



# Modélisation et simulation de la fragmentation de sable à liant polyuréthane

William Hilth

## ► To cite this version:

William Hilth. Modélisation et simulation de la fragmentation de sable à liant polyuréthane. Matériaux. Université Paris sciences et lettres, 2018. Français. ⟨NNT : 2018PSLEM088⟩. ⟨tel-04416386⟩

**HAL Id: tel-04416386**

**<https://pastel.hal.science/tel-04416386v1>**

Submitted on 25 Jan 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

# THÈSE DE DOCTORAT

de l'Université de recherche Paris Sciences et Lettres  
PSL Research University

Préparée à MINES ParisTech

Modélisation et simulation de la fragmentation de sable à liant  
polyuréthane

**École doctorale n°432**

SCIENCES DES MÉTIERS POUR L'INGÉNIEUR

**Spécialité** SCIENCES ET GÉNIE DES MATÉRIAUX

## COMPOSITION DU JURY :

M. Ludovic CHAMOIN  
ENS Paris-Saclay, Président

M. Pascal REYNAUD  
INSA de Lyon, Rapporteur

M. Julien RETHORE  
École Centrale de Nantes, Rapporteur

M. David RYCKELYNCK  
MINES ParisTech, Examineur

Soutenue par **William HILTH**  
le 3 Décembre 2018

Confidentielle jusqu'au 2/12/23

Dirigée par **David RYCKELYNCK**







# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Contexte général . . . . .	8
1.1.1	Le projet FIMALIPO . . . . .	8
1.1.2	Cycle de vie d'un noyau de fonderie . . . . .	9
1.2	Organisation du mémoire . . . . .	11
1.3	Communications scientifiques . . . . .	11
<b>2</b>	<b>Etat de l'art sur les matériaux granulaires cimentés</b>	<b>13</b>
2.1	Etude du liant polyuréthane . . . . .	15
2.1.1	Analyse thermogravimétrique . . . . .	15
2.1.2	Microstructure et évolution en vieillissement thermique . . . . .	16
2.2	Mécanique des matériaux granulaires . . . . .	18
2.2.1	Les matériaux granulaires cimentés . . . . .	18
2.2.2	Le squelette granulaire . . . . .	19
2.2.3	Localisation de la déformation . . . . .	21
2.2.4	Comportement à l'échelle macroscopique . . . . .	23
2.3	Comportement mécanique des noyaux à liant polyuréthane . . . . .	27
2.3.1	Les études expérimentales sur les noyaux de fonderie . . . . .	27
2.3.2	Bilan des essais réalisés dans le cadre de l'ANR FIMALIPO . . . . .	27
2.3.3	Modes de rupture en compression uniaxiale . . . . .	29
2.3.4	Etude d'un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X . . . . .	31
2.3.5	Etude de l'essai de Push-out . . . . .	34
2.4	Modèles constitutifs macroscopiques . . . . .	38
2.4.1	Une alternative à la Discrete Element Method . . . . .	38
2.4.2	Rappels sur les modèles élastoplastiques . . . . .	40
2.4.3	Remarques importantes sur les signes et les dénominations . . . . .	42
2.4.4	Élasticité . . . . .	42
2.4.5	Modèle de Drucker-Prager . . . . .	44
2.4.6	Modèles multi-surfaces . . . . .	45
2.4.7	Modèle de Cam-clay Modifié . . . . .	46
2.4.8	Clay And Sand Model . . . . .	50
2.4.9	Modélisation de la cimentation . . . . .	52

2.5	Méthode hybride d'hyper-réduction de modèles - $H^2$ ROM . . . . .	59
2.5.1	Principe de la $H^2$ ROM . . . . .	59
2.5.2	La réduction de modèles . . . . .	59
2.5.3	L'hyper-réduction de modèles . . . . .	60
2.5.4	L'hyper-réduction hybride de modèles . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Modélisation mécanique</b>	<b>63</b>
3.1	Cahier des charges du modèle mécanique . . . . .	64
3.2	Élasticité . . . . .	65
3.3	Ajout d'un endommagement . . . . .	67
3.4	Traitement des données expérimentales . . . . .	69
3.4.1	Essais considérés . . . . .	69
3.4.2	Flexion 4 points . . . . .	70
3.4.3	Compression uniaxiale . . . . .	70
3.4.4	Die pressing . . . . .	71
3.4.5	Résumé dans le plan $(p, q)$ . . . . .	73
3.5	Calibration du seuil . . . . .	74
3.5.1	Bilan des variables à calibrer . . . . .	74
3.5.2	Méthodologie de calibration . . . . .	75
3.5.3	Paramètres non admissibles . . . . .	78
3.6	Estimation des termes d'écoulement plastique . . . . .	80
3.6.1	Evolution de $p_c$ . . . . .	80
3.6.2	Evolution des paramètres cohésifs plastiques . . . . .	80
3.7	Discussion . . . . .	83
3.7.1	Limites de la calibration . . . . .	83
3.7.2	Ajout d'un durcissement : MC-CASM . . . . .	83
<b>4</b>	<b>Validations sur structure</b>	<b>87</b>
4.1	Etude de l'essai de compression observé aux rayons X avec le C-CASM . . . . .	89
4.1.1	Introduction . . . . .	89
4.1.2	Analyse de l'essai . . . . .	89
4.1.3	Première simulation avec le C-CASM . . . . .	91
4.2	L'élagage de données expérimentales . . . . .	95
4.2.1	Introduction . . . . .	95
4.2.2	Digital Volume Correlation . . . . .	96
4.2.3	Réduction de la dimension tenant compte de la distribution du résidu . . . . .	98
4.2.4	Domaine Réduit Expérimental . . . . .	100
4.2.5	Maillage réduit du DRE . . . . .	103
4.2.6	Application au sable de fonderie . . . . .	105
4.2.7	FEMU- $H^2$ ROM . . . . .	108
4.2.8	Discussion . . . . .	115
4.3	Simulation de l'essai de push-out . . . . .	118
4.3.1	Rappels . . . . .	118
4.3.2	Objectifs de l'étude numérique . . . . .	119

4.3.3	Géométrie et maillage . . . . .	120
4.3.4	Éléments cohésifs d'interface . . . . .	120
4.3.5	Calcul thermique . . . . .	121
4.3.6	Calcul mécanique . . . . .	123
4.3.7	Sensibilité au maillage . . . . .	127
4.3.8	Discussion . . . . .	129
<b>5</b>	<b>Débourrage numérique de la culasse</b>	<b>131</b>
5.1	Le cycle de vie du noyau . . . . .	133
5.1.1	Variables d'ajustement . . . . .	133
5.1.2	Chaîne de calculs de déburrage . . . . .	134
5.1.3	Panoplie des noyaux et zones d'intérêt . . . . .	134
5.2	Etude de la précontrainte thermique . . . . .	135
5.2.1	Instrumentation d'un noyau sur une ligne industrielle . . . . .	135
5.2.2	Calcul thermique . . . . .	137
5.2.3	Calcul mécanique . . . . .	139
5.2.4	Discussion . . . . .	141
5.3	Modélisation du bridage . . . . .	142
5.3.1	Éléments ressorts . . . . .	142
5.3.2	Bridages considérés . . . . .	142
5.4	Etude modale de la culasse . . . . .	142
5.4.1	Approximation en base réduite . . . . .	142
5.4.2	Méthode . . . . .	144
5.4.3	Résultats . . . . .	147
5.4.4	Discussion . . . . .	152
5.5	Etude dynamique de la culasse . . . . .	153
5.5.1	Modélisation pragmatique du martelage . . . . .	153
5.5.2	Méthode . . . . .	154
5.5.3	Résultats . . . . .	155
5.5.4	Discussion . . . . .	158
5.6	Discussion et perspectives . . . . .	158
5.6.1	Concernant le zoom structural . . . . .	158
5.6.2	La transmission des efforts . . . . .	160
5.6.3	Saturation de l'endommagement . . . . .	161
5.6.4	Variabilité des conditions aux limites . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Annexes</b>	<b>181</b>
6.1	Script Python interactif pour la calibration . . . . .	181



# Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Ludovic Chamoin de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse. Je tiens également à remercier Julien Réthoré et Pascal Reynaud d'avoir accepté d'être mes rapporteurs. Votre lecture attentive et vos remarques pertinentes m'ont permis de prendre du recul sur certains aspects de mon travail.

Mes premiers remerciements vont naturellement vers David Ryckelynck, qui m'a accordé sa confiance et a su m'encadrer pendant ces 3 années. Ton calme, ton détachement et ton aptitude à déceler les bonnes pistes à approfondir quasiment instantanément auront été cruciaux.

Naturellement, je tiens à adresser mes remerciements à Montupet, qui a été à l'origine du projet FIMALIPO et m'a accordé sa confiance. Je remercie tout particulièrement Adrien Laforêt qui a piloté le projet, Denis Massinon, Patrice Chaptal et Benoît Drieu qui ont toujours été attentifs à mes développements.

Je remercie Claire Menet et Gilbert Fantozzi à l'INSA de Lyon pour leur collaboration fructueuse pendant ma thèse.

L'essentiel de ma thèse s'est déroulé au Centre des Matériaux des Mines de Paris, dans une atmosphère de travail idéale et stimulante. Je pense notamment à l'équipe SIMS où les échanges autour d'un café auront toujours été enrichissants. Je remercie notamment Samuel Forest, Georges Cailletaud et Djamel Missoum-Benziane pour leur intérêt constant pour mes travaux et leurs conseils avisés. Je fais un remerciement tout particulier à Basile Marchand pour son aide plus que précieuse concernant Z-set et ses mystères. Naturellement, j'ai une pensée particulière pour mes camarades thésards avec qui nous avons passé d'innombrables heures à réfléchir aux problèmes et aux bugs de chacun : Laurent, Moubine, Jules, Andrei, Raphaël, Clément, Aurélien et Hiba. Je tiens aussi à remercier les doctorants de ma promotion : Vincent, Mariem, Louise, Victor et Fang notamment. Mais aussi les doctorants des autres promotions Nicolas, Anass, Laurane et Alexiane en particulier. Je remercie aussi ma stagiaire Chiraz.

J'adresse aussi mes remerciements à mes amis de toujours : Rémy, Hugo, Adrien, Caroline, Arthur, Guillaume, Olivier et Victor.

Pour finir, je tiens à adresser un remerciement tout particulier à Maud et Hélène.



# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

<b>1.1</b>	<b>Contexte général . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1.1	Le projet FIMALIPO . . . . .	8
1.1.2	Cycle de vie d'un noyau de fonderie . . . . .	9
<b>1.2</b>	<b>Organisation du mémoire . . . . .</b>	<b>11</b>
<b>1.3</b>	<b>Communications scientifiques . . . . .</b>	<b>11</b>



## 1.1 Contexte général

### 1.1.1 Le projet FIMALIPO

Le sable à liant polyuréthane est utilisé dans les fonderies d'alliage d'aluminium. Dans ces travaux, nous nous sommes intéressés au moulage de culasses de moteurs thermiques pour l'automobile. Ce sont des pièces moulées comportant des cavités internes qui sont, entre autres, les circuits de refroidissement en eau ainsi que les admissions et échappements de carburant. Afin de mouler ces conduits, des noyaux de fonderie sont utilisés. Ces noyaux sont généralement constitués de sable et d'un liant - ici du polyuréthane. Cet ajout de liant, artificiel ou non, permet de donner une meilleure rigidité au sable et de meilleures propriétés mécaniques. Ainsi le sable lié peut être mis en forme pour être placé dans le moule (étape dite de noyautage) et doit aussi résister à la coulée de l'aluminium. Le sable lié permet de mouler des formes de faible section, comme les noyaux d'eau d'une culasse présentés en Figure 1.1.

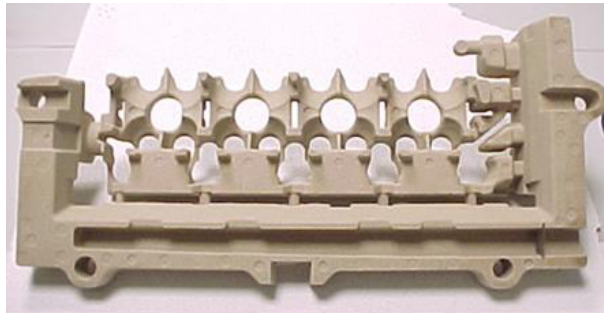


FIGURE 1.1 – Noyau d'eau d'une culasse

Du fait des normes environnementales européennes, les constructeurs automobiles ont pour objectif l'allégement des véhicules, ce qui permet une réduction d'émission de  $\text{CO}_2$ . Afin de réduire le poids des voitures, les pièces de moteur peuvent être miniaturisées. Ces enjeux vont donc impacter directement le design des culasses et de leurs cavités internes, de plus en plus petites et complexes. L'extraction des noyaux de fonderie après coulée et solidification de l'aluminium devient donc de plus en plus complexe. Cette étape demeure cruciale pour l'amélioration de la qualité des culasses. On nomme cette étape le "débourrage". Elle consiste au martelage de la pièce au niveau de ses masselottes suivi d'une mise en vibration afin de faire écouler les noyaux fragmentés. Cet écoulement est d'ailleurs rendu plus difficile par la réduction des sections des cavités internes. Il faut donc fragmenter encore plus les noyaux afin qu'ils s'écoulent.

De plus, il est à noter que le taux d'acceptation de sable dans les culasses a été divisé par 10 en 10 ans, passant de 2,5 g à 250 mg.

La qualité du processus de production de culasses se retrouve donc très fortement lié à la bonne conduite du débourrage. Bien que les noyaux soient employés par les fonderies depuis des dizaines d'années, leurs propriétés mécaniques sont encore bien méconnues.

Cette thèse s'inscrit dans le projet ANR FIMALIPO, pour **F**issuration de **M**atériaux à **L**iant **P**olymère. Le projet est issu d'une collaboration entre Linamar Montupet, le laboratoire MA-TEIS de l'INSA de Lyon et le Centre des Matériaux des Mines de Paris. Le projet FIMALIPO

se divise en deux études, une expérimentale et une numérique. L'aspect expérimental du projet est réalisé au MATEIS à Lyon au travers de la thèse de Claire Menet soutenue en décembre 2016 (voir Menet (2017)). Les travaux de Claire Menet ont permis d'avoir une base de données complète et pertinente des propriétés mécaniques des noyaux de fonderie. L'étude inclut notamment l'impact de la température de vieillissement  $\theta$  qui va provoquer une dégradation de la résine et donc une altération des propriétés mécaniques des noyaux. L'aspect modélisation/simulation a été effectué durant cette présente thèse. La base de données expérimentale a servi à mettre au point, calibrer et valider un modèle élastoplastique en vue de la modélisation du débouillage des culasses.

### 1.1.2 Cycle de vie d'un noyau de fonderie

Les noyaux sont produits, détruits et recyclés par Montupet. Le cycle de vie d'un noyau de fonderie contient 5 étapes :

1. Noyautage
2. Coulée de l'aluminium
3. Refroidissement de la pièce
4. Débouillage
5. Recyclage

On appelle noyautage l'étape consistant à préparer les noyaux en sable. Le mélange sable-liant est d'abord malaxé afin de le rendre homogène. Ensuite, il est injecté dans la boîte à noyaux pour être ensuite durci. La panoplie des noyaux est après ébavurée et assemblée. Le noyautage est très dépendant du liant considéré. Dans le cas du liant polyuréthane, le durcissement de la résine se fait par réticulation (polycondensation ou polyaddition). La polymérisation de la résine s'effectue grâce au procédé de Ashland (dit boîte froide ou cold box). Deux résines différentes sont utilisées et le catalyseur est ajouté sous forme gazeuse, une fois que le mélange sable/résine est dans le moule. Le durcissement se fait sans chauffage (Bargaoui *et al.*, 2017).

La coulée de l'aluminium ainsi que le refroidissement de la pièce ont un impact important sur les noyaux de fonderie. Le gradient de température vu par le sable influe énormément sur les propriétés mécaniques et sur la dégradation du liant polyuréthane. De plus, le refroidissement de la pièce induit une importante précontrainte thermique, due à la dilatation relative de l'aluminium sur le sable.

Le débouillage est le procédé mécanique utilisé pour fragmenter et évacuer les noyaux. Il se déroule en deux étapes :

1. Martelage de la pièce au niveau de la masselotte afin de fragmenter les noyaux progressivement
2. Mise en vibration afin d'écouler le sable flou, c'est-à-dire fragmenté

Une culasse positionnée dans une "débourreuse", c'est-à-dire la machine qui martèle et met en vibration la pièce. Cette machine est visible en Figure 1.2. Les marteaux sont à gauche, la culasse au milieu, et à droite on aperçoit une partie du système de bridage. On a considéré que seule la phase de martelage participait à la fragmentation des noyaux, ainsi seule cette première

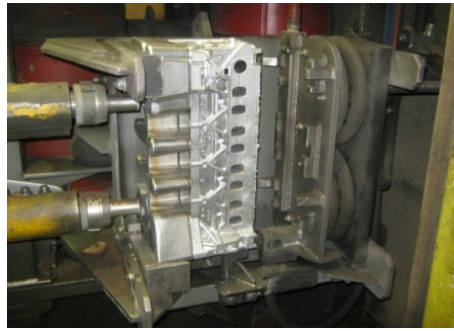


FIGURE 1.2 – Culasse dans une déboureur

partie sera étudiée. On remarque que le sable lié doit être suffisamment robuste pour résister à la coulée, notamment aux zones à faibles sections, mais pas trop résistants afin de pouvoir être "débouffés", c'est-à-dire fragmentés et évacués.

La dernière étape, le recyclage, consiste à récupérer le sable débouffé, et le régénérer thermiquement par pyrolyse du liant. On réintroduit ce sable dans le cycle de vie des noyaux. On ajoute toujours une partie de sable dit "neuf" au sable régénéré. Au niveau des faciès des grains, le sable régénéré a tendance à être plus émoussé, plus rond. Dans toute l'étude qui suit, on ne distinguera jamais les noyaux contenant du sable neuf et ceux contenant du sable régénéré, les expériences de caractérisation mécanique n'ayant pas mis en évidence des différences flagrantes.

Ainsi pour la simulation du débouffage, chaque étape du cycle de vie du noyau a son importance, hormis le recyclage dont l'impact a été négligé. Ce cycle de vie et les changements notables vus par le noyau sont résumés en Figure 1.3.

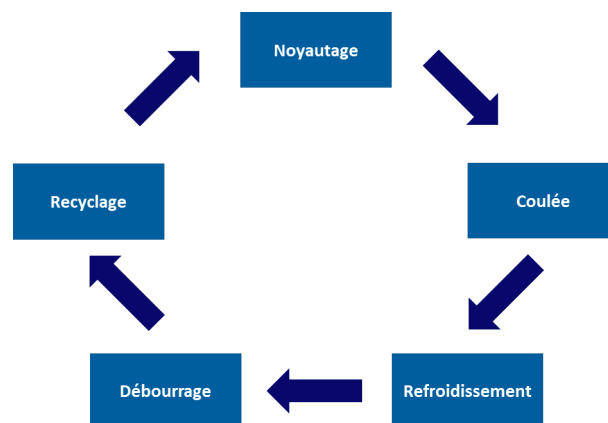


FIGURE 1.3 – Cycle de vie d'un noyau

## 1.2 Organisation du mémoire

Le chapitre 2 présente un état de l'art concernant les matériaux granulaires cimentés comme les noyaux de fonderie. Cette partie s'intéresse aux résultats expérimentaux, et notamment ceux obtenus dans le cadre du projet FIMALIPO (Section 2.3) ainsi que les différentes familles de modèles constitutifs macroscopiques (Section 2.4).

Le chapitre 3 concerne la justification de l'adaptation d'un modèle constitutif macroscopique. La modélisation tient compte de l'effet de la température de vieillissement  $\theta$  et une loi d'endommagement a été rajoutée.

Ce modèle est ensuite validé dans le chapitre 4. Deux cas illustratifs sont mis en évidence. Tout d'abord, un essai de compression uniaxiale observé aux rayons X est étudié et simulé. L'essai sert ensuite de support à une méthode d'élagage de données (Section 4.2) ainsi qu'à une nouvelle méthode d'optimisation de paramètres d'un modèle éléments finis utilisant une méthode hybride d'hyper-réduction de modèles appelée FEMU-H<sup>2</sup>ROM (*Finite Element Updating - Hybrid Hyper Reduced Order Model*). Le deuxième cas concerne la simulation d'un essai de push-out, qui met notamment en évidence l'importance de la cohésion au niveau de l'interface aluminium/-noyau ainsi que la dépendance à la température de vieillissement.

Le chapitre 5 concerne la modélisation et l'étude du débouffrage. Une chaîne de calculs a été mise au point, et deux méthodes de détermination du faciès de rupture final d'un noyau de fonderie sont présentées.

