



HAL
open science

Matrice de transmission acousto-élastique et analyse modale sans contact : application à des structures aéronautiques

Chloë Palerm

► To cite this version:

Chloë Palerm. Matrice de transmission acousto-élastique et analyse modale sans contact : application à des structures aéronautiques. Acoustique [physics.class-ph]. Université Paris sciences et lettres, 2023. Français. NNT : 2023UPSL024 . tel-04338527

HAL Id: tel-04338527

<https://pastel.hal.science/tel-04338527v1>

Submitted on 12 Dec 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'Institut Langevin, ESPCI-PSL, CNRS, UMR 7587

Matrice de transmission acousto-élastique et analyse modale sans contact : application à des structures aéronautiques

Soutenue par

Chloë PALERM

Le 6 avril 2023

École doctorale n°564

Physique en Ile de France

Spécialité

Physique

Composition du jury :

Jean-François AUBRY DR, PhysMed, ESPCI-PSL	<i>Président du jury</i>
Quentin LECLERE MdC, LVA, INSA Lyon	<i>Rapporteur</i>
François OLLIVIER MdC, Institut d'Alembert, Sorbonne Universités	<i>Rapporteur</i>
Barbara NICOLAS DR, Creatis, INSA Lyon	<i>Examineur</i>
Benoît GERARDIN PhD, SafranTech	<i>Examineur</i>
Claire PRADA DR, Institut Langevin, ESPCI-PSL	<i>co-Directrice</i>
Julien DE ROSNY DR, Institut Langevin, ESPCI-PSL	<i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

Pour commencer ces remerciements, je souhaiterais souligner que la gratitude a été chez moi continue au cours de ces trois années de thèse, et remercier de manière générale toutes les personnes qui ont pu jouer un rôle lors de cette aventure.

Ce manuscrit de thèse est le fruit d'un travail d'équipe, et je remercie en premier lieu Julien, Claire et Benoît pour celle que nous avons constituée lors de ces trois ans. Merci de m'avoir fait confiance sur ce projet, pour leur aide, leur bienveillance et de m'avoir tant transmis. Leur rôle a été central dans ce travail mais aussi dans ce que je suis devenue scientifiquement. Merci à Julien pour sa présence quotidienne lorsqu'il le fallait, sa polyvalence, ses explications intuitives et d'une grande ouverture. Merci d'avoir su, avec une grande patience, comprendre, améliorer et développer mes questions et réflexions, même lorsqu'elles étaient terriblement mal formulées. Merci à Claire pour ses remarques pertinentes, sa précision, son écoute et son enthousiasme à creuser des questions. Et merci à Benoît dont les qualités scientifiques ont permis d'orienter ces travaux avec un juste équilibre entre intérêt académique et industriel, et avec qui les échanges ont toujours été efficaces et agréables.

J'adresse mes remerciements à Maxime Farin dont les travaux sont le point de départ de cette thèse, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler lors de mon arrivée.

Je remercie l'entreprise Safran pour avoir financé ce projet, et pour toutes les personnes avec qui j'ai pu collaborer et échanger, qui m'ont permis de mieux appréhender les enjeux industriels de celui-ci. En particulier, merci à Arnaud Talon et son équipe chez Safran Helicopter, pour avoir pris le temps de m'accueillir et de me transmettre leur expérience. La plupart des applications de ce manuscrit n'auraient pas vu le jour sans lui. Je remercie également l'équipe CND de SafranTech pour leur sympathie lors de mes passages chez eux.

Merci à tous ceux qui, sur mon chemin, ont contribué à l'orienter et le paver. En particulier merci aux enseignants Tony Valier-Brasier et Regis Wunenburger, m'ayant, les premiers, donné un aperçu du monde de la recherche.

Je remercie les différentes personnes avec qui j'ai pu avoir toutes sortes d'échanges enrichissants lors des conférences et formations auxquelles j'ai participé. Merci aussi à Laurent Seppecher pour son aide à formaliser certains aspects mathématiques de ce manuscrit.

Merci ensuite à l'ensemble de l'Institut Langevin, qui a été un environnement de travail extrêmement stimulant de part le dynamisme, la variété des sujets et l'excellence de ses chercheurs et doctorants/post-doctorants. Je remercie les personnels de support, gestion et de direction de leur travail quotidien.

En plus de tout ce que j'ai pu y apprendre, grâce notamment à la pédagogie de tous ceux à qui j'ai posé des questions, le laboratoire a été le lieu de merveilleuses découvertes humaines. Certains sont aujourd'hui de réels amis que je porterai toujours dans mon cœur. Sans pouvoir citer tous ceux qui ont participé à embellir les moments passés au laboratoire (et bien au-delà) je remercie pour commencer le bureau le bureau R31, actuel (Alexandre, pour nos discussions quotidiennes qu'elles soient acoustiques ou non, Ahmed, François,

Yao, Jad, Anwesh, Serena) et ancien (Maxime, Jules, Joris, Julie, Paul, Antoine) ainsi que Jeanne, Guillaume, Romain, Benjamin, Clément, Maximilian, Samuel, Elsa, Arthur Lb, Cécile, Ulysse, Flavien, Arthur A., et ceux qui prennent la relève, Hussam, Claudia, Jérôme, Silvio, Dimitri et tous les autres.

De belles rencontres, il y en a aussi eu avant, et je remercie ainsi tous les amis côtoyés lors de ces trois ans, que cela soit ceux de Sciences et Musico, de Sciences et Design (et assimilés) ou plus généralement de la fac, mes colocataires, sans oublier ceux qui ne rentrent dans aucune de ces catégories.

J'ai une pensée particulière pour les amis du master acoustique, avec j'ai partagé le moment charnière du choix de la poursuite en doctorat, et, pour la plupart, l'expérience de celui-ci. Merci à ceux de ma promotion, Sarah, Quentin, Marie, Alexandre, Clément, Thibault, Severine, Valérian, et de la précédente, Nadège, Pierre, JC, Adrien et Carlos.

Enfin, merci à ma famille, pour leur présence, leur amour, et pour m'avoir toujours montré des exemples de courage et d'humanité.

Table des matières

Introduction	7
1 Contexte industriel et état de l'art	11
1.1 Introduction	11
1.2 Contexte industriel	11
1.2.1 Turbomachines	12
1.2.1.1 Turbomoteurs d'hélicoptères	12
1.2.1.2 Turboréacteurs d'avions	13
1.2.1.3 Enjeux généraux de conception	15
1.2.1.4 Enjeux mécaniques	15
1.2.2 Vibrations	18
1.2.2.1 Sources d'excitations et phénomènes vibratoires	18
1.2.2.2 Appropriation	20
1.2.2.3 Conformité des contraintes vibratoires en fonctionnement	22
1.3 Etat de l'art sur les mesures en analyse modale	23
1.3.1 Objectifs des mesures	23
1.3.1.1 Cas d'applications et types de caractérisation vibratoire	23
1.3.1.2 Utilisation des caractéristiques	24
1.3.2 Types de mesures	25
1.3.2.1 Excitations	25
1.3.2.2 Mesures	25
1.3.3 Traitements et analyse pour l'estimation de paramètres	26
1.3.3.1 Fréquences de résonances et amortissement	26
1.3.3.2 Déformées modales	27
1.4 Conclusion	27
2 Matrice acousto-élastique	29
2.1 Introduction	29
2.2 Approche modale de la propagation des ondes élastiques	30
2.2.1 Ondes élastiques : généralités en milieu homogène	30
2.2.2 Approche mathématique de la décomposition modale pour les structures élastiques inhomogènes anisotropes bornées	31
2.2.3 Masse et raideur modale	32

2.3	Matrice de transmission acousto-élastique	33
2.3.1	Vibrations avec source acoustique	33
2.3.2	Vibrations amorties	34
2.3.3	Matrice de transmission mesurée et SVD	35
2.3.4	Rayonnement acoustique	37
2.4	Dispositif expérimental	37
2.5	Résultats sur les plaques	39
2.5.1	Plaque encastrée	40
2.5.2	Plaque libre	42
2.6	Conclusion	44
3	Structures à symétrie de rotation continue	45
3.1	Introduction	45
3.2	Simulations	46
3.2.1	Calcul des modes propres	47
3.2.2	Rayonnement en champ lointain	47
3.2.3	Efficacité de rayonnement	49
3.3	Mesures acoustiques	50
3.3.1	Décomposition en valeurs singulière	51
3.3.2	Influence du réseau	52
3.4	Comparaison avec des mesures élastiques	53
3.4.1	Dispositif expérimental	53
3.4.2	Décomposition en valeurs singulières	54
3.4.3	Champ non stationnaire et levée de dégénérescence	57
3.4.4	Méthode ESPRIT	59
3.4.5	Comparaison du nombre des excitations acoustiques et élastiques	61
3.5	Conclusion	62
4	Structures à symétrie de rotation discrète	65
4.1	Introduction	65
4.2	Symétrie de rotation discrète et théorème de Bloch	66
4.2.1	Formalisme	67
4.2.2	Opérateur de translation	67
4.2.3	Décomposition de Cholesky de la matrice de masse	68
4.2.4	Modes propres dans les milieux périodiques	68
4.2.5	Spectre angulaire des modes propres	69
4.2.6	Modes de Bloch et modes stationnaires	69
4.3	Dispositif expérimental transporté chez SHE	70
4.4	Pignon évidé	70
4.4.1	Résultats expérimentaux	71
4.4.2	Modélisation	73
4.4.3	Décomposition en utilisant l'invariance	73

4.5	Rouets périodiques	74
4.5.1	Structure modale	74
4.5.1.1	Modes collectifs de pales	74
4.5.1.2	Couplage avec le voile	75
4.5.2	Simulations	75
4.5.3	Validation expérimentale avec un rouet simple	76
4.5.3.1	Décomposition en valeurs singulières et modes	76
4.5.3.2	Spectres angulaires et dispersion	77
4.5.4	Validation de l'approche acoustique	82
4.5.5	Application à un rouet complexe	84
4.6	Rouet désaccordé	88
4.7	Conclusion	91
5	Structures endommagées	93
5.1	Introduction	93
5.2	Endommagement perturbatif	94
5.2.1	Variation de la pulsation de résonance	94
5.2.2	Variation de la masse et raideur modale	95
5.2.3	Variations locales	95
5.2.4	Simulations	96
5.2.5	Expériences avec endommagements perturbatifs sur le pignon	98
5.3	Expériences sur un rouet endommagé	104
5.4	Conclusion	107
6	Contrôle du champ vibratoire	111
6.1	Introduction	111
6.2	Excitation et vecteurs singuliers	112
6.2.1	Excitation d'un vecteur singulier sur le pignon	112
6.2.2	Excitation d'un vecteur singulier sur le compresseur à 17 pales	114
6.3	Excitation contrôlée	114
6.3.1	Principe	116
6.3.2	Détermination des coefficients	117
6.3.3	Validation expérimentale sur le compresseur à 17 pales	118
6.3.3.1	Vibration du voile	118
6.3.3.2	Vibration des pales	118
6.3.4	Nombre de points de mesures nécessaires pour une maîtrise de l'excitation	120
6.4	Application au rouet à 11 pales	121
6.5	Conclusion	125
	Conclusion générale et perspectives	127

A Annexes	129
A.1 H dans la base des modes non perturbés	129
A.2 Modes de pales	130
A.3 Couplage entre modes de pales et modes de voiles	130
A.4 Rouet endommagé	131
A.4.1 Spectres angulaires des modes de pales	131
A.4.2 Comparaison de la SVD avec et sans endommagement	131

Introduction générale

L'étude des ondes sonores est étroitement liée à celle des vibrations. Les observations faites sur les cordes vibrantes, notamment par Pythagore via le monocorde, lient par exemple la hauteur du son (note) que celles-ci produisent au rapport de leur longueur. Le cas des cordes a d'ailleurs longtemps continué de susciter l'attention et Rameau s'appuie fortement sur ce modèle dans son *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels* [76], déclarant notamment :

« Le son est au son ce que la corde est à la corde. »

C'est Joseph Sauveur qui, en introduisant le premier le terme d'Acoustique, distingue les aspects scientifiques de l'étude des sons de ceux, plus artistiques et esthétiques, apparentés à la théorie musicale ou à l'harmonie :

« J'ai donc cru qu'il y avait une science supérieure à la Musique, que j'ai appelée Acoustique, qui a pour objet le son en général, au lieu que la Musique a pour objet le son en tant qu'il est agréable à l'ouïe. »

Si, étymologiquement, ce terme se réfère aux sons audibles (*ἀκουστικός*, de *ἀκουειν* signifiant «entendre» et du suffixe *-τικός* : relatif à quelque chose), il rassemble aujourd'hui une communauté active qui étudie divers aspects de la propagation d'ondes mécaniques. Pourtant, Chladni déclarait en 1809 dans la préface de la réédition française de son ouvrage «Die Akustic» :

« Pendant qu'on avançait plusieurs branches de la Physique, l'Acoustique restait toujours en arrière. Les vibrations sonores de la plupart des corps élastiques étaient tout-à-fait inconnues, et ordinairement on n'avait égard qu'aux vibrations transversales d'une corde y qu'on regardait comme la base de toute l'harmonie, et dont on voulait attribuer les lois à tous les autres corps sonores.¹ ».

L'ouvrage, très empirique, décrit en particulier dans sa seconde partie comment produire les différentes *Klangfiguren* (figures de sons) sur une plaque en frottant un archet avec plus ou moins de force et de vitesse à divers endroits et en disposant ses doigts en dessous afin d'imposer des nœuds (à la manière des «harmoniques» des instruments à cordes, déjà bien connues). Ces figures que Chladni faisait apparaître et les notes qui leur étaient associées étaient des mesures de ce que l'on appelle aujourd'hui respectivement des «modes propres» et «fréquences propres»². Avec l'amortissement, elles constituent les caractéristiques vibratoires d'une structure.

1. Les scientifiques ont longtemps cherché à étendre le modèle de la corde vibrante à tout autre types de structures.

2. Ce ne sont cependant pas les termes utilisés dans l'ouvrage : le lien entre fréquence et hauteur du son n'est par exemple pas encore réellement établi à l'époque. Ce sont les expériences de Cagniard de Latour et sa «sirène» en 1819 qui permettront d'établir ce lien progressivement.

La connaissance de ces caractéristiques est recherchée, notamment dans l'industrie, pour éviter des excitations vibratoires trop fortes, générant des bruits gênants, pour diagnostiquer des problèmes d'équilibrage ou encore des endommagements. D'importants travaux de modélisations et de mesures/essais sont alors effectués conjointement pour les évaluer au mieux.

Dans les structures aéronautiques, de machines tournantes plus généralement, les structures présentent une symétrie de rotation. Cette symétrie implique que certains modes sont dits «dégénérés», c'est-à-dire que deux modes partagent une même fréquence propre [46], alors que la densité modale est faible par ailleurs. Il devient alors plus difficile d'extraire les caractéristiques de chaque mode en cas de superposition. Par ailleurs, expérimentalement, les excitations en contact utilisées (pot-vibrant, piézoélectrique) peuvent occasionner des artefacts, comme des changements de masse et de raideur ou des non-linéarités de contact.

Nous proposons de pallier ce problème en utilisant des ondes acoustiques pour exciter les pièces. Ainsi, si historiquement, l'étude de l'interaction entre les vibrations d'objets mécaniques et les ondes sonores relève principalement de ce que l'on qualifie aujourd'hui de «vibro-acoustique»³, ces travaux de thèse suivent l'approche réciproque : nous mesurons les fréquences et modes propres de structures via leur excitation acoustique. En particulier, nous proposons d'exploiter une matrice de transmission acousto-élastique pour analyser le comportement modal de structures complexes.

Dans le premier chapitre, nous présentons le contexte global de la thèse. Nous montrons en quoi l'analyse modale présente une importance capitale pour garantir la fiabilité et la durabilité des structures aéronautiques, tout en présentant quelques phénomènes vibratoires majeurs qui y sont rencontrés. Le positionnement de nos travaux pour répondre à ces enjeux industriels par rapport aux avancées des recherches en analyse modale est alors mis en lumière.

Dans le second chapitre, nous introduisons la matrice de transmission acousto-élastique. Nous en établissons une expression analytique permettant de faire un lien direct avec la décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*, SVD). C'est en effet l'utilisation de la SVD qui nous permettra de mieux analyser les superpositions modales. Le dispositif expérimental est présenté puis validé grâce à la mesure des matrices acousto-élastiques d'une plaque fine d'aluminium avec deux conditions aux limites différentes : soit encadrée en un bord (pas de superposition modale), soit libre (superposition par dégénérescence).

Dans le troisième chapitre, nous étudions un pignon d'hélicoptère. Il s'agit au premier ordre d'une structure à symétrie de rotation continue sur laquelle on s'attend à observer des modes dégénérés. La courbure et l'épaisseur de cette pièce font que la matrice de transmission acousto-élastique mesurée peut être moins complète que dans le cas des plaques. Des simulations sont alors réalisées afin d'estimer la fiabilité de l'approche dans ce cas plus complexe. Puis, la matrice acousto-élastique de cette pièce est mesurée, et les informations qu'elle apporte sont comparées à celles obtenues via une matrice élasto-élastique, où la structure est excitée, de manière plus traditionnelle, par un marteau.

Dans le quatrième chapitre, ce sont diverses structures à symétrie de rotation discrète qui sont étudiées : un pignon évidé et divers compresseurs (aussi appelés «rouets») monoblocs. Nous nous appuyons sur leurs matrices de transmission acousto-élastique pour en exposer le comportement vibratoire plus complexe. Nous l'analysons notamment à l'aide du théorème

3. La vibroacoustique désigne l'étude du rayonnement dans l'air des vibrations de structures finies : lors des expériences de Sauveur et Chladni, entre autres, ce sont en effet les notes rayonnées par les structures qui, entendues par les musiciens, permettaient de tirer des conclusions.

de Bloch, ici adapté pour les structures élastiques. Le cas du pignon évidé permet alors d'étudier l'effet d'une discrétisation « perturbative », où les modes sont peu modifiés par rapport au cas continu. Puis, l'étude de rouets accordés permet d'étudier un cas non perturbatif. Enfin le rouet désaccordé met en évidence une symétrie d'ordre 1 et des traces de symétrie d'ordre 11.

Dans le cinquième chapitre, nous étudions des structures endommagées. L'effet d'endommagements perturbatifs est d'abord étudié analytiquement, avec un accent sur les modifications locales de masse et de raideur. Des simulations sont ensuite réalisées, puis, la matrice acousto-élastique est mesurée pour étudier un changement de masse local sur une structure à symétrie de rotation continue. Enfin, un endommagement non perturbatif contrôlé est étudié expérimentalement sur une structure à symétrie de rotation discrète d'ordre 11.

Dans le dernier chapitre, nous utilisons les vecteurs singuliers d'émission, peu exploités jusqu'alors, pour contrôler le champ élastique grâce à la superposition modale. Nous vérifions pour commencer que leur utilisation permet bien d'exciter les vecteurs singuliers de réception associés, à la fois sur un pignon et sur un compresseur. Puis nous proposons une méthode pour exciter des champs propagatifs ou stationnaires sur un compresseur où deux modes se superposent. L'approche est ensuite étendue au cas plus complexe d'un compresseur où plusieurs modes de diamètres différents se superposent, permettant ainsi d'effectuer une sorte de filtrage spatial.

Enfin, les résultats de ces travaux sont synthétisés dans la conclusion où des perspectives d'approfondissement sont également proposées.

Chapitre 1

Contexte industriel et état de l'art

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Contexte industriel	11
1.2.1	Turbomachines	12
1.2.2	Vibrations	18
1.3	Etat de l'art sur les mesures en analyse modale	23
1.3.1	Objectifs des mesures	23
1.3.2	Types de mesures	25
1.3.3	Traitements et analyse pour l'estimation de paramètres	26
1.4	Conclusion	27

1.1 Introduction

Les travaux exposés dans ce manuscrit ont été effectués dans le cadre d'une convention industrielle de formation par la recherche (CIFRE) associant l'Institut Langevin et le groupe Safran. Safran est un grand groupe industriel et technologique français, présent au niveau international dans les domaines de l'aéronautique, de l'espace et de la défense. En particulier, la motorisation des avions, comme celle des hélicoptères, sont des domaines d'expertise historique du groupe, à travers ses filiales : Safran Aircraft Engines (SAE), Safran Helicopter Engines (SHE) et Safran Aero Boosters (SAB). L'Institut Langevin est un laboratoire en tutelle mixte CNRS-ESPCI consacré à la physique des ondes en général. Le lecteur notera que, pour des raisons de confidentialité, les spectres mesurés sur les structures Safran ont été modifiés par un facteur multiplicatif arbitraire, choisi de manière à ne pas modifier les interprétations physiques.

Il sera d'abord montré en quoi la connaissance du comportement vibratoire de nombreuses pièces aéronautiques est capitale pour en assurer la longévité. Puis, un aperçu général de l'état de l'art en analyse modale sera proposé.

1.2 Contexte industriel

La conception de moteurs aéronautiques fait l'objet de perpétuelles innovations et compromis afin de répondre aux objectifs de tenue mécanique, tenue à la température, contraintes de production (coût, facilité), consommation d'énergie, diminution des nuisances, etc. En

particulier, la fréquence des révisions est faible en comparaison avec d'autres types de moteurs ; un moteur d'avion doit tenir 20000 heures sans révisions contre 500 à 1000 heures pour un moteur automobile. Leur fiabilité est donc un enjeu majeur. Étant, de par leur nature rotative, soumis à de nombreuses contraintes dynamiques, la connaissance de leurs caractéristiques vibratoires est capitale pour démontrer leur tenue mécanique au cours du temps. Dans une première partie nous présenterons succinctement certains types de moteurs, de façon à en souligner les nombreux enjeux de conception, notamment mécaniques et vibratoires. Dans une seconde partie, les techniques d'analyse vibratoire seront détaillées. Tous ces éléments de contexte sont survolés pour proposer une vision générale des enjeux industriels de cette thèse alors que beaucoup constituent des disciplines d'études et de recherche à part entière, il est donc possible que certains éléments soient imprécis ou simplifiés à l'excès.

1.2.1 Turbomachines

La plupart des moteurs d'avions et d'hélicoptères sont des turbomachines. Le terme «turbomachine» désigne une machine fonctionnant sur le principe de la récupération de l'énergie calorifique des gaz issue d'une combustion par le biais d'une turbine. Une turbine est un dispositif rotatif convertissant partiellement l'énergie interne d'un fluide, liquide ou gazeux (vapeur, air, gaz de combustion), en énergie mécanique au moyen d'aubes disposées sur un arbre tournant à grande vitesse. Les turboréacteurs, les turbopropulseurs ou encore les turbomoteurs sont différents types de turbomachines utilisés en aéronautiques.

Bien que présentant chacun des spécificités qui seront évoquées dans la suite, ces trois types de machines ont un fonctionnement général similaire : un flux d'air est comprimé axialement ou radialement [67], avant que tout ou partie de cet air ne soit utilisé comme comburant dans une chambre de combustion. L'énergie thermique résultant de la combustion est alors transformée en énergie cinétique par le biais d'une turbine, puis, soit transmise à un rotor permettant la propulsion dans le cas des turbomoteurs ou turbopropulseurs, soit à une tuyère dans le cas d'un turboréacteur, où c'est la réaction due au flux d'air sortant à grande vitesse de la tuyère qui propulse l'avion. En résumé, les trois étapes à retenir sont : compression, combustion, détente. Les turbines comme les compresseurs sont composées d'un ou plusieurs «étages» (ensemble rotor-stator aubagé). C'est le stator qui est placé en premier dans le cas des turbines et le rotor dans le cas des compresseurs.

Dans ce manuscrit, les pièces étudiées appartiennent à différents turbomoteurs d'hélicoptère. Néanmoins, les expériences et conclusions réalisées dans ce manuscrit pourraient également trouver un intérêt pour l'étude de roues aubagées monobloc, qui tendent à se généraliser sur certains turbofans (type de turboréacteur). Nous présenterons donc succinctement ces deux types de moteurs afin de faire émerger dans une troisième partie la diversité des exigences nécessaires à leur conception et d'appuyer dans une quatrième les aspects mécaniques de ces exigences et l'apport attendu de la connaissance du champ vibratoire pour y répondre.

1.2.1.1 Turbomoteurs d'hélicoptères

Dans les turbomoteurs, l'énergie cinétique apportée par la combustion est transmise à l'arbre de sortie par le biais des turbines pour entraîner les pales de l'hélicoptère par la suite.

Les deux turbomoteurs dont les pièces ont été étudiées dans ce manuscrit sont des turbomoteurs à turbine libre, c'est-à-dire que la turbine entraînant la rotation de l'arbre qui

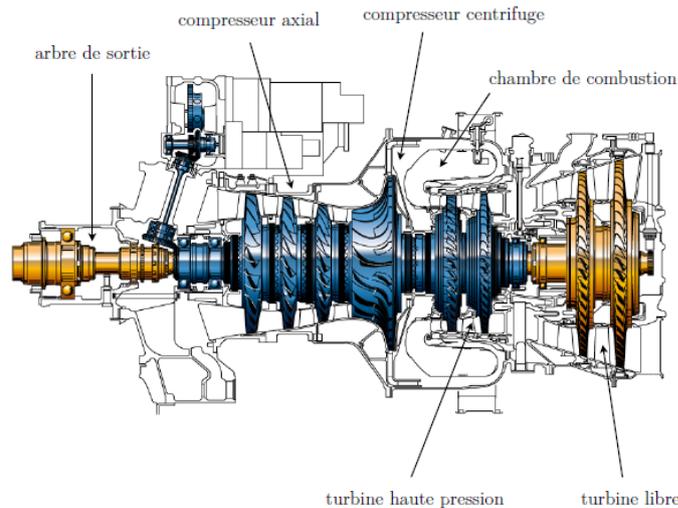


FIGURE 1.1 – Architecture typique d'un turbomoteur d'hélicoptère (une couleur correspond à un sous-ensemble cinématiquement équivalent), issu de [55].

est lié aux pales de l'hélicoptère est déconnectée du corps¹ haute pression (HP), permettant la compression du flux d'air entrant. Depuis leur apparition dans les années 1970, ils ont massivement remplacé les moteurs à turbine liée. En effet, les turbines liées ont une mauvaise consommation spécifique en bas régime et nécessitent la présence d'un embrayage. À l'inverse, les turbines libres sont plus efficaces mais ont des réponses plus lentes. Néanmoins un contrôle de l'électronique permet désormais d'atténuer cet effet.

Un exemple de turbomoteur à turbine libre est représenté sur la figure 1.1. Le corps responsable de la compression (représenté en bleu) tourne à une vitesse différente (et, le plus souvent, dans le sens opposé) des pièces entraînant le rotor (représenté en jaune). Sur ce moteur, la compression est radiale et effectuée par un rouet centrifuge.

1.2.1.2 Turboréacteurs d'avions

Les turboréacteurs, comme leur nom l'indique, sont des turbomachines basées sur le principe d'action-réaction. Leur fonctionnement repose sur l'accélération d'une masse d'air visant à créer une force de poussée qui, par réaction, propulse l'avion. La force de poussée obtenue est alors le produit du débit massique et de la différence des vitesses d'entrée et de sortie. Le fonctionnement classique d'un turboréacteur est donc le suivant : l'air entrant est pressurisé lors de son passage par les compresseurs avant d'atteindre la chambre de combustion. Une partie de l'énergie thermique suivant la combustion est ensuite transformée en énergie cinétique dans la tuyère et le flux d'air sortant permet, par réaction, la propulsion de l'avion. Une autre partie est récupérée par les turbines et transmise via un arbre aux compresseurs, permettant d'entraîner leur rotation. Un turboréacteur peut être composé d'un ou depuis les années 1960 de deux corps, (ensemble turbine-compresseur). Dans ce dernier cas, on distingue alors le corps haute pression (HP) du corps basse pression (BP). Un moteur à simple corps et simple flux reposant sur ce principe est représenté sur la figure 1.2.

1. ensemble turbine-compresseur

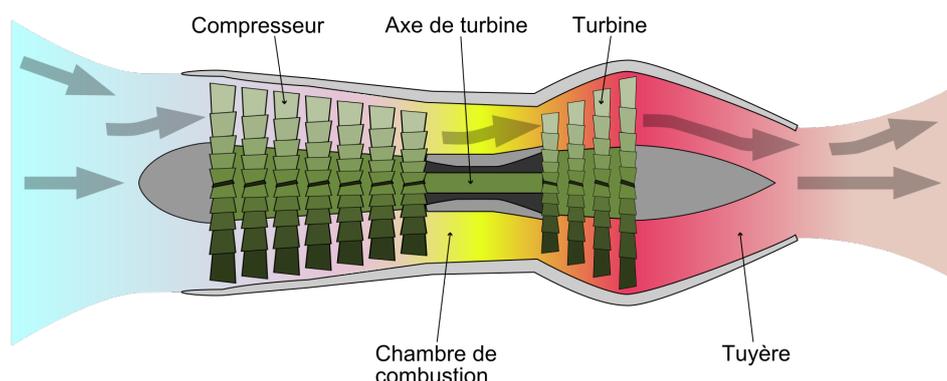
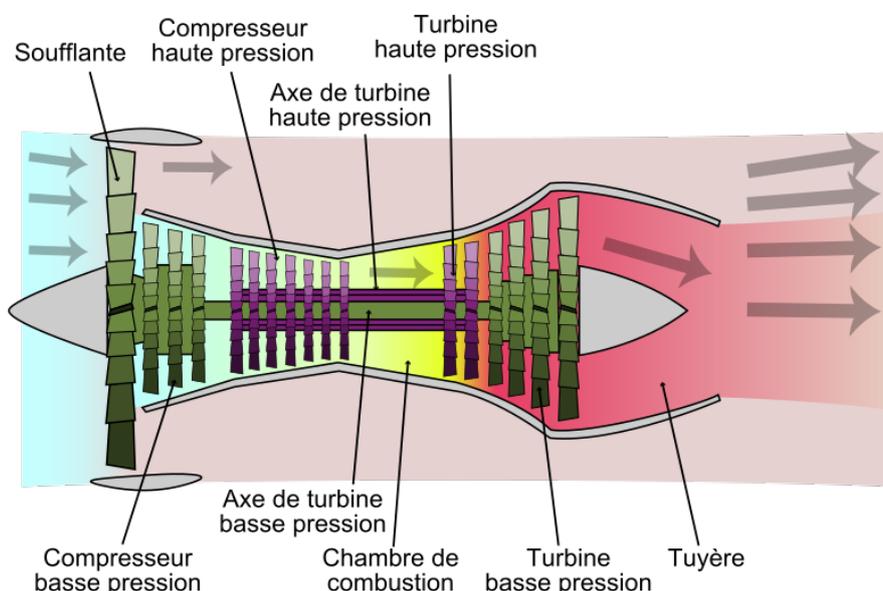


FIGURE 1.2 – Schéma de fonctionnement d'un turboréacteur à simple flux et simple corps.

FIGURE 1.3 – Schéma d'un turboréacteur à double flux (*turbofan*) à double corps.

Depuis quelques années, les avions de lignes sont généralement équipés de moteurs dits à «double flux» (*turbofan*), comme cela est représenté sur la figure 1.3. Le double flux consiste à distinguer un flux primaire, suivant les étapes de compression et combustion décrites précédemment, d'un flux secondaire, uniquement accéléré par la soufflante (*fan*), qui produit en général 80 % de la poussée tout en refroidissant et diminuant le bruit du flux primaire. Le ratio de la masse d'air du flux froid sur celle du flux chaud est appelé «taux de dilution» (*bypass ratio*). Ces moteurs à double flux sont apparus dans les années 1970.

Les premiers disques aubagés étaient majoritairement à pales rapportées, c'est-à-dire simplement insérées dans un support (alvéole), la rigidité s'obtient alors par force centrifuge. Cependant les objectifs récents de diminution de la consommation des moteurs, et donc de leur poids, ainsi que les innovations technologiques facilitant la conception de pièces monobloc (*blisks*) tendent à généraliser leur usage. Elles présentent cependant l'inconvénient de nécessiter une maintenance plus lourde. En effet, il est plus difficile de réparer un disque

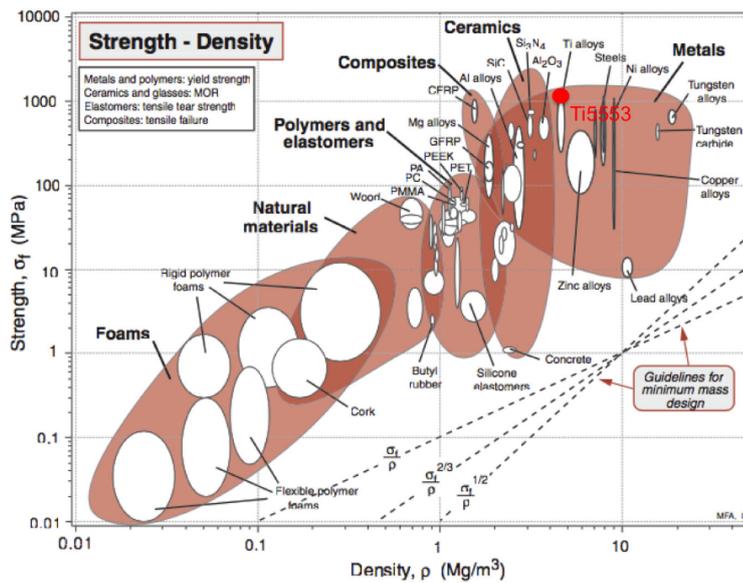


FIGURE 1.4 – Représentation de la résistance mécanique de différents types de matériaux en fonction de leur densité, issue de [4].

monobloc que de changer une pale rapportée. Les vibrations sont par ailleurs beaucoup moins amorties par les jonctions entre le disque et les pales, et sont ainsi beaucoup plus sujettes à de forts niveaux de vibration pouvant, à terme, endommager la structure. Enfin, leur caractérisation vibratoire est rendue particulièrement difficile par les modes complexes dus au couplage accru entre le disque et les pales.

1.2.1.3 Enjeux généraux de conception

Le fonctionnement même de ce type de machines doit répondre à de nombreuses exigences, parfois antagonistes. Les contraintes comme la température peuvent atteindre de hauts niveaux. La température à l'entrée de la turbine peut atteindre 840 °C dans un des turbomoteurs développés par Safran par exemple. Ainsi, pour les pièces les plus critiques, il est à la fois nécessaire d'obtenir une bonne tenue mécanique, à la température, tout en limitant le poids total de l'engin et les contraintes de production (coût, facilité). Cela peut s'assurer par le choix de matériaux appropriés [28]. En effet, comme le montre la figure 1.5, il y a souvent un compromis à faire entre la tenue à la température, la tenue mécanique et le poids (ces derniers étant souvent liés) par exemple. Un premier compromis notable est celui nécessaire entre résistance et densité. Cela est évoqué, par exemple par Ashby [4] et représenté sur la figure 1.4.

Dans le cadre de ces travaux de thèse, l'intérêt est porté sur les enjeux mécaniques.

1.2.1.4 Enjeux mécaniques

Un premier aspect à considérer pour assurer la tenue mécanique des pièces est la résistance à la traction (*tensile strength*) du matériau la constituant. La courbe contrainte/déformation d'un matériau ductile présente plusieurs tendances : tout d'abord celle, linéaire, du comportement élastique. Puis ce que l'on qualifie de l'élasticité conventionnelle à 0.2 % (ou encore, *yield stress*), où la déformation est de 0.2 % supérieure à ce qui est prédit par

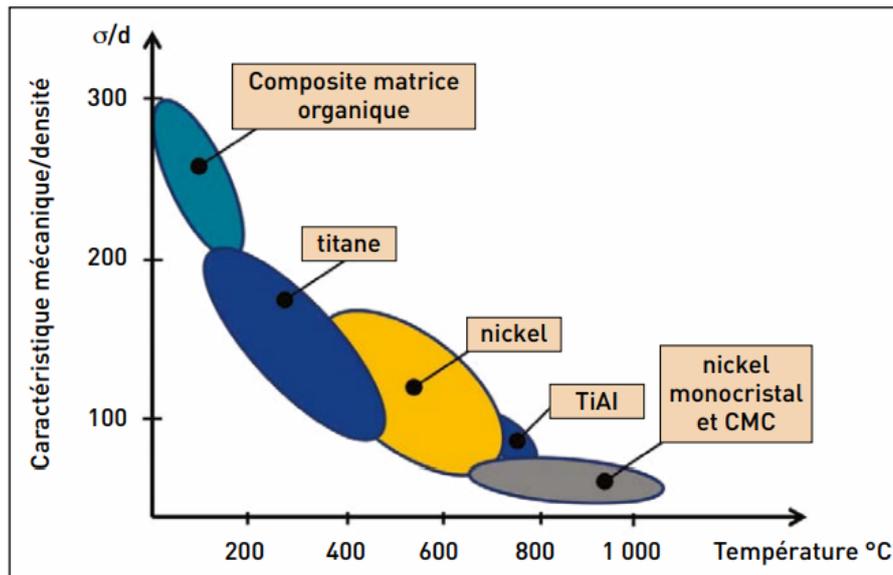


FIGURE 1.5 – Rapports caractéristiques mécanique/densité en fonction de la température d'utilisation de différents matériaux, issus de Delcourt [28].

la loi de Hooke, jusqu'à la résistance à la rupture au-delà de laquelle le matériau a un comportement plastique (déformation irréversible). Cela est illustré sur la figure 1.6 pour un matériau isotrope. Dans le cas de matériaux anisotropes, ces courbes dépendent de la direction d'élongation.

La résistance à la rupture peut généralement être mesurée par des essais en traction (et compression), statiques. Les pièces sont alors dimensionnées de façon à ne jamais dépasser cette limite. Cependant, pour les structures aéronautiques qui sont soumises à des chargements cycliques, une autre source d'endommagement à surveiller est la rupture en fatigue. La fatigue est définie comme un processus qui modifie les propriétés locales d'un matériau sous l'action de contraintes ou déformations variables dans le temps. A noter que les contraintes limites en fonction du nombre de cycles peuvent alors se situer bien en deçà de la limite de résistance à la rupture R_m . Dans le cas du titane, cela est étudié par exemple dans la thèse de Voillot [105]. Notamment, la tenue en fatigue pour différents nombres de cycle est représentée pour deux alliages de titane sur la figure 1.7.

Les limites de fatigue, surtout à haut nombre de cycles, peuvent être bien inférieures à la limite en rupture. Ainsi, il est important de vérifier que les contraintes *dynamiques* auxquelles une pièce pourrait être soumise sont inférieures à la contrainte limite à 10^7 nombre de cycles, dans le cas de l'aviation où les révisions sont rares. Ces contraintes dynamiques peuvent être évaluées à chaque fréquence grâce à la connaissance des sources d'excitations et des modes propres de la pièce. En effet, c'est au voisinage des fréquences propres de la pièce que les niveaux de contraintes dynamiques sont susceptibles d'être élevés, du fait du phénomène de résonance. C'est donc dans ce contexte que l'analyse vibratoire prend sa place.

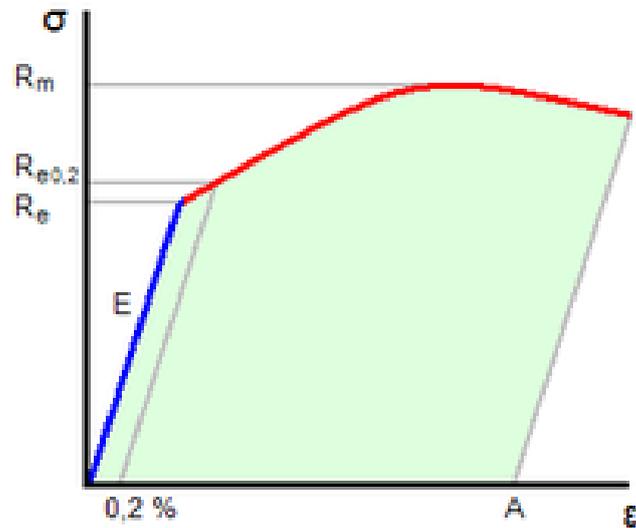


FIGURE 1.6 – Evolution de la contrainte σ en fonction de la déformation ϵ pour un matériau isotrope, faisant apparaître la partie linéaire du comportement élastique, la limite d'élasticité conventionnelle à 0.2 % et la contrainte maximale atteinte R_m . L'aire sous la courbe en vert représente la ténacité soit l'énergie requise pour la rupture.

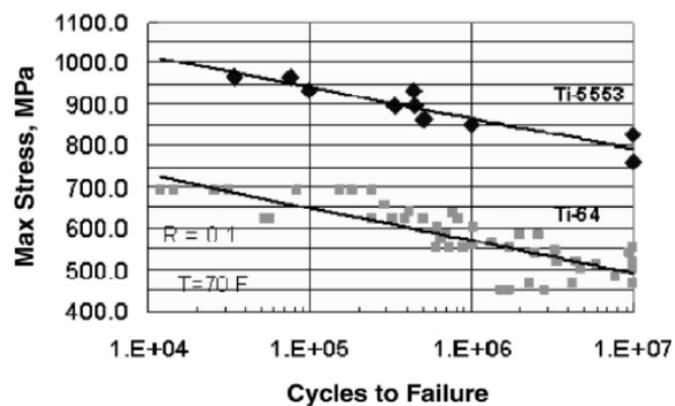


FIGURE 1.7 – Comparaison de la tenue en fatigue de deux alliages de titane, issu de [12].

1.2.2 Vibrations

L'estimation des contraintes dynamiques en fonctionnement passe donc par l'analyse des forces excitatrices de la pièce et de ses caractéristiques modales. Celle-ci se déroule en plusieurs étapes : les modes sont d'abord calculés numériquement, puis mesurés expérimentalement afin d'affiner le modèle numérique. Si les fréquences propres ne coïncident pas avec celles des sources d'excitations, le danger est limité. Cependant, il est rare d'éviter toute coïncidence ; il est alors nécessaire de montrer que les contraintes en fonctionnement sont inférieures aux limites acceptables. C'est ce que nous appellerons la «justification vibratoire». Pour cela, des essais sont réalisés et la connaissance des déformées modales est alors particulièrement importante pour, d'une part, placer les jauges de contraintes de manière optimale et, d'autre part, remonter à la contrainte maximale de chaque mode à partir des mesures réalisées en seulement quelques points.

On commencera par présenter différents types d'excitations et phénomènes vibratoires présents dans les turbomachines, avant de présenter les techniques préliminaires de justification prenant en compte l'appropriation fréquentielle et/ou spatiale, pour finir par la validation de la conformité des niveaux de contraintes vibratoires.

1.2.2.1 Sources d'excitations et phénomènes vibratoires

Les sources d'excitations vibratoires sont, dans les moteurs, nombreuses et de natures variées : à contenu fréquentiel périodique, quasi périodique ou encore aléatoire, plus ou moins amorties, en régime établi ou instable, etc.

On en distingue principalement deux causes : mécaniques et aérodynamique/aéroélastiques.

Excitations mécaniques Les excitations mécaniques incluent les effets de balourds, les contacts rotor stator, les effets de roulement [44, 102] ou encore les paliers hydrodynamiques. Les effets de balourd sont la conséquence d'erreurs d'usinage/d'assemblage en fabrication, ou encore du vieillissement et de l'érosion de certains composants causant une mauvaise répartition de masse au sein de la structure. Les efforts résultants sont des forces d'excitations synchrones dont l'amplitude est proportionnelle à la masse de l'objet, son excentrement et au carré de la vitesse de rotation de l'arbre [74]. Cependant, les effets d'inerties lors des manœuvres de l'avion peuvent également générer des vibrations transitoires basses fréquences se modulant avec ces vibrations synchrones [87, 73].

Le contact rotor-stator, dont le nom est évocateur, est de plus en plus fréquent car les rotor et stator sont de plus en plus rapprochés pour limiter les écoulements de fuite. Ces interactions rotor-stator peuvent avoir lieu sur des «paliers», zones non aubagées connectant rotors et stators à travers des roulements à billes ou rouleaux, de film d'huile, ou encore d'efforts électromagnétiques. Ces phénomènes de contact rotor-stator sans aubages, aussi rassemblés sous le nom de *rubbing*, sont de diverses natures (contacts intermittents ou permanents, glissant ou roulant, ...). Pour les autres types de contact rotor-stator, comme ceux de roue aubagée-carter, l'excitation ne semble pas être une source importante de vibrations, cependant des phénomènes d'interaction modale peuvent apparaître lorsque les modes tournants de la roue aubagée et ceux du carter coïncident [90]. La dynamique du frottement et ses effets sur l'abradable, par exemple [5], sont également à surveiller. La figure 1.8, issue de Parent [74], illustre les possibles zones de contact rotor-stator, faisant ainsi apparaître les zones de rubbing (c5) et celles de contacts aubagés (c1, c2, c3 et c4).

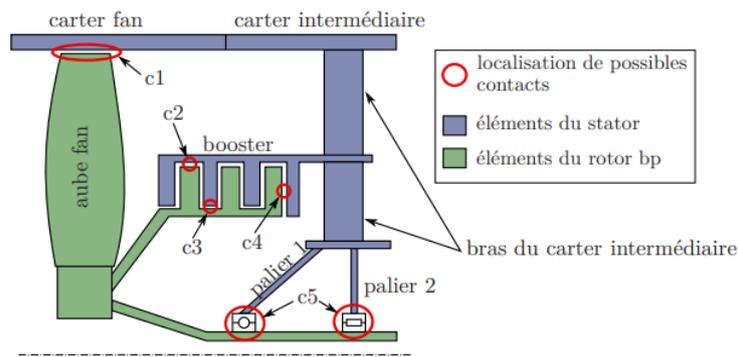


FIGURE 1.8 – Demi-vue schématique du module compresseur basse pression d'un turbofan CFM54 faisant apparaître plusieurs zones de possible contact rotor-stator, issu de [74].

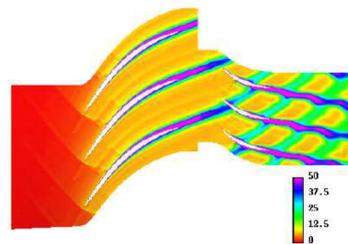


FIGURE 1.9 – Sillages d'une roue mobile de compresseur, d'après [69].

Excitations aérodynamiques Les écoulements sont également de potentielles sources d'excitations et plusieurs exemples sont donnés dans la suite. Le premier est celui des sillages, générés par la coalescence des couches limites au bord de fuite des aubes [65]. Le contenu fréquentiel de ce type d'excitations est proportionnel à la vitesse de rotation multipliée par le nombre d'obstacles (aubes) et elles sont donc synchrones. Une illustration est représentée sur la figure 1.9. D'autres sources d'excitation aérodynamique, cette fois asynchrones, sont les résonances acoustiques. Ces résonances, n'apparaissant que pour certaines conditions d'écoulement, sont à l'origine d'excitations discrètes fréquentiellement, mais décorrélées de la vitesse de rotation [50].

Enfin, les efforts aérodynamiques sont particulièrement inquiétants lorsqu'ils induisent le redouté phénomène de flottement, couplage aéroélastique entre des forces aérodynamiques et des structures. En effet, de légères fluctuations de l'écoulement peuvent exciter ou modifier la vibration des aubes, et la vibration de celles-ci modifie également l'écoulement. Ces échanges peuvent, selon les cas, diminuer ou augmenter les vibrations. Ce dernier cas constitue le «flottement». Ce phénomène n'est pas propre aux machines tournantes et diffère selon les structures considérées : ainsi, pour les ailes d'avion, où le rapport de la masse de la structure sur celle du fluide est relativement faible, le flottement apparaît lorsque la vitesse de l'écoulement d'air fait baisser la fréquence des modes de torsions et augmenter celle des modes de flexions au point de les faire coïncider. Dans les turbomachines, ce type de flottement est maintenant rare, d'une part car les forces aérodynamiques restent bien plus faibles que les forces d'inertie et de raideur [68] et d'autre part car les aubes sont désormais conçues pour que ces deux types de modes soient d'autant plus éloignés fréquentiellement [95, 64]. Ainsi, dans les turbomachines, c'est surtout le flottement «en cascade»

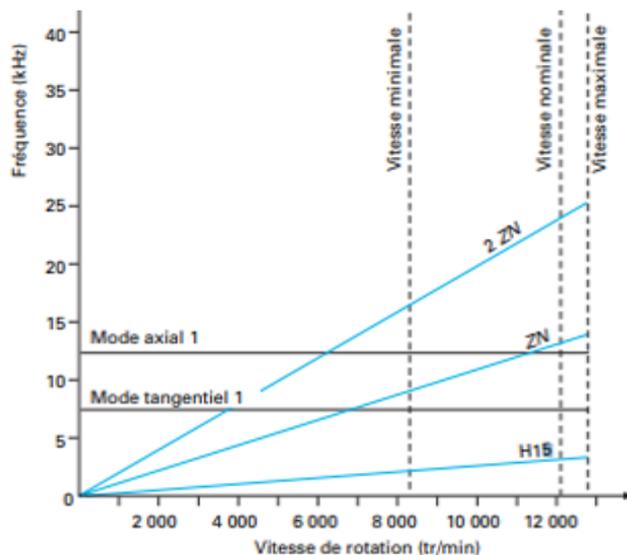


FIGURE 1.10 – Diagramme de Campbell d’une ailette de turbine à vapeur à vitesse constante (turbo-alternateur), issu de [70]. Les fréquences propres de la pièce correspondent aux traits noirs et les fréquences excitatrices correspondent aux traits bleus.

qui est observé [106].

1.2.2.2 Appropriation

Il existe deux effets d’appropriation concomitants qui contribuent à l’excitation ou non d’un mode : l’appropriation fréquentielle (proximité des fréquences des sources avec la fréquence propre du mode) et l’appropriation spatiale (proximité de la géométrie de l’excitation avec la déformée du mode). Ainsi, dans le cas des excitations périodiques (synchrones en particulier), un des premiers leviers d’action est d’éviter la coïncidence entre les fréquences d’excitations et les fréquences de résonance des pièces. Un outil répandu est alors le diagramme de Campbell [15], dans lequel les fréquences de résonances des pièces sont superposées aux fréquences d’excitations tracées en fonction du régime moteur (si elles en dépendent), comme sur la figure 1.10. Il faut noter que, si dans cette figure les modes sont schématiquement représentés à fréquence de résonance constante, la prise en compte des effets de raidissement centrifuge ainsi que de l’effet Coriolis peuvent amener les fréquences de résonances changer en fonction du régime, comme on peut le voir notamment sur la figure 1.11.

Cependant, le diagramme de Campbell, bien qu’utile au premier abord, trouve rapidement ses limites dans des cas où il est difficile d’éviter toute coïncidence. Il est alors intéressant d’utiliser des outils prenant en compte les aspects spatiaux. Une illustration issue de Bertini *et al.* [9] permet de visualiser le phénomène d’appropriation spatiale sur la figure 1.12 ; la résonance du mode est totale si l’excitation lui ressemble, partielle lorsqu’elle s’en éloigne et peut être nulle en cas d’excitation orthogonale à la déformée modale.

Les structures de machines tournantes ont des géométries particulières : elle sont à symétrie de rotation continue ou discrète (Thomas. *et al.* [100], il est aussi question de *rotationally periodic structure*). Dans les deux cas, leurs modes peuvent être décrits en fonction de leurs nombre de «diamètres» et de «cercles» nodaux. Quelques figures de Chladni d’une plaque circulaire sont représentées sur figure 1.13 pour illustrer cela. Il est donc intéressant de se pencher également sur la distribution spatiale de l’excitation, puisque si celle ci n’a pas la

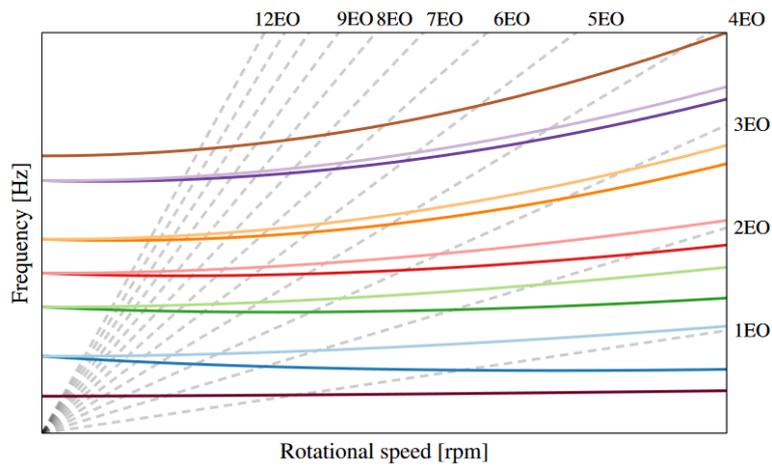


FIGURE 1.11 – Diagramme de Campbell issu de [98]. Les fréquences propres de la pièce correspondent aux traits pleins colorés et les fréquences excitatrices correspondent aux traits noirs en pointillés.

