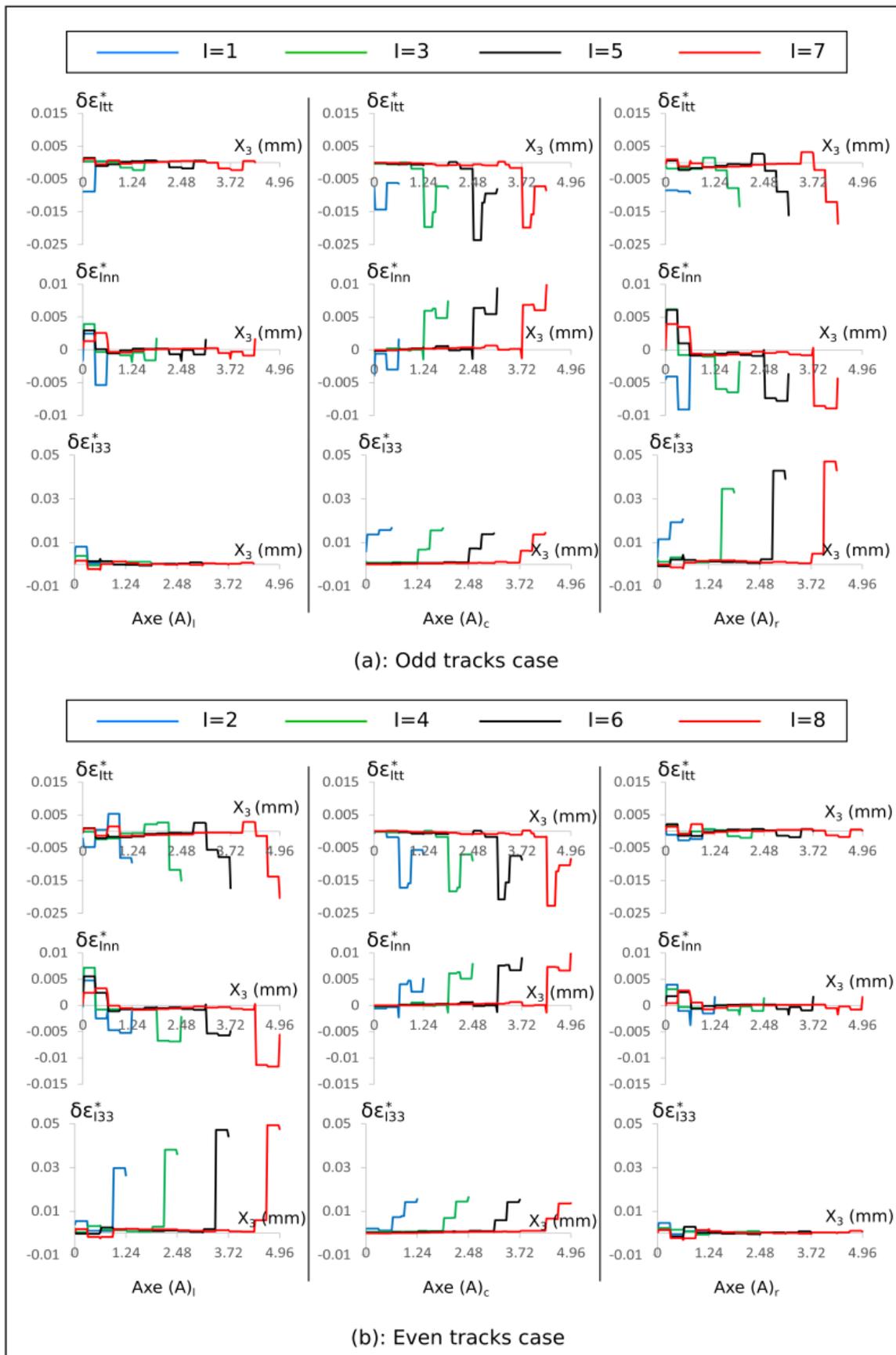


FIGURE 4.13 – Profils des composantes  $\delta\epsilon_{itt}^*$ ,  $\delta\epsilon_{inn}^*$  et  $\delta\epsilon_{i33}^*$  de  $\delta\epsilon_{\underline{i}}^*$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_r$  du mur de huit cordons : (a) pour  $I$  impair ; (b) pour  $I$  pair.

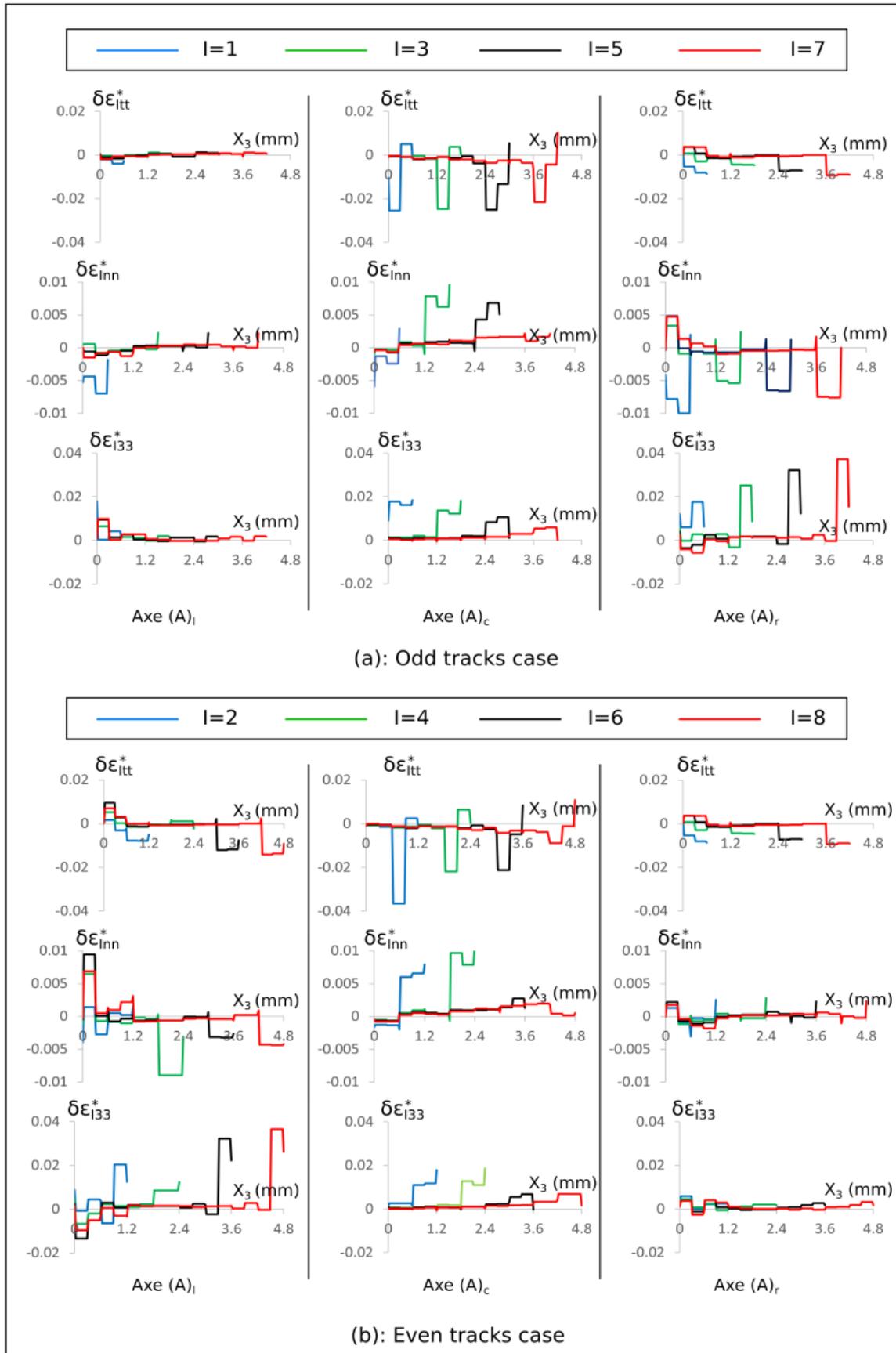


FIGURE 4.14 – Profils des composantes  $\delta\varepsilon_{itt}^*$ ,  $\delta\varepsilon_{inn}^*$  et  $\delta\varepsilon_{i33}^*$  de  $\delta\varepsilon_{\underline{I}}^*$  tracés le long des axes ( $A_i$ ), ( $A_c$ ) et ( $A_r$ ) de l'aube de huit cordons : (a) pour  $I$  impair ; (b) pour  $I$  pair.

Cordons $\mathcal{M}_{TI}$	$\delta\varepsilon_{I1tmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I2nmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I33moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I4tmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I53moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I63moy}^*$
$\mathcal{M}_{T1}$	-0.0126	-0.0007	0.01270	0.	-0.0081	0.
$\mathcal{M}_{T2}$	-0.0144	0.0046	0.0093	0.	0.0079	0.
$\mathcal{M}_{T3}$	-0.0152	0.0058	0.0090	0.	-0.0079	0.
$\mathcal{M}_{T4}$	-0.0153	0.0063	0.0085	0.	0.0081	0.
$\mathcal{M}_{T5}$	-0.0151	0.0067	0.0079	0.	-0.0081	0.
$\mathcal{M}_{T6}$	-0.0148	0.0067	0.0074	0.	0.0089	-0.0001
$\mathcal{M}_{T7}$	-0.0144	0.0067	0.0072	0.	-0.0089	0.
$\mathcal{M}_{T8}$	-0.0141	0.0068	0.0068	0.	0.0092	0.

 TABLE 4.3 – Moyennes tronquées à  $10^{-5}$  des composantes de  $\delta\underline{\varepsilon}_I^*$  suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  en chacun des huit cordons du mur

Cordons $\mathcal{M}_{TI}$	$\delta\varepsilon_{I1tmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I2nmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I33moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I4tmoy}^*$	$\delta\varepsilon_{I53moy}^*$	$\delta\varepsilon_{I63moy}^*$
$\mathcal{M}_{T1}$	-0.0134	-0.0024	0.0144	0.	-0.0062	-0.0003
$\mathcal{M}_{T2}$	-0.0151	0.0051	0.0087	-0.0002	0.0054	-0.0004
$\mathcal{M}_{T3}$	-0.0160	0.0067	0.0082	0.	-0.0051	-0.0006
$\mathcal{M}_{T4}$	-0.0160	0.0072	0.0071	-0.0002	0.0058	-0.0007
$\mathcal{M}_{T5}$	-0.0157	0.0075	0.0069	0.	-0.0061	-0.001
$\mathcal{M}_{T6}$	-0.0149	0.0072	0.0063	-0.0002	0.0063	-0.0012
$\mathcal{M}_{T7}$	-0.0143	0.0071	0.0058	0.	-0.0069	-0.0015
$\mathcal{M}_{T8}$	-0.0135	0.0068	0.0053	-0.0002	0.0071	-0.0019

 TABLE 4.4 – Moyennes tronquées à  $10^{-5}$  des composantes de  $\delta\underline{\varepsilon}_I^*$  suivant  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  en chacun des huit cordons de l'aube

Pour le mur, nous observons dans la figure 4.13, une forte concentration des valeurs des champs  $\delta\underline{\varepsilon}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$  au sein des cordons respectifs  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I = 1, \dots, 8$ . Les profils des courbes de valeurs respectives se transportent plus ou moins d'un cordon à un autre de même parité. Nous observons également, pour chaque cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ , un fort accroissement des amplitudes de variations de ces valeurs à son extrémité finale correspondant à  $s = 0$  pour  $I$  impair, et  $s = L_T$  pour  $I$  pair. Pour l'aube, dans la figure 4.14, nous observons pratiquement les mêmes phénomènes de concentration de valeurs et d'accroissement d'amplitudes aux extrémités finales. Néanmoins, les profils des courbes de valeurs des champs  $\delta\underline{\varepsilon}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$  ne montrent le même phénomène de reproduction de profil d'un cordon à l'autre qu'au niveau des extrémités de la dite structure (axes  $(A)_i$  et  $(A)_f$ ). Ceci en raison de la courbure importante de l'aube. Pour les deux structures, nous observons dans les deux tableaux 4.3-4.4 le même comportement des valeurs moyennes que pour la méthode précédente, les ordres de grandeurs étant toutefois plus importants ( $10^{-2}$ ).

Pour le mur et l'aube, les tests de validation consistent à effectuer le même travail que pour la méthode précédente, en appliquant cette fois les huit champs inherent strain incrémentaux  $\underline{\sigma}_I, I = 1, \dots, 8$  issus de la nouvelle méthode proposée. Ce faisant, nous obtenons les champs de distortions  $\underline{u}_{I=8}$  et les contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles du mur et de l'aube représentés dans les figures 4.15-4.19.

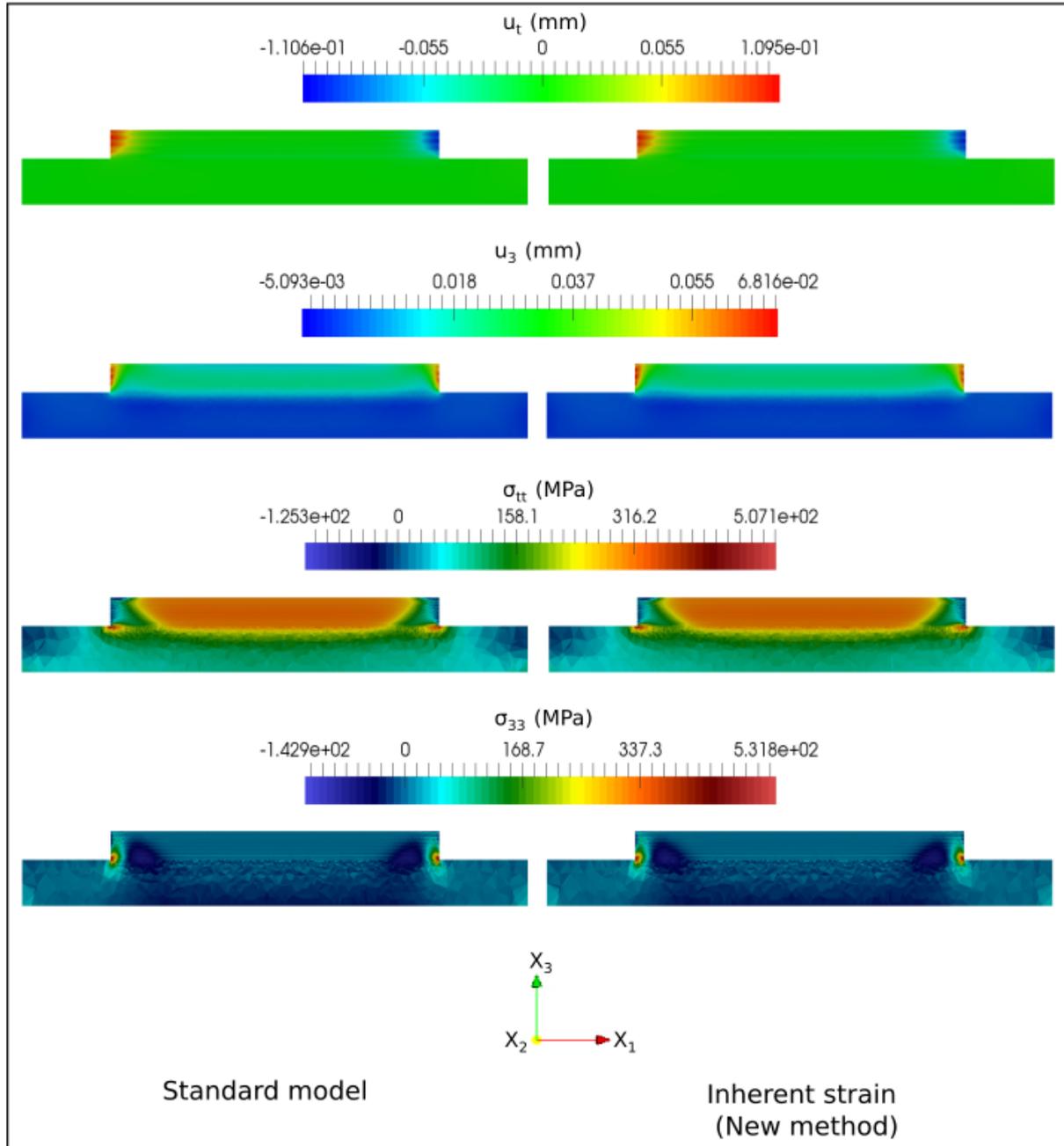


FIGURE 4.15 – Test de validation de la nouvelle méthode inherent strain proposée : Champs de distortions  $\underline{u}_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles du mur de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

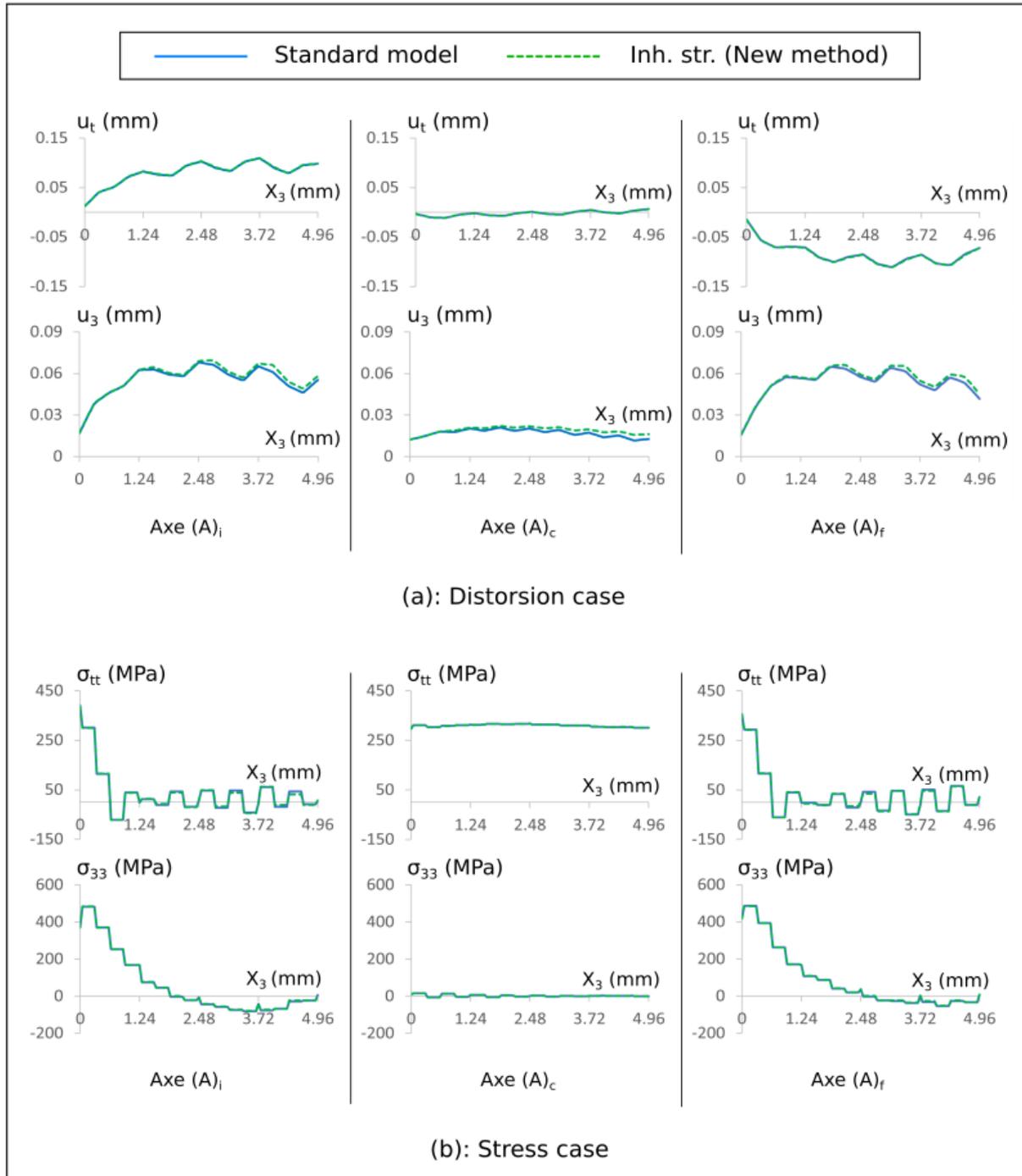


FIGURE 4.16 – Test de validation de la nouvelle méthode inherent strain proposée : Profils de distorsions  $\underline{u}_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur de huit cordons.

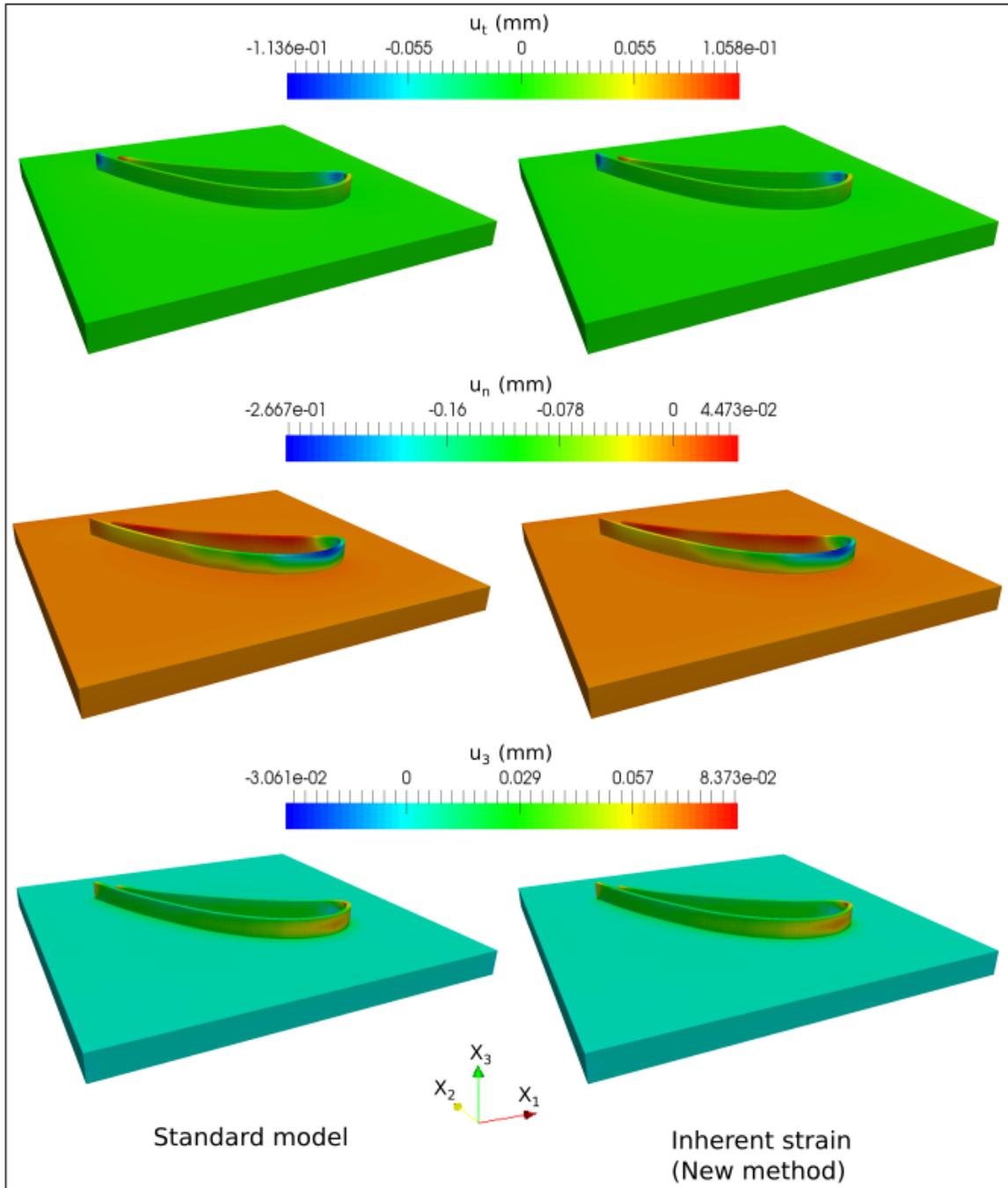


FIGURE 4.17 – Test de validation de la nouvelle méthode inherent strain proposée : Champs de distorsions  $u_{I=8}$  résiduelles de l’aube de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

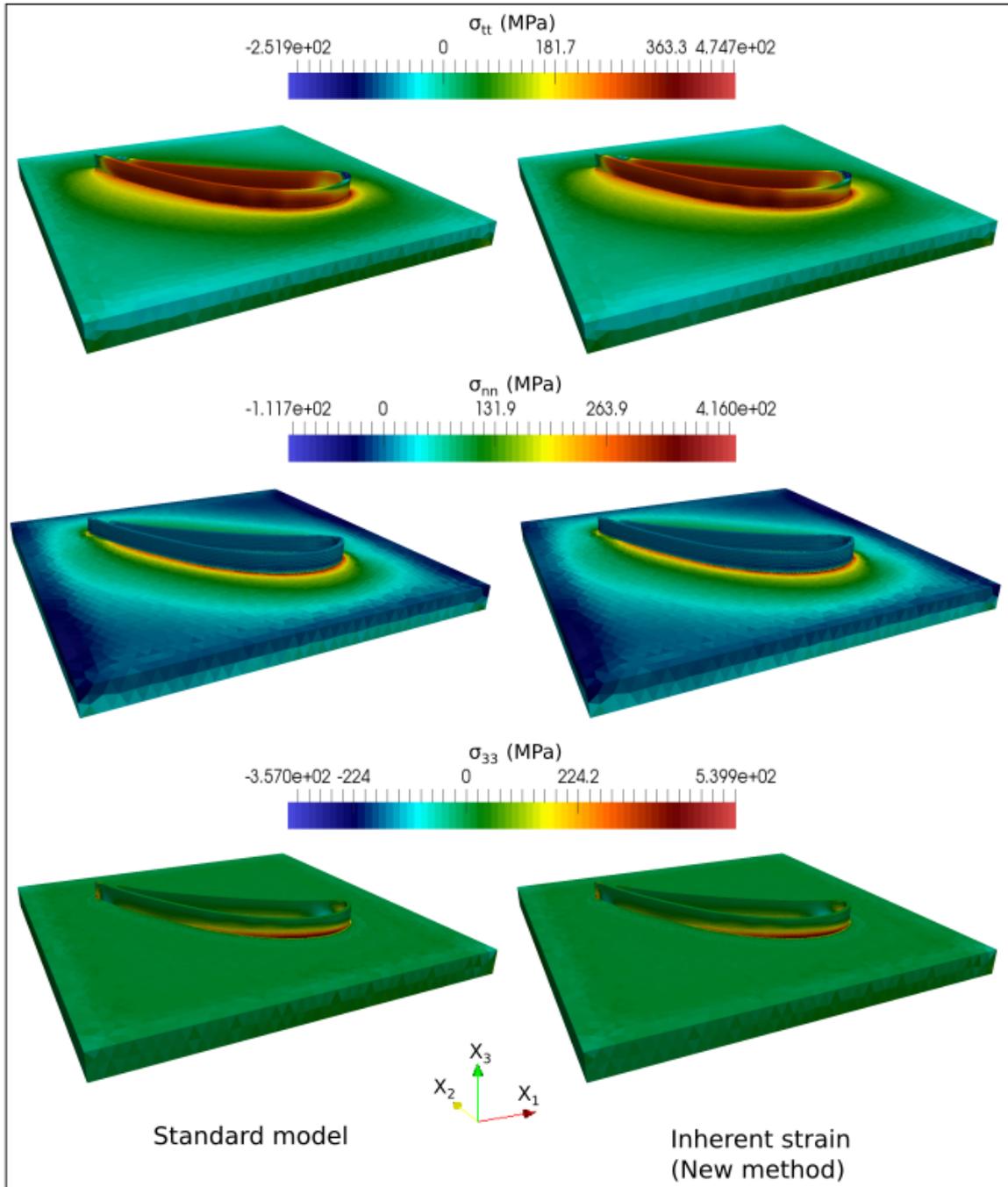


FIGURE 4.18 – Test de validation de la nouvelle méthode inherent strain proposée : Champs de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles de l’aube de huit cordons. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain.

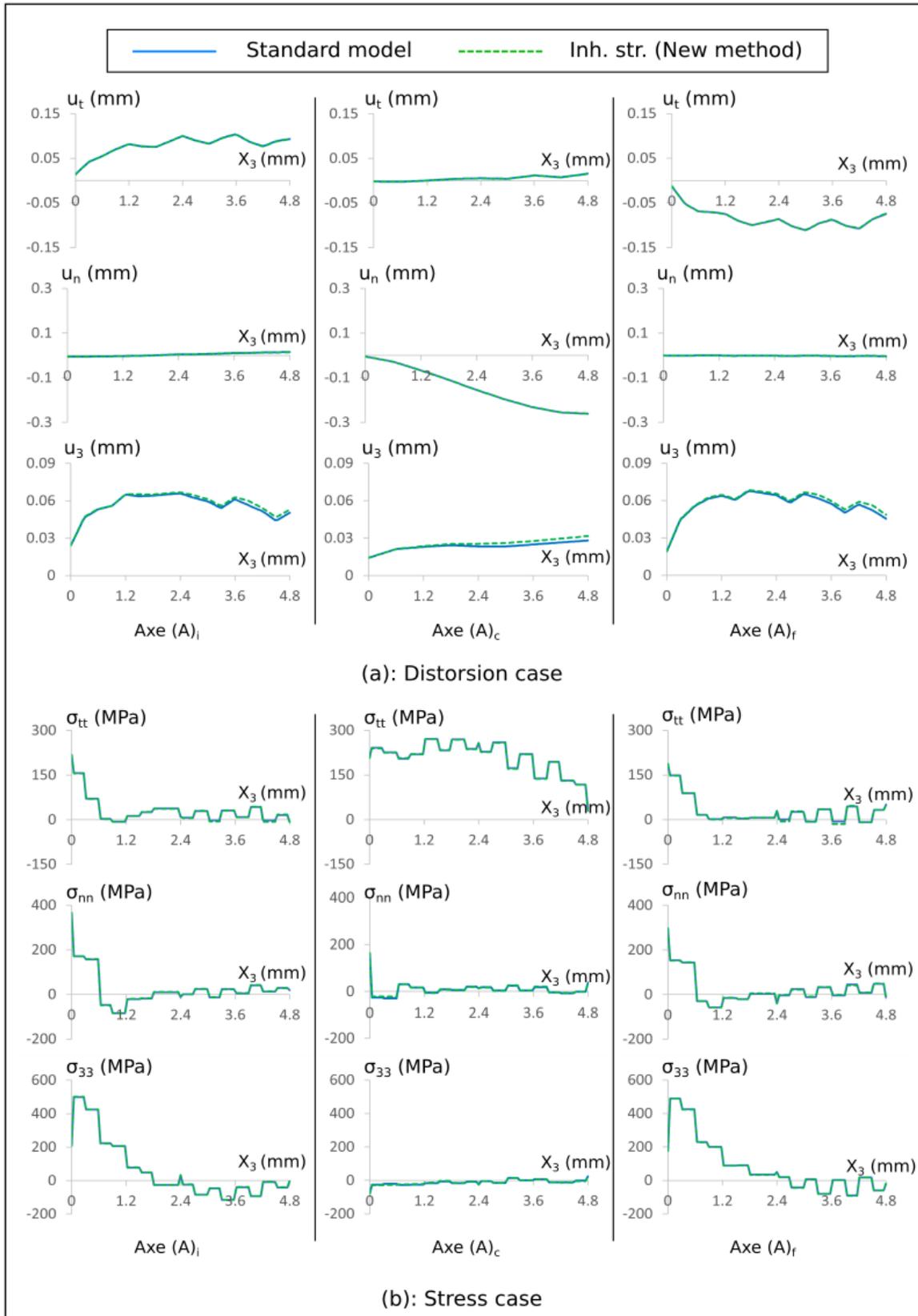


FIGURE 4.19 – Test de validation de la nouvelle méthode inherent strain proposée : Profils de distorsions  $u_{I=8}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_{I=8}$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube de huit cordons.