## 1.3 Communications scientifiques

- **Article soumis dans une revue à comité de lecture :**
  - *Data pruning of tomographic data for the calibration of strain localization models*  
William Hilth, David Ryckelynck  
Soumise au Journal of the Mechanics and Physics of Solids
- **Communications lors de conférences :**
  - *Etablissement et calibration d'un modèle mécanique simplifié pour un sable artificiellement cimenté* - CSMA 2017, 13ème colloque National en Calcul des Structures
  - *Fragmentation modeling of a resin bonded sand* - Powders&Grains 2017
  - *Data Pruning of Tomographic Data for the Calibration of Constitutive Models : Application to a Resin-bonded Sand* - 13th World Congress on Computational Mechanics



## Chapitre 2

# Etat de l'art sur les matériaux granulaires cimentés

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Etude du liant polyuréthane</b>	<b>15</b>
2.1.1	Analyse thermogravimétrique	15
2.1.2	Microstructure et évolution en vieillissement thermique	16
<b>2.2</b>	<b>Mécanique des matériaux granulaires</b>	<b>18</b>
2.2.1	Les matériaux granulaires cimentés	18
2.2.2	Le squelette granulaire	19
2.2.3	Localisation de la déformation	21
2.2.4	Comportement à l'échelle macroscopique	23
2.2.4.1	Hypoélasticité	23
2.2.4.2	Etat Critique	26
<b>2.3</b>	<b>Comportement mécanique des noyaux à liant polyuréthane</b>	<b>27</b>
2.3.1	Les études expérimentales sur les noyaux de fonderie	27
2.3.2	Bilan des essais réalisés dans le cadre de l'ANR FIMALIPO	27
2.3.3	Modes de rupture en compression uniaxiale	29
2.3.4	Etude d'un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X	31
2.3.5	Etude de l'essai de Push-out	34
2.3.5.1	Description de l'expérience	34
2.3.5.2	Élaboration des éprouvettes	34
2.3.5.3	Essai mécanique	37
<b>2.4</b>	<b>Modèles constitutifs macroscopiques</b>	<b>38</b>
2.4.1	Une alternative à la Discrete Element Method	38
2.4.2	Rappels sur les modèles élastoplastiques	40
2.4.3	Remarques importantes sur les signes et les dénominations	42
2.4.4	Élasticité	42
2.4.4.1	Élasticité linéaire isotrope	42

2.4.4.2	Hypoélasticité isotrope . . . . .	42
2.4.5	Modèle de Drucker-Prager . . . . .	44
2.4.6	Modèles multi-surfaces . . . . .	45
2.4.7	Modèle de Cam-clay Modifié . . . . .	46
2.4.7.1	Introduction . . . . .	46
2.4.7.2	Elasticité . . . . .	47
2.4.7.3	Fonction de charge . . . . .	47
2.4.7.4	Ecoulement plastique . . . . .	48
2.4.7.5	Relation d'écrouissage . . . . .	48
2.4.7.6	Mise en images . . . . .	49
2.4.7.7	Limites . . . . .	49
2.4.8	Clay And Sand Model . . . . .	50
2.4.8.1	Introduction . . . . .	50
2.4.8.2	Elasticité . . . . .	50
2.4.8.3	Fonction de charge . . . . .	50
2.4.8.4	Ecoulement plastique . . . . .	52
2.4.8.5	Relation d'écrouissage . . . . .	52
2.4.9	Modélisation de la cimentation . . . . .	52
2.4.9.1	Cadre théorique de prise en compte de la cimentation . . . . .	52
2.4.9.2	CASM-n . . . . .	56
2.4.9.3	C-CASM . . . . .	58
<b>2.5</b>	<b>Méthode hybride d'hyper-réduction de modèles - <math>H^2</math>ROM . . . . .</b>	<b>59</b>
2.5.1	Principe de la $H^2$ ROM . . . . .	59
2.5.2	La réduction de modèles . . . . .	59
2.5.3	L'hyper-réduction de modèles . . . . .	60
2.5.4	L'hyper-réduction hybride de modèles . . . . .	62

---

## 2.1 Etude du liant polyuréthane

Le polyuréthane utilisé pour l'élaboration des noyau est obtenu par polyaddition d'une résine formo-phénolique de type Novolac (Avecure 331/631) et d'un durcisseur, le diisocyanate de di-phénylméthane (MDI, AKTIVATOR 32256) fournis par Huttenes Albertus. Résine et durcisseur sont utilisés dans des proportions 50 :50 en masse. La catalyse de la réaction de polymérisation est déclenchée après injection du mélange sable-résine dans la boîte à noyaux. C'est une amine gazeuse, la diméthyléthanolamine (DMEA), qui sert de catalyseur.

L'étude de l'effet de la température sur le polyuréthane est cruciale pour comprendre le comportement mécanique des noyaux de fonderie en fonction de leur température de vieillissement.

### 2.1.1 Analyse thermogravimétrique

L'analyse thermogravimétrique (ATG) permet de mesurer la variation de masse d'un échantillon en fonction à une température de vieillissement, notée  $\theta$ , donnée. Des ATG sur le polyuréthane utilisé pour l'élaboration des noyaux de fonderie de Montupet ont été effectuées par Jomaa *et al.* (2015) et Bargaoui *et al.* (2017).

- Jomaa *et al.* (2015) ont testé la résine sous azote à 20°C/min, 60°C/min et 80°C/min : voir Figure 2.1
- Bargaoui *et al.* (2017) ont testé la résine sous argon à 2°C/min et 10°C/min : voir Figure 2.2

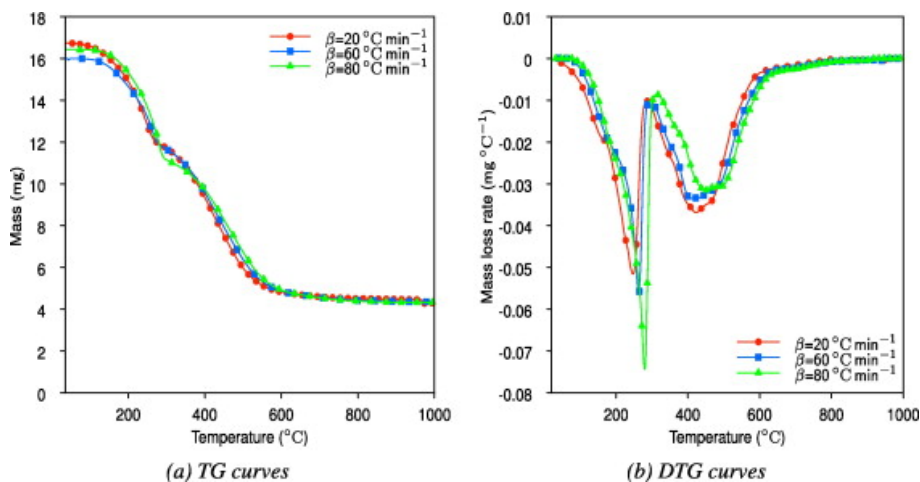
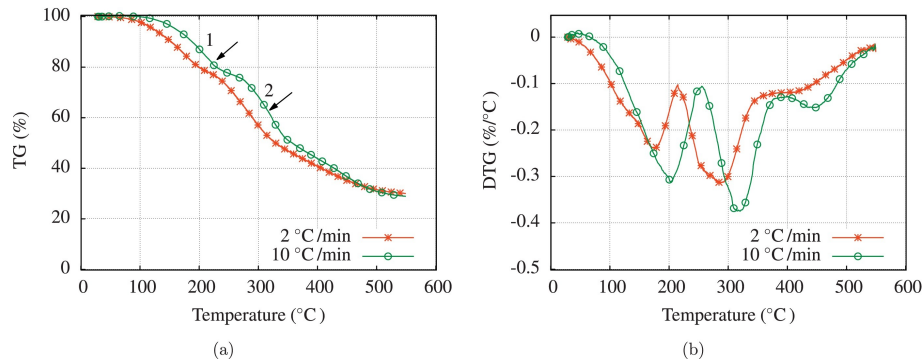


FIGURE 2.1 – ATG du polyuréthane (issue de Jomaa *et al.* (2015))

Les deux études font apparaître assez nettement deux domaines de perte de masse lors du vieillissement thermique. Le premier s'étend entre 100°C et 240°C. La perte de masse est de l'ordre de 20-27%. Le pic de perte de masse se situe vers 200°C. On explique ce premier domaine de dégradation par l'évaporation du solvant utilisé par Montupet qui constitue environ 30% de la résine. Il s'agit d'un naphta lourd s'évaporant dans cette plage de température.

Le deuxième domaine d'évaporation se situe entre 280°C et 580°C. Le pic de perte de masse se



FIGURE 2.2 – ATG du polyuréthane (issue de Bargaoui *et al.* (2017))

situe autour de 400°C. Cette seconde plage est plus complexe et est vraisemblablement causée par la formation de plusieurs gaz du fait de l'oxydation de la résine.

Passé 600°C, les deux études montrent qu'il reste encore des résidus de la résine (environ un quart de la masse totale).

### 2.1.2 Microstructure et évolution en vieillissement thermique

L'ajout d'une cimentation peut avoir plusieurs conséquences sur la microstructure du sable cimenté à l'échelle de l'agrégat. Les possibilités sont mises en image dans la Figure 2.3. La première possibilité consiste à lier les grains entre eux par des ponts. Cela survient généralement dans le cas d'une faible cimentation. La pression capillaire et la mouillabilité vis-à-vis des grains de sable du liant liquide avant réticulation entraîne cette répartition du liant sous forme de ponts entre les grains de sable. Si l'on augmente le taux de liant dans le mélange, la configuration change et on ne parle plus de liant mais de matrice. Une dernière configuration est possible : le liant va enrober chaque grain. Cet enrobage va aussi générer des ponts entre grains.

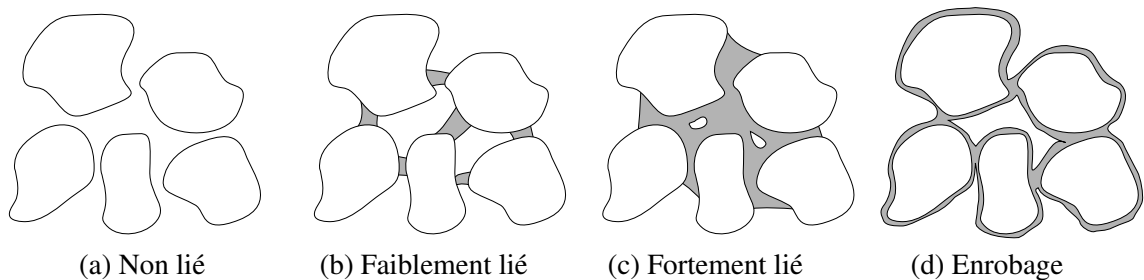


FIGURE 2.3 – Cimentations possibles pour un agrégat de grains (adapté de Topin (2008))

Le taux de polyuréthane utilisé pour fabriquer des noyaux de fonderie est de l'ordre de 1% massique. Le liant va alors faire des ponts entre les grains de sable comme présenté en Figure 2.4 (b). D'après Menet (2017), les ponts de résine sont relativement bien répartis au sein des noyaux, après observations en microscopie électronique à balayage (MEB). Les ponts ont une

section ellipsoïde dont les axes moyens sont estimés à 45 et 30  $\mu\text{m}$  (le diamètre moyen d'un grain est de 250  $\mu\text{m}$ ).

Il est à noter que le liant inorganique, expérimenté à l'heure actuelle par Montupet, va plutôt enrober les grains. Le taux de résine est cependant plus élevé : environ 2% massique.