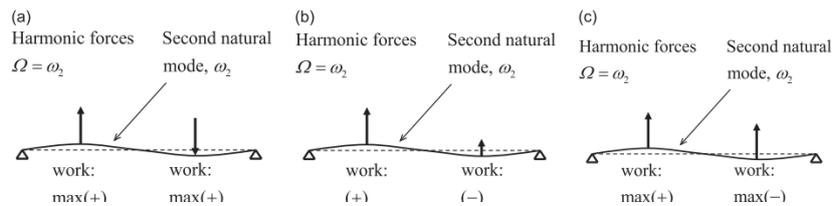


FIGURE 1.12 – Illustration du phénomène d’appropriation spatiale issue de [9].

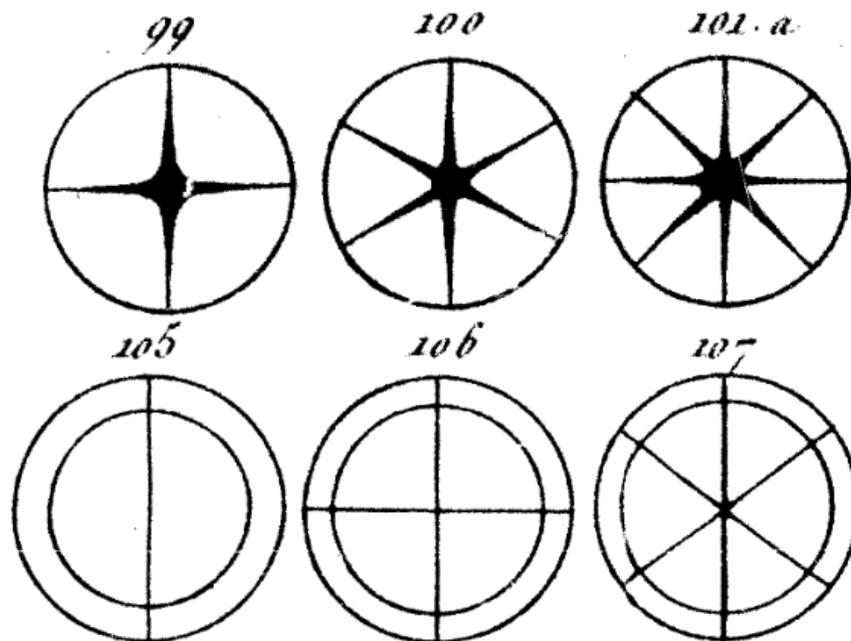


FIGURE 1.13 – Schémas des figures de Chladni [25] d’une plaques circulaires où sont tracées les différentes lignes nodales : diamètres et cercles nodaux.

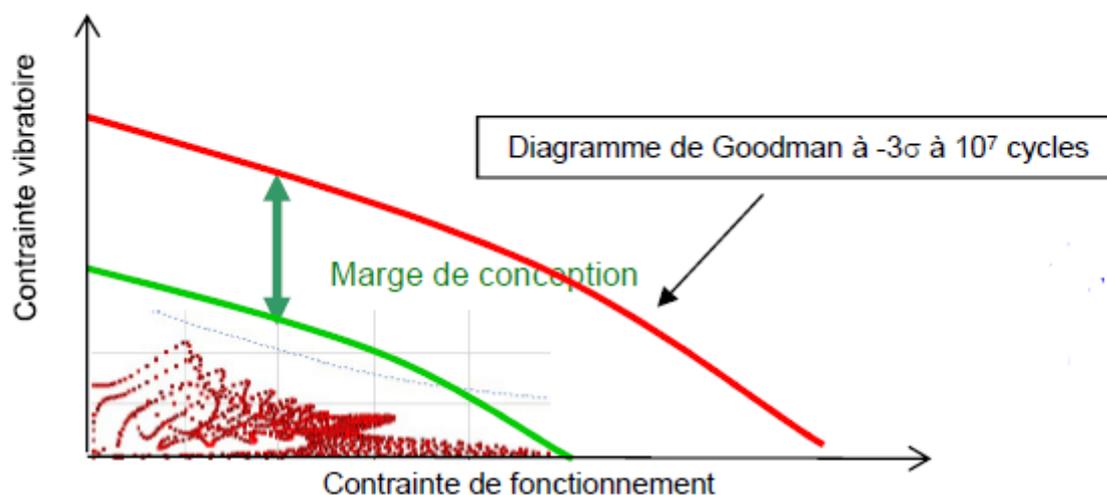


FIGURE 1.14 – Vérification de la tenue en fatigue vibratoire d’une pale via le diagramme de Goodman par Arnaud Talon

même dépendance spatiale (et en particulier, angulaire), une coïncidence fréquentielle n’est plus forcément nocive. Wildheim définit alors un critère de résonance prenant en compte le nombre de diamètres nodaux k des modes, le nombre de pales N , l’ordre excitateur p et la fréquence de rotation du moteur Ω [107] :

$$\omega_n = (kN \pm p)\Omega. \quad (1.1)$$

Ce critère lui permet de construire un autre type de diagramme, ZENF (*Zig-Zag shaped excitation line in the Nodal diameter versus Frequency diagram*), représentant la fréquence en fonction du nombre de diamètres nodaux. Cela lui permet par la suite d’adapter le diagramme de Campbell. De la même manière, le diagramme SAFE (*Singh’s Advanced Frequency Evaluation*) [96], permet d’étudier à la fois les aspects d’appropriation spatiale et fréquentielles.

1.2.2.3 Conformité des contraintes vibratoires en fonctionnement

Enfin, la justification vibratoire la plus approfondie nécessite de vérifier que les contraintes dynamiques ne dépassent pas les limites fixées par le diagramme de Haigh (qui s’intéresse aux valeurs moyennes et alternées) ou de Goodman (qui s’intéresse aux valeurs minimales et maximales) [43], comme illustré par la figure 1.14. Pour cela, des essais spécifiques sont réalisés en équipant les pièces étudiées de jauges, de façon à mesurer les niveaux de contrainte et d’assurer la conformité. Cependant, ces jauges n’étant placées qu’en certains points, la connaissance des déformées modales est alors capitale pour estimer la contrainte dynamique maximale de chaque mode en cours d’utilisation à partir des seules mesures de quelques points.

En conclusion de cette partie, la justification vibratoire passe par l’étude des niveaux de vibrations des pièces en cours d’usage et nécessite une bonne connaissance des caractéristiques modales de celles-ci. Dans les turbomachines, un problème courant que nos travaux tenteront en partie de pallier réside dans la présence de modes dégénérés ou proches fréquentiellement. L’existence de ces modes est due aux géométries à symétrie de rotation continue ou discrète des structures de machines tournantes. Nous présenterons maintenant un état de l’art sur les méthodes d’analyses modales.

1.3 Etat de l'art sur les mesures en analyse modale

Comme expliqué dans la section précédente, ces travaux de thèse s'inscrivent dans le cadre plus général de l'analyse modale qui consiste à déterminer les caractéristiques modales de systèmes résonants et trouve des applications dans de très nombreux domaines, comme l'acoustique des salles et l'acoustique musicale par exemple. Ce terme englobe les approches théoriques, numériques et expérimentales [41].

En acoustique des salles, les modes ont une influence particulièrement marquée à basse fréquence, en dessous de la fréquence de Schroeder [91], à partir de laquelle la densité modale est suffisamment forte pour que, sous certaines hypothèses, le champ soit considéré comme diffus. Comme cette fréquence est inversement proportionnelle à son aire d'absorption équivalente, elle est particulièrement élevée pour les pièces de petites dimensions. Leur comportement modal s'étend donc sur une bande passante particulièrement large. C'est Knudsen qui, le premier, a étudié expérimentalement les résonances de pièces (des papiers théoriques le précédaient) [61]. Ainsi, le comportement à basse fréquence peut être étudié, de manière simple pour les pièces parallélépipédiques [11] ou non [6], et des solutions peuvent être envisagées, soit en dimensionnant la pièce, soit en optimisant le placement des sources/capteurs/auditeurs selon l'usage visé [26]. Cependant, l'*Acoustic Modal Analysis* (AMA) utilisée en acoustique des salles est assez spécifique [72].

En acoustique musicale [21], ce sont les caractéristiques modales des instruments qui permettent d'en déterminer les notes, amplitudes, et timbre (via les modes des caisses de résonances par exemple, ou les caractéristiques des moyens d'excitation). L'analyse modale y est donc utilisée à la fois pour comprendre et pour améliorer la conception des instruments de musique [32].

Dans cette thèse, nous nous focalisons principalement sur l'aspect expérimental de l'analyse modale traditionnelle de structures, bien que certains aspects soient généraux à l'analyse modale plus étendue. Nous présentons dans un premier temps les objectifs recherchés lors de telles mesures, puis dans un second temps les dispositifs de mesures développés, pour finir sur les outils de traitement utilisés pour extraire les caractéristiques modales.

1.3.1 Objectifs des mesures

La connaissance des paramètres modaux est recherchée pour différentes raisons. Nous présentons d'abord plusieurs types de domaines applicatifs pour la caractérisation vibratoire, avant de s'intéresser à deux utilisations plus poussées des paramètres extraits dans les mesures soit pour le recalage de modèles soit pour la détection de défauts ou endommagements.

1.3.1.1 Cas d'applications et types de caractérisation vibratoire

Comme illustré dans la partie précédente, la résistance aux contraintes dynamiques est un domaine d'application majeur de la caractérisation vibratoire de systèmes, et ce, pour les structures aéronautiques mais aussi civiles, éventuellement médicales, etc. En effet, si l'analyse modale a particulièrement été stimulée par les développements rapides des industries aéronautiques et spatiales, elle présente également de forts intérêts en génie civil. L'exemple, très visuel, du pont de Tacoma est par exemple régulièrement utilisé dans la communauté pour illustrer les potentielles conséquences d'un manque de considérations vibratoires -c'est en particulier un bon exemple du phénomène de flottement. Cela justifie donc la prise en compte des effets dynamiques en plus des inspections visuelles et statiques.

La caractérisation vibratoire passe par la détermination soit des fréquences de résonances, facteurs d'amortissement et éventuellement déformées modales de chaque mode, soit des matrices de masse, de raideur et d'amortissement². Plusieurs ouvrages en rassemblent les techniques utilisées [14, 101, 7] pour l'extraction des matrices de masse et de raideur. Si ce sont parfois tout simplement ces caractéristiques qui sont recherchées, elles peuvent également être utilisées pour des cas d'applications plus précis que nous évoquons dans la suite.

1.3.1.2 Utilisation des caractéristiques

La connaissance des paramètres modaux peut également être utile pour améliorer les modèles numériques ou détecter des changements dans la structure.

Validation de modèle Depuis le développement des méthodes aux éléments finis, la caractérisation dynamique utilise désormais des méthodes numériques à profusion. Cependant ces modèles ne sont pas toujours exacts du premier coup. Des mesures peuvent alors être utilisées pour les améliorer. Plusieurs approches sont possibles [8] : soit de considérer que la matrice de masse est correcte et modifier les modes pour imposer leurs orthogonalités, soit de considérer que les modes mesurés sont corrects et modifier la matrice de masse. Il est également possible de comparer directement les déformées numériques et expérimentales, grâce au *Modal Assurance Criterion* (MAC) par exemple [3].

Si ces méthodes sont généralement fondées sur la supposition que les modes sont stationnaires (réels), il n'est pas rare de mesurer des modes complexes. La principale raison évoquée est celle de la présence d'amortissement non négligeable ou non proportionnel³. Nous verrons que cela peut également être dû à une superposition de modes stationnaires à des fréquences proches ou identiques. Utiliser des modes complexes dans les étapes de recalage de modèle peut être une grande source d'erreur, et pour cela, Ibrahim [54] propose d'identifier les modes mesurés aux modes analytiques pour les utiliser dans l'étape de recalage. Il modifie ensuite la matrice de masse simplement en vérifiant la m-orthogonalité avec les modes ainsi identifiés.

Détection de défauts L'utilisation de l'analyse vibratoire pour évaluer l'état d'une structure est ancienne : on peut donner l'exemple des techniques de *wheel tap* et *coin tap* [20], permettant d'évaluer l'état de santé local ou global d'une structure. D'autres domaines d'applications se concentrent sur la recherche de défauts ou anomalies. Dans ces cas, la nature [58], l'origine [77], ou encore l'emplacement [19, 63] d'un défaut peuvent être déterminés. Une revue des différentes manières d'étudier les défauts et de surveiller les structures à partir de leurs caractéristiques vibratoires est proposée par Doebling [30] dans laquelle sont notamment référencées des applications particulières, y compris dans le domaine aéronautique. Pour d'autres revues de littérature, nous invitons le lecteur à se reporter sur celles proposées par Carden [16] pour ce qui est des méthodes vibratoires dans leur ensemble, Salawu [88] pour les méthodes uniquement basées sur l'étude des fréquences de résonance, ou encore Rytter [85] pour le cas particulier des structures civiles. Si ce sont en général les changements de masse ou de raideur qui sont étudiés, certains commencent à s'intéresser également aux changements d'amortissement [56].

2. Elles permettent une modélisation fidèle du comportement vibratoire et sont évoquées dans le chapitre 4.

3. la notion d' « amortissement non proportionnel » est régulièrement utilisée pour qualifier les cas où la matrice d'amortissement peut s'écrire en fonction des matrices de masse et de raideur

Dans tous les types d'applications mentionnés, la connaissance des caractéristiques vibratoires est nécessaire. Nous allons maintenant présenter plusieurs manières de les mesurer.

1.3.2 Types de mesures

Les mesures permettant d'estimer les paramètres modaux varient dans leur nature, nous présenterons différents types d'excitations et de mesure.

1.3.2.1 Excitations

Pour l'excitation on distingue traditionnellement ce qui est appelé *Experimental Modal Analysis* (EMA), où les forces d'excitations sont maîtrisées et connues, des techniques, passives, dites *Operational Modal Analysis* (OMA) ou encore *Output Only Modal Analysis*.

Méthodes Actives En analyse modale dite «expérimentale»⁴, les pièces sont généralement excitées par des marteaux ou des pots vibrants. Cependant, le contact crée des artefacts. D'autres méthodes sans contact ont alors été développées avec des impulsions laser, par exemple [18], des sources acoustiques [104, 109], de l'air pressurisé [103], ou encore des excitations magnétiques [49]. Plus récemment, au laboratoire, une expérience réalisée par M. Farin et ses collaborateurs a permis de reproduire un *ping test* de manière acoustique, et donc, sans contact [37].

Méthodes Passives Par ailleurs, à côté de ces méthodes contrôlées et actives, les techniques d'*Operational Modal Analysis*, se sont développées depuis les années 90. Elles ont pour but de faciliter les mesures mais aussi d'effectuer de la surveillance en continu (*Structural Health Monitoring*) [13]. Elles sont particulièrement intéressantes pour les structures ne pouvant pas facilement être excitées par une force contrôlée, que cela soit du fait de leur accessibilité, conditions aux limites, ou de leur taille. En effet, plus une structure est grande plus la force qui doit lui être appliquée est importante. Cela pose évidemment problème pour nombre de structures en ingénierie civile de grandes dimensions, qui nécessitent en conséquence des forces d'excitations importantes. L'absence de source est également intéressante du point de vue énergétique. Richardson [81] présente ainsi une comparaison de mesures avec et sans excitation. Les mêmes modes sont visibles, cependant, comme cela est prévisible, une moindre proportion d'entre eux sont excités par le bruit ambiant. Une notion qu'il semble important de comprendre dans cet article est celle d'*Operating Deflection Shape* (ODS) surtout en comparaison à celle de déformée modale. L'*Operating Deflection Shape* représente la forme de la réponse à une excitation, tandis que celle de déformée modale est nécessairement associée à un seul mode propre [80]. Certains des problèmes que le manque d'informations sur la source causent peuvent désormais être compensés, par exemple, en utilisant des changements de masse pour mettre les modes à l'échelle [59].

1.3.2.2 Mesures

Les capteurs sont traditionnellement des capteurs piezoélectriques, accéléromètres et jauges de contraintes. Cependant, ces capteurs sont intrusifs et sont susceptibles de modifier le comportement vibratoire des structures étudiées. C'est particulièrement le cas lorsque la masse du capteur n'est pas négligeable devant celle de la structure. C'est donc plus

4. le terme « experimental » se réfère simplement à la distinction entre EMA et OMA

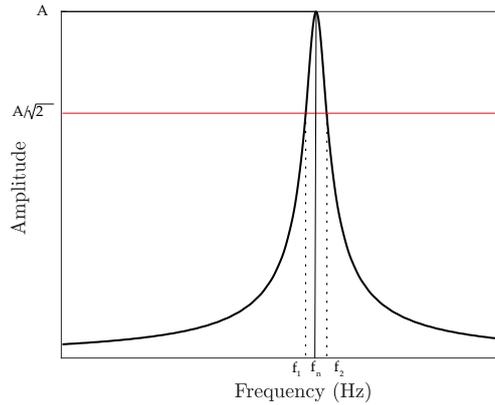


FIGURE 1.15 – Résonance et application de la méthode dite de *peak picking*. La fréquence de résonance est déterminée par le maximum de la courbe et l'amortissement à partir des deux fréquences où la puissance maximale est divisée par deux (où l'amplitude maximale est donc divisée par $\sqrt{2}$).

fréquemment le cas pour les structures aéronautiques que civiles. Dans ce cas, l'utilisation de moyens de mesures sans contact, optiques en particulier, s'est développée. Nous pouvons citer la vibrométrie laser LDV (*Laser Doppler Vibrometry*), que nous utiliserons dans nos expériences, la corrélation de speckle ESPI (*Electronic Speckel Pattern Interferometry*), l'interférométrie holographique, la *digital shearography*, la photogrammétrie, on encore la corrélation d'images digitales DIC (*Digital Image Correlation*). Cette dernière permet par exemple l'étude modale de disques rotatifs [52].

Dans ce manuscrit, nous nous focalisons uniquement sur les méthodes actives traditionnelles. Les moyens de traitements mentionnés dans la partie suivante sont donc applicable à ce type de mesures. Les problématiques peuvent en effet être différentes pour l'OMA.

1.3.3 Traitements et analyse pour l'estimation de paramètres

1.3.3.1 Fréquences de résonances et amortissement

Les mesures à partir de FRF (*Frequency Response Function*) se sont particulièrement développées dans les années 1970 avec l'implémentation des algorithmes de *Fast Fourier Transform* (FFT) depuis 1965 par Cooley et Tuckey. Plusieurs manières sont employées pour estimer les FRF. L'une d'elle consiste à calculer [80] :

$$FRF = H(\omega) = \frac{S_{x,f}(\omega)}{S_{f,f}(\omega)}, \quad (1.2)$$

où $S_{x,f}$ est le spectre de l'intercorrélacion entre l'entrée et la sortie et $S_{f,f}$ le spectre de l'autocorrélacion de l'entrée.

Une technique simple pour extraire deux des trois paramètres modaux est celle du *peak picking*. Comme cela est illustré sur la figure 1.15, l'amplitude maximale de la FRF permet de déterminer la fréquence de résonance. Puis les deux fréquences où l'amplitude est inférieure à cette amplitude maximale d'un facteur $\sqrt{2}$ sont également relevées pour quantifier l'amortissement/le coefficient de qualité. Ces deux notions seront précisées dans le chapitre 2. On peut également mentionner les techniques de *mode picking*, de *circle fit* ou la *Rational Fraction Polynomial method* [83]. Cependant, numériquement, l'analyse de Fourier

est limitée par la fenêtre temporelle d'analyse. Différents types de fenêtres et d'apodisation peuvent être choisis pour aboutir à un bon compromis entre résolution fréquentielle et niveau des lobes secondaires. Il reste que ces méthodes ne sont pas capables de séparer deux résonances qui se recouvrent si la fenêtre d'analyse est trop faible.

D'autres méthodes dites «hautes résolutions» peuvent alors être utilisées [33, 27]. Ces méthodes sont basées sur les travaux de De Prony [75], qui analysait les «mesures thermodynamiques de détente de mélanges gazeux». Il y exprime certaines lois physiques comme une somme d'exponentielles et se rend compte que cela peut s'exprimer à la manière d'une suite récurrente. En cherchant l'équation de récurrence de cette suite puis à compenser tous ses termes, on peut alors trouver les pôles du système ainsi que leurs amplitudes. Le principal désavantage de ces méthodes est leur sensibilité à la présence de bruit.

1.3.3.2 Déformées modales

Les méthodes avec un seul capteur et récepteur dites *Single Degree of Freedom*, ou encore SISO (*Single Input Single Output*) ne permettent pas d'avoir d'informations sur les déformées modales et peuvent également être incomplètes si le capteur ou la source se trouvent sur des nœuds. Alors, il est désormais courant d'employer des méthodes SIMO (*Single Input Multiple Output*), MISO (*Multiple Input Single Output*), voire MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). Ces dernières permettent non seulement d'avoir des informations sur les déformées mais aussi de distinguer d'éventuels recouvrements modaux.

Parmi ces méthodes, on peut citer en fréquentiel les méthodes de LSFDF (*Least Square Frequency Domain methods*), p-LSCFD (*polyreference Least Square Complex Frequency Domain method*), FDPI (*Frequency Domain Direct parameters Identification*), MvMIF (*Multivariate Mode Indication Function*), ou CMIF (*Complex Mode Indicator Function*).

Dans le domaine temporel, nous pouvons citer LSCE (*polyreference Least Square Complex Exponential method*), TPDI (*Time domain Direct Parameter Identification*) et ITD (*Ibrahim Time Domain method*) ou encore DSSITD (*Deterministic Subspace Identification in the Time Domain*). Les différences entre ces méthodes sont parfois subtiles.

Un des avantages non négligeables des méthodes MIMO est de pouvoir éventuellement identifier des racines multiples. C'est notamment le cas de la *Complex Mode Indicator Function* (CMIF), présentée par Singht [93], qui généralise au cas des modes complexes la MvMIF [82].

Un autre avantage que présente ce type de méthodes est la possibilité d'exciter plus facilement des modes de manière sélective et d'optimiser les excitations [71]. Cela avait été initié par Kennedy [57] puis Lewis et ses collaborateurs [66], via l'utilisation de 24 pots vibrants. Si cette méthode repose principalement sur l'ajustement manuel et progressif des différents pots vibrants, Ibanez [53] présente d'autres types de méthodes, comme celle d'Asher ou de Deck. Ce type d'exploitation des méthodes MIMO sera traité dans le dernier chapitre. L'utilisation de sources acoustiques rend en effet les étapes préliminaires particulièrement simples (détermination de vecteurs d'émission, pas d'étape de positionnement manuel).

1.4 Conclusion

Ce chapitre nous a permis d'introduire le contexte et l'état de l'art sur lesquels repose ce manuscrit ainsi que les problématiques soulevées. Le but est ainsi de développer un dispositif matriciel sans contact pour l'analyse vibratoire de pièces de moteurs aéronautiques.

La mesure sera réalisée par un vibromètre laser en plusieurs points, et l'excitation par un réseau de haut-parleurs.

On peut noter que l'utilisation de sources acoustiques n'est pas nouvelle : Laffeur *et al.* [62] proposent une approche acoustique SISO (en mesurant par ailleurs la pression avec un microphone que l'auteur déplace). L'excitation acoustique peut aussi être utilisée pour qualifier les matériaux peu raides, qui sont donc très sensibles aux capteurs en contact [79].

Chapitre 2

Matrice acousto-élastique

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Approche modale de la propagation des ondes élastiques	30
2.2.1	Ondes élastiques : généralités en milieu homogène	30
2.2.2	Approche mathématique de la décomposition modale pour les structures élastiques inhomogènes anisotropes bornées	31
2.2.3	Masse et raideur modale	32
2.3	Matrice de transmission acousto-élastique	33
2.3.1	Vibrations avec source acoustique	33
2.3.2	Vibrations amorties	34
2.3.3	Matrice de transmission mesurée et SVD	35
2.3.4	Rayonnement acoustique	37
2.4	Dispositif expérimental	37
2.5	Résultats sur les plaques	39
2.5.1	Plaque encastree	40
2.5.2	Plaque libre	42
2.6	Conclusion	44

2.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la matrice de transmission acousto-élastique mesurée au vibromètre laser qui sera utilisée dans tout le reste du manuscrit et de l'exprimer en fonction des modes de la structure étudiée. La propagation des ondes élastiques dans des solides finis est d'abord décrite selon une approche modale, en introduisant les notions de masse modale et de raideur modale (respectivement énergie cinétique et potentielle élastique de chaque mode) en l'absence de sources. Puis, en considérant une source acoustique et un faible amortissement, l'expression de la matrice acousto-élastique mesurée est établie. Cette expression permet d'anticiper le comportement de la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transmission en fonction des modes propres de la structure. Le dispositif expérimental est présenté, ainsi que des mesures réalisées sur des plaques symétriques avec différentes conditions aux limites permettant d'observer une levée de dégénérescence. Une plaque aux bords libre présente des modes doubles, tandis que l'encastrement d'un de ses bords lève la symétrie et, ainsi, la dégénérescence. Il est alors constaté que le nombre de valeurs singulières permet bien de détecter la superposition de modes. Comme

le déplacement sur de telles plaques est uniquement normal, il est constaté que les vecteurs singulier de réception permettent bien de retrouver les modes ou une combinaison linéaire de ceux-ci.

2.2 Approche modale de la propagation des ondes élastiques

Nous introduisons dans cette partie l'approche modale de la propagation des ondes élastiques dans les milieux finis.

2.2.1 Ondes élastiques : généralités en milieu homogène

Dans les solides homogènes, le déplacement des particules¹ est régi par l'équation du mouvement suivante :

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

où ρ est la masse volumique du milieu étudié en kg.m^{-3} , \mathbf{f} en N.m^{-3} représente la distribution de forces volumiques mises en jeu, \mathbf{w} est le champ de déplacement étudié en m et $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes en Pa. Ce dernier permet d'exprimer l'état de contraintes sur un volume élémentaire du milieu considéré et de calculer le vecteur contrainte \mathbf{T} (densité surfacique de force) sur une surface de normale \mathbf{n} grâce à la relation

$$\mathbf{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}. \quad (2.2)$$

Pour des petites déformations linéaires et réversibles (comportement élastique, très bien étudié par Royer [84]), c'est le tenseur 4D des constantes élastiques $\mathbf{C} = c_{ijkl}$ qui permet d'exprimer le tenseur des contraintes en fonction de celui des déformations $\epsilon(\mathbf{w}) = \epsilon_{kl}$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl}. \quad (2.3)$$

Ce tenseur des déformations est lui même relié au déplacement \mathbf{w} par la relation

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_l}{\partial x_k} + \frac{\partial w_k}{\partial x_l} \right) \quad (2.4)$$

et est, ainsi, symétrique par construction. Puisque le tenseur $\boldsymbol{\sigma}$ est également symétrique, cela implique que $c_{ijkl} = c_{jikl}$ et $c_{ijkl} = c_{ijlk}$. Cette dernière égalité permet de conclure que

$$c_{ijkl} \frac{\partial w_k}{\partial x_l} = c_{ijkl} \frac{\partial w_l}{\partial x_k},$$

et d'en déduire finalement une relation entre contrainte et déplacement pouvant s'exprimer comme :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \frac{\partial w_l}{\partial x_k}. \quad (2.5)$$

En faisant l'hypothèse que les constantes élastiques ne dépendent pas de l'espace et qu'il n'y a pas de forces extérieures, la combinaison des équations 2.1 et 2.5 conduit à l'équation du mouvement, qu'on appellera aussi équation de l'élastodynamique :

1. au sens de la mécanique des milieux continus : particule mésoscopique.

$$\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = c_{ijkl} \frac{\partial^2 w_l}{\partial x_k \partial x_j}. \quad (2.6)$$

Si le solide est infini, on parle de propagation libre et trois ondes de polarisations orthogonales peuvent se propager : une onde longitudinale (ou quasi-longitudinale) et deux ondes transverses (ou quasi-transverses).

Lorsque l'on s'intéresse à des milieux hétérogènes ou partiellement bornés, les différents types d'interfaces causent de multiples réflexions et éventuelles conversions d'ondes. Cela peut par exemple causer l'apparition d'ondes dites «guidées» comme pour le cas des ondes de Rayleigh à la surface de solides semi infinis, ou des ondes de Lamb dans les plaques. En cas de milieu borné (on parle également de milieu «fini»), les conditions aux limites imposées donnent alors naissance à un grand nombre de réflexions s'accompagnant de conversions d'ondes. Les phénomènes y sont généralement trop complexes pour être étudiés avec une approche propagative. En l'absence de dissipation, nous montrerons que le champ de déplacement peut se décomposer sous la forme d'une somme de modes propres réels et orthogonaux (ou ρ orthogonaux si la distribution de masse n'est pas uniforme spatialement). Nous verrons pour finir dans quelle mesure l'approche modale ainsi introduite reste valable en présence de dissipation.

2.2.2 Approche mathématique de la décomposition modale pour les structures élastiques inhomogènes anisotropes bornées

La décomposition modale est une méthode couramment utilisée pour décrire les vibrations de structures. Nous en rappelons ici les fondements mathématiques dans le cas d'une structure finie et inhomogène. Les résultats proviennent de la théorie des équations aux dérivées partielles [34] qui a été adaptée par Sepecher [92] au cas d'un système élastique anisotrope avec des conditions aux limites mixtes et un produit scalaire faisant intervenir la densité. Le tenseur \mathbf{C} dépend désormais de la position \mathbf{x} . L'écriture tensorielle sera utilisée dans cette partie afin d'alléger le texte, l'équation 2.3 devient ainsi :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w}), \quad (2.7)$$

où : désigne le produit tensoriel. En l'absence de forces extérieures, l'équation 2.1 peut alors s'écrire :

$$\mathbf{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \quad (2.8)$$

On considère une structure de taille finie délimitée par le volume U de \mathbb{R}^3 et décrite en tout point \mathbf{x} par la densité ρ et le tenseur d'élasticité $\mathbf{C}(\mathbf{x})$. On suppose que cette structure est fixée sur une partie Γ_f de la surface ∂U et libre sur la surface complémentaire $\Gamma_l = \partial U \setminus \Gamma_f$. Les vibrations sont décrites par un champ de déplacement \mathbf{w} satisfaisant l'équation des ondes élastiques ainsi que les conditions aux limites de déplacement nul sur la surface fixe Γ_f et de contrainte normale nulle sur la surface libre Γ_f . Ceci s'écrit mathématiquement comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } U \\ \mathbf{w} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \\ (\mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_l. \end{array} \right.$$

où $\epsilon(\mathbf{w})$ est le tenseur des déformations et \mathbf{n}_s le vecteur normal à la surface.

Il est couramment admis que les solutions de ce problème se décomposent sur les modes propres de la structure, c'est-à-dire les solutions monochromatiques du système. L'existence de ces modes et des fréquences de résonances associées est assurée mathématiquement par le théorème suivant :

Théorème : *Il existe une suite croissante de fréquences positives croissantes $(\omega_k)_{k=1}^{\infty}$ telles que $\lim_{k \rightarrow +\infty} \omega_k = +\infty$ et une base complète de modes propres $(\phi_k)_{k=1}^{\infty}$ dans $L^2(U)^3$ satisfaisant les équations :*

$$\begin{cases} \mathbf{div}(\mathbf{C} : \epsilon(\phi_k)) + \rho\omega_k^2\phi_k = 0 & \text{dans } U \\ \phi_k = 0 & \text{sur } \Gamma_f \\ (\mathbf{C} : \epsilon(\phi_k)) \cdot \mathbf{n}_s = 0 & \text{sur } \Gamma_l. \end{cases} \quad (2.9)$$

Ce théorème découle du caractère elliptique de l'opérateur associé à la matrice des constantes élastiques qui est symétrique (ce qui est une autre manière d'exprimer le fait que le milieu est réciproque [10]). Il se démontre à l'aide du théorème de Lax Milgram et de la théorie spectrale pour les opérateurs auto-adjoints compacts. Ce résultat permet d'affirmer que les vibrations libres d'une structure, dans une bande de fréquence finie, se décomposent sur un nombre fini de modes propres et donc un nombre fini de fréquences. De plus, on peut montrer que les fonctions propres ϕ_k satisfont les relations dites de ρ -orthogonalité suivantes :

$$\int_U \rho \phi_k \cdot \phi_l d^3x = \delta_{kl} \text{ pour tous } k, l \geq 1. \quad (2.10)$$

Les modes sont normalisés en utilisant la norme :

$$\|\phi\| = \sqrt{\int_U \rho |\phi|^2 d^3x}. \quad (2.11)$$

où $|\phi|$ représente ici la norme euclidienne de ϕ .

Enfin, les quantités étudiées sont réelles, et les modes propres le sont donc par extension également. Cela se traduit par l'observation de modes stationnaires

2.2.3 Masse et raideur modale

En multipliant l'équation d'onde (2.9) appliquée à un mode par ϕ_k et en intégrant sur le volume U , on obtient, grâce à une intégration par partie, l'équation suivante :

$$\omega_k^2 \int_U \rho |\phi_k|^2 d^3x - \int_U \epsilon(\phi_k) : \mathbf{C} : \epsilon(\phi_k) d^3x = 0. \quad (2.12)$$

Cette équation peut être réécrite en introduisant la masse modale m_k et la raideur modale r_k de la manière suivante

$$m_k \omega_k^2 - r_k = 0 \text{ pour tout } k \geq 1. \quad (2.13)$$

où

$$m_k = \int_U \rho |\phi_k|^2 d^3x$$

et

$$r_k = \int_U \epsilon(\phi_k) : \mathbf{C} : \epsilon(\phi_k) d^3x$$

Ainsi la fréquence propre du mode k est donnée par la solution d'un système masse-ressort à 1 degré de liberté ($\omega_k = \sqrt{r_k/m_k}$).

Dans le chapitre 5, nous verrons comment une modification de la structure modifie la masse modale et/ou la raideur modale, et donc la fréquence de résonance des modes. Il s'agit maintenant d'exploiter ces modes pour décrire les vibrations de la structure en présence de sources excitatrices, et, en particulier, d'une source acoustique.

2.3 Matrice de transmission acousto-élastique

Nous considérons maintenant le cas d'une structure excitée par une source acoustique, puis celui où un faible amortissement est considéré, pour aboutir à l'expression de la matrice de transmission acousto-élastique telle qu'elle sera mesurée dans nos expériences.

2.3.1 Vibrations avec source acoustique

Dans nos expériences, la structure est excitée par un champ de pression acoustique $p(\mathbf{x}, t)$ sur la surface libre Γ_l . La question est de savoir si l'on peut décrire les vibrations de la structure excitée par ce champ acoustique comme une combinaison linéaire des modes propres de la structure libre, pondérées par des fonctions dépendant du temps. La réponse est donnée par le théorème suivant :

Théorème *Si $p(\mathbf{x}, t)$ est une fonction intégrable sur la frontière $\Gamma_l \times \mathbb{R}$ alors il existe une unique solution au problème élasto-dynamique suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{w})) - \rho \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{dans } U \times \mathbb{R} \\ \mathbf{w} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_f \times \mathbb{R} \\ (\mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{w})) \cdot \mathbf{n}_s = -p \quad \text{sur } \Gamma_l \times \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2.14)$$

et celle-ci s'exprime dans le domaine fréquentiel partir des modes harmoniques sous la forme

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, \omega) = \sum_k \alpha_k(\omega) \phi_k(\mathbf{x}), \quad (2.15)$$

où les coefficients sont fonction de la transformée de Fourier temporelle de la pression $p(\mathbf{x}, \omega)$ comme suit

$$\alpha_k(\omega) = - \frac{\int_{\Gamma_l} p(\mathbf{x}, \omega) \phi_k(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_s d^2x}{\omega_k^2 - \omega^2}. \quad (2.16)$$

Étant donnée l'expression des coefficients (2.16), il apparaît que la solution diverge aux fréquences propres de la structure. En pratique, la dissipation empêche cette divergence. Nous abordons donc maintenant le problème des vibrations en présence de pertes.

2.3.2 Vibrations amorties

Dans les structures mécaniques, les phénomènes de dissipation induisent un certain amortissement des vibrations. Dans les solides, les principales causes de dissipation sont la transformation d'une partie de l'énergie en chaleur, par des processus thermoélastiques ou viscoélastiques par exemple, ou les pertes par rayonnement [22]. Dans le cas de structures assemblées, ce sont également parfois les jonctions qui causent la dissipation dans la structure, comme étudié par Chen [24] pour le cas des jonctions de pales rapportées. Comme la seule quantité mesurable est le taux d'amortissement global, il est parfois difficile d'en séparer les causes, même si des auteurs s'y sont attelés [109].

Dans un système à 1DDL l'amortissement est introduit grâce à une constante c_{am} en kg.s^{-1} par rapport à la même équation sans dissipation [voir equation (2.17)] :

$$m\ddot{w} + c_{\text{am}}\dot{w} + rw = 0. \quad (2.17)$$

Cette équation peut être réécrite en faisant apparaître la fréquence propre du système (sans amortissement) $\omega_o = \sqrt{\frac{r}{m}}$ et le coefficient d'amortissement $\gamma = \frac{c_{\text{am}}}{2m}$ en s^{-1} de la manière suivante

$$\ddot{w} + 2j\gamma\dot{w} + \omega_o^2 w = 0. \quad (2.18)$$

Les fréquences propres de cette équation différentielles sont solutions de

$$-\omega^2 + 2j\gamma\omega + \omega_o^2 = 0. \quad (2.19)$$

La fréquence propre est complexe et donnée par $\tilde{\omega} = \omega_a + j\gamma$ où $\omega_a = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2}$. Dans le cas où $\omega_o < \gamma$, la fréquence propre est purement imaginaire et le système n'oscille pas (amortissement critique). Dans le cas contraire et c'est ce régime que nous rencontrons ici, le système est pseudo périodique, c.-à-d. qu'il oscille à la pulsation ω_a mais subit une atténuation exponentielle en $e^{-\gamma t}$. Dans le domaine de Fourier, la largeur de la résonance est 2γ . Le facteur de qualité Q est introduit pour quantifier la finesse de la résonance. Il est donné par le rapport de la pulsation de résonance sur la largeur de la résonance. Il s'exprime ainsi en fonction de ω_o et γ de la manière suivante :

$$Q = \frac{\omega_o}{2\gamma}. \quad (2.20)$$

Plus le facteur de qualité est grand, plus l'atténuation est négligeable par rapport à la fréquence propre, et plus on se rapproche du cas non amorti. Dans le cas d'oscillations forcées, ce facteur de qualité pourra aussi s'exprimer en fonction des puissances totales et dissipées [1].

Maintenant dans le cas des modes de structures ayant des amortissements proportionnels ou très faibles, il peut être montré [42] que les modes propres seront les mêmes que dans le cas conservatif et l'équation 2.13 peut s'écrire

$$-m_k\omega_k^2 + 2j\gamma_k m_k\omega_k + r_k = 0. \quad (2.21)$$

Il paraît intuitif que l'amortissement modal γ_n diffère pour chaque mode : d'une part les phénomènes de thermoélasticité et viscoélasticité dépendent de la fréquence, et d'autre part le rayonnement dans l'air dépend fortement à la fois de la fréquence et de la forme du mode.

Dans le cas où plusieurs causes de dissipation sont présentes, les coefficients γ_k peuvent s'exprimer en une somme de coefficients chacun lié à une cause par exemple comme

$$\gamma_k = \gamma_{\text{ray},k} + \gamma_{\text{viscoe},k} + \dots \quad (2.22)$$

où $\gamma_{\text{ray},k}$ et $\gamma_{\text{viscoe},k}$ sont les coefficients dus respectivement au rayonnement acoustique et à la viscoélasticité. Les coefficients de qualités associés se somment alors de manière inverse

$$Q_k^{-1} = Q_{\text{ray},k}^{-1} + Q_{\text{viscoe},k}^{-1} + \dots \quad (2.23)$$

Dans ce manuscrit, nous nous intéressons principalement à l'amortissement du au rayonnement acoustique et à son facteur de qualité de rayonnement Q_{ray} , puisqu'il permet d'évaluer le couplage acousto-élastique et donc l'amplitude d'excitation des modes. Par ailleurs, comme les structures étudiées sont en aluminium, acier, ou titane, matériaux présentant peu de dissipation aux fréquences où nous les étudions, il ne serait pas aberrant de considérer le rayonnement comme la principale source de perte et donc par extension d'assimiler la largeur de chaque résonance au couplage acousto-élastique.

2.3.3 Matrice de transmission mesurée et SVD

On introduit la matrice de transmission \mathbf{K} mesurée expérimentalement. Cette matrice est la réponse à la pulsation ω entre un réseau de N_{hp} haut-parleurs et N_{pt} points de mesure d'un vibromètre laser. On suppose que le haut-parleur d'indice j génère un champ de pression p_j et en introduisant l'amortissement dans les équations (2.15) et (2.16) et du fait que le vibromètre laser utilisé ne mesure que la composante normale à son faisceau \mathbf{n}_v , il apparaît que l'élément K_{ij} s'écrit de la façon suivante :

$$K_{ij} = \sum_n \mathbf{n}_v^T \frac{\phi_n(\mathbf{x}_i)}{(-\omega^2 + 2j\gamma\omega + \omega_n^2)} \int_{\Gamma_i} p_j(\mathbf{x}, \omega) \phi_n(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_s. \quad (2.24)$$

Il est pertinent d'exprimer \mathbf{K} comme le produit de trois matrices :

$$\mathbf{K} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\mu} \mathbf{A}^T. \quad (2.25)$$

où $\mathbf{\mu}$ est une matrice diagonale de dimensions $N_m \times N_m$ (N_m est le nombre de modes impliqué dans la bande passante étudiée), liée à l'effet de la résonance dont les éléments s'écrivent :

$$\mu_{nn} = \frac{1}{(-\omega^2 + 2j\gamma\omega + \omega_n^2)}. \quad (2.26)$$

$\mathbf{\Psi}$ et \mathbf{A} sont des matrices rectangulaires de dimensions $N_{pt} \times N_m$ et $N_{hp} \times N_m$, respectivement. \mathbf{A} est liée à l'excitation acousto-élastique du mode n par le haut-parleur à la position \mathbf{r}_j d'élément :

$$a_{jn} = \oint_{\delta V} \phi_n^T(\mathbf{x}) p_j(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}_s d\mathbf{x}. \quad (2.27)$$

Enfin, l'élément ψ_{in} décrit le déplacement mesuré par le vibromètre laser associé au mode n :

$$\psi_{in} = \mathbf{n}_v^T \phi_n(\mathbf{r}_i). \quad (2.28)$$

Il apparaît donc que le rang de \mathbf{K} est nécessairement inférieur ou égal au nombre de points de mesures N_{pt} , au nombre de haut-parleurs N_{hp} , et au nombre de modes se superposant à une fréquence donnée.

Pour les structures étudiées dans la majorité de ce manuscrit (à l'exception éventuelle des modes très peu dispersés du compresseur centrifuge présentés dans le chapitre 5), le nombre de sources et de points de mesure est supérieur au nombre de modes se superposant à une fréquence donnée. En particulier, dans ce chapitre, on ne s'intéresse qu'à des structures pour lesquelles les modes sont au mieux doubles. Le rang de $\boldsymbol{\mu}$ est alors inférieur ou égal à deux lorsque la fréquence considérée est proche d'une fréquence propre dégénérée.

Si les sources permettent d'exciter l'ensemble des modes à la fréquence considérée (il faut donc que la position des haut-parleurs soit suffisamment variée), le rang de \mathbf{K} devrait alors être égal au nombre de modes se superposant à la fréquence d'intérêt.

Pour quantifier cet effet de «rang», nous introduisons la décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*, ou SVD). La SVD de \mathbf{K} s'écrit

$$\mathbf{K} = \sum_m \mathbf{u}_m s_m \mathbf{v}_m^\dagger, \quad (2.29)$$

où les vecteurs \mathbf{u}_m de dimension N_{pt} forment une base orthonormée de vecteurs dits «de sortie». Les vecteurs \mathbf{v}_m de dimension N_{hp} forment également une base orthonormée de vecteurs dits «d'entrée». Quant à la matrice \mathbf{S} , il s'agit d'une matrice diagonale, contenant les valeurs singulières, positives et réelles.

Si l'on fait le lien entre les équations (2.29) et (2.25), on remarque que pour une fréquence donnée, le nombre de modes se superposant est égal au rang de \mathbf{K} , soit également le nombre de valeurs singulières significatives si l'on effectue une SVD. Il apparaît alors clairement que, si un seul mode est présent à une fréquence donnée, on pourra faire une analogie directe entre, d'une part, le vecteur singulier \mathbf{u}_1 , associé à la première (et seule) valeur singulière et le vecteur ϕ_1 associé au mode.

Les choses se compliquent si plusieurs modes se superposent. Dans notre cas de figure, nous allons voir que la SVD est essentiellement pilotée par la matrice de couplage acousto-élastique \mathbf{A} . A cette fin, le produit $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ est calculé en fonction de la SVD de \mathbf{K} . En effet on peut voir que les valeurs propres de $\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K}$ sont les valeurs singulières de \mathbf{K} au carré :

$$\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K} = \sum_n \mathbf{v}_n s_n^2 \mathbf{v}_n^\dagger. \quad (2.30)$$

Ce même produit peut être exprimé différemment à partir de la formulation physique de \mathbf{K} en (2.25) :

$$\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K} = \mathbf{A}^* \boldsymbol{\mu}^* \boldsymbol{\psi}_n^\dagger \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\mu} \mathbf{A}^\mathbf{T}.$$

On considère que les points de mesures recouvrent de manière exhaustive toute la surface de la pièce, et que le champ de déplacement est principalement associé au mode de flexion et a donc une composante essentiellement normale à la surface. L'orthogonalité des modes ($\boldsymbol{\psi}^\dagger \boldsymbol{\psi} \propto \mathbf{I}$) donne alors :

$$\mathbf{K}^\dagger \mathbf{K} = |\boldsymbol{\mu}|^2 \mathbf{A}^* \mathbf{A}^\mathbf{T}. \quad (2.31)$$

L'équation (2.31) montre bien que dans le cas où les éléments de $\boldsymbol{\mu}$ significatifs sont égaux, les valeurs singulières de \mathbf{K} sont principalement reliées à la décomposition en valeurs singulières de la matrice de couplage acousto-élastique \mathbf{A} . Les premiers vecteurs singuliers

seront donc donnés en fonction de la combinaison linéaire des modes les plus excités par le réseau. Les suivants seront déterminés par orthogonalité. Nous verrons dans le chapitre 6 que cette décomposition peut être utilisée pour contrôler le champ de vibration.

2.3.4 Rayonnement acoustique

Pour quantifier qualitativement la manière dont chaque mode peut être excité par un champ acoustique, du fait de la réciprocité, on peut s'aider de quantités utilisées pour l'étude du rayonnement acoustique des modes.

Dans ce manuscrit, nous ne chercherons pas à obtenir des expressions analytiques du rayonnement des structures étudiées, qui sont trop complexes pour cela. Cependant l'utilisation d'outils de simulations nous permettra d'estimer le champ rayonné par des modèles simplifiés des structures étudiées. Nous nous intéresserons en particulier au facteur de qualité de rayonnement de chaque mode n $Q_{\text{ray},n}$, qui permet de quantifier les pertes par rayonnement pour chaque mode dans la manière suivante [45]

$$Q_{\text{ray},n} = \frac{\omega E_{s,n}}{P_{\text{ray},n}}, \quad (2.32)$$

où $E_{s,n}$ est l'énergie stockée pour chaque mode, soit en l'occurrence la somme des énergies cinétiques et potentielles élastiques. On peut déduire de l'équation 2.12 que celles-ci sont égales². Cela permet donc d'exprimer l'énergie stockée avantageusement comme deux fois l'énergie cinétique [45] :

$$E_{s,n} = \omega_n^2 \int_U \rho |\phi_n|^2 d^3x \quad (2.33)$$

La puissance rayonnée de chaque mode $P_{\text{ray},n}$ ainsi que l'énergie stockée ainsi exprimée $E_{s,n}$ pourront être évaluées directement depuis Comsol. Le facteur de qualité de rayonnement quantifie alors la propension de chaque mode à rayonner acoustiquement. Par réciprocité, il permet alors de donner une estimation globale de la propension de ces modes à être excités par une source acoustique. En effet, plus il est élevé, plus les pertes par rayonnement sont faibles et plus il sera difficile de l'exciter. Cet indicateur ne permet cependant que de donner une information globale, ne prenant pas en compte la géométrie. Pour ce dernier point, ce sont les diagrammes de directivité qui seront tracés.

2.4 Dispositif expérimental

La pièce que l'on souhaite étudier est excitée par des hauts-parleurs. Le déplacement orienté selon l'axe du vibromètre est mesuré en un point pour chacune des excitations. Comme il s'agit d'un vibromètre monopoint (Polytec OFV-5000 avec une tête OFV-500), un banc de translation 2D est nécessaire afin de balayer la surface de la pièce inspectée. Une carte son Antelope Audio (modèle Orion 32 Audio Interface) est utilisée pour la conversion numérique-analogique des signaux à envoyer sur le réseau. Elle sert également pour la conversion analogique-numérique du signal mesuré par le vibromètre. Comme de légers décalages peuvent se créer entre l'émission et la réception, une réponse impulsionnelle

2. Cela peut paraître contre intuitif au premier abord : cette équation permet d'associer à chaque mode le comportement d'un système masse ressort à 1 degré de liberté. Dans ce types de systèmes, il y a un perpétuel échange entre énergie cinétique instantanée et énergie potentielle instantanée : elles sont en opposition de phase. Ici, l'égalité vient de l'intégration sur le volume.

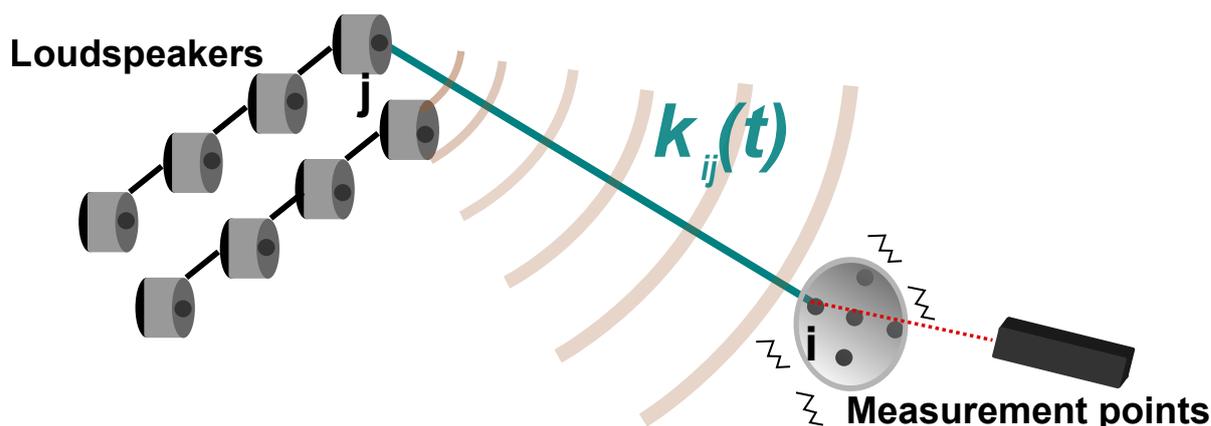


FIGURE 2.1 – Schéma représentatif du dispositif expérimental.



FIGURE 2.2 – Photographie du dispositif expérimental utilisé au laboratoire.

d'entrée/sortie est mesurée afin de connaître précisément l'indice temporel du début de la mesure. Un schéma du dispositif d'acquisition est montré en figure 2.1. Une photo du dispositif utilisé au laboratoire est par ailleurs représentée sur la figure 2.2.

Les hauts-parleurs émettent des chirp de 1s, sur une bande fréquentielle choisie selon les cas, majoritairement de 1k à 10-15 kHz. Les signaux mesurés au vibromètre sont ensuite déconvolués des signaux envoyés afin d'en obtenir la réponse impulsionnelle.