Nous observons cette fois un excellent accord entre les résultats du modèle standard et ceux de la nouvelle méthode proposée. Ceci révèle donc un meilleur comportement de cette dernière, nettement supérieur à celui de la méthode proposée par Liang et al.. Suite à ce résultat très encourageant au termes de première validation, l'application de cette nouvelle méthode va donc être l'objet de la suite de ce chapitre.

## 4.3 Méthodes d'estimation et applications

Il a été montré dans la section précédente que la nouvelle méthode inherent strain que nous proposons se révèle très prometteuse avec une très bonne réponse sur le test de validation à l'échelle réduite de quelques cordons. Dans le cadre d'une application de la méthode inherent strain à des constructions comportant un plus grand nombre de cordons/couches, notre objectif est bien évidemment de minimiser autant que possible le recours au calcul complet standard. Ainsi, il est donc impératif de pouvoir calculer approximativement les champs inherent strain incrémentaux sans y avoir pleinement recours. Deux méthodes sont présentées et appliquées dans cette section, à savoir : le calcul de moyenne et le transport de profil.

### 4.3.1 Le calcul de moyenne

#### Description

Cette méthode s'inspire de celle de Liang et al. [44], présentée dans le chapitre 1, dans laquelle il est question d'effectuer une simulation détaillée au moyen du modèle standard sur une pièce de faibles dimensions par rapport la pièce d'application visée, puis d'en déduire le champ inherent strain de base, et enfin d'appliquer sa moyenne à chaque cordon de la pièce d'application. La pièce de faibles dimensions, objet de la simulation détaillée, ne fait en général pas partie intégrante de la pièce d'application visée. Mais dans le cadre de cette nouvelle méthode, nous définissons cette pièce à partir des  $N_l$  premiers cordons du mur et de l'aube. Il a en effet été montré dans la section précédente, par les tableaux 4.3-4.4, que les valeurs moyennes des composantes des champs incrémentaux  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, 8$ , pour les cordons suffisamment éloignés du substrat, variaient légèrement avec la coordonnée  $X_3$ , et que le signe de la valeur moyenne de la composante tangentielle  $\delta \varepsilon_{I3}^*$  s'alternait avec l'augmentation unitaire de l'indice  $I$ . La méthode d'estimation par le calcul de moyenne consiste donc à :

- Pour les  $N_l$  premiers cordons, que nous appellerons cordons d'apprentissage (l pour learning), calculer par le modèle standard les champs de distorsions  $\underline{u}_I$ ,  $I = 1, \dots, N_l$  et contraintes  $\underline{\sigma}_I$ ,  $I = 1, \dots, N_l$  résiduelles ;
- calculer les champs inherent strain incrémentaux  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, N_l$  ainsi que les

variables d'état d'écroissage interne  $\bar{\varepsilon}_I, I = 1, \dots, N_l$  et  $\underline{\alpha}_{iI}, i = 1, \dots, N_c, I = 1, \dots, N_l$ ;

- moyenner les composantes des champs  $\delta\underline{\varepsilon}_I^* = 1, \dots, N_l$  dans la base locale  $(\underline{e}_t, \underline{e}_n, \underline{e}_3)$  au sein des cordons respectifs  $\mathcal{M}_{TI}, I = 1, \dots, N_l$ ;
- appliquer les valeurs moyennes des composantes du dernier champ  $\delta\underline{\varepsilon}_{I=N_l}^*$  aux cordons suivants en alternant à chaque fois le signe de la moyenne de la composante tangentielle  $\delta\varepsilon_{It3}^*$ ;
- appliquer la méthode inherent strain à partir de  $I = N_l + 1$  jusqu'à la fin de la construction, en n'effectuant donc plus aucun calcul complet.

### Application et résultats

Pour le mur et l'aube, nous effectuons notre application avec 4 cordons d'apprentissage, soit  $N_l = 4$ . Les figures [4.20-4.24](#) nous en donnent les résultats.

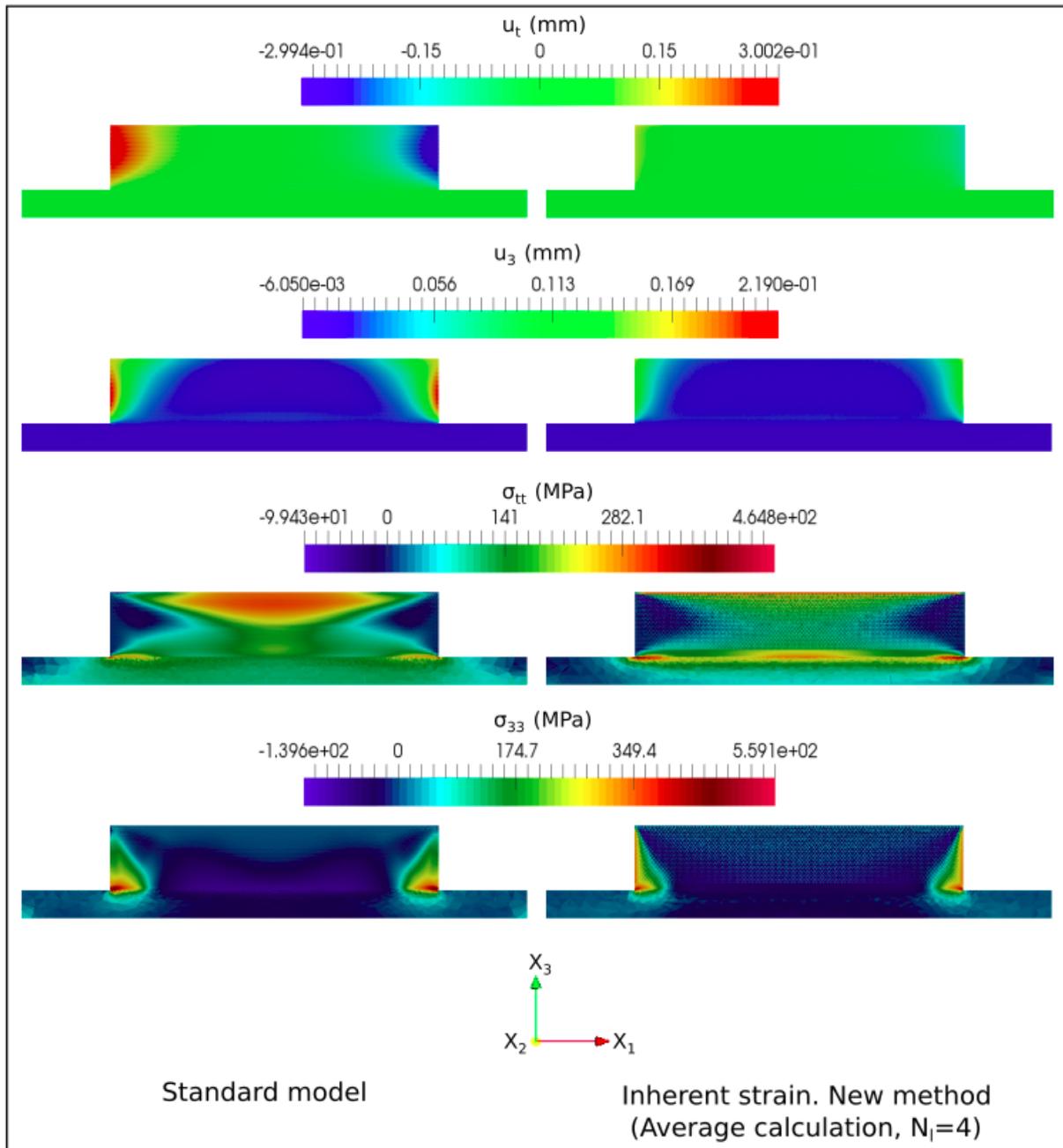


FIGURE 4.20 – Application de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles du mur. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

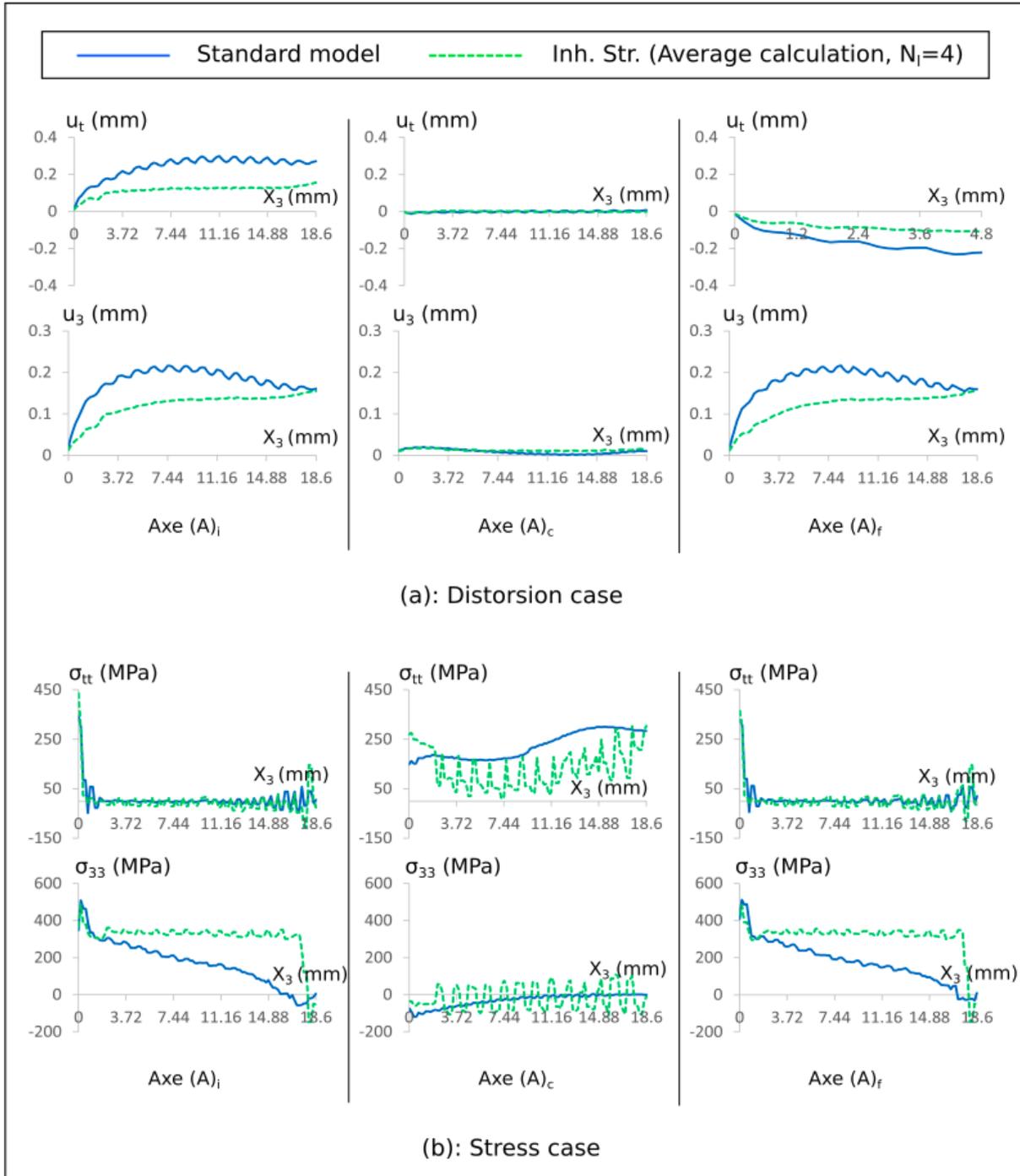


FIGURE 4.21 – Application de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne pour 4 cordons d'apprentissage : Profils de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur.

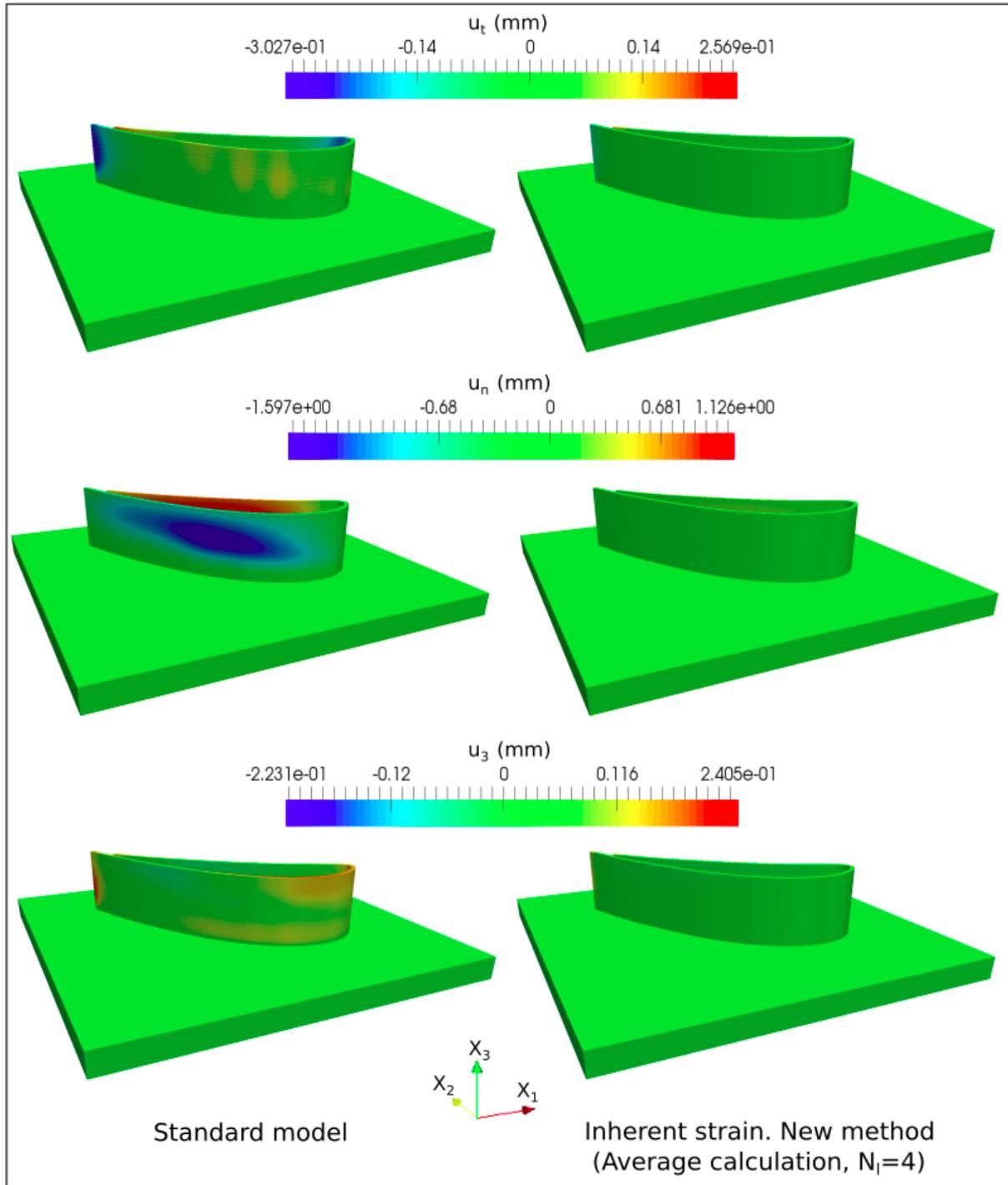


FIGURE 4.22 – Application de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de distorsions  $\underline{u}_N$  résiduelles de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

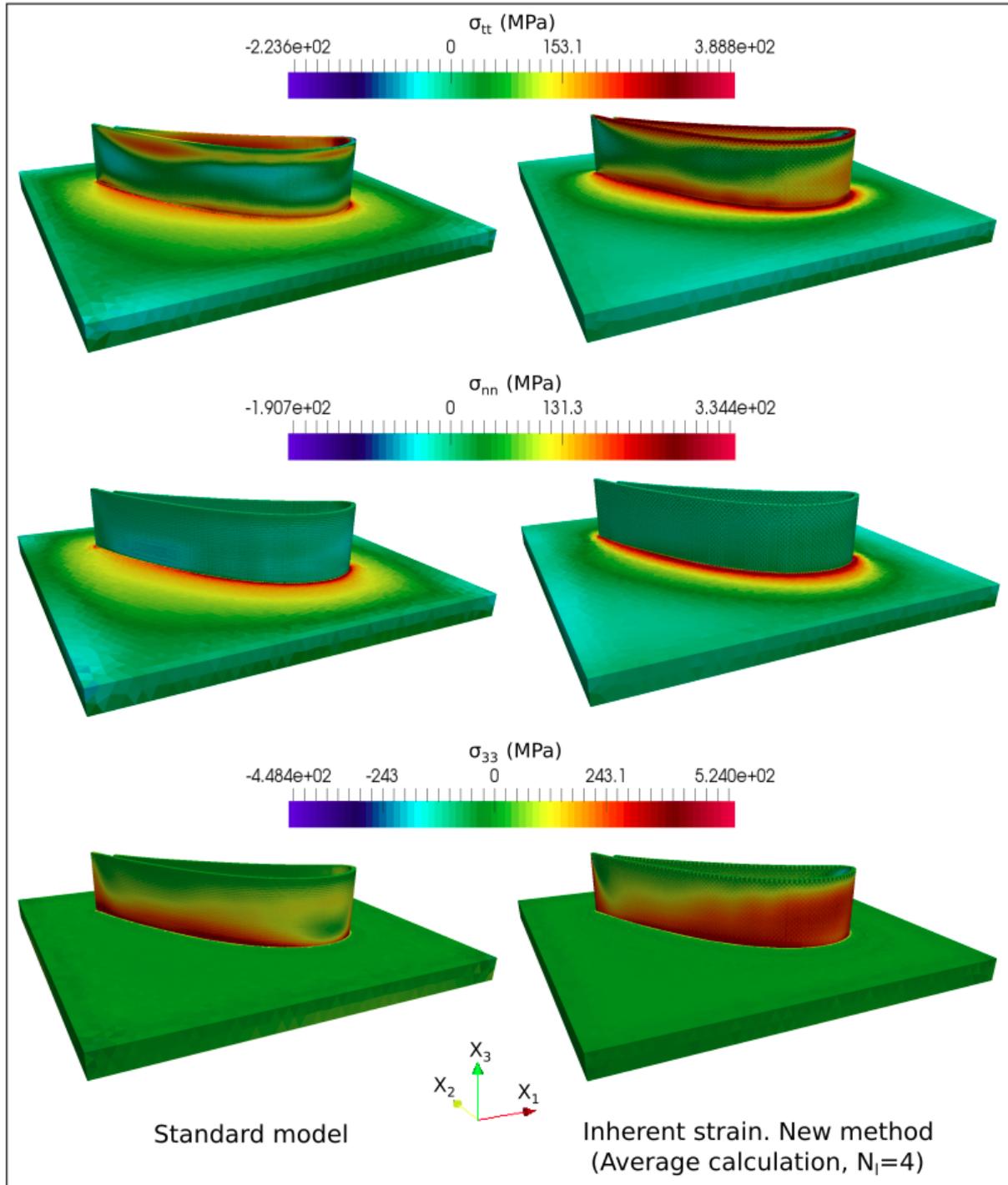


FIGURE 4.23 – Application de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_N$  résiduelles de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

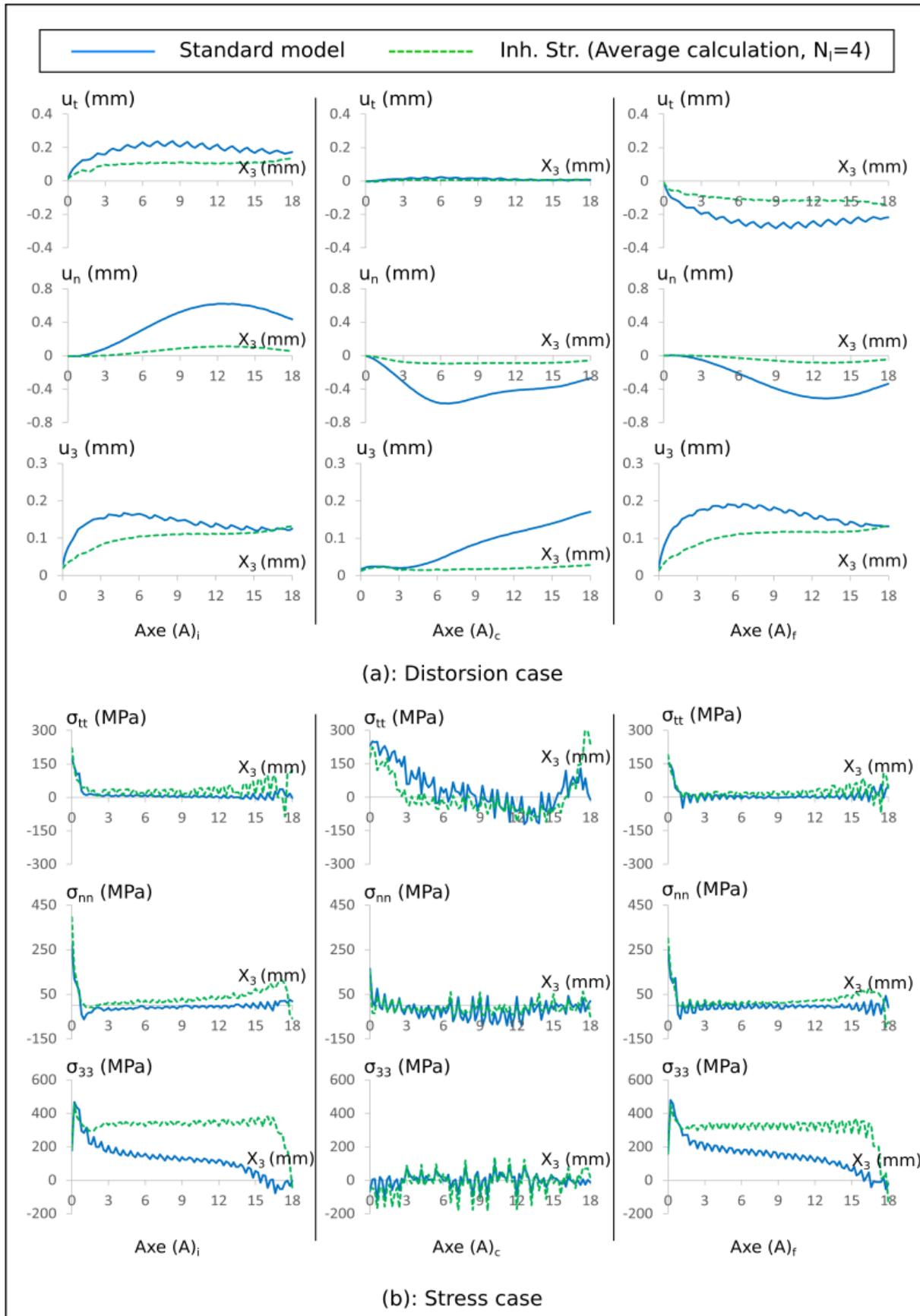


FIGURE 4.24 – Application de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne pour 4 cordons d'apprentissage : Profils de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube.

Dans ces figures, les distorsions résiduelles issues du calcul inherent strain ne présentent pas un bon accord quantitatif avec celles du modèle standard car elles sont de plus faibles amplitudes, en particulier suivant la direction normale  $e_n$  pour le cas de l'aube. Mais elles présentent toutefois un bon accord qualitatif du fait de la compression suivant la direction tangentielle  $e_t$  des cordons supérieurs et de la positivité de la distorsion suivant la direction verticale  $e_3$  des surfaces latérales du mur et de l'aube. Les contraintes résiduelles du calcul inherent strain quant à elles, sont visiblement de même ordre de grandeur que celles du calcul complet, et présentent avec celles-ci un accord quantitatif et qualitatif moyennement bon mis à part la composante  $\sigma_{33}$  au niveau des extrémités.

Par conséquent, le calcul de moyenne pour estimer  $\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*}, I = N_l + 1, \dots, N$ , se révèle inefficace dans le cadre de la méthode inherent strain, car elle ne permet pas de reproduire les distributions complexes des champs de distorsions et contraintes résiduelles. Cela s'explique par le fait que cette méthode ne prend pas en compte la complexité des distributions spatiales des champs inherent strain incrémentaux  $\delta_{\underline{\underline{\varepsilon}}_I^*}, I = 1, \dots, N$ , surtout au niveau des extrémités des cordons comme montré dans les figures 4.13-4.14. Ceci nous a encouragé à développer une approche alternative à la prise de moyenne que nous décrivons dans la section qui suit.

Pour des calculs effectués sur 32 cœurs dans une parallélisation à mémoire partagée, le tableau 4.5 nous donne les temps de calcul des applications de la méthode de calcul de moyenne et du modèle standard.

Structure	Modèle standard	Méthode IS par le calcul de moyenne	Facteur de gain en temps
Mur	131h16min	05h36min	23
Aube	133h02min	05h33min	24

TABLE 4.5 – Temps de calcul des applications de la nouvelle méthode IS par le calcul de moyenne et du modèle standard

Nous observons dans ce tableau que, pour le mur et l'aube, les durées de calcul d'application de la méthode de calcul de moyenne sont environ 20 fois moins importantes que celles du modèle standard.

### 4.3.2 Transport de profil

#### Description

Cette méthode consiste à approcher les distributions spatiales des champs inherent strain incrémentaux des cordons supérieurs, par la translation des distributions spatiales des champs inherent strain incrémentaux des premiers cordons, que sont les cordons d'apprentissage. Elle trouve son origine dans la constatation de la reproduction plus ou moins

conforme des profils des champs inherent strain incrémentaux d'un cordon à un autre de même parité. Il a en effet été démontré dans la section précédente par les graphes des figures 4.13-4.14, que ce phénomène était bien visible pour les cordons du mur et non pour l'aube en raison de l'importante courbure de celle-ci. Tout comme la précédente méthode, cette méthode nécessite de calculer, sur les  $N_l$  premiers cordons, par le modèle standard, les champs de distorsions  $\underline{u}_I, I = 1, \dots, N_l$  et des contraintes  $\underline{\sigma}_I, I = 1, \dots, N_l$  résiduelles, les champs inherent strain incrémentaux  $\delta_{\underline{\varepsilon}_{I=1, \dots, N_l}}^*$ , et les variables d'état d'écroutissage interne  $\bar{\varepsilon}_I^*, I = 1, \dots, N_l$  et  $\underline{\alpha}_{iI}, i = 1, \dots, N_c, I = 1, \dots, N_l$ . Suite à quoi, pour tout  $I > N_l$ , l'estimation du profil du champ inherent strain incrémental  $\delta_{\underline{\varepsilon}_I}^*$  s'effectue par la formule :

$$\begin{aligned}
 & \text{Pour } I - N_l \text{ pair} \\
 \forall \underline{X} \in \Omega_{I0}, \delta_{\underline{\varepsilon}_I}^*(\Phi_{I-1}(\underline{X})) &= \begin{cases} \delta_{\underline{\varepsilon}_{N_l}}^*(\Phi_{I-1}(\underline{X} - (I - N_l) * H_T e_3)) \\ \text{si } \underline{X} - (I - N_l) * H_T e_3 \in \Omega_{N_l,0} \setminus \Omega_{S0} \\ \underline{0} \text{ sinon} \end{cases} \\
 & \text{Pour } I - N_l \text{ impair} \\
 \forall \underline{X} \in \Omega_{I0}, \delta_{\underline{\varepsilon}_I}^*(\Phi_{I-1}(\underline{X})) &= \begin{cases} \delta_{\underline{\varepsilon}_{N_l-1}}^*(\Phi_{I-1}(\underline{X} - (I - N_l + 1) * H_T e_3)) \\ \text{si } \underline{X} - (I - N_l + 1) * H_T e_3 \in \Omega_{N_l-1,0} \setminus \Omega_{S0} \\ \underline{0} \text{ sinon} \end{cases}
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Avec  $\Omega_{N_l-1,0}$  et  $\Omega_{N_l,0}$  désignant respectivement les configurations CAO des systèmes  $\mathcal{M}_{N_l-1}$  et  $\mathcal{M}_{N_l}$  (voir figures 4.1-4.2).

La figure 4.25 ci-dessous nous donne un exemple d'estimation des champs incrémentaux de transport  $\delta_{\underline{\varepsilon}_{19}}^*$  et  $\delta_{\underline{\varepsilon}_{20}}^*$  par transport de profil des champs respectifs  $\delta_{\underline{\varepsilon}_3}^*$  et  $\delta_{\underline{\varepsilon}_4}^*$  dans le cas du mur.