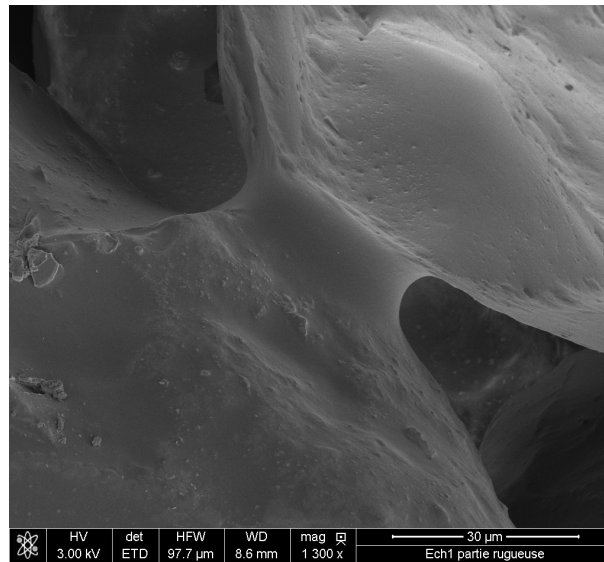


FIGURE 2.4 – Pont de liant inter-grain (issu de Bargaoui *et al.* (2017))

Si l'on teste les noyaux de fonderie en flexion 4 points, les faciès de rupture des ponts de liant intergranulaires évolue sensiblement en fonction de la température de vieillissement  $\theta$ . L'évolution de ces faciès de rupture est présentée en Figure 2.5.

Les ponts non vieillis ont un faciès de rupture en "écailles", typique d'une rupture semi-fragile. La rupture fragile survient par à-coups (écailles) mais est entrecoupée par de la plasticité. Cette plasticité est d'ailleurs visible sur la Figure 2.5 a. : il s'agit des zones plus blanches séparant les écailles nettes.

Pour des températures de vieillissement plus élevées, le premier pic d'évaporation mis en évidence par l'ATG se caractérise par des ponts de liant beaucoup plus poreux. Ces bulles d'évaporation vont rendre la liaison résine-grain beaucoup moins forte (diminution des surfaces de grain en contact avec la résine). La résine ne présente plus un comportement élastoplastique (plus de faciès en écailles). Ces bulles vont grossir à mesure que la température de vieillissement augmente.

Pour de plus hautes températures, situées dans le deuxième domaine de décomposition de la résine, on note aussi l'apparition de ponts décollés voire complètement dégradés.

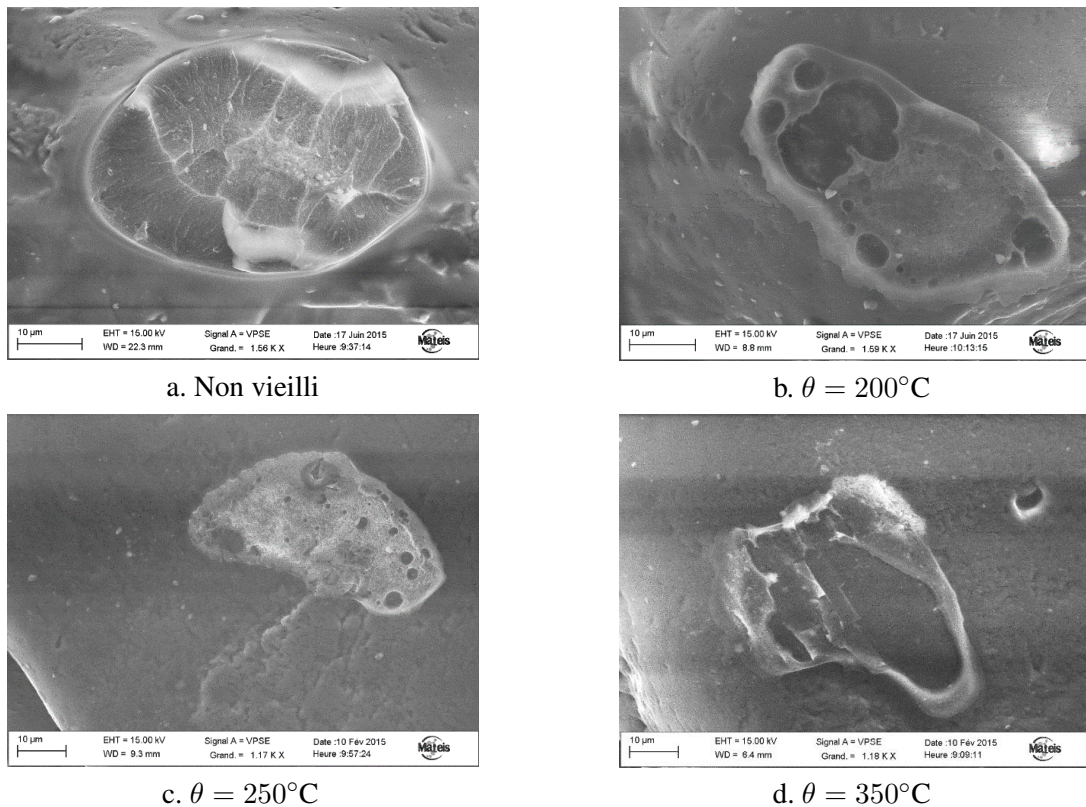


FIGURE 2.5 – Evolution des faciès de rupture de la résine (issu de Menet (2017))

## 2.2 Mécanique des matériaux granulaires

### 2.2.1 Les matériaux granulaires cimentés

Les noyaux de fonderie s'inscrivent dans la famille des matériaux granulaires cimentés. On peut en distinguer deux types : ceux à cimentation naturelle et ceux à cimentation artificielle. La première sous-famille inclut notamment les sables argileux, le sable humide ainsi que les roches douces comme le grès (Dewers *et al.*, 2017) et les conglomérats (brèches, poudingues et tillites). On peut aussi citer l'albumen de blé étudié par Topin (2008).

Les matériaux artificiellement cimentés sont notamment les asphaltes, les bétons, les sols injectés (à liant polymère, plus particulièrement), ainsi que les sables de fonderie (à liant furanique, polyuréthane, ou inorganique par exemple).

D'un point de vue strictement mécanique, la cimentation permet notamment de tolérer de la traction (comportement cohésif) et augmente globalement certaines caractéristiques mécaniques comme le module d'Young ou la résistance à la compression. C'est cette dualité entre le comportement frictionnel des sols et le comportement cohésif dû à la cimentation qui rend le comportement mécanique de matériaux granulaires cimentés particulièrement complexe et riche, que ce soit au niveau des grains, d'un assemblage de grains ou à plus grande échelle.

Dans tout ce qui suit, on s'intéressera uniquement aux matériaux granulaires faiblement cimen-

tés.

### 2.2.2 Le squelette granulaire

Lors de l'application d'une charge sur une structure en matériau granulaire, des chaînes de transmission des efforts apparaissent et mettent en évidence le squelette granulaire. Ce sont des contacts intergranulaires ou grain-résine-grain qui vont porter la charge appliquée. Ces chaînes de transmission ont été mise en évidence par Drescher et de Josselin de Jong (1972) après l'étude de la compaction de cylindres photoélastiques. Une illustration de ce réseau de contacts est proposée en Figure 2.6.

Ce phénomène de squelette granulaire est une caractéristique typique des matériaux granulaires, cimentés ou non. Il a un impact de premier plan concernant le comportement global du matériau. Ceci distingue les matériaux granulaires cimentés des composites plus traditionnels où ce phénomène n'apparaît pas. Il est à noter que l'application d'une force peut provoquer une réorganisation du squelette granulaire afin de mieux répartir le réseau de contacts. A l'échelle macroscopique, cela peut se traduire par une augmentation ou une diminution du volume de la structure suivant le confinement.

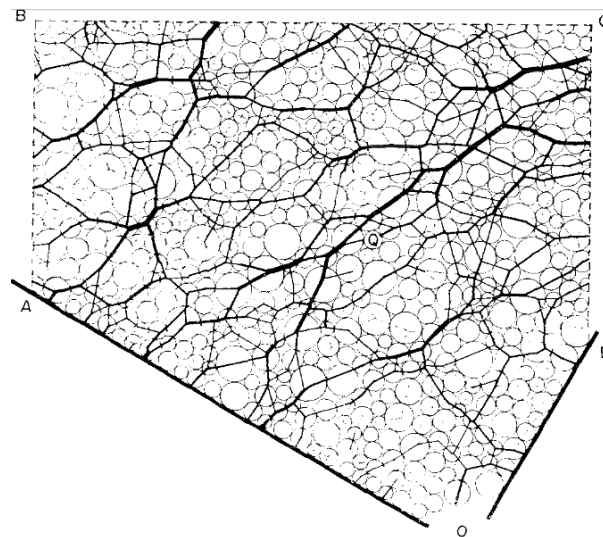


FIGURE 2.6 – Réseau de contacts lors de la compaction (issu de Drescher et de Josselin de Jong (1972))

L'étude du squelette granulaire d'un matériau cimenté est peu présente dans la littérature. On peut toutefois mettre en évidence les travaux de Topin *et al.* (2007), Affes *et al.* (2012) et Chichti *et al.* (2016) au LMGC à Montpellier. Le comportement d'un agrégat d'un matériau cimenté est simulé grâce à une méthode appelée Lattice Element Method (LEM). Cette méthode consiste à discrétiser le milieu par un réseau triangulaire. On distingue trois phases pour le matériau cimenté (le grain, le liant et le vide), et deux interfaces (contact grain-grain ou contact grain-liant-grain). Un exemple de maillage est proposé en Figure 2.7 où le grain est de l'amidon

(*starch*) et le liant de la protéine. Les éléments 1D du treillis peuvent être de type ressort linéaire élastique fragile ou poutre fragile. Après application d'une perturbation, les positions des nœuds sont calculées par minimisation de l'énergie potentielle.

Ces études ont permis de montrer que lors d'une compression, les contraintes vont préférentiellement se transmettre par contact sur le squelette granulaire. Cependant, en traction, c'est la résine ou la matrice qui porte la contrainte. Il découle une différence de comportement en traction et en compression du matériau, ainsi que des modules d'Young différents. Un exemple de chaîne de contacts d'un agrégat en compression et en traction est illustré en Figure 2.8.