Un désavantage notable de l'excitation acoustique réside dans la faible amplitude que celle-ci engendre. Ici, il est possible d'exploiter le réseau pour remédier partiellement à ce problème en utilisant une base d'émission de Hadamard au lieu d'une base d'émission canonique (émission successive par chaque haut-parleur). Il est ensuite possible de passer numériquement d'une base à l'autre. Cela ne sera de toute façon nécessaire que pour les expériences d'excitation contrôlées décrites dans le chapitre 6. L'utilisation d'une base de Hadamard permet d'augmenter la pression acoustique efficace d'un facteur de \sqrt{N} . Une base de Hadamard est composée de vecteurs tous orthogonaux entre eux dont les coefficients sont tous 1 ou -1. Ainsi, les haut-parleurs émettent simultanément lors des

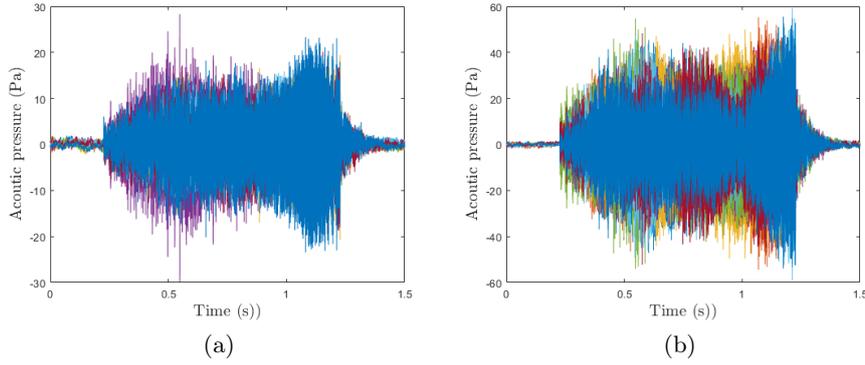


FIGURE 2.3 – Comparaison de la pression acoustique mesurée avec (a) une émission en base canonique et (v) une émission en base de Hadamard.

différentes émissions ce qui augmente le niveau sonore et donc le rapport signal à bruit. Nous l'avons vérifié expérimentalement en mesurant la pression acoustique résultant de ces deux types d'émissions avec un microphone placé dans le plan de l'objet. Les résultats sont représentés sur la figure 2.3. La pression efficace est calculée pour chacune des émissions, selon la formule suivante :

$$p_{\text{eff}}(t) = \sqrt{\frac{1}{t_i} \int_0^{t_i} p^2(t) dt} \quad (2.34)$$

En faisant la moyenne sur les émissions, on obtient une pression efficace moyenne de 4.68 Pa pour les émissions canoniques et de 13.73 Pa pour les émissions en base de Hadamard. Le ratio est donc de 2.93, ce qui est bien proche de $\sqrt{8} \simeq 2.83$.

2.5 Résultats sur les plaques

Nous allons étudier la matrice acousto-élastique dans le cas de plaques minces. Ce cas est avantageux car, en approximation basse fréquence, on peut ne considérer pour le mode A_o que la composante normale du déplacement, et la matrice acousto-élastique devrait ainsi mesurer l'unique composante du déplacement. Ainsi, dans le modèle de Kirchhoff pour les plaques fines, le déplacement obéit à l'équation suivante [31].

$$\frac{D}{\rho h} \Delta^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (2.35)$$

où

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (2.36)$$

est la rigidité en flexion de la plaque, avec E le module d'Young et ν le coefficient de Poisson.

La plaque étudiée, d'une épaisseur de 1.6 mm, est en aluminium et de dimensions 10 cm par 10 cm. La validité de l'approximation « plaque fine » a été vérifiée grâce à des simulations sous Comsol. En effet, en moyenne sur la plupart des modes étudiés, le déplacement normal était 25 fois supérieur aux deux autres composantes.



FIGURE 2.4 – Photo du montage pour l'étude d'une plaque d'aluminium encastrée en son bord inférieur.

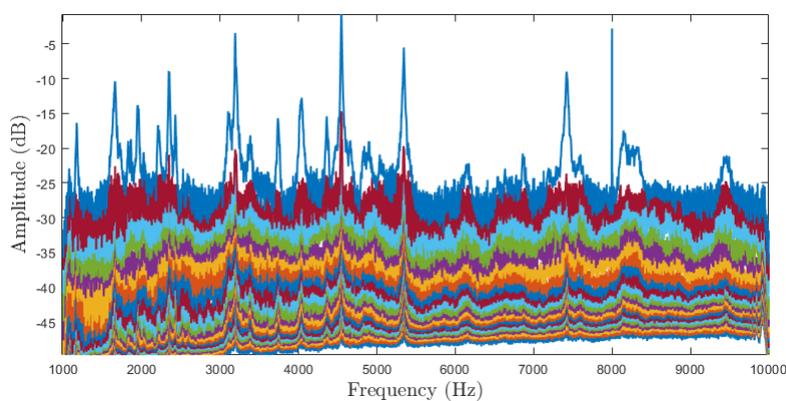


FIGURE 2.5 – Valeurs singulières de la matrice acousto-élastique obtenue à chaque fréquence avec 22 haut-parleurs et 400 points de mesure répartis sur une plaque encastrée.

2.5.1 Plaque encastrée

Une plaque seule encastrée à sa base a d'abord été étudiée (figure 2.4). La mesure est effectuée en utilisant 22 haut-parleurs et 400 points de mesure (20×20 points espacés de 0.5 cm). Les valeurs singulières de la matrice \mathbf{K} sont tracées sur la figure 2.5. Comme on peut le constater, il ne semble y avoir qu'une seule valeur singulière significative à chaque fréquence de résonance.

L'analyse des vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 nous permet de vérifier que cette première valeur singulière est bien associée à un mode stationnaire. A l'inverse, le deuxième vecteur singulier est généralement très bruité. Les deux premiers vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 à 1661 Hz sont représentés sur la figure 2.6. Un autre exemple est montré pour la résonance à 1946 Hz sur la figure 2.7. Cela confirme le fait que le premier vecteur singulier au niveau d'une résonance correspond à un mode stationnaire s'il n'y a qu'une seule valeur singulière significative.

On vérifie alors que, quelque soit l'excitation, c'est bien ce mode et uniquement ce mode qui est excité. Cela peut se voir en comparant les déformées mesurées pour différents haut-parleurs en figure 2.8. Il apparaît bien que, quelque soit le haut-parleur utilisé, un seul champ de déplacement est possible, et qu'il s'agit bien d'un champ stationnaire. Seules changent la phase ainsi que l'amplitude des déplacements. En effet le déplacement maximal est de 0.4 mm/s pour le haut-parleur 2 contre 1.6 mm/s pour le haut-parleur 16. Cela affecte aussi le rapport signal à bruit qui est visiblement plus faible pour l'excitation par

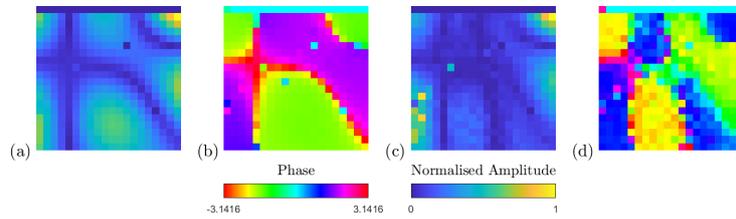


FIGURE 2.6 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 1661 Hz à partir de vingt-deux excitations acoustiques sur la plaque encastrée : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 19.97 dB plus faible que la première.

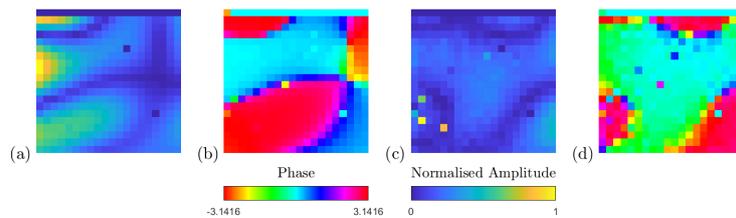


FIGURE 2.7 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 1946 Hz à partir de vingt-deux excitations acoustiques sur la plaque encastrée : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 18.93 dB plus faible que la première ce qui confirme que seul le premier vecteur singulier n'est pas lié au bruit.

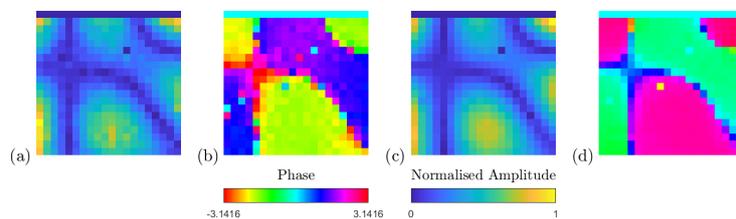


FIGURE 2.8 – Représentation des champs mesurés à 1661 Hz sur la plaque encastrée pour différentes excitations acoustiques : (a) amplitude et (b) phase du champ mesuré à 1661 Hz pour le HP 2, (c) amplitude et (d) phase de pour le HP 16. Le déplacement maximal est de 0.4 mm.s pour le HP 2 et 1.6 mm/s pour le HP 16.



FIGURE 2.9 – Photographie du montage pour l'étude d'une plaque d'aluminium avec des conditions aux limites libres.

le haut-parleur 2.

2.5.2 Plaque libre

Le cas de la plaque encastrée ne permet pas d'observer de superpositions de modes (cela se confirme par les simulations sous Comsol, les modes sont très espacés les uns des autres). Cependant, un bon moyen de vérifier l'efficacité de la méthode est alors de changer les conditions aux limites. Ainsi, en introduisant une symétrie on devrait voir apparaître des modes dégénérés. Dans ce but, la même plaque a cette fois été maintenue entre deux élastiques pour s'approcher des conditions aux limites «libres». Une photo du montage est montrée en figure 2.9. Cette fois, les valeurs singulières représentées en figure 2.10 présentent un comportement différent. En effet, certaines résonances présentent plusieurs valeurs singulières significatives. Les vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 de l'une d'entre elle, à 2225 Hz, sont représentés sur la figure 2.11. Les vecteurs singuliers font ici apparaître deux déplacements modaux bien distincts qui illustrent la dégénérescence due à la symétrie : les lignes nodales sont identiques mais orientées soit selon x , soit selon y . On mesure à partir de la figure 2.11 une longueur d'onde caractéristique d'environ 8 cm, ce qui correspond bien à la valeur attendue à cette fréquence. En effet, la relation de dispersion déduite de l'équation (2.35) s'écrit :

$$k^4(\omega) = \frac{\rho_p h}{D} \omega^2. \quad (2.37)$$

Cette relation de dispersion est représentée et comparée aux longueurs d'onde du son dans l'air sur la figure 2.12. Sur cet exemple, les deux vecteurs singuliers correspondent à deux modes stationnaires, ce qui s'explique par le fait que le mode qui correspond au premier vecteur singulier est majoritairement excité par les différents haut-parleurs du réseau. Pour d'autres vecteurs singuliers à l'inverse, le champ favorisé par le réseau est complexe, comme on peut le voir dans la figure 2.13. Enfin, contrairement au cas encastré, on observe que le champ de vibration est très dépendant du haut-parleur utilisé. Par exemple, en utilisant

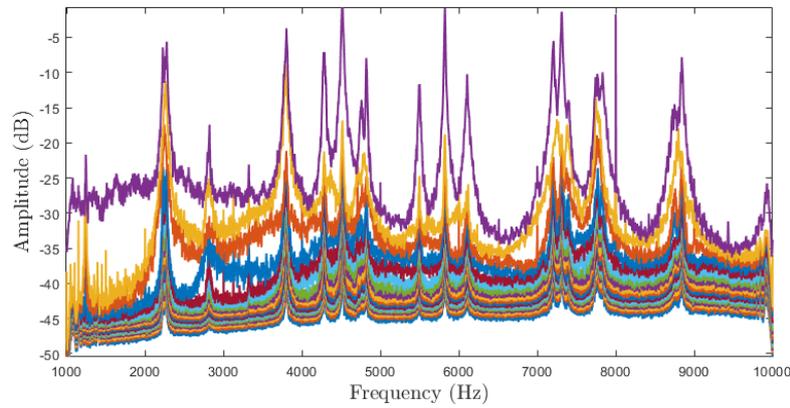


FIGURE 2.10 – Valeurs singulières de la matrice acousto-élastique obtenue à chaque fréquence avec 18 haut-parleurs et 400 points de mesure répartis sur une plaque libre.

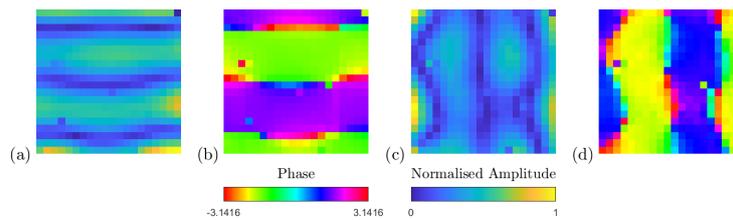


FIGURE 2.11 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 2225 Hz à partir de 18 excitations acoustiques sur la plaque libre : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 4 dB plus faible que la première.

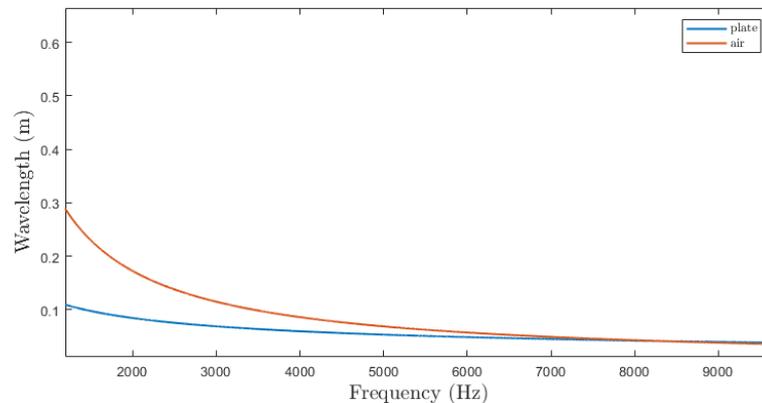


FIGURE 2.12 – Dispersion des ondes de flexion sur une plaque d'aluminium de 1.6 mm d'épaisseur avec $\nu = 0.24$, $\rho_p = 2700 \text{ kg.m}^{-3}$ et $E = 62 \text{ GPa}$ (courbe bleue). Longueur d'onde du son dans l'air pour une température de 25 °C (courbe rouge).

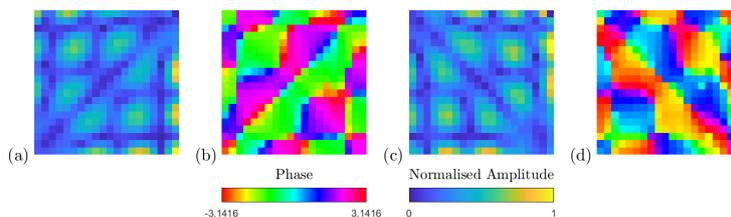


FIGURE 2.13 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 7742 Hz à partir de dix-huit excitations acoustiques sur la plaque libre : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 5.80 dB plus faible que la première, ce qui suggère que ces deux vecteurs singuliers sont significatifs.

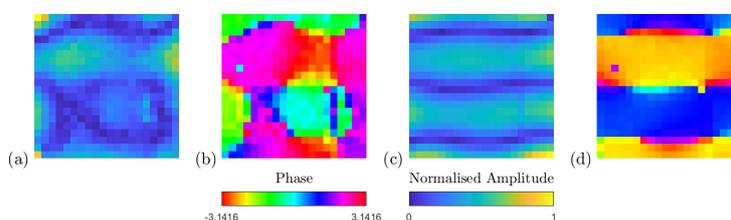


FIGURE 2.14 – Représentation des champs mesurés à 2225 Hz sur la plaque libre pour différentes excitations acoustiques : (a) amplitude et (b) phase du champ mesuré à 2225 Hz pour le HP 9, (c) amplitude et (d) phase de pour le HP 15. L'amplitude maximale du champ excité par le HP 9 est de 0.45 mm/s et celle par le HP 15 est de 1.9 mm/s, ce qui explique pourquoi ce dernier paraît moins bruité.

les HP 9 et 15, on obtient la figure 2.14. Cela montre que, à cette fréquence, du fait de la dégénérescence, plusieurs ODS peuvent être observées même avec une excitation monochromatique. Ces expériences ont montré qu'il était possible de distinguer, grâce à la matrice acousto-élastique les résonances qui seront qualifiées de «simples», correspondant à un seul mode, des résonances qui seront qualifiées de «doubles».

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté et explicité théoriquement une méthode matricielle d'analyse modale entièrement sans contact. Cette méthode a d'abord été expérimentée sur des plaques, dont on considère que le déplacement est correctement décrit par la composante normale mesurée par le vibromètre, permettant une mesure complète de la matrice de transmission acousto-élastique. L'approche matricielle et la SVD permettent de dénombrer les modes se superposant à une même fréquence. Dans les cas où plusieurs modes se superposent, les vecteurs singuliers obtenus sont gouvernés par la combinaison linéaire de modes favorisée par le réseau.

Chapitre 3

Structures à symétrie de rotation continue

Sommaire

3.1	Introduction	45
3.2	Simulations	46
3.2.1	Calcul des modes propres	47
3.2.2	Rayonnement en champ lointain	47
3.2.3	Efficacité de rayonnement	49
3.3	Mesures acoustiques	50
3.3.1	Décomposition en valeurs singulière	51
3.3.2	Influence du réseau	52
3.4	Comparaison avec des mesures élastiques	53
3.4.1	Dispositif expérimental	53
3.4.2	Décomposition en valeurs singulières	54
3.4.3	Champ non stationnaire et levée de dégénérescence	57
3.4.4	Méthode ESPRIT	59
3.4.5	Comparaison du nombre des excitations acoustiques et élastiques	61
3.5	Conclusion	62

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, c'est un pignon, représenté sur la figure 3.1, qui a été étudié. Il s'agit d'un disque d'acier incurvé d'environ 11 cm de diamètre, percé d'un trou de 1.75 cm de diamètre et d'une épaisseur variable. Elle est de 0.5 cm sur les bords. Son poids est d'environ 260 g.



FIGURE 3.1 – Photographie du pignon de moteur d'hélicoptère étudié.

Ce pignon présente des dents de dimensions millimétriques. Aux fréquences où nous avons étudié son comportement (dans la gamme de 1 à 10 kHz), les longueurs d'onde sont grandes devant la dimension caractéristique des dents, ce qui permet d'en négliger l'influence. On pourra alors considérer cette structure comme à symétrie continue de rotation, présentant donc des modes dégénérés. On verra que ces modes se rapprochent de ceux des plaques circulaires, étudiées par Rayleigh [78], qui montre que les déplacements peuvent s'écrire de la manière suivante en coordonnées cylindriques :

$$w_{m_z, k_r}(r, \theta) = \cos(m_z \theta)(\alpha J_{m_z}(k_r r) + \beta J_{m_z}(ik_r r)) + \sin(m_z \theta)(\gamma J_{m_z}(k_r r) + \delta J_{m_z}(ik_r r)), \quad (3.1)$$

Cette expression dépend de 2 entiers m_z et k_r . k_r est le nombre de cercles nodaux et m_z est le nombre de diamètres nodaux. Les coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et k dépendent des conditions aux limites. Pour des plaques circulaires encastrées en leurs centres, cas qui se rapproche très fortement du cas étudié ici, il est montré par Deutsch [29] que :

$$w_n(r, \theta) = (\cos(n\theta)\alpha + \sin(n\theta)\gamma)J_n(kr). \quad (3.2)$$

Comme décrit par Harris [48], pour des plaques circulaires présentant une certaine courbure la dépendance angulaire est bien similaire, et donc la dégénérescence maintenue.

Si le pignon présente vraisemblablement des similarités au cas de plaques circulaires minces évoqué à l'instant, nous nous devons de remarquer que son épaisseur ne permet peut-être pas de vérifier l'hypothèse de plaque mince, et que sa courbure fait qu'il faut envisager et étudier les composantes normales.

Dans un premier temps nous vérifierons donc par des simulations sous Comsol que d'une part la composante mesurée par le vibromètre permet bien de voir les modes et d'autre part que ceux-ci se couplent suffisamment à l'air pour être excités par le réseau de haut-parleurs. Ces simulations fournissent une évaluation du couplage acousto-élastique ainsi que de l'amortissement induit par le rayonnement acoustique.

3.2 Simulations

La recherche directe des modes propres du système complet elasto-acoustique est un problème difficile numériquement. Premièrement, du fait des pertes radiatives, les fréquences propres sont complexes, et sont donc plus délicates à extraire que des fréquences réelles. Deuxièmement, la résolution demande beaucoup de ressources car il faut résoudre à la fois le problème acoustique et élastique. Enfin, sur Comsol, il faut distinguer les modes du pignon et les modes «acoustiques» de la sphère située autour du pignon. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à faire l'hypothèse de couplage faible entre la structure élastique et l'air, c.-à-d. que le couplage avec l'air a peu d'influence sur les modes propres du pignon. Ainsi dans un premier temps nous cherchons les modes propres du pignon avec des conditions aux limites libres en résolvant un problème purement élastique. Puis dans un second temps nous réalisons une simulation purement acoustique avec comme conditions aux limites sur la surface du pignon, le champ de déplacement calculé dans la première phase afin d'estimer le diagramme de rayonnement ainsi que la puissance rayonnée de chaque mode. Cette approximation reste valable tant que les coefficients de qualités sont relativement élevés.

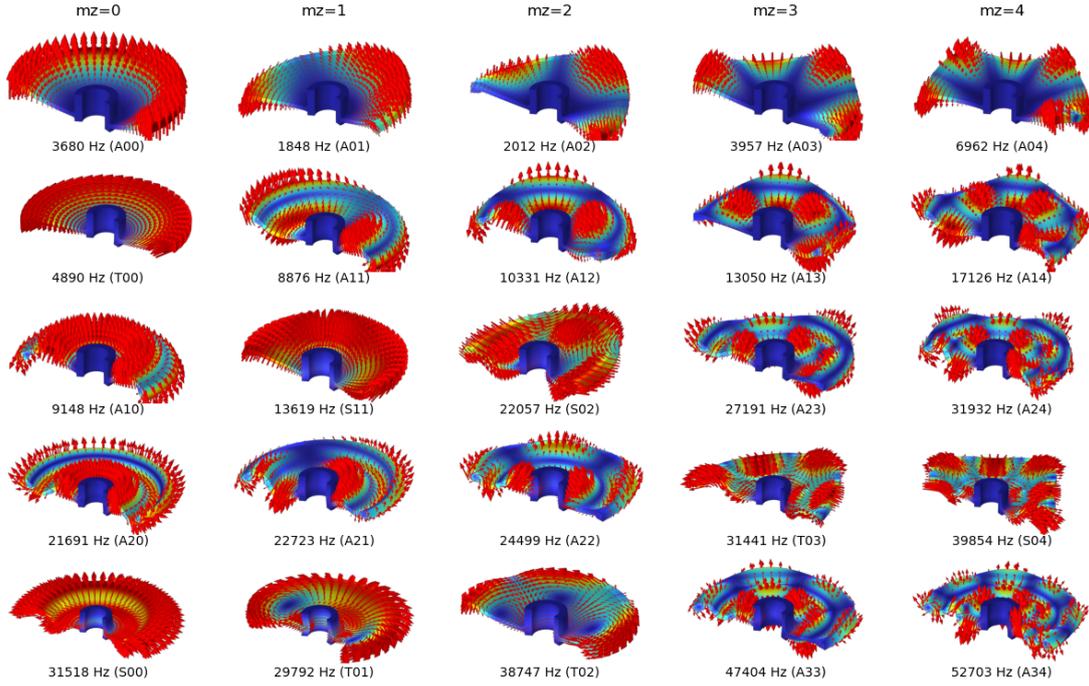


FIGURE 3.2 – Amplitude de déplacement des vingt-cinq premiers modes propres du pignon avec la fréquence correspondance. Chaque colonne correspond à un nombre de diamètres différent (de zéro à quatre). Entre parenthèses est proposée une tentative de classement de type X_{kl} où, lorsque $X = A$, le mode est principalement antisymétrique (A0, i.e., flexion), lorsque $X = S$, le mode est principalement symétrique (S0) et enfin lorsque $X = T$, le mode est principalement transverse horizontal (TH). Le nombre k correspond au nombre de cercles et m au nombre de diamètres.

3.2.1 Calcul des modes propres

La première étude réalisée via le module Mécanique du solide de Comsol permet de calculer les fréquences propres et les modes propres du pignon. Les déformées modales avec les fréquences de résonance des premiers modes propres obtenus par la simulation sont présentées sur la figure 3.2. Les modes sont classés en fonction de leur nombre de diamètres, leur nombre de cercles et enfin leur type de déplacement (symétrique, antisymétrique et transverse horizontal). C'est la composante selon z du déplacement qui sera mesurée par le vibromètre. Sur Comsol, il a été vérifié cette composante était 3.5 fois plus forte que les deux autres en moyenne, ce qui nous permet de continuer à considérer qu'approximativement, la composante du champ vibratoire mesurée peut être assimilée au mode. Par ailleurs, seuls les modes ayant un déplacement normal à la surface de la plaque \mathbf{n}_s suffisant peuvent se coupler avec l'air. Il faut noter que, du fait de la courbure du pignon, \mathbf{n}_v et \mathbf{n}_s ne sont pas égales en tout point de la surface. Pour la deuxième étape, les champs de déplacements normaux à la surface du pignon sont exportés et stockés.

3.2.2 Rayonnement en champ lointain

L'énergie acoustique rayonnée par chaque mode est calculée via le module « Pression acoustique, domaine fréquentiel » de Comsol. L'hypothèse de couplage faible qui est courante pour traiter les problèmes de rayonnement [21], paraît réaliste du fait de la grande diffé-

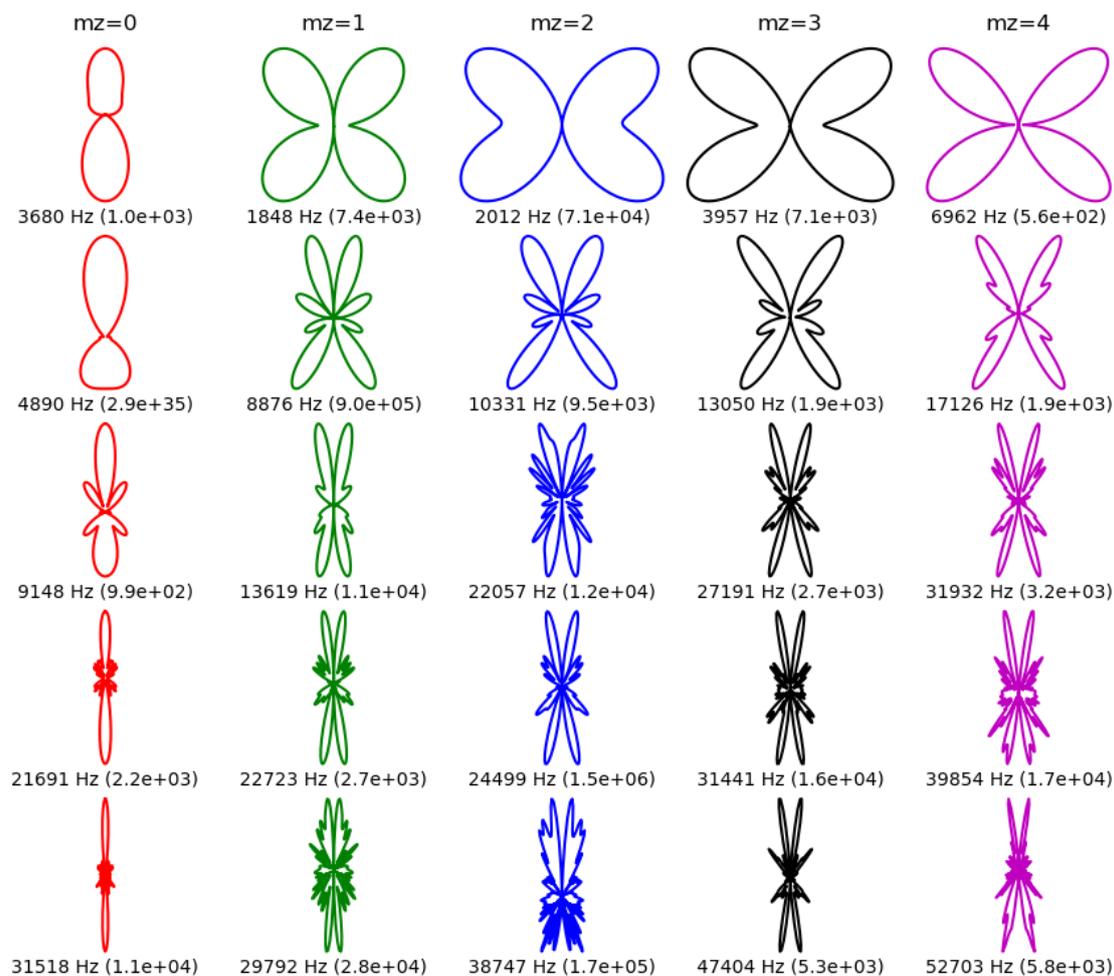


FIGURE 3.3 – Diagrammes (échelle linéaire) de rayonnement correspondant aux modes de la figure 3.2. Sous chaque diagramme est indiquée la fréquence de résonance du mode et, entre parenthèses, le coefficient de qualité déduit de l'équation (2.32).

rence d'impédance entre l'acier (~ 45 MRayls) et l'air (413 Rayls). En veillant à ce que la fréquence de l'étude corresponde bien à la fréquence de résonance du mode, il est alors possible de réaliser une étude dite de «Domaine fréquentiel», en appliquant la vitesse normale préalablement exportée à la surface de la structure. Ainsi, le rayonnement de la structure peut être calculé. Ceux-ci sont représentés sur la figure 3.3, où il apparaît que les modes n'ayant pas de diamètres nodaux ($m_z = 0$) ont une tendance majoritairement dipolaire, tandis que les autres ont un comportement plus complexe. Il faut noter que les simulations qui tirent profit des propriétés d'axisymétrie du système prennent en compte une dépendance angulaire de la forme $e^{\pm im_z \theta}$. Le rayonnement tridimensionnel est alors à imaginer en faisant tourner le diagramme de rayonnement autour de l'axe central. Ainsi, la diversité spatiale qui est un élément essentiel pour que la SVD de la matrice de transmission acousto-élastique soit à même de distinguer différents modes du solide, est principalement due au terme de phase angulaire $e^{\pm im_z \theta}$. Le dispositif de mesure développé devrait être approprié pour l'étude vibratoire du pignon, à l'exception des quelques modes TH. Les facteurs de qualités de rayonnement sont indiqués entre parenthèse et sont compris entre 10^3 et 10^{35} . Le chiffre étonnement élevé de 10^{35} peut être interprété comme le fait que le mode à 4890 Hz ne se couple pas à l'air.

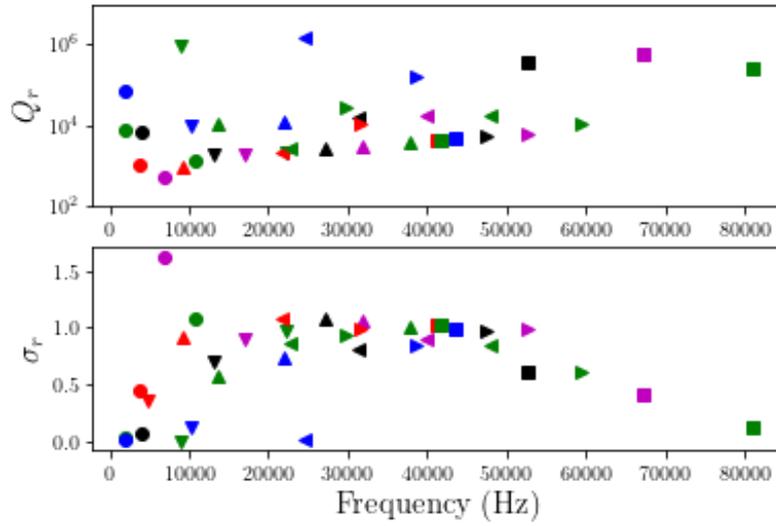


FIGURE 3.4 – Distribution des facteurs (a) de qualité et de l'efficacité de rayonnement (b) en fonction de la fréquence. Les nombres de diamètres, de 0 à 4, correspondent aux couleurs rouge, vert, bleu, noir, magenta. Ronds, triangles vers le haut, triangles vers le bas, triangles vers la gauche, triangles vers la droite et carrés correspondent aux modes de fréquences croissantes pour un même nombre de diamètres. Le facteur de qualité de 2.9×10^{35} n'est pas représenté sur la figure (a).

3.2.3 Efficacité de rayonnement

L'efficacité de rayonnement σ est définie comme le ratio entre la puissance moyenne rayonnée par l'objet étudié P_{ray} et la puissance moyenne obtenue dans le cas où les ondes engendrées par le pignon sont localement planes, c.-à-d. lorsque $p(\mathbf{x}) = \rho_0 c_0 V_n(\mathbf{x})$ où ρ_0 est la densité de l'air, c_0 est la vitesse du son dans l'air, $V_n(\mathbf{x})$ la vitesse normale du mode aux positions \mathbf{x} de la surface Γ_l . L'expression de σ est donc [21] :

$$\sigma = \frac{P_{\text{ray}}}{0.5 \rho_0 c_0 \int_{\Gamma_l} |V_n(\mathbf{x})|^2 d^2x}. \quad (3.3)$$

Cette efficacité a été initialement introduite pour quantifier la propension d'une plaque fine à convertir les déplacements à sa surface en champ rayonné. Les efficacités de rayonnement et les facteurs de qualité sont représentés sur les figures 3.4. Le facteur de qualité de rayonnement comme l'efficacité de rayonnement dépendent de la puissance rayonnée moyenne, il est donc intéressant de relier ces deux quantités :

$$Q_r(\rho_s, \ell_{eq}, \rho_0, \lambda_0) = \frac{2\pi \rho_s \ell_{eq}}{\sigma(\rho_s, \ell_{eq}, \rho_0, \lambda_0) \rho_0 \lambda_0}, \quad (3.4)$$

car $E_s = 0.5 \rho_s \int_U |V|^2 dx^3$, $\lambda_0 = 2\pi c_0 / \omega$ et la longueur équivalente ℓ_{eq} est donnée par

$$\ell_{eq} = \frac{\int_U |V(\mathbf{x})|^2 dx^3}{\int_{\Gamma_l} V_n^2(\mathbf{x}) dx^2}.$$

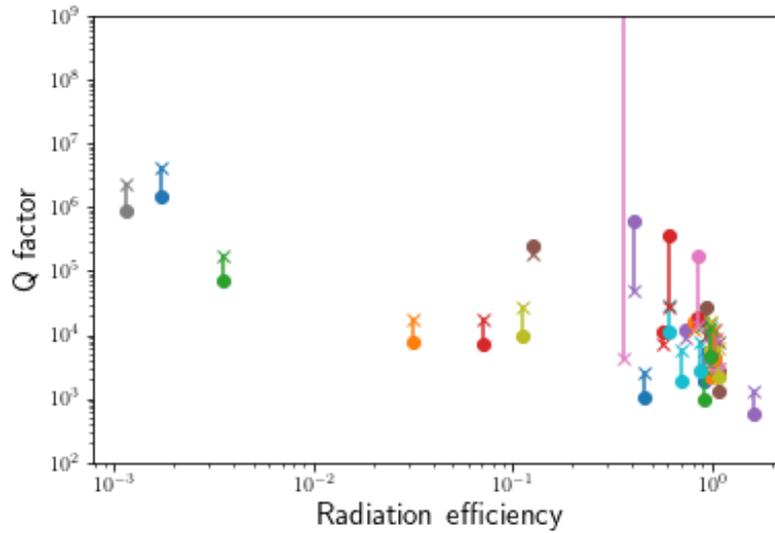


FIGURE 3.5 – Comparaison entre le facteur de qualité de rayonnement Q et l’efficacité de rayonnement σ . Les ronds correspondent aux valeurs directement déduites de la simulation par l’intermédiaires des équations (3.3) et (2.32). Les croix représentent les facteurs de qualité de rayonnement déduits de l’équation 3.4 où la distance caractéristique ℓ_{eq} est égale à l’épaisseur du pignon (5 mm).

Pour une plaque circulaire fine d’épaisseur constante et des modes principalement de flexion, cette longueur équivalente sera égale à la moitié de son épaisseur (puisque les deux faces de la plaque sont à prendre en compte). On peut alors quantifier le comportement acoustique du pignon par rapport à celui d’une plaque ayant un comportement de plaque fine d’épaisseur constante 0.5 cm en calculant le facteur de qualité soit directement depuis la simulation, soit en appliquant la formule avec $\ell_{eq} = 2.5$ mm. Les résultats sont représentés sur la figure 3.5. On observe un relativement bon accord. Ainsi dans le cas où le solide est assimilable à une plaque fine dominée par les ondes de flexions, le facteur de qualité dépend principalement de 3 facteurs :

- de l’inverse de l’efficacité de rayonnement,
- du contraste entre la densité de l’air et celle du solide ρ_s/ρ_0 ,
- et du rapport entre la longueur équivalente et la longueur d’onde dans l’air ℓ_{eq}/λ .

Enfin pour les modes ayant une faible efficacité de rayonnement, le facteur de qualité est en moyenne d’un facteur cinq inférieur à celui d’une plaque pour la même efficacité de rayonnement. Il semble que le pignon rayonne mieux qu’un disque de dimensions équivalentes. Aucune tendance ne semble cependant se dégager pour les modes ayant une bonne efficacité de rayonnement.

Ces simulations ont permis de vérifier que de nombreux modes du pignons avaient un champ de déplacement essentiellement normal à la surface. Puis, son rayonnement a été étudié et comparé à celui d’une plaque d’épaisseur constante.

3.3 Mesures acoustiques

La matrice de transmission acousto-élastique de ce pignon a été mesurée avec le dispositif présenté dans le Chapitre 2. Le maillage effectué pour scanner le pignon était un maillage polaire de 420 points, obtenu en faisant varier le rayon entre 2 et 5 cm par pas de 0,5 cm

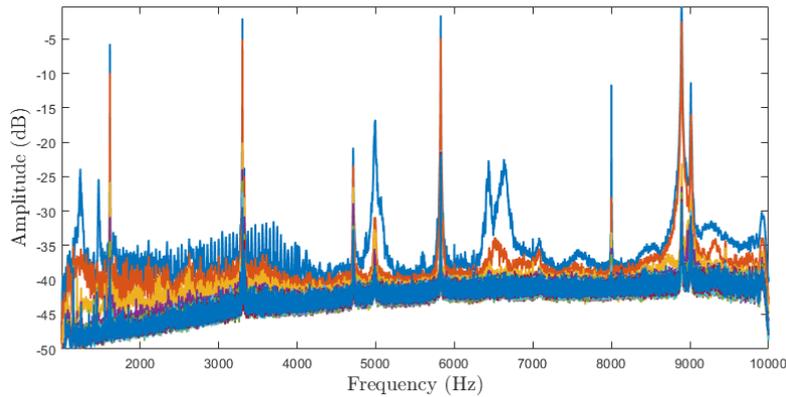


FIGURE 3.6 – Valeurs singulières de la matrice acousto-élastique obtenue à chaque fréquence avec 8 haut-parleurs et 420 points de mesure répartis sur le pignon.

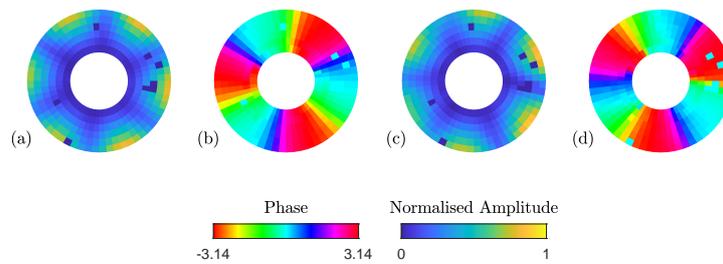


FIGURE 3.7 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 3303 Hz à partir de sept excitations acoustiques sur la plaque libre : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 5.52 dB plus faible que la première.

et en faisant varier l'angle entre 0 et 2π par pas de $2\pi/60$.

3.3.1 Décomposition en valeurs singulière

Les valeurs singulières issues de la décomposition de la matrice acousto-élastique à chaque fréquence sont représentées figure 3.6. Elles permettent d'identifier des résonances simples et doubles. Comme pour la plaque libre, nous nous sommes intéressés à une résonance double. En figure 3.7 sont représentés les deux premiers vecteurs singuliers à la résonance de 3000 Hz. On observe pour les deux vecteurs propres la présence de trois diamètres nodaux, indiquant une dépendance des modes en $\cos(3\theta)$ et en $\sin(3\theta)$. Cependant, comme pour le cas des plaques, les vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus sont une combinaison linéaire de ces deux modes et ne sont pas stationnaires. Lorsque l'on regarde le résultat obtenu avec différents haut-parleurs en figure 3.8, on voit bien de même que les motifs vibratoires dépendent de l'excitation. À l'inverse, pour les résonances simples, les motifs vibratoires restent identiques, à amplitude et phase près.

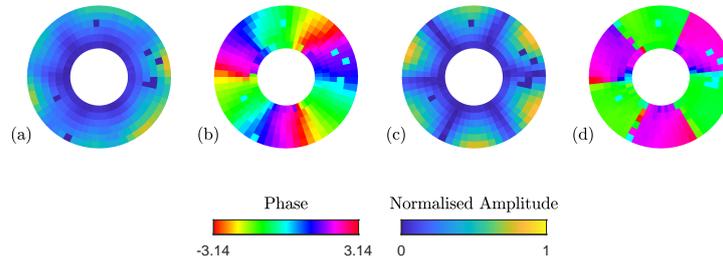


FIGURE 3.8 – (a) Amplitude et (b) phase du champ mesuré à 3303 Hz pour le HP 2, (c) amplitude et (d) phase du champ mesuré à 3303 Hz pour le HP 3 pour des excitations acoustiques du pignon.

3.3.2 Influence du réseau

Comme cela a été expliqué précédemment, le nombre de valeurs singulières n'indique exactement le nombre de modes se superposant que si chaque mode a suffisamment été excité. Cela suppose que les excitations soient spatialement suffisamment diversifiées. Dans un premier temps, nous utilisons une vingtaine de haut-parleurs. Il est rapidement apparu que la diminution de ce nombre à huit n'impactait pas significativement le résultat. Le chiffre huit a été choisi car il permettait d'effectuer des acquisitions en base de Hadamard facilement retransposables en base canonique. On peut cependant s'intéresser plus finement au nombre minimal de haut-parleurs nécessaires à l'excitation pour réduire l'encombrement d'une part, et réduire le temps d'acquisition d'autre part. Pour cela, nous calculons la différence entre les deux premières valeurs singulières à une fréquence où deux modes dégénérés se superposent. Il a été choisi de se placer à 5826 Hz, fréquence correspondant aux deux modes à quatre diamètres nodaux sur le pignon. Huit haut-parleurs avaient été utilisés. On peut donc construire pour chaque nombre de haut-parleurs compris entre 2 et 7, un nombre de combinaisons donné par :

$$nb_{comb} = \frac{8!}{(8-p)!p!} \quad (3.5)$$

A partir de ces combinaisons, les valeurs minimales, maximales, ainsi que l'écart type et la moyenne de la différence entre les deux premières valeurs singulières pour chaque type de réseau possible sont représentés sur le tableau 3.1 pour des réseaux avec un nombre donné de haut-parleurs. On observe en regardant les vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 pour une résonance dégénérée qu'au-delà d'une certaine différence entre les deux premières valeurs singulières, le deuxième vecteur singulier est associé au bruit. Cela indiquerait alors que le réseau n'a pas permis d'exciter la structure avec suffisamment de diversité. Cette différence est d'environ 13 dB. On voit que cela n'arrive que pour certaines configurations de deux haut-parleurs et une seule de celles à trois haut-parleurs. On observe aussi que, plus l'on augmente le nombre de haut-parleurs, plus la variance diminue (donc plus le résultat dépend peu de la combinaison choisie). Bien sûr, il ne faut pas oublier le biais qu'apporte le nombre de combinaisons possibles, mais à un nombre de combinaisons possibles égal (pour 2 et 6 ou 3 et 5 par exemple), on voit bien que la variance est toujours la plus faible avec les réseaux les plus grands.

Nb de HP	Nb de combinaisons possibles	min(dB)	max(dB)	std(dB)	mean(dB)
2	28	2.08	15.07	3.17	8.9
3	56	1.8	13.39	2.28	6.66
4	70	2.35	11.45	1.80	5.43
5	56	2.02	9.17	1.48	4.58
6	28	1.82	7.42	1.2	3.93
7	8	2.41	5.18	0.91	3.38

TABLE 3.1 – Statistique de la différence entre les deux premières valeurs singulières à 5826 Hz pour le pignon.

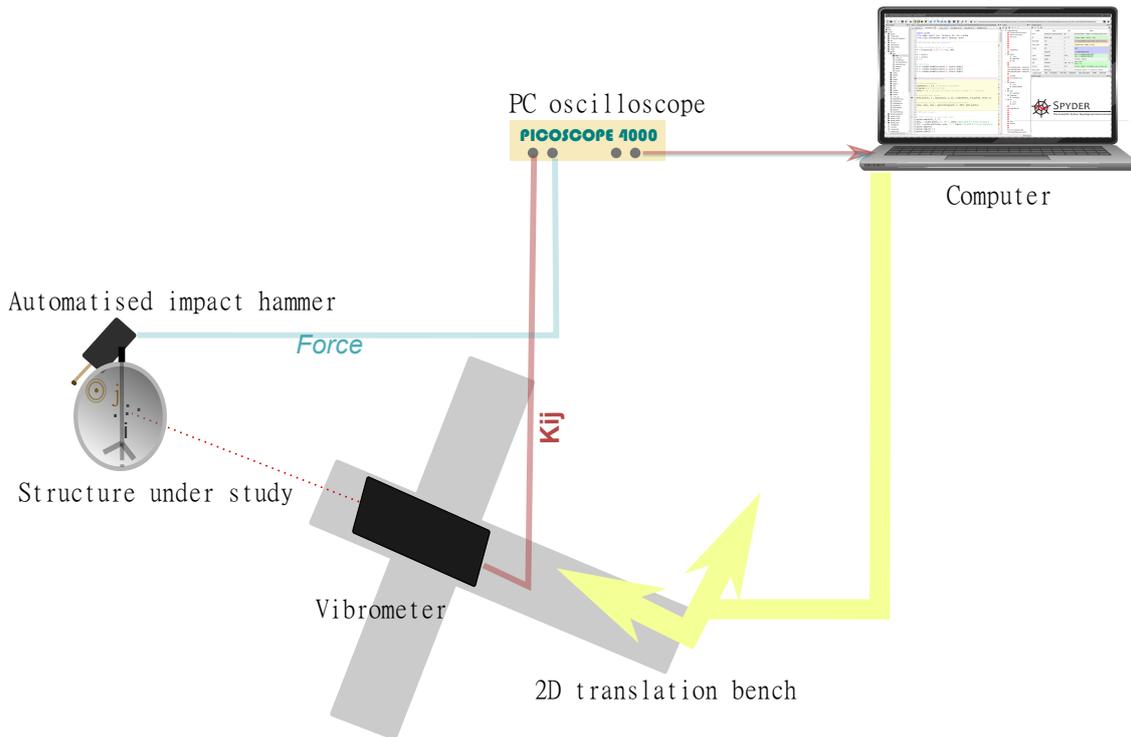


FIGURE 3.9 – Schéma représentatif du dispositif expérimental pour la mesure élasto-élastique.

3.4 Comparaison avec des mesures élastiques

Les analyses modales expérimentales sont classiquement effectuées par des sources en contact. Il peut s'agir de pastilles piezoélectriques, de pots vibrants, ou encore de marteaux d'impact. Afin de comparer nos résultats avec une méthode de référence et d'affiner les analyses acousto-élastiques, nous nous sommes donc intéressés au cas purement élastique d'une excitation ponctuelle, ici effectuée grâce à un marteau automatique (vImpact-61 de Maul-Theet). Celui-ci permet d'exciter la structure de manière plus répétable que par un opérateur. Dans cette section c'est donc une matrice de transmission élasto-élastique qui a été mesurée.

3.4.1 Dispositif expérimental

Un schéma du dispositif utilisé est représenté sur la figure 3.9. Le marteau est placé à

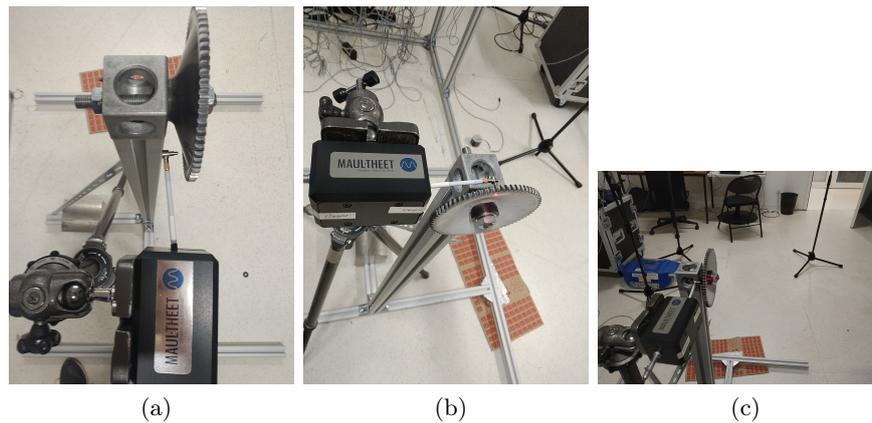


FIGURE 3.10 – Photographie (a) du premier impact, (b) du deuxième impact et (c) du troisième impact du marteau sur un même pignon.

environ 2 mm du pignon et réglé pour taper régulièrement sur la structure, tout en laissant le temps au banc de translation de déplacer le vibromètre en chaque point de mesure. Un capteur de force présent sur le marteau est connecté à un oscilloscope Pico 4000. Cela permet d'une part de déclencher la mesure par le vibromètre, lui aussi relié à l'oscilloscope numérique, à l'instant où le marteau rentre en contact avec la pièce. D'autre part, les signaux peuvent être normalisés par la force mesurée, diminuant l'influence de la non répétabilité malgré tout existante du marteau. Trois points d'excitations différents ont été considérés, comme montré dans les photos en figure 3.10. Il faut noter que, dans le cas du marteau, l'impact permet une excitation rapide d'une grande gamme de fréquences. La durée de mesure est ainsi diminuée par rapport à l'excitation acoustique où l'excitation dure 1 s. La mesure d'une entrée est plus rapide, cependant il est beaucoup plus laborieux d'en effectuer plusieurs. Là où le réseau de haut-parleurs ne bouge pas, il faut déplacer le marteau pour changer de point d'excitation, ce qui prend du temps et qui est plus facilement source d'erreurs et incertitudes : par exemple, la pièce peut bouger pendant que l'on repositionne le marteau.

Le premier point était situé approximativement à un rayon de 35 mm du centre du pignon et à un angle de $55\pi/30$, le deuxième à un rayon de 45 mm et à un angle $13\pi/30$ et le troisième à un rayon de 30 mm et à angle de $3\pi/30$. Noter que ces angles étant ceux de la mesure au vibromètre, le cosinus de ces angles sur les figures est de signe -.

3.4.2 Décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières de la matrice élasto-élastique, effectuée à chaque fréquence, fournit les courbes représenté en figure 3.11. Le marteau présente l'avantage d'exciter une large bande fréquentielle de 1 kHz à 60 kHz environ. Cependant les valeurs singulières ne sont représentées que de 1 kHz à 20 kHz car ce sont les principales fréquences d'intérêt et qu'au-delà notre résolution spatiale n'est peut être plus suffisante.

On s'intéresse dans un premier temps à une résonance associée à deux valeurs singulières proches, à 5826 Hz par exemple. Les vecteurs singuliers sont représentés sur la figure 3.12. Il est aisé de voir que la déformée favorisée par la SVD est bien celle où le point d'excitation où le mode est le plus fort (point d'excitation n°2) a le plus d'amplitude.

A l'inverse, sur la figure 3.6, on observe également que, à certaines résonances, la deuxième

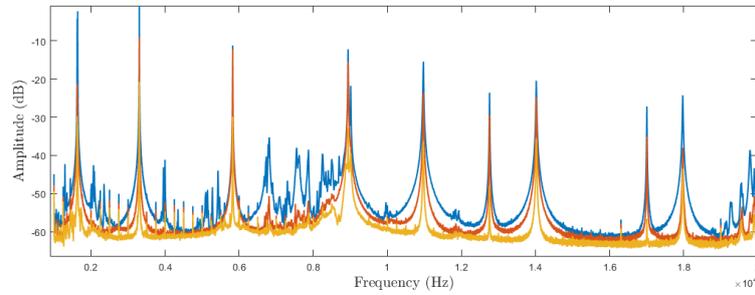


FIGURE 3.11 – Valeurs singulières en fonction de la fréquence pour les trois excitations au marteau et 420 points de mesures sur le pignon.