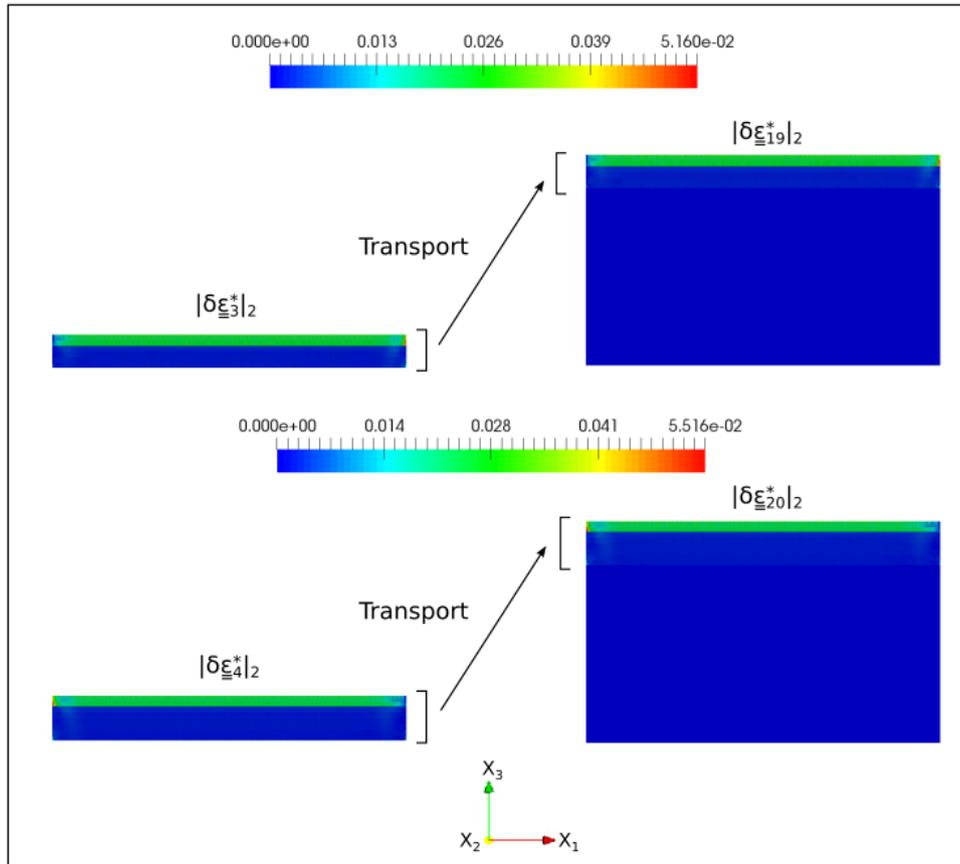


FIGURE 4.25 – Estimation des champs incrémentaux  $\delta_{\underline{\xi}_{19}}^*$  et  $\delta_{\underline{\xi}_{20}}^*$  par transport de profil des champs respectifs  $\delta_{\underline{\xi}_3}^*$  et  $\delta_{\underline{\xi}_4}^*$  dans le cas du mur

### Application

Pour le mur et l'aube, nous effectuons à nouveau notre application avec 4 cordons d'apprentissage, soit  $N_l = 4$ . Les figures 4.26-4.30 nous en donnent les résultats.

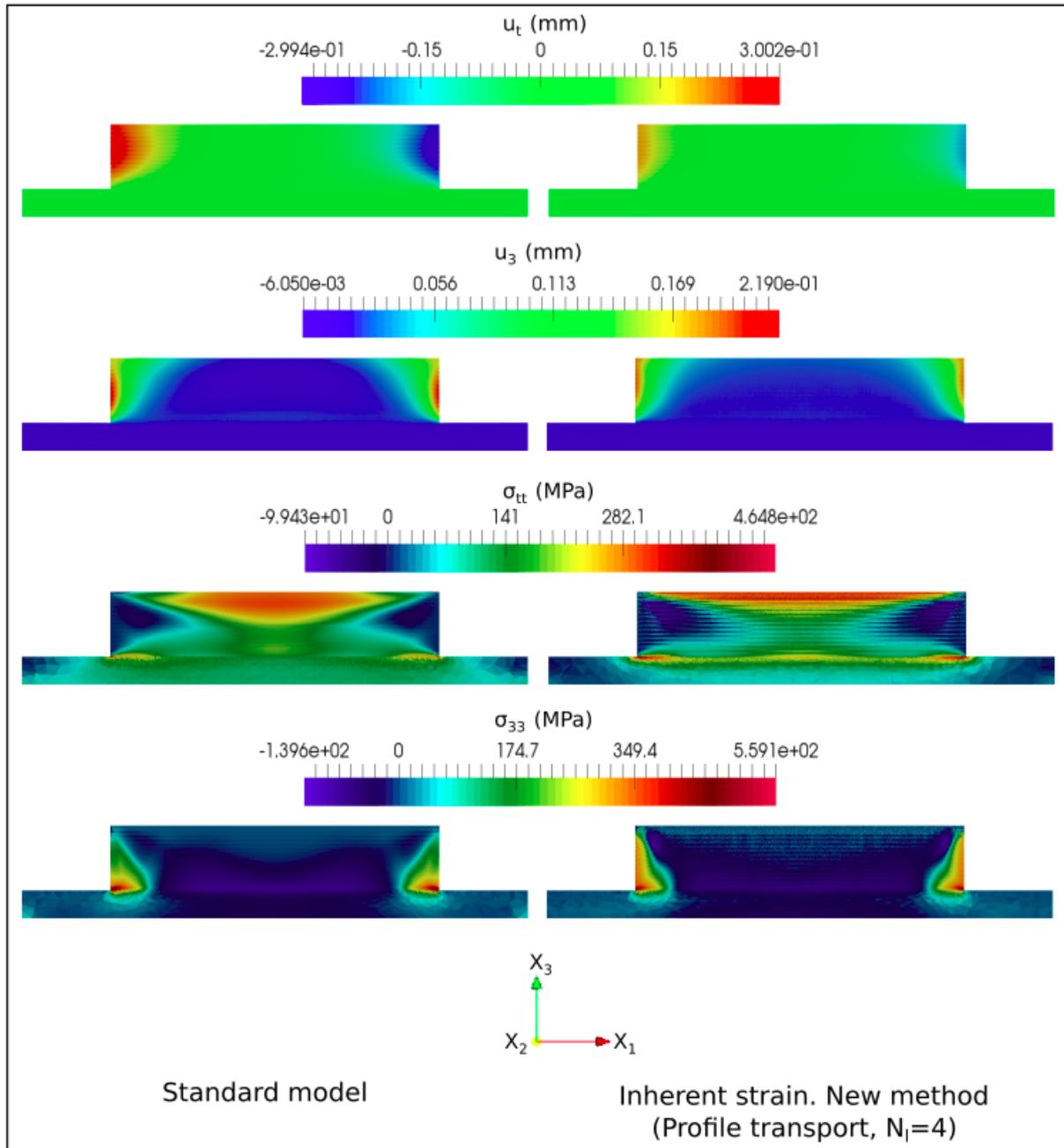


FIGURE 4.26 – Application de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles du mur. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

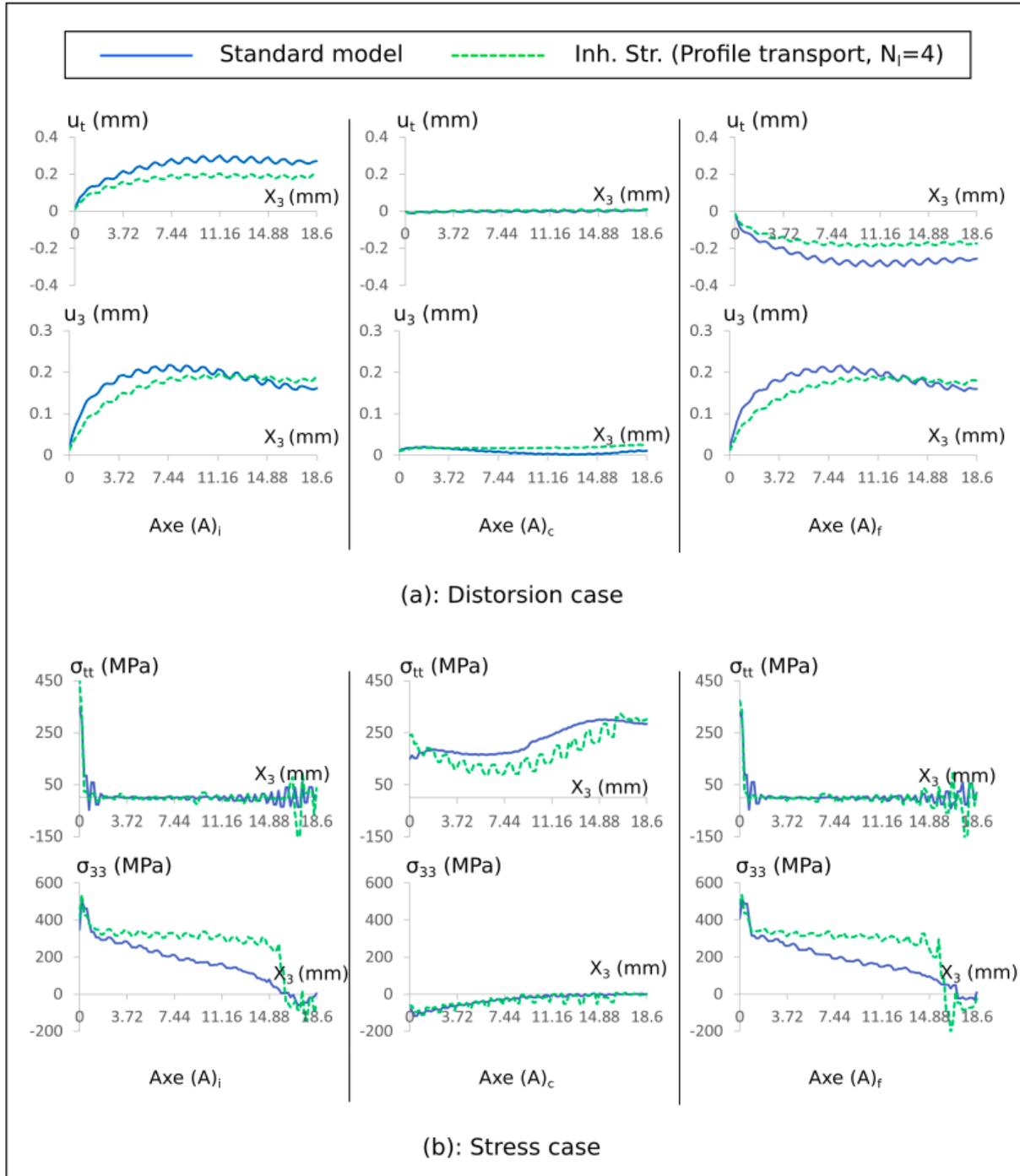


FIGURE 4.27 – Application de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage : Profils de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur.

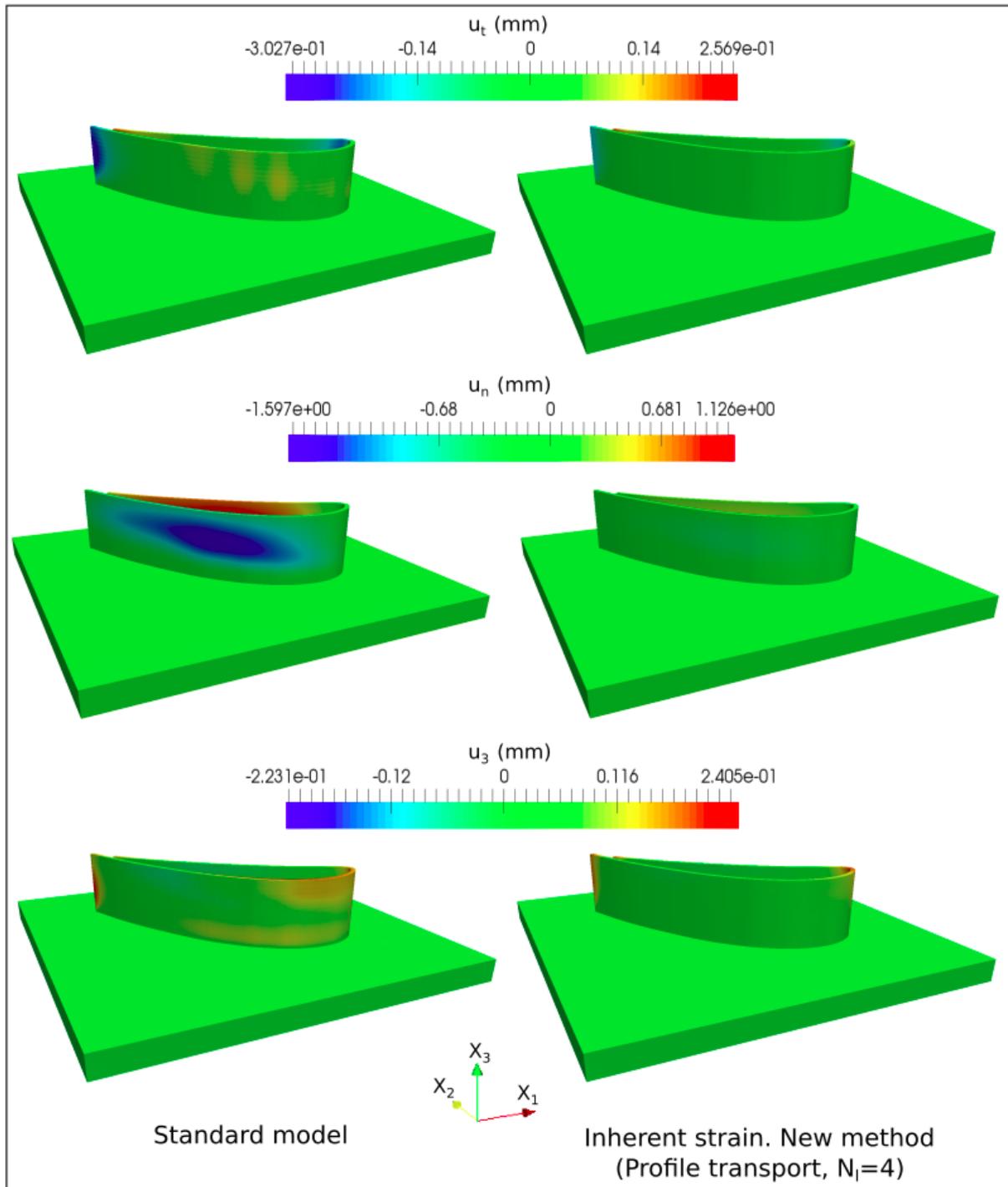


FIGURE 4.28 – Application de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de distorsions  $\underline{u}_N$  résiduelles de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

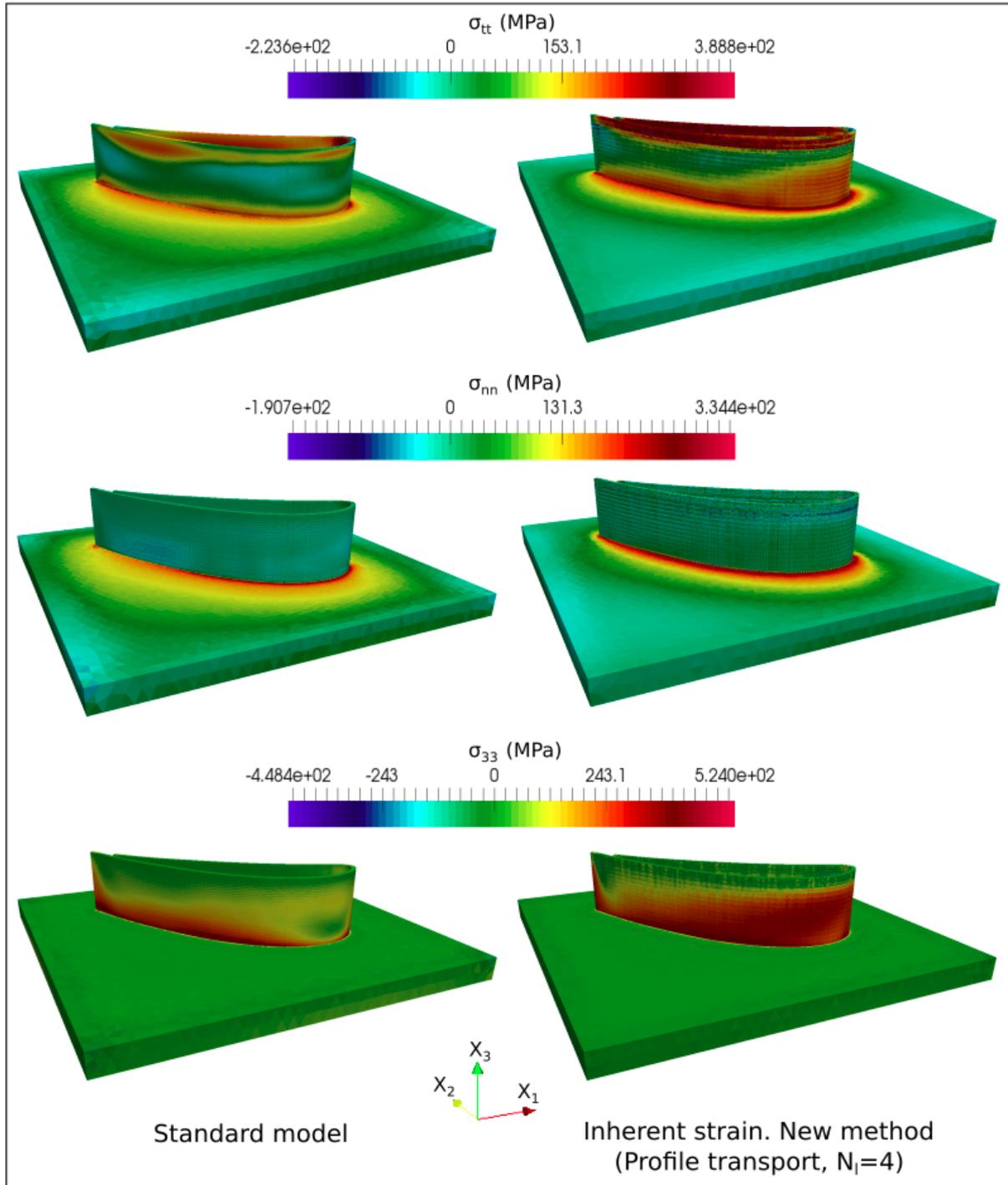


FIGURE 4.29 – Application de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage : Champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_N$  résiduelles de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la nouvelle méthode IS.

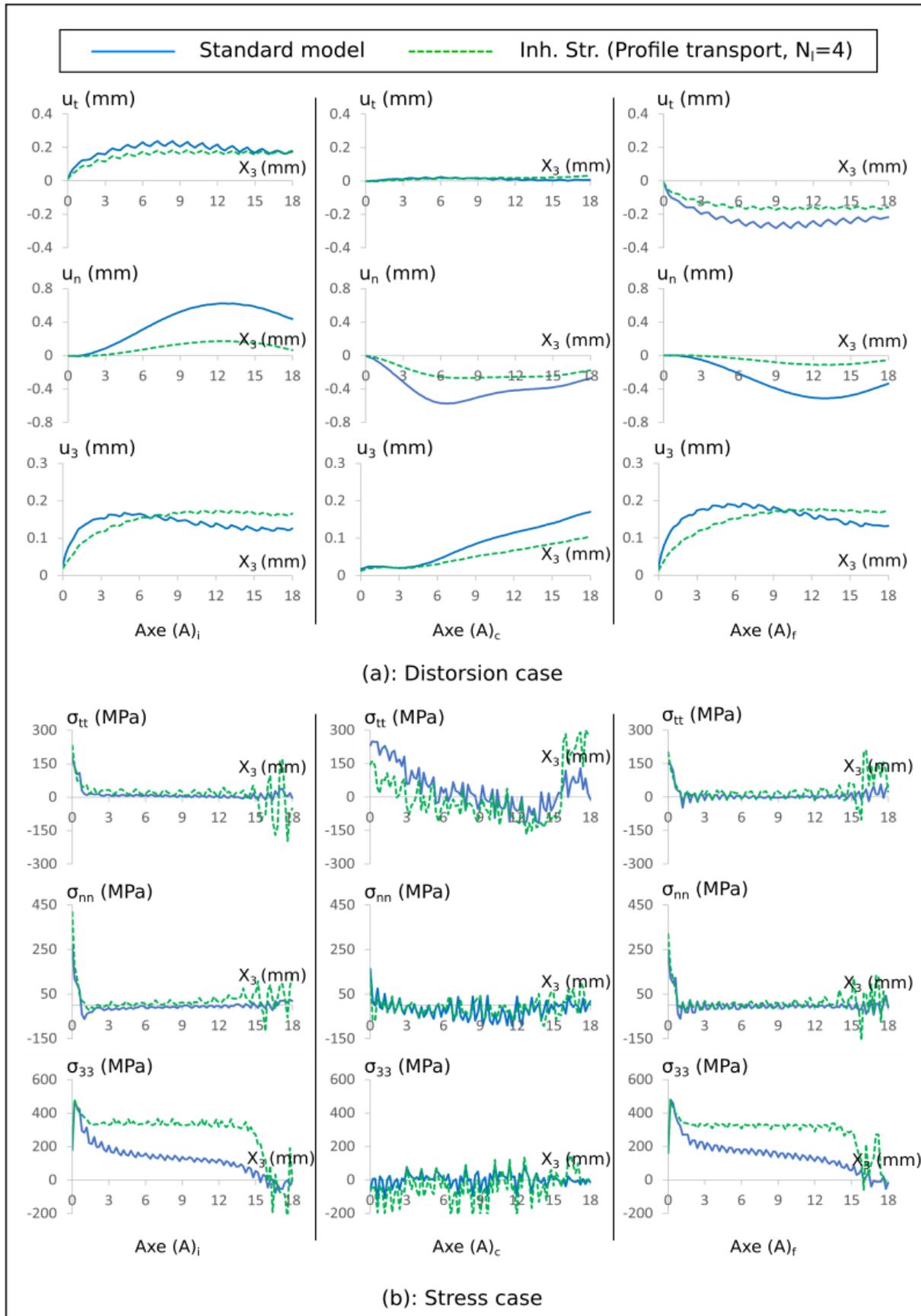


FIGURE 4.30 – Application de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage : Profils de distorsions  $\underline{u}_N$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_N$  résiduelles tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube.

Dans ces figures, les distorsions résiduelles issues du calcul inherent strain présentent un bon accord avec celles du calcul complet suivant les directions  $\underline{e}_t$  et  $\underline{e}_3$ , contrairement aux distorsions suivant la direction  $\underline{e}_n$  qui présentent de faibles valeurs par rapport à celles issues du calcul complet, dans le cas de l'aube. Les contraintes résiduelles du calcul inherent strain quant à elles présentent dans l'ensemble un bon accord avec celles du calcul complet, mis à part la contrainte  $\sigma_{33}$ , pour laquelle on observe encore un écart important entre les résultats des deux calculs.

Par conséquent, le transport de profil ne se révèle efficace que pour les géométries simples ne présentant pas de courbure, car le profil des champs inherent strain incrémentaux  $\underline{\underline{\epsilon}}_I^*$ ,  $I = 1, \dots, N$ , ne se reproduit pas d'un cordon à un autre de même parité dans les zones d'importante courbure, comme montré dans les figures 4.13-4.14.

Pour un calcul effectué sur 32 coeurs dans une parallélisation à mémoire partagée, les durées d'exécution des calculs complet et inherent strain sont données dans le tableau 4.6.

Structure	Modèle standard	Méthode IS par le transport de profil	Facteur de gain en temps
Mur	131h16min	07h00min	19
Aube	133h02min	07h22min	18

TABLE 4.6 – Temps de calcul des applications de la nouvelle méthode IS par le transport de profil pour 4 cordons d'apprentissage, et du modèle standard

Nous observons dans ce tableau 4.6 que, pour le mur et l'aube, les durées de calcul d'application de la méthode de transport de profil sont environ 20 fois moins importantes que celles du modèle standard bien que légèrement supérieures à celles de la précédente application.

## Conclusion

Ce chapitre avait pour objet d'améliorer la méthode inherent strain élastoplastique existante appliquée au procédé DED, par un meilleur calcul du champ inherent strain, et ensuite de l'appliquer aux calculs de distorsions et contraintes résiduelles du mur et de l'aube. Pour ce faire, nous avons tout d'abord présenté en détail le principe de cette méthode et les différentes méthodes de calcul exact : la méthode de Liang et al. [44] basée sur l'état dit intermédiaire au cours du chauffage et l'état stable au refroidissement à la température, et la nouvelle méthode proposée basée sur un principe d'analyse inverse impliquant la résolution d'une équation non linéaire en chaque point du domaine. L'étude de validation de ces deux méthodes a mis en évidence les insuffisances de la méthode inherent strain de Liang et al. et révélé un meilleur comportement et un potentiel intéressant pour

la nouvelle méthode proposée. Nous avons ensuite présenté et appliqué deux méthodes d'estimation du champ inherent strain incrémental : le calcul de moyenne visant à estimer et à appliquer la moyenne du champ inherent incrémental à chaque cordon à leur dépôt et le transport de profil visant à reproduire la distribution spatiale du champ inherent strain incrémental par le biais de la translation. Le calcul de moyenne n'a montré d'efficacité que sur l'estimation des contraintes résiduelles. Son inaptitude à bien approcher la distorsion résiduelle est liée à sa non prise en compte de la complexité de la distribution spatiale du champ inherent strain incrémental exact. Par contre, le transport de profil, en plus de l'estimation des contraintes résiduelles, s'est révélé plus efficace dans l'estimation des distorsions résiduelles, mis à part son incapacité à donner une bonne estimation de la distorsion suivant la normale de l'aube. Au total, la méthode inherent strain, en dépit des améliorations que nous lui avons apportée n'est donc pas très adaptée aux géométries complexes, car les profils des champs inherent strain incrémentaux des cordons d'apprentissage ne correspondent pas aux profils de ceux des cordons supérieurs. L'actualisation de l'apprentissage se révèle donc indispensable pour le transport de profil. Dans le chapitre suivant, une méthode de réduction de complexité intégrant le facteur temps et le principe d'apprentissage actualisé est développée.

# Chapitre 5

## Méthode inherent strain rate

La méthode inherent strain rate (ISr) est une méthode de réduction de complexité du modèle standard présenté au chapitre 2 de ce rapport. Cette méthode apparaît comme la version temporelle de la méthode inherent strain présentée au chapitre précédent. Elle consiste en effet en des calculs approximatifs des distorsions et contraintes des pièces tout le long de leur fabrication par le procédé DED comme dans le calcul complet. Mais contrairement à ce dernier, ces calculs sont entièrement linéarisés par le biais de l'application d'un champ approximatif  $\dot{\epsilon}^*$  de la vitesse de déformation plastique cumulée  $\dot{\epsilon}$  comme donnée du problème mécanique à résoudre.

Par rapport à la méthode inherent strain, cette méthode, pour la pièce à fabriquer, est plus coûteuse en temps et en calculs car on suit le déplacement de la source d'énergie et de matière et on simule l'étape de refroidissement, au lieu de procéder couche par couche ou cordon par cordon selon une simulation isotherme à température ambiante. Ainsi, de par son principe, la méthode présente les potentiels avantages suivants :

- la prédiction de la distorsion tout au long du procédé permettant ainsi de définir un meilleur trajet de la source de chaleur et de l'apport de matière en les adaptant à la réelle configuration géométrique de la pièce en cours ;
- la prédiction des contraintes mécaniques permettant potentiellement d'éviter la rupture et l'endommagement pendant la construction de la pièce.

Ce chapitre a donc pour objet de présenter le principe de la méthode inherent strain rate, ses origines, la méthode d'estimation du champ approximatif  $\dot{\epsilon}^*$ , les applications de cette méthode sur différentes géométries (le mur et l'aube), et enfin d'évaluer et de discuter de son efficacité.

### Contents

---

<b>5.1 Principe de la méthode</b> . . . . .	<b>202</b>
5.1.1 Linéarisation de la loi de comportement thermomécanique . . . . .	202
5.1.2 Formulation théorique du problème mécanique linéarisé . . . . .	203

5.1.3	Formulation numérique du problème mécanique linéarisé . . . . .	204
<b>5.2</b>	<b>Origines de la méthode . . . . .</b>	<b>205</b>
5.2.1	Filtrage et moyenne de la vitesse de déformation plastique cumulée	206
5.2.2	Étude de l'évolution de la vitesse de déformation filtrée . . . . .	207
<b>5.3</b>	<b>Méthodes d'estimation de la vitesse de déformation plas-</b>	
	<b>tique cumulée et applications . . . . .</b>	<b>211</b>
5.3.1	Méthodes d'estimation . . . . .	211
5.3.2	Applications . . . . .	212

## 5.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode inherent strain rate repose essentiellement sur la linéarisation de la loi de comportement thermomécanique à laquelle obéit le système  $\mathcal{M}_t$  et la résolution du problème mécanique devenu linéaire, appelé problème mécanique inherent strain rate, qui en découle.