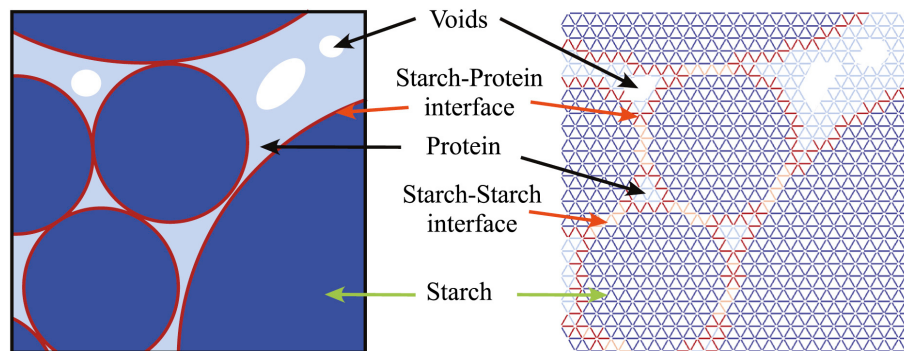


FIGURE 2.7 – Maillage d'un agrégat par la méthode LEM (issu de Chichti *et al.* (2016))

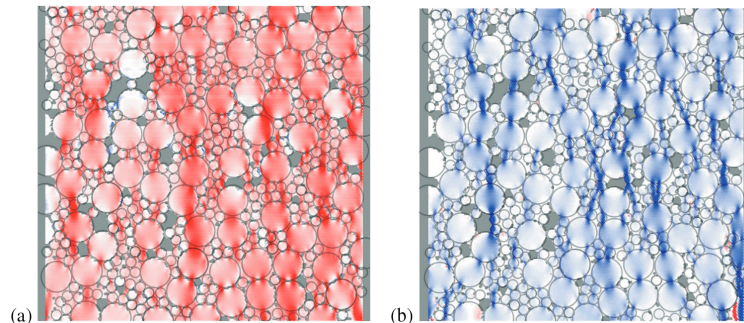


FIGURE 2.8 – Comportement de l'agrégat (a) en compression (b) en traction (issu de Topin (2008))

Lors de leur sollicitation, les grains peuvent aussi former des arches ou des voûtes. Les formations d'arche sont notamment étudiées pour les écoulements de silos où les grains peuvent obstruer la sortie. Un effet de "jamming" peut aussi être observé : le squelette granulaire portant la transmission des efforts, certains grains peuvent se trouver complètement déchargés et coincés. Ces deux phénomènes, propres aux matériaux granulaires, sont illustrés en Figure 2.9.

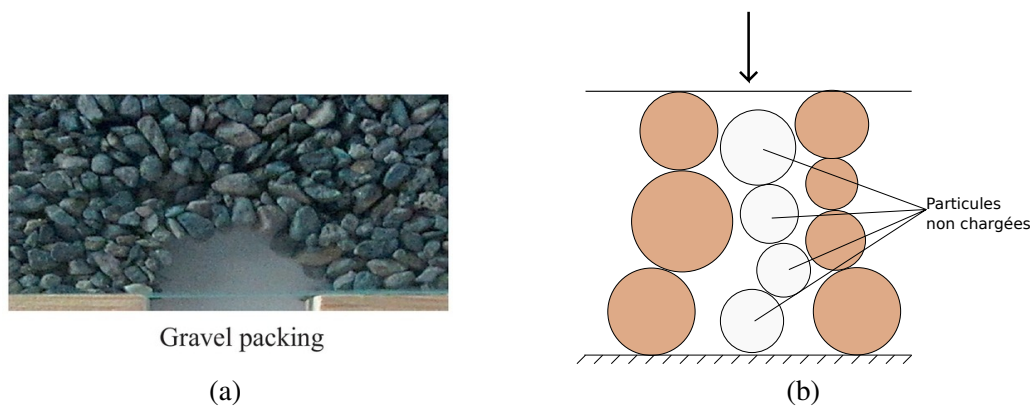


FIGURE 2.9 – Effet de voûte : (a) effet d'arche dans un écoulement de silo (issu de Ahmadi et Hosseininia (2018)) (b) "jamming" (adapté de Topin (2008))

### 2.2.3 Localisation de la déformation

En compression triaxiale, les matériaux granulaires, cimentés ou non, vont rompre selon une bande de cisaillement. La taille de la zone de concentration des déformations est de l'ordre de quelques grains, et dépend naturellement de la taille de ceux-ci. Une illustration peut être trouvée dans Desrues et Andò (2015) où deux échantillons de taille de grains différentes ont été testés en compression triaxiale. Le sable fin a un diamètre moyen de 0.32mm tandis que le grossier 3.2mm. Les échantillons en fin d'essai sont visibles en Figure 2.10. Cette localisation semble lier le matériau à son échelle microscopique mais aussi à son échelle macroscopique. La bande dépend du grain de sable, mais aussi de micro-défauts locaux. L'initiation de la bande transforme aussi l'échantillon, qui ne peut plus être considéré comme un ensemble homogène mais comme structure.

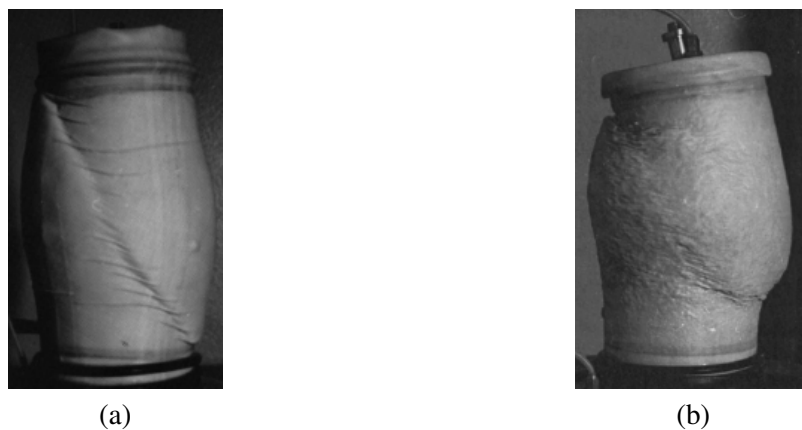


FIGURE 2.10 – Bande de localisation après essai de compression triaxiale : (a) sable fin (b) sable grossier (issu de Desrues et Andò (2015))

Pour étudier plus en détails ce phénomène de localisation de la déformation au cours d'un



chargement, des méthodes de mesure de champs de déformation complets ont été développées et utilisées dans la littérature. Ces méthodes s'appuient généralement sur de l'analyse d'images. Dès les années 60, l'utilisation tomographie aux rayons X à Cambridge a permis la détermination de champs 2D (voir Roscoe (1963), Arthur *et al.* (1964) et Roscoe (1970)).

Durant les années 80-90, la localisation du sable a été étudiée par Desrues et son équipe à Grenoble, avec notamment l'utilisation de la False Relief Stereophotogrammetry (stéréophotogrammétrie de faux relief). Cette méthode est décrite plus précisément dans Desrues et Duthilleuil (1984) et a été appliquée pour la première fois sur des géomatériaux pendant les travaux de thèse de Desrues (Desrues, 1984). Un tour d'horizon des résultats expérimentaux obtenus à Grenoble avec la FRS concernant la localisation des déformation dans le sable est disponible dans Desrues et Viggiani (2004).

La localisation a aussi été étudiée de manière expérimentale à Karlsruhe en Allemagne dans les années 70 par l'équipe de Vardoulakis (voir par exemple Vardoulakis et Graf (1985)). De plus, avec les développements de Rice (voir Rice (1973) et Rice (1976)), Rudnicki et Rice (1975), les travaux de Vardoulakis ont posé les bases de la théorie de la bifurcation dans les géomatériaux (voir par exemple Vardoulakis (1976) et Vardoulakis *et al.* (1978)). Depuis, l'utilisation de la tomographie aux rayons X (X-ray CT), de résolution de plus en plus élevée, s'est démocratisée. Cette méthode non destructive permet notamment de faire des observations à l'intérieur de l'échantillon. Les méthodes de corrélation de volume (DVC : *Digital Volume Correlation*) sont applicables pour des données 3D depuis le milieu des années 2000. Cela permet désormais d'avoir accès à tout le champ 3D de déformation au cours d'un essai (Viggiani et Hall, 2008).

Cette technique a permis d'étudier plus finement la localisation qui intervient manifestement au cours d'essais standards. On peut citer notamment Desrues *et al.* (1996) où l'influence des conditions aux limites lors d'essais de compression triaxiale s'est montrée prédominante sur des éventuels défauts locaux. Malgré tout, la localisation dans le sable non structuré demeure un problème épineux où beaucoup de questions restent sans réponse concernant la quantification de l'impact de caractéristiques à l'échelle microscopique (taille, distribution ou forme, des grains, défauts locaux,...) ou à l'échelle macroscopique (à la taille de l'échantillon) (voir Desrues et Andò (2015)). Hall *et al.* (2010) a montré que la rotation des grains a un impact sur la bande de cisaillement finale.

Une autre question ouverte concerne l'apparition des bandes de cisaillement. De nombreuses études montrent que les géomatériaux présentent des initiations de bande de localisation avant le pic de la courbe de chargement (appelées bandes pré-pic). On peut citer à titre d'exemple Desrues *et al.* (1996); Desrues et Viggiani (2004); Alshibli *et al.* (2000); Otani *et al.* (2002); Hall *et al.* (2010); Andò *et al.* (2012); Desrues et Andò (2015); Takano *et al.* (2015); Le Bouil *et al.* (2014).

On peut notamment citer l'étude menée par Le Bouil *et al.* (2014) sur un échantillon constitué de billes de verre de diamètres compris entre 200 et 300  $\mu\text{m}$ . L'éprouvette y subit une pression de confinement de 30kPa. Un déplacement vertical est imposé et on suppose des déformations planes. L'essai est observé par une méthode de mesure de champs 2D appelée *Diffusive-Wave Spectroscopy*. L'étude de ce géomatériaux a permis d'observer trois domaines d'inhomogénéité locale de la déformation (voir Figure 2.11 (a)). En tout début de chargement, des événements isolés surviennent. Avant le pic de la courbe de chargement, des bandes intermittentes apparaissent.

Ces bandes apparaissent et disparaissent au cours de l'essai. Leur angle varie aussi entre  $45^\circ$  et  $68^\circ$  environ (Figure 2.11 (c)). Passé le pic, les bandes de cisaillement sont permanentes (Figure 2.11 (a)). Le fait de savoir pourquoi telle ou telle bande a fini par devenir permanente reste toujours une question non résolue. Ces résultats ont aussi été analysés plus tard par Nguyen et Amon (2016) qui lie ces bandes à un phénomène de bifurcation.