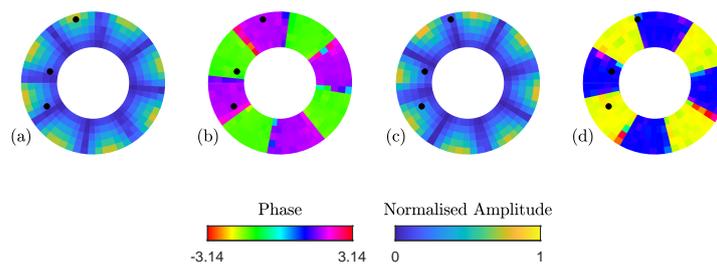


FIGURE 3.12 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 5826 Hz à partir de trois excitations au marteau sur le pignon : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de moins d'1 dB plus faible que la première.

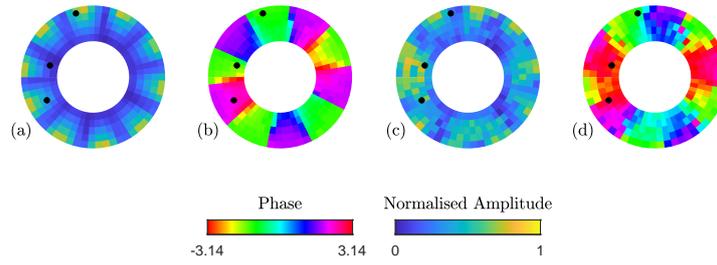


FIGURE 3.13 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 9011 Hz à partir de trois excitations au marteau sur le pignon : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . L'écart entre les deux valeurs singulières est de 14.16 dB.

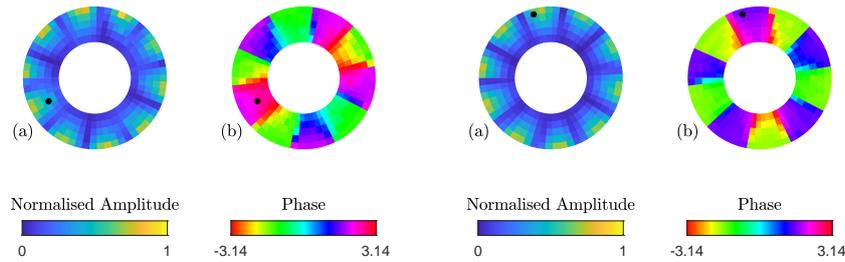


FIGURE 3.14 – Représentation des champs mesurés à 9011 Hz sur le pignon excité par un marteau : (a) amplitude et (b) phase du champ généré par l'impact au point 1, (c) amplitude et (d) phase du champ généré par l'impact 2.

singulière est bien plus faible que la première et le deuxième vecteur singulier \mathbf{u}_2 paraît bruité, comme cela est montré en figure 3.13. Cela semble pouvoir s'expliquer par le fait que les points 1 et 2 excitent principalement le même type de déformée, tandis que le point 3 est positionné à un endroit où l'amplitude est faible par rapport aux deux autres. Cela peut se vérifier sur la figure 3.14. C'est aussi le cas à 3303 Hz, où la SVD nous donne le résultat montré en figure 3.15.

Dans le cas des structures à symétrie continue de rotation, cet effet est facilement prédictible en fonction de l'écart angulaire entre les points de mesure et de la géométrie des modes. En effet, ici les points 1 et 2 sont séparés angulairement de presque $\pi/3$. Le nombre de diamètres étant également de $k = 3$, on imagine bien que des excitations séparées $\frac{2\pi}{2k} = \frac{\pi}{k}$ créeront la même excitation, déphasée de π si c'est un multiple impair de $\frac{\pi}{k}$. Cet effet est dû au critère de Shannon spatial et au fait qu'en cas de parfaite dégénérescence le champ produit par une excitation élastique ponctuelle génère nécessairement un mode ayant un ventre angulaire en ce point. Une optimisation possible des points d'impact doit prendre en compte à la fois le fait que les points ne soient pas espacés de $n\frac{\pi}{k}$, tout en étant suffisamment éloignés pour les modes ayant une grande longueur d'onde angulaire.

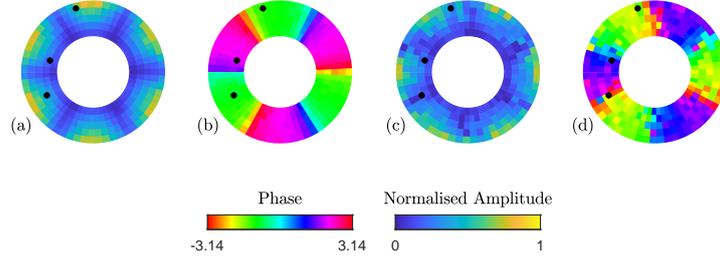


FIGURE 3.15 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 3303 Hz à partir de trois excitations au marteau sur le pignon : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 9 dB plus faible que la première.

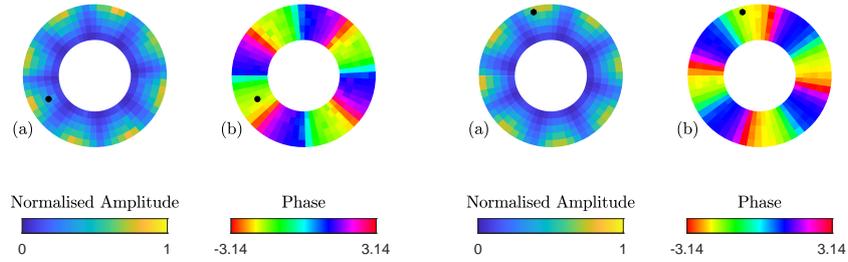


FIGURE 3.16 – Représentation des champs mesurés à 5826 Hz sur le pignon excité par un marteau : (a) amplitude et (b) phase du champ généré par l'impact au point 1, (c) amplitude et (d) phase du champ généré par l'impact 2.

3.4.3 Champ non stationnaire et levée de dégénérescence

Un phénomène intéressant se produit lorsque l'on regarde les champs produits par un impact ponctuel, à la fréquence d'une résonance double comme, par exemple, sur la figure 3.16. Nous constatons que le champ généré par ces deux excitations n'est pas parfaitement stationnaire. Cela est contre-intuitif au premier abord puisque le marteau impacte la structure de manière ponctuelle en temps et en espace. De ce fait, puisque les modes sont réels, on s'attend également à obtenir un champ réel. Cet effet peut se comprendre en considérant une fréquence de résonance pour laquelle il existe un mode double. Le déplacement à cette fréquence peut donc s'écrire

$$w(\mathbf{r}, \omega) = \alpha_1(\omega)\phi_1(\mathbf{r}) + \alpha_2(\omega)\phi_2(\mathbf{r}). \quad (3.6)$$

Dans le cas des excitations ponctuelles, les coefficients $\alpha_1(\omega)$ et $\alpha_2(\omega)$ peuvent s'écrire de la façon suivante :

$$\alpha_m(\omega) = \frac{\phi_{\mathbf{m}}(\mathbf{r}_o) \cdot \mathbf{n}_e}{(-\omega^2 + j2\gamma_m\omega + \omega_m^2)}, \quad (3.7)$$

où \mathbf{r}_o est la position du point d'impact. La phase θ_m^α de $\alpha_m(\omega)$ s'écrit comme :

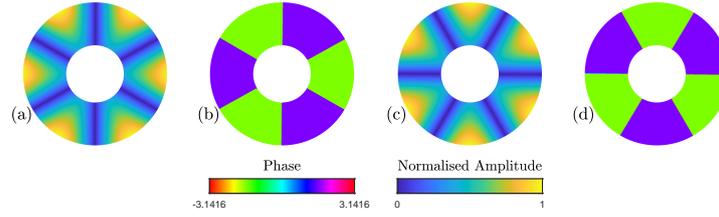


FIGURE 3.17 – Champs simulés de deux modes à trois diamètres : (a) amplitude et (b) phase de ϕ_1 , (c) amplitude et (d) phase de ϕ_2 .

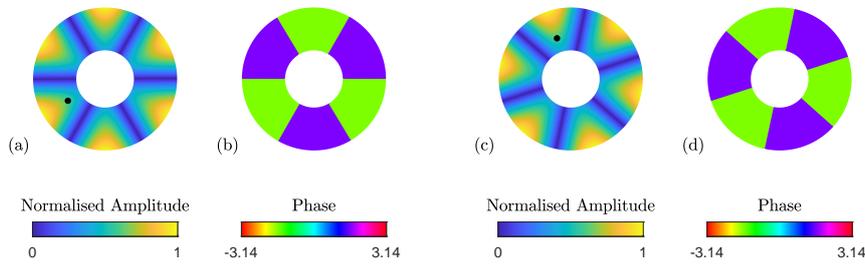


FIGURE 3.18 – Simulations de champs obtenus à la même fréquence pour deux points différents en cas de modes parfaitement dégénérés. (a) Amplitude et (b) phase pour une excitation au point simulé 1 à 3303 Hz, (c) amplitude et (d) phase pour une excitation au point simulé 2 à 3303 Hz.

$$\theta_m^\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\gamma_m\omega}{\omega^2 - \omega_m^2}\right)$$

Ainsi, il apparaît clairement que, si les deux modes sont dégénérés et donc que l'on a $\gamma_1 = \gamma_2$, $\omega_1 = \omega_2$ les deux modes seront en phase car $\theta_1^\alpha = \theta_2^\alpha$. Le champ $w(\mathbf{r}, \omega)$ est alors stationnaire car les modes propres ϕ_1 et ϕ_2 le sont par définition. Ainsi, l'observation de champs non stationnaires lors d'une excitation ponctuelle résulte donc nécessairement d'une différence de fréquence de résonance, d'amortissement, ou des deux, entre les deux modes.

Cela peut être vérifié grâce à une modélisation numérique. On modélise les deux modes en prenant une dépendance radiale simple linéaire (puisque c'est surtout la dépendance angulaire qui nous intéresse) entre le centre et le bord. Ainsi $\phi_1(r, \theta) = r\cos(n\theta)$ et $\phi_2(r, \theta) = r\sin(n\theta)$. Le champ total est ensuite calculé à partir des équations (3.6) et (3.7). On choisit $n = 3$, ce qui donne les déformées représentées sur la figure 3.17.

Dans un premier cas, on leur donne la même fréquence de résonance $f_1 = f_2 = 3303$ Hz et le même coefficient d'amortissement $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$. Dans ce cas, quelque soit le point d'excitation, le champ obtenu est stationnaire. Le motif sera toujours un cosinus, maximal à l'angle d'excitation. Deux exemples sont représentés sur la figure 3.18.

Dans un second cas, le cas de deux modes avec des fréquences de résonance légèrement différentes est considéré. En figure 3.19 sont montrés les résultats pour deux points d'excitations pour $f_1 = 3303.1$ Hz et $f_2 = 3303$ Hz avec $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$ s⁻¹. Les spectres associés à

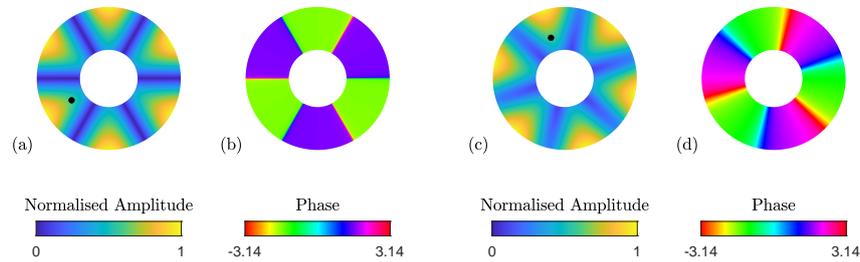


FIGURE 3.19 – Simulations de champs obtenus à la même fréquence pour deux points différents en cas de modes légèrement décalés en fréquence. (a) Amplitude et (b) phase pour une excitation au point simulé 1 à 3303 Hz, (c) amplitude et (d) phase pour une excitation au point simulé 2 à 3303 Hz.

chaque mode sur ces deux points d’excitations sont représentés en bleu et en rouge sur la figure 3.20. Le spectre du champ total en jaune montre bien que ce décalage n’est cependant pas visible spectralement.

On peut définir un degré de «non stationnarité», défini par le rapport des coefficients de Fourier à la fréquence spatiale positive (soit, ici, 3) et la fréquence spatiale négative (soit, ici, -3) de valeur absolue comprise entre 0.5 et 2. S’il est égal à 1, les ondes se propageant vers les θ positifs et celles se propageant vers les θ négatifs ont le même poids : il s’agit d’un mode stationnaire. C’est presque le cas pour l’excitation simulée au point 1 à 3303 Hz où il est égal à 0.972. À l’inverse, s’il se rapproche de 0.5 ou de 2 c’est que l’une de ces ondes est privilégiée. C’est le cas pour l’excitation au point simulé 2 où il est égal à 0.5625. À part si l’excitation est précisément sur un nœud d’un des modes, cela met donc en évidence le fait que les motifs vibratoires sont sensibles à de très faibles écarts de fréquences de résonance ou d’amortissement, qui ne sont pas perçues directement sur le spectre.

L’excitation élastique permet alors d’avoir une information supplémentaire non présente dans le cas acoustique : un champ non stationnaire est nécessairement associé à des modes légèrement décalés en fréquence. Si les méthodes hautes résolutions peuvent sembler être un traitement de choix pour identifier ces modes, le test simple de l’une d’entre elles dans la partie suivante a permis de remarquer que leur sensibilité est très élevée. À cette constatation réalisée sur des signaux synthétiques en l’absence de bruit, il faut ajouter que, malgré l’utilisation d’une base de Hadamard, le rapport signal à bruit pour des excitations acoustiques reste faible par rapport aux excitations en contact, et ajoute une difficulté supplémentaire à l’utilisation de ces méthodes.

3.4.4 Méthode ESPRIT

L’idée pour traiter les signaux de plusieurs composantes est alors de créer à partir des échantillons du signal $x[n]$ deux matrices \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x[p] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & \dots & x[2] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & \dots & x[N-p] \end{bmatrix}, \quad (3.8)$$

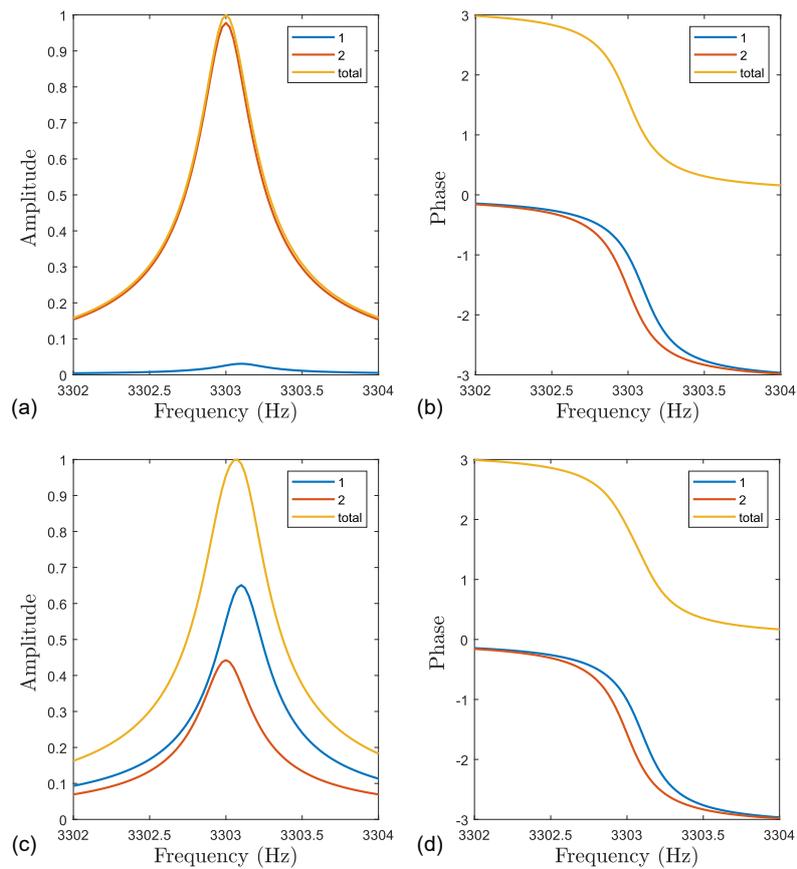


FIGURE 3.20 – (a) Amplitude et (b) phase du spectre des deux modes (bleu et rouge) et du champ total (jaune) lors d’une excitation simulée au point 1. (c) Amplitude et (d) phase du spectre des deux modes (bleu et rouge) et du champs total (jaune) lors d’une excitation simulée au point 2.

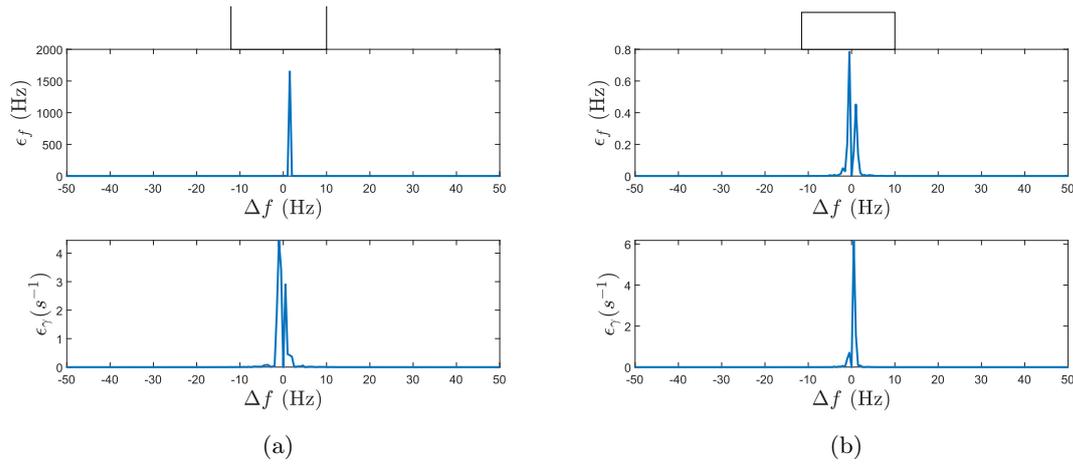


FIGURE 3.21 – Erreur d’estimation des fréquences de résonance pour un signal à deux composantes en fonction de la différence Δf entre les deux fréquences pour (a) $p = 5$ et (b) $p = 4$.

et

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} x[p+1] & \dots & x[2] \\ x[p+2] & \dots & x[3] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & \dots & x[N-p+1] \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

où p doit être supérieur ou égal au nombre de composantes fréquentielles contenues dans le signal. Il a été montré que la recherche des pôles est équivalente à la détermination des valeurs propres de la matrice carrée de dimension p par p $\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{X}_1$ où \mathbf{X}_0^{-1} désigne ici le pseudo inverse de \mathbf{X}_0 . Cette matrice est donc de dimension p .

La méthode a été testée à partir d’un signal synthétique résultant de la superposition de deux modes de fréquences f_1 et f_2 et de facteurs d’amortissement γ_1 et γ_2 :

$$x[p] = e^{-\gamma_1 p dt} \cos(2\pi f_1 p dt) + |A| e^{-\gamma_2 p dt} \cos(2\pi f_2 p dt + \arg(A)). \quad (3.10)$$

où dt est la période d’échantillonnage et A une amplitude complexe. A partir de la méthode ESPRIT, nous avons estimé :

- l’écart moyen ϵ_f entre les fréquences estimées et celles réelles,
- l’écart moyen ϵ_γ entre les coefficients d’amortissement estimés et ceux réels.

La méthode a d’abord été appliquée pour un paramètre p égal au nombre de composantes, soit $p=4$ dans notre cas (en effet un cosinus est la somme de 2 exponentielles). Il a été constaté que, même dans le cas idéal de signaux non bruités avec un rang de $\mathbf{X}_0^{-1}\mathbf{X}_1$ bien estimé, les erreurs ϵ_f comme ϵ_γ n’étaient pas négligeables sur un intervalle de 7 Hz. Incrémenter d’une unité le paramètre p permet d’améliorer légèrement ces résultats, comme cela peut être vu sur les deux figures 3.21 (a) et (b). Cependant au delà de $p=5$, des pôles ne correspondant pas au signal apparaissent.

3.4.5 Comparaison du nombre des excitations acoustiques et élastiques

Il est intéressant de comparer le nombre de modes excités par le champ acoustique et le marteau d’impact. Pour cela, on compare en figure 3.22 la première valeur singulière en

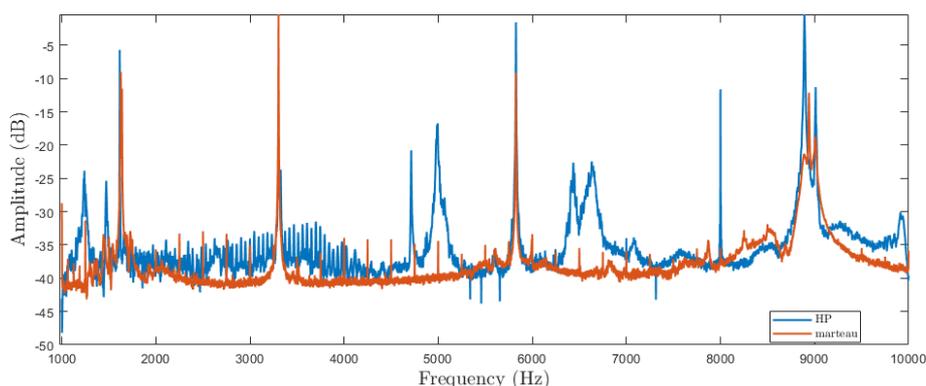


FIGURE 3.22 – Premières valeurs singulières en fonction de la fréquence obtenues avec huit HP (bleu) et trois impacts au marteau (rouge).

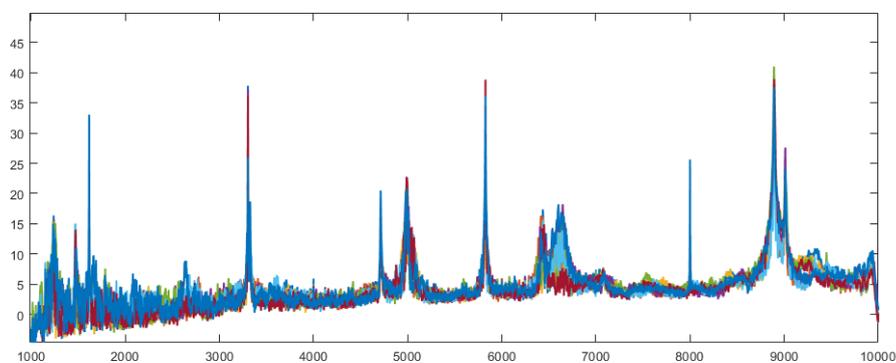


FIGURE 3.23 – Spectre moyenné sur les points de mesure du pignon excité successivement par huit haut-parleurs.

fonction de la fréquence pour les deux types d'excitation. C'est l'excitation acoustique qui permet d'exciter le plus de modes, ce qui paraît cohérent du fait de sa diversité spatiale.

Il est possible que la raison soit simplement le nombre plus élevé de haut-parleurs utilisés. Cependant même en ne prenant que trois haut-parleurs, le même effet est constaté. De plus, on peut vérifier en figure 3.23 que chaque émission acoustique a bien excité tous les modes.

On peut argumenter que, dans les expériences au marteau d'impact, les impacts auraient pu être disposés de façon plus astucieuse. En effet, le point trois était trop proche du centre et participe moins que les deux autres à la matrice mesurée.

Enfin, le mode à 0 diamètre à 4997 Hz, connu comme difficile à exciter par contact est observé quelque soit le nombre de haut-parleurs utilisés. On le représente en figure 3.24. Par contre, comme cela est prévisible, le mode de torsion prédit par Comsol sur la figure 3.2 n'est mesuré ni élastiquement, ni acoustiquement.

3.5 Conclusion

Après avoir effectué des simulations pour comprendre le comportement vibratoire et le rayonnement d'un pignon, la méthode de caractérisation modale sans contact est appliquée

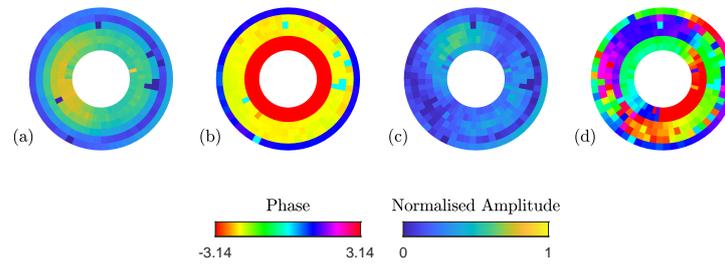


FIGURE 3.24 – Deux premiers vecteurs singuliers \mathbf{u}_n du pignon excité par un marteau en 3 points. (a) Amplitude et (b) phase de U1 à 5826 Hz . (c) Amplitude et (d) phase U2 à 5826 Hz

expérimentalement. Les résultats des simulations et les résultats expérimentaux semblent cohérents. L'excitation acoustique est comparée à l'excitation élastique par marteau d'impact, et les avantages et inconvénients des deux méthodes ont été discutés. Les résultats élastiques peuvent être plus finement interprétés grâce à la connaissance des points de mesures et à leur lien plus direct avec les modes. En revanche, certains modes ne sont pas excités. L'excitation par les haut-parleurs permet bien d'exciter tous les modes attendus. Enfin, la méthode acousto-élastique présente l'avantage de limiter les artefacts dus au contact, d'offrir une meilleure reproductibilité et d'être simple à mettre en œuvre.

Chapitre 4

Structures à symétrie de rotation discrète

Sommaire

4.1	Introduction	65
4.2	Symétrie de rotation discrète et théorème de Bloch	66
4.2.1	Formalisme	67
4.2.2	Opérateur de translation	67
4.2.3	Décomposition de Cholesky de la matrice de masse	68
4.2.4	Modes propres dans les milieux périodiques	68
4.2.5	Spectre angulaire des modes propres	69
4.2.6	Modes de Bloch et modes stationnaires	69
4.3	Dispositif expérimental transporté chez SHE	70
4.4	Pignon évidé	70
4.4.1	Résultats expérimentaux	71
4.4.2	Modélisation	73
4.4.3	Décomposition en utilisant l'invariance	73
4.5	Rouets périodiques	74
4.5.1	Structure modale	74
4.5.2	Simulations	75
4.5.3	Validation expérimentale avec un rouet simple	76
4.5.4	Validation de l'approche acoustique	82
4.5.5	Application à un rouet complexe	84
4.6	Rouet désaccordé	88
4.7	Conclusion	91

4.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer la méthode d'analyse vibratoire fondée sur l'acquisition et le traitement de la matrice de transmission acousto-élastique à deux pièces mécaniques d'un turbomoteur dont les géométries sont plus complexes que dans le chapitre précédent : les compresseurs centrifuges monoblocs et les pignons évidés. Le rôle des compresseurs centrifuges dans les turbomoteurs est de compresser et d'injecter l'air dans la chambre de combustion. Quant aux pignons évidés, ils s'inscrivent dans la tendance à réduire au maximum la masse d'un turbomoteur.

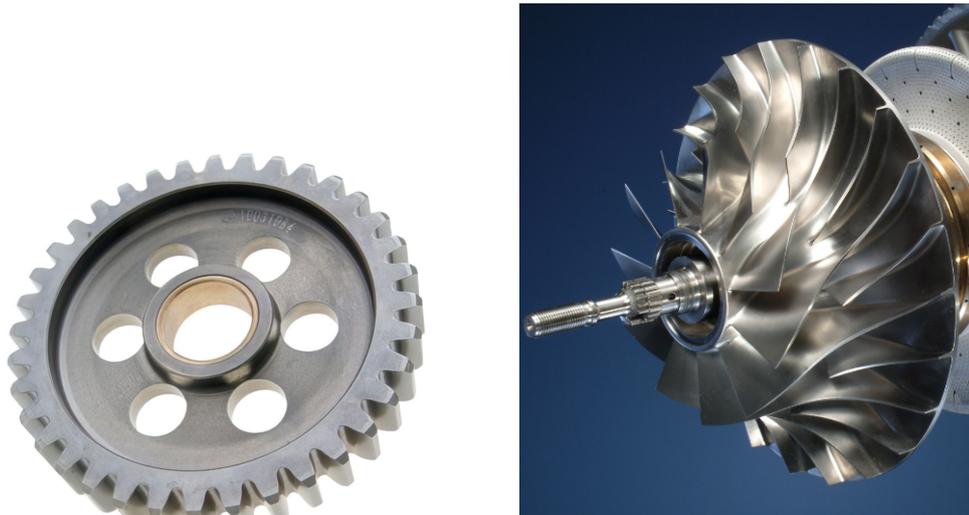


FIGURE 4.1 – Photographies d’un pignon évidé (à gauche) et d’un rouet monobloc centrifuge (à droite).

Comme on peut le voir sur la figure 4.1, le rouet et le pignon évidé ont comme point commun de présenter une symétrie discrète de rotation. Cette symétrie peut être vue comme une périodicité angulaire, qui nous permettra d’interpréter les résultats en regard du théorème de Bloch, qui décrit la propagation des ondes dans les systèmes périodiques. Cela implique que le comportement des modes sera plus complexe que dans le cas de la pièce à symétrie continue. Notamment, il peut devenir possible que plus de deux modes se superposent à une même fréquence.

L’analyse par théorie de Bloch est particulièrement adaptée pour l’analyse modale des compresseurs centrifuges, et, plus généralement, des structures aubagées monoblocs. La méthode acousto-élastique permet de l’effectuer plus efficacement que par les méthodes conventionnelles fondées sur une excitation par marteau d’impact. Celles-ci peuvent avoir des difficultés à identifier ou même exciter certains modes en particulier dans le cas d’un recouvrement modal important. De plus, du fait de la forme complexe de ces structures, l’excitation par impacts peut être délicate à mettre en œuvre.

Ce chapitre est composé de cinq parties. Dans la première partie, nous développons le théorème de Bloch dans le cas des pièces mécaniques à symétrie discrète de rotation. Dans la seconde partie, nous présentons le dispositif expérimental que nous avons pu installer chez SHE, de taille réduite mais plus mobile. Dans la troisième partie nous appliquons la méthode d’analyse vibratoire à un pignon à trois évidements. Nous observons une levée de dégénérescence de certains modes dégénérés, qui s’interprète bien en adoptant une approche perturbative de l’effet de ces trous. Dans la quatrième partie, nous effectuons l’analyse vibratoire de deux compresseurs monoblocs, de respectivement 17 et 11 pales. Ce nombre de pales correspond à l’ordre de leur symétrie. Pour terminer, nous présenterons les résultats obtenus avec un rouet désaccordé qui a la particularité de ne présenter qu’un axe de symétrie.

4.2 Symétrie de rotation discrète et théorème de Bloch

Nous considérons un solide quelconque à symétrie discrète de rotation (figure 4.2(a)). L’ordre de la symétrie correspond au nombre de secteurs angulaires. Par exemple sur la

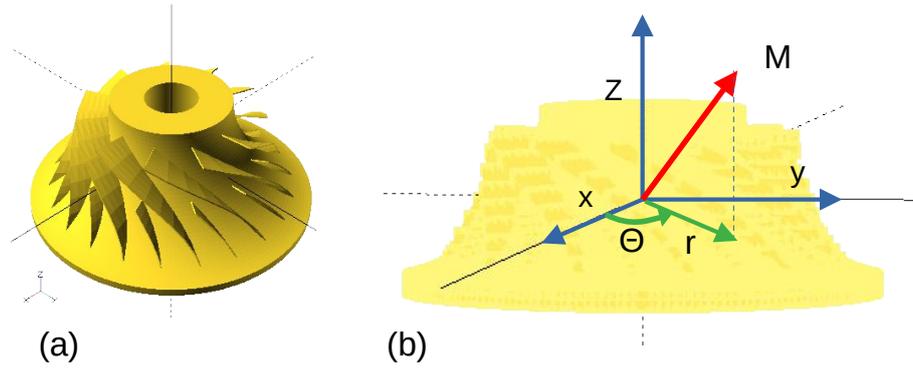


FIGURE 4.2 – (a) Exemple d'une pièce mécanique (rouet) à symétrie de rotation discrète d'ordre 11 (b) Définition des repères cartésien et cylindrique.

figure 4.2 (a), l'ordre de la symétrie est 11. Chaque point du volume est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou cylindriques (r, z, θ) qui sont définies dans la figure 4.2 (b). Ainsi, la symétrie de rotation discrète peut aussi être vue comme une périodicité angulaire où le théorème de Bloch s'applique. En effet, dans le cas précis de l'élastodynamique, nous allons montrer que les modes propres élastiques sont également modes propres de l'opérateur de translation angulaire. L'application du théorème de Bloch permettra de prédire le contenu spatialement fréquentiel de chaque mode.

4.2.1 Formalisme

Pour démontrer le théorème de Bloch, par souci de simplicité nous allons utiliser la notation sous forme de produits. Ainsi, l'équation de propagation harmonique issue de (2.9) du chapitre 2 :

$$\operatorname{div}(\mathbf{C} : \epsilon(\mathbf{w}(\mathbf{r}))) + \rho\omega^2\mathbf{w}(\mathbf{r}) = 0$$

est réécrite sous la forme

$$\mathbf{M}\omega^2\mathbf{w} = \mathbf{R}\mathbf{w}, \quad (4.1)$$

où le produit entre \mathbf{R} et \mathbf{w} , s'écrit

$$(\mathbf{R}\mathbf{w})_i(r, \theta, z) = \sum_{k=1}^3 \int R_{ik}(r, \theta, z; r', \theta', z') w_k(r', \theta', z') dr' d\theta' dz'. \quad (4.2)$$

La même expression est obtenue entre \mathbf{M} et \mathbf{w} . Il peut être noté que cette expression sous forme de produit peut s'assimiler à l'écriture matricielle courante dans les problèmes de vibration, en considérant une discrétisation infiniment fine.

4.2.2 Opérateur de translation

Soit un champ de déplacement \mathbf{w} qui dépend des coordonnées cylindriques (r, z, θ) . L'opérateur de translation $\mathbf{T}_{\Delta\theta}$ est défini tel que

$$\mathbf{T}_{\Delta\theta}\mathbf{w}(r, \theta, z) = \mathbf{w}(r, \theta - \Delta\theta, z).$$

Il est possible de montrer que les valeurs propres λ_k de $\mathbf{T}_{\Delta\theta}$ sont de la forme

$$\lambda_k = e^{ik\Delta\theta}, \quad (4.3)$$

et les vecteurs propres associés \mathbf{y}_k sont tels que

$$\mathbf{y}_k(r, \theta, z) = e^{ik\theta} \mathbf{f}_k(r, \theta, z) \quad (4.4)$$

où $\mathbf{f}_k(\theta)$ est une fonction périodique de période $\Delta\theta$. Notons que \mathbf{y}_k ayant nécessairement une périodicité en 2π , k , qui correspond au nombre de diamètres, est forcément un nombre entier.

4.2.3 Décomposition de Cholesky de la matrice de masse

De manière à simplifier l'expression de l'équation (4.1), nous effectuons la décomposition de Cholesky de la matrice de masse, c.-à-d.

$$\mathbf{M} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}^{-1,T},$$

où \mathbf{Q} est une matrice triangulaire inférieure. Cette décomposition est possible car \mathbf{M} est une matrice réelle symétrique définie positive. L'équation (4.1) peut alors s'écrire

$$\omega^2 \mathbf{y} = \mathbf{H} \mathbf{y} \quad (4.5)$$

où $\mathbf{w} = \mathbf{Q}^T \mathbf{y}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{Q}^T$. Ainsi, trouver les modes propres de l'équation de l'élastodynamique revient à chercher les vecteurs propres de l'équation (4.5).

4.2.4 Modes propres dans les milieux périodiques

Un opérateur \mathbf{X} est invariant sous la transformation $\mathbf{T}_{\Delta\theta}$ à la condition que $\mathbf{X} \mathbf{T}_{\Delta\theta} = \mathbf{T}_{\Delta\theta} \mathbf{X}$. On dit encore que les opérateurs \mathbf{X} et $\mathbf{T}_{\Delta\theta}$ commutent. On peut montrer que si les matrices de masse et de raideur sont invariantes par translation, alors \mathbf{H} est aussi invariant. Il est bien connu, par exemple en mécanique quantique, que si deux opérateurs \mathbf{H} et $\mathbf{T}_{\Delta\theta}$ commutent alors il est toujours possible de trouver une base complète de vecteurs propres commune aux deux opérateurs. Dans notre cas, cette base de vecteurs propres est alors décrite par deux nombres : le nombre de diamètres nodaux k et un nombre entier positif l qui correspond à la multiplicité des fonctions propres pour un même nombre de diamètres. Ainsi les fonctions propres $\varphi_{k,l}$ sont solutions propres de

$$\mathbf{H} \varphi_{k,l} = \omega_{k,l}^2 \varphi_{k,l}, \quad (4.6)$$

et

$$\mathbf{T}_{\Delta\theta} \varphi_{k,l} = e^{ik\Delta\theta} \varphi_{k,l}. \quad (4.7)$$

En conséquence de l'équation précédente et comme expliqué dans la section 4.2.2, les fonctions propres $\varphi_{k,l}$ sont donc forcément de la forme :

$$\varphi_{k,l}(r, \theta, z) = e^{ik\theta} \mathbf{f}_{k,l}(r, \theta, z) \quad (4.8)$$

où $\mathbf{f}_{k,l}(r, \theta, z)$ est une fonction périodique de période $\Delta\theta$, et où l'indice l distingue différentes fonctions périodiques possibles pour un même k .

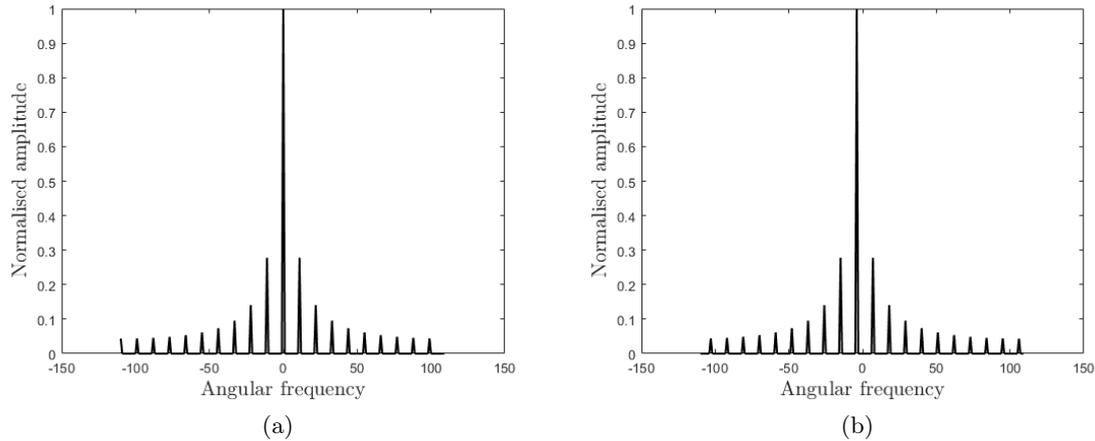


FIGURE 4.3 – Spectre angulaire d’une fonction triangle rectangle avec une période correspondant à un ordre 11 multipliée par une exponentielle de nombre d’onde $k = 0$ (a) et $k = 3$ (b).

4.2.5 Spectre angulaire des modes propres

Comme $f_{k,l}(\theta)$ est une fonction périodique, elle peut se décomposer en série de Fourier, c.-à-d. que l’équation (4.8) s’écrit aussi sous la forme

$$\varphi_{k,l}(r, \theta, z) = e^{ik\theta} \sum_n \mathbf{c}_{k,l,n}(r, z) e^{-inN\theta}, \quad (4.9)$$

où $N = \frac{2\pi}{\Delta\theta}$ est l’ordre de la symétrie. La transformée de Fourier en θ de l’expression précédente mène à

$$TF_{\theta}[\varphi(r, \theta, z)](k') = \sum_n \mathbf{c}_{k,l,n}(r, z) \delta[k' \pm k \pm Nn] \quad (4.10)$$

où $\delta[l]$ est le symbole de Kronecker. Ainsi, la transformée de Fourier d’un mode propre de nombre de diamètres k présente un spectre avec une composante fondamentale k ainsi que toutes les «pseudos-harmoniques»¹ de composantes $k \pm nN$. Cet effet est clairement visible sur la figure 4.3 où les transformées de Fourier de l’équation (4.8) pour une fonction f arbitraire et un système d’ordre 11 sont tracées pour $k = 0$ et $k = 3$.

Par analogie avec la théorie des bandes dans les milieux périodiques, on se limitera souvent pour les transformées de Fourier angulaires à la première zone de Brillouin, c.-à-d. à l’intervalle $[[0, N - 1]]$, sous-entendant que les pseudos-harmoniques sont potentiellement présentes.

4.2.6 Modes de Bloch et modes stationnaires

Dans un système résonnant, sans perte, il est toujours possible de trouver une base de modes propres stationnaires (voir chapitre 2). L’existence de ces modes propres stationnaires en accord avec le théorème de Bloch peut être interprété comme étant la conséquence du

1. Le terme «pseudo-harmoniques» est employé ici car ces composantes ne sont pas à proprement parler des harmoniques, multiples de k sauf dans le cas où $k = 0$ ou $k = N$.

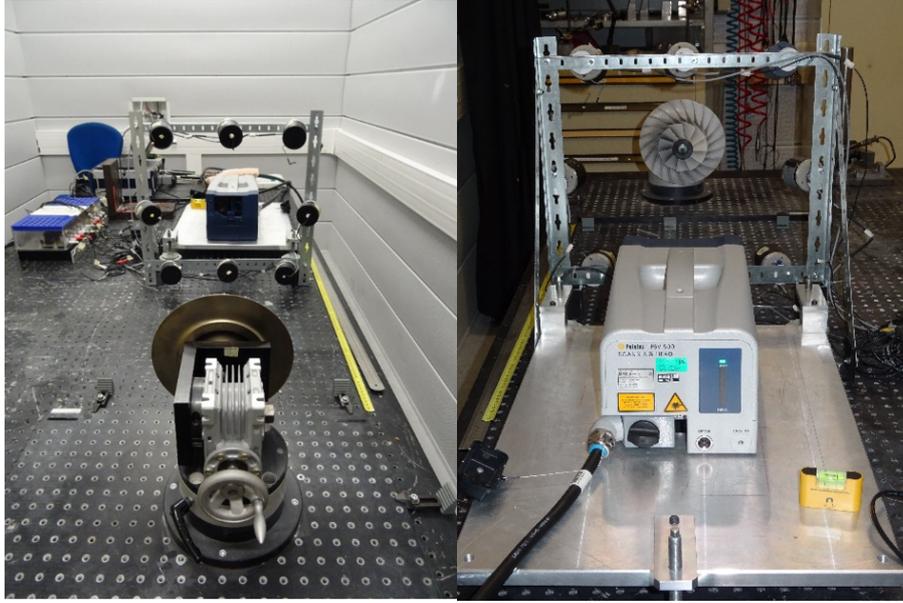


FIGURE 4.4 – Photo avant et arrière du dispositif expérimental développé sur le site d’assemblage de Safran à Borde.

fait que les modes $\varphi_{k,l}(r, z, \theta)$ et $\varphi_{k,l}^*(r, z, \theta)$ (c.-à-d. $f_{-k,l}(r, z, \theta)$) sont dégénérés. En effet si $\mathbf{H}\varphi_{k,l}(r, z, \theta) = \omega_{k,l}^2\varphi_{k,l}(r, z, \theta)$, alors $\mathbf{H}\varphi_{k,l}^*(r, z, \theta) = \omega_{k,l}^2\varphi_{k,l}^*(r, z, \theta)$. Par somme et différence de $\varphi_{k,l}(r, z, \theta)$ et $\varphi_{k,l}^*(r, z, \theta)$, il est toujours possible de construire deux modes stationnaires à moins que $\varphi_{k,l}(r, z, \theta)$ soit déjà une fonction stationnaire, par exemple dans le cas où $k = 0$.

4.3 Dispositif expérimental transporté chez SHE

Le dispositif expérimental a été adapté afin d’être transporté et installé sur le site de Safran Helicopter Engine à Bordes. Cela a facilité l’accès à un plus grand nombre de pièces industrielles. Le vibromètre PSV 500 de Polytec disponible chez SHE est un vibromètre à balayage qui permet de passer très rapidement d’un point de mesure à un autre, ce qui a permis d’accélérer nos mesures. Comme on peut le voir sur la figure 4.4, le réseau de huit haut-parleurs est placé autour de ce vibromètre de façon à insonifier le rouet de manière optimale. L’acquisition est pilotée depuis l’extérieur de la pièce à l’aide de scripts en langage Python.

4.4 Pignon évidé

La première pièce à symétrie de rotation discrète est un pignon évidé (figure 4.5). Son diamètre extérieur est d’environ 11 cm. La géométrie de la section du pignon est relativement complexe, avec une symétrie de rotation d’ordre trois. Comme dans le cas du pignon plein, l’effet des dents est ignoré.



FIGURE 4.5 – Photographie du pignon évidé.

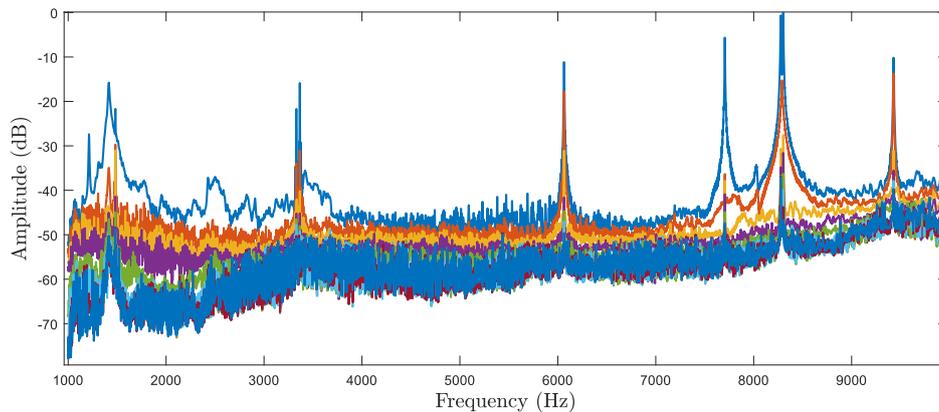


FIGURE 4.6 – Valeurs singulières en fonction de la fréquence obtenues avec le pignon évidé de la figure 4.5.

4.4.1 Résultats expérimentaux

Le dispositif expérimental développé chez SHE présenté en section 4.3 est utilisé, avec un maillage irrégulier comportant 906 points.

Les huit valeurs singulières de la matrice acousto-élastique sont représentées en fonction de la fréquence sur la figure 4.6. En comparant ces résultats à ceux obtenus avec un pignon plein (voir la figure 3.6 du chapitre 3), il apparaît que les deux résonances observées à 3300 Hz et 3365 Hz sont simples. En effet, d'une part, les secondes valeurs singulières de ces résonances sont beaucoup plus petites que les premières valeurs singulières (-12 dB et -16 dB, respectivement) et d'autre part, comme on peut le voir sur la figure 4.7 les vecteurs singuliers \mathbf{u}_2 sont clairement associés à du bruit. Ces deux résonances résultent d'un phénomène de levée de dégénérescence lié à la présence des évidements. En effet, la figure 4.7 montre que les vecteurs singuliers \mathbf{u}_2 associés à ces deux résonances correspondent bien à deux modes similaires avec le même nombre de diamètres (3) alors que ces mêmes modes sont dégénérés dans le cas d'un pignon plein (voir les figures 3.6 et 3.7).

On observe par exemple sur la figure 4.8 que cette levée de dégénérescence n'a pas lieu lorsque le nombre de diamètres n'est pas un multiple de l'ordre de la symétrie. Ce comportement est assez caractéristique dans les systèmes périodiques perturbés et, comme nous allons le voir, s'interprète dans le cadre de la théorie des modes de Bloch.

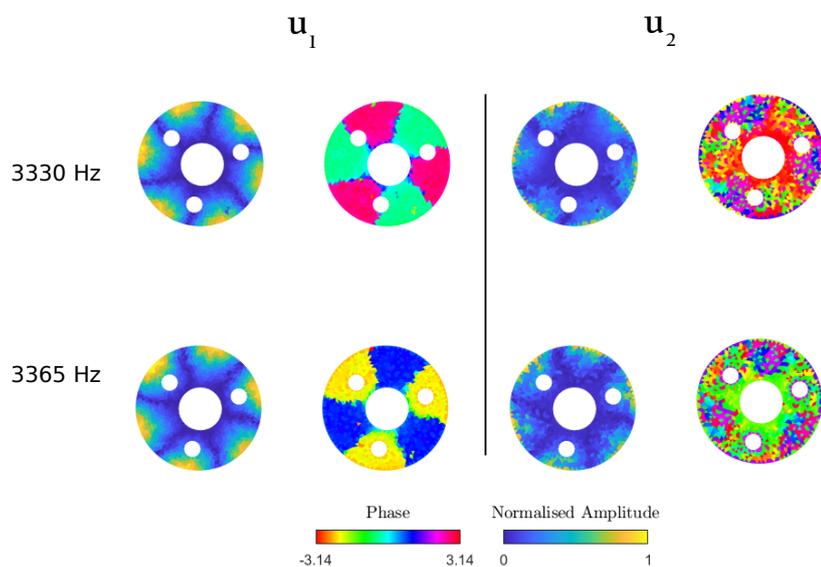


FIGURE 4.7 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des résonances à trois diamètres dont la dégénérescence a été levée sur le pignon évidé. La différence entre les deux premières valeurs singulières est de -12 dB à 3330 Hz et de à 16 dB 3365 Hz.

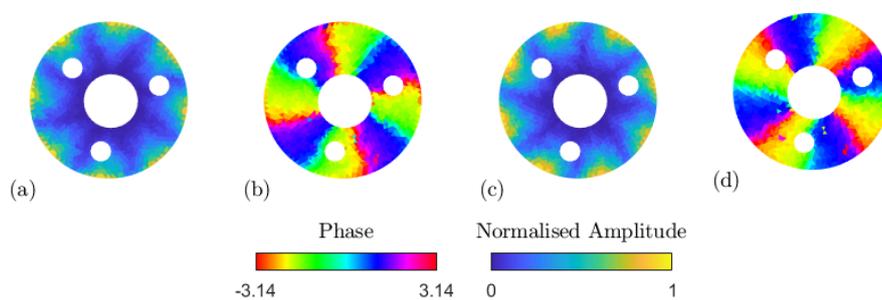


FIGURE 4.8 – Vecteurs singuliers obtenus avec 8 excitations acoustiques sur le pignon évidé : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 à 6063 Hz, (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 à 6063 Hz. La différence entre les deux premières valeurs singulières est de -6dB.

4.4.2 Modélisation

Les trous agissent comme une perturbation de la matrice \mathbf{H} . Ainsi, nous appliquons une théorie perturbative pour comprendre l'effet des trous sur les fréquences de résonances. On peut montrer qu'au premier ordre, les modes ne sont pas influencés par la présence des trous, seules les fréquences de résonance le sont. Comme démontré dans la section 4.2, la dépendance angulaire des solutions propres pour une pièce pleine (non perturbé) est donnée par $e^{ik\theta}$ avec k un entier. Dans la base des modes non perturbés, les éléments de la matrice \mathbf{H} sont donnés par

$$h_{k_o, k_i} = \int e^{-ik_o\theta_o} \mathbf{H} e^{ik_i\theta_i} d\theta_o d\theta_i. \quad (4.11)$$

Par souci de simplicité, la dépendance en r et z est omise. Le changement de base conserve l'hermitivité, *i.e.*,

$$h_{k_o, k_i} = h_{k_i, k_o}^*.$$

De plus comme \mathbf{H} est réelle, les éléments diagonaux en k et $-k$ sont égaux :

$$h_{k, k} = h_{-k, -k}.$$

4.4.3 Décomposition en utilisant l'invariance

En supposant que les fréquences de résonances du système non perturbé sont bien distinctes, il peut être montré que calculer l'effet de la perturbation pour les deux modes de nombre de diamètres $-k_r$ et k_r (k_r est un entier positif) revient à diagonaliser la sous-matrice de dimensions 2×2 :

$$\begin{pmatrix} h_{k_{-r}, k_{-r}} & h_{k_{-r}, k_r} \\ h_{k_r, k_{-r}} & h_{k_r, k_r} \end{pmatrix},$$

dont les éléments diagonaux sont égaux, positifs et proches de la pulsation au carré du mode de nombre de diamètres k_r du pignon plein. D'après l'annexe A.1, les éléments non diagonaux sont donnés quant à eux par

$$h_{-k_r, k_r} = \sum_{\gamma, \nu, \nu'} \delta[2k_r - (\nu - \nu')N] \omega_{k, \gamma}^2 \mathbf{a}_{k_o + \nu N, \nu}^H \mathbf{a}_{k_i - \nu' N, \nu'}.$$

On retrouve ici un résultat bien connu dans la propagation des ondes dans les milieux périodiques. Un effet de levée de dégénérescence (matrice non diagonale) a lieu lorsque le nombre de diamètres est un multiple de la moitié de l'ordre de la périodicité. Comme $N = 3$ pour le pignon, il faut donc que $k_r = 3$ (soit 3 diamètres). De plus, en fixant comme origine des angles du repère cylindrique un plan de symétrie (par exemple le plan perpendiculaire au plan du pignon et qui passe par le centre d'un évidement), par symétrie on observe la propriété suivante $\mathbf{H}(\theta_o, \theta_i) = \mathbf{H}(-\theta_o, -\theta_i)$ qui implique que $h_{k_r, k_{-r}}$ et h_{k_{-r}, k_r} sont réels et égaux. Il est alors possible de démontrer que les vecteurs propres de la matrice 2×2 sont les vecteurs somme et différence de $e^{ik\theta_r}$ et $e^{-ik\theta_r}$ soit des solutions stationnaires en

$\cos(k\theta_r)$ et $\sin(k\theta_r)$ ². Qualitativement, cette levée de dégénérescence peut s'interpréter de la manière suivante : le mode en $\sin(k_r\theta)$ interagit peu avec les trous puisqu'ils sont situés sur des nœuds du mode. Sa fréquence propre reste proche de celle du pignon plein. A l'inverse, le mode de $\cos(k_r\theta)$ est plus fortement impacté puisque les trous, agissant au niveau des ventres comme une diminution de la masse, feront sensiblement augmenter la fréquence de résonance par rapport au cas non perturbé.