### 5.1.1 Linéarisation de la loi de comportement thermomécanique

Elle porte sur la forme discrétisée de la loi de comportement thermomécanique présentée au chapitre 2 dans l'ensemble d'équations 2.74. Il a, en effet, été montré qu'en cas de plasticité, la contrainte déviatorique  $\underline{s}_{\tau,t}$ , du fait de la dépendance non linéaire de  $\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}$  par rapport au tenseur taux de déformation  $\dot{\underline{\underline{v}}}_{\tau,t}$ , était une fonction non linéaire de ce tenseur. La linéarisation de la loi de comportement mécanique consiste à linéariser la dépendance de  $\underline{s}_{\tau,t}$  par rapport à  $\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}$  en appliquant une grandeur approximative  $\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$  de  $\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}$  à la place de cette dernière. Ainsi, partant de l'ensemble d'équations 2.77, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{\tau,t}, \\ \underline{s}_{\tau,t} = (1 - h_s^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)) \underline{s}_{\tau,t}^p + h_s^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*) \underline{\underline{X}}_{\tau}(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*), \\ h_s^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*) := \frac{2\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt \dot{\lambda}^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)}{1 + 2(\mu(T_{\tau,t}^u) + h_X(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)) \theta dt \dot{\lambda}^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)}, \quad \dot{\lambda}^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*) := \frac{3\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*}{2\bar{\sigma}_{\tau,t}^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)} \\ \bar{\sigma}_{\tau,t}^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*) := \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) + R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau} + ((1 - \theta)\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau} + \theta\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*) dt) \\ \quad + \sqrt{3}^{m(T_{\tau,t}^u)+1} K_{vp}(T_{\tau,t}^u) \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^{m(T_{\tau,t}^u)} \\ \Rightarrow \frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\dot{\underline{\underline{v}}}_{\tau,t}} = 2\mu(T_{\tau,t}^u) \theta dt (1 - h_s^*(\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*)) \underline{\underline{J}} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

En absence d'écrouissage cinématique, c'est-à-dire pour  $C_i(T^u) = 0, i = 1, \dots, N_c$ , nous obtenons les simplifications :

$$\begin{aligned} \underline{s}_{\tau,t} &= \frac{\underline{s}_{\tau,t}^p}{1 + 2\mu \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt \dot{\lambda}^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right)} \\ \Rightarrow \frac{d\underline{s}_{\tau,t}}{d\underline{\dot{\varepsilon}}_{\tau,t}} &= \frac{2\mu \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt}{1 + 2\mu \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt \dot{\lambda}^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right)} \underline{J} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Cette linéarisation est également valable dans le cas du comportement élastique dans la mesure où lorsque  $\dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$  est nul,  $\underline{s}_{\tau,t}$  est égal à  $\underline{s}_{\tau,t}^p$ . Il nous est donc à présent possible de formuler le problème mécanique linéaire qui en découle.

### 5.1.2 Formulation théorique du problème mécanique linéarisé

Le problème mécanique  $(\mathcal{P}_{M\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , dans le cadre de la méthode inherent strain rate, se formule en deux étapes comme suit :

— Étape 1 : Calcul du champ  $\underline{v}_{\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3$  et  $p_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t})$

$$\left( \mathcal{P}_{M\tau,t}^{(1)} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{v}_{\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3 \text{ et } p_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t}), \text{ vérifiant :} \\ \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ \nabla \cdot \underline{s}_{\tau,t}^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) - \nabla p_{\tau,t} = \underline{0} \\ -\nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} - \frac{p_{\tau,t}}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} = -\frac{p_{\tau} + (1-\theta) \dot{p}_{\tau} dt}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} - 3\alpha \left( T_{\tau,t} \right) \dot{T}_{\tau,t} \\ \underline{s}_{\tau,t}^* = \left( 1 - h_s^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \right) \underline{s}_{\tau,t}^p + h_s^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \underline{\tilde{X}}_{\tau} \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \\ \text{Sur } \partial\Omega_{\tau,t} \\ \underline{v}_{\tau,t} = \underline{0} \text{ sur } \left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^u := \Phi_{\tau,t}^{-1} \left( \left( \partial\Omega_t \right)^u \right), \\ \underline{\sigma}_{\tau,t}^* \cdot \underline{n} = \underline{0} \text{ sur } \left( \partial\Omega_{\tau,t} \right)^f := \Phi_{\tau,t}^{-1} \left( \left( \partial\Omega_t \right)^f \right) \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Sous forme variationnelle,  $(\mathcal{P}_{M\tau,t}^{(1)})$  se formule comme suit :

$$\left( \mathcal{P}_{M\tau,t}^{(1)} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{v}_{\tau,t} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3 \text{ tel que } \underline{v}_{\tau,t}|_{(\partial\Omega_{\tau,t})^u} = \underline{0}, \\ \text{et } p_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t}), \text{ vérifiant :} \\ \forall \underline{w} \in \left( H^1(\Omega_{\tau,t}) \right)^3, \text{ tel que } \underline{w}|_{(\partial\Omega_{\tau,t})^u} = \underline{0}, \\ \int_{\Omega_{\tau,t}} \underline{s}_{\tau,t}^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t} \left( \underline{v}_{\tau,t} \right) \right) : \underline{e}(\underline{w}) - \int_{\Omega_{\tau,t}} p_{\tau,t} \nabla \cdot \underline{w} = 0 \\ \forall q \in L^2(\Omega_{\tau,t}), \\ - \int_{\Omega_{\tau,t}} q \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t} - \int_{\Omega_{\tau,t}} \frac{p_{\tau,t} - p_{\tau} - (1-\theta) \dot{p}_{\tau} dt}{\chi \left( T_{\tau,t}^u \right) \theta dt} q + \int_{\Omega_{\tau,t}} 3\alpha \left( T_{\tau,t} \right) \dot{T}_{\tau,t} q = 0 \\ \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ \underline{s}_{\tau,t}^* = \left( 1 - h_s^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \right) \underline{s}_{\tau,t}^p + h_s^* \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \underline{\tilde{X}}_{\tau} \left( \dot{\underline{\varepsilon}}_{\tau,t}^* \right) \end{array} \right. \quad (5.4)$$

— Étape 2 : Calculs, à partir du champ  $\underline{v}_{\tau,t}$ , des champs  $\underline{s}_{\tau,t}$ ,  $\underline{\varepsilon}_{\tau,t}^e$ ,  $\underline{\varepsilon}_{\tau,t}^{vp} \in \left( L^2(\Omega_{\tau,t}) \right)^6$  et  $\rho_{\tau,t}$ ,  $\bar{\varepsilon}_{\tau,t} \in L^2(\Omega_{\tau,t})$  par les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{\tau,t} \\ \underline{\underline{s}}_{\tau,t} \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{\tau,t} \right) = (1 - h_s(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\tau,t})) \underline{\underline{s}}_{\tau,t}^p \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{\tau,t} \right) + h_s(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\tau,t}) \underline{\underline{X}}_{\tau,t} \left( \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\tau,t} \right) \\ \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{\tau,t} - \sigma_Y(T_{\tau,t}^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{\tau,t})}{\sqrt{3}^{m(T_{\tau,t}^u)+1} K_{vp}(T_{\tau,t}^u)} \right]_+^{m(T_{\tau,t}^u)-1} \\ \rho_{\tau,t} = (1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{\tau,t}) (\rho_{\tau} + (1 - \theta) \dot{\rho}_{\tau} dt) \end{array} \right. \quad (5.5)$$

### 5.1.3 Formulation numérique du problème mécanique linéarisé

On considère dans cette partie, le maillage  $\mathcal{T}_{h\tau,t}$  du domaine géométrique  $\Omega_{\tau,t}$  avec toutes ces propriétés de conformité, ainsi que les espaces d'approximations numériques définis au chapitre 2 dans la partie présentant la discrétisation numérique de la modélisation thermomécanique théorique du procédé DED.

Ainsi, le problème mécanique spatialement discrétisé noté  $(\mathcal{P}_{Mh\tau,t})$ ,  $\tau, t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , dans le cadre de la méthode inherent strain rate, en considération de la propriété des fonctions bulles 2.88, se formule aux deux étapes suivantes :

— Étape 1 : Calculs des champs  $\underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t} \in \mathcal{V}_h^3 \oplus \mathcal{V}_{hb}^3$  et  $p_{h\tau,t} \in \mathcal{V}_h$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t} \in \mathcal{V}_h^3 \oplus \mathcal{V}_{hb}^3 \text{ avec } \underline{v}_{h\tau,t} = \sum_{J \in U_h^c} v_{jh\tau,t}(S_J) \varphi_J e_j \in \mathcal{V}_h^3, \\ \underline{v}_{hb\tau,t} = \sum_{l=1, \dots, \mathcal{N}_T} v_{jhb\tau,t} \varphi_{bl} e_j \in \mathcal{V}_{hb}^3, p_{h\tau,t} = \sum_{J=1}^{\mathcal{N}} p_{h\tau,t}(S_J) \varphi_J \in \mathcal{V}_h, \text{ vérifiant :} \\ \forall \varphi_{I,i}, I \in U_h^c, i = 1, 2, 3, \\ F_{vI,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \underline{\underline{s}}_{h\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{h\tau,t} \right) : \underline{e}(\varphi_{I,i}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{I,i} = 0 \\ \forall \varphi_{bl,i}, l = 1, \dots, \mathcal{N}_T, i = 1, 2, 3, \\ F_{bl,i}(\underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \int_{\Omega_{h\tau,t}} \underline{\underline{s}}_{hb\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{hb\tau,t} \right) : \underline{e}(\varphi_{bl,i}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} p_{h\tau,t} \nabla \cdot \varphi_{bl,i} = 0 \\ \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, \underline{v}_{hb\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \\ - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \varphi_I \nabla \cdot (\underline{v}_{h\tau,t} + \underline{v}_{hb\tau,t}) - \int_{\Omega_{h\tau,t}} \frac{p_{h\tau,t} - p_{h\tau} - (1 - \theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt} \varphi_I \\ + \int_{\Omega_{h\tau,t}} 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \varphi_I = 0 \end{array} \right\} (\mathcal{P}_{M\tau,t}^{(1)})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{h\tau,t} \\ \underline{\underline{s}}_{h\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{h\tau,t} \right) = (1 - h_s^*(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{h\tau,t}^*)) \underline{\underline{s}}_{h\tau,t}^p \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{h\tau,t} \right) + h_s^*(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{h\tau,t}^*) \underline{\underline{X}}_{h\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{h\tau,t}^* \right) \\ \underline{\underline{s}}_{h\tau,t}^p = \underline{\underline{s}}_{h\tau} + (1 - \theta) \dot{\underline{\underline{s}}}_{h\tau} dt + 2\mu(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt \underline{\underline{\dot{v}}}_{h\tau,t}, \\ \underline{\underline{s}}_{hb\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{v}}}_{hb\tau,t} \right) = 2\mu(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) (1 - h_s^*(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_{h\tau,t}^*)) \theta dt \underline{\underline{\dot{v}}}_{hb\tau,t} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

— Étape 2 : Calculs, à partir de  $\underline{v}_{h\tau,t}$ , des champs  $\underline{\underline{s}}_{h\tau,t}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t}, \underline{\underline{\varepsilon}}_{h\tau,t}^{vp} \in (\mathcal{V}_{h0})_s^{3 \times 3}$  et  $\rho_{h\tau,t}, \bar{\varepsilon}_{h\tau,t} \in$

$\mathcal{V}_{h0}$  par les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dans } \Omega_{h\tau,t} \\ \underline{\underline{s}}_{h\tau,t} \left( \underline{\underline{\dot{e}}}(v_{h\tau,t}) \right) = (1 - h_s(\underline{\underline{\dot{e}}}_{h\tau,t})) \underline{\underline{s}}_{h\tau,t}^p \left( \underline{\underline{\dot{e}}}(v_{h\tau,t}) \right) + h_s(\underline{\underline{\dot{e}}}_{h\tau,t}) \underline{\underline{X}}_{h\tau}(\underline{\underline{\dot{e}}}_{h\tau,t}) \\ \underline{\underline{\dot{e}}}_{h\tau,t} = \left[ \frac{\bar{\sigma}_{h\tau,t} - \sigma_Y(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) - R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}_{h\tau,t})}{\sqrt{3}^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)+1} K_{vp}(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)} \right]_{+}^{m(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u)^{-1}} \\ \rho_{h\tau,t} = (1 - dt\theta \nabla \cdot \underline{v}_{h\tau,t}) (\rho_{h\tau} + (1 - \theta) \dot{\rho}_{h\tau} dt) \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Or, l'application de la condensation de bulle au présent problème mécanique ( $\mathcal{P}_{Mh\tau,t}$ ) suivant le même principe que celui appliquée au problème mécanique spatialement discrétisé 2.87, nous permet d'être affranchis de l'exigence de calcul de la composante bulle  $\underline{v}_{hb\tau,t}$  dans la résolution de ce problème. En effet, nous obtenons la reformulation ci-dessous de l'étape 1 :

$$\left( \mathcal{P}_{Mh\tau,t}^{(1)} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{v}_{h\tau,t} = \sum_{J \in U_h^c} v_{jh\tau,t}(S_J) \varphi_J e_j \in \mathcal{V}_h^3, \quad p_{h\tau,t} = \sum_{I=1}^{\mathcal{N}} p_{h\tau,t}(S_I) \varphi_I \in \mathcal{V}_h, \\ \text{vérifiant :} \\ \forall \varphi_{I,i}, I \in U_h^c, i = 1, 2, 3, \\ F_{vI,i}(\underline{v}_{h\tau,t}, p_{h\tau,t}) = \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \underline{\underline{s}}_{hb\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{e}}} \left( \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t}(S_C(v,k)) \varphi_C(v,k) e_j \right) \right) : \underline{\underline{e}}(\varphi_{I,i}) \\ - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 p_{h\tau,t}(S_C(v,k)) \varphi_C(v,k) \nabla \cdot \varphi_{I,i} = 0 \\ \forall \varphi_I, I = 1, \dots, \mathcal{N}, \\ F_{pI}(\underline{v}_{h\tau,t}, p_{h\tau,t}) = - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \varphi_i \sum_{k=1}^4 v_{jh\tau,t}(S_C(v,k)) \frac{\partial \varphi_C(v,k)}{\partial X_j} \\ - \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( K_{bbl',jj'}^{*-1} K_{bpl',j'k} \frac{\partial \varphi_{bl'}}{\partial X_j} \varphi_I + \frac{\varphi_C(v,k)}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt} \varphi_I \right) p_{h\tau,t}(S_C(v,k)) \\ + \sum_{T_{I'}, S_I \in T_{I'}} \int_{T_{I'}} \sum_{k=1}^4 \left( \frac{p_{h\tau} + (1 - \theta) \dot{p}_{h\tau} dt}{\chi(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}^u) \theta dt} + 3\alpha(\mathcal{P}_0 T_{h\tau,t}) \dot{T}_{h\tau,t} \right) (S_C(v,k)) \varphi_C(v,k) \varphi_I = 0 \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Avec,  $K_{bbl',ij}^* := \int_{T_I} \underline{\underline{s}}_{hb\tau,t}^* \left( \underline{\underline{\dot{e}}}(\varphi_{bl} e_j) \right) : \underline{\underline{e}}(\varphi_{I,i}), \quad \forall l = 1, \dots, \mathcal{N}_T, i, j = 1, 2, 3$

## 5.2 Origines de la méthode

Les origines de la méthode inherent strain rate reposent essentiellement sur l'évolution de la distribution de la vitesse de déformation plastique cumulée  $\underline{\underline{\dot{e}}}$  tout au long de la période de construction de chaque cordon. La présentation de ce comportement passera par la définition du filtrage au coefficient  $\alpha \in ]0, 1[$  près noté  $\underline{\underline{\dot{e}}}^\alpha$  de ce champ, ainsi que le

calcul de la moyenne  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moy}^\alpha$  de  $\dot{\bar{\varepsilon}}^\alpha$ .

### 5.2.1 Filtrage et moyenne de la vitesse de déformation plastique cumulée

Au cours de la construction du cordon  $\mathcal{M}_T$ , à l'instant  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , pour un coefficient  $\alpha \in ]0, 1[$ , nous définissons de la manière suivante le filtrage à  $\alpha$  près  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t^\alpha$  de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t$ , comme le champ scalaire dans  $\Omega_t$  :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_t, \dot{\bar{\varepsilon}}_t^\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} \dot{\bar{\varepsilon}}_t(\underline{x}) & \text{si } \dot{\bar{\varepsilon}}_t(\underline{x}) \geq \alpha \max_{\Omega_t} \dot{\bar{\varepsilon}}_t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.9)$$

Le champ scalaire filtré moyen  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moyt}^\alpha$  est alors défini dans  $\Omega_t$  comme suit :

$$\forall \underline{x} \in \Omega_t, \dot{\bar{\varepsilon}}_{moyt}^\alpha(\underline{x}) = \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_t^\alpha|} \int_{\Omega_t^\alpha} \dot{\bar{\varepsilon}}_t & \text{si } \underline{x} \in \Omega_t^\alpha \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\Omega_t^\alpha := \{ \underline{x} \in \Omega_t, \dot{\bar{\varepsilon}}_t^\alpha(\underline{x}) > 0 \}$$

Dans toute la suite de ce rapport, nous prendrons  $\alpha = 0.1$ .

La figure 5.1 nous donne, pour le mur, les profils respectifs des champs  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t$ ,  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t^\alpha$  et  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moyt}^\alpha$ , à l'instant  $t = t_2 + L_T/2v_H$ , instant correspondant à la fin de la construction de la première moitié du cordon  $\mathcal{M}_{T3}$ . Nous y observons une forte concentration des valeurs non nulles de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t$  au voisinage en dessous de la zone de chauffage, et une forme plus ou moins trapézoïdale du support  $\Omega_t^\alpha$  de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t^\alpha$  et  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moyt}^\alpha$ .

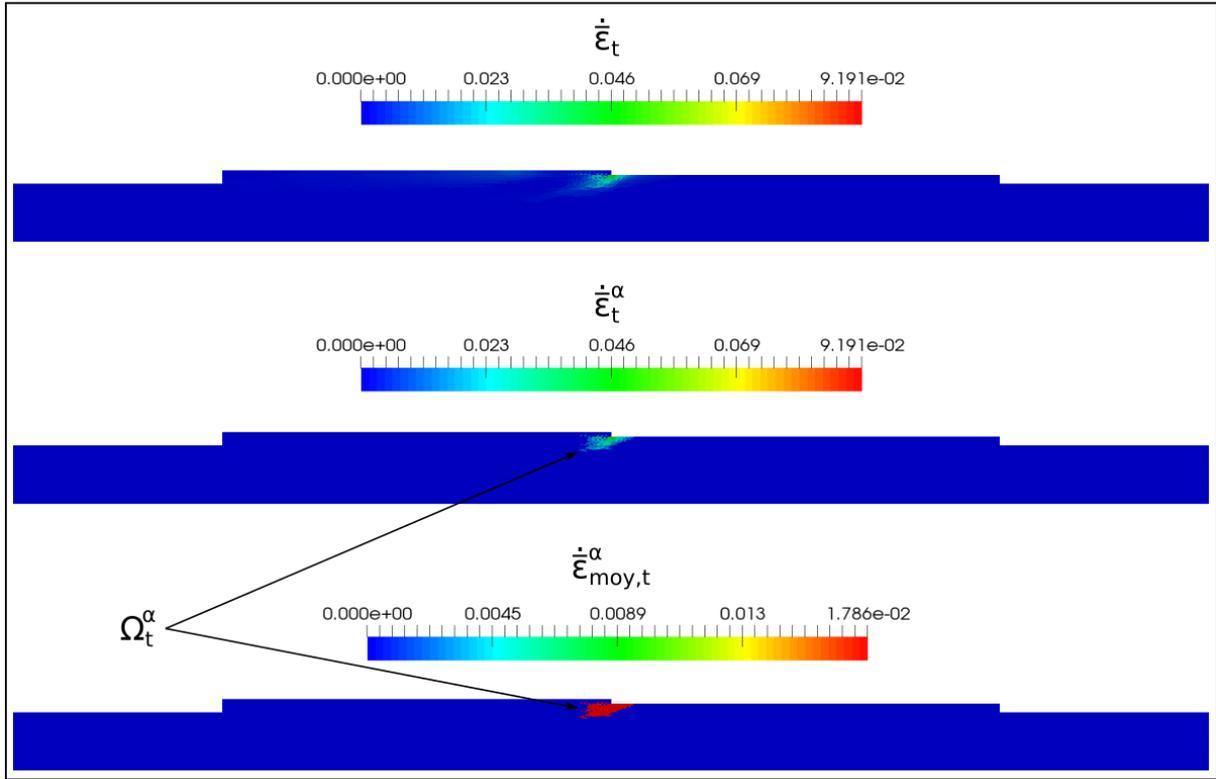


FIGURE 5.1 – Champs  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t$ ,  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$  et  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{moy,t}^\alpha$ , à l'instant  $t = t_2 + L_T/2v_H$  (milieu de la construction du  $\mathcal{M}_{T3}$ )

### 5.2.2 Étude de l'évolution de la vitesse de déformation filtrée

Nous nous intéressons à l'évolution globale de  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$ , le long de la construction du cordon  $\mathcal{M}_{T3}$  du mur et de l'aube. En reprenant les notations du chapitre 3 ( $L_T$  longueur du cordon considéré,  $l_T$  largeur du cordon), nous considérons les trois instants suivants :  $t_2 + t_a$ ,  $t_2 + t_b$ , et  $t_2 + t_c$ ; avec  $t_a := \frac{3l_T}{v_H}$ ,  $t_b := \frac{L_T}{2v_H}$  et  $t_c := \frac{L_T - 2l_T}{v_H}$ . La figure 5.2 et la figure 5.3 nous présentent en effet le profil de  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$  à ces trois instants observés sur les deux structures. Pour le mur en particulier, nous considérons en plus le comportement axial de ce champ le long de la construction des cordons  $\mathcal{M}_{T3}$ ,  $\mathcal{M}_{T7}$  et  $\mathcal{M}_{T11}$ . Plus précisément, nous étudions pour chacun de ces cordons, l'évolution temporelle du profil de  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$  sur l'axe du cordon inférieur. La figure 5.4 nous donne en effet pour chaque cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I \in \{3, 7, 11\}$ , les profils des champs  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t$ ,  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$  et  $\dot{\tilde{\epsilon}}_{moy,t}^\alpha$  sur l'axe du cordon inférieur  $\mathcal{M}_{TI-1}$  aux trois instants  $t_{I-1} + t_a$ ,  $t_{I-1} + t_b$  et  $t_{I-1} + t_c$ .

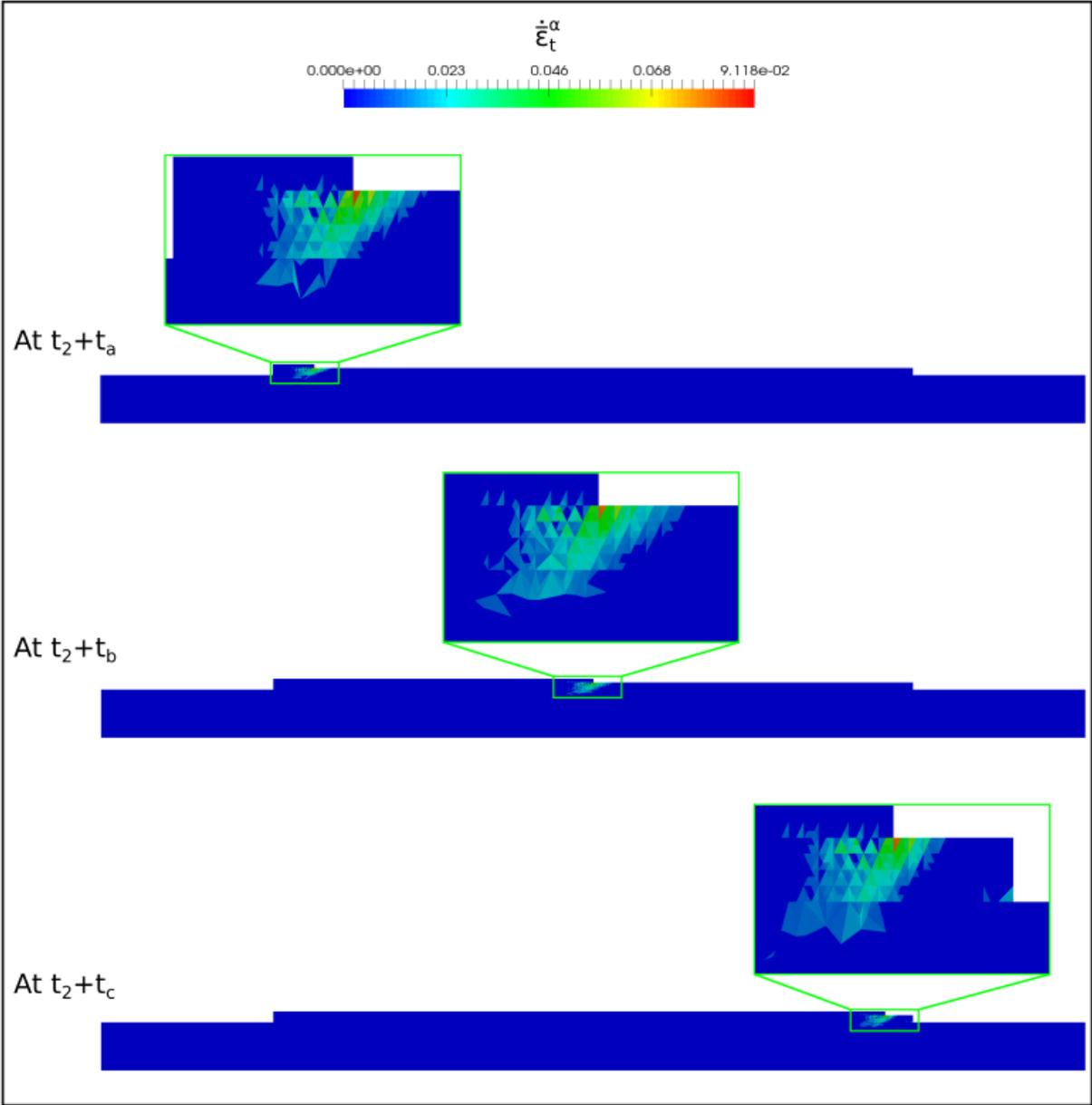


FIGURE 5.2 – Champ  $\dot{\bar{\epsilon}}_t^\alpha$  aux trois instants  $t_2 + t_a$ ,  $t_2 + t_b$ , et  $t_2 + t_c$  dans le cas du mur

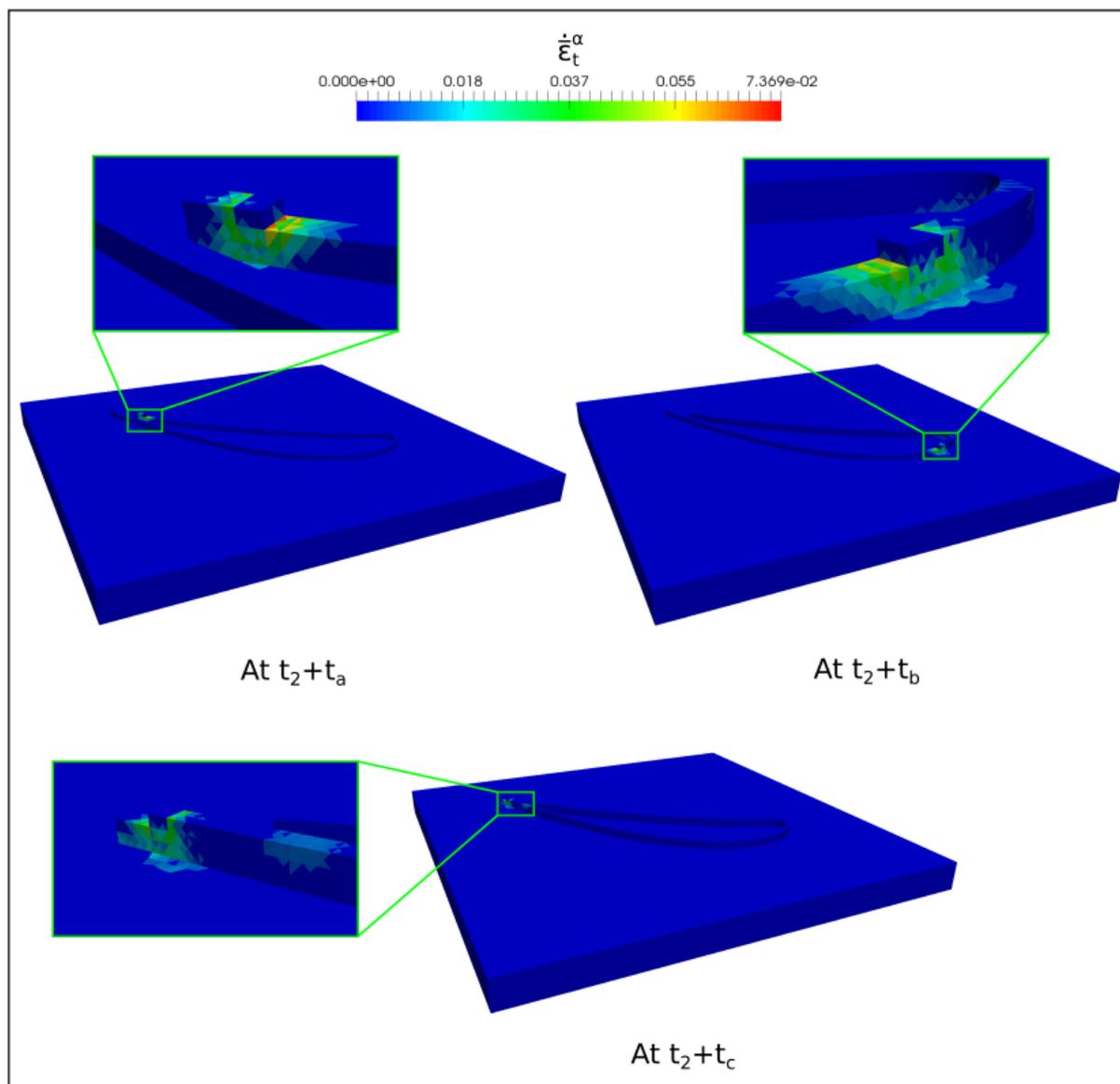


FIGURE 5.3 – Champ  $\dot{\tilde{\epsilon}}_t^\alpha$  aux trois instants  $t_2 + t_a$ ,  $t_2 + t_b$ , et  $t_2 + t_c$  dans le cas de l'aube

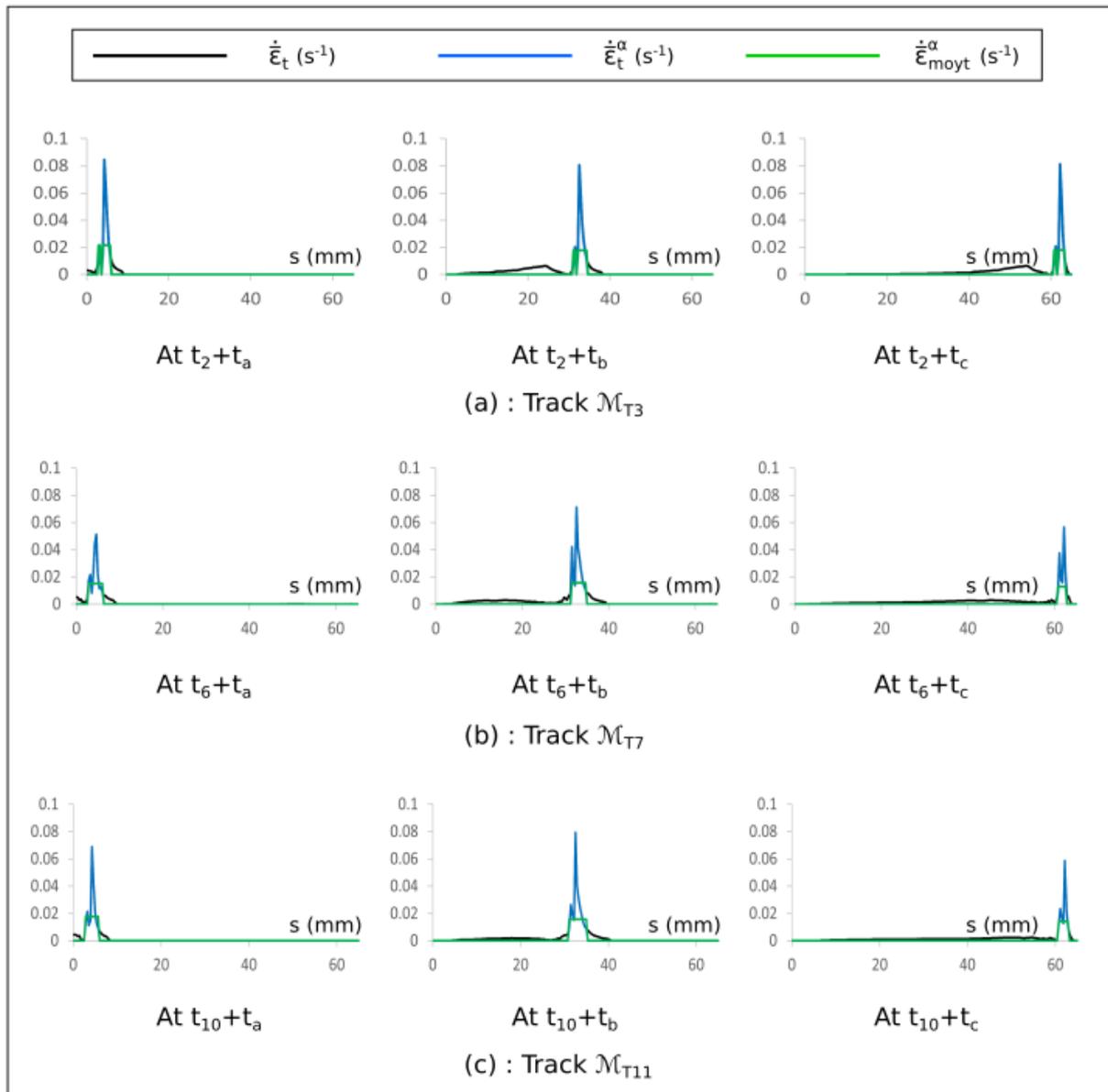


FIGURE 5.4 – Cas du mur. Profils axiaux des champs  $\dot{\epsilon}_t$ ,  $\dot{\epsilon}_t^\alpha$  et  $\dot{\epsilon}_{moyt}^\alpha$  aux trois instants  $t_a$ ,  $t_b$ , et  $t_c$  après le début de construction des couches : (a)  $\mathcal{M}_{T3}$ , (b)  $\mathcal{M}_{T7}$  et, (c)  $\mathcal{M}_{T11}$

Nous observons dans toutes ces figures :

- une forte concentration des valeurs non négligeables de  $\dot{\epsilon}_t$ , et donc des valeurs non nulles de  $\dot{\epsilon}_t^\alpha$  dans une zone avoisinant la zone de chauffage et présentant de très faibles dimensions par rapport à celles du domaine géométrique  $\Omega_t$  ;
- pour chaque cordon  $\mathcal{M}_{TI}$ ,  $I \in \{3, 7, 11\}$ , des reproductions relativement similaires du profil de  $\dot{\epsilon}_t^\alpha$  ainsi que de sa valeur moyenne à  $t = t_{I-1} + t_a$  aux instants ultérieurs  $t = t_{I-1} + t_b$  et  $t = t_{I-1} + t_c$ .