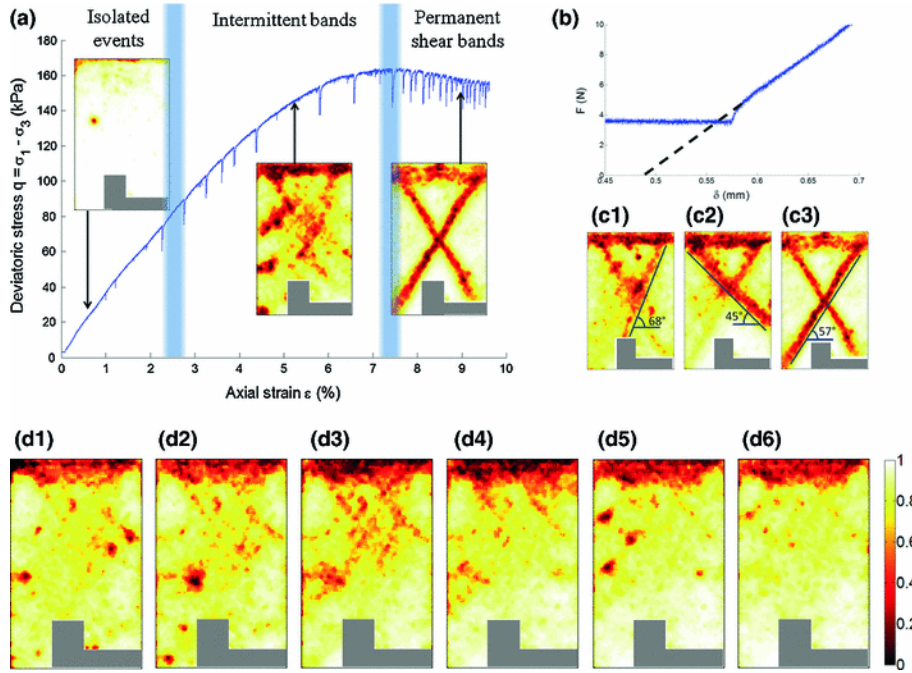


FIGURE 2.11 – Bandes de localisation intermittentes (issu de Le Bouil *et al.* (2014))

## 2.2.4 Comportement à l'échelle macroscopique

### 2.2.4.1 Hypoélasticité

La plupart des sols exhibent un comportement dit hypoélastique. Ceci a notamment été mis en évidence lors d'essai de compression hydrostatique où on impose une compression hydrostatique à cisaillement nul ( $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ ). On constate alors que les sols présentent une fraction volumique de vide,  $v$ , qui décroît logarithmiquement avec la pression hydrostatique  $p$  exercée. Pour  $p < p_c^0$ , la pression de consolidation initiale, la compression est réversible (segment IA de la Figure 2.12). La pente de la courbe  $(p, v)$  est  $\kappa^*$ , coefficient élastique de gonflement.

On s'intéresse à l'essai modélisé, qui ne tient notamment pas compte de la boucle d'hystérésis ( $B \neq B'$ ). Sur le segment AB où  $p > p_c^0$ , la pression continue d'augmenter (pas de décharge). La valeur de la pente change et vaut maintenant  $\lambda^*$ , avec  $\lambda^* > \kappa^*$ . Arrivé au point B, la pression atteint un nouveau maximum  $p_c^1$ . Une décharge est alors engagée. Un comportement inélastique est alors mis en évidence : au lieu de remonter le segment BA, on effectue un nouveau trajet, BC, de pente  $\kappa^*$  (comme IA). Le comportement du sol sur ce segment est réversible.



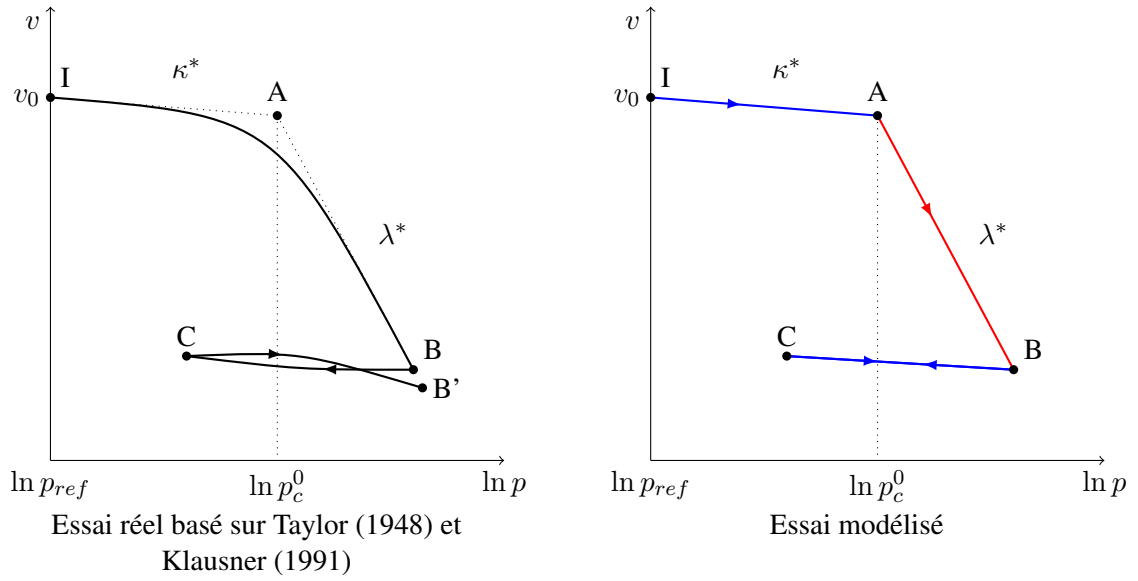


FIGURE 2.12 – Chargement/déchargement hydrostatique

La droite de pente  $\lambda^*$  (segment AB) est appelée *normal compression line* ou *normal consolidation line* (NCL) (voir (Jirasek et Bazant, 2002)). Pour  $p < p_c^0$  ou en décharge/charge, on appelle ces lignes les *swelling lines* (SL) (segments IA et BC). Ces lignes sont toutes parallèles. Le comportement du sol en compression hydrostatique dépend donc d'une pression de consolidation correspondant à la pression maximum qu'il a subi. Passé ce seuil, le comportement est inélastique irréversible (sur la NCL). On observe un comportement ressemblant à de l'écroutissage : la pression maximum admissible,  $p_c$ , augmente tant qu'on ne décharge pas (ou qu'il n'y a pas rupture). La courbe  $\ln p = f(v)$  fait d'ailleurs penser à une courbe de traction classique d'un métal écouissable.

Décrivons maintenant en terme d'équations le comportement du matériau sur ces différents segments :

#### Sur la NCL :

Dans ces conditions, au niveau de la NCL on écrit d'après la Figure 2.12 :

$$v = v_{ref} - \lambda^* \ln \frac{p}{p_{ref}} \quad (2.1)$$

Nous avons en outre pour des changements de volume infinitésimaux :

$$\varepsilon_m = \text{tr } \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{v - v_0}{v_0}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\varepsilon_m &= \frac{v_{ref} - v_0}{v_0} - \frac{\lambda^*}{v_0} \ln \frac{p}{p_{ref}} \\ &= \varepsilon_{m,ref} - \frac{\lambda^*}{v_0} \ln \frac{p}{p_{ref}}\end{aligned}$$

En prenant  $v_{ref} = v_0$  l'équation précédente se simplifie ( $\varepsilon_{m,ref} = 0$ ) :

$$\varepsilon_m = -\frac{\lambda^*}{v_0} \ln \frac{p}{p_0} \quad (2.2)$$

En outre on a :

$$\dot{\varepsilon}_m = -\frac{\lambda^*}{pv_0} \dot{p} \quad (2.3)$$

**Sur la SL :**

Un raisonnement analogue mène au résultat :

$$\varepsilon_m = \varepsilon_{mc} - \frac{\kappa^*}{v_0} \ln \frac{p}{p_c} \quad (2.4)$$

où  $p_c$  correspond à la pression où on a commencé à décharger (Figure 2.12) appelée pression de préconsolidation. De même :

$$\dot{\varepsilon}_m = -\frac{\kappa^*}{pv_0} \dot{p} \quad (2.5)$$

**Cas général :**

On se place dans le cas d'un échantillon qui a atteint une pression de préconsolidation de  $p_c$ . Pour des pressions moindres que  $p_c$ , le comportement du matériau est régi par l'équation 2.5 en charge ou en décharge. Le comportement du matériau est réversible : on peut considérer que c'est de l'élasticité non linéaire. Une fois atteint  $p_c$ , la NCL est atteinte. Si la pression augmente, on continue sur la NCL et l'équation de comportement à considérer est 2.3. Cependant, en cas de décharge, on atteint une nouvelle SL, parallèle à la précédente. Un tel comportement est non réversible et est assimilé à de l'inélasticité (voire de la plasticité au sens large).

Définissons  $\dot{\varepsilon}_m^p$ , le taux de déformation plastique volumique, comme la différence entre le taux de déformation totale  $\dot{\varepsilon}_m$  de l'équation 2.3 et le taux de déformation élastique  $\dot{\varepsilon}_m^e$  de l'équation 2.5 :

$$\dot{\varepsilon}_m^p = \dot{\varepsilon}_m - \dot{\varepsilon}_m^e = \frac{\lambda^* - \kappa^*}{pv_0} \dot{p} \quad (2.6)$$

La pression de consolidation ou de préconsolidation  $p_c$  est une variable qui permet de prendre en compte l'état de contrainte du sol et son historique de chargement. L'exploitation des essais de compression isotrope permet d'établir son équation d'évolution :

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = \frac{v_0}{\lambda^* - \kappa^*} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (2.7)$$

Le signe de l'incrément de pression de préconsolidation dépend du signe de l'incrément des déformations plastiques volumiques. Ainsi, pour une augmentation de volume,  $p_c$  va augmenter (et inversement). Les changements de volume induisent donc un adoucissement ou un durcissement du sable. Les changements de volume, déterminés par les déformations plastiques volumiques, sont déterminés quant à eux par l'écoulement plastique du sable.

### 2.2.4.2 Etat Critique

Le comportement des géomatériaux a aussi été étudié à l'échelle dite macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de l'échantillon testé. Tous les développements modernes, dans lequel s'inscrivent les travaux de cette thèse, se basent sur les travaux pionniers de l'équipe de K.H. Roscoe à l'Université Cambridge à la fin des années 50/début des années 60. Cette notion d'Etat Critique découle d'observations expérimentales mais demeure étroitement liée aux modèles élastoplastiques développés à Cambridge : le modèle de Cam-clay (Roscoe *et al.*, 1958) et le modèle de Cam-clay modifié (Roscoe *et al.*, 1963; Roscoe et Burland, 1968).

Le concept d'Etat Critique met en évidence une particularité des géomatériaux : la dépendance au confinement de l'écoulement plastique. Expérimentalement, on constate qu'un matériau faiblement confiné va avoir tendance à se dilater et adoucir tandis qu'au contraire, lors d'un confinement fort, le matériau va se contracter et durcir.

On considère un chargement triaxial. La contrainte équivalente de von Mises est notée  $q$  tandis que la pression hydrostatique est  $p$ . On définit le confinement comme le rapport  $q/p$ . Ce qu'on appelle état critique correspond à l'état intermédiaire entre ces deux domaines de confinement. Il existe une valeur du confinement, généralement notée  $M$ , telle que le matériau se déforme à volume constant. La notion de *droite d'état critique* ou *critical state line* (CSL) suppose que le paramètre  $M$  précédemment mentionné est constant pour le matériau. Cela implique notamment qu'il ne dépend pas du chargement. Cette hypothèse permet de définir une droite de pente  $M$  divisant le plan  $(p, q)$  (Figure 2.13) :

- Au-dessus de la droite : le sol se dilate, avec un comportement adoucissant
- Sur la droite : le sol se déforme à volume constant, avec un comportement "plastique parfait"
- En dessous de la droite : le sol se contracte, avec un comportement durcissant

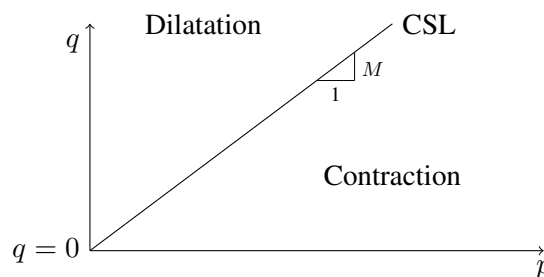


FIGURE 2.13 – Droite d'état critique

Il est à noter que si cet état critique peut facilement être observé pour les argiles, il demeure plus complexe à atteindre pour les sables d'après Yu (1998).