L'autre effet apporté par la périodicité est l'apparition d'harmoniques comme rapporté par Kim *et al.* [60]. Les harmoniques sont liées à la force des perturbations.

4.5 Rouets périodiques

Nous allons étudier ici deux compresseurs monoblocs. L'un est constitué de 11 pales et le second de 17 pales.

Le comportement vibratoire des compresseurs aubagés monoblocs est complexe. Nous distinguerons dans ce manuscrit deux types de modes dans ces types de structures. Les modes que l'on appellera «modes de voile», où c'est principalement le disque qui vibre. L'influence des pales est alors négligeable et le comportement vibratoire se rapproche donc des structures à symétrie de rotation continue étudiées dans le chapitre précédent. Dans cette section, nous nous intéressons donc principalement aux «modes de pales», où ce sont principalement les pales qui vibrent, et où le comportement vibratoire sera modélisé par rapport au théorème de Bloch.

Cette distinction de mode de pales et de modes de voiles n'est qu'indicative : dans les faits, les modes n'ont réelle signification que pour la structure dans son entièreté, et il n'est pas rare de constater une vibration simultanée des pales et du voile.

4.5.1 Structure modale

Le comportement vibratoire des compresseurs centrifuges aubagés est complexe. En effet, les résonances résultent non seulement des résonances du voile qui sont semblables à celles d'un pignon mais également du couplage entre les vibrations des pales.

4.5.1.1 Modes collectifs de pales

Pour cela, nous considérons un phénomène de couplage faible entre les pales qui a principalement lieu par l'intermédiaire du voile. Ainsi cela revient à étudier le couplage entre N résonateurs identiques. La déformée modale de chaque pale est proportionnelle au mode de pale individuel d'une pale liée de la même manière à un support infiniment rigide. De ce fait, un mode de Bloch $\varphi_{k,l}(r, \theta, z)$, est donné par :

$$\varphi_{k,l}(r, q\Delta\theta + \delta\theta, z) \approx \mathbf{p}_l(r, \delta\theta, z)e^{ikq\Delta\theta}, \quad (4.12)$$

où $\theta = q\Delta\theta + \delta\theta$ et \mathbf{p}_l est la déformée modale correspondant au l -ième mode de pales. Une démonstration est proposée en annexe A.2. En fonction de la parité du nombre de pales, les N modes fondamentaux se scindent en :

2. Notons que ces solutions sont bien compatibles avec la forme générale des modes de Bloch, si \mathbf{f} est réelle.

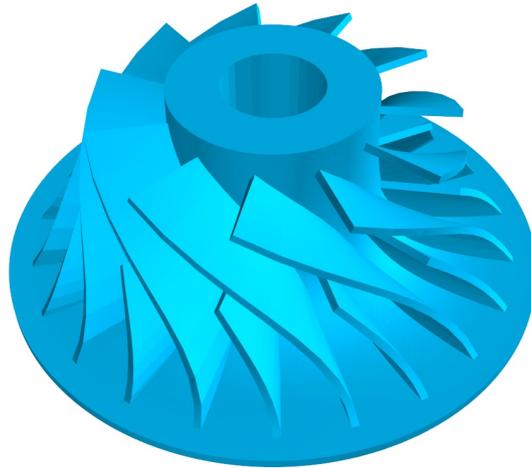


FIGURE 4.9 – Représentation du modèle de compresseur utilisé pour les simulations

- $(N - 1)/2$ modes doubles (dégénéré d'ordre 2) de 1 à $\frac{(N-1)}{2}$ diamètres et un mode à 0 diamètre si le nombre de pales N est impair, comme dans les deux structures étudiées ici.
- $(N/2 - 1)$ modes doubles de 1 à $N/2$ diamètres, un mode simple à 0 diamètre et un mode simple à N diamètres si le nombre de pales N est pair.

4.5.1.2 Couplage avec le voile

On peut interpréter le fait que pales et voile puissent vibrer simultanément comme un effet de couplage entre un mode de voile et un mode de pales. Il ne s'agit bien sûr que d'une interprétation possible. Pour que le couplage ait lieu, il est nécessaire non seulement que les fréquences des deux modes non couplés soient voisines mais il faut également que ces deux modes de Bloch présentent le même nombre de diamètres. Les modes couplés sont alors des modes mixtes qui présentent simultanément des vibrations du voile et des pales. Une formulation plus complète est proposée en annexe A.3.

4.5.2 Simulations

De la même manière que dans la section 3.2, le comportement acousto-élastique du rouet à 11 pales est estimé à partir de simulations Comsol. Le modèle utilisé est représenté sur la figure 4.9. Ses dimensions sont de l'ordre de grandeur de la dizaine de centimètres.

Les facteurs de qualités des différents modes du compresseur simulé ainsi que certaines des déformées modales associées sont représentés sur la figure 4.10. Il y apparaît que :

- les modes de pales sont dans l'ensemble très rapprochés fréquentiellement. Sont entourés les trois groupes de modes où les pales principales vibrent, puisque ce sont celles que nous scannons.
- le facteur de qualité peut varier sensiblement pour un même mode de pales selon le nombre de diamètres considérés.
- de manière générale, le facteur de qualité a tendance à augmenter avec la fréquence, suggérant que les modes vont de moins en moins se coupler avec l'air, et, par réciprocity, être de moins en moins susceptibles à être excités par le réseau acoustique. La longueur

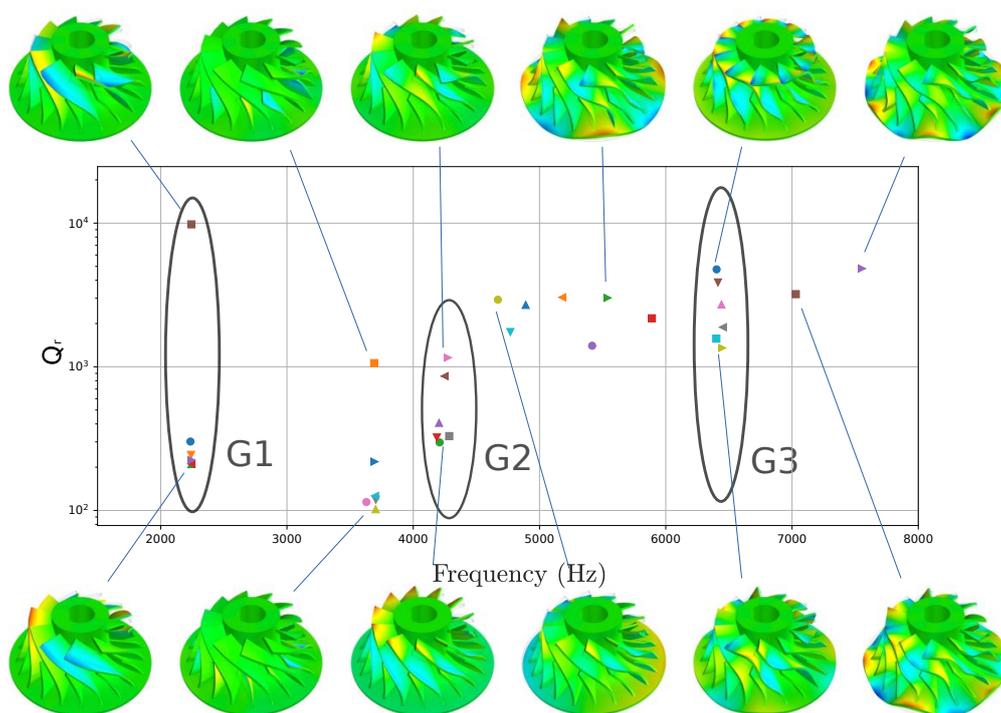


FIGURE 4.10 – Représentation des modes de pales en fonction de la fréquence et images du types de déformée associée

d'onde élastique sur les pales a été estimée qualitativement, et les facteurs de qualité de rayonnement sont comparés au produit entre la longueur d'onde dans l'air et la longueur d'onde élastique sur la figure 4.11. Il est intéressant de remarquer que ces deux quantités semblent suivre la même tendance.

Les diagrammes de rayonnement sont représentés sur la figure 4.12. Il y apparaît, d'une part que le rayonnement vers l'avant, où est situé notre réseau, semble suffisant pour la plupart des modes. Par ailleurs, la diversité spatiale du rayonnement dans cette direction laisse présager que notre dispositif sera approprié.

4.5.3 Validation expérimentale avec un rouet simple

Le premier cas étudié est celui d'un rouet en acier à 17 pales dont une photo en visible sur la figure 4.13. Le diamètre de la base du voile est de 160 mm, le diamètre de la face avant des pales est de 88 mm et enfin sa hauteur est 65 mm. Il s'agit d'un rouet de conditionnement d'air de l'Airbus A320. Il a été étudié avec le dispositif de l'institut Langevin avec un maillage de 12 rayons et 66 angles.

4.5.3.1 Décomposition en valeurs singulières et modes

La décomposition en valeurs singulières obtenue à partir de huit excitations par des haut-parleurs est représentée sur la figure 4.14. Sur cette pièce, nous pouvons distinguer les fréquences de résonances des modes de voile et de pales. Les résonances de voile (flèches bleues) sont distantes les unes des autres. A l'inverse, de modes de pales se groupent par paquets (deux dans cette bande de fréquence, indiqués par les intervalles verts) et sont très proches fréquentiellement. Cette assertion est confortée par l'observation des

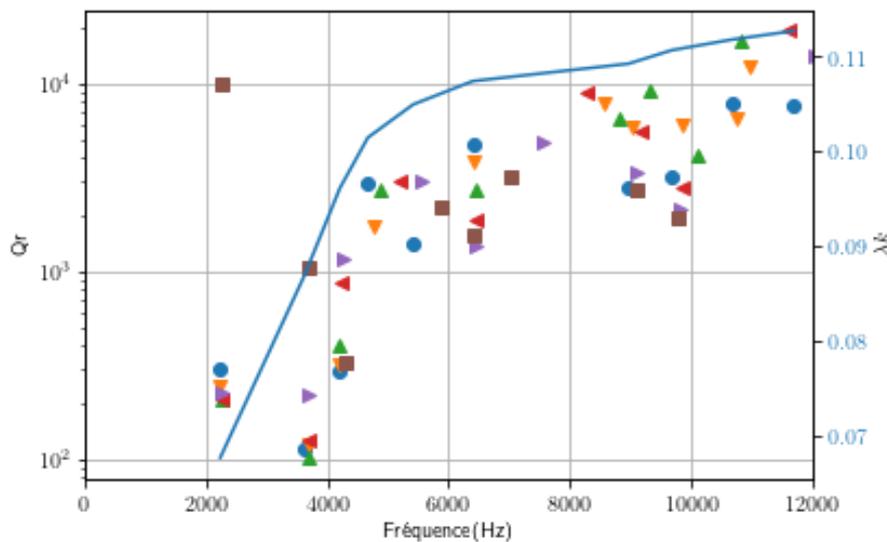


FIGURE 4.11 – Représentation des facteurs de qualités de rayonnement des modes (symboles) et du rapport entre la longueur d’onde dans l’air et celle des modes de pales (courbe bleue).

déformées modales sur les figures 4.15 et 4.16 qui sont associées à des modes de voile et de pales, respectivement. Pour mieux représenter les déformées, il est possible de reconstruire des déformées stationnaires à partir des vecteurs singuliers en projetant un cosinus et un sinus du nombre de diamètres souhaité sur les deux premiers vecteurs singuliers puis en sommant la multiplication des résultats avec chacun des deux vecteurs. C’est équivalent aux réémissions synthétiques décrites dans le chapitre suivant. On note l’absence de couplage entre modes de voile et de pales hormis pour les modes à 2 diamètres (figures 4.15(a) et (b) et de pales (figures 4.16(a) et (b)). En effet, ce mode de voile est le plus proche fréquentiellement du premier groupe de modes de pales et donc le plus à même à se coupler avec ces derniers.

Grâce à la SVD, on observe clairement que les modes voiles ont un comportement similaire à celui du pignon avec des résonances simples lorsque le nombre d’onde angulaire est un multiple de 17, 0 compris.

4.5.3.2 Spectres angulaires et dispersion

Comme expliqué au début de ce chapitre, la transformée angulaire d’un mode de Bloch est périodique de période N avec une unique composante non nulle pour des nombres angulaires compris entre 0 et $N - 1$. Les moyennes des valeurs absolues des transformées de Fourier angulaires de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenues sur chaque rayon du rouet à 4892Hz sont représentées sur la figure 4.17. On retrouve bien qu’à 4892 Hz (voir figure 4.16(d) et (e)), les vecteurs singuliers résultent de la superposition des deux modes de Bloch à deux diamètres avec des composantes significatives pour des nombres angulaires égaux à $\pm 20, \pm 9, \pm 2, \pm 13$, etc.

En calculant la transformée de Fourier entre 4722 Hz et 5000 Hz, on aboutit alors aux relations/figures de dispersions de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 (voir 4.18).

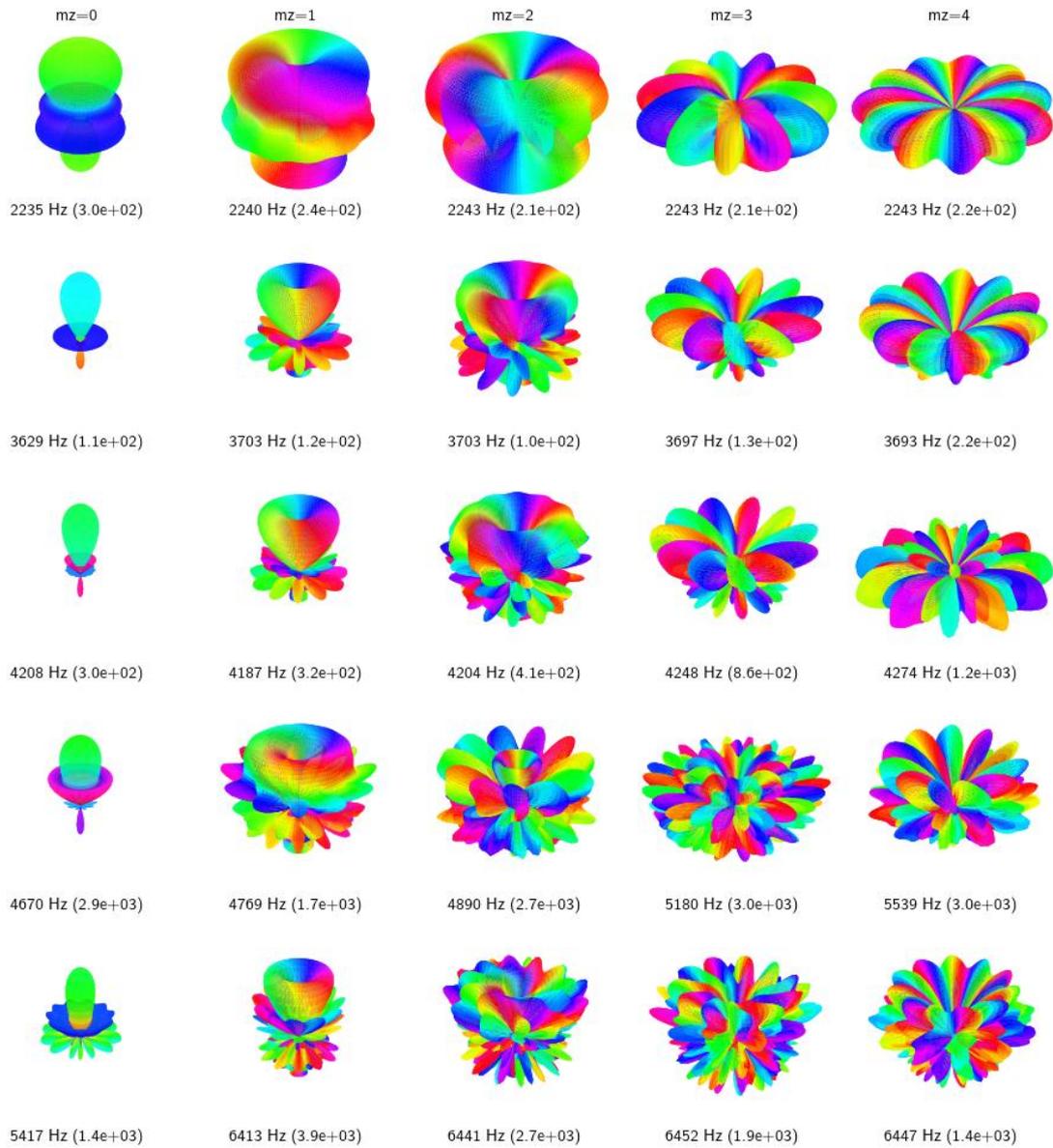


FIGURE 4.12 – Diagrammes de rayonnement des modes du rouet.

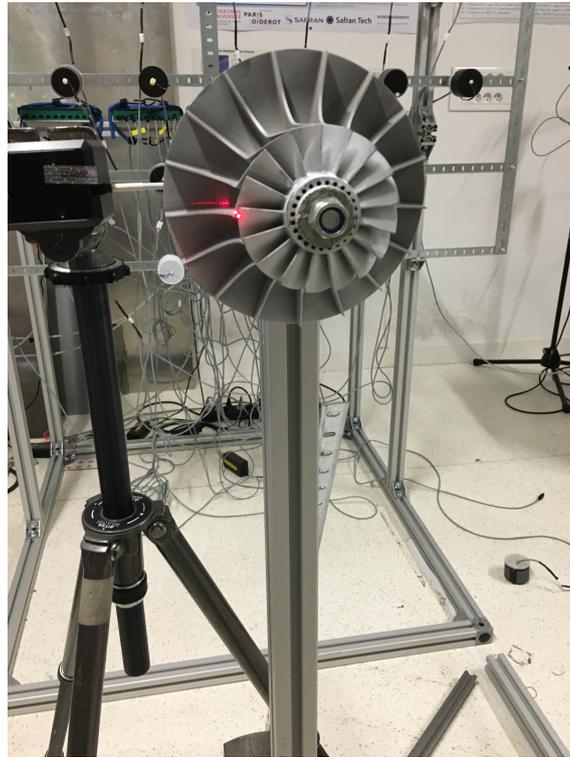


FIGURE 4.13 – Photographie du rouet de 17 pales monté sur le dispositif de mesure. On notera à gauche le marteau d'impact automatique.

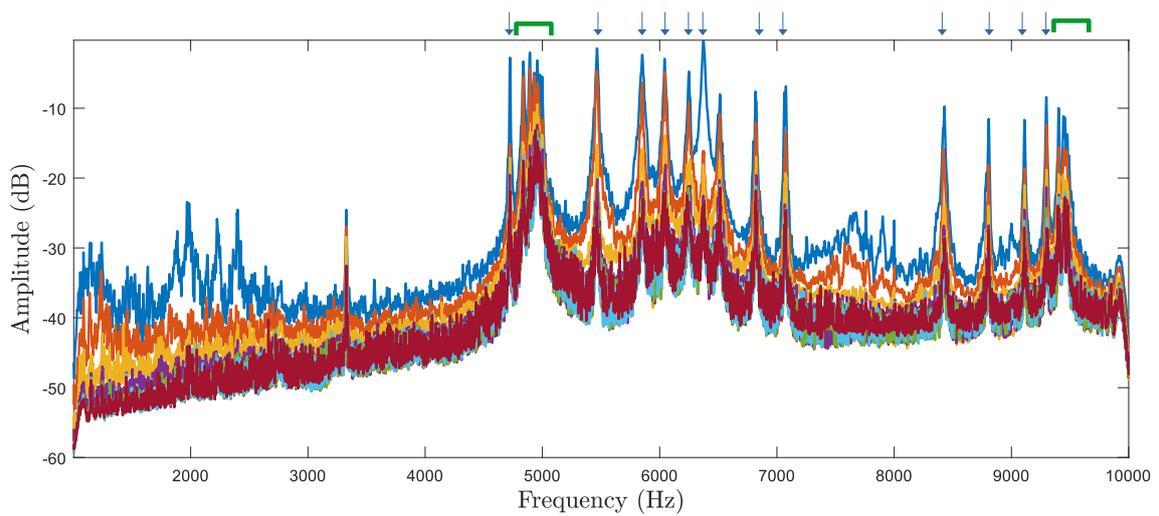


FIGURE 4.14 – Valeurs singulières pour 8 excitations acoustiques pour le rouet de 17 pales. Les résonances de voile sont repérées par des flèches bleues et les groupes de modes de pales par des intervalles verts.

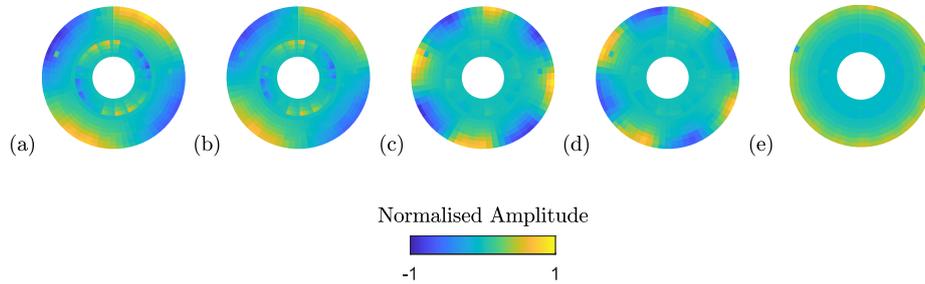


FIGURE 4.15 – Déformées modales stationnaires reconstruites du rouet à 17 pales associées aux modes de voile à : 2 diamètres à 5466 Hz ((a) et (b)), 4 diamètres à 6041 Hz ((c) et (d)) et 0 diamètre à 6372 Hz (e). Le nombre de cercles nodaux est nul sauf pour la figure (e) où il est égal à 1.

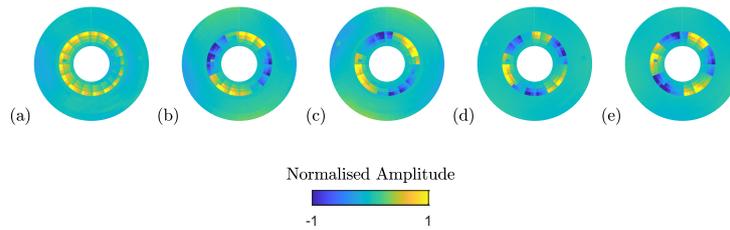


FIGURE 4.16 – Déformées modales stationnaires reconstruites associées aux modes de pales reconstruits à : 0 diamètres à 4722 Hz (a), 2 diamètres à 4833 Hz ((b) et (c)), 3 diamètres à 4892 Hz ((d) et (e)) du rouet à 17 pales.

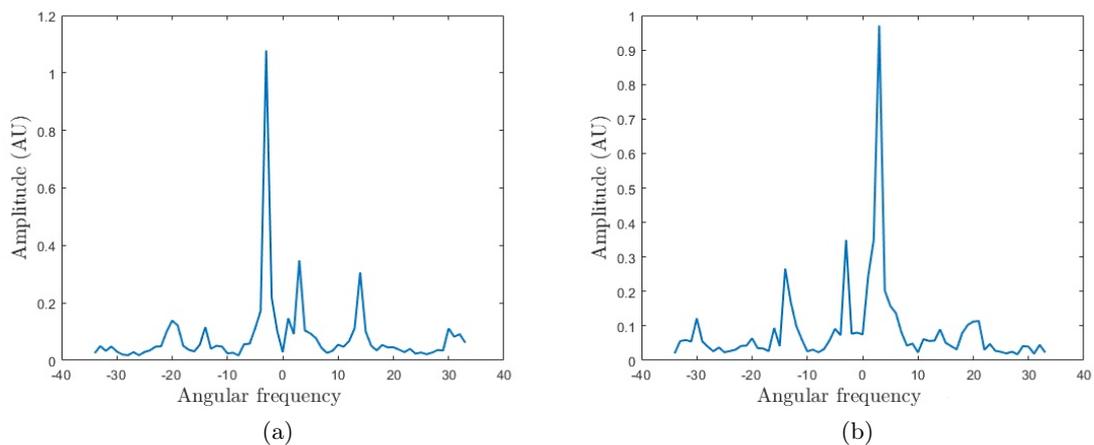


FIGURE 4.17 – Comparaison des spectres angulaires de (a) \mathbf{u}_1 et (b) \mathbf{u}_2 à 4892 Hz du rouet à 17 pales.

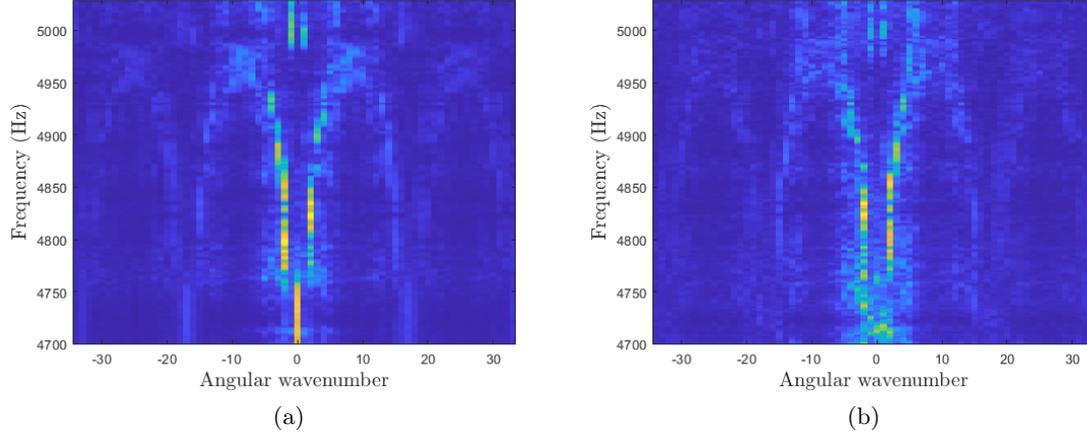


FIGURE 4.18 – Dispersion angulaire des vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 (a) et \mathbf{u}_2 (b) entre 4722 Hz et 5000 Hz pour le rouet à 17 pales.

A partir de ces deux figures, nous proposons deux manières d'estimer la relation de dispersion du rouet en supposant qu'il n'y a pas plus de ν modes excités à chaque fréquence. Pour cela nous introduisons deux estimateurs complémentaires $D_e^\nu(k)$ et $D_s^\nu(k)$ (la dépendance fréquentielle est implicite). Soit la relation de dispersion peut être estimée à partir de la somme des ν premiers modules au carré des vecteurs singuliers des transformées de Fourier, *c.-à-d.*

$$D_e^\nu(k) = \sum_{m=1}^{\nu} \left| \sum_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N_u}} (\mathbf{u}_m)_l \right|^2. \quad (4.13)$$

On peut également l'estimer en pondérant cette somme par la valeur singulière associée à chaque vecteur singulier dont on prend le module :

$$D_s^\nu(k) = \sum_{m=1}^{\nu} s_m \left| \sum_l e^{-i\frac{2\pi kl}{N_u}} (\mathbf{u}_m)_l \right|^2. \quad (4.14)$$

où N_u est la dimension des vecteurs singuliers. Dans la suite, le calcul est fait avec deux vecteurs singuliers ($\nu=2$). Comme on peut l'observer sur la figure 4.19(a), l'avantage de $D_e^\nu(k)$ est de ne pas dépendre de l'intensité du couplage acoustique et donc à l'amplitude de l'excitation acoustique. Cependant, d'une part, il ne permet pas d'identifier les résonances discrètes et s'avère inexact dans le cas où un unique mode est excité (par exemple lorsque $k = 0$).

Quant à l'estimateur $D_s^\nu(k)$, il est égal à l'élément $h_{k,k}$ de la projection de la matrice \mathbf{H} (voir l'équation (4.11)) mais où \mathbf{H} a été préalablement projeté sur ses deux vecteurs singuliers les plus significatifs. Dans la suite nous utiliserons cet estimateur qui ne présente pas les désavantages de $D_e^\nu(k)$ (voir (4.19)(b) même s'il est à priori plus sensible à l'excitation acoustique).

La périodicité d'ordre 17 du spectre angulaire est bien visible. On peut ainsi se limiter à la représentation de la relation de dispersion à la première zone de Brillouin *c.-à-d.* pour des nombres d'onde angulaires k compris entre -8 et 8 (figure 4.20). Néanmoins il reste à

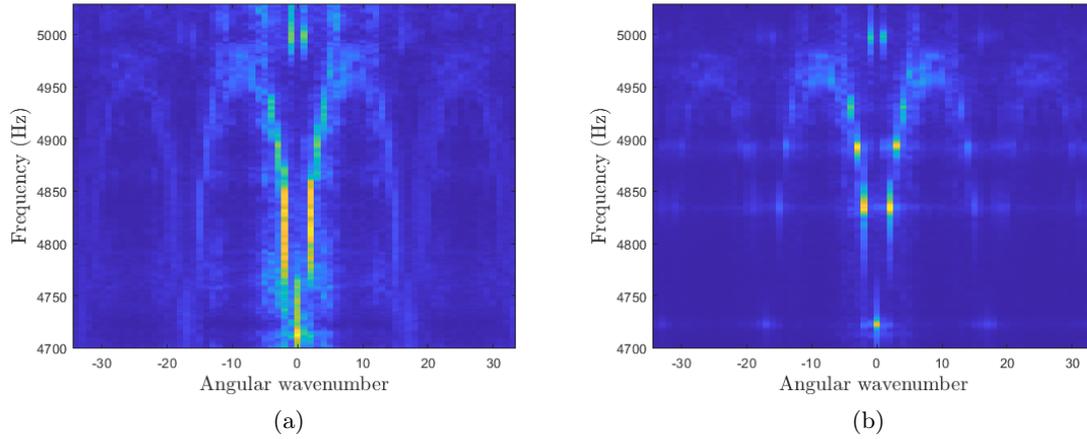


FIGURE 4.19 – Dispersion angulaire estimée à partir de $D_e^2(k)$ (a) et $D_\sigma^2(k)$ (b) pour le rouet à 17 pales entre 4722 Hz et 5000 Hz.

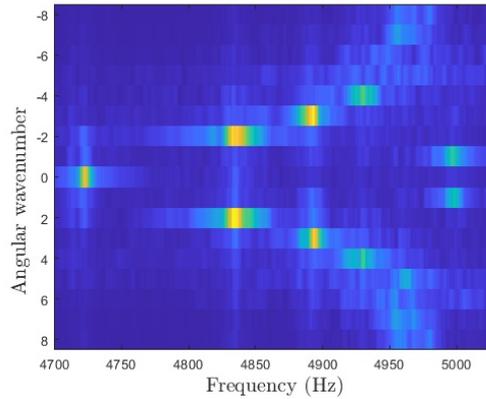


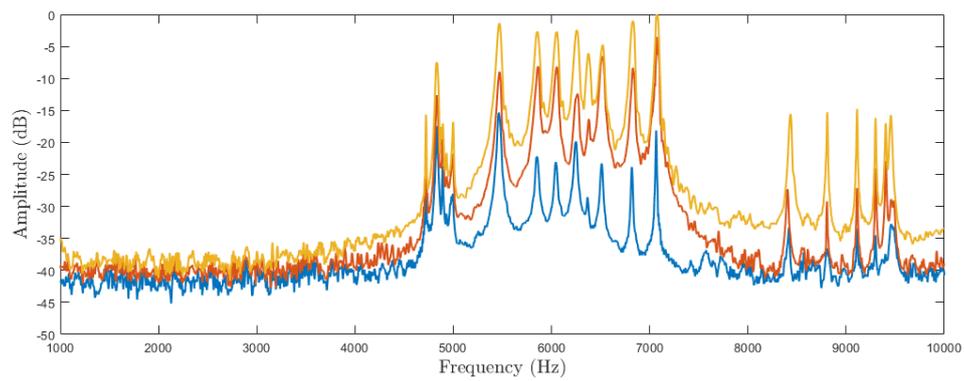
FIGURE 4.20 – Estimation de la dispersion angulaire pondérée D_σ^2 en fonction de la fréquence en dB.

comparer les résultats obtenus avec l'excitation acoustique avec ceux issus de la méthode usuelle qui utilise un marteau d'impacts.

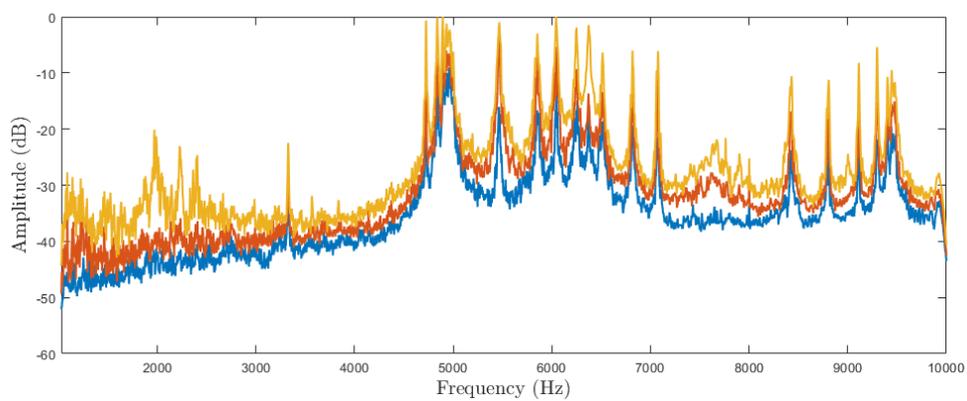
4.5.4 Validation de l'approche acoustique

Afin de valider l'approche acoustique, des mesures ont également été effectuées au marteau d'impact automatique. A cette fin, une matrice de transmission a été enregistrée à l'aide du vibromètre pour trois positions différentes à l'arrière du voile (surface plane) du marteau d'impacts. La décomposition en valeurs singulières de la matrice transmission est visible sur la figure 4.21(a).

De manière à comparer directement ces résultats à la méthode acoustique, nous utilisons une matrice de transmission à partir de seulement trois émissions acoustiques (par les haut-parleurs 1, 2 et 4 des 8 haut-parleurs de la section précédente). La décomposition en valeurs singulières est tracée sur la figure 4.21. Le rapport signal à bruit est meilleur pour l'excitation mécanique. Ce résultat est en adéquation avec les coefficients de qualité élevés calculés à partir des simulations numériques qui traduisent un couplage acousto-



(a)



(b)

FIGURE 4.21 – Valeurs singulières en fonction de la fréquence de la matrice de transmission acquise sur le rouet à 17 pales à partir de (a) trois positions du marteau d'impact ou de (b) trois haut-parleurs.

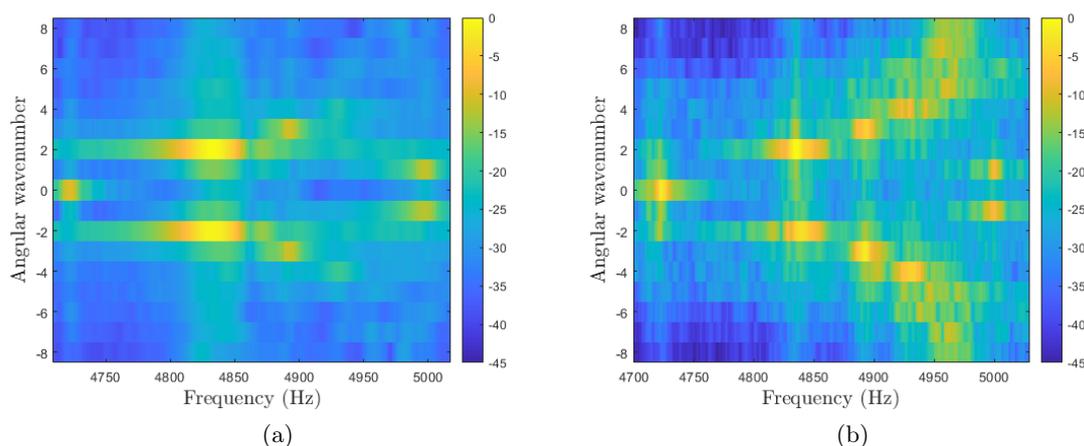


FIGURE 4.22 – Estimation de la dispersion angulaire pondérée D_σ^2 en fonction de la fréquence en dB pour trois excitations au marteau (a) ou acoustique (b).

élastique relativement faible. Néanmoins aucune résonance ne semble être masquée par le bruit. Mieux encore, alors que l'excitation élastique peine à exciter plus de 3-4 modes de pales, la méthode acoustique permet d'en exciter plus de 6. Cet effet est encore plus visible sur les estimations des relations de dispersion sur la figure 4.22. Il y apparaît clairement que l'excitation élastique ne permet d'exciter que les modes de pales en deçà de quatre diamètres, là où la méthode acoustique va jusqu'à huit diamètres.

En effet l'excitation acoustique permet d'exciter de manière privilégiée les pales qui sont des structures relativement étendues et surtout fines et sont donc plus sensibles aux vibrations d'une onde acoustique.

4.5.5 Application à un rouet complexe

Le rouet étudié dans cette partie est un compresseur centrifuge de turbomoteur. Il est constitué de onze pales principales et de onze pales intercalaires. Les dimensions de l'ordre décimétrique seront gardées secrètes. Il est étudié sur place, chez SHE, via le dispositif présenté en section 4.3. Plusieurs types de maillages ont été testés (structurés et non structurés). Pour sa simplicité, un maillage polaire a été retenu avec un pas radial de 0.25 cm et un pas angulaire égal à un septième de la périodicité angulaire, c.-à-d. 360/77 degrés. Ce maillage présente l'avantage de simplifier les traitements par transformées de Fourier spatiales.

Après avoir acquis la matrice de transmission entre 1000 Hz et 10000 Hz, la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transmission est réalisée. Les valeurs singulières sont représentées sur la figure 4.23. Sur cette figure, on remarque très clairement des résonances isolées, souvent double, associées à des modes de voile comme c'est le cas pour le rouet à 17 pales. Les résonances groupées correspondent aux modes de pales, et on en mesure ici quatre groupes.

Cependant, les modes de pales et de voile se couplent beaucoup plus fréquemment ici qu'avec le rouet à 17 pales. En effet, par exemple pour la résonance à 7981Hz qui est éloignée des deux groupements de modes de pales, où l'on attend un mode de voile peu susceptible de se coupler, la figure 4.24 montre que les pales vibrent notablement.

Cet effet peut s'expliquer, d'une part par un couplage plus fort du fait d'une épaisseur

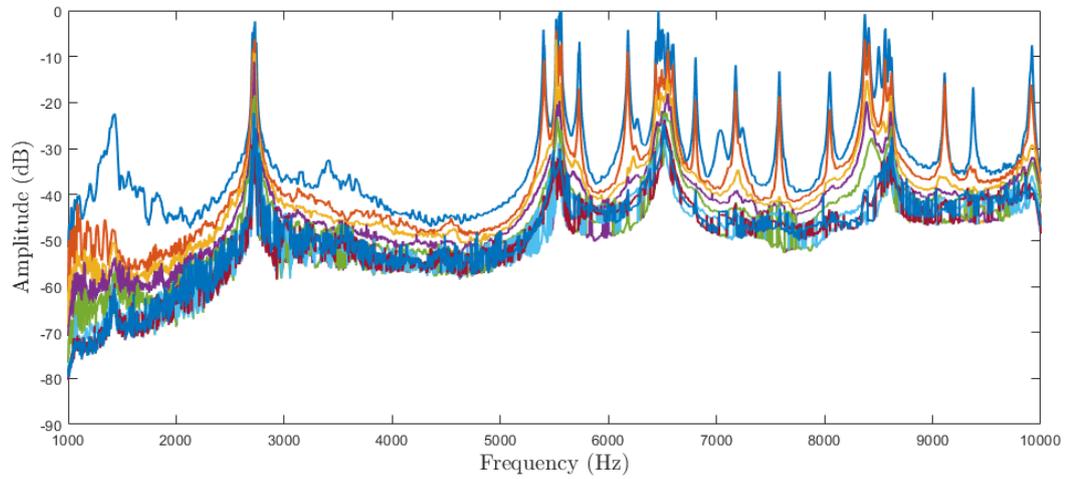


FIGURE 4.23 – Valeurs singulières de la matrice de transmission acousto-élastique entre 1000Hz et 10000Hz pour le rouet à 11 pales.

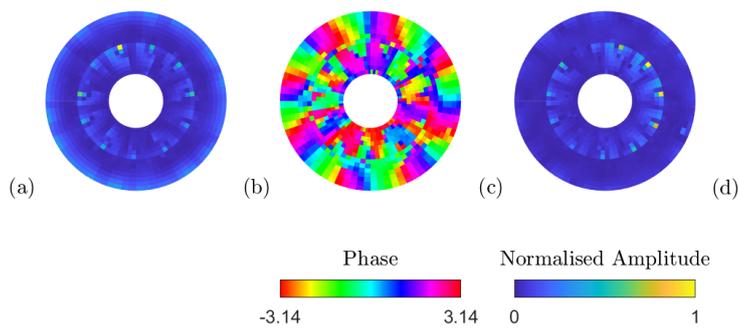


FIGURE 4.24 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 7981 Hz à partir de huit excitations acoustiques pour le rouet à 17 pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .

moindre et d'une surface de pale plus importante, et d'autre part (ce qui n'est pas forcément délié de la proposition précédente) par le fait que les modes de pales et de voiles plus proche dans ce cas. En effet, le rapport entre les fréquences du modes de voile et du mode de pales les plus éloignés sur ce rouet à 11 pales est inférieur à celui du mode de voile et du mode de pales se couplant le mieux sur celui à 17.

Un autre aspect notable est la faible dispersion des modes de pales fondamentaux autour de 2700 Hz avec un nombre valeurs singulières significatives importantes en comparaison au premier groupe de modes de pales du rouet à 17 pales autour de 4900 Hz (voir la figure 4.25(a)). Cependant on voit également que plus l'ordre des modes de pales augmente (2e, 3e,... résonances des pales individuelles) et plus l'effet de séparation des modes avec un nombre de diamètres différent est marqué. Par exemple autour de 8400 Hz les résonance doubles et la résonance simple sont bien séparées (voir la figure 4.25(b)).

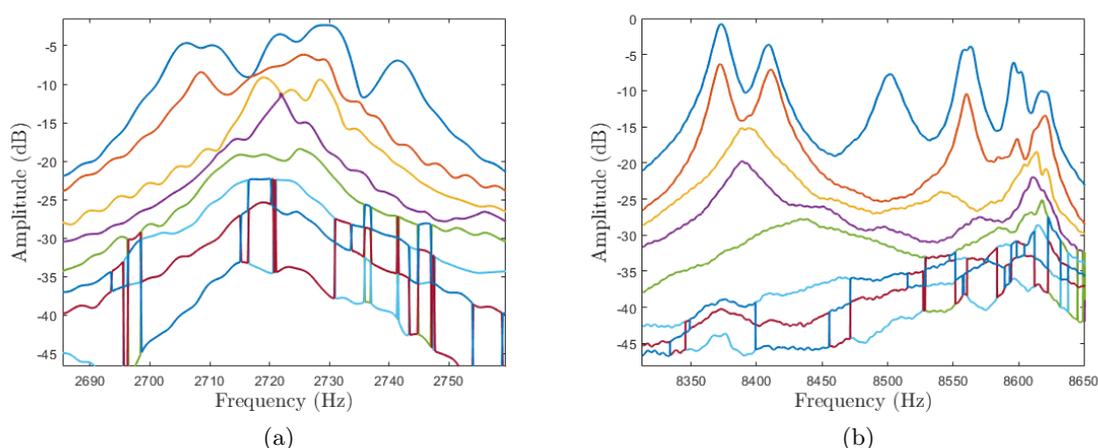


FIGURE 4.25 – Valeurs singulières entre 2680 et 2800Hz (a) et entre 8300 et 8650Hz (b) de la matrice de transmission pour le rouet à 11 pales.

Cette superposition des modes est confirmé par l'analyse de l'estimateur représenté sur les figures 4.26.

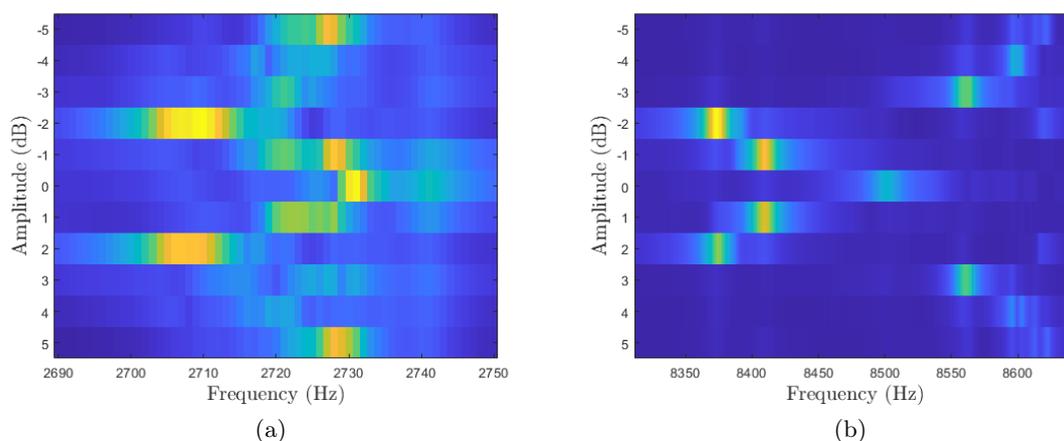


FIGURE 4.26 – Estimation de la dispersion à partir de D_v^2 entre 2680 et 2800Hz (a) et entre 8300 et 8650Hz (b).

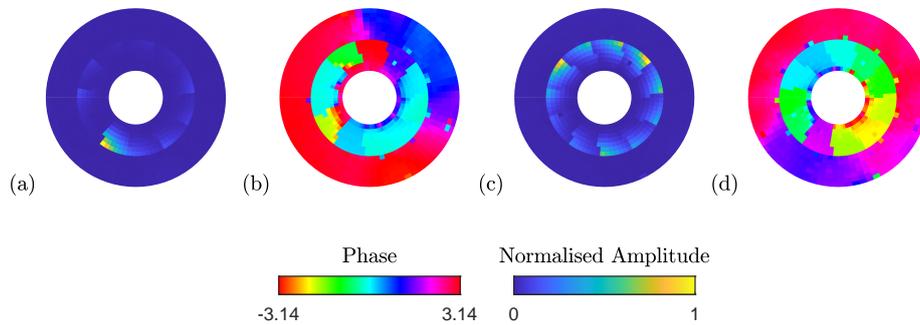


FIGURE 4.27 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 2741 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le rouet à 11 pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . La deuxième valeur singulière est de 10.5 dB plus faible que la première.

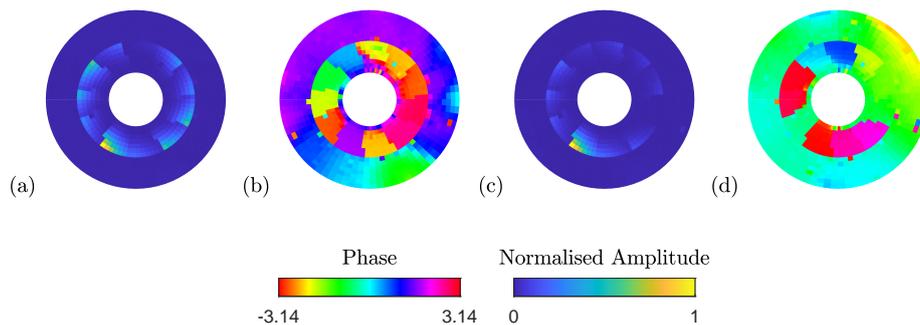


FIGURE 4.28 – Représentation des champs mesurés par deux excitations acoustiques à 2741 Hz sur le rouet de 11 pales : (a) amplitude et (b) phase de l'excitation avec le 7e haut-parleur, (c) amplitude et (d) phase de l'excitation avec le 8e haut-parleur.

Ces outils sont donc très utiles pour caractériser expérimentalement de manière précise chaque mode. Ils permettent également de mettre en lumière des phénomènes de localisation de vibrations. En effet, lorsque toutes les fréquences spatiales sont excitées («dirac» spatial), comme à 2741 Hz, c'est qu'il s'agit d'un mode où la vibration est localisée sur une ou plusieurs pales, ce qui est confirmé par les vecteurs singuliers représentés à cette fréquence sur la figure 4.27.

La détection d'un mode localisé peut être assez aléatoire si une méthode d'excitation fondée sur une seule source est utilisée. C'est ce que l'on peut voir sur la figure 4.28 où cet effet est nettement visible avec le 8e haut-parleur alors qu'il est nettement moins marqué avec le 7e haut-parleur. De plus l'effet de localisation secondaire sur les pales du haut n'est même pas détecté. Ainsi la multiplicité des excitations augmente la probabilité de détection de ce type de phénomènes.

La localisation des vibrations dans ce type de systèmes périodiques, étudiée notamment par Chandrashaker [23], est généralement un phénomène que l'on cherche à éviter. Il est

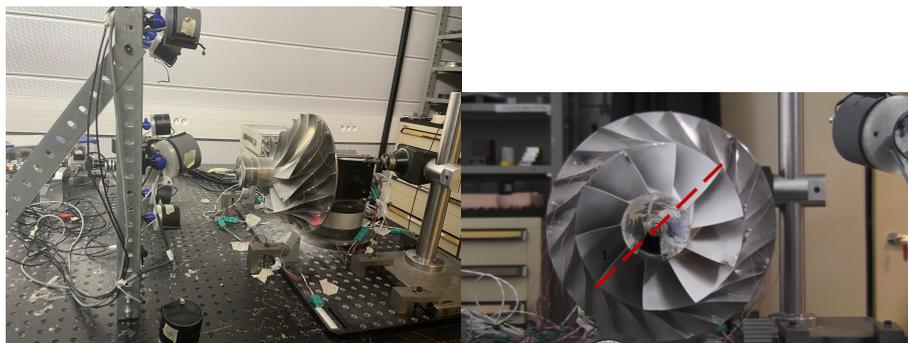


FIGURE 4.29 – A gauche : photo du dispositif expérimental pour l'étude vibrométrique du rouet désaccordé. A droite : photo de face du rouet faisant apparaître l'axe de référence passant entre les pales 0-1 et 6-7.

du au phénomène de «désaccordage involontaire» (ou *mistuning*).

4.6 Rouet désaccordé

Le désaccordage involontaire est du au fait que des pales sensées être identiques diffèrent légèrement du fait des processus de fabrication. Cet écart souvent faible, dit de « désaccordage involontaire», peut induire la localisation des vibrations sur une ou plusieurs pales. Cet effet est délétère pour plusieurs raisons : d'une part, cette localisation peut augmenter significativement le niveau de réponse forcée des pales qui y sont sujettes. D'autre part, la transformée de Fourier spatiale ne s'exprime alors plus selon un seul nombre, et ce mode localisé est donc susceptible d'être excité par tout type de géométrie d'excitation [17]. Si le système idéal reste un système accordé, il est parfois utile de procéder à un « désaccordage intentionnel», ou *detuning*, permettant de limiter les effets d'éventuels écarts de fabrication. Ewins [35] propose par exemple d'optimiser le placement des différents types de pales.