En conclusion, pour chaque cordon en cours de construction et suffisamment éloigné du substrat, la connaissance du profil de  $\dot{\epsilon}_t^\alpha$  en un instant donné  $\tau$ , nous permet de prédire ce champ aux instants ultérieurs de l'intervalle de construction, instants pour lesquels la

frontière d'activation  $\Gamma_{Tt}$  est suffisamment éloignée de l'extrémité finale du cordon. Ainsi cette estimation, destinée à approcher  $\dot{\bar{\varepsilon}}_t$ , pourra donc être considérée non comme une inconnue mais comme un paramètre du problème mécanique à résoudre. Ceci aura donc pour effet principal de réduire la complexité de ce dernier, d'où les origines de la méthode inherent strain rate.

## 5.3 Méthodes d'estimation de la vitesse de déformation plastique cumulée et applications

### 5.3.1 Méthodes d'estimation

L'estimation de la vitesse de déformation plastique  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}$  repose sur un principe d'apprentissage actualisé, c'est-à-dire un apprentissage renouvelé à chaque pas de temps des périodes de chauffage et de refroidissement du système. En effet, pour chaque cordon  $\mathcal{M}_T$  en construction au cours de l'intervalle  $[t_{T0}, t_{Tf}]$ , il s'agit de calculer le champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$ , estimation de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}$  à l'instant  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , à partir d'un ou plusieurs profils du champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}$  calculés aux pas de temps précédents par le modèle standard ou par la méthode inherent strain rate. Deux méthodes de calcul sont utilisées : le calcul de moyenne, utilisée en période de chauffage, et l'interpolation linéaire en période de refroidissement.

En période de chauffage, c'est-à-dire pour  $t \in [t_{T0}, t_{Tf}^c]$ , le calcul de moyenne vise à calculer le champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$  de manière à approcher  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moy\tau,t}^\alpha$ , à base du champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}_\tau$  calculé à l'instant  $\tau = t - dt \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , suivant la méthodologie ci-dessous :

- Calcul de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_\tau^\alpha$  et  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moy\tau}^\alpha$  ;
- Définition arbitraire du domaine  $\Omega_{\tau,t}^{\alpha*}$  avoisinant la zone de chauffage  $\Omega_{T\tau,t}^H := \Phi_\tau(\Omega_{Tt0}^H)$  et destiné à approcher  $\Omega_{\tau,t}^\alpha := \Phi_{\tau,t}^{-1}(\Omega_t^\alpha)$  support de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moy\tau,t}^\alpha$  ;
- Définition de  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$  suivant la formule :

$$\forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{\tau,t}, \dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^*(\underline{x}_\tau) := \begin{cases} \frac{1}{|\Omega_{\tau,t}^{\alpha*}|} \int_{\Omega_\tau^\alpha} \dot{\bar{\varepsilon}}_\tau \text{ si } \underline{x}_\tau \in \Omega_{\tau,t}^{\alpha*} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (5.11)$$

La figure 5.5 nous donne, pour le mur et l'aube, un exemple de calcul du champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{\tau,t}^*$  à l'instant  $t = t_2 + t_a$  à partir du champ  $\dot{\bar{\varepsilon}}_{moy\tau}^\alpha$  calculé à l'instant  $\tau = t_2 + t_a$ . En effet, nous définissons de manière générale le domaine géométrique  $\Omega_{\tau,t}^{\alpha*}$  comme l'union d'un ou de plusieurs pavés droits ou courbés dont les dimensions (longueur curviligne, épaisseur et hauteur) sont calculées à partir de celles du domaine géométrique  $\Omega_\tau^\alpha$ .

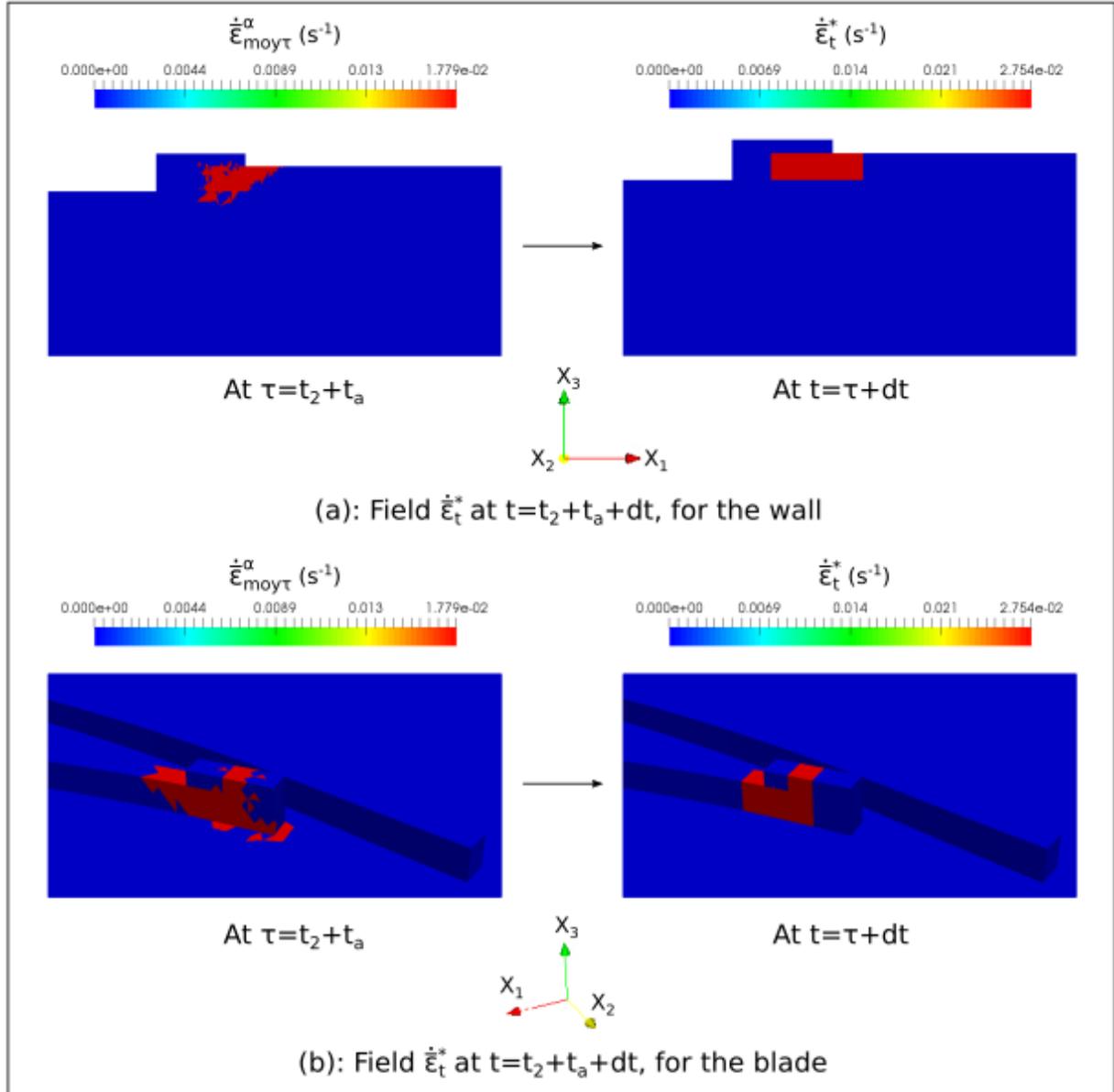


FIGURE 5.5 – Champ  $\dot{\bar{\epsilon}}_{\tau,t}^*$  à  $t = t_2 + t_a + dt$  à base de  $\dot{\bar{\epsilon}}_{moy\tau}^\alpha$ ,  $\tau = t_2 + t_a$  : (a) pour le mur ; (b) pour l'aube

En période de refroidissement, c'est-à-dire pour  $t \in [t_{Tf}^c, t_{Tf}]$ , l'extrapolation linéaire vise à calculer le champ  $\dot{\bar{\epsilon}}_{\tau,t}^*$  de manière à approcher  $\dot{\bar{\epsilon}}_{\tau,t}$ , à base des champs eulériens  $\dot{\bar{\epsilon}}_{\tau'}$  et  $\dot{\bar{\epsilon}}_\tau$  calculés aux instants respectifs  $\tau' < \tau = t - dt \in [t_{T0}, t_{Tf}]$ , suivant la formule :

$$\forall \underline{x}_\tau \in \Omega_{\tau,t}, \dot{\bar{\epsilon}}_{\tau,t}^*(\underline{x}_\tau) = \frac{\dot{\bar{\epsilon}}_\tau(\underline{x}_\tau) - \dot{\bar{\epsilon}}_{\tau'}(\Phi_{\tau',\tau}^{-1}(\underline{x}_\tau))}{\tau - \tau'} (t - \tau') + \dot{\bar{\epsilon}}_{\tau'}(\Phi_{\tau',\tau}^{-1}(\underline{x}_\tau)) \quad (5.12)$$

### 5.3.2 Applications

Pour le mur et l'aube, elles se feront suivant le schéma suivant (figure 5.6) :

- Pour les premiers cordons  $\mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{TI}, I = 1, 2\}$  :

- Application du modèle standard de l'instant  $t_{T0}$  à l'instant  $t_{Tf}^c + 2 * \frac{l_T}{v_H}$  ;
- Application de la méthode inherent strain rate de l'instant  $t_{Tf}^c + 2 * \frac{l_T}{v_H} + dt$  à l'instant  $t_{Tf}$ .
- Pour tous les cordons suivants  $\mathcal{M}_T \in \{\mathcal{M}_{TI}, I = 3, \dots, N\}$  :
  - Application du modèle standard de l'instant  $t_{T0}$  à l'instant  $t_{Ta} \in [t_{T0}, t_{Tf}^c]$ , pour lequel l'interface  $\Gamma_{Tt_{Ta}}$  soit suffisamment éloignée de la section initiale  $\mathcal{S}_0$  du cordon. En pratique, on prendra  $t_{Ta} = t_{T0} + t_a = t_{T0} + 3 \frac{l_T}{v_H}$ .
  - Application de la méthode inherent strain rate de l'instant  $t_{Ta} + dt$  à l'instant  $t_{Tc} \in ]t_{Ta} + dt, t_{Tf}^c]$ , pour lequel l'interface  $\Gamma_{Tt_{Tc}}$  soit suffisamment éloignée de la section finale  $\mathcal{S}_f$ . En pratique, on prendra  $t_{Tc} = t_{T0} + t_c = t_{T0} + 3 \frac{L_T - 2l_T}{v_H}$ .
  - Application du modèle standard de l'instant  $t_{Tc} + dt$  à l'instant  $t_{Tf}^c + 2 * \frac{l_T}{v_H}$  ;
  - Application de la méthode inherent strain rate de l'instant  $t_{Tf}^c + 2 * \frac{l_T}{v_H} + dt$  à l'instant  $t_{Tf}$ .

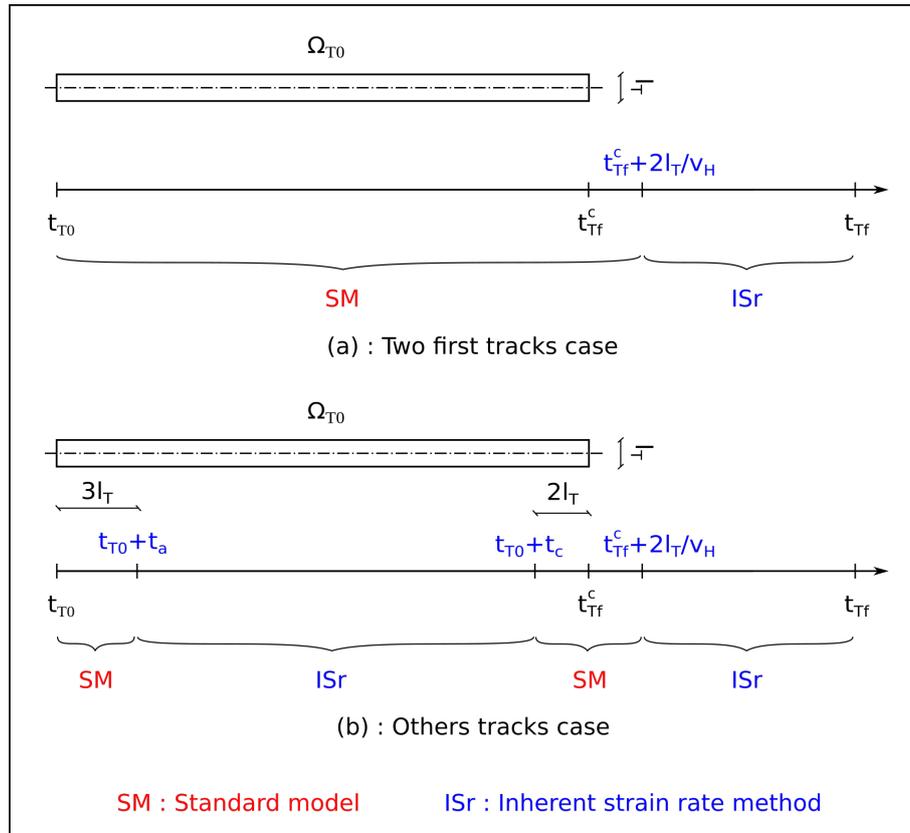


FIGURE 5.6 – Schéma d'application de la méthode inherent strain rate pour le mur et l'aube

Les résultats portent essentiellement sur deux instants : l'instant  $t_{14} + t_b$ , correspondant à

la fin de la construction de la première moitié du cordon  $\mathcal{M}_{T15}$ , et l'instant final  $t_N = t_f$ , correspondant au refroidissement quasi-total du système total  $\mathcal{M}_f$  ainsi construit.

### Résultats à l'instant $t_{14} + t_b$

Les champs de distorsion et de contraintes correspondant à l'application des deux modèles, standard d'une part et inherent strain rate d'autre part, sont donnés dans les figures 5.7-5.11.

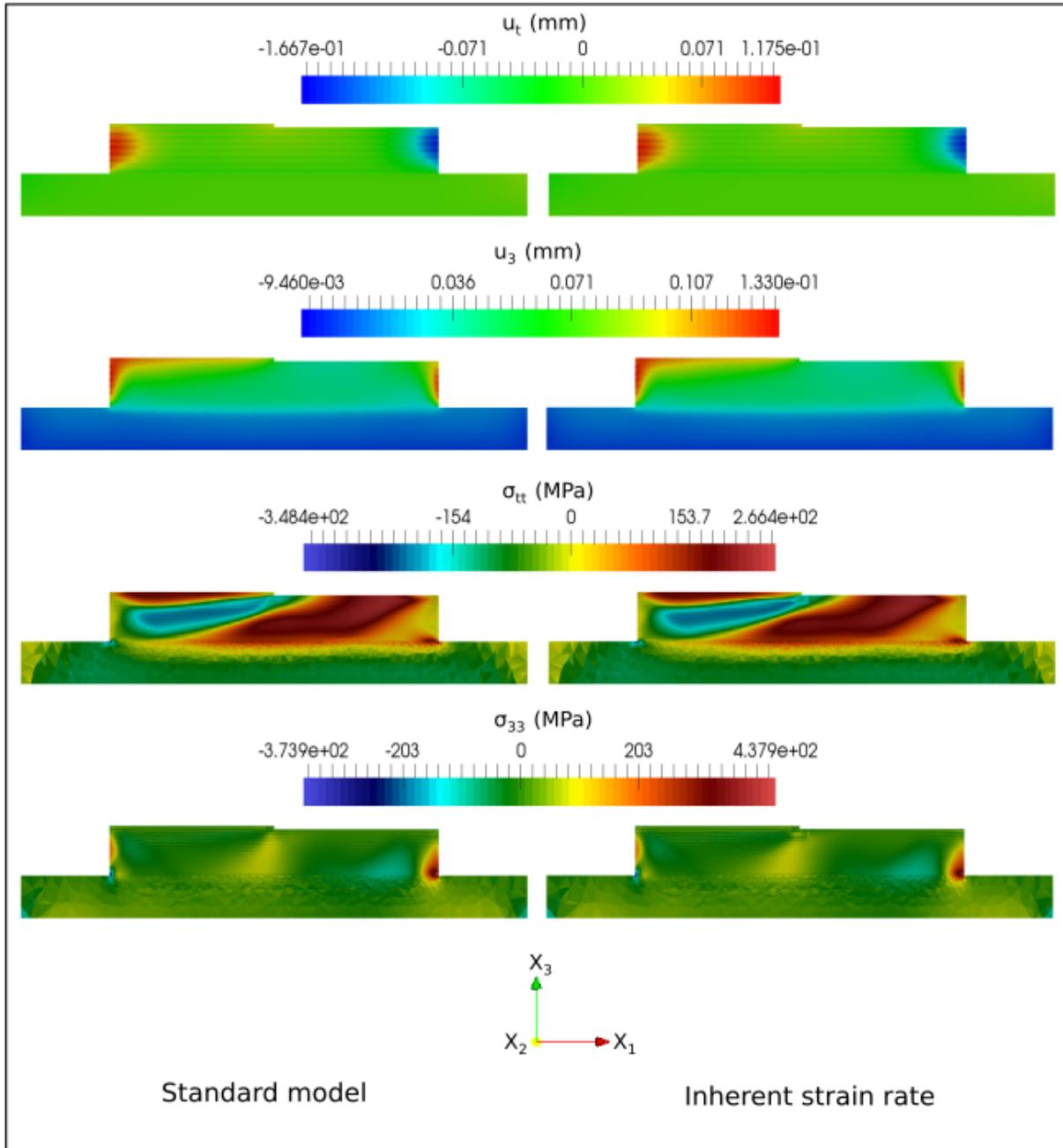


FIGURE 5.7 – Champs de distorsions  $\underline{u}_t$  et de contraintes  $\underline{\sigma}_t$  à  $t = t_{14} + t_b$  du mur. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

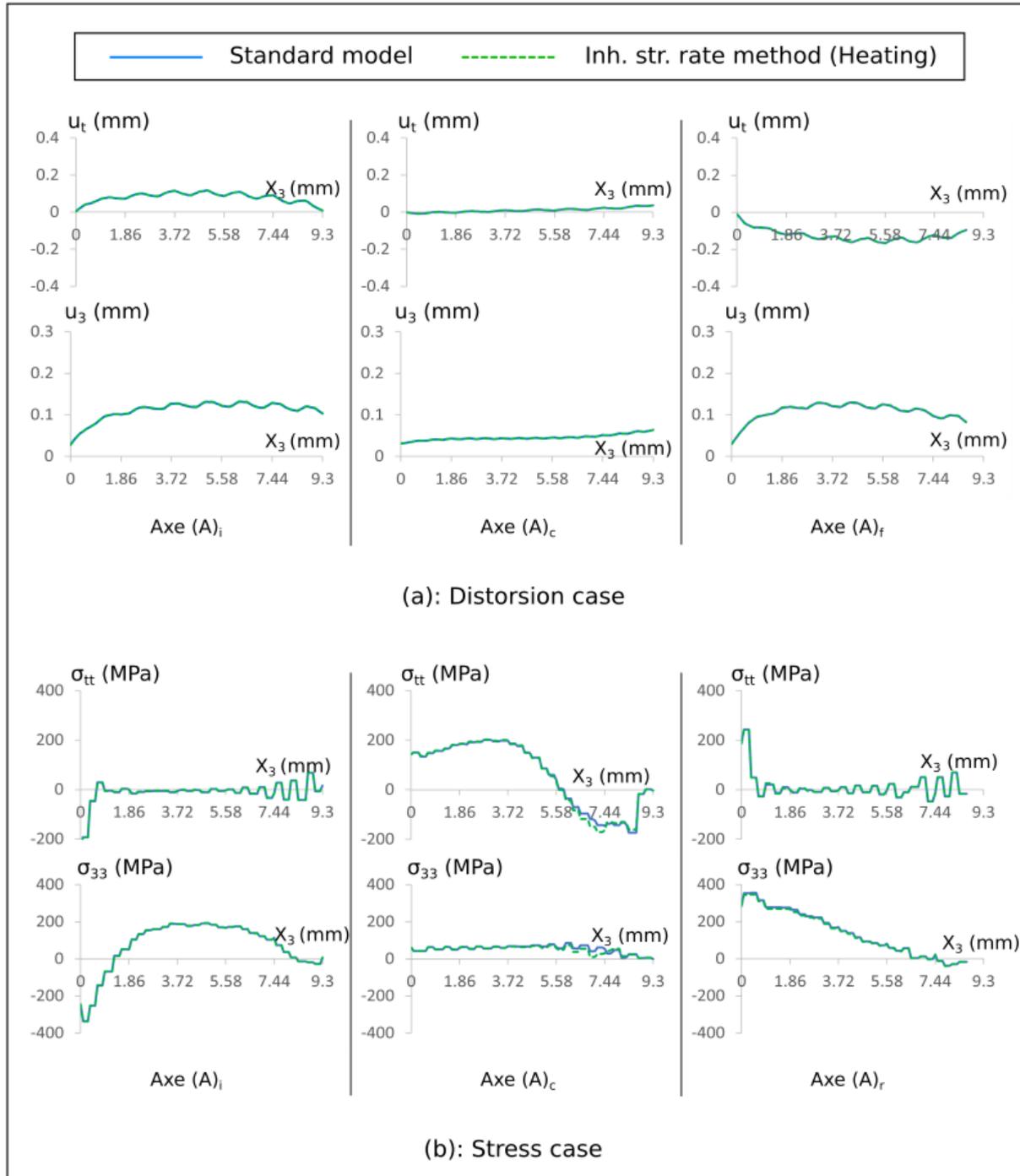


FIGURE 5.8 – Application de la méthode inherent strain rate : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_{14} + t_b$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur

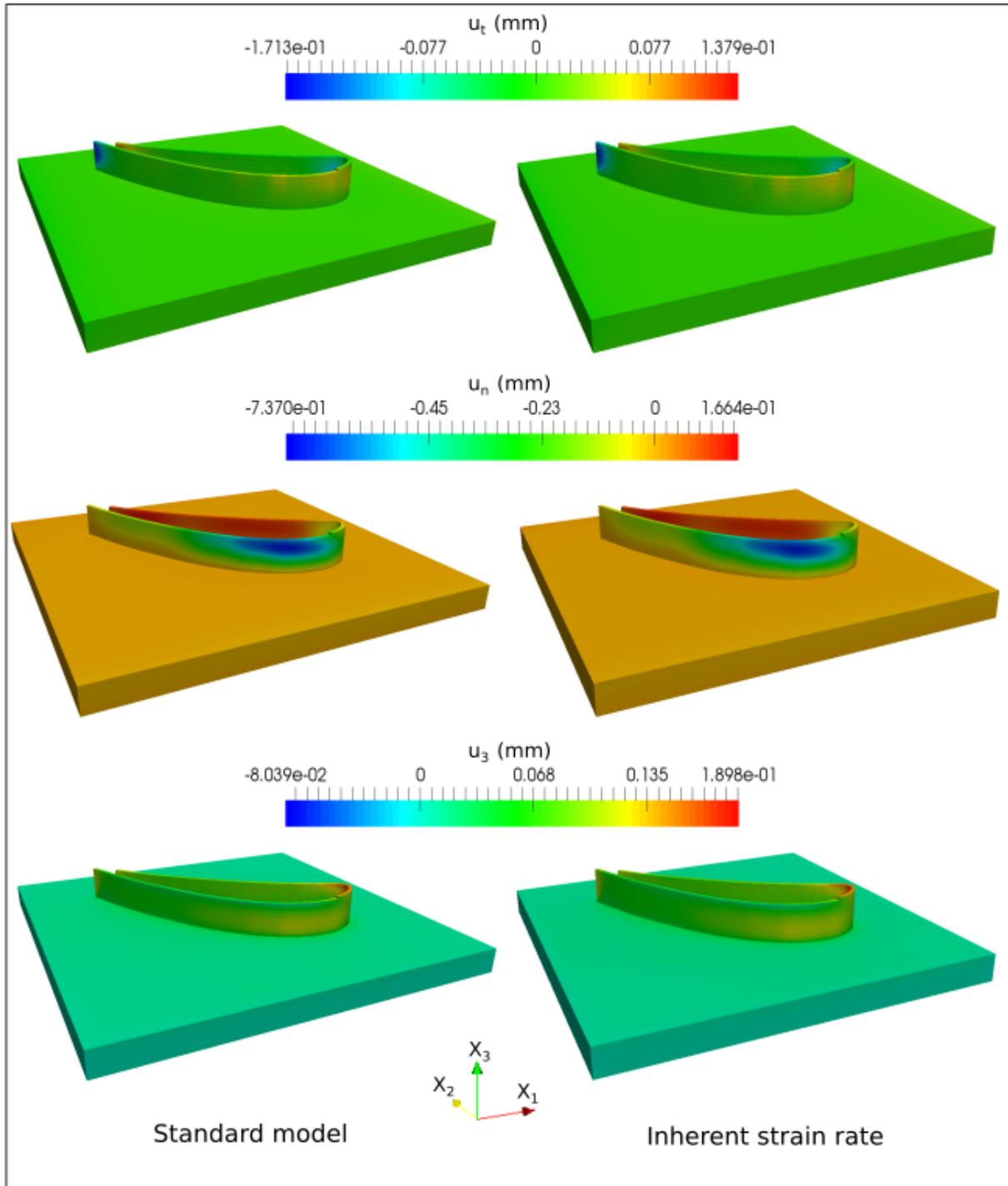


FIGURE 5.9 – Champs de distorsions  $\underline{u}_t$  à  $t = t_{14} + t_b$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