## 2.3 Comportement mécanique des noyaux à liant polyuréthane

### 2.3.1 Les études expérimentales sur les noyaux de fonderie

La bibliographie concernant l'étude de sables artificiellement cimentés est pour le moins limitée. Beaucoup de publications sont des études industrielles où l'influence de la résine ou du taux de résine ainsi que la granulométrie du sable est évaluée. Stauder *et al.* (2016) a récemment étudié un sable de fonderie en flexion 3 points en faisant varier la résine et aussi le temps de stockage. Ding *et al.* (1997) a évalué l'effet du taux de résine. Fox *et al.* (2012) fait varier le type de résine et la température d'essai. Concernant le sable en lui-même, on peut citer Ratke et Brück (2006) qui ont testé différentes granulométries et certains effets de forme de grains.

Concernant le cas très spécifique des noyaux de fonderie à liant polyuréthane, la littérature est très limitée, mais présente. Il s'agit, en fait, de précédents travaux de thèses initiés par Montupet :

- Jomaa *et al.* (2015) étudie plus particulièrement la résine polyuréthane utilisée et notamment sa dégradation thermique
- Bargaoui *et al.* (2017) étudie la déformée des noyaux durant la coulée de l'aluminium. Le fluage a été expérimentalement étudié
- Menet (2017) étudie expérimentalement les comportements mécaniques des noyaux en fonction de la température de vieillissement des noyaux dans le cadre de l'ANR FIMALIPO.

Cette présente section va s'appuyer plus largement des essais de Claire Menet qui ont servi de support à la mise au point, la calibration et à la validation du modèle élastoplastique développé dans cette thèse. Il est toutefois bon de noter que la thèse de Claire Menet et celle-ci ont toujours eu de fortes interactions. Certains essais présentés dans cette section ont été suggérés à Claire Menet afin de servir à la calibration et à la validation du modèle.

### 2.3.2 Bilan des essais réalisés dans le cadre de l'ANR FIMALIPO

La présente partie ne va s'intéresser qu'aux essais qui ont été utilisés pour la modélisation. Des essais de fluage et de fatigue ont notamment été effectués dans le cadre de l'ANR FIMALIPO (voir Menet (2017)) mais ne seront pas explicités dans ce manuscrit.

Le comportement des géomatériaux est connu pour être particulièrement complexe. Il dépend notamment du cisaillement, mais aussi des déformations volumiques. Contrairement aux métaux, l'influence du confinement est de premier ordre. Les essais de caractérisation de sols doivent donc faire varier le plus possible la *triaxialité* des déformations que l'on définit comme le rapport entre les déformations de cisaillement et les déformations volumiques.

Généralement, des essais de compression dite "triaxiale" sont effectués où la pression de confinement est imposée (voir Klausner (1991) pour une description quasi exhaustive d'essais standards de mécanique des sols). Dans le cadre de l'ANR FIMALIPO, de tels essais n'étaient pas disponibles. Toutefois, cela n'a pas été une impasse. Les essais sont focalisés sur trois principaux tests qui ont permis de tester le matériau sous trois types de confinement. Ces essais ont été

menés à différentes températures de vieillissement afin d'évaluer l'impact de la dégradation thermique de la résine détaillée en Section 2.1 sur les propriétés mécaniques macroscopiques. Les températures de vieillissement  $\theta$  retenues sont  $100^{\circ}\text{C}$ ,  $150^{\circ}\text{C}$ ,  $200^{\circ}$ ,  $250^{\circ}\text{C}$ ,  $300^{\circ}\text{C}$  et  $350^{\circ}\text{C}$ . Les échantillons ont été vieillis dans un four pendant 30 min avant d'être testés à température ambiante. Ces essais sont :

- **Die pressing ou essai de compression oedométrique** : cet essai consiste à imposer des déplacements latéraux nuls et à augmenter le déplacement axial pour une éprouvette cylindrique. Le dispositif expérimental est illustré en Figure 2.15. Des cylindres de 30mm de diamètre et 45mm de hauteur sont insérés dans une matrice en aluminium, spécialement conçue afin d'avoir un diamètre intérieur ad hoc pour l'essai. Un piston en acier a été usiné pour glisser sans ajouter de friction à l'intérieur de la matrice. Le bas de l'échantillon a un déplacement axial nul. Ce test permet de tester le comportement du matériau à haut confinement. Il est très proche de l'essai de compression isotrope décrit dans la Section 2.2.4.1. Ami Saada *et al.* (1996) utilisent notamment cet essai pour déterminer les coefficients de gonflement  $\kappa^*$  et  $\lambda^*$ . Un résultat de l'essai de die pressing avec plusieurs cycles de charge/décharge est présenté en Figure 2.16
- **Flexion 4 points** : des éprouvettes de section  $22.5 \times 22.5 \text{ mm}^2$  ont été testées sous flexion. L'entre-axe est de 75mm. Les conditions aux limites et les dimensions sont précisés en Figure 2.14. Ce test permet de tester le comportement du matériau en traction, cette dernière étant permise uniquement grâce à l'apport de la cimentation artificielle. Les courbes effort-déplacement pour le noyau soumis à différentes températures de vieillissement sont résumées en Figure 2.17 (a). La Figure 2.17 (b) présente quant à elle l'évolution de la contrainte maximale à la rupture en fonction de la température de vieillissement.

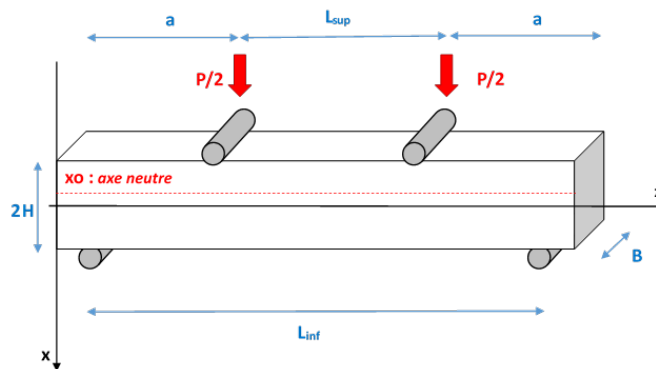


FIGURE 2.14 – Flexion 4 points - Conditions aux limites expérimentales (issu de Menet (2017))

- **Compression uniaxiale** : les éprouvettes testées sont cylindriques avec un rapport hauteur/diamètre de 1.5 (hauteur de 45 mm pour 30 mm de rayon). Le bas de l'échantillon a un déplacement axial nul, tandis que le haut subit un déplacement imposé. On relève la réaction au niveau de la traverse. Le déplacement axial est déterminé grâce à un extensomètre de 25mm. Cet essai permet d'évaluer le comportement du matériau dans une configuration intermédiaire entre la prédominance du cisaillement et celle de

la pression hydrostatique, même s'il reste un essai à confinement faible. Les courbes effort-déplacement pour le noyau soumis à différentes températures de vieillissement sont résumées en Figure 2.18 (a). La Figure 2.18 (b) présente quant à elle l'évolution de la réaction maximale à la rupture ( $F/S_0$ ) en fonction de la température de vieillissement.

- **Essai de compression uniaxiale cyclé** : le matériau va subir des cycles de charge/décharge progressifs jusqu'à rupture. Ces essais permettent d'évaluer l'endommagement du matériau en déterminant la perte de raideur macroscopique au cours du chargement. Cela permet de définir un endommagement macroscopique  $D$  tel que :

$$D = 1 - \frac{E}{E_0} \quad (2.8)$$

Un exemple de courbe force-déplacement pour un échantillon non vieilli est tracé en Figure 2.19. L'évolution de l'endommagement en fonction de la déformation axiale résiduelle (c'est-à-dire la déformation restante à la fin du cycle de décharge) et de la température de vieillissement est tracé en Figure 2.19

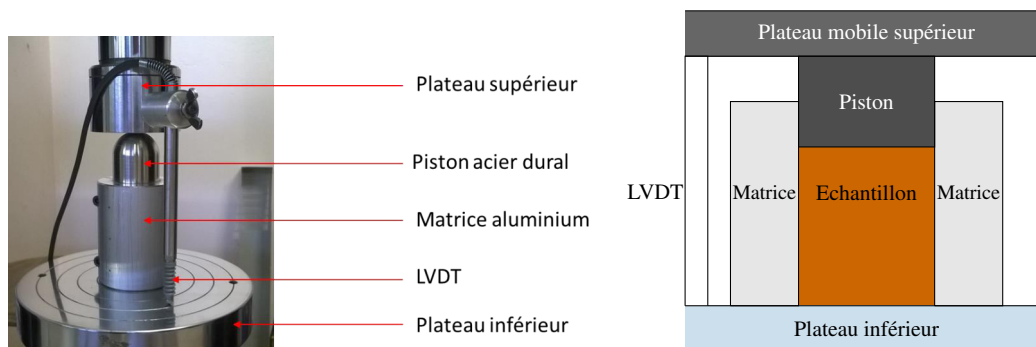


FIGURE 2.15 – Dispositif de l'essai de die pressing

Ces essais standards et monotones sont complétés par deux essais dits de "structure" :

- **Essai de Push-out** : ce test est originellement employé dans les études de composites afin de déterminer l'énergie de délaminage à l'interface matrice/fibre ainsi que la friction. Durant l'étude expérimentale de Menet (2017), cet essai a été adapté pour étudier l'interface noyau/aluminium après coulée.
- **Essai de compression uniaxiale monotone observé en tomographie aux rayons X** : ce test permet d'avoir accès au champ de déplacement pré-pic et de notamment étudier la localisation de la déformation.