Le compresseur étudié ici est désaccordé volontairement selon un motif lui permettant de garder une symétrie d'ordre 2 (ou symétrie axiale) afin d'éviter un effet de balourd. La répartition des modes est plus difficile à anticiper car d'une part, les deux types de pales résonnent à deux fréquences différentes et d'autre part elles sont agencées de manière irrégulière. Néanmoins, il reste une symétrie d'ordre deux qui vérifie la théorie de Bloch. Cela peut également être vu comme une transformation des coordonnées (x, y, z) en $(-x, -y, z)$. De ce fait les modes sont soit symétriques soient antisymétriques par rapport à l'axe z . La mesure des matrices acousto-élastiques a été effectuée sur le banc de vibrométrie chez SHE (voir la section 4.3). Des photos du dispositif ainsi que du rouet sont présentées sur la figure 4.29. Comme on peut le voir, des jauges de contraintes pour des essais en rotation sans rapport avec notre analyse étaient encore présentes. L'excitation est toujours réalisée par huit haut-parleurs. Les valeurs singulières issues de la SVD de la matrice de transmission sont présentées sur la figure 4.30. Il est très clair que le nombre de résonances a augmenté. Cet effet s'accompagne logiquement d'une diminution importante du nombre de résonances doubles. La présence de modes symétriques et antisymétriques est visible par exemple sur les résonances simples à 3660 Hz (mode symétrique) et 3693 Hz (mode antisymétrique), dont les premiers vecteurs singuliers sont représentés sur la figure 4.31. Pour plus de lisibilité, c'est la partie réelle et non pas l'amplitude qui a été représentée sur les vecteurs singuliers associés à des résonances simples.

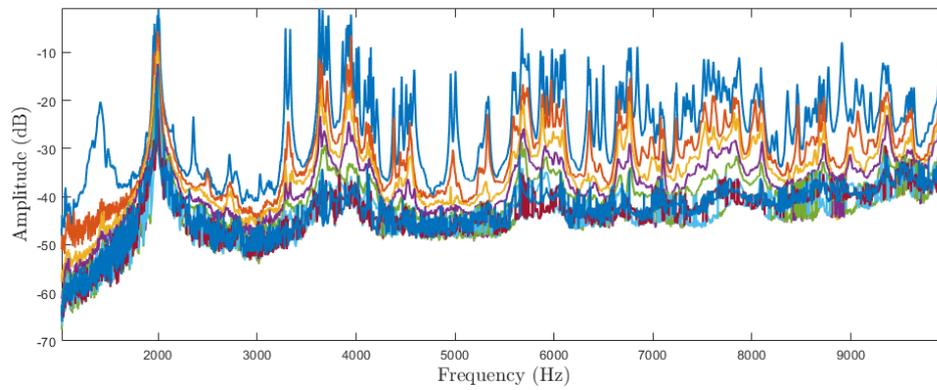


FIGURE 4.30 – Valeurs singulières en fonction de la fréquence pour le rouet désaccordé.

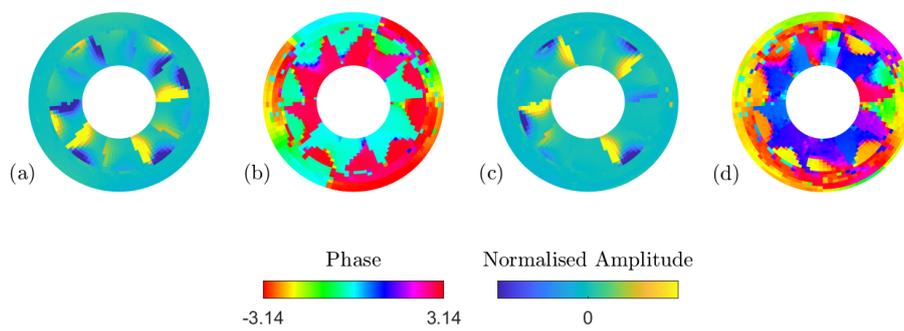


FIGURE 4.31 – (a) Partie réelle et (b) phase de \mathbf{u}_1 à 3660 Hz pour le rouet désaccordé. (c) Partie réelle et phase (d) de \mathbf{u}_2 à 3693 Hz pour le même rouet.

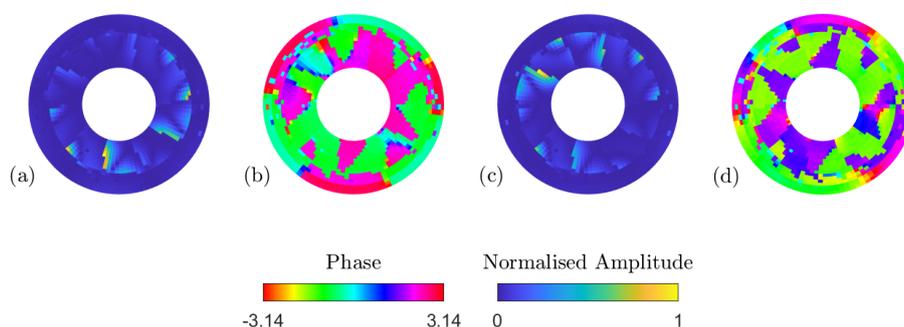


FIGURE 4.32 – (a) Amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 à 3948 Hz pour le rouet désaccordé.

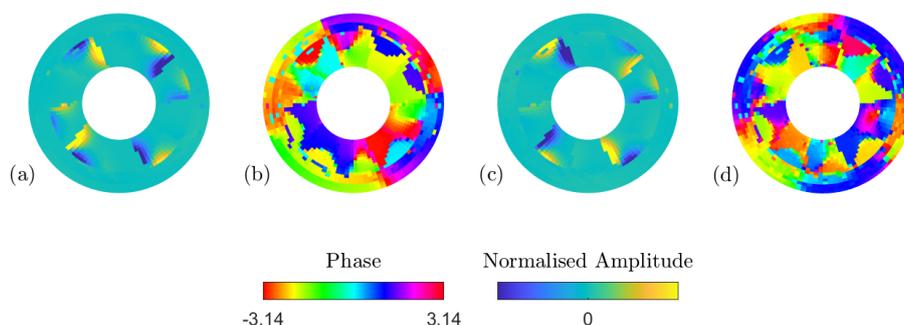


FIGURE 4.33 – (a) Partie réelle et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) partie réelle et (d) phase de \mathbf{u}_2 à 3626 Hz pour le rouet désaccordé.

Il subsiste néanmoins quelques résonances doubles comme par exemple à 1990 Hz et à 3948 Hz. On observe sur la figure 4.32 qu'à 3948 Hz, les deux vecteurs singuliers significatifs semblent correspondre à des modes de pales car la SVD a généré deux vecteurs singuliers dont l'un est impair et l'autre pair. On notera une résonance simple difficile à interpréter à 3626 Hz qui n'est pas stationnaire comme on peut le voir sur la figure 4.33, mais respecte tout de même une antisymétrie.

Puisque la grande majorité des résonances sont simples, seule la transformée de Fourier du premier vecteur singulier pondéré par la première valeur singulière en fonction de la fréquence est représentée sur la figure 4.34. Puisque les modes simples sont soit pairs soit impairs, il est cohérent d'observer que pour un mode donné, les nombres d'ondes angulaires sont soit pairs soit impairs. Ce phénomène est l'équivalent de l'effet de repliement de la théorie de Bloch avec une symétrie angulaire d'ordre deux. Quelques phénomènes de localisation ont été identifiés comme à 2009 Hz avec une vibration importante en bout de pale (voir la figure 4.35).

Nous pouvons conclure de cette partie que l'analyse par décomposition en valeurs singulières de la matrice de transfert acousto-élastique permet d'identifier un grand nombre de

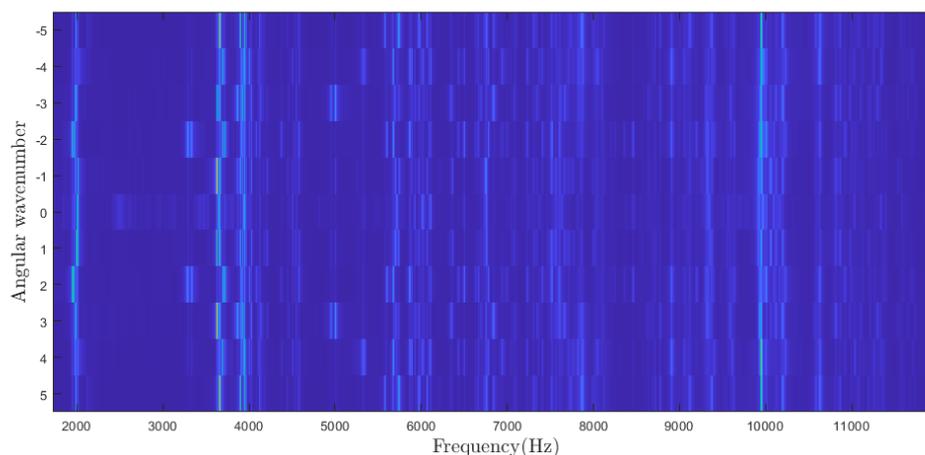


FIGURE 4.34 – $D_e^1(k)$ en fonction de la fréquence pour le rouet désaccordé.

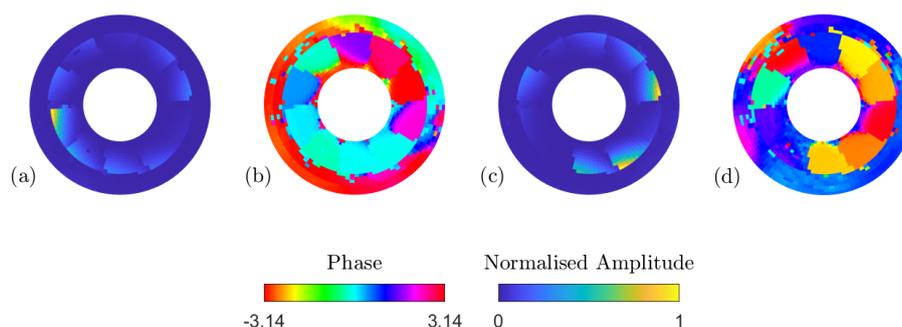


FIGURE 4.35 – (a) Amplitude et phase (b) de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 à 2009 Hz pour le rouet désaccordé.

phénomènes modaux même dans le cas d'un rouet dont la géométrie est particulièrement complexe.

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploité les matrices acousto-élastiques de structures à symétrie de rotation discrètes. La périodicité angulaire induit une distribution spécifique des modes de ce type de structures qui est issue de la théorie de Bloch. Sur le premier cas d'étude, un pignon présentant trois évidements, la périodicité n'apparaît que comme une perturbation du système continu. Ainsi, le principal effet noté est la levée de dégénérescence pour les modes ayant un nombre d'onde angulaire multiple de l'ordre de périodicité. L'approche matricielle met clairement en lumière ce comportement.

Puis, ce sont des compresseurs, roues aubagées monoblocs, qui ont été étudiés. Nous avons validé l'approche acoustique sur un rouet simple à 17 pales, par une comparaison obtenus avec un marteau d'impact. Les modes de voile, de pales ou encore les modes mixtes dans le cas où les fréquences de résonance sont proches ont été observés à l'aide de ces deux

méthodes.

Le second rouet à 11 pales et de géométrie plus complexe a ensuite été analysé avec succès. Sur celui-ci, les modes de pales sont plus rapprochés et le couplage avec les modes de voile plus fréquent. De plus, le phénomène de localisation est clairement identifié sur l'un des premiers modes de pales. Pour terminer, un rouet désaccordé a été testé. Au lieu d'une symétrie périodique, ce rouet présente une symétrie 2D centrale suivant l'axe z . Il en résulte une structure modale plus complexe avec des modes pairs ou impairs qui ont néanmoins été clairement identifiés avec la méthode acoustique.

En conclusion, dans ce chapitre nous avons validé la méthode sur des pièces aux symétries de rotation discrètes et utilisé les résultats pour mieux comprendre leur comportement vibratoire.

Chapitre 5

Structures endommagées

Sommaire

5.1	Introduction	93
5.2	Endommagement perturbatif	94
5.2.1	Variation de la pulsation de résonance	94
5.2.2	Variation de la masse et raideur modale	95
5.2.3	Variations locales	95
5.2.4	Simulations	96
5.2.5	Expériences avec endommagements perturbatifs sur le pignon	98
5.3	Expériences sur un rouet endommagé	104
5.4	Conclusion	107

5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu dans le premier chapitre, l'analyse modale expérimentale est également un outil de choix pour l'identification de modifications d'une structure résonnante [39, 36]. Contrairement aux méthodes de contrôle non destructif usuelles [94] (ultrasonores, radiologie ...) pour lesquelles la détection de l'endommagement est directe, dans le cas des méthodes vibratoires, la longueur d'onde élastique est généralement grande devant la taille caractéristique de l'endommagement. Dans les structures que nous étudions, ce manque intrinsèque de résolution spatiale est compensé par le caractère hautement résonnant des structures. En effet, grâce aux facteurs de qualité élevés, même une faible variation de fréquence induite par un endommagement peut être détectée. Cette approche nécessite néanmoins une référence.

Cette référence peut être une valeur moyenne associée à un écart type caractéristique du modèle de structure étudiée, en deçà desquels la pièce est considérée comme saine. Il est également possible suivre l'évolution dans le temps des caractéristiques modales. Cette dernière approche recouvre toute une famille de méthodes liée au contrôle santé de structure (SHM).

Il existe plusieurs manières d'estimer les paramètres de l'endommagement à partir de la mesure des modes modifiés. L'approche la plus courante consiste à résoudre un problème inverse [40]. Il s'agit alors de combiner un modèle initial (souvent déterminé par éléments finis) et des mesures réalisées sur la pièce. L'endommagement sera alors estimé à partir des modèles d'endommagements pouvant faire coïncider le modèle de structure ainsi modifié

avec les mesures. Une des premières applications a consisté à localiser un endommagement à partir de l'analyse des décalages en fréquence [2, 19]. Elle est maintenant généralisée pour estimer différents paramètres [89]. Une approche couramment employée consiste à modéliser les endommagements en fonctions de quelques paramètres continus [86] et à les estimer à partir d'une analyse en sensibilité [47]. Plus récemment, ce problème a été abordé de manière statistique [38] avec une inférence bayésienne des paramètres [97, 51]. Enfin, depuis quelques années, des techniques fondées sur l'apprentissage profond [108] ont été proposées.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'évaluer la sensibilité de la méthode développée au cours de cette thèse sur des pièces présentant des endommagements artificiels, puis réels. Pour ce faire, nous traiterons essentiellement le problème direct, c'est-à-dire que nous considérons l'effet d'un endommagement sur la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transmission. Ce type de mesure permet de se débarrasser des éventuels biais induits par le contact. Par exemple, l'observation d'une levée de dégénérescence pourra sans ambiguïté être attribuée à une modification de la structure. L'aspect matriciel permet également de confirmer, via les valeurs singulières, que les résonances ainsi séparées sont bien simples et non doubles. Nous tirerons profit de cette propriété pour éviter de recourir à une référence. Le chapitre est composé de deux parties qui correspondent chacune à un comportement spécifique vis-à-vis de l'apparition d'un endommagement.

Dans la première partie, nous considérerons le cas de petits endommagements locaux qui induisent de légères variations des raideurs et des masses modales de la structure. Nous étudierons leur impact sur les fréquences de résonances. Nous validerons cette approche numériquement puis expérimentalement en ajoutant une masselotte sur un pignon.

Dans la seconde partie, nous étudierons le comportement des modes de pales dans le cas de trois pales endommagées. Nous verrons qu'il n'est alors plus possible d'appliquer une méthode perturbative car les déformées modales sont également modifiées. Néanmoins, les outils introduits dans le chapitre 4 permettront de proposer des analyses des modifications induites, et ce, d'autant plus que la méthode acoustique permet d'exciter des modes de pales d'ordres plus élevés que dans le cas d'une excitation en contact.

5.2 Endommagement perturbatif

Dans un premier temps, nous nous intéressons à l'effet d'un seul endommagement localisé, modifiant peu le comportement vibratoire. Dans ce cas, les modes restent orthogonaux. Ainsi, l'endommagement peut être vu uniquement comme une modification locale de masse et de raideur. L'impact de ces modifications sur les fréquences de résonance est alors mis en lumière. Les résultats sont illustrés avec des simulations aux éléments finis, puis expérimentalement avec une masselotte placée sur le pignon.

5.2.1 Variation de la pulsation de résonance

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la pulsation de résonance associée à un mode peut s'écrire en fonction du rapport de la raideur modale et de la masse modale :

$$\omega_n^2 = \frac{r_n}{m_n}. \quad (5.1)$$

Ainsi, la présence d'un endommagement induit une variation de raideur modale δr_k et de masse modale δm_k et la variation relative de la pulsation modale au premier ordre est donnée par :

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\delta r_n - \omega_n^2 \delta m_n}{2\omega_n^2 m_n}. \quad (5.2)$$

Cette variation relative peut également s'exprimer en fonction de la variation d'énergie potentielle δE_p^k , de l'énergie totale E_t^n et de $\omega_n^2 \delta m_n$.

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\delta E_p^n - \omega_n^2 \delta m_n}{E_t^n}. \quad (5.3)$$

5.2.2 Variation de la masse et raideur modale

Une différentiation semblable à celle effectuée par Adams *et al.* [2] permet de montrer que δr_n et δm_n sont simplement en fonction des variations de densité, $\delta\rho(\mathbf{x})$, du mode propre n , ϕ_n , et du tenseur des constantes élastiques, $\delta C(\mathbf{x})$, par

$$\delta m_n = \int |\phi_n|^2 \delta\rho d^3\mathbf{x}, \quad (5.4)$$

et

$$\delta r_n = \int \epsilon(\phi_n) : \delta C : \epsilon(\phi_n) d^3\mathbf{x}. \quad (5.5)$$

Dans le cas particulier d'un solide isotrope, l'expression précédente devient

$$\delta r_n = \int |\text{Tr}[\epsilon(\phi_n)]|^2 \delta\lambda(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + 2 \int \delta\mu(\mathbf{x}) \|\epsilon(\phi_n)\|^2 d^3\mathbf{x}, \quad (5.6)$$

où $\|\epsilon\|$ et $\text{Tr}\epsilon$ sont respectivement la norme de Frobenius et la trace du tenseur des déformations et où $\delta\lambda$ et $\delta\mu$ correspondent aux variations locales des coefficients de Lamé.

5.2.3 Variations locales

L'ajout (ou soustraction) d'une masse Δm au point \mathbf{x}_0 modifie la densité de la manière suivante :

$$\delta\rho(\mathbf{x}) = \Delta m \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (5.7)$$

En injectant (5.7) dans (5.4), on déduit la variation de masse modale dans cas d'un ajout de masse local :

$$\delta m_n = \Delta m \|\phi_n(\mathbf{x}_0)\|^2. \quad (5.8)$$

De la même manière, pour un milieu isotrope, une variation locale des coefficients de Lamé, qui s'écrivent sous la forme

$$\delta\lambda(\mathbf{x}) = \Delta\tilde{\lambda} \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (5.9)$$

$$\delta\mu(\mathbf{x}) = \Delta\tilde{\mu} \cdot \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \quad (5.10)$$

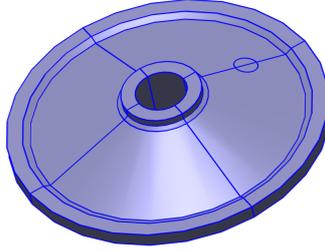


FIGURE 5.1 – Géométrie du pignon simulée avec Comsol. Le petit cercle représente la partie supérieure de la zone où les paramètres élastiques sont modifiés.

induisent une variation de raideur modale qui est donnée par :

$$\delta r_n = \Delta \tilde{\lambda} |\text{Tr} [\epsilon (\phi_n) (\mathbf{x}_0)]|^2 + 2\Delta \tilde{\mu} \|\epsilon (\phi_n) (\mathbf{x}_0)\|^2, \quad (5.11)$$

Ainsi, l'ajout d'une masse locale aura un effet important s'il est situé au niveau d'un ventre, avec un effet de diminution de la fréquence propre du mode, puisqu'en cette position les gradients du champ sont faibles. A l'inverse, au niveau d'un nœud, c'est l'effet d'une modification de la raideur modale qui dominera. Dans le cas d'une diminution de raideur induite, par exemple, par la présence d'un endommagement, la fréquence de résonance va également diminuer.

5.2.4 Simulations

Des simulations aux éléments finis ont été effectuées à l'aide du logiciel Comsol, en prenant en compte le modèle simplifié du pignon du chapitre 3, sans prise en compte des dentures. La structure inclut un cylindre de 8 mm de diamètres dont on peut faire varier soit la densité, soit les coefficients élastiques. Le pignon est en acier dont la densité, le module de Young et le coefficient de Poisson sont égaux à 7.9 kg/dcm², 200 GPa et 0.25, respectivement. Dans un premier temps, on considère une inclusion ayant les mêmes propriétés que l'acier. Les quatre premières déformées modales issues de la simulation sont affichées sur la figure 5.2. Les modes de même nombre de diamètres nodaux présentent la même fréquence de résonance à moins de 0.1 Hz, à l'exception du deuxième diamètre nodal qui présente une différence de 0.3 Hz. Ces écarts ont pour origine la légère asymétrie induite par le maillage.

Dans un premier temps, nous simulons une inclusion de densité cinq fois plus importante. La différence de masse est de 4.7 g pour une masse totale de 307 g, soit une augmentation de 1.55%. Les résultats de la simulation sont synthétisés dans le tableau 5.1. Les changements de fréquence numérique sont comparés à ceux obtenus à partir de l'expression (5.2), dans laquelle la variation de la masse modale est donnée par l'équation (5.8), en prenant la valeur moyenne du champ de déplacement sur la surface de l'inclusion. La variation de raideur est supposée nulle. Les valeurs théoriques et numériques sont pour la plupart en très bon accord. On peut s'étonner à première vue que l'écart de fréquence maximal, associé aux modes pour lesquels l'inclusion est située sur un nœud angulaire, ne soit pas nul. Mais cela s'explique bien par la taille non négligeable de l'inclusion considérée, qui

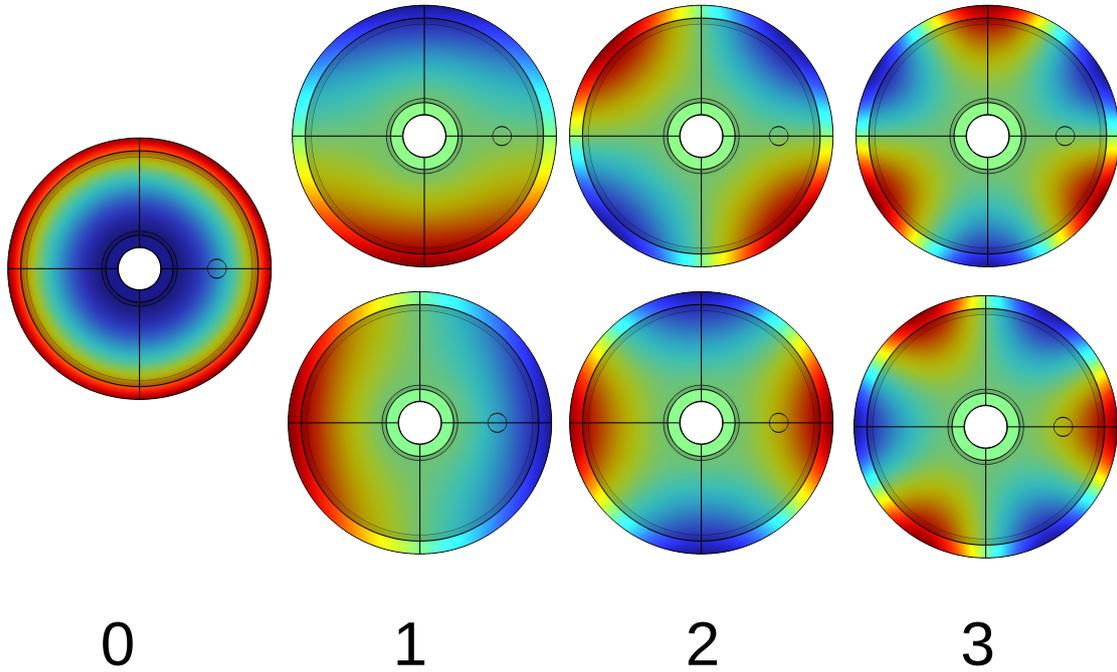


FIGURE 5.2 – Déplacements selon l’axe de symétrie du pignon pour différents nombres de diamètres nodaux. Le nombre de cercles nodaux est 0. La ligne du haut correspond à des modes où l’endommagement se trouve sur un minimum (m) et la ligne du bas sur un maximum (M). Les modes à 0, 1, 2 et 3 diamètres résonnent respectivement à 3556.7 Hz, 1764.7 Hz, 1949.25 Hz et 3842.2 Hz, respectivement pour le pignon intact.

Nombre de diamètres	Fréquence de résonance sans endommagement (Hz)	δf (Hz)			
		Min		Max	
		Num	Théo	Num	Théo
1	1764.7	-11.6(M)	-11.2(M)	-0.9(m)	-0.9(m)
2	1949.25 \pm 0.15	-10.3(M)	-8.8(M)	-0.4(m)	-0.4(m)
0	3556.7	-6.7	-6.6	-	-
3	3842.2	-17.2(M)	-16.5(M)	-0.8(m)	-0.8(m)

TABLE 5.1 – Décalages de fréquences δf des quatre premiers modes, induits par une augmentation locale de la densité, issus de la simulation ou de l’approche perturbative. La lettre entre parenthèses (M) ou (m) signifie que la différence est associée au mode avec un maximum ou un minimum sur l’endommagement, respectivement.

Nombre de diamètres	Fréquence de résonance sans endommagement (Hz)	δf (Hz)			
		Min		Max	
		Num	Théo	Num	Théo
1	1764.7	-9.7(m)	-11.7(m)	-3.8(M)	-3.8(M)
2	1949.25 \pm 0.15	-6.4(m)	-5.7(m)	-4.8(M)	-4.4(M)
0	3556.7	-11.7	-12.7	-	-
3	3842.2	-10.3(M)	-9.2(M)	-5.6(m)	-4.1(m)

TABLE 5.2 – Décalages de fréquences δf des quatre premiers modes, induits par une augmentation locale du module d’Young, issus de la simulation ou de l’approche perturbative. La lettre entre parenthèses (M) ou (m) signifie que la différence est associée au mode avec un maximum ou un minimum sur l’endommagement, respectivement.

n’est donc pas limitée à la ligne nodale. La rupture de symétrie due aux endommagements induit bien un effet de levée de dégénérescence des résonances doubles. On appelle «modes en cosinus» ceux ayant un ventre angulaire (un maximum) et «modes en sinus» ceux présentant un nœud angulaire (un minimum) au niveau de l’endommagement. Comme attendu, une augmentation locale de la masse induit toujours un décalage vers les basses fréquences des fréquences de résonances. Le décalage est plus prononcé pour les modes en cosinus (M) que pour les modes en sinus (m). Le modèle perturbatif prédit bien les décalages (voir table 5.1).

Dans un second temps, une diminution locale du module d’Young a été simulée. Le module d’Young a été réduit de 200 GPa à 20 GPa. On rappelle que les deux coefficients de Lamé sont proportionnels au module d’Young et qu’ils sont donc modifiés de la même manière. A nouveau, l’endommagement induit une levée de dégénérescence des modes comme précédemment, avec des modes en sinus et cosinus. Comme on peut l’observer à partir de l’expression de la variation locale de raideur (5.11), il est difficile d’anticiper l’amplitude de δr qui dépend de manière relativement complexe des gradients du mode associé. C’est pourquoi nous avons préféré déduire δr de l’équation (5.3) où δE_p et E_t sont calculées numériquement. Les différences de fréquence de résonances induites par la variation de raideurs sont présentées dans la table 5.2. On observe un bon accord entre les valeurs numériques et théoriques des décalages en fréquence, qui sont bien négatifs comme attendu. Cependant les variations les plus faibles ne sont pas forcément associées à un mode en cosinus (M) car l’endommagement se situe alors sur un ventre angulaire mais pas radial. Dans ce cas là, les gradients radiaux ne sont pas nuls et peuvent être même plus intenses que pour le sinus dans le cas de 3 diamètres. Dans la partie suivante, des changements de fréquences dus uniquement à des modifications de masse modale sont étudiés.

5.2.5 Expériences avec endommagements perturbatifs sur le pignon

Des mesures ont été effectuées sur le pignon introduit dans le chapitre 3 sur lequel est placé un aimant de 1.9 g, comme on peut le voir sur la figure 5.3. Le dispositif utilisé pour mesurer la matrice de transmission est identique à celui présenté dans le chapitre 2. Huit haut-parleurs sont utilisés. La décomposition en valeurs singulières est représentée sur la figure 5.4. Nous constatons qu’à chaque résonance, une seule valeur singulière est significative. La différence entre la première et la seconde valeur singulière au niveau des résonances est au minimum de 6dB, et de manière générale supérieure à 10 dB, ce qui laisse supposer que seule la première valeur singulière est significative. Comme on le voit sur les figures 5.5 (a) et (b), il existe maintenant des couples de résonances rapprochées, comme

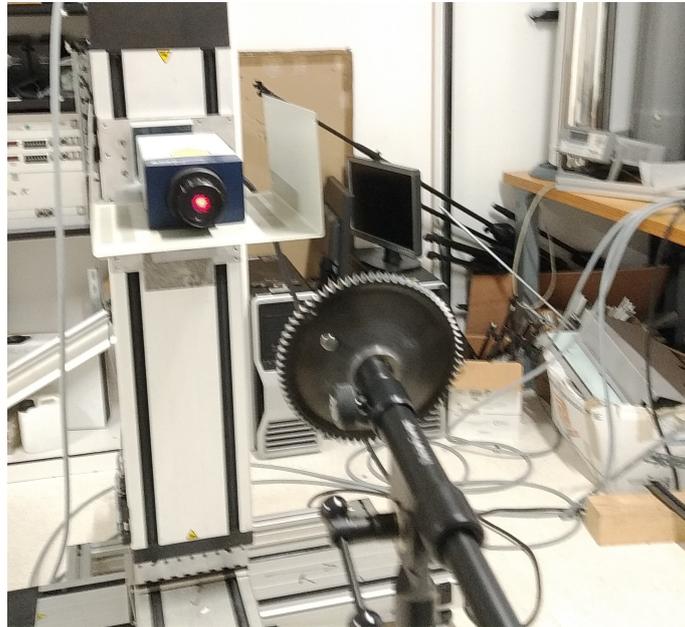
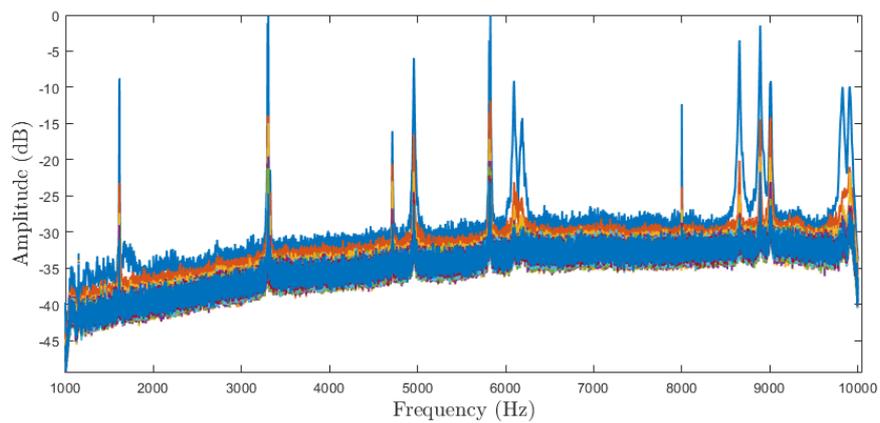


FIGURE 5.3 – Photo de l'expérience mis en œuvre pour l'étude du pignon avec ajout de masselotte.



(a)

FIGURE 5.4 – Évolution des 8 valeurs singulières de la matrice de transmission entre 1 kHz et 10 kHz pour le pignon en présence d'une masselotte de 1.9 g.

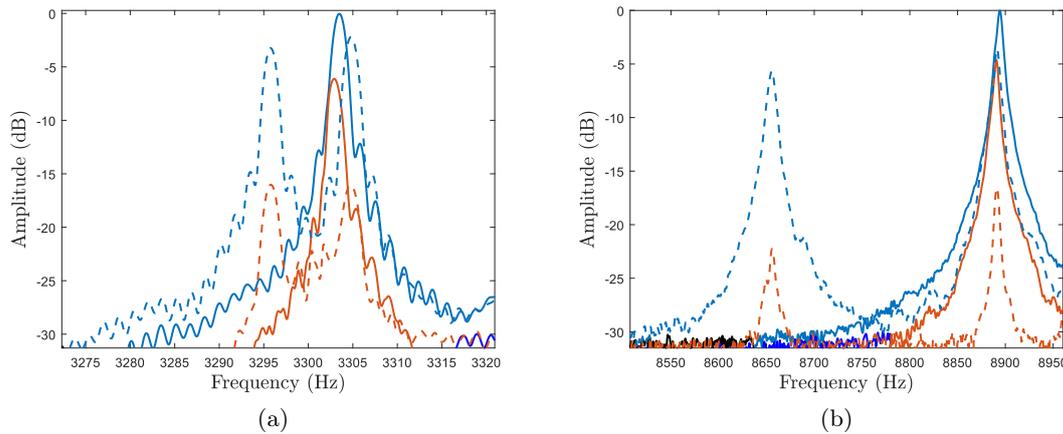


FIGURE 5.5 – Comparaison des 2 premières valeurs singulières autour de (a) 3303 Hz et (b) 8891 Hz avec (courbe pointillée) et sans masselotte (courbe continue).

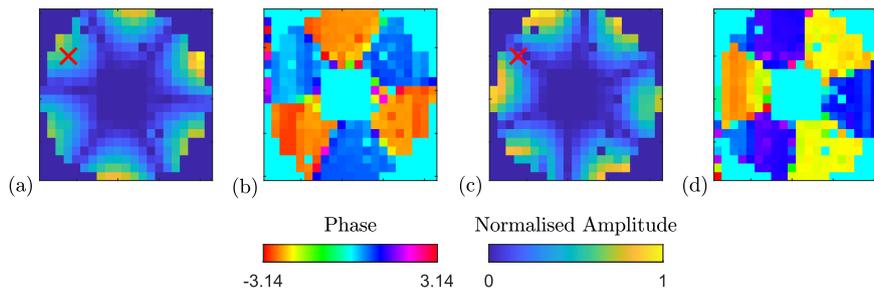


FIGURE 5.6 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 sur le pignon en présence de la masselotte : (a) amplitude et (b) phase à 3295 Hz, (c) amplitude et (d) phase à 3303 Hz.

par exemple autour de 3303 Hz et de 8891 Hz. Ces couples résultent clairement d'une levée de dégénérescence. En effet, sur ces mêmes figures sont tracées les deux premières valeurs singulières du pignon, mais sans la masselotte. On remarque que la présence de la masselotte n'induit un décalage marqué vers les basses fréquences que pour une seule des résonances. Les cas où la résonance est affectée correspondent à ceux où l'aimant est placé sur un maximum, comme cela est visible pour le mode à trois diamètres nodaux initialement à 3303 Hz sur la figure 5.6. Cela suggère que le changement de raideur apporté par l'aimant est faible, ce qui n'est pas forcément étonnant : l'aimant n'est lié à la structure que par une force magnétique normale estimée à ~ 1 N et les forces de friction pour les composantes tangentielles. La matrice acousto-élastique a également été mesurée avec un aimant de 3 g positionné dans la même zone. Les premières valeurs singulières des trois mesures sont comparées sur la figure 5.7. Les agrandissements de la figure 5.7 sur les résonances autour de 3000 Hz et de 8000 Hz sont présentés sur les figures 5.8 (a) et (b).

Il apparaît en particulier que la résonance du mode à un cercle nodal et deux diamètres nodaux, initialement à 8890 Hz, se décale particulièrement fortement. Le mode s'étant le plus décalé est représenté pour chacune des deux masses sur la figure 5.9. Si l'on ne

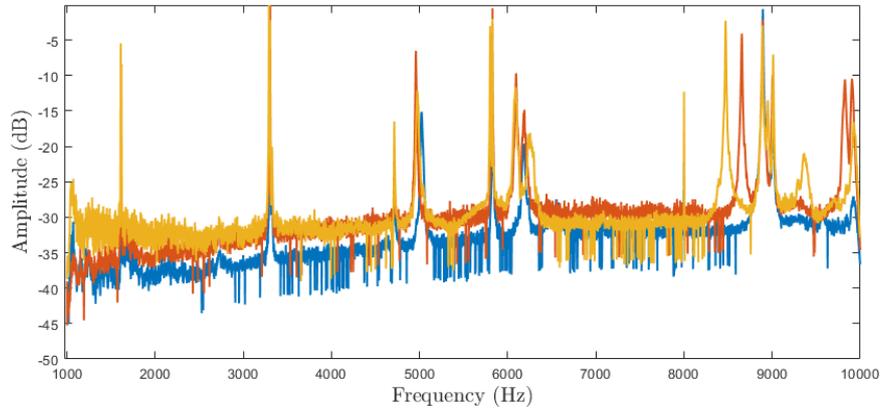


FIGURE 5.7 – Première valeur singulière du pignon sans masse (bleu), avec masse de 1.9 g (rouge) et avec masse de 3 g (jaune) après décomposition de huit excitations acoustiques en base de Hadamard.

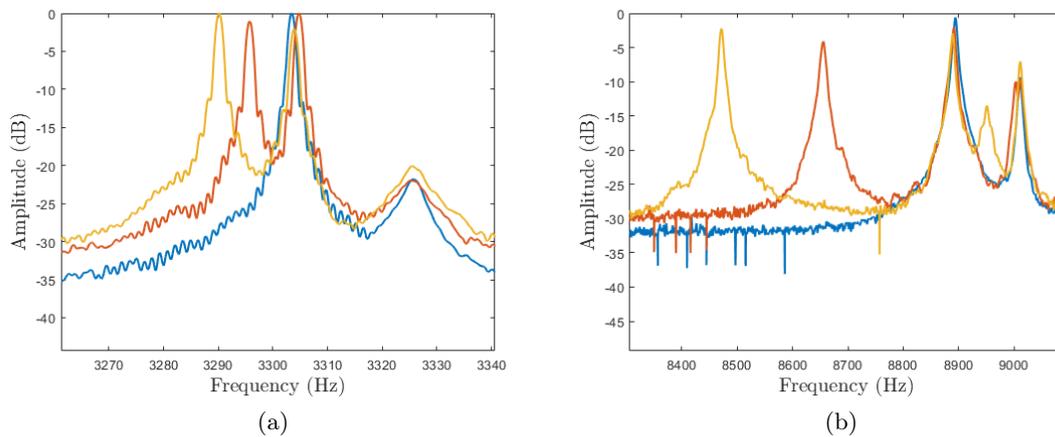


FIGURE 5.8 – Première valeur singulière le pignon sans masse (bleu), avec masse de 1.9 g (rouge) et avec masse de 3 g (jaune) autour de 3000 Hz pour le mode à trois diamètres nodaux (a) et autour de 8800 Hz pour le mode à 1 cercle nodal et 2 diamètres nodaux (b).

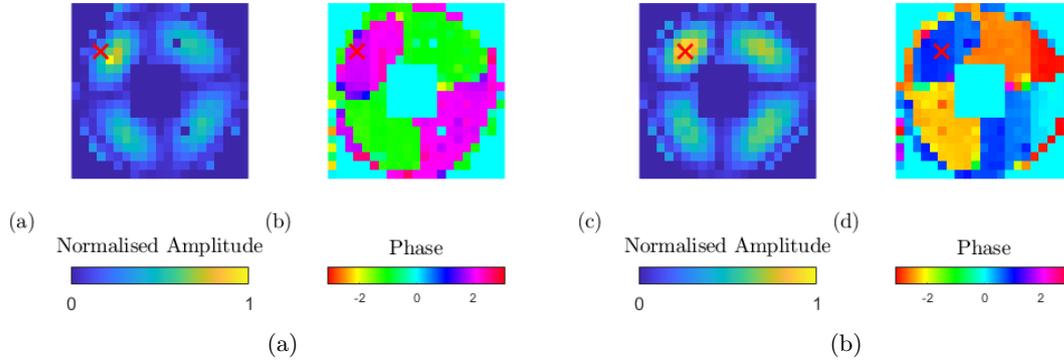


FIGURE 5.9 – Amplitude et phase du premier vecteur singulier obtenu à 8655 Hz pour le pignon avec la masse de 1.9 g (a) et (b) et à 8471 Hz pour le pignon avec la masse de 3g (c) et (d)

$f_0(\text{Hz})$	$\delta\omega_n^1/\delta\omega_n^2$
3303	0.61
4993	0.73
5826	0.50
8890	0.55

TABLE 5.3 – Rapport des décalages fréquentiels mesurés en présence d'un aimant de 1.9 g et de 3 g pour quatre modes propres. La fréquence f_0 est la fréquence du mode propre sans aimant.

considère que la modification locale de la masse donnée par l'équation (5.2), la variation relative de fréquence issue de l'équation (5.8) peut s'exprimer comme suit :

$$\frac{\delta\omega_n}{\omega_n} = \frac{\Delta m |\phi_n(\mathbf{x}_0)|^2}{2\rho \int |\phi_n(\mathbf{x})|^2 d^3x}. \quad (5.12)$$

Il paraît donc cohérent que la résonance se décalant le plus soit celle où le défaut est sur un ventre à la fois angulaire et radial.

Pour évaluer la correspondance des modèles développés avec les expériences en s'affranchissant de la connaissance de $|\phi_n(\mathbf{x}_0)|^2 / \int |\phi_n(\mathbf{x})|^2 d^3x$, on notera que le rapport des deux décalages fréquentiels $\delta\omega_n^1$ et $\delta\omega_n^2$ s'exprime en fonction du rapport des deux masses ajoutées δm_1 et δm_2 si celles-ci sont placées au même endroit :

$$\frac{\delta m_1}{\delta m_2} = \frac{\delta\omega_n^1}{\delta\omega_n^2}. \quad (5.13)$$

La première masse étant de $\delta m_1 = 1.9$ g et la deuxième de $\delta m_2 = 3$ g, on s'attend à un rapport $\delta\omega_k^1/\delta\omega_k^2$ de l'ordre de 0.63. C'est bien ce que l'on observe expérimentalement dans le tableau 5.3 où le ratio $\delta\omega_k^1/\delta\omega_k^2$ est compris entre 0.5 et 0.73.

Pour estimer directement $\delta\omega_k$, il faut connaître le rapport $|\phi_n(\mathbf{x}_0)|^2 / \int |\phi_n(\mathbf{x}_0)|^2 d^3x$. Nous le calculons avec de la simulation aux éléments finis. Les déformées modales associées aux

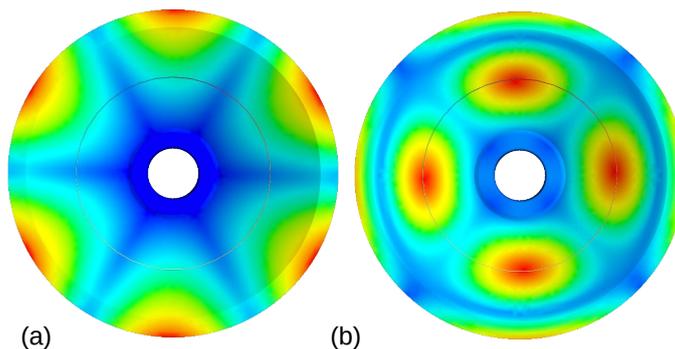


FIGURE 5.10 – Déformées modales correspondant aux modes à 8894 Hz (a) et à 3303 Hz (b).

Nombre de Ø	cerc.	f_0 (Hz)	Masse aimant (g)	f (Hz)				Δ	m_e (g)
				Min		Max			
				Exp.	δf_T	Exp.	δf_T		
3	0	3303	1.9	-7(M)	-6.4(M)	+1(m)	-0.4(m)	33%	2.9
			3	-13(M)	-10.1(M)	+1(m)	-0.6(m)	40%	5.0
2	1	8894	1.9	-239(M)	-151(M)	+2(m)	-0.5(m)	52%	31
			3	-423(M)	-238(M)	+2(m)	-0.8(m)	76%	56

TABLE 5.4 – Fréquences de résonance expérimentale sans aimant (f_0) ou avec un aimant (f) de 1.9 g et 3 g. Les valeurs δf_T sont calculées à partir de l'équation (5.12). La lettre (M) ou (m) indique si la différence est associée au mode avec un maxima ou un minima sur l'aimant, respectivement. L'écart relatif (Δ) est calculé entre la différence entre les deux fréquences de résonance expérimentales et la différence entre les deux écarts théoriques. La dernière colonne correspond à la masse déduite à partir du décalage en fréquence expérimental et de l'équation (5.12).

modes à 8894 Hz et à 3303 Hz qui présentent le même nombre de diamètres nodaux et de cercles nodaux sont tracées sur la figure 5.10. Même si les fréquences de résonance diffèrent significativement entre la simulation et l'expérience, les déformées modales sont proches. L'ensemble des résultats expérimentaux et théoriques sont rassemblés dans la table 5.4. Jusqu'ici les résultats sont cohérents avec les parties précédentes. Les décalages sont toujours plus élevés avec la masse de 3 g et le décalage est bien relié à la valeur du mode au niveau de l'aimant. On observe que les décalages en fréquence correspondent mieux aux prévisions théoriques pour le mode à 3303 Hz. Le moins bon accord est obtenu pour la masse de 3 g à 8894 Hz.

Nous évaluons également la capacité de la méthode à estimer la masse ajoutée. A cette fin, nous appliquons l'équation (5.12) où le décalage en fréquence est donné par la différence de fréquence entre les deux modes. A nouveau $\|\phi_n(\mathbf{x}_0)\|^2 / \int \|\phi_n(\mathbf{x})\|^2 d^3x$ est déduit de la simulation numérique. La dernière colonne de la table 5.4 donne une estimation de la masse ajoutée. On observe que l'estimation de la masse est très sensible à l'écart relatif. Seule l'estimation à 3303 Hz pour la masse de 1.9 g donne un résultat correct avec néanmoins une surestimation de 1 g. Les différences constatées pourraient s'expliquer par le fait que, d'une part, le modèle simulé ne correspond pas exactement au pignon utilisé. De meilleurs résultats pourraient sûrement être obtenus avec les modèles beaucoup plus précis utilisés par les bureaux d'études de chez Safran. D'autre part, l'emplacement des aimants a été

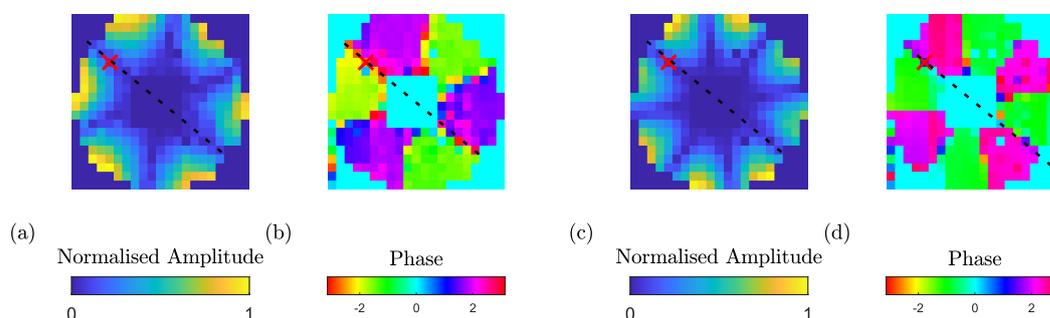


FIGURE 5.11 – Amplitude et phase du premier vecteur singulier obtenu à 3303 Hz pour le pignon avec la masse de 1.9 g (a) et (b) et à 5826 Hz pour le pignon avec la masse de 2 g (c) et (d).

mesuré de manière approximative, ce qui fausse peut être également la valeur du champ de déplacement utilisée pour le calcul théorique. De la même manière, de meilleurs résultats pourraient sûrement être obtenus en notant l'emplacement de l'endommagement avec plus de précautions.

Enfin, à défaut de parfaitement localiser l'endommagement, il est possible de trouver une droite sur laquelle il se trouve. À cette fin, nous considérons uniquement les modes dont la fréquence n'est pas perturbée par l'endommagement. Comme nous l'avons vu, dans le cas de modes ne présentant pas de cercles nodaux, la masselotte doit se trouver sur un diamètre commun à ces deux modes. Or si les nombres de diamètres de ces deux modes n'ont pas de diviseur commun, il n'existe qu'un diamètre commun et la droite est déterminée de manière unique. Un exemple est donné avec les deux modes à 3303 et 5826 Hz comportant respectivement trois et quatre diamètres nodaux sur la figure 5.11. Il apparaît bien que l'endommagement se trouve sur le seul diamètre commun à ces deux modes. Cette approche pourrait être généralisée par la résolution d'un problème inverse fondée sur l'estimation numérique des modes et de l'approche perturbative pour localiser un endommagement en tirant profit de la géométrie particulière des modes de structures à symétrie de rotation continue.

5.3 Expériences sur un rouet endommagé

Des expériences ont également été réalisées sur un rouet endommagé par un choc lors de l'intrusion d'un corps étranger au cours d'essais contrôlés. Des photos de ce rouet sont intégrées sur la figure 5.12. Le dispositif pour mesurer de la matrice de transmission avec huit haut-parleurs entre 1 kHz et 10 kHz est identique à celui présenté dans le chapitre 4. La décomposition en valeurs singulières est alors effectuée à chaque fréquence et les valeurs singulières sont représentées sur la figure 5.13. Les modes de voile (résonances généralement doubles et espacées) semblent relativement peu affectés par l'endommagement : ils restent dégénérés, avec une différence entre la première et la seconde valeur singulière comprise entre 5 dB et 8 dB (pour le rouet sain, ces valeurs sont comprises entre 3 dB et 9 dB). La faible incidence de l'endommagement est confirmée, par exemple, sur la figure 5.14

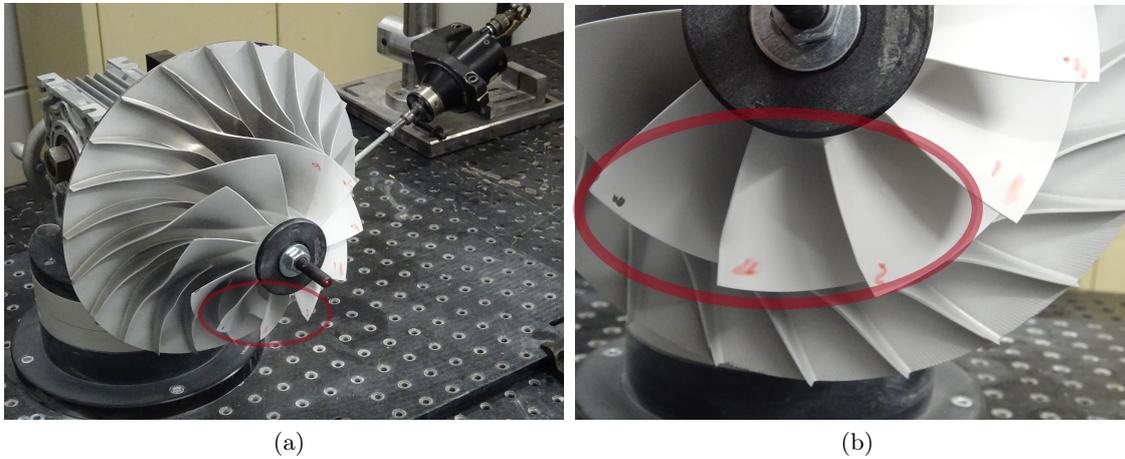


FIGURE 5.12 – Photos du rouet aux pales abîmées

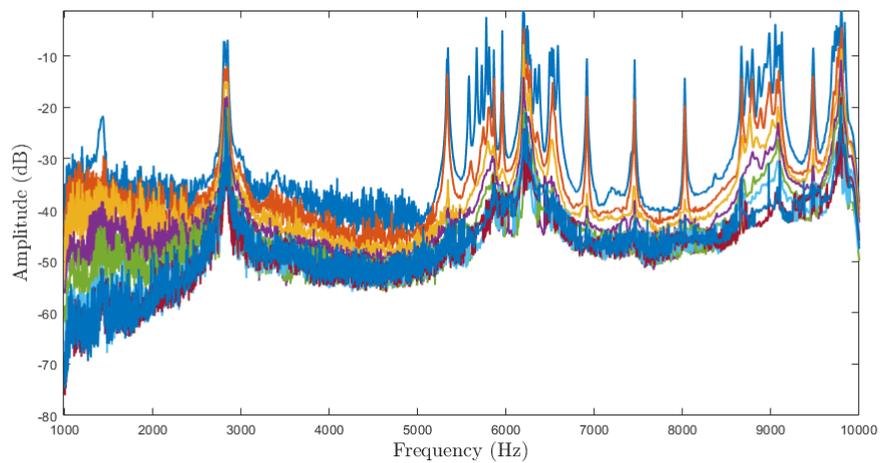


FIGURE 5.13 – Valeurs singulières obtenues après décomposition à chaque fréquence de la matrice de transmission acquise sur le rouet endommagé.