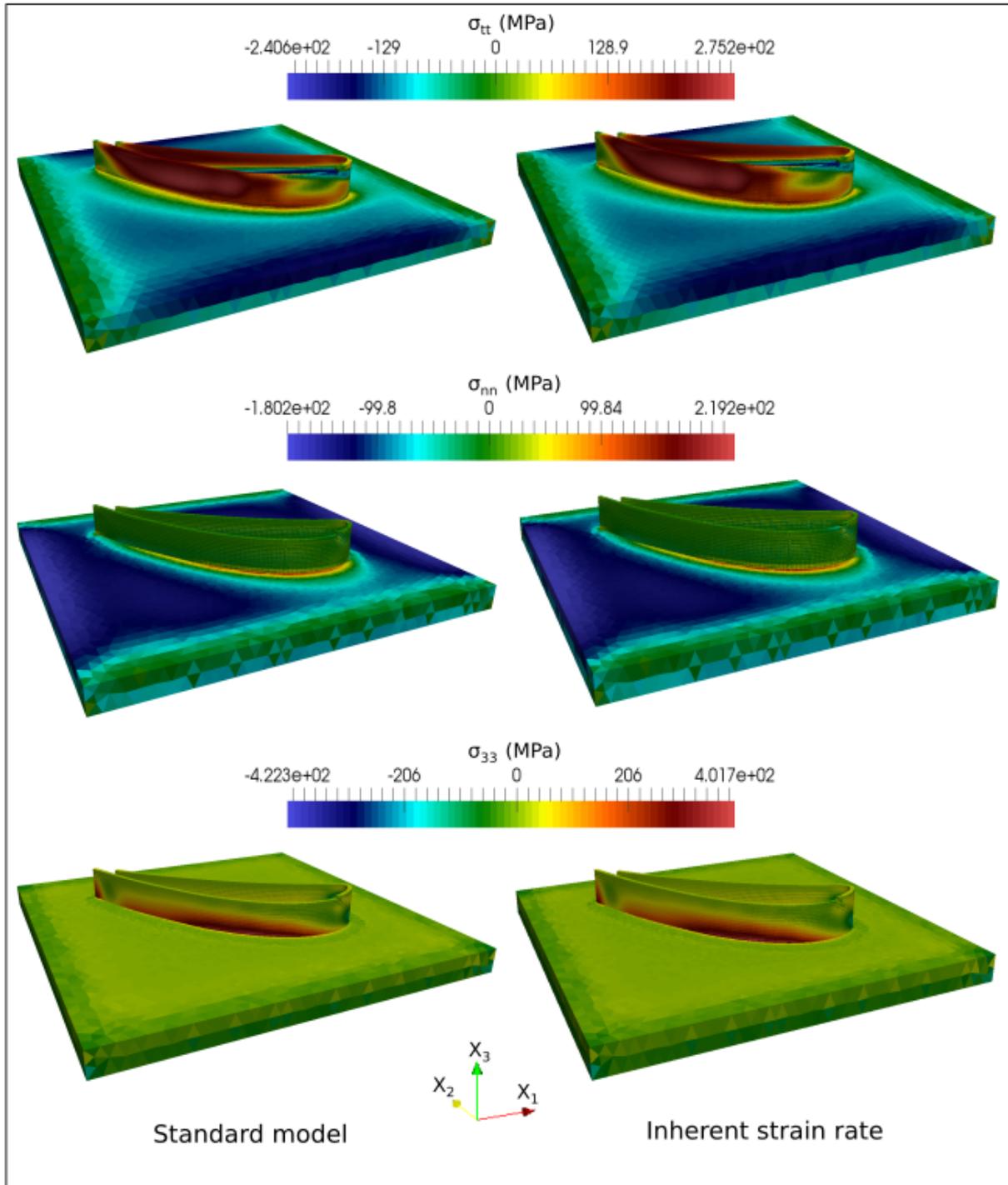


FIGURE 5.10 – Champs de contraintes  $\underline{\underline{\sigma}}_t$  à  $t = t_{14} + t_b$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

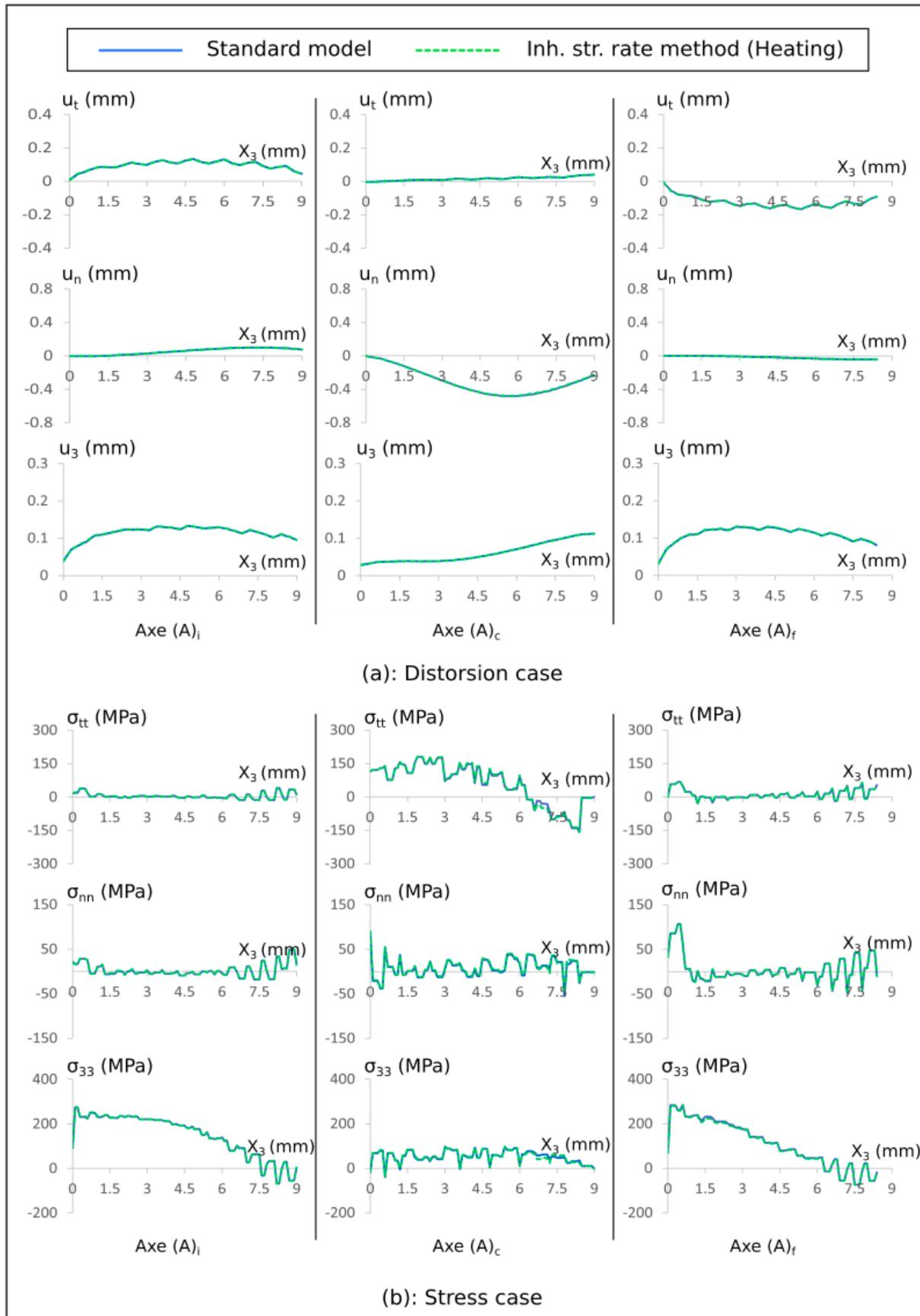


FIGURE 5.11 – Application de la méthode inherent strain rate : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  à  $t = t_{14} + t_b$  tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube

Nous observons de très bons accords entre les deux résultats, en distorsions comme en contraintes, issus de ces deux modèles. Ceci révèle l'efficacité de la méthode inherent strain rate en période de chauffage.

### Résultats à l'instant final $t_f$

Les champs de distorsion et de contraintes résiduelles suivant l'application des deux modèles, standard et inherent strain rate, sont donnés dans les figures 5.12-5.16.

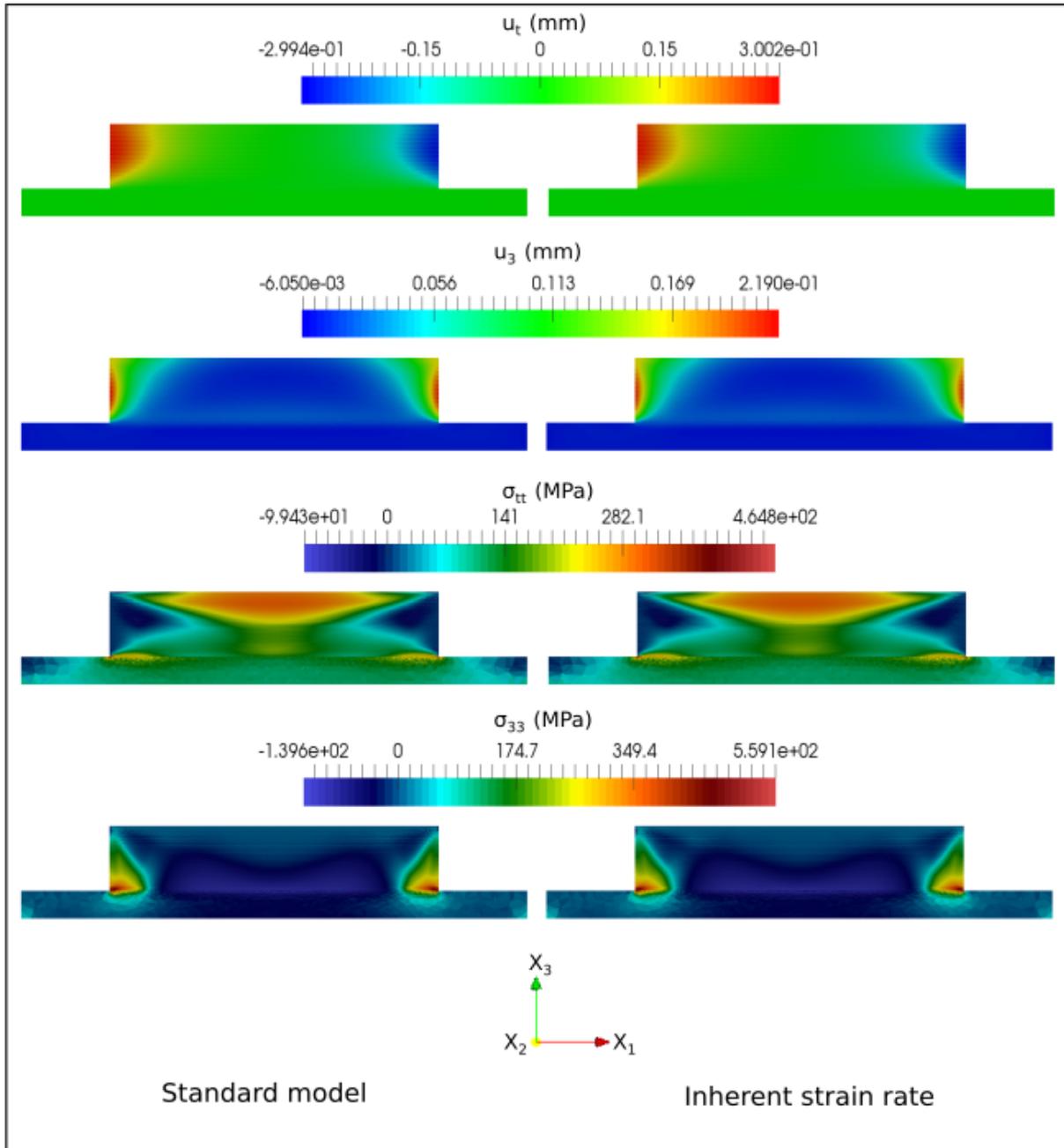


FIGURE 5.12 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  résiduelles au refroidissement total du mur. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

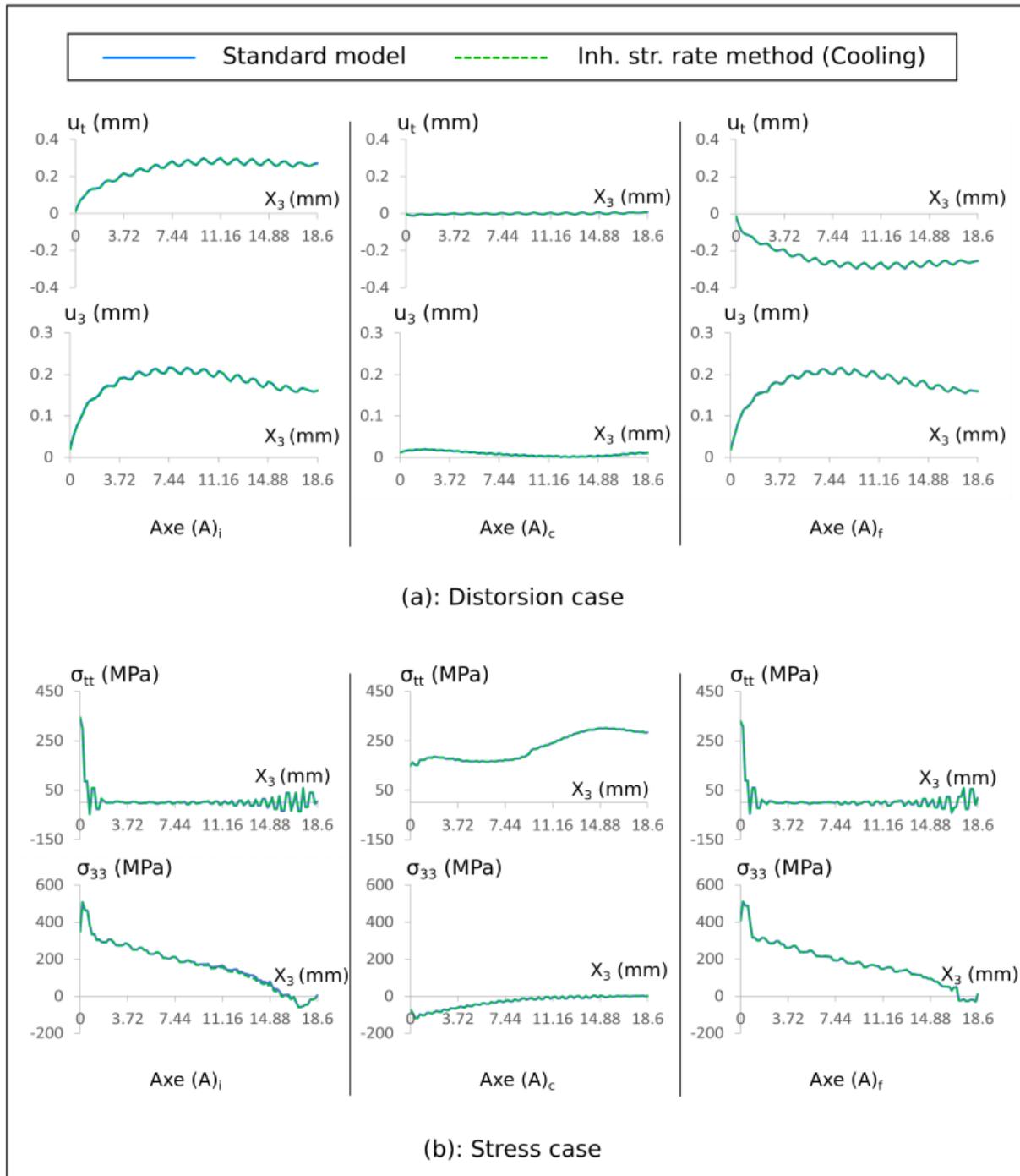


FIGURE 5.13 – Application de la méthode inherent strain rate : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  résiduelles au refroidissement total tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  du mur

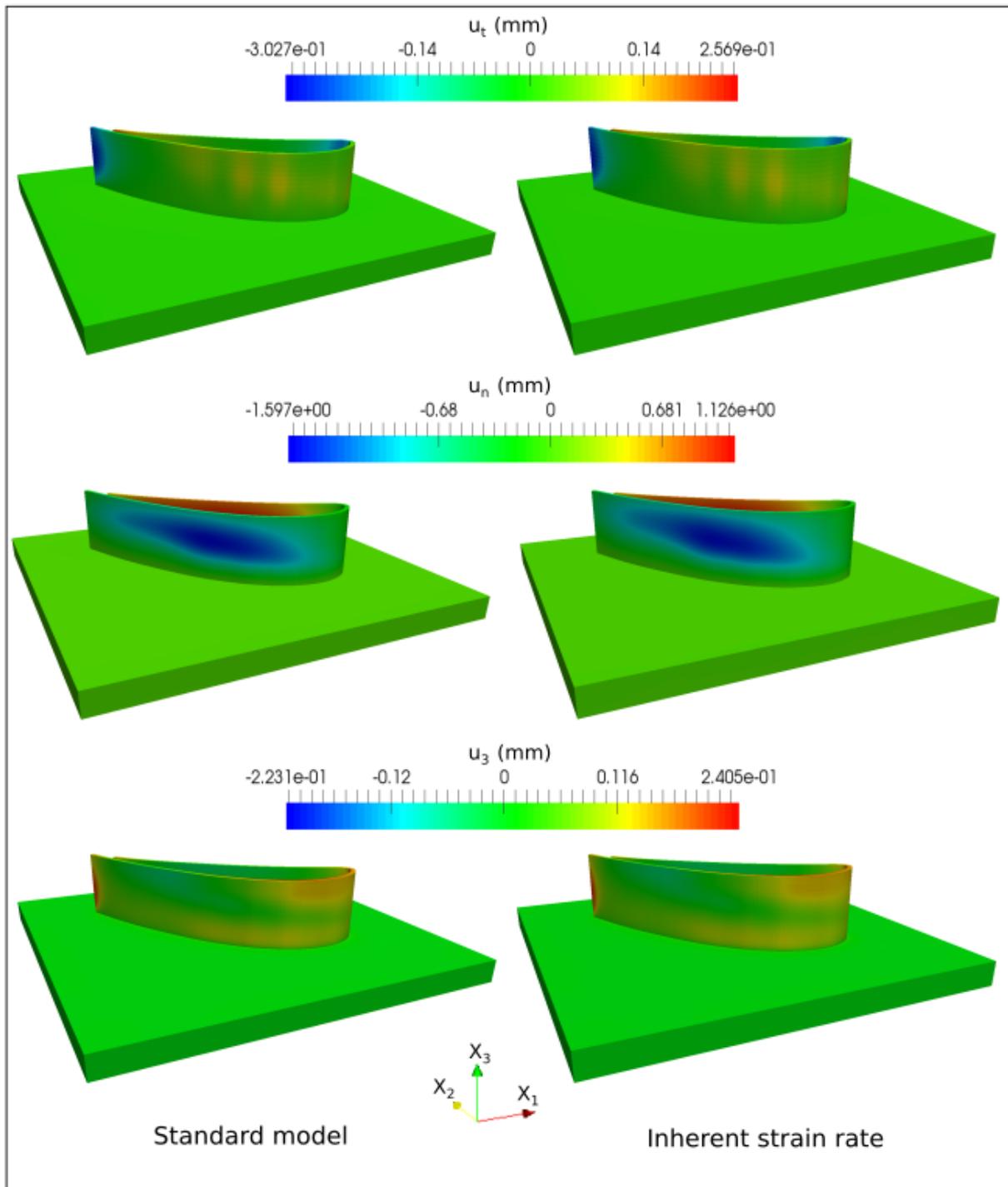


FIGURE 5.14 – Champs de distorsions  $\underline{u}$  résiduelles au refroidissement total de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

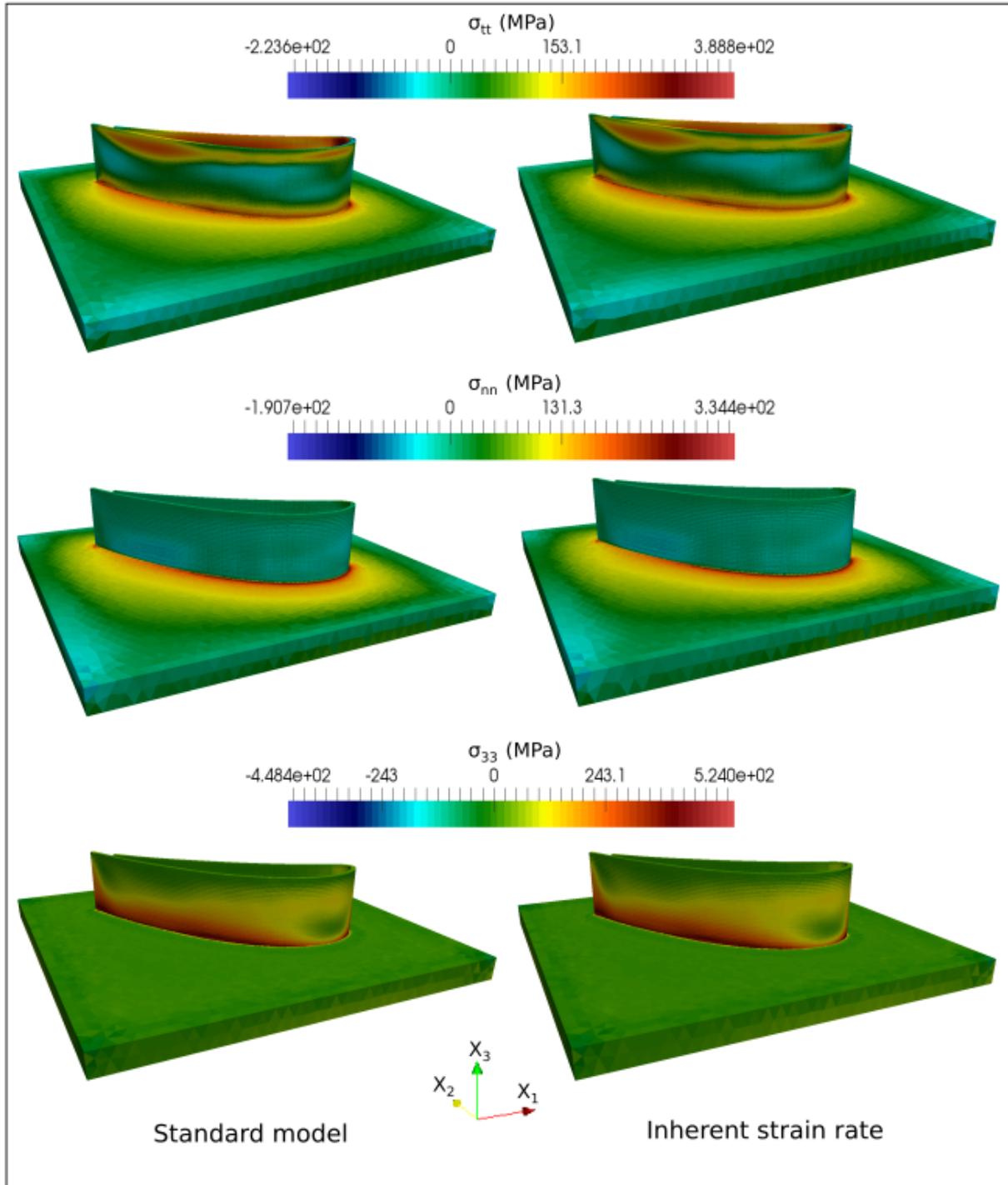


FIGURE 5.15 – Champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  résiduelles au refroidissement total de l'aube

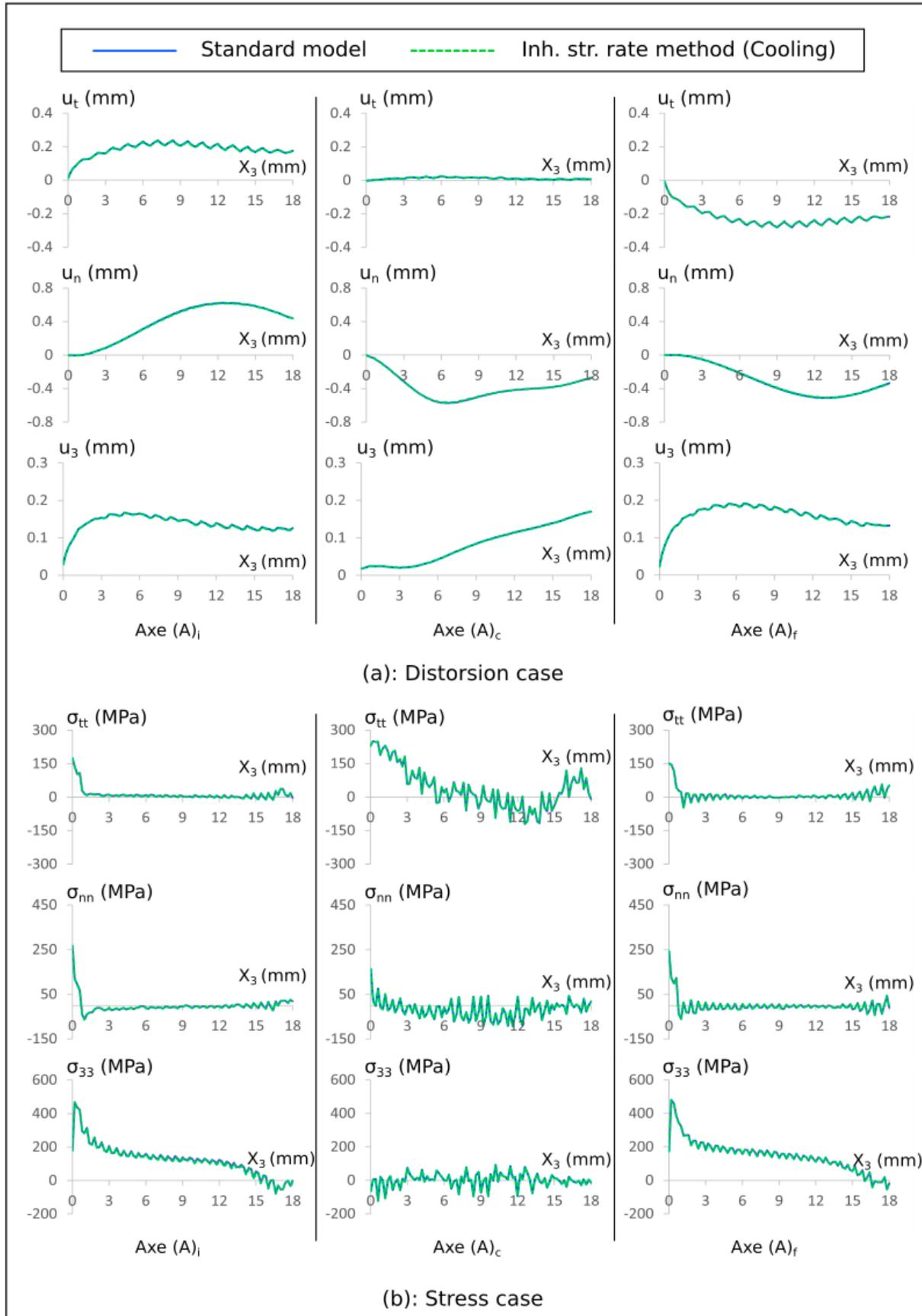


FIGURE 5.16 – Application de la méthode inherent strain rate : Profils de distorsions  $\underline{u}$  et de contraintes  $\underline{\sigma}$  résiduelles au refroidissement total tracés le long des axes  $(A)_i$ ,  $(A)_c$  et  $(A)_f$  de l'aube. À gauche, les résultats obtenus par le calcul complet ; à droite les résultats obtenus par la méthode inherent strain rate.

Nous observons un très bon accord entre les deux résultats, en distorsions comme en contraintes résiduelles, issus de ces deux modèles. Ceci révèle l'efficacité de la méthode inherent strain rate en période de refroidissement.

### Évaluation de l'efficacité de la méthode inherent strain rate

Elle consiste à comparer sa complexité avec celle du modèle standard. En effet, pour un calcul effectué sur 32 cœurs dans une parallélisation à mémoire partagée, le tableau 5.1 ci-dessous nous donne, pour le mur et l'aube, les différentes durée de calcul de l'application de ces deux modèles et le pourcentage de réduction de temps de calcul de la méthode inherent strain rate.

Structure	Modèle standard	Méthode Inh. str.rate	Gain en temps
Mur	131h16min	25h04min	5
Aube	133h02min	24h29min	5

TABLE 5.1 – Temps de calcul des applications de la méthode inherent strain rate et du modèle standard

Nous pouvons donc observer que l'application de la méthode inherent strain rate en géométrie simple comme complexe nous permet d'obtenir de bonnes approximations numériques avec au moins cinq fois moins de temps de calcul.

## Conclusion

Ce chapitre avait pour objet de développer la méthode inherent strain rate comme version temporelle de la méthode inherent strain nous permettant de bien approcher les distorsions et contraintes de la pièce en cours de construction. Pour ce faire, nous avons tout d'abord présenté le principe de cette méthode par la linéarisation de la loi de comportement élasto-viscoplastique discrétisée et donc la linéarisation du problème mécanique à résoudre permettant de calculer plus simplement et plus rapidement les champs de vitesse et de pression. Nous avons également présenté les origines de cette méthode, essentiellement fondée sur la reproduction plus ou moins conforme du profil du filtrage de la vitesse de déformation plastique cumulée d'un instant à l'autre, tout au long de la construction de chaque cordon du système. Ainsi, la connaissance de ce profil à un instant donné nous permet de le prédire aux instants suivants. Les applications de cette méthode ont porté sur le mur et l'aube. Contrairement à celles de la méthode inherent strain développée au précédent chapitre, elles se sont révélées très efficaces avec un très bon accord de ses résultats, en distorsions comme en contraintes, avec ceux du modèle

standard, en période de chauffage, comme en période de refroidissement. Le facteur de gain en temps de calcul s'élevant à 5 reste toutefois bien inférieur à celui de la méthode inherent strain s'élevant à 20.



# Chapitre 6

## Conclusions et perspectives

### Contents

---

<b>6.1</b>	<b>Conclusions</b>	<b>227</b>
<b>6.2</b>	<b>Perspectives</b>	<b>230</b>
6.2.1	La modélisation théorique	230
6.2.2	La modélisation numérique	230
6.2.3	La réduction de complexité	231

---

### 6.1 Conclusions

Ce projet de thèse a eu pour objet le développement d'un modèle numérique efficace de simulation thermomécanique macroscopique par éléments finis du procédé de fabrication additive DED (directed energy deposition). Il s'est articulé en différents points que sont les travaux bibliographiques, la modélisation thermomécanique du DED, l'application et validation du modèle numérique développé, le développement et la mise en œuvre de la méthode inherent strain et de la méthode inherent strain rate.