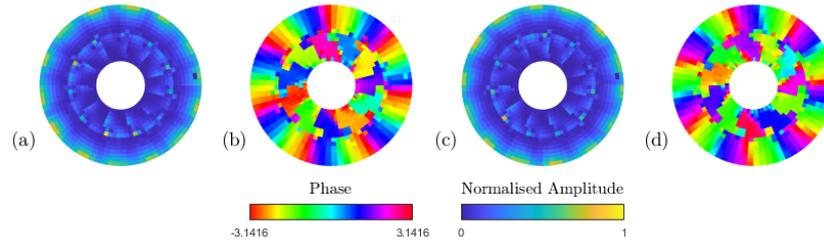


FIGURE 5.14 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 8023 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le rouet endommagé : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 . Les valeurs singulières associées sont respectivement de -14.24 dB et -19.6 dB, soit 5.36 dB de différence.

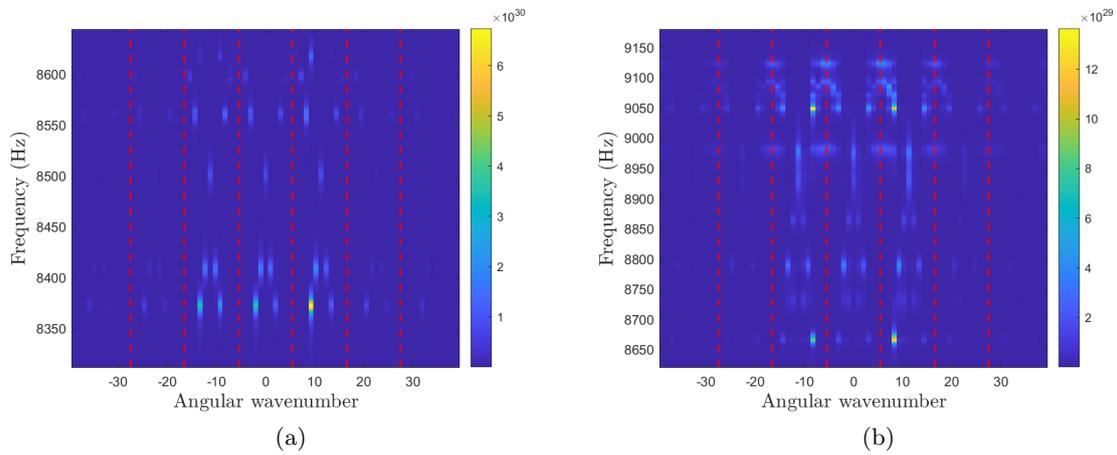


FIGURE 5.15 – Dispersion angulaire estimée à partir de $D_\sigma^2(k)$ du quatrième groupe de modes de pales pour (a) le rouet sain (b) le rouet endommagé.

qui représente les premiers vecteurs singuliers à 8023 Hz, pour la résonance associée aux deux modes de voile à sept diamètres nodaux. La figure 5.13 montre également que, pour les modes de pales (résonances groupées), les résonances doubles sont beaucoup moins nombreuses que sur un rouet sain. Cet effet est particulièrement visible sur les deuxième, troisième et quatrième groupes de résonances de pales autour de 5800 Hz, 6500 Hz et autour de 9000 Hz, respectivement. Pour mieux étudier ces modes, on trace côte à côte les spectres angulaires/fréquentiels obtenus avec le rouet sain et le rouet endommagés pour le quatrième groupe de modes de pales (figure 5.15). Les spectres des deuxième et troisième groupes sont représentés en annexe section A.4.1. Si les déformées individuelles des pales sont peu perturbées (voir la deuxième annexe section A.4.2), il apparaît par contre que la dispersion est, elle, fortement modifiée et ne correspond plus à la théorie de Bloch. Cela confirme que la structure n'est plus vraiment périodique, même si un effet de repliement observé au-delà de la première zone de Brillouin semble toujours présent. On observe qu'il existe une importante variété de modes de pales que l'on classe empiriquement de la manière suivante :

- Des modes peu perturbés comme les modes à zéro diamètre nodal (voir les figures A.3 et A.4 de l'annexe).
- Les quasi-modes de Bloch dédoublés. C'est le cas des modes de pales à trois dia-

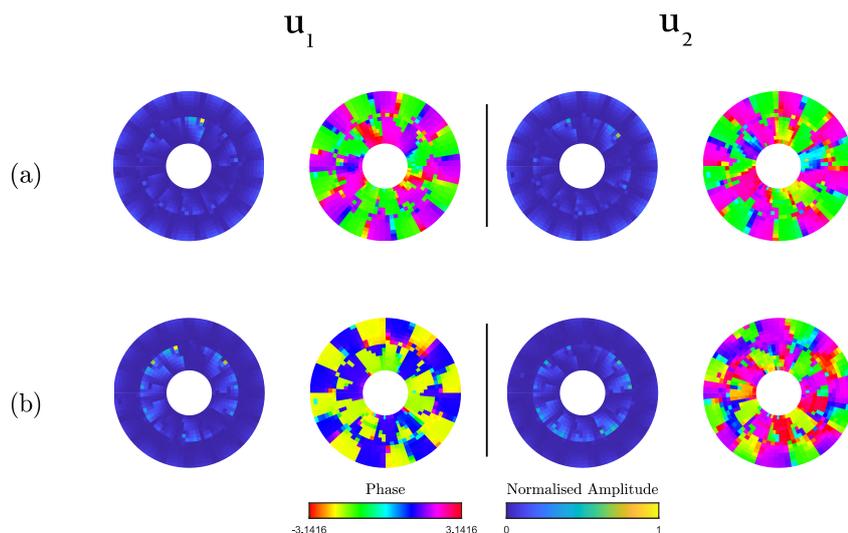


FIGURE 5.16 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des résonances des modes de pales à trois diamètres dont la dégénérescence a été levée sur le rouet endommagé. La différence entre les deux premières valeurs singulières est de -19.25 à 8665 Hz et -19.79 à 9049 Hz.

mètres nodaux, à 8865 Hz et 9049 Hz. Les deux premiers vecteurs singuliers à ces deux fréquences sont représentés sur la figure 5.16. La différence entre les valeurs singulières est de quasiment 20 dB ce qui confirme qu'un seul mode est présent à chacune de ces fréquences. On notera que le voile vibre également, le mode de pales à 3 diamètres nodaux se couplant bien à celui de voile à 8 diamètres nodaux puisque $8+3$ est égal à l'ordre de la symétrie, c'est-à-dire 11.

- Les modes localisés sur une des pales endommagées, qui peuvent se repérer sur la figure de dispersion comme les endroits où toutes les fréquences spatiales sont excitées (« Dirac spatial»). Ce phénomène de localisation est observé à 5583 Hz, 5666 Hz et 5726 Hz pour le même mode pales individuel (de torsion). Les vecteurs singuliers à ces fréquences sont représentés sur la figure 5.17.
- Les trois pales endommagées se couplent et forment des modes collectifs. Sur la figure 5.18 sont représentés les deux premiers vecteurs singuliers mettant en évidence la présence d'un mode à 8731 Hz où elles vibrent en phase, et d'un autre à 8982 Hz où elles vibrent en opposition de phase.

Enfin il existe des modes plus difficiles à classer avec des phases relativement irrégulièrement distribuées sur les pales. C'est par exemple le cas à 5809 Hz (figure 5.19).

5.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons étudié expérimentalement l'effet d'un endommagement modèle sur le pignon, puis d'endommagements réels sur un rouet. Nous avons observé que la méthode est suffisamment sensible pour détecter des modifications induites par la présence d'endommagements. L'approche acoustique permet de s'affranchir de modifications éventuelles de masse et de raideur pouvant être induites par des mesures en contact. Par ailleurs, si l'aspect matriciel de notre méthode devient moins indispensable dans le cas du pignon puisque la dégénérescence est levée, elle reste néanmoins avantageuse dans le cas du rouet où les modes sont beaucoup plus rapprochés et complexes. Enfin, comme il l'avait été montré précédemment, le réseau de haut-parleurs excite plus facilement les modes à

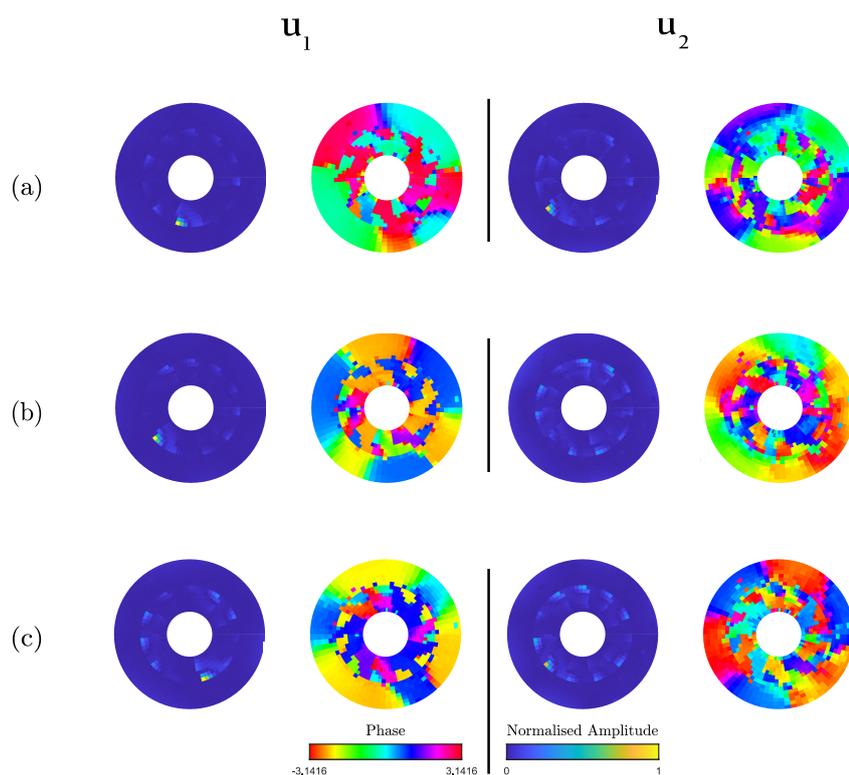


FIGURE 5.17 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des résonances où la vibration est localisée sur une pale. La différence entre les deux premières valeurs singulières est de 27.03 dB à 5583, 24.6dB à 5666 Hz et 14.9 dB à 5726 Hz.

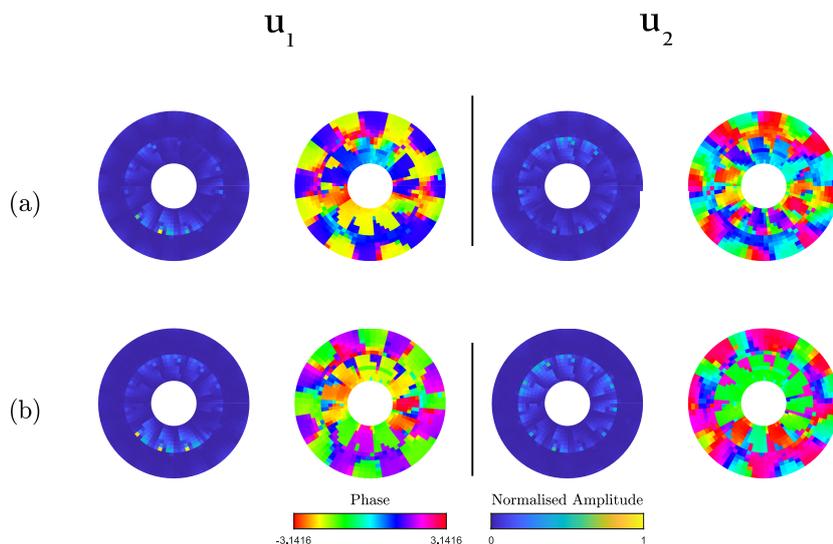


FIGURE 5.18 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 des résonances à 8731 Hz et 8982 Hz où la vibration est principalement localisée sur les trois pales endommagées qui forment des modes collectifs. La différence entre les deux premières valeurs singulières est de 15 dB à 8731 Hz et 9.59 dB à 8982 Hz ce qui confirme que seul \mathbf{u}_1 semble significatif.

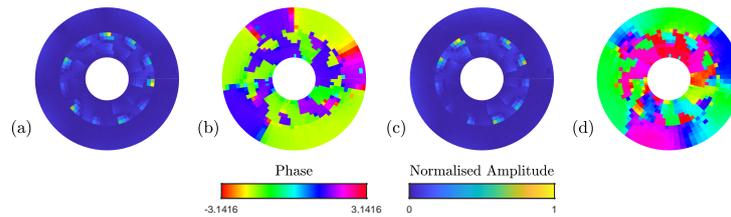


FIGURE 5.19 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 5809 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le rouet endommagé : amplitude (a) et phase (b) de \mathbf{u}_1 , amplitude (c) et phase (d) de \mathbf{u}_2 . Les valeurs singulières sont respectivement à -8.22 dB et -20.01 dB soit 11.79 dB de différence.

grands diamètres nodaux, et permet une analyse modale plus fine.

Chapitre 6

Contrôle du champ vibratoire

Sommaire

6.1	Introduction	111
6.2	Excitation et vecteurs singuliers	112
6.2.1	Excitation d'un vecteur singulier sur le pignon	112
6.2.2	Excitation d'un vecteur singulier sur le compresseur à 17 pales	114
6.3	Excitation contrôlée	114
6.3.1	Principe	116
6.3.2	Détermination des coefficients	117
6.3.3	Validation expérimentale sur le compresseur à 17 pales	118
6.3.4	Nombre de points de mesures nécessaires pour une maîtrise de l'excitation	120
6.4	Application au rouet à 11 pales	121
6.5	Conclusion	125

6.1 Introduction

Jusqu'à présent, nous avons exploité le couplage acousto-élastique entre le réseau de haut-parleurs et une pièce mécanique uniquement dans le but de réaliser l'analyse modale de cette dernière. Dans ce chapitre, nous souhaitons tirer profit de l'agilité du réseau de haut-parleurs de manière à générer un état vibratoire particulier sur la pièce mécanique. Cette étude permet d'appréhender de manière fine et concrète les états d'excitations possibles lorsque plusieurs modes existent à une fréquence donnée, c.-à-d. pour des fréquences dégénérées. Plus particulièrement, nous nous concentrons sur des états vibratoires particuliers : des états stationnaires, représentatifs des modes extraits par exemple d'une simulation aux éléments finis et des états progressifs qui correspondent par exemple aux champs de déplacement générés par les engrenages sur un pignon en rotation. Pour calculer la forme d'onde à émettre par les haut-parleurs pour réaliser une excitation particulière, nous nous inspirons d'une approche développée il y a plusieurs années à l'institut Langevin fondée sur la décomposition en valeurs et vecteurs singuliers de la matrice de transmission[99]. Nous l'adaptions à la matrice acousto-élastique mesurée sur nos systèmes, qui présentent un faible nombre de degrés de liberté (de modes) à une fréquence donnée. La méthode est appliquée sur le pignon et les rouets des chapitres précédents. Le chapitre débute par la démonstration de l'intérêt de travailler sur les vecteurs singuliers d'émission de la matrice de transmission. Puis nous nous fondons sur cette propriété pour engendrer des formes

contrôlées. Nous montrons que grâce à la SVD nous pouvons anticiper les états de vibration accessibles depuis le réseau de haut-parleurs. Nous proposons une étude quantitative pour estimer le nombre de haut-parleurs minimum nécessaire pour contrôler l'état de vibration. Nous terminons ce chapitre par l'application de cette approche au cas complexe du rouet de turbomoteur à 11 pales.

6.2 Excitation et vecteurs singuliers

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la décomposition en valeurs singulières de la matrice de transmission \mathbf{K} à une fréquence donnée peut s'écrire en fonction des valeurs et vecteurs singuliers (voir Eq. 2.31). Du fait de l'orthogonalité entre les vecteurs singuliers, la SVD peut s'écrire également sous la forme d'une équation aux valeurs singulières

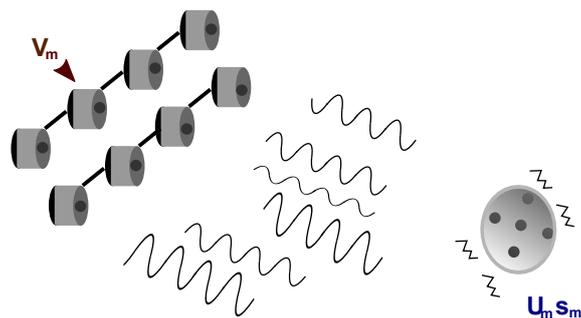
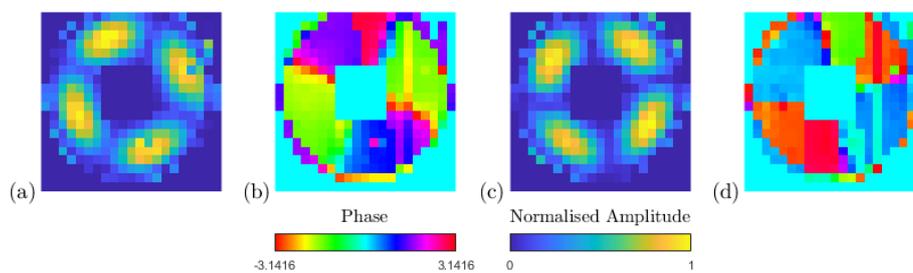
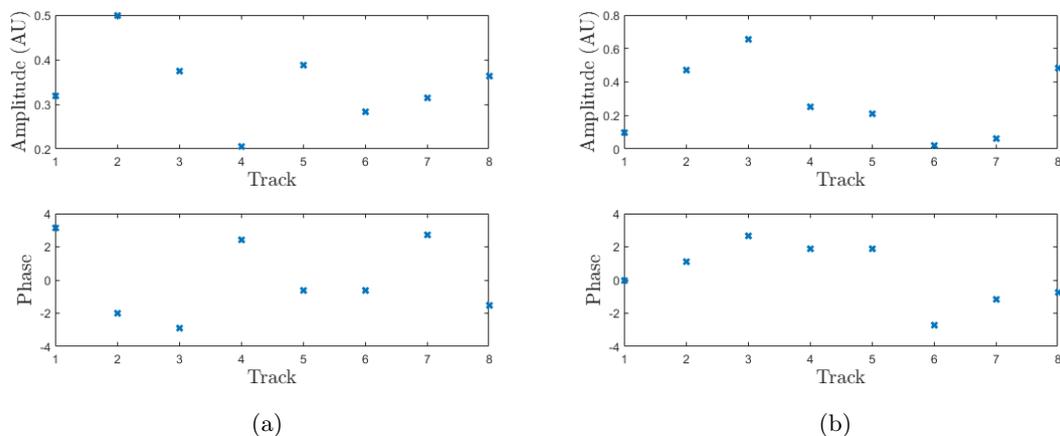
$$\mathbf{K}\mathbf{v}_n = \mathbf{u}_n s_n. \quad (6.1)$$

Cette équation peut s'interpréter de la manière suivante : dans le cas où le réseau de haut-parleurs émet le vecteur complexe \mathbf{v}_n (chaque élément du vecteur représente l'amplitude et la phase d'excitation d'un haut-parleur), le déplacement engendré sur le solide est égal au produit entre le vecteur singulier associé \mathbf{u}_n et un terme d'amplitude qui est la valeur singulière s_n . C'est pour cette raison que l'on a appelé les vecteurs singuliers \mathbf{u}_n et \mathbf{v}_n , les vecteurs singuliers de réception et d'émission respectivement. Ce principe a été validé sur le pignon et sur le rouet à 17 pales.

6.2.1 Excitation d'un vecteur singulier sur le pignon

Le dispositif est similaire à celui présenté dans la section du chapitre 2. La matrice acousto-élastique a été dans premier lieu être acquise comme dans les deux chapitres précédents. Après la décomposition en valeurs singulières, une résonance double a été repérée à 8809 Hz (voir la figure 3.6). Les deux premiers vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 ont été extraits. Dans le cas où, pour améliorer le rapport signal à bruit, l'acquisition de la matrice de transmission s'est faite à l'aide de la base d'émission de Hadamard, il est nécessaire de préalablement passer \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 en base canonique grâce à la matrice de passage de la base de Hadamard à la base canonique. Les amplitudes et les phases de \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 en fonction de l'indice du haut-parleur sont affichées dans la figure 6.3. Pour les émettre, il faut tout d'abord générer dans l'ordinateur qui pilote la carte multivoie un signal monochromatique dont la fréquence correspond à la fréquence de résonance, c.-à-d. ici, 8809 Hz. Ensuite, pour chaque haut-parleur, ce signal est multiplié par l'amplitude, et décalé d'un temps correspondant à la phase de l'élément du vecteur singulier associé au haut-parleur (voir la figure 6.3). Enfin les huit trains d'ondes sont émis simultanément par les huit haut-parleurs. Un schéma de cette deuxième étape est présenté sur la figure 6.1. Le champ de vibration est mesuré de manière synchronisée à l'aide du vibromètre laser. L'émission des trains d'onde simultanée est répétée pour chaque point de mesure. Les cartes en amplitude et en phase, déduites par transformée de Fourier sont visibles sur la figure 6.2.

Ces résultats sont comparés aux vecteurs \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 directement issus de la SVD de \mathbf{K} (voir la figure 6.3). Comme prévu, on observe un très bon accord entre les vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus par SVD et les champs obtenus physiquement après émission des vecteurs \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 . Notons qu'il faut que les conditions expérimentales restent identiques entre la phase d'acquisition de la matrice \mathbf{K} et la phase d'émission des vecteurs singuliers. C'est

FIGURE 6.1 – Schéma représentatif de l'étape d'émission d'un vecteur singulier \mathbf{v}_m .FIGURE 6.2 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 8890 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le pignon : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .FIGURE 6.3 – (a) vecteur singulier \mathbf{v}_1 à 8890 Hz pour 8 haut-parleurs et (b) vecteur singulier \mathbf{v}_2 à 8890 Hz pour 8 haut-parleurs.

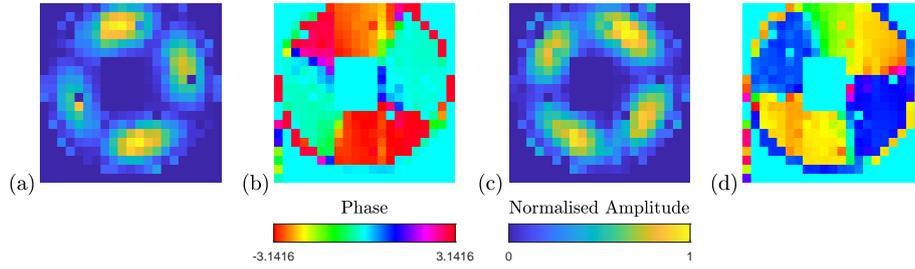


FIGURE 6.4 – Champs obtenus sur le pignon après émission des vecteurs singuliers \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 à 8890 Hz. (a) Amplitude et (b) phase du champ en émettant \mathbf{v}_1 ; (c) amplitude et (d) phase du champ en émettant \mathbf{v}_2 .

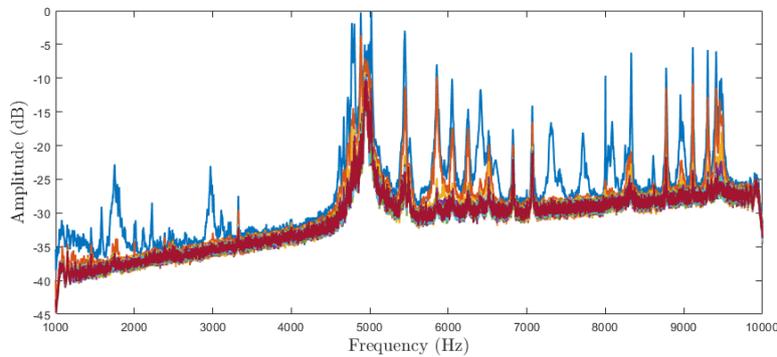


FIGURE 6.5 – Décomposition en valeurs singulières pour le rouet à 17 pales.

pourquoi en pratique, nous n'avons pas utilisé le jeu de données dont la figure 3.6 est issue mais celui provenant d'une nouvelle acquisition.

6.2.2 Excitation d'un vecteur singulier sur le compresseur à 17 pales

Puis, l'on a voulu vérifier si cet effet était également observé sur le compresseur à 17 pales. Comme pour le pignon, une nouvelle matrice acousto-élastique a d'abord été mesurée avec les huit haut-parleurs. Les huit valeurs singulières sont représentées sur la figure 6.5. On s'intéresse pour commencer à une résonance double correspondant à un mode de voile à trois diamètres, à 5852 Hz. Les deux vecteurs singuliers de réception \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 sont représentés sur la figure 6.6. Les vecteurs singuliers d'émissions associés, \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 , sont représentés sur la figure 6.7. Les résultats obtenus après émission de ces vecteurs singuliers sont représentés sur la figure 6.8. Les champs de vibrations \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 visibles sur la figure 6.6 sont bien reconnaissables, et il apparaît clairement en la comparant à la figure 6.8 qu'après émission avec les vecteurs singuliers ces champs vibratoires sont bien moins bruités.

6.3 Excitation contrôlée

Nous allons mettre à profit cette propriété des vecteurs singuliers d'émission de manière à manipuler le champ de vibration en cas de superposition de modes.

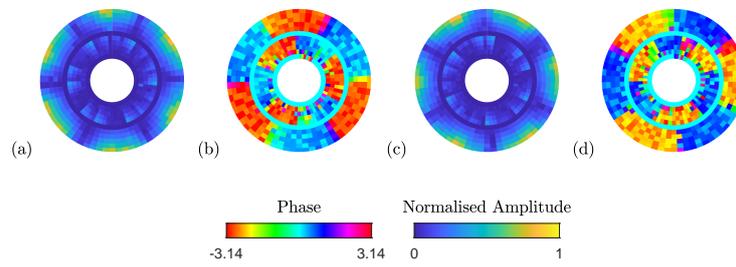


FIGURE 6.6 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 5852 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le rouet de 17 pales : amplitude (a) et phase (b) de \mathbf{u}_1 , amplitude (c) et phase (d) de \mathbf{u}_2 .

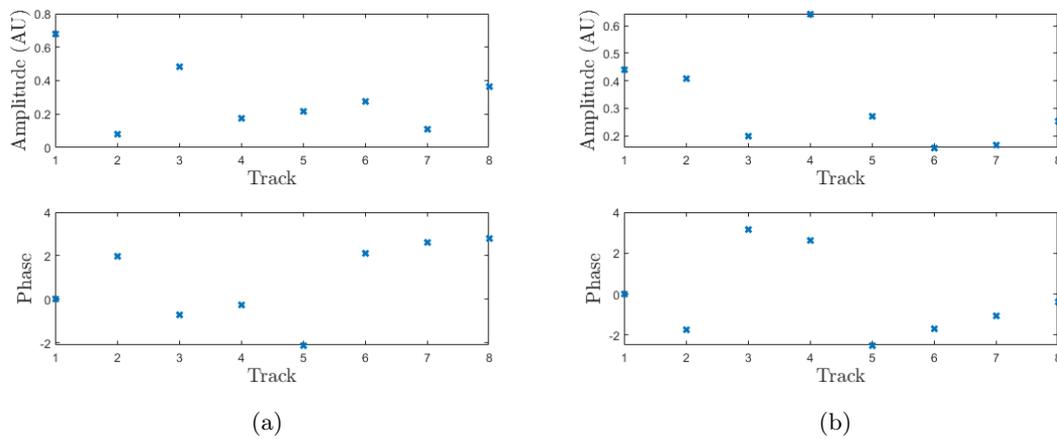


FIGURE 6.7 – Vecteurs singuliers \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 obtenus à 5852 Hz sur le rouet de 17 pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{v}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{v}_2 . Ils représentent l'amplitude relative et la phase à appliquer simultanément chaque voie (ici donc, chaque haut-parleur) en émettant un signal monochromatique à 5852 Hz pour susciter un champ de vibration \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 respectivement.

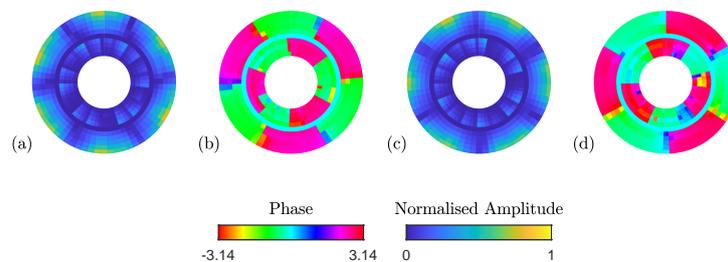


FIGURE 6.8 – Champs vibratoires obtenus sur le rouet à 17 pales après une émission des vecteurs singuliers \mathbf{v}_1 et \mathbf{v}_2 à 5852 Hz. (a) Amplitude et (b) phase du champ en émettant \mathbf{v}_1 ; (c) amplitude et (d) phase du champ en émettant \mathbf{v}_2 .

6.3.1 Principe

Du fait du nombre limité de modes N_s à une fréquence donnée, seules les N_s premières valeurs singulières sont significatives. Ainsi il est seulement possible de générer des champs de déplacements qui appartiennent au sous-espace vectoriel engendré par les N_s premiers vecteurs singuliers \mathbf{u}_n . En d'autres termes, le champ de déplacement $\tilde{\mathbf{q}}$ doit se mettre sous la forme

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{n=1}^{N_s} c_n \mathbf{u}_n, \quad (6.2)$$

où les coefficients complexes c_n se déduisent de la projection d'un champ cible \mathbf{q} sur les vecteurs \mathbf{u}_n c.-à-d.

$$c_n = \mathbf{u}_n^\dagger \mathbf{q}. \quad (6.3)$$

Nous allons maintenant calculer le champ $\tilde{\mathbf{e}}$ à émettre pour obtenir $\tilde{\mathbf{q}}$. Comme $\tilde{\mathbf{q}}$, il doit se décomposer sur un sous-espace vectoriel qui est cette fois-ci engendré par les N_s premiers vecteurs singuliers \mathbf{v}_n . Nous cherchons ainsi les N_s coefficients complexes d_n tels que

$$\tilde{\mathbf{e}} = \sum_{n=1}^{N_s} d_n \mathbf{v}_n. \quad (6.4)$$

et où les vecteurs $\tilde{\mathbf{e}}$ et $\tilde{\mathbf{q}}$ sont liés par la relation matricielle

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{q}}. \quad (6.5)$$

Grâce à la décomposition en valeurs singulières de \mathbf{K} [voir l'équation 2.29], l'équation précédente devient

$$\sum_{n=1}^{N_s} d_n s_n \mathbf{u}_n = \sum_{n=1}^{N_s} c_n \mathbf{u}_n. \quad (6.6)$$

En exploitant l'orthonormalité entre les vecteurs singuliers \mathbf{u}_n , il vient

$$d_n s_n = c_n, \quad (6.7)$$

et finalement le vecteur d'émission s'écrit

$$\tilde{\mathbf{e}} = \sum_n \frac{c_n}{s_n} \mathbf{v}_n. \quad (6.8)$$

On peut écrire l'équation précédente de la manière suivante

$$\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{K}}^{-1} \mathbf{q}. \quad (6.9)$$

où

$$\tilde{\mathbf{K}}^{-1} = \sum_{n=1}^{N_s} \frac{\mathbf{v}_n \mathbf{u}_n^\dagger}{s_n}.$$

Ainsi calculer l'équation (6.8) revient à effectuer la pseudo-inversion $\tilde{\mathbf{K}}^{-1}$ de \mathbf{K} sur le sous-espace signal constitué des N_s premiers vecteurs singuliers. Il faut noter que, pour que cela fonctionne, il faut que les coefficients c_n ne soient pas trop faibles, ou principalement associés au bruit. En pratique, dans nos structures, cela revient à considérer qu'il ne sera possible d'exciter que des champs ayant la même dépendance angulaire que certains des modes se superposant à la fréquence étudiée.

6.3.2 Détermination des coefficients

Sur le compresseur axial de 17 pales, il a été observé que les modes de pales et les modes de voile étaient bien dispersés, c'est à dire qu'une fréquence est associée à un seul nombre d'onde angulaire. Ainsi il y a au maximum deux valeurs singulières significatives avec des vecteurs singuliers associés qui présentent le même nombre d'onde angulaire. Dans le cas de résonances doubles, pour modifier les champs cibles tout en gardant les mêmes nombres d'ondes angulaires, nous choisissons d'engendrer des couples de formes d'onde soit stationnaires soit propagatifs.

Pour générer le couple de formes d'onde progressifs : un dans le sens horaire et l'autre dans le sens antihoraire, nous choisissons des champs cibles : soit en $e^{ik\theta}/r$, soit en $e^{-ik\theta}/r$. La dépendance en $1/r$ qui privilégie les contributions des composantes des vecteurs singuliers de petits rayons, permet d'obtenir des expressions particulièrement simples pour les coefficients c_1^+ et c_2^+ nécessaires à la reconstruction qui sont données par :

$$c_n^+ = \iint e^{ik\theta} u_n^*(\theta, r) dr d\theta. \quad (6.10)$$

On reconnaît l'expression du coefficient de Fourier moyennée sur les rayons $\mathcal{C}_{u_n}[k]$ associé à la composante k de la transformée de Fourier de u_n . Ainsi,

$$c_n^+ \propto \mathcal{C}_{u_n}[k]. \quad (6.11)$$

De la même manière, on aura pour la forme en $e^{-ik\theta}/r$

$$c_n^- \propto \mathcal{C}_{u_n}[-k]. \quad (6.12)$$

Pour générer le couple de formes d'onde stationnaires, nous choisissons comme champ cible un champ dont la dépendance angulaire est soit en $\sin(\theta)/r$, soit en $\cos(\theta)/r$. Les coefficients c_1^{\sin} et c_2^{\sin} nécessaires à la reconstruction de la forme en sinus sont alors donnés par

$$c_n^{\sin} = \iint \sin(k\theta) u_1(\theta, r) dr d\theta.$$

L'expression précédente peut s'écrire en fonction des coefficients de Fourier $\mathcal{C}_{u_n}[k]$ et $\mathcal{C}_{u_n}[-k]$,

$$c_n^{\sin} \propto \mathcal{C}_{u_n}[k] - \mathcal{C}_{u_n}[-k].$$

De la même manière, on aura pour la forme en cosinus

$$c_n^{\cos} \propto \mathcal{C}_{u_n}[k] + \mathcal{C}_{u_n}[-k].$$

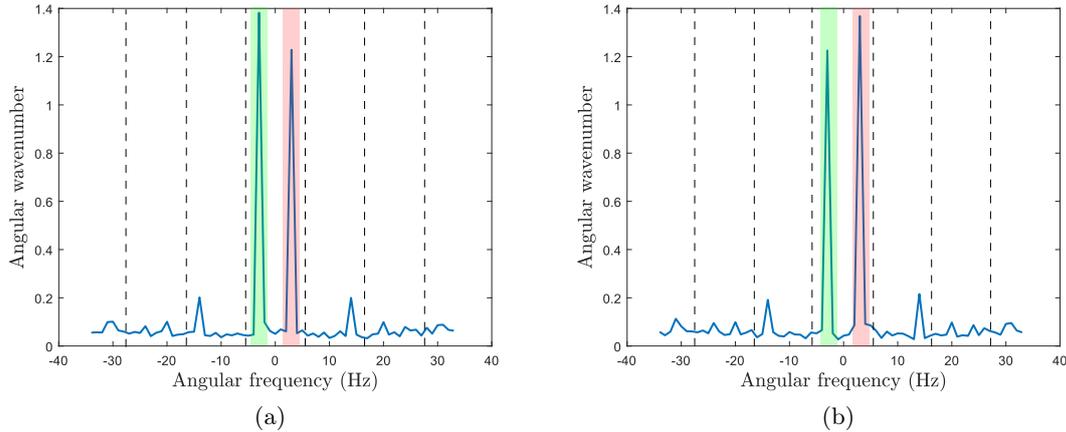


FIGURE 6.9 – Amplitude des transformées de Fourier angulaire de (a) \mathbf{u}_1 et de (b) \mathbf{u}_2 à 5852 Hz acquises sur le rouet à 17 pales.

6.3.3 Validation expérimentale sur le compresseur à 17 pales

Le principe établi dans la section précédente est validé sur le compresseur à 17 pales d'une part pour contrôler les vibrations du voile et d'autre part pour contrôler les vibrations des pales.

6.3.3.1 Vibration du voile

Le mode à 5852 Hz est clairement un mode de voile double. Les transformées de Fourier angulaire de \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 à 5852 Hz sont affichées sur les figures 6.9a (a) et (b). Les composantes associées aux nombres d'ondes angulaires -3 et 3 sont surlignées en vert et rose respectivement. Comme les deux vecteurs singuliers à cette fréquence sont proches des deux vecteurs stationnaires, nous avons souhaité exciter plutôt le couple de déformées horaire et antihoraire pour que la différence soit visible. A partir de ces composantes et des équations (6.8), (6.11) et (6.12), nous avons calculé les émissions nécessaires pour obtenir ces déformées. Les champs mesurés après émission sont représentés sur la figure 6.10. On observe bien sur les cartes de phase, des modes à 3 diamètres avec des variations continues et périodiques en fonction de l'angle θ qui correspondent à des ondes se propageant avec vitesses de phase opposées.

6.3.3.2 Vibration des pales

Après avoir montré le bon fonctionnement de l'excitation contrôlée sur les modes de voile, nous avons voulu vérifier la validité de la méthode pour des modes de pales. Nous avons choisi une résonance à 4885 Hz, qui est toujours à trois diamètres mais qui implique cette fois-ci principalement les pales. Les deux premiers vecteurs singuliers sont représentés sur la figure 6.11. Comme on le voit sur les figures 6.12 et 6.13, la méthode permet bien de générer des paires de modes stationnaires ou propagatifs.

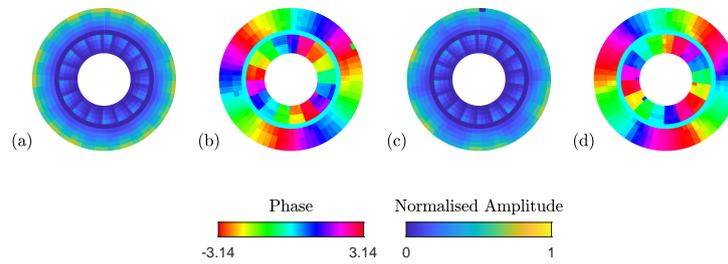


FIGURE 6.10 – Champs mesurés sur le rouet à 17 pales après émission des signaux complexes $\tilde{\mathbf{e}}$ déduits de l'équation (6.8) de manière à générer un champ horaire ou un champ antihoraire. (a) Amplitude et (b) phase pour l'excitation horaire ; (c) amplitude et (d) phase pour l'excitation antihoraire.

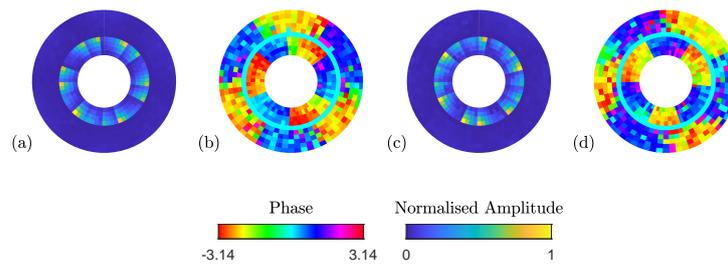


FIGURE 6.11 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 mesurés à 4885 Hz sur le rouet de 17 pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .

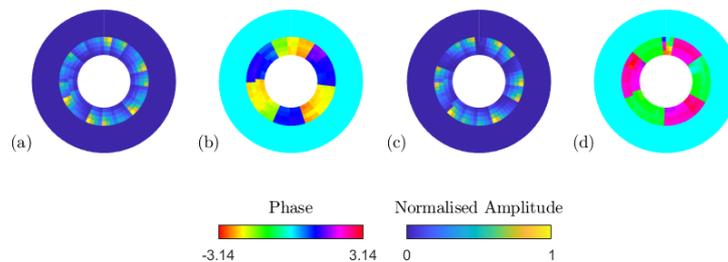


FIGURE 6.12 – Champs mesurés sur le rouet à 17 pales après émission des signaux complexes $\tilde{\mathbf{e}}$ déduits de l'équation (6.8) de manière à générer des champs stationnaires (en sinus et cosinus) à 4885Hz. (a) Amplitude et (b) phase du premier champ (en cosinus) ; (c) amplitude et (d) phase du second champ (en sinus).

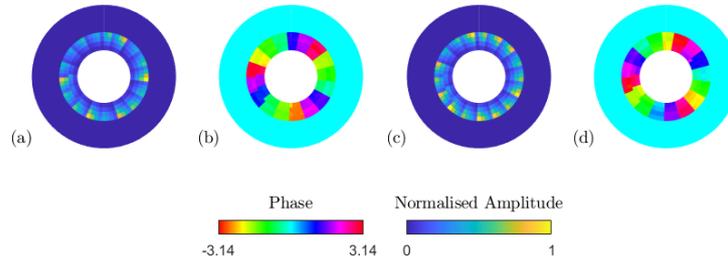


FIGURE 6.13 – Champs mesurés sur le rouet à 17 pales après émission des signaux complexes $\tilde{\mathbf{e}}$ déduits de l'équation (6.8) de manière à générer des champs horaires ou antihoraires à 4885Hz. (a) Amplitude et (b) phase du champ horaire ; (c) amplitude et (d) phase du second champ antihoraire.

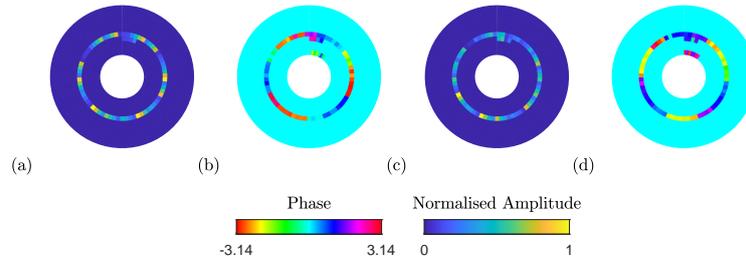


FIGURE 6.14 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 obtenus à 4885 Hz à partir de huit excitations acoustiques sur le rouet de 17 pales en ne mesurant qu'une ligne : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .

6.3.4 Nombre de points de mesures nécessaires pour une maîtrise de l'excitation

Dans les chapitres précédents, de nombreux points de mesures ont été utilisés afin de bien observer les déformées modales. Dans le cas de l'utilisation de la matrice acousto-elastique pour contrôler le champ vibratoire, il n'est pas nécessaire d'avoir autant de points de mesures. Nous avons limité les mesures à un cercle passant par l'extrémité des pales, zones de forts déplacements, et avons étudié la matrice ainsi réduite à la fréquence 4885Hz. En pratique, le formalisme présenté précédemment reste identique. Seule l'expression du produit scalaire change. Ainsi l'équation (6.10) devient

$$c_n^+ = \int e^{ik\theta} u_n^*(\theta, r_0) d\theta.$$

Dans ce cas, les vecteurs singuliers à 4885 Hz sont représentés pour cette mesure sur la figure 6.14. Ils sont similaires à ceux présentés sur la figure 6.11, ce qui semble indiquer que même en utilisant quatre fois moins de points la matrice de transmission porte les mêmes informations.

Il est aussi vérifié que même en utilisant seulement ce cercle de points la qualité de la

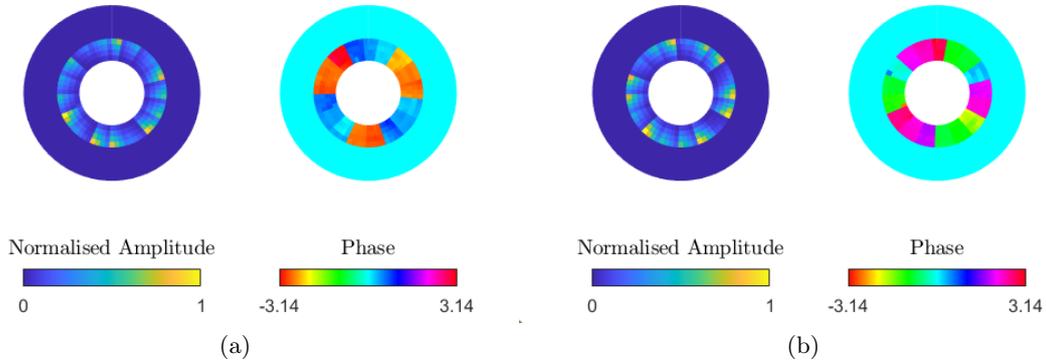


FIGURE 6.15 – Champs mesurés sur le rouet à 17 pales après une émission calculée à partir de matrice de transmission sur un cercle à 4885Hz pour engendrer une déformée stationnaire. (a) Amplitude et (b) phase du premier champ ; (c) amplitude et (d) phase du second champ.

génération de déformées stationnaires (voir la figure 6.15) est similaire à celle obtenue lorsque tous les points du rouet sont utilisés. Ce résultat n'est pas étonnant. En effet, le champ cible dans la partie précédente ne présentait pas de dépendance radiale mais juste une dépendance angulaire.

De manière à mieux évaluer l'impact du nombre de points de mesures, les amplitudes et les phases des vecteurs d'émission \vec{e} pour exciter à 4885 Hz un champ stationnaire (cosinus) à 3 diamètres pour le rouet à 17 pales sont affichées lorsque tous les points de mesures sont utilisés (comme dans la section précédente) ou seuls 1, 2, 3 ou 4 points par pales sur un même cercle sont exploités. On observe qu'un seul point par pale est suffisant pour correctement estimer le vecteur d'émission.

Afin de mieux étudier l'effet de taille la matrice mesurée \mathbf{K} , cette fois dans sa dimension d'émission (nombre de haut-parleurs), un nouvel indicateur est utilisé. En effet, en changeant le nombre de haut-parleurs utilisés il n'est plus possible de comparer les vecteurs d'émission qui ne sont plus de même dimension. Après calcul des vecteurs \vec{e} à émettre pour exciter un couple de champs cibles donné en ne prenant que certains haut-parleurs, ceux-ci sont réémis synthétiquement. La réémission synthétique consiste à appliquer les vecteurs \vec{e} sur la matrice \mathbf{K} déjà mesurée, au lieu de faire réémettre chaque haut-parleur. Cela revient à calculer $\mathbf{K}\vec{e}$. Le champ synthétique obtenu est comparé aux résultats expérimentaux obtenus avec huit haut-parleurs en calculant leur corrélation. C'est ce qui est fait avec les vecteurs propagatifs à trois diamètres sur la figure 6.17.

Les valeurs moyennes convergent à partir de 5 haut-parleurs.

6.4 Application au rouet à 11 pales

Les deux cas exposés précédemment correspondaient à des résonances doubles avec le même nombre d'onde angulaire. Lors de mesures sur le rouet de 11 pales sur le banc expérimental monté chez SHE, il nous est paru intéressant d'étudier le cas de modes se superposant mais à nombre de diamètres différents. Puisque nous ne nous intéressons qu'aux modes

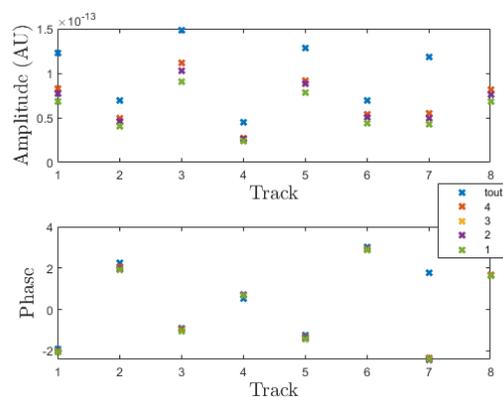


FIGURE 6.16 – Comparaison des amplitudes et phases calculées à partir de la SVD effectuée sur différents nombres de points par pales alignés sur un cercle pour exciter un cosinus de 3 diamètres à 4885 pour le rouet de 17 pales.

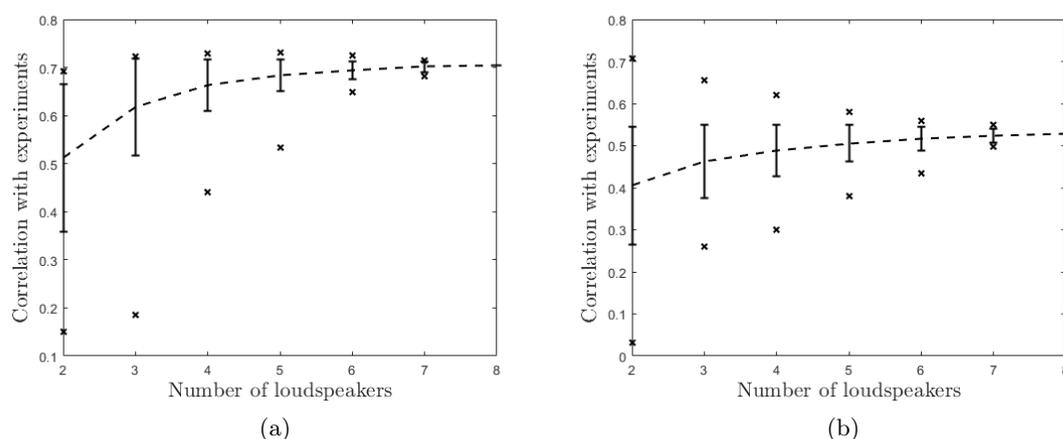


FIGURE 6.17 – Moyenne et écart type des coefficients de corrélations obtenus pour chaque combinaison d'un certain nombre de haut-parleurs pour (a) le mode en sens horaire (b) le mode antihoraire. La moyenne est représentée par la ligne en pointillés, l'écart type par les lignes en continu, et les valeurs extrêmes par les croix.

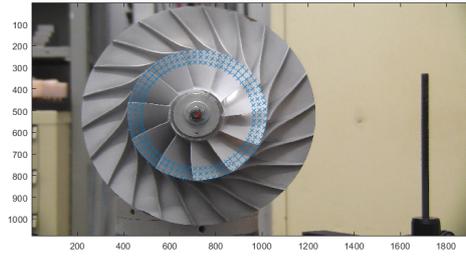


FIGURE 6.18 – Photographie du rouet et du maillage utilisé lors de la mesure des réponses acousto-élastiques.

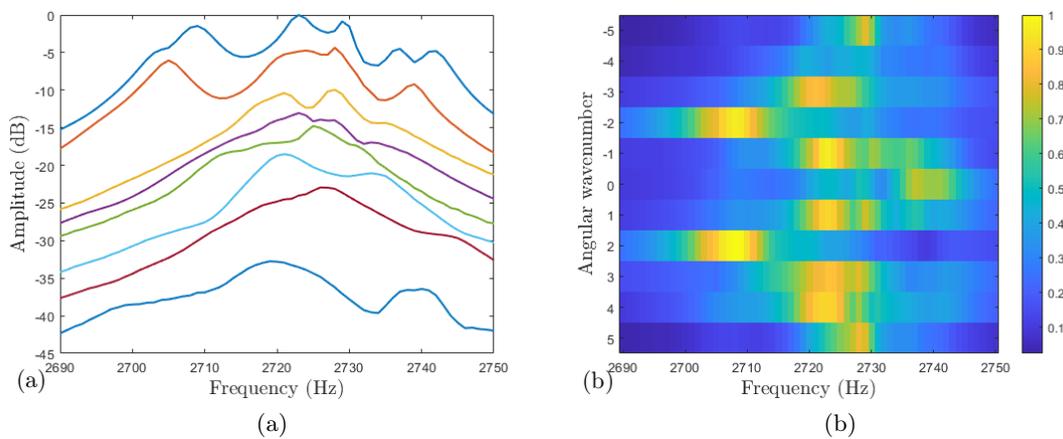


FIGURE 6.19 – (a) Valeurs singulières de la matrice de transmission et (b) Dispersion angulaire estimée à partir de D_s^6 entre 2690 Hz et 2750 Hz pour le rouet à 11 pales.

de pales superposés et que nous disposions de peu de temps de mesure, l'acquisition de la matrice s'est faite sur seulement trois rayons où l'amplitude de déplacement est maximale et seulement entre 1kHz à 5kHz afin d'augmenter l'amplitude de vibration dans cette gamme de fréquences. Angulairement, 66 points étaient mesurés. Une photo du rouet où sont superposés les points de mesures choisis pour cette expérience est présentée sur la figure 6.18. La décomposition en valeurs singulières ainsi que la transformée de Fourier angulaire des vecteurs singuliers associés sont représentés sur la figure 6.19. Puisque les valeurs singulières sont difficilement discernables, de manière arbitraire les six premiers vecteurs singuliers ont été considérés pour estimer la dispersion angulaire grâce à $D_s^6(k)$. Sur l'estimateur de la dispersion, on observe clairement une résonance double à 2708 Hz avec deux diamètres. Plus intéressante est la superposition de plusieurs nombres d'onde entre 2718 Hz et 2730 Hz. En effet, comme le cas de la manipulation de résonances doubles a déjà été traité dans la section précédente, on s'intéresse ici à la fréquence 2720 Hz où au moins deux ($k = 1$ et $k = 3$) nombres d'ondes angulaires sont excités. Les deux premiers vecteurs singuliers ainsi que leurs transformées de Fourier sont représentés figure 6.20 et figure 6.21, respectivement. Cette fois cependant, les vecteurs singuliers suivants peuvent également être significatifs. On se rend compte que les vecteurs singuliers ne permettent pas de dissocier les modes de Bloch, c-à-d des modes qui présentent un unique nombre d'onde fondamental dans la première zone de Brillouin. On applique alors le traitement présenté dans la section 6.3.2 pour exciter les 2 modes stationnaires dit en cosinus et en

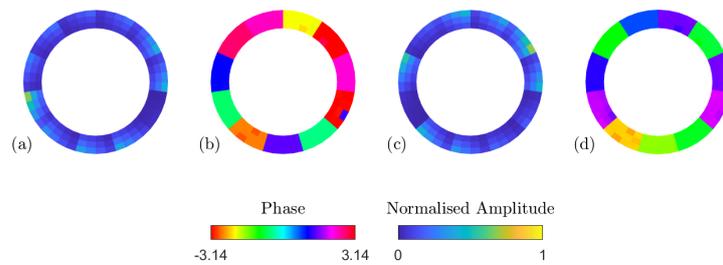


FIGURE 6.20 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 mesurés à 2720 Hz sur le rouet de 11 pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .

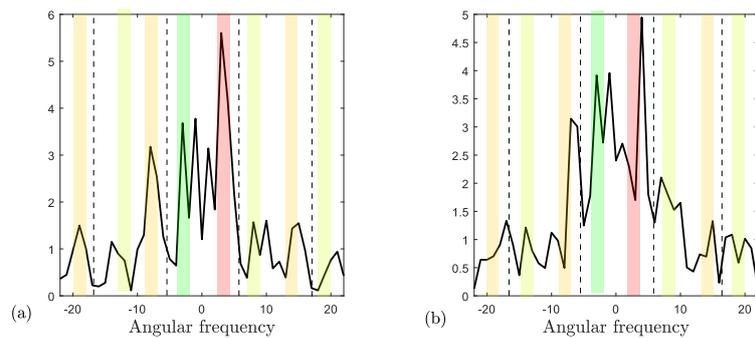


FIGURE 6.21 – Valeurs absolues des transformées de Fourier angulaire de (a) \mathbf{u}_1 et (b) \mathbf{u}_2 . Les nombres d'ondes angulaires associés aux modes à trois diamètres sont mis en valeur en rose (fondamental) et orange (pseudo-harmoniques) pour la partie progressive et vert (fondamental) et vert clair (pseudo-harmoniques) pour la partie régressive.

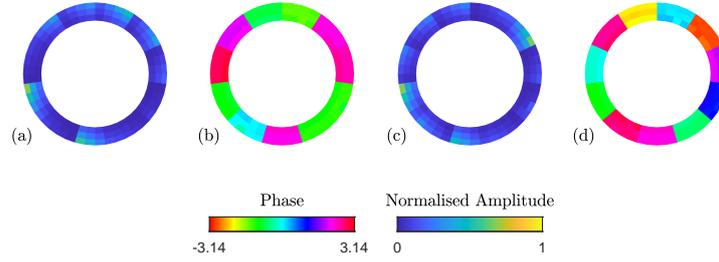


FIGURE 6.22 – (a) Amplitude et (b) phase de $\tilde{\mathbf{q}}_{cos}$ synthétique à 2720 Hz. (c) Amplitude et (d) phase de $\tilde{\mathbf{q}}_{sin}$ synthétique à 2720 Hz.

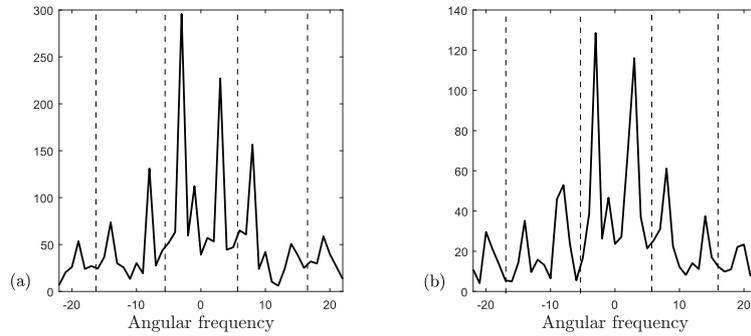


FIGURE 6.23 – Transformées de Fourier angulaire de (a) $\tilde{\mathbf{q}}_{cos}$ synthétique et (b) $\tilde{\mathbf{q}}_{sin}$ synthétique.

sinus qui présentent trois diamètres. A partir de l'analyse de la courbe de dispersion, nous estimons qu'il y a 5 valeurs singulières significatives. Nous allons donc utiliser les 5 premiers couples de valeurs singulières/vecteurs singuliers pour engendrer le champ cible ($N_s = 5$). Il est possible d'estimer le résultat escompté c-à-d les vecteurs $\tilde{\mathbf{q}}_{cos}$ et $\tilde{\mathbf{q}}_{sin}$ grâce à des réémissions synthétiques. Ces vecteurs ainsi que leurs transformées de Fourier angulaires sont représentés sur les figures 6.22 et 6.23, respectivement.

Les vecteurs $\tilde{\mathbf{q}}$ ainsi obtenus semblent bien avoir diminué l'amplitude des composantes liées relativement à celles-ci, ce que l'on peut considérer comme une sorte de filtrage spatial. Cependant il est visible que les composantes parasites n'ont pas été totalement éliminées, ce qui pourrait s'expliquer par la faible étendue spatiale du réseau. De meilleurs résultats seraient sûrement obtenus en augmentant sa taille. Nous avons ensuite cherché à mesurer ces champs expérimentalement.

Par manque de temps, il n'a été possible d'émettre que $\tilde{\mathbf{e}}_{cos}$ correspondant au cosinus. Le résultat de l'émission représenté sur la figure 6.24 est bien similaire à celui de la figure 6.23(a), et met en évidence le léger filtrage spatial obtenu par rapport aux vecteurs singuliers représentés sur la figure 6.20.

6.5 Conclusion

Dans les chapitres précédents, seuls les vecteurs singuliers de réception étaient exploités. Dans ce chapitre, nous avons mis en lumière le rôle des vecteurs singuliers d'émission \mathbf{v}_n

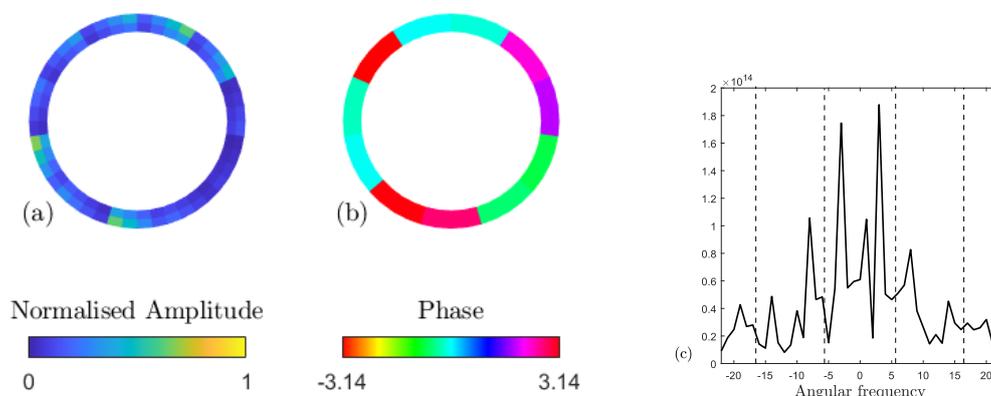


FIGURE 6.24 – (a) amplitude et (b) phase du champ après émission de $\tilde{\mathbf{e}}_{cos}$, (c) spectre angulaire associé.

en particulier dans le cas de modes superposés. En effet, nous avons vérifié sur le pignon et sur le rouet à 17 pales que la réémission des vecteurs singuliers \mathbf{v}_n permet, comme attendu, d'engendrer un champ vibratoire proche du vecteur singulier associé \mathbf{u}_n . Ce résultat est à la base du contrôle acoustique de vibrations où le champ souhaité est tout d'abord projeté sur les vecteurs singuliers de réception associés aux valeurs singulières significatives. Ensuite, via une pseudo inversion fondée l'inversion des valeurs singulières, les amplitudes complexes d'excitation de chaque haut-parleur ont été estimées. Cette approche a été validée dans le cas de résonances doubles pour des modes de voile puis de pales du rouet à 17 pales. Puis, nous avons étudié la qualité de la génération en fonction du nombre de points de contrôle et du nombre de haut-parleur. Enfin, nous avons appliqué avec succès ces méthodes d'excitation au cas plus complexe des modes de pales du rouet à 11 pales.

Conclusion générale et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons exploité un dispositif acousto-élastique adapté pour l'analyse modale matricielle sans contact. Des matrices de transmission acousto-élastiques ont été mesurées sur diverses pièces, permettant d'effectuer des analyses fines de leur comportement vibratoire. En comparant le cas d'une plaque encastree et d'une plaque libre, il a été démontré que la décomposition en valeurs singulières de cette matrice permettait de détecter des résonances doubles. Nous l'avons ensuite mesurée sur différentes pièces de turbomoteurs, toutes présentant des symétries de rotation continues ou discrètes.

Sur un pignon, pièce présentant au premier ordre une symétrie de rotation continue, le dispositif permet bien l'analyse des modes dégénérés. Des simulations ont préalablement permis de valider l'approche grâce à l'étude des modes et de leur rayonnement acoustique. Sur la gamme de fréquence étudiée, seul un mode dont le déplacement est quasiment contenu dans le plan n'est pas détecté. Des comparaisons ont été faites avec les mesures réalisées à l'aide d'un marteau d'impact. Celles-ci offrent la possibilité de détecter de plus faibles levées de dégénérescence, en revanche, nous avons pu observer que l'excitation acoustique permet de détecter un plus grand nombre de modes.

Sur des structures à symétrie de rotation discrètes, l'architecture des modes propres a été anticipée à partir du théorème de Bloch. L'exemple d'un pignon évidé en trois endroits permet d'illustrer l'effet d'une symétrie discrète perturbative. Dans ce cas, les modes propres restent similaires et l'on observe juste une levée de dégénérescence pour ceux dont le nombre de diamètres est proportionnel à l'ordre de la symétrie (divisé par deux dans le cas d'un ordre de symétrie pair).

Puis, le couplage de pales sur des rouets monoblocs a été étudié pour illustrer une discrétisation non perturbative ainsi que le couplage périodique de résonateurs. Les modes collectifs de pales ont été étudiés, à la fois sur un rouet dit «accordé» présentant une symétrie discrète d'ordre 11 et sur un rouet dit «désaccordé» de symétrie discrète d'ordre 1.

L'effet d'endommagement sur le comportement vibratoire a ensuite été étudié, toujours grâce à notre matrice acousto-élastique et à des simulations. Ainsi, nous avons pu exprimer l'effet d'un défaut local agissant de manière perturbative (ne modifiant pas la forme des modes) sur les masses et raideurs modales des modes et, par extension, sur les fréquences de résonances des modes. Cet effet a été confirmé par des mesures réalisées sur le pignon auquel une masse a été ajoutée. L'approche acousto-élastique présente alors l'avantage de ne pas modifier la mesure. L'axe de la masse peut être déterminé grâce à l'observation des modes. Puis, l'observation d'un endommagement contrôlé est faite sur le rouet.

Enfin, nous avons utilisé le dispositif pour manipuler le champ vibratoire à une fréquence donnée. Cela n'est possible qu'en cas de superposition modale. Nous avons montré qu'il est alors possible d'exciter des champs stationnaires ou propagatifs sur un rouet peu dispersé. Nous avons également montré que cela permet d'effectuer un filtrage spatial en cas de

superposition de modes de pales avec des nombres d'ondes angulaires différent.

Il reste néanmoins des aspects qui doivent être approfondis. Premièrement, si les simulations et les résultats expérimentaux confirment l'intérêt du réseau utilisé, d'autres configurations pourraient être envisagées, comme des configurations sphériques afin d'améliorer la diversité spatiale des sources. Notamment, il serait intéressant d'en évaluer l'efficacité sur l'excitation des modes de pales. Dans la même optique, des études expérimentales plus quantitatives du rayonnement des structures pourraient être effectuées. Deuxièmement, la bande fréquentielle d'étude pourrait être augmentée afin de voir si la méthode reste valable hors du domaine audible, à plus haute fréquence par exemple. Troisièmement, pour quantifier les légères levées de dégénérescence détectées au marteau sur le pignon, il pourrait être envisagé d'utiliser les informations spatiales, notamment au niveau des déphasages, pour essayer de calculer précisément les fréquences de résonances des deux modes. Cela pourrait éventuellement approfondir les prédictions des fréquences de résonances des modes lorsque les pièces tournent. Il pourrait également être intéressant de reproduire les mesures élasto-élastiques en optimisant les points d'impacts. Quatrièmement, il serait pertinent d'utiliser la réémission sélective à plusieurs fréquences afin d'obtenir plus de degrés de liberté sur la génération des formes spatiales à un instant donné. On peut noter que les structures symétriques ne sont peut-être pas le meilleur choix pour cela, puisque les possibilités d'excitation spatiale sont limitées par la symétrie. Cela pourrait être plus intéressant dans des structures complexes ou chaotiques par exemple. Cinquièmement, il serait intéressant de voir si d'autres configurations du réseau permettraient d'obtenir de meilleurs résultats pour le contrôle des vibrations. Enfin, pour ce qui est de l'étude d'endommagements, de nouvelles mesures permettraient d'estimer la sensibilité de la méthode. Il serait également utile d'étudier l'effet d'un changement local à la fois de masse et de raideur (comme une incision par exemple), afin de vérifier comme on s'y attend si la localisation de l'axe de l'endommagement reste valable dans ce cas. Il serait aussi envisageable d'inclure les aspects radiaux pour, peut-être, localiser l'endommagement.

Annexe A

Annexes

A.1 H dans la base des modes non perturbés

Comme \mathbf{H} est invariant par la transformation \mathbf{T} on a

$$\mathbf{HT} = \mathbf{TH}. \quad (\text{A.1})$$

Ainsi les vecteurs propres de \mathbf{H} sont forcément de la forme (4.4). Or, \mathbf{H} peut s'écrire en fonction de ses vecteurs propres $\mathbf{w}_{k,\gamma}$ et valeurs propres $\omega_{k,\gamma}^2$

$$\mathbf{H} = \sum_{k,\gamma} \mathbf{w}_{k,\gamma}^H \omega_{k,\gamma}^2 \mathbf{w}_{k,\gamma} \quad (\text{A.2})$$

où les vecteurs propres sont donc donnés par

$$\mathbf{w}_{k,\gamma} = e^{ik\theta} \sum_{\nu} \mathbf{a}_{k,\nu} e^{-i\nu N\theta}.$$

La décomposition harmonique de \mathbf{H} est donc

$$\mathbf{H}(\theta_{out}, \theta_{in}) = \sum_{k,\gamma,\nu,\nu'} e^{i(k\theta_{out} - i\nu N\theta_{out})} e^{-i(k\theta_{in} - i\nu' N\theta_{in})} \omega_{k,\gamma}^2 \mathbf{a}_{k,\nu}^H \mathbf{a}_{k,\nu'}. \quad (\text{A.3})$$

On calcule maintenant l'élément h_{k_o, k_i} (voir)

$$h_{k_o, k_i} = \int e^{-ik_o\theta_o} \mathbf{H}(\theta_o, \theta_i) e^{ik_i\theta_i} d\theta_o d\theta_i \quad (\text{A.4})$$

En injectant (A.3) dans (A.4), il vient

$$h_{k_o, k_i} = \int \sum_{k,\gamma,\nu,\nu'} e^{i([k-k_o]\theta_o - i\nu N\theta_o)} e^{-i([k-k_i]\theta_i - i\nu' N\theta_i)} \omega_{k,\gamma}^2 \mathbf{a}_{k,\nu}^H \mathbf{a}_{k,\nu'} d\theta_o d\theta_i.$$

Après intégration sur θ_o et θ_i , l'élément h_{k_o, k_i} s'écrit de la manière suivante

$$h_{k_o, k_i} = \sum_{k, \gamma, \nu, \nu'} \delta[k - k_i - \nu'N] \delta[k - k_o - \nu N] \omega_{k, \gamma}^2 \mathbf{a}_{k_o + \nu N, \nu}^H \mathbf{a}_{k_i - \nu'N, \nu'}, \quad (\text{A.5})$$

où $\delta[k] = 1$ si $k = 1$ et 0 autrement.

A.2 Modes de pales

Pour commencer, on exprime les vibrations correspondant aux pales en fonction de l'indice q compris entre 0 et $N - 1$ de chaque pale en réécrivant l'équation 4.8 en exprimant la variable θ comme $\theta = q\Delta\theta + \delta\theta$.

$$\varphi_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \theta, z) = \mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, q\Delta\theta + \delta\theta, z) e^{ik(q\Delta\theta + \delta\theta)}, \quad (\text{A.6})$$

Puisque la fonction f est définie périodique en $\Delta\theta$, on a $\mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, q\Delta\theta + \delta\theta, z) = \mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z)$. Ainsi on peut réécrire

$$\varphi_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \theta, z) = \mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z) e^{ik\delta\theta} e^{ikq\Delta\theta}, \quad (\text{A.7})$$

Pour faire apparaître des solutions stationnaires où la phase est continue sur chaque pale, il est avantageux que $\mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z) e^{ik\delta\theta}$ et $\mathbf{f}_{-\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z) e^{-ik\delta\theta}$ soient réels et égaux.

On voit alors que cela implique que

$$\mathbf{f}_{-\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z) = \mathbf{p}_{\mathbf{l}, \mathbf{k}}(r, \delta\theta, z) e^{-ik\delta\theta} \quad (\text{A.8})$$

et

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}, \mathbf{l}}(r, \delta\theta, z) = \mathbf{p}_{\mathbf{l}, \mathbf{k}}(r, \delta\theta, z) e^{ik\delta\theta} \quad (\text{A.9})$$

où \mathbf{p} est une fonction réelle symbolisant en quelque sorte le mode individuel de chaque pale. On voit bien que cela permet toujours de vérifier $\mathbf{f}_{\mathbf{l}, \mathbf{m}}(r, \theta, z) = \mathbf{f}_{-\mathbf{l}, -\mathbf{m}}^*(r, \theta, z)$.

A.3 Couplage entre modes de pales et modes de voiles

Un moyen de prendre en compte ce couplage est d'exprimer le système en fonction des fréquences propres des pales et du disque seul. Ainsi, pour un mode collectif de pales particulier $\mathbf{g}_{\mathbf{p}}$ (\mathbf{p} étant une variable rassemblant \mathbf{k} et \mathbf{l}) et un mode de voile particulier $\mathbf{d}_{\mathbf{v}}$, le système peut s'écrire en prenant en compte des coefficients de couplage β de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} \omega_p & \beta_{p,v} \\ \beta_{p,v} & \omega_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{g}_{\mathbf{p}} \\ \mathbf{d}_{\mathbf{v}} \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

Si l'on cherche à exprimer les valeurs et vecteurs propres du système couplé en fonction du système découplé, on peut commencer par chercher les valeurs propres, qui représenteront les nouvelles fréquences propres du système couplé. Il est alors possible de montrer que :

$$\omega_{p,v\pm} = \frac{\omega_p + \omega_v}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega_p - \omega_v)^2 + \beta_{p,v}^2}{2}} \quad (\text{A.11})$$

Cette expression fait bien apparaître l'appropriation fréquentielle (fréquence temporelle) nécessaire au couplage : si $\omega_p - \omega_v$ est grand par rapport à β , le terme de couplage sera négligeable et le comportement du système couplé semblable à celui du système découplé. A l'inverse, si les deux fréquences sont proches et donc que $\omega_p - \omega_v$ tend vers 0, les fréquences propres du système couplé pourront s'écrire comme :

$$\omega_{p,v\pm} = \frac{\omega_p - \omega_v}{2} \pm \frac{\beta_{p,v}}{2} \quad (\text{A.12})$$

Les deux fréquences seront alors espacées de $\beta_{p,v}$.

On peut également exprimer les vecteurs propres du système couplé $\varphi_{p,v,1}$ et $\varphi_{p,v,2}$ en fonction des modes propres du système découplé :

$$\begin{cases} \varphi_{p,v,1} = \frac{2\omega_p \mathbf{g}_p + \beta_{p,v} \mathbf{d}_v}{\omega_{p,v,+}} \\ \varphi_{p,v,2} = \frac{\beta_{p,v} \mathbf{g}_p + \omega_v \mathbf{d}_v}{\omega_{p,v,-}} \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Cela fait bien apparaître le fait que, si les fréquences propres sont éloignées il y aura un vecteur dominé par le mode de pales et l'autre par le mode de voile, tandis que si elles sont proches, les deux vecteurs propres seront assez semblables. Noter que comme $\beta_{p,v}$ peut être positif ou négatif, il n'y a pas forcément d'indication sur le mode qui apparaîtra en premier.

Afin que les expressions des modes en 4.8 et A.13 correspondent, il apparaît clairement que les termes de couplages ne seront non nuls que lorsque le nombre de diamètres nodaux du mode de pale correspondra à celui du mode de pales.

A.4 Rouet endommagé

A.4.1 Spectres angulaires des modes de pales

Ici en complément de la figure 5.15, les spectres angulaires du rouet sain et du rouet endommagé pour le 2^e (figure A.1) et le 3^e groupe (figure A.2) de modes de pales sont présentés.

A.4.2 Comparaison de la SVD avec et sans endommagement

Dans cette annexe, des modes de collectifs obtenus par décomposition en valeurs singulières sont comparés lorsque le rouet est sain ou endommagé. La figure A.3 correspond à un mode à zéro diamètre nodal du deuxième groupe de modes de pales. La figure A.3 correspond également à zéro diamètre nodal mais du 3^e groupe de pales. Enfin la figure A.4 est composée de modes à 2 diamètres nodaux du 4^e groupe de pales. Dans les 3 cas on observe bien que les déformées modales de chaque pale sont très semblables.

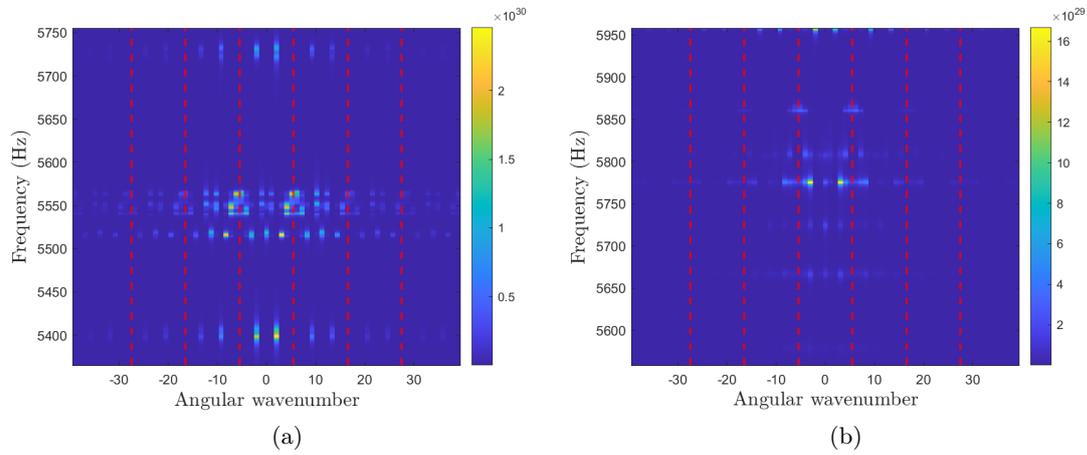


FIGURE A.1 – Dispersion angulaire estimée à partir de $D_{\sigma}^2(k)$ du deuxième groupe de modes de pales pour (a) le rotor sain (b) le rotor endommagé.

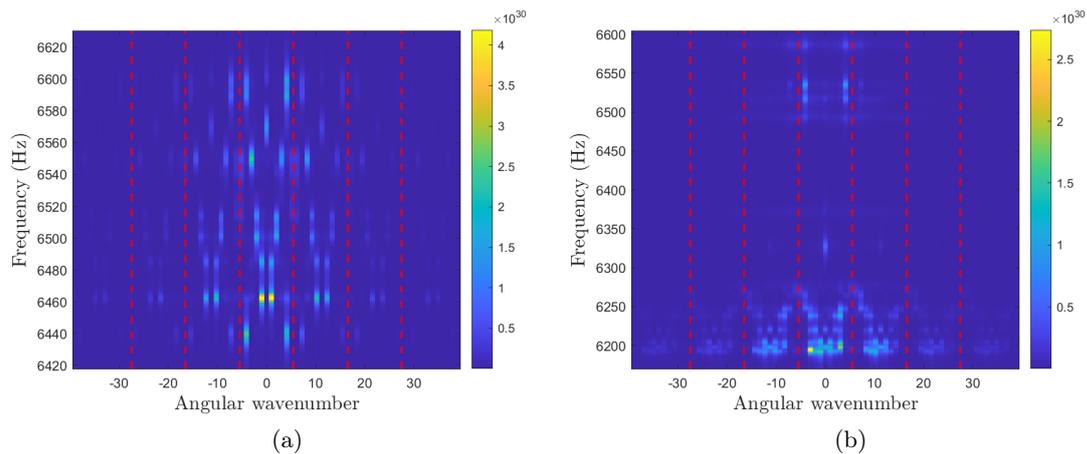


FIGURE A.2 – Dispersion angulaire estimée à partir de $D_{\sigma}^2(k)$ du troisième groupe de modes de pales pour (a) le rotor sain (b) le rotor endommagé

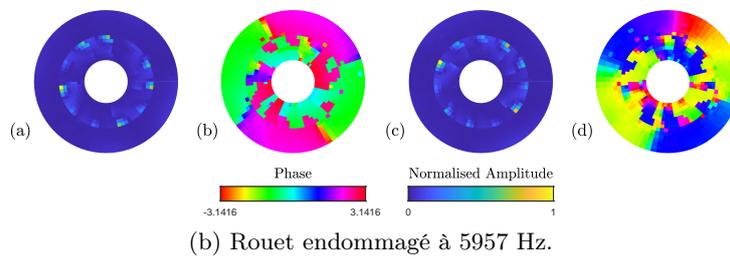
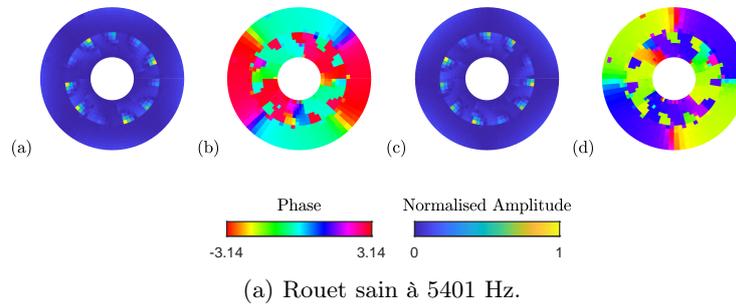


FIGURE A.3 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 à deux diamètre du deuxième groupe de modes de pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et (d) phase de \mathbf{u}_2 .

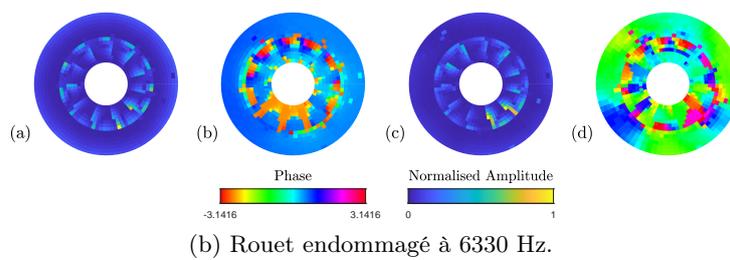
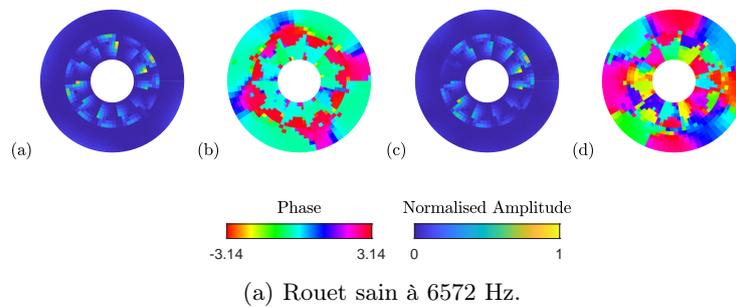


FIGURE A.4 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 à zéro diamètre du troisième groupe de modes de pales sur : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et phase (d) de \mathbf{u}_2 .

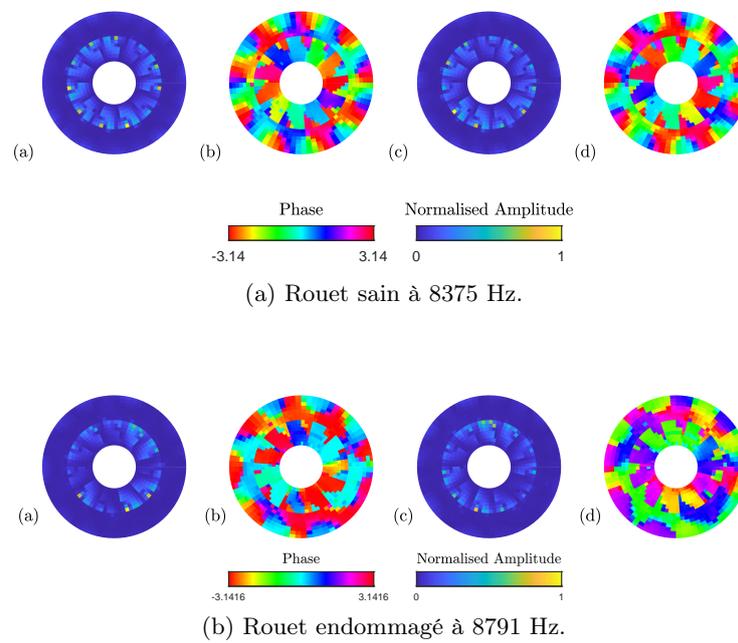


FIGURE A.5 – Vecteurs singuliers \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 à deux diamètres nodaux du quatrième groupe de modes de pales : (a) amplitude et (b) phase de \mathbf{u}_1 , (c) amplitude et phase (d) de \mathbf{u}_2 .

Bibliographie

- [1] *Cours de vibrations et ondes.*
- [2] R. D. Adams, P. Cawley, C. J. Pye, and B. J. Stone. A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 20(2) :93–100, apr 1978.
- [3] Randall J Allemang. The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. *Sound and vibration*, 37(8) :14–23, 2003.
- [4] M. F. Ashby and D. Cebon. Materials selection in mechanical design. *Le Journal de Physique IV*, 03(C7) :C7–9, November 1993. Publisher : EDP Sciences.
- [5] Alain Batailly. Simulation de l’interaction rotor/stator pour des turbo-machines aéronautiques en configuration non-accidentelle. 2009.
- [6] Douglas Beaton and Ning Xiang. Room acoustic modal analysis using Bayesian inference. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(6) :4480–4493, June 2017.
- [7] A. Berman. System identification of a complex structure. In *16th Structural Dynamics, and Materials Conference*, Denver,CO,U.S.A., May 1975. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [8] Alex Berman. Mass Matrix Correction Using an Incomplete Set of Measured Modes. *AIAA Journal*, 17(10) :1147–1148, October 1979.
- [9] L. Bertini, P. Neri, C. Santus, A. Guglielmo, and G. Mariotti. Analytical investigation of the SAFE diagram for bladed wheels, numerical and experimental validation. *Journal of Sound and Vibration*, 333(19) :4771–4788, September 2014.
- [10] E Betti. Teoria dell’elasticità : Il nuovo cimento. pages 87–97, 1872.
- [11] R. H. Bolt. Note on normal frequency statistics for rectangular rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 18(1) :130–133, 1946.
- [12] R. R. Boyer and R. D. Briggs. The use of β titanium alloys in the aerospace industry. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 14 :681–685, December 2005. ADS Bibcode : 2005JMEP...14..681B.
- [13] R. Brincker and Carlos Ventura. *Introduction to Operational Modal Analysis*. PMA, 01 2015.
- [14] D. L. Brown, R. J. Allemang, Ray Zimmerman, and M. Mergeay. Parameter estimation techniques for modal analysis. *SAE Transactions*, 88 :828–846, 1979.
- [15] Wilfred Campbell. Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration. *Transactions of the ASME*, pages 31–160, 1924.
- [16] E. Peter Carden and Paul Fanning. Vibration Based Condition Monitoring : A Review. *Structural Health Monitoring*, 3(4) :355–377, December 2004.

- [17] Matthew P. Castanier and Christophe Pierre. Modeling and Analysis of Mistuned Bladed Disk Vibration : Current Status and Emerging Directions. *Journal of Propulsion and Power*, 22(2) :384–396, March 2006.
- [18] P. Castellini, G.M. Revel, and L. Scalise. Measurement of vibrational modal parameters using laser pulse excitation techniques. *Measurement*, 35(2) :163–179, 2004. 2 special issues : Vibration measurement by Laser techniques Advances and Applications and 7th workshop on ADC modelling and testing.
- [19] P. Cawley and R. D. Adams. The location of defects in structures from measurements of natural frequencies. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, 14(2) :49–57, apr 1979.
- [20] P. Cawley and R.D. Adams. The mechanics of the coin-tap method of non-destructive testing. *Journal of Sound and Vibration*, 122(2) :299–316, April 1988.
- [21] Antoine Chaigne and Jean Kergomard. *Acoustique des instruments de musique*. Collection Echelles. Belin, 2008.
- [22] Antoine Chaigne and Christophe Lambourg. Time-domain simulation of damped impacted plates. I. Theory and experiments. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(4) :1422–1432, April 2001.
- [23] A. Chandrasher, S. Adhikari, and M. I. Friswell. Quantification of Vibration Localization in Periodic Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 138(2) :021002, April 2016.
- [24] Junjie Chen, Chaoping Zang, Biao Zhou, and EP Petrov. High-fidelity calculation of modal damping caused by friction at blade roots for single blades and tuned bladed disc assemblies. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 235(15) :2810–2831, August 2021. Publisher : IMECHE.
- [25] Ernst Florens Friedrich (1756-1827) Chladni. *Traité d’acoustique* / par E. F. F. Chladni,... page 420.
- [26] Trevor J Cox. Room Sizing and Optimization at Low Frequencies. *J. Audio Eng. Soc.*, 52(6), 2004.
- [27] Bertrand David. Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d’estimation relatives aux fréquences et amortissements des modes propres. Applications en acoustique musicale. page 234, 1999.
- [28] Olivier Delcourt. Les défis matériaux et procédés pour les équipements aéronautiques. page 19.
- [29] Bradley M. Deutsch, Alexandra R. Robinson, Richard J. Felce, and Thomas R. Moore. Nondegenerate normal-mode doublets in vibrating flat circular plates. *American Journal of Physics*, 72(2) :220–225, 2004.
- [30] S. W. Doebling, C. R. Farrar, M. B. Prime, and D. W. Shevitz. Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics : A literature review. Technical Report LA-13070-MS, Los Alamos National Lab. (LANL), Los Alamos, NM (United States), May 1996.
- [31] Marc Dubois. *Contrôle de la propagation des ondes de flexion dans les plaques*. PhD thesis, Paris 7, 2014.
- [32] Duerinck. Experimental comparison of various excitation and acquisition techniques for modal analysis of violins | Elsevier Enhanced Reader.

- [33] Kerem Ege, Xavier Boutillon, and Bertrand David. High-resolution modal analysis. *Journal of sound and vibration*, 325(4-5) :852–869, 2009. Publisher : Elsevier.
- [34] Lawrence C. Evans. *Partial Differential Equations : Second Edition*. American Mathematical Society, Providence, R.I, 2nd edition edition, March 2010.
- [35] D.J. Ewins. The effects of detuning upon the forced vibrations of bladed disks. *Journal of Sound and Vibration*, 9(1) :65–79, January 1969.
- [36] Wei Fan and Pizhong Qiao. Vibration-based damage identification methods : A review and comparative study. *Structural Health Monitoring*, 10(1) :83–111, apr 2010.
- [37] Maxime Farin, Claire Prada, and Julien de Rosny. Selective remote excitation of complex structures using time reversal in audible frequency range. *J. Acoust. Soc. Am*, 146(4) :2510–2521, 2019.
- [38] Charles R. Farrar, Scott W. Doebling, and David A. Nix. Vibration-based structural damage identification. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 359(1778) :131–149, jan 2001.
- [39] Charles R Farrar and Keith Worden. An introduction to structural health monitoring. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851) :303–315, dec 2006.
- [40] Michael I Friswell. Damage identification using inverse methods. *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 365(1851) :393–410, dec 2006.
- [41] Zhi-Fang Fu and Jimin He. *Modal Analysis*. Elsevier, September 2001. Google-Books-ID : ElwhqUtJUj8C.
- [42] Michel Géradin and Daniel J Rixen. *Mechanical vibrations : theory and application to structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2014.
- [43] John Goodman. *Mechanics applied to engineering*, volume 57. Longmans, Green & Co., 1914.
- [44] William Gousseau. Pronostic de dégradation d’endommagements de roulements sur application aéronautique par analyse vibratoire.
- [45] ESTILL I. GREEN. The story of Q. *American Scientist*, 43(4) :584–594, 1955. Publisher : Sigma Xi, The Scientific Research Society.
- [46] M. L. Grenier-Besson. Résonances et dédoublements rotationnels du type l dans les molécules à symétrie axiale. *Journal de Physique et le Radium*, 21(6) :555–565, 1960.
- [47] R. T. Haftka and H. M. Adelman. Recent developments in structural sensitivity analysis. *Structural Optimization*, 1(3) :137–151, sep 1989.
- [48] G. Z. Harris. The normal modes of a circular plate of variable thickness. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 21(3) :321–327, 08 1968.
- [49] Brian T. Hefner and Phillip L. Marston. Magnetic excitation and acoustic detection of torsional modes of spherical shells in water. *J. Acoust. Soc. Am*, 102(5) :3131–3131, 1997.
- [50] Bernd Hellmich and Joerg R. Seume. Causes of Acoustic Resonance in a High-Speed Axial Compressor. *Journal of Turbomachinery*, 130(3), May 2008.
- [51] Yong Huang, Changsong Shao, Biao Wu, James L. Beck, and Hui Li. State-of-the-art review on bayesian inference in structural system identification and damage assessment. *Advances in Structural Engineering*, 22(6) :1329–1351, nov 2018.

- [52] Róbert Huňady, Peter Pavelka, and Pavol Lengvarský. Vibration and modal analysis of a rotating disc using high-speed 3D digital image correlation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 121 :201–214, April 2019.
- [53] Paul Ibáñez. Force Appropriation by Extended Asher’s Method. page 760873, February 1976.
- [54] Samir R. Ibrahim. Dynamic modeling of structures from measured complex modes. *AIAA Journal*, 21(6) :898–901, June 1983.
- [55] Colas Joannin. Réduction de modèle par sous-structuration et modes non-linéaires.
- [56] Grzegorz Kawiecki. Modal damping measurement for damage detection. *Smart Materials and Structures*, 10(3) :466, June 2001.
- [57] Charles C. Kennedy and C. D. P. Pancu. Use of Vectors in Vibration Measurement and Analysis. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 14(11) :603–625, November 1947.
- [58] Seth S. Kessler, S.Mark Spearing, Mauro J. Atalla, Carlos E.S. Cesnik, and Constantinos Soutis. Damage detection in composite materials using frequency response methods. *Composites Part B : Engineering*, 33(1) :87 – 95, 2002.
- [59] M.M. Khatibi, M.R. Ashory, A. Malekjafarian, and R. Brincker. Mass–stiffness change method for scaling of operational mode shapes. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 26 :34–59, January 2012.
- [60] M Kim, J. Moon, and J.A. Wickert. Spatial Modulation of Repeated Vibration Modes in Rotationally Periodic Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, page 7, 2000.
- [61] Vern O. Knudsen. Resonance in small rooms. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 4(1A) :20–37, July 1932.
- [62] F Laffleur, M Thomas, and F Laville. Modal analysis of structures using acoustical excitation. 2000.
- [63] H. F. Lam, J. M. Ko, and C. W. Wong. Localization of damaged structural connections based on experimental modal and sensitivity analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 210(1) :91–115, February 1998.
- [64] Frank Lane. System Mode Shapes in the Flutter of Compressor Blade Rows. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(1) :54–66, January 1956. Publisher : American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [65] Oliveira Guilherme Lara. Analyse numérique de l’effet du défilement des sillages liés aux interactions rotor-stator en turbomachines.
- [66] Robert C. Lewis and Donald L. Wrisley. A System for the Excitation of Pure Natural Modes of Complex Structure. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 17(11) :705–722, November 1950.
- [67] Earl Logan Jr. *Handbook of Turbomachinery*. CRC Press, 0 edition, May 2003.
- [68] J. G. Marshall and M. Imregun. A review of aeroelasticity methos with emphasis on turbomachinery applications. *Journal of Fluids and Structures*, 10(3) :237–267, April 1996.
- [69] Moustapha Mbaye. Conception robuste en vibration et aéroélasticité des roues au-bagées de turbomachines. 2009.
- [70] Martial Naudin and Jean-Marc Pugno. Vibrations et contraintes alternées dans les turbomachines. *Frottement, usure et lubrification*, July 1999.

- [71] Norbert Niedbal and Erhard Klusowski. Optimal exciter placement and force vector tuning required for experimental modal analysis. In *Dynamics Specialists Conference*, Long Beach, CA, U.S.A., April 1990. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [72] Jeffrey J. Nieter and Rajendra Singh. Acoustic modal analysis experiment. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 72(2) :319–326, August 1982.
- [73] S et al Okamoto. Vibration Analysis of a High Speed and Light Weight Rotor System Subjected to a Pitching or Turning Motion, II : A Flexible Rotor System on Flexible Suspensions.
- [74] Marie-Océane Parent. Prédiction de la stabilité en contact rotor-stator dans les turboréacteurs d’avion.
- [75] De Prony G. R. Essai experimental et analytique : sur les lois de la dilatabilité des fluides élastique et sur celles de la force expansive de la vapeur de l’eau et de la vapeur de l’alkool, a différentes températures. *Journal Polytechnique ou Bulletin du Travail fait a l’Ecole Centrale des Travaux Publics*, 1795.
- [76] Jean-Philippe (1683-1764) Auteur du texte Rameau. *Traité de l’harmonie réduite à ses principes naturels ; divisé en quatre livres . Livre I. Du rapport des raisons & proportions harmoniques. Livre II. De la nature & de la propriété des accords ; et de tout ce qui peut servir à rendre une musique parfaite. Livre III. Principes de composition. Livre IV. Principes d’accompagnement. Par monsieur Rameau...* 1722.
- [77] Sushila Rani, A. Agrawal, and Rastogi Vikas. Vibration analysis for detecting failure mode and crack location in first stage gas turbine blade. *J. Mech. Sci. Technol*, 33 :1–10, 01 2019.
- [78] John William Strutt Baron Rayleigh. *The theory of sound*, volume 1. Macmillan, 1894.
- [79] Arlindo Ricarte, José Meireles, and Octávio Inácio. Characterizing the Frequency Response of Compliant Materials by Laser Döppler Vibrometry Coupled Acoustic Excitation. *Vibration*, 4(1) :64–74, March 2021. Number : 1 Publisher : Multidisciplinary Digital Publishing Institute.
- [80] Mark Richardson. Is It a Mode Shape or an Operating Deflection Shape? *Sound and Vibration Magazine*, 1997.
- [81] Mark Richardson and Brian Schwarz. Modal Parameter Estimation from Operating Data. *SOUND AND VIBRATION*, 2003.
- [82] Mark H Richardson. The multivariate mode indicator function. 1985.
- [83] Mark H Richardson and David L Formenti. Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials. 1982.
- [84] Daniel Royer and Eugene Dieulesaint. *Elastic waves in solids I : Free and guided propagation*. Springer Science & Business Media, 1999.
- [85] Anders Rytter. *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Fracture and Dynamics. Dept. of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Aalborg, 1993.
- [86] Anders Rytter. *Vibrational based inspection of civil engineering structures*, 1993.
- [87] M. Sakata, K. Kimura, S. Okamoto, and K. Oikawa. Vibration analysis of a high speed and light weight rotor system subjected to a pitching or turning motion : I : A rigid rotor system on flexible suspensions. *Journal of Sound and Vibration*, 184(5) :871–885, August 1995.

- [88] O.S. Salawu. Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Engineering Structures*, 19(9) :718–723, September 1997.
- [89] O.S. Salawu. Detection of structural damage through changes in frequency : a review. *Engineering Structures*, 19(9) :718–723, sep 1997.
- [90] Philipp Schmiechen. Travelling Wave Speed Coincidence. 1997.
- [91] Manfred R. Schroeder. Statistical Parameters of the Frequency Response Curves of Large Rooms. *Journal of the Audio Engineering Society*, 35(5) :299–306, May 1987. Publisher : Audio Engineering Society.
- [92] Laurent Sepecher. Orthogonal eigenmodes of a bounded fully anisotropic medium, 2022.
- [93] C.Y. Shih, Y.G. Tsuei, R.J. Allemang, and D.L. Brown. Complex mode indication function and its applications to spatial domain parameter estimation. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2(4) :367–377, October 1988.
- [94] Peter J. Shull. *Nondestructive Evaluation*. CRC, 2002.
- [95] Frédéric Sicot. *Simulation efficace des écoulements instationnaires périodiques en turbomachines*. These de doctorat, Ecully, Ecole centrale de Lyon, January 2009.
- [96] Marari P.||Vargo Singh. Safe Diagram - A Design And Reliability Tool For Turbine Blading. 1988. Publisher : Texas A&M University. Turbomachinery Laboratories.
- [97] Hoon Sohn and Kincho H. Law. A bayesian probabilistic approach for structure damage detection. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 26(12) :1259–1281, dec 1997.
- [98] Anthony Tacher. Forced response and stability of mistuned structures subject to the Coriolis effect. page 207.
- [99] M. Tanter, J.-F. Aubry, J. Gerber, J.-L. Thomas, and M. Fink. Optimal focusing by spatio-temporal inverse filter. I. Basic principles. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(1) :37–47, July 2001.
- [100] D. L. Thomas. Standing waves in rotationally periodic structures. *Journal of Sound and Vibration*, 37(2) :288–290, November 1974.
- [101] A. Thoren. Derivation of mass and stiffness matrices from dynamic test data. In *13th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, San Antonio, TX, U.S.A., April 1972. American Institute of Aeronautics and Astronautics.
- [102] Tiwari. Effect of radial internal clearance of a ball bearing on the dynamics of a balanced horizontal rotor.
- [103] S. Vanlanduit, F. Daerden, and Patrick Guillaume. Experimental modal testing using pressurized air excitation. *J.Sound Vib.*, 299 :83–98, 01 2007.
- [104] Bram Vervisch, Michael Monte, Kurt Stockman, and Mia Loccufier. Acoustical excitation for damping estimation in rotating machinery. In Randall Allemang, James De Clerck, Christopher Niezrecki, and Alfred Wicks, editors, *Special Topics in Structural Dynamics, Volume 6*, pages 473–480, New York, NY, 2013. Springer New York.
- [105] Benoit Voillot. Caractérisation de la tenue mécanique en fatigue de pièces en alliage de titane Ti-5Al-5V-5Mo-3Cr contenant des défauts.
- [106] D. S. Whitehead. Force and moment coefficients for vibrating aerofoils in cascade. 1960. Accepted : 2014-10-21T15 :55 :34Z.
- [107] S. J. Wildheim. Excitation of Rotationally Periodic Structures. *Journal of Applied Mechanics*, 46(4) :878–882, December 1979.

- [108] Yi zhou Lin, Zhen hua Nie, and Hong wei Ma. Structural damage detection with automatic feature-extraction through deep learning. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 32(12) :1025–1046, nov 2017.
- [109] Lionel Zoghaib and Pierre-Olivier Mattei. Damping analysis of a free aluminum plate. *Journal of Vibration and Control*, 21(11) :2083–2098, August 2015.

RÉSUMÉ

Dans les moteurs d'aéronefs, dont la fiabilité est un enjeu majeur, il est indispensable de caractériser les modes propres de vibration des pièces afin d'anticiper les phénomènes de fatigue ou encore de détecter l'apparition d'endommagements. Dans ce manuscrit, nous proposons une méthode d'analyse modale par excitation acoustique. Les pièces testées sont mises en vibration par un réseau de haut-parleurs et les déplacements sont mesurés à l'aide d'un vibromètre laser. La matrice de transmission acousto-élastique ainsi mesurée permet de s'affranchir de tout artefact dû au contact. Nous l'exploitons ensuite pour étudier la structure modale de pièces à symétries de rotation continues ou discrètes, saines ou endommagées. En effet, sa décomposition en valeurs singulières (SVD) permet d'identifier des modes superposés, favorisés par ce type de géométrie. Le lien entre la SVD, les modes propres de la structure et leur couplage acousto-élastique est établi. Cette approche est validée sur une plaque carrée en aluminium libre puis partiellement encastrée. Nous l'appliquons ensuite à quatre pièces saines de turbomoteurs : un pignon, un pignon évidé et deux compresseurs. Des simulations aux éléments finis sont réalisées de manière à en comprendre le couplage acousto-vibratoire. Puis, les matrices de transmission sont mesurées et leur SVD met en évidence les distributions modales bien distinctes pour ces différentes géométries, que nous analysons. Le comportement modal de ces pièces change lorsqu'un endommagement brise leur symétrie. Nous observons numériquement et expérimentalement que sur un pignon, une modification locale de masse ou de raideur se traduit principalement par une variation de la fréquence de résonance des modes. Ces résultats sont corroborés par une approche perturbative de l'endommagement. Cette approximation n'est plus valable dans le cas d'un compresseur dont certaines pales sont déformées. Un classement des modes fondé sur une description phénoménologique est proposé. Pour terminer, les vecteurs singuliers de la matrice de transmission et le réseau de haut-parleurs sont utilisés de manière à contrôler le champ vibratoire dans le cas de modes superposés.

MOTS CLÉS

Analyse modale, acousto-vibratoire, matrice de transmission

ABSTRACT

In aeronautical engines, where reliability is a major issue, it is essential to characterize the vibration modes of parts in order to anticipate fatigue phenomena or to detect the appearance of damage. In this manuscript, we propose a modal analysis method using acoustic excitation. The tested parts are excited by a loudspeaker array and the displacements are measured with a laser vibrometer. This acousto-elastic transmission matrix is entirely contact free. It is then used to study the modal structure of parts with continuous or discrete rotation symmetries, healthy or damaged. Indeed, its singular value decomposition (SVD) allows to identify superimposed modes, favored by this type of geometry. The link between the SVD, the eigenmodes of the structure and their acousto-elastic coupling is established. This approach is validated on a free and then partially embedded square aluminum plate. We then apply it to four healthy parts of turbo engines: a pinion, a hollowed pinion and two compressors. Finite element simulations are performed in order to evaluate the acousto-vibratory coupling. Then, the transmission matrices are measured and their SVD highlights the distinct modal distributions for these different geometries, which we analyze. The modal behavior of these parts changes when a damage breaks their symmetry. We observe, numerically and experimentally on the pinion, that the main effect of a local mass or stiffness modification is a mode frequency shift. These results are supported by a perturbative approach of the damage. This approximation is no longer valid in the case of a compressor where some blades are deformed. A classification of the mode behavior based on a phenomenological description is proposed. Finally, the singular vectors of the transmission matrix and the loudspeaker array are used to control the vibratory field in the case of superimposed modes.

KEYWORDS

Modal analysis, acousto-vibration, transmission matrix.