Les travaux bibliographiques, présentés au chapitre 1 du présent document, nous ont permis de recenser et d'étudier les modèles numériques existant dans la littérature, notamment leurs efficacités et leurs limitations. Ces dernières ont principalement été :

- Les non prises en compte des interactions thermiques entre gaz protecteur et faisceau laser, et entre pièce construite et matière entrante ;
- la loi de comportement mécanique limitée à l'élasto-plasticité parfaite ou avec écrouissage isotrope ;
- l'incapacité de l'approche inactive element à calculer la position géométrique de la matière au moment de son dépôt ;

- l’incapacité de l’approche quiet element à calculer la position géométrique de la matière au moment de son dépôt sans surestimation du module d’Young des éléments dormants ;
- l’incapacité de la méthode inherent strain de reproduire approximativement les distorsions et contraintes résiduelles d’une pièce construite par DED.

La modélisation thermomécanique du DED, faite dans le chapitre 2, apporte des solutions à ces limitations mis à part la dernière. En effet, en ce qui concerne les interactions thermiques, nous avons pris en compte l’interaction gaz protecteur/faisceau laser par une loi gaussienne modélisant l’élévation de température du gaz protecteur et intervenant dans les expressions de flux de convection et de rayonnement. Nous avons également pris en compte l’interaction pièce construite/matière entrante par l’équation aux interfaces de Rankine Hugoniot relative à l’entropie. En ce qui concerne la loi de comportement mécanique, nous avons adopté la loi de comportement élasto-viscoplastique avec écrouissage mixte (isotrope et cinématique non linéaire) proposée par Chaboche et al. [60, 64] ; laquelle nous a permis de définir un module tangent consistant plus général que celui de la loi de comportement élasto-viscoplastique à écrouissage isotrope calculé par Jaouen [66] et numériquement implémentée dans la librairie CimLib du CEMEF. En ce qui concerne la position géométrique de la matière au moment de son dépôt, comme solution nous avons proposé de calculer la distorsion du domaine inactif par une stratégie de minimisation de distorsion et de déformation sous contraintes d’incompressibilité et de distorsion imposée à l’interface entre domaine actif et domaine inactif.

L’application et la validation du modèle numérique développé, faites dans le chapitre 3, nous ont permis de démontrer la pertinence du modèle numérique développé, principalement par l’étude de convergence, la comparaison à la méthode quiet element et la validation expérimentale. En effet, l’étude de convergence a montré de bons résultats sous les aspects temporel et spatial. La comparaison à la méthode quiet element, a démontré la grande efficacité du calcul des distorsions des éléments non actifs par la stratégie de minimisation de l’intensité des déformations et des distorsions, en ce que, contrairement à la méthode quiet element, elle permet d’obtenir des distorsions à la fois régulières et de très faibles amplitudes de ces éléments notamment dans les zones très éloignées de l’interface géométrique entre les domaines actif et non actif. La validation expérimentale, quant à elle, a été effectuée sur la base des résultats de Biegler et al. [45, 46]. Pour ce qui est de la thermique, nous avons montré de bons accords entre les résultats numériques et les données expérimentales, notamment du fait de la prise en compte de l’élévation de la température du gaz protecteur par le faisceau laser. Mais pour ce qui est de la mécanique, la comparaison avec les mesures expérimentales a montré des écarts significatifs en termes de déplacements. Toutefois dans l’ensemble nous avons observé un bon

accord qualitatif. Un meilleur accord quantitatif pourra dans l'ensemble être obtenu sous réserve d'une meilleure calibration de l'efficacité énergétique, d'une meilleure caractérisation quantitative des différents paramètres de la loi de comportement mécanique adoptée, d'une meilleure définition des conditions aux limites et éventuellement de mesures expérimentales plus précises.

La méthode inherent strain, développée dans le chapitre 4, a apporté une amélioration du calcul du champ inherent strain incrémental, paramètre de sollicitation mécanique intervenant dans le problème mécanique non linéaire à résoudre relatif à chaque cordon déposé. En effet, les tests de validation de la nouvelle méthode de calcul de ce champ, basée sur une méthode inverse appliquée à la loi de comportement mécanique non linéaire, ont montré de meilleurs résultats que ceux de la méthode de calcul initialement proposée par Liang et al. [44]. Cependant, cette nouvelle méthode, comme celle de Liang et al, fait appel au modèle standard. Par conséquent, afin de rendre la méthode inherent strain compétitive, l'utilisation du modèle standard pour le calcul des champs inherent strain incrémentaux doit être minimisé. A cet effet, deux méthodes d'estimation des champs inherent strain incrémentaux ont été proposées et développées : le calcul de moyenne et le transport de profil. Le principe de ces méthodes consiste à estimer les champs inherent strain incrémentaux des cordons supérieurs à partir des champs inherent strain incrémentaux des premiers cordons, dits cordons d'apprentissage, champs calculés par la nouvelle méthode proposée. Ces deux méthodes ont fait l'objet d'application dans le calcul des distorsions et contraintes résiduelles du mur et de l'aube de turbine. Bien que présentant des facteurs de gain en temps de calcul de l'ordre de 20, des écarts ont été observés entre les distorsions et contraintes de ces deux méthodes et celles du modèle standard. Toutefois le transport s'est révélé plus efficace que le calcul de moyenne uniquement sur les distorsions suivant les directions tangentielle et verticale, les distorsions suivant la direction normale étant de faible amplitude par rapport à celles du modèle standard. Cet écart étant fortement lié à la complexité de la géométrie de l'aube de turbine et à la non-actualisation de l'apprentissage, la méthode inherent strain, de manière globale, en dépit des améliorations que nous lui avons apportées voit son efficacité réduite aux géométries simples (de très faibles courbures).

La méthode inherent strain rate, développée au chapitre 5, apparaît comme la version temporelle de la méthode inherent strain, dans la mesure où elle vise à calculer approximativement et plus simplement les distorsions et contraintes de la pièce tout au long de sa construction. Ce calcul approximatif et simple part de la linéarisation de la loi de comportement mécanique, menant ainsi à la résolution d'un problème mécanique linéarisé faisant intervenir un paramètre scalaire calculé de manière à approcher la vitesse de déformation plastique cumulée. Il a été montré dans ce chapitre, que la méthode inherent strain rate

trouve son origine dans le transport plus ou moins conforme du profil de la vitesse de déformation cumulée au voisinage de la zone de chauffage le long du cordon en cours de construction pour les zones suffisamment éloignées de ses extrémités. Ainsi, en période de construction du cordon, la connaissance à un instant donné du profil de ce champ peut permettre d'estimer son profil à un instant ultérieur. En période de refroidissement, une technique d'interpolation linéaire est développée. L'application de cette méthode dans le calcul des distorsions et contraintes de la pièce tout au long de sa construction nous a donné de très bons résultats : l'accord entre les résultats de la méthode inherent rate et ceux du modèle standard est excellent en période de chauffage et en période de refroidissement. Le facteur de gain en temps de calcul a été évalué à 5 soit quatre fois plus petit que celui de la méthode inherent strain, mais avec des résultats beaucoup plus fiables.

## 6.2 Perspectives

Les perspectives portent sur trois différents points : la modélisation théorique, la modélisation numérique, la réduction de complexité.

### 6.2.1 La modélisation théorique

Les perspectives envisageables dans ce cadre sont :

- la poursuite de l'étude de validation expérimentale mécanique et thermique ;
- la modélisation de la thermofluidique du gaz protecteur permettant un calcul plus précis de son élévation de température, de son écoulement autour de la pièce construite et une définition plus précise des flux thermiques de convection et de rayonnement avec la pièce en construction ;
- le couplage entre modélisation thermomécanique et modélisation thermo-métallurgique permettant de simuler les évolutions de microstructure en vue d'une meilleure caractérisation de la loi de comportement mécanique, éventuellement anisotrope ;
- le couplage entre modélisation thermomécanique macroscopique et modélisation thermomécanique mésoscopique qui devrait inclure pour cette dernière la thermofluidique du bain de fusion.

### 6.2.2 La modélisation numérique

Les perspectives envisageables dans ce cadre sont :

- l'adoption d'un schéma adaptatif de discrétisation temporelle en période de refroidissement à partir du  $\theta$ -schéma développé au chapitre 2 ;
- l'adoption d'un maillage adaptatif en période de construction de la pièce dans lequel l'interface entre le domaine actif et le domaine inactif soit conformément représentée ;

- l'implémentation informatique du modèle numérique dans la librairie CimLib.

### 6.2.3 La réduction de complexité

Les perspectives envisageables dans ce cadre sont :

- le développement de la méthode de réduction d'ordre de modèle de type POD-Galerkin et son couplage avec la méthode inherent strain rate ;
- le couplage entre méthode inherent strain et inherent strain rate dans lequel la méthode inherent strain rate serait utilisée à la place du modèle standard lors du calcul des champs inhrent strain incrémentaux d'apprentissage ;
- l'amélioration de la méthode inherent strain par l'intégration de l'actualisation de l'apprentissage dans l'estimation des champs inherent strain incrémentaux. Ce dernier axe semble le plus à même d'offrir à relativement court terme un gain en temps de calcul comparable à la méthode de inherent strain et une qualité de résultats comparable à la méthode inherent strain rate



# Chapitre 7

## Annexe : Propriétés thermophysiques et thermomécaniques de l'acier inoxydable 316L

Il est question dans cette annexe de déterminer les propriétés thermophysiques et thermomécaniques intervenant dans les équations modélisant la thermomécanique du procédé DED. Au préalable, nous présenterons, et comparerons le cas échéant, les différentes données issues de la littérature scientifique.

### Contents

---

<b>7.1 Propriétés thermophysiques</b>	<b>233</b>
7.1.1 Températures de solidus et liquidus	234
7.1.2 Masse volumique	234
7.1.3 Chaleur massique	235
7.1.4 Conductivité thermique	235
7.1.5 Coefficient de dilatation thermique	235
7.1.6 Choix des valeurs des propriétés thermophysiques	236
<b>7.2 Propriétés thermomécaniques</b>	<b>237</b>
7.2.1 Comportement élastique	237
7.2.2 Comportement viscoplastique	237
7.2.3 Valeurs des coefficients du comportement élasto-viscoplastique	241

---

### 7.1 Propriétés thermophysiques

Il s'agit essentiellement de :

- les températures de solidus ( $T_s$ ) et de liquidus ( $T_l$ );
- la masse volumique ( $\rho(T)$ )
- la chaleur massique ( $c_p(T)$ );
- la conductivité thermique ( $\kappa(T)$ );
- le coefficient de dilatation thermique ( $\alpha(T)$ );

### 7.1.1 Températures de solidus et liquidus

Le tableau ci-dessous présente les différentes valeurs de ces températures issues des revues scientifiques ainsi que leurs auteurs respectifs.

Auteur	$T_s$ (K)	$T_l$ (K)
Biegler [45]	1553	1723
Kim [67]	1670	1730

Nous observons un bon accord des températures de liquidus contrairement aux températures de solidus.

### 7.1.2 Masse volumique

Les différents auteurs des différentes valeurs de  $\rho(T)$  fonction de la température  $T$  sont :

- Depradeux [72];
- Kim [67].

La figure 7.1 ci-dessous nous présente les courbes correspondantes. Nous y observons un bon accord.

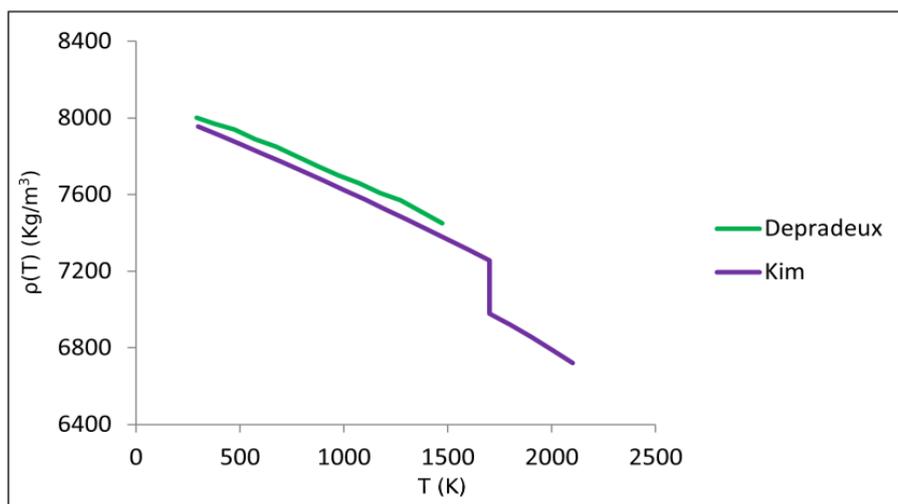


FIGURE 7.1 – Différentes courbes de  $\rho(T)$

### 7.1.3 Chaleur massique

Les différents auteurs des différentes valeurs de  $c_p(T)$  fonction de la température  $T$  sont :

- Biegler [46];
- Depradeux [72];
- Muránsky [68];
- Kim [67].

La figure 7.2 ci-dessous nous présente les courbes correspondantes. Nous observons entre elles un bon accord jusqu'à la température 1700K.

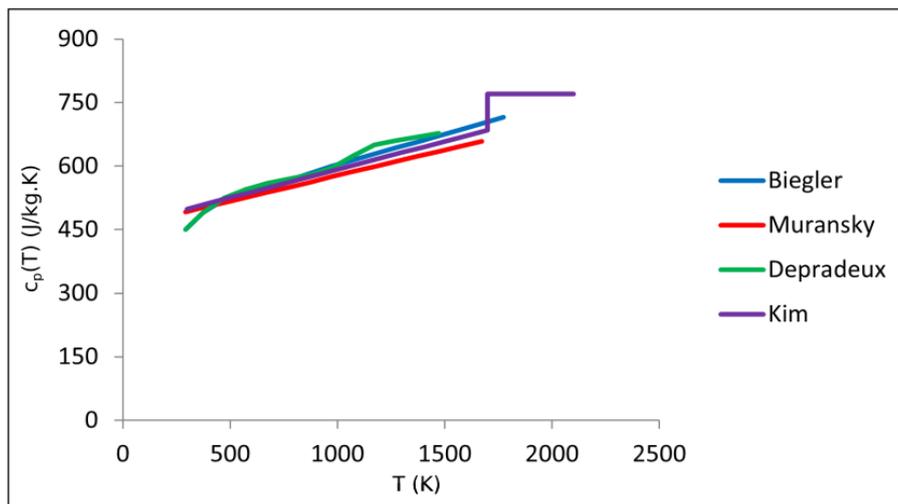


FIGURE 7.2 – Différentes courbes de  $c_p(T)$

### 7.1.4 Conductivité thermique

Les différents auteurs des différentes valeurs de  $\kappa(T)$  fonction de la température  $T$  sont :

- Biegler [46];
- Depradeux [72];
- Muránsky [68];
- Kim [67].

La figure 7.3 ci-dessous nous présente les courbes correspondantes. Nous y observons un bon accord jusqu'à la température 1700K.

### 7.1.5 Coefficient de dilatation thermique

Les différents auteurs des différentes valeurs de  $\alpha(T)$  fonction de la température  $T$  sont :

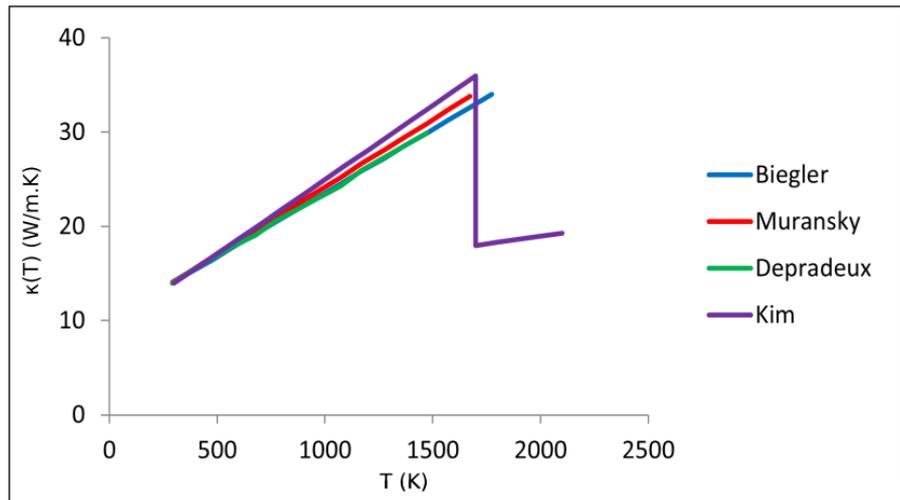


FIGURE 7.3 – Différentes courbes de  $\kappa(T)$

- Biegler [46] ;
- Depradeux [72] ;
- Muránsky [68] ;
- Kim [67].

La figure 7.4 ci-dessous nous présente les courbes correspondantes. Nous y observons dans l'ensemble un bon accord entre ces courbes, en particulier entre la courbe de Biegler et celle de Muránsky, puis entre la courbe de Kim et celle de Depradeux.

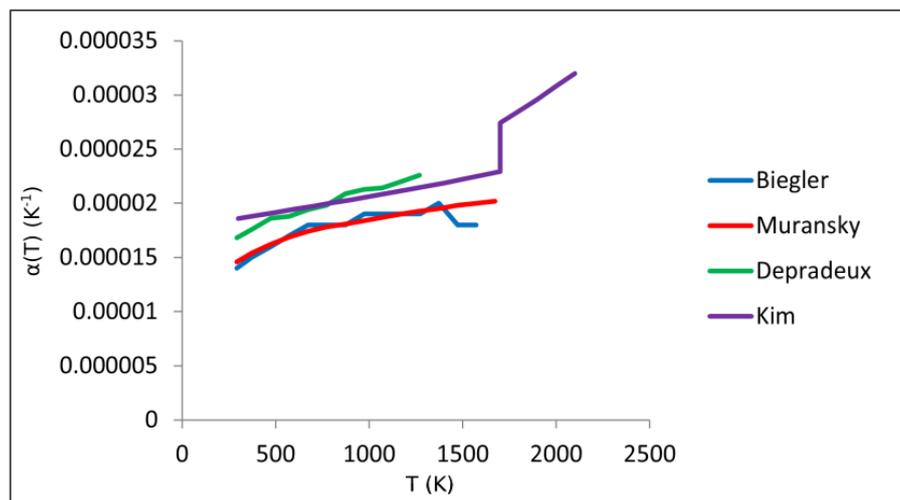


FIGURE 7.4 – Différentes courbes de  $\alpha(T)$

### 7.1.6 Choix des valeurs des propriétés thermophysiques

En raison de leurs exhaustivités, de leur proximité avec les données thermophysiques des autres auteurs, nous utiliserons, à l'exception du coefficient de dilatation thermique, les

données de Kim à l'état solide, compte tenu l'échelle macroscopique de notre modélisation thermomécanique du procédé DED. Ces données thermophysiques sont données par les équations :

$$\begin{aligned}\rho(T) &= 8084.2 - 0.042086T - 3.8942 \times 10^{-5}T^2 \quad (kg.m^{-3}) \\ c_p(T) &= 458.9848 + 0.1328T \quad (J.(Kg.K)^{-1}) \\ \kappa(T) &= 9.248 + 0.01571T \quad (W.(m.K)^{-1})\end{aligned}\tag{7.1}$$

## 7.2 Propriétés thermomécaniques

Nous nous proposons dans cette partie de les regrouper par comportement mécanique. En effet, nous les présenterons pour chacun des comportements mécaniques élémentaires que sont : les comportements élastique et viscoplastique.

### 7.2.1 Comportement élastique

Il est principalement donné par le module d'Young  $E(T)$  et le coefficient de Poisson  $\nu(T)$  dont les expressions en fonction des modules de cisaillement  $\mu(T)$  et de compression  $\chi(T)$  sont données par :

$$\begin{aligned}E(T) &= \frac{9\chi(T)\mu(T)}{3\chi(T) + \mu(T)}, \quad \nu(T) = \frac{3\chi(T) - 2\mu(T)}{2(3\chi(T) + \mu(T))} \\ \Leftrightarrow \mu(T) &= \frac{E(T)}{2(1 + \nu(T))}, \quad \chi(T) = \frac{E(T)}{3(1 - 2\nu(T))}\end{aligned}\tag{7.2}$$

Les différents auteurs des différentes valeurs de  $E(T)$  et  $\nu(T)$  fonction de la température  $T$  sont :

- Biegler [46];
- Muránsky [68];
- Depradeux [72].

La figure 7.5 ci-dessous nous présente les courbes correspondantes. Dans la figure 7.5.(a), nous observons de bons accords des différentes courbes de  $E(T)$  jusqu'à 1000K ; les courbes de Muránsky et Depradeux présentant cependant un très bon accord au delà de cette température.

### 7.2.2 Comportement viscoplastique

Il se caractérise entre autres par la limite d'élasticité initiale  $\sigma_y(T)$  et les courbes d'érouissage  $\bar{\sigma} = f(\bar{\epsilon})$  pour différentes valeurs de température et en fonction de la vitesse de déformation imposée dans le cadre d'un essai de traction donné. Les différents auteurs de ces données sont :

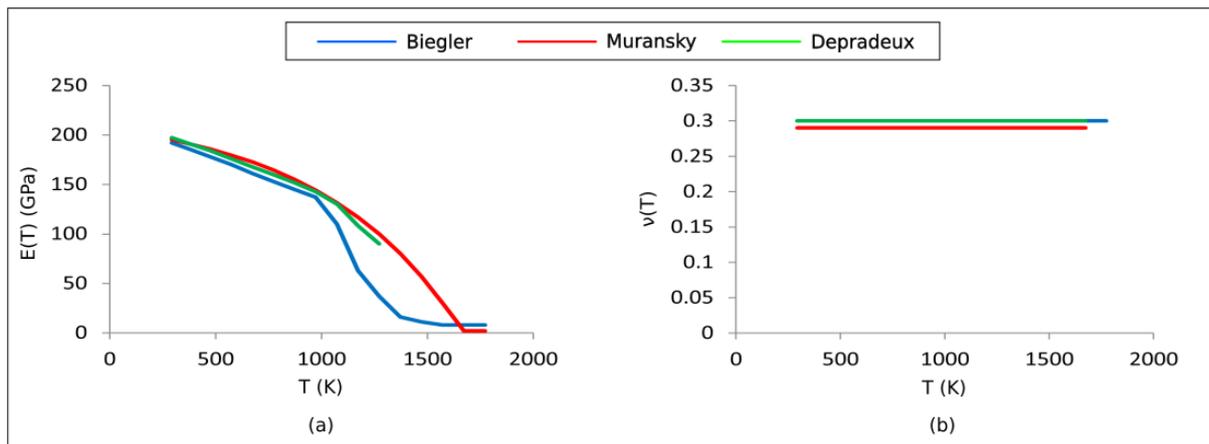


FIGURE 7.5 – Différentes courbes de  $E(T)$  et  $\nu(T)$

- Biegler [46] ;
- Muránsky [68] ;
- Depradeux [72].

Nous précisons que seul Depradeux de ces quatre auteurs présente des essais de traction pour deux différentes valeurs de vitesse de déformation que sont :  $2,5 \times 10^{-3} s^{-1}$  (essai rapide) et  $2,5 \times 10^{-4} s^{-1}$  (essai lent).

La figure 7.6 ci-dessous nous présente les courbes de  $\sigma_y(T)$  des différents auteurs. Nous y observons :

- une importante décroissance des valeurs de  $\sigma_y(T)$  avec l'augmentation de  $T$  ;
- de faibles accords, dans l'ensemble, des différentes valeurs de  $\sigma_y(T)$ , surtout pour de faibles valeurs de  $T$  ;
- de bons accords entre les courbes de Múransky et Depradeux (essai lent) à partir de  $600K$  ;
- la sensibilité à la vitesse de déformation de  $\sigma_y(T)$  à partir de  $1073K$ .

La figure 7.7 ci-dessous nous présente les courbes d'érouissage de Biegler pour différentes valeurs de  $T$ . Nous y observons principalement une importante diminution de l'érouissage avec l'augmentation de  $T$ . La figure 7.8 ci-dessous nous présente les courbes d'érouissage de Múransky pour différentes valeurs de  $T$ . Nous y observons également une importante diminution de l'érouissage avec l'augmentation de  $T$ , et par rapport à celles de Biegler, une stabilisation plus rapide des valeurs de  $\bar{\sigma}$ . La figure 7.9 ci-dessous nous présente les courbes d'érouissage de Depradeux pour différentes valeurs de  $T$ , suivant les deux vitesses de déformation données ci-dessus. Nous y observons :

- une importante diminution de l'érouissage avec l'augmentation de  $T$
- de faibles sensibilités à la vitesse de déformation jusqu'à  $873K$  ;

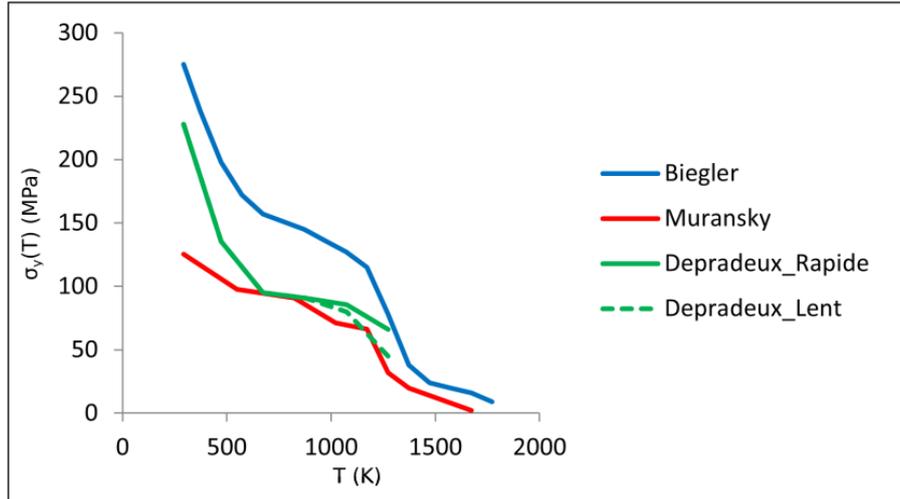


FIGURE 7.6 – Différentes courbes de  $\sigma_y(T)$

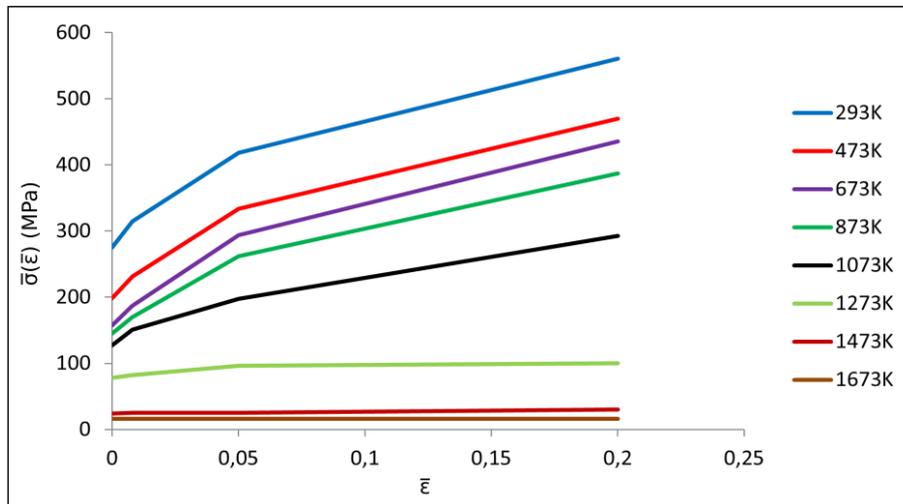


FIGURE 7.7 – Courbes d'écouissage de Biegler

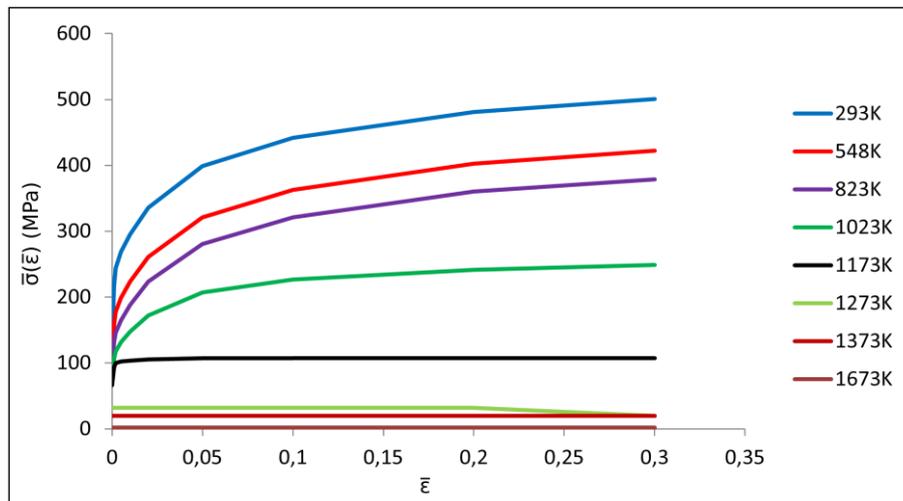


FIGURE 7.8 – Courbes d'écouissage de Múransky

- d'importantes sensibilités à la vitesse de déformation à partir de  $1073K$ , mettant ainsi en évidence l'effet visqueux des déformations plastiques du matériau aux hautes températures.

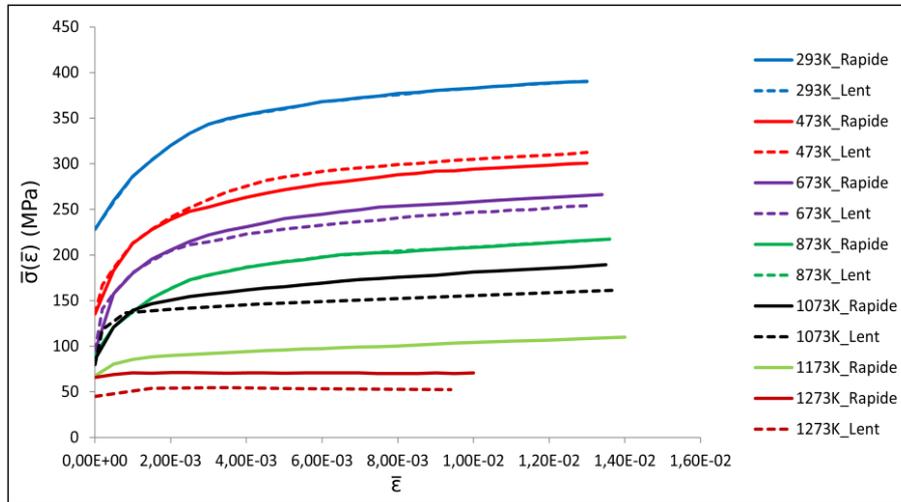


FIGURE 7.9 – Courbes d'érouissage de Depradeux

La figure 7.10 ci-dessous nous présente des comparaisons des différentes courbes d'érouissage pour quelques valeurs de  $T$  :  $293K$ ,  $1073K$ ,  $1173K$  et  $1273K$ . Nous y observons :

- pour  $T = 293K$  (figure 7.9.(a)), un accord moyennement bon des courbes de Biegler, Muránsky, et de l'allure des deux courbes de Depradeux pour des valeurs suffisamment importantes de  $\bar{\epsilon}$  ;
- pour  $T = 1073K$  (figure 7.9.(b)), un bon accord de l'allure de la courbe Depradeux (essai lent) et de la courbe de Biegler ;
- pour  $T = 1173K$  et  $T = 1273K$  (figure 7.9.(c)-(d)), un faible accord de l'allure des courbes de Depradeux et des courbes de Biegler et Múransky.

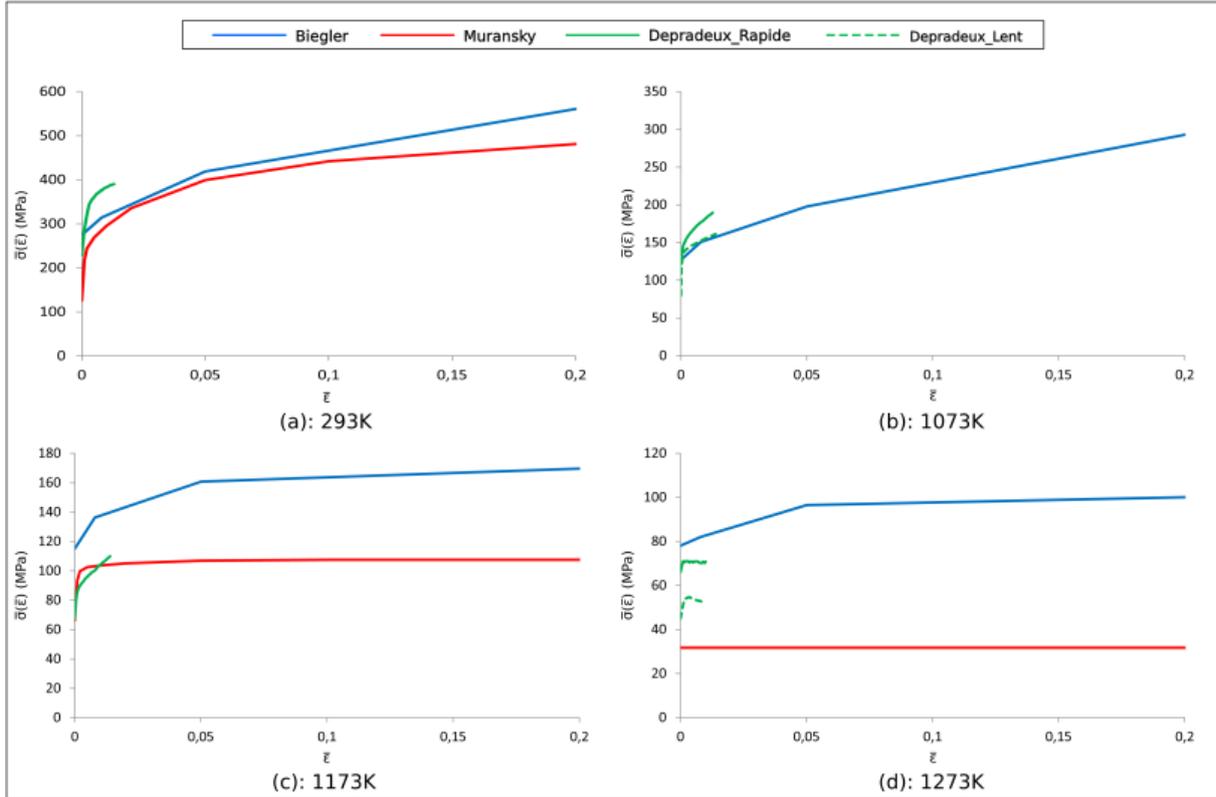


FIGURE 7.10 – Comparaison des courbes d'écroutissage des différents auteurs

### 7.2.3 Valeurs des coefficients du comportement élasto-viscoplastique

Ces valeurs sont présentées suivant les données d'écroutissage de chacun des trois auteurs cités ci-dessus.

1. Suivant les données de Biegler :

Nous négligeons l'écroutissage cinématique et considérons la fonction d'écroutissage isotrope  $R_{\bar{\epsilon}}$  comme une fonction puissance, soit l'expression :

$$R_{\bar{\epsilon}}(\bar{\epsilon}) = H(T) \bar{\epsilon}^{n(T)}, \quad \forall \bar{\epsilon} \geq 0 \quad (7.3)$$

Ainsi, les coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique, fonctions de la température  $T$ , sont donnés dans le tableau ci-dessous :

$T$ (°C)	20	200	400	600	800	1000	1200	1400
$\sigma_Y(T)$ (MPa)	275	198	157	145	100	60	22.75	5.8
$H(T)$ (MPa)	550	500	400	400	350	0	0	0
$n(T)$	0.55	0.56	0.58	0.59	0.61	0.36	0.36	0.36
$K_{vp}(T)$ (MPa.s <sup>-m</sup> )	0	0	0	40	140	100	80	60
$m(T)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

TABLE 7.1 – Coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique suivant les données d'écroutissage de Biegler

2. Suivant les données de Depradeux :

Nous négligeons également l'érouissage cinématique et considérons la même fonction puissance 7.3 pour la fonction d'érouissage isotrope  $R_{\bar{\varepsilon}}$ . Les coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique, fonctions de la température, sont ainsi donnés dans le tableau ci-dessous :

$T$ (°C)	20	200	400	600	800	1000	1200	1400
$\sigma_Y(T)$ (MPa)	310	230	207	159	90	37	19.73	2.1
$H(T)$ (MPa)	550	500	400	400	350	0	0	0
$n(T)$	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45	0.45
$K_{vp}(T)$ (MPa.s <sup>-m</sup> )	0	0	0	40	140	100	80	60
$m(T)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

TABLE 7.2 – Coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique suivant les données d'érouissage de Depradeux

3. Suivant les données de Muránsky : Nous considérons deux cas de définition des coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique : le cas d'érouissage isotrope et le cas d'érouissage mixte.

Dans le cas d'érouissage isotrope, nous considérons également la même fonction puissance 7.3 pour la fonction d'érouissage isotrope  $R_{\bar{\varepsilon}}$ . Les coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique, fonctions de la température, sont ainsi donnés dans le tableau ci-dessous :

$T$ (°C)	20	275	550	750	900	1000	1100	1400
$\sigma_Y(T)$ (MPa)	120.6	91.12	82.6	66.	65.5	31.82	19.73	2.1
$H(T)$ (MPa)	522.2	478.3	447.2	262.5	10.9	0	0	0
$n(T)$	0.230	0.269	0.300	0.245	0.270	0.270	0.270	0.270
$T$ (°C)	20	200	400	600	800	1000	1200	1400
$K_{vp}(T)$ (MPa.s <sup>-m</sup> )	0	0	0	40	140	100	80	60
$m(T)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

TABLE 7.3 – Coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique à érouissage isotrope ( $N_c = 0$ ) suivant les données d'érouissage de Muránsky

Dans le cas d'érouissage mixte, nous considérons l'érouissage cinématique avec un nombre de composantes s'élevant à 2 ( $N_c = 2$ ) et considérons la fonction d'érouissage isotrope  $R_{\bar{\varepsilon}}$  comme une fonction à variation exponentielle, soit l'expression :

$$R_{\bar{\varepsilon}}(\bar{\varepsilon}) = Q(T) \left(1 - e^{-b(T)\bar{\varepsilon}}\right), \quad \forall \bar{\varepsilon} \geq 0 \quad (7.4)$$

Les coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique, fonctions de la température, sont ainsi donnés dans le tableau ci-dessous :

$T$ (°C)	20	275	550	750	900	1000	1100	1400
$\sigma_Y(T)$ (MPa)	125.6	97.6	90.9	71.4	66.2	31.82	19.73	2.1
$Q(T)$ (MPa)	153.4	154.7	150.6	57.9	0	0	0	0
$b(T)$	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9	6.9
$C_1(T)$ (GPa)	156.435	100.631	64.341	56.232	0	0	0	0
$\gamma_1(T)$	1410.9	1410.9	1410.9	1410.9	1410.9	1410.9	1410.9	1410.9
$C_2(T)$ (GPa)	6.134	5.568	5.227	4.108	0.292	0	0	0
$\gamma_2(T)$	47.19	47.19	47.19	47.19	47.19	47.19	47.19	47.19
$T$ (°C)	20	200	400	600	800	1000	1200	1400
$K_{vp}(T)$ (MPa.s <sup>-m</sup> )	0	0	0	40	140	100	80	60
$m(T)$	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3	0.3

TABLE 7.4 – Coefficients de la loi de comportement élasto-viscoplastique à écrouissage mixte ( $N_c = 2$ ) suivant les données d'écrouissage de Muránsky



# Bibliographie

- [1] ISO/ASTM. Fabrication additive - principes généraux - fondamentaux et vocabulaire. <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso-astm:52900:ed-2:v1:fr>, 2021. [En ligne; consulté le 12/08/2022].
- [2] Dong-Gyu Ahn. Directed energy deposition (ded) process : State of the art. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 8 :703 – 742, March 2021.
- [3] Dong-Gyu Ahn. Direct metal additive manufacturing processes and their sustainable applications for green technology : A review. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 3(4) :381–395, 2016.
- [4] Donghong Ding, Zengxi Pan, Dominic Cuiuri, and Huijun Li. Wire-feed additive manufacturing of metal components : technologies, developments and future interests. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 81(1) :465–481, 2015.
- [5] Adrita Dass and Atieh Moridi. State of the art in directed energy deposition : From additive manufacturing to materials design. *Coatings*, 9(7) :418, 2019.
- [6] Trumpf. Laser metal deposition (lmd). [https://www.trumpf.com/en\\_GB/solutions/applications/additive-manufacturing/](https://www.trumpf.com/en_GB/solutions/applications/additive-manufacturing/), 2022. [Online; accessed 12/08/2022].
- [7] Ambrish Singh, Sajjan Kapil, and Manas Das. A comprehensive review of the methods and mechanisms for powder feedstock handling in directed energy deposition. *Additive Manufacturing*, 35 :101388, 2020.
- [8] S. Liu, Y. Zhang, and R. Kovacevic. Numerical simulation and experimental study of powder flow distribution in high power direct diode laser cladding process. *Lasers in Manufacturing and Materials Processing*, 2(4) :199–218, 2015.
- [9] Frederick Lia, Joshua Park, Jay Tressler, and Richard Martukanitz. Partitioning of laser energy during directed energy deposition. *Additive Manufacturing*, 18 :31–39, 2017.
- [10] Clint Atwood, Michelle Griffith, Lane Harwell, Eric Schlienger, Mark Ensz, John Smugeresky, Tony Romero, Don Greene, and Daryl Reckaway. Laser engineered net

- shaping (lens<sup>TM</sup>) : A tool for direct fabrication of metal parts. *International Congress on Applications of Lasers & Electro-Optics*, 1998(1) :E1–E7, 1998.
- [11] Thomas Childerhouse and Martin Jackson. Near net shape manufacture of titanium alloy components from powder and wire : A review of state-of-the-art process routes. *Metals*, 9(6), 2019.
- [12] Mir Saman Safavi, Aydin Bordbar-Khiabani, Jafar Khalil-Allafi, Masoud Mozafari, and Livia Visai. Additive manufacturing : An opportunity for the fabrication of near-net-shape niti implants. *Journal of Manufacturing and Materials Processing*, 6(3) :65, 2022.
- [13] A. Riveiro, J. del Val, R. Comesaña, F. Lusquiños, F. Quintero, M. Boutinguiza, and J. Pou. Laser additive manufacturing processes for near net shape components. In *Near Net Shape Manufacturing Processes*, pages 105–141. Springer, 2019.
- [14] BeAM. Ded applications. <https://www.beam-machines.com/applications-process-3d-printing>, 2022. [Online ; accessed 17/08/2022].
- [15] J. Michael Wilson, Cecil Piya, Yung C. Shin, Fu Zhao, and Karthik Ramani. Remanufacturing of turbine blades by laser direct deposition with its energy and environmental impact analysis. *Journal of Cleaner Production*, 80 :170–178, 2014.
- [16] Abdollah Saboori, Alberta Aversa, Giulio Marchese, Sara Biamino, Mariangela Lombardi, and Paolo Fino. Application of directed energy deposition-based additive manufacturing in repair. *Applied Sciences*, 9(16) :3316, 2019.
- [17] D.A. Wahab and A.H. Azman. Additive manufacturing for repair and restoration in remanufacturing : An overview from object design and systems perspectives. *Processes*, 7(11) :802, 2019.
- [18] Jennifer Bennett, Daniel Garcia, Marie Kendrick, Travis Hartman, Gregory Hyatt, Kornel Ehmman, Fengqi You, and Jian Cao. Repairing automotive dies with directed energy deposition : industrial application and life cycle analysis. *Journal of Manufacturing Science and Engineering*, 141(2), 2019.
- [19] InssTek. Instek. <http://www.insstek.com/>, 2022. [Online ; accessed 18/08/2022].
- [20] Bernabe Carcel, Alfonso C. Carcel, Irene Perez, Estrella Fernandez, Amparo Barrera, Jesus Sampedro, and Jose A. Ramos. Manufacture of metal foam layers by laser metal deposition. In Rui Vilar, Olinda Conde, Marta Fajardo, Luís O. Silva, Margarida Pires, and Andrei Utkin, editors, *XVII International Symposium on Gas Flow, Chemical Lasers, and High-Power Lasers*, volume 7131, page 713123. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 2009.
- [21] Ryo Koike, Takashi Matsumoto, Yasuhiro Kakinuma, Tojiro Aoyama, Yohei Oda, Tatsuhiko Kuriya, and Masaki Kondo. A basic study on metal foam fabrication with titanium hydride in direct energy deposition. *Procedia Manufacturing*, 18 :68–73, 2018.

- 
- [22] Weichang Xue, B. Vamsi Krishna, Amit Bandyopadhyay, and Susmita Bose. Processing and biocompatibility evaluation of laser processed porous titanium. *Acta biomaterialia*, 3(6) :1007–1018, 2007.
- [23] Titanova. Laser hardfacing. <https://www.titanovalaser.com/services/hardfacing/>, 2022. [Online ; accessed 18/08/2022].
- [24] Giselle Hsiang Loh, Eujin Pei, David Harrison, and Mario D Monzón. An overview of functionally graded additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 23 :34–44, 2018.
- [25] Bryan Heer and Amit Bandyopadhyay. Compositionally graded magnetic-nonmagnetic bimetallic structure using laser engineered net shaping. *Materials Letters*, 216 :16–19, 2018.
- [26] Yanning Zhang and Amit Bandyopadhyay. Direct fabrication of compositionally graded ti-al<sub>2</sub>o<sub>3</sub> multi-material structures using laser engineered net shaping. *Additive Manufacturing*, 21 :104–111, 2018.
- [27] Dong-Gyu Ahn. Applications of laser assisted metal rapid tooling process to manufacture of molding & forming tools—state of the art. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 12(5) :925–938, 2011.
- [28] W.R. Morrow, H. Qi, I. Kim, J. Mazumder, and S.J. Skerlos. Environmental aspects of laser-based and conventional tool and die manufacturing. *Journal of Cleaner Production*, 15(10) :932–943, 2007.
- [29] D.G. Ahn and H.W. Kim. Study on the manufacture of a thermal management mould with three different materials using a direct metal tooling rapid tooling process. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, 224(3) :385–402, 2010.
- [30] Dong-Gyu Ahn, Seung-Hwa Park, and Hyung-Soo Kim. Manufacture of an injection mould with rapid and uniform cooling characteristics for the fan parts using a dmt process. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 11(6) :915–924, 2010.
- [31] 3D ADEPT Media. Insstek develops an artificial joint using metal 3d printing. <https://3dadept.com/insstek-develops-an-artificial-joint-using-metal-3d-printing/>, 2022. [Online ; accessed 18/08/2022].
- [32] Michael Liu, Abhishek Kumar, Satish Bukkapatnam, and Mathew Kuttolamadom. A review of the anomalies in directed energy deposition (ded) processes & potential solutions-part quality & defects. *Procedia Manufacturing*, 53 :507–518, 2021.
- [33] Yingbin Hu and Weilong Cong. A review on laser deposition-additive manufacturing of ceramics and ceramic reinforced metal matrix composites. *Ceramics International*, 44(17) :20599–20612, 2018.

- [34] Michael Liu and Mathew Kuttolamadom. Nano-scale hardness and abrasion resistance of directed energy deposited co-cr-mo biomedical alloy. In *International Manufacturing Science and Engineering Conference*, volume 84256, page V001T05A022. American Society of Mechanical Engineers, 2020.
- [35] Mattias Miedzinski. Materials for additive manufacturing by direct energy deposition. Master’s thesis, 2017.
- [36] Jose Exequiel Ruiz, Magdalena Cortina, Jon Iñaki Arrizubieta, and Aitzol Lamikiz. Study of the influence of shielding gases on laser metal deposition of inconel 718 superalloy. *Materials*, 11(8), 2018.
- [37] Erik R. Denlinger, Jarred C. Heigel, Pan Michaleris, and T.A. Palmer. Effect of inter-layer dwell time on distortion and residual stress in additive manufacturing of titanium and nickel alloys. *Journal of Materials Processing Technology*, 215 :123–131, 2015.
- [38] Mohamad Bayat, Venkata K. Nadimpalli, Francesco G. Biondani, Sina Jafarzadeh, Jesper Thorborg, Niels S. Tiedje, Giuliano Bissacco, David B. Pedersen, and Jesper H. Hattel. On the role of the powder stream on the heat and fluid flow conditions during directed energy deposition of maraging steel—multiphysics modeling and experimental validation. *Additive Manufacturing*, 43 :102021, 2021.
- [39] Simon Morville. *Modélisation multiphysique du procédé de Fabrication Directe par Projection Laser en vue d’améliorer l’état de surface final*. PhD thesis, Ecole doctorale des sciences de l’ingénieur de Lyon, 2012.
- [40] Panagiotis Michaleris. Modeling metal deposition in heat transfer analyses of additive manufacturing processes. *Finite Elements in Analysis and Design*, 86 :51–60, 2014.
- [41] J.C. Heigel, P. Michaleris, and Edward William Reutzell. Thermo-mechanical model development and validation of directed energy deposition additive manufacturing of ti-6al-4v. *Additive manufacturing*, 5 :9–19, 2015.
- [42] Qingcheng Yang, Pu Zhang, Lin Cheng, Zheng Min, Minking Chyu, and Albert C. To. Finite element modeling and validation of thermomechanical behavior of ti-6al-4v in directed energy deposition additive manufacturing. *Additive Manufacturing*, 12 :169–177, 2016.
- [43] Michael E. Stender, Lauren L. Beghini, Joshua D. Sugar, Michael G. Veilleux, Samuel R. Subia, Thale R. Smith, Christopher W. San Marchi, Arthur A. Brown, and Daryl J. Dagle. A thermal-mechanical finite element workflow for directed energy deposition additive manufacturing process modeling. *Additive Manufacturing*, 21 :556–566, 2018.
- [44] Xuan Liang, Lin Cheng, Qian Chen, Qingcheng Yang, and Albert C. To. A modified method for estimating inherent strains from detailed process simulation for fast re-

- sidual distortion prediction of single-walled structures fabricated by directed energy deposition. *Additive Manufacturing*, 23 :471–486, 2018.
- [45] M. Biegler, B. Graf, and M. Rethmeier. In-situ distortions in lmd additive manufacturing walls can be measured with digital image correlation and predicted using numerical simulations. *Additive Manufacturing*, 20 :101–110, 2018.
- [46] M. Biegler, A. Marko, and B. Rethmeier. Finite element analysis in-situ distortion and bulging for an arbitrarily curved additive manufacturing directed energy deposition geometry. *Additive Manufacturing*, 24 :264–272, 2018.
- [47] Vaibhav Nain, Thierry Engel, Muriel Carin, and Didier Boisselier. Conventional meso-scale and time-efficient sub-track-scale thermomechanical model for directed energy deposition. *Materials*, 15(12) :4093, 2022.
- [48] John Goldak, Aditya Chakravarti, and Malcolm Bibby. A new finite element model for welding heat sources. *Metallurgical transactions B*, 15(2) :299–305, 1984.
- [49] Yukio Ueda, Keiji Fukuda, Keiji Nakacho, and Setsuo Endo. A new measuring method of residual stresses with the aid of finite element method and reliability of estimated values. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 1975(138) :499–507, 1975.
- [50] Yukio Ueda, Keiji Fukuda, and Masayuki Tanigawa. New measuring method of three dimensional residual stresses based on theory of inherent strain (welding mechanics, strength & design). *Transactions of JWRI*, 8(2) :249–256, 1979.
- [51] Yukio Ueda, You Chul Kim, and Min Gang Yuan. A predicting method of welding residual stress using source of residual stress (report i) : characteristics of inherent strain (source of residual stress)(mechanics, strength & structural design). *Transactions of JWRI*, 18(1) :135–141, 1989.
- [52] Nils Keller and Vasily Ploshikhin. New method for fast predictions on residual stress and distortion of am parts. In *2014 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin, 2014.
- [53] Pedro Alvarez, Joseba Ecenarro, Iñaki Setien, Maria San Sebastian, Alberto Echeverria, and Luka Eciolaza. Computationally efficient distortion prediction in powder bed fusion additive manufacturing. *Int. J. Eng. Res. Sci*, 2(10) :39–46, 2016.
- [54] A. Yaghi, S. Afazov, A. Holloway, and W. Denmark. Comparison of fast finite element modelling techniques for prediction of distortion and residual stresses in laser powder bed fusion. *Design and Manufacturing Simulation of Additive Manufacturing*, pages 1–7, 2017.
- [55] Matteo Bugatti and Quirico Semeraro. Limitations of the inherent strain method in simulating powder bed fusion processes. *Additive Manufacturing*, 23 :329–346, 2018.

- [56] Iñaki Setien, Michele Chiumenti, Sjoerd van der Veen, Maria San Sebastian, Fermín Garcíandía, and Alberto Echeverría. Empirical methodology to determine inherent strains in additive manufacturing. *Computers & Mathematics with Applications*, 78(7) :2282–2295, 2019. Simulation for Additive Manufacturing.
- [57] Zhi-Dong Zhang, Osezua Ibadode, Usman Ali, Chinedu Francis Dibia, Pouyan Rahnama, Ali Bonakdar, and Ehsan Toyserkani. Topology optimization parallel-computing framework based on the inherent strain method for support structure design in laser powder-bed fusion additive manufacturing. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 16 :897–923, 2020.
- [58] Xuan Liang, Wen Dong, Qian Chen, and Albert C. To. On incorporating scanning strategy effects into the modified inherent strain modeling framework for laser powder bed fusion. *Additive Manufacturing*, 37 :101648, 2021.
- [59] Xuan Liang, Qian Chen, Lin Cheng, Devlin Hayduke, and Albert C. To. Modified inherent strain method for efficient prediction of residual deformation in direct metal laser sintered components. *Computational Mechanics*, 64 :1719–1733, 2019.
- [60] Jean Lemaitre, Jean-Louis Chaboche, Ahmed Benallal, and Rodrigue Desmorat. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, 2009.
- [61] Samuel Forest and Michel Amestoy. *Mécanique des milieux continus : Volume 1 : Théorie*. Presses des Mines - TRANSVALOR, Paris, France, 2022. ISSN : 1762-746X.
- [62] Francis Fer. *Thermodynamique Macroscopique*, volume 2. Gordon and Breach, 7-9 rue Emile Dubois, Paris 14e, 1971.
- [63] Qiang Chain. *Thermomechanical numerical modeling of additive manufacturing by selective laser melting of powder bed*. PhD thesis, Sciences fondamentales et appliquées, 2018.
- [64] Habibou Maitournam. *Matériaux et structures anélastiques*. Les éditions de Ecole Polytechnique, 2016.
- [65] Robert W. Lewis, Richard E. Teets, Jeffrey A. Sell, and Thomas A. Seder. Temperature measurements in a laser-heated gas by quantitative shadowgraphy. *Appl. Opt.*, 26(17) :3695–3704, Sep 1987.
- [66] Olivier Jaouen. *Modélisation tridimensionnelle par éléments finis pour l’analyse thermo-mécanique du refroidissement des pièces coulées*. Theses, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, December 1998.
- [67] C. S. Kim. Thermophysical properties of stainless steels. *Technical Report*, 9 1975.
- [68] O. Muránsky, M.C. Smith, P.J. Bendeich, and L. Edwards. Validated numerical analysis of residual stresses in safety relief valve (srv) nozzle mock-ups. *Computational Materials Science*, 50 :2203–2215, 2011.

- [69] O. Muránsky, C.J. Hamelin, M.C. Smith, P.J. Bendeich, and L. Edwards. The effect of plasticity theory on predicted residual stress fields in numerical weld analyses. *Computational Materials Science*, 2012.
- [70] Christophe Geuzaine and Jean-François Remacle. Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331, 2009.
- [71] Walter Appel. *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K, 2008.
- [72] Lionel Depradeux. *Simulation numérique du soudage-Acier 316L. Validation sur cas tests de complexité croissante*. PhD thesis, Ecole doctorale des sciences de l'ingénieur de Lyon, 2004.





## RÉSUMÉ

---

Une simulation thermomécanique par éléments finis est développée pour le procédé de fabrication additive DED (directed energy deposition). La simulation est conduite à l'échelle de la pièce, en modélisant le dépôt progressif de matière et la source d'énergie. Une expression générale du module tangent consistant est dérivée et implémentée dans la résolution par éléments finis, dans le cas d'un comportement élasto-viscoplastique avec des écrouissages de type isotrope et cinématique non linéaire. Pour calculer incrémentalement les champs de déplacement, de déformation et de contrainte, une formulation théorique du problème cinématique de positionnement est proposée pour minimiser la distorsion de la fraction non construite en considérant les informations de déplacement et de déformation actuelles. L'analyse de convergence de la simulation développée est effectuée à la fois d'un point de vue temporel et spatial. La validation est effectuée par comparaison avec des résultats expérimentaux de la littérature pour les cas d'un mur rectiligne et d'une aube de turbine présentant une forte courbure. Pour réduire le temps de calcul, une méthode de type "inherent strain" est d'abord proposée, dans laquelle l'inherent strain est déterminée sur quelques cordons, de manière exacte, par une méthode inverse basée sur les résultats de simulation du calcul élasto-visco-plastique standard. Cependant, lorsqu'on applique cette inherent strain dans une simulation couche par couche de la pièce entière, les résultats sont significativement dégradés par rapport à la solution de référence donnée par le calcul standard. Ceci est confirmé, quel que soit le mode d'application de l'inherent strain : uniforme, ou distribution spatiale dans chaque couche. En particulier les écarts à la référence augmentent dans le cas courbe de l'aube de turbine. Pour résoudre ces problèmes, une nouvelle méthode dite "inherent strain rate" est proposée, consistant à linéariser le calcul de dépôt progressif. Pour ce faire, le scalaire vitesse de déformation plastique équivalente est considéré comme étant l'inherent strain rate. Au cours de la simulation du processus, le calcul basé sur la méthode inherent strain rate est combiné avec le calcul standard, conservé pour simuler les extrémités de chacun des cordons. Grâce à cette combinaison et à une mise à jour en ligne de l'inherent strain rate, des résultats parfaits sur les déformations et contraintes sont obtenus pour le mur et l'aube de turbine. Dans cette première version de recherche, la simulation est accélérée d'un facteur 5, ce qui rend la méthode inherent strain rate proposée très prometteuse pour la simulation des procédés de fabrication additive.

## MOTS CLÉS

---

Fabrication additive, simulation numérique, éléments finis, Inherent strain, Inherent strain rate

## ABSTRACT

---

A thermo-mechanical finite element simulation is developed for additive manufacturing by directed energy deposition (DED). The simulation is conducted at the scale of the part, by modelling the progressive deposition of matter and the energy source. A general expression of the consistent tangent modulus is derived and implemented in the finite element resolution, considering an elastic-viscoplastic behavior with both isotropic and non-linear kinematic hardening. To incrementally resolve the displacement, strain and stress fields, a theoretical formulation for the kinematic positioning is proposed to minimize the distortion of the non-constructed fraction by considering current displacement and strain in the constructed part. The convergence analysis of the developed simulation is verified by both temporal and spatial aspects. The validation is obtained by comparison with experimental results taken from the literature for the cases of a straight vertical wall and a turbine blade showing a strong curvature. To reduce the computational time, an incremental inherent strain method is first proposed, where the inherent strain is determined by an inverse method based on simulation results from the standard elastic-viscoplastic calculation applied to a few tracks. However, when applying this inherent strain in the case of a simulation of entire parts, the results are severely degraded with respect to the reference solution given by the standard simulation. This is confirmed, whatever the method to apply inherent strains: uniform, or spatially distributed in each new layer. Especially the results become worse for the highly curved turbine blade structure. To resolve such problems, a new "inherent strain rate" method is proposed, consisting of a linearization of the progressive calculation. This is obtained by considering the scalar equivalent viscoplastic strain rate as the inherent strain rate. During the process simulation, the inherent strain rate-based calculation is combined with the standard calculation which is kept to simulate the ends of each track. Thanks to this combination, and to a continuous updating of the inherent strain rate, perfect results are obtained for both the single wall and the turbine blade, with a time gain of 5. This makes the proposed inherent strain rate method very promising for additive manufacturing process simulation.

## KEYWORDS

---

Additive manufacturing, Numerical simulation, Finite element, Inherent strain, Inherent strain rate