### 2.3.3 Modes de rupture en compression uniaxiale

Les modes de rupture sont particulièrement intéressants pour les noyaux de fonderie. En flexion 4 points, la fissuration s'amorce toujours dans la face en traction. En compression uniaxiale, plusieurs faciès de rupture ont été observés :

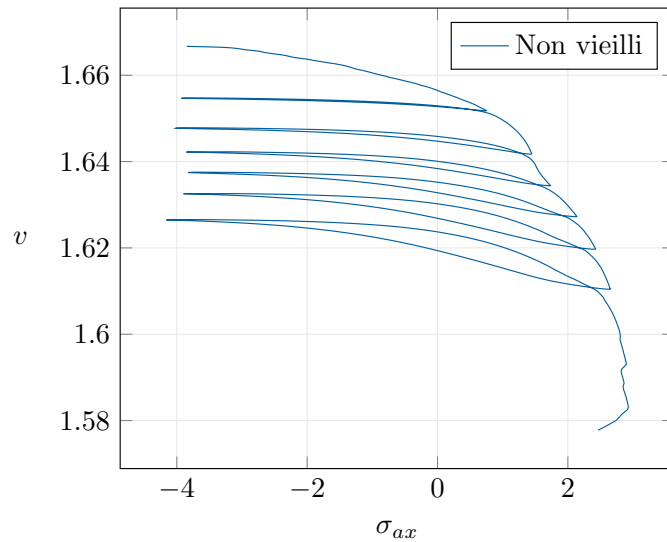


FIGURE 2.16 – Résultat d'un essai de die pressing avec cycles de charge/décharge - noyau non vieilli

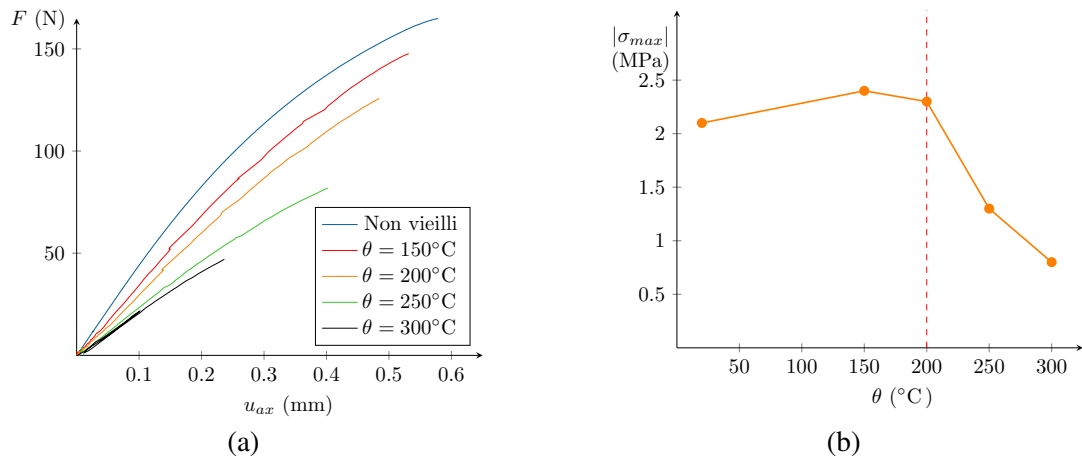


FIGURE 2.17 – Flexion 4 pts : (a) courbes force-déplacement (b) contrainte maximale

- **Cône** : un cône de frettage cause la rupture de l'échantillon et se détache sur l'une ou l'autre des extrémités de l'échantillon (voire les deux). Un tel mode de rupture est visible en Figure 2.20 (a). Ce mode de rupture demeure le mode de rupture prédominant, quelque soit la température de vieillissement.
- **Diagonale** : la rupture se fait selon un angle d'environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de compression (Figure 2.20 (b)). Ce mode de rupture est très répandu à faible vieillissement thermique.
- **Coin** : Il s'agit aussi d'un rupture à environ  $45^\circ$  par rapport à l'axe de chargement. Toutefois seule une partie (un coin) se détache (voir Figure 2.20 (c)). Ce mode est très

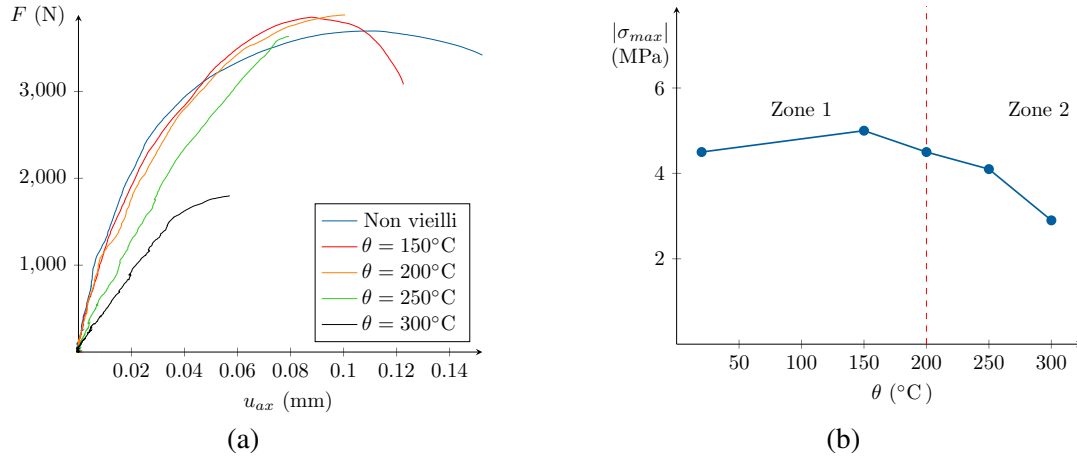


FIGURE 2.18 – Compression uniaxiale monotone : (a) courbes force-déplacement (b) contrainte maximale

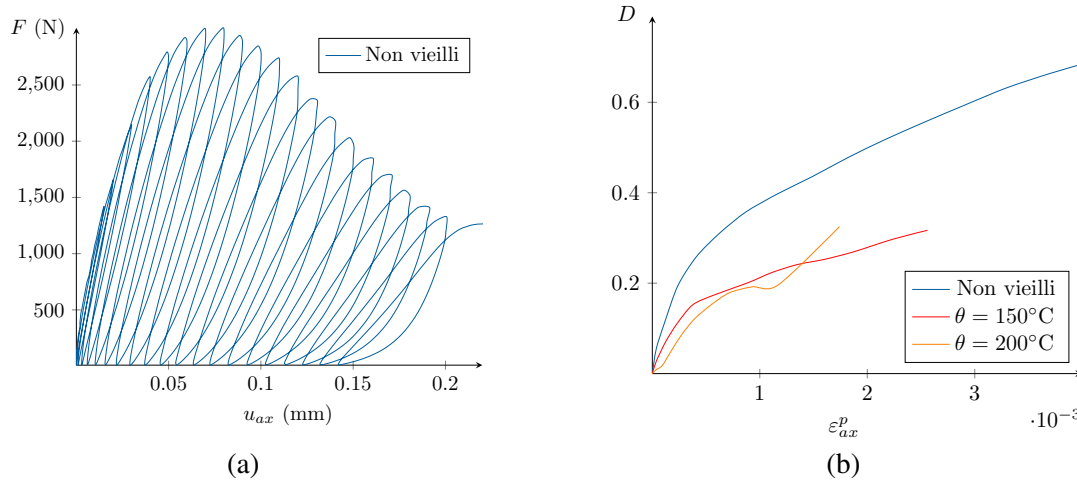


FIGURE 2.19 – Compression uniaxiale avec charge/décharge : (a) courbe force-déplacement (b)  $D$  en fonction de la déformation axiale résiduelle

répandu à faible vieillissement ( $\theta < 200^\circ\text{C}$ ), mais n'est pas apparu pour  $\theta \geq 300^\circ\text{C}$ .

- **Crayon** : Des petits coins se détachent d'une des extrémités de l'échantillon (Figure 2.20 (d)). Ce faciès de rupture est assez marginal, quelque soit la température de vieillissement.

### 2.3.4 Etude d'un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X

On s'intéresse ici à un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X, sur un échantillon non vieilli. L'échantillon traité est un parallélépipède ( $20. \times 22.4 \times 22.5$



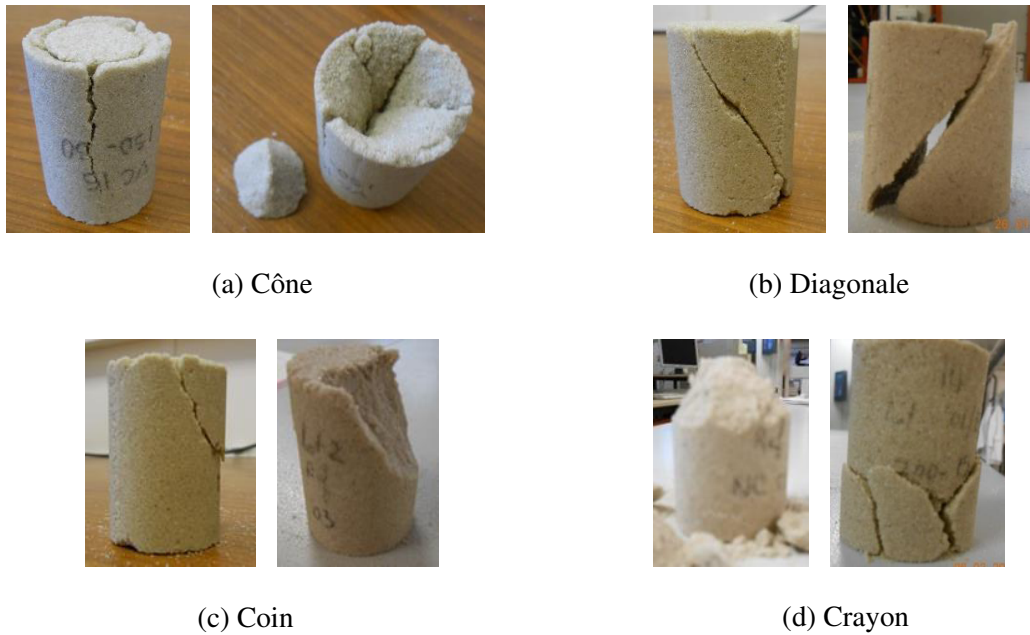


FIGURE 2.20 – Différents modes de rupture en compression uniaxiale

mm<sup>3</sup>). La charge a été augmentée avec une vitesse de déplacement constante de 0.5mm/min. Le chargement a été stoppé à 7 paliers, nommés  $P_1 \dots P_7$  afin de scanner l'échantillon sous un faisceau de tension 80 kV et d'intensité 280  $\mu$ A. A  $P_7$  l'échantillon est totalement rompu avec un mode diagonal. Le haut et le bas de l'échantillon ont été exclus des images à cause des artefacts induits par les plateaux servant à comprimer l'éprouvette. La réaction a été mesurée à ces paliers. Elle est tracée en Figure 2.21. On constate que les 6 premiers paliers se situent donc avant le pic.

Les champs de déplacement ont ensuite été déterminés grâce à un logiciel de corrélation d'images nommé Ufreckles, développé au LaMCos (voir Réthoré *et al.* (2007) et Réthoré (2018)). Une méthode éléments finis est utilisée afin de calculer le champ de déplacement. La taille de l'élément final est d'environ 0.5mm.

Le champ de déplacement est inhomogène au sein de l'échantillon, même bien avant le pic de la courbe de chargement, comme vu dans la bibliographie sur des géomatériaux (Section 2.2.3). Il est représenté en Figure 2.22. Des bifurcations pré-pic sont observées, aussi. La surface de rupture finale est de type "diagonale". Elle est visible en Figure 2.23 où Z est l'axe de compression.

Cet essai montre un comportement pré-pic très complexe du matériau. Il sera analysé plus finement en Section 4.1. Les conditions au limites de cet essai serviront de conditions aux limites de type Dirichlet pour des calculs éléments finis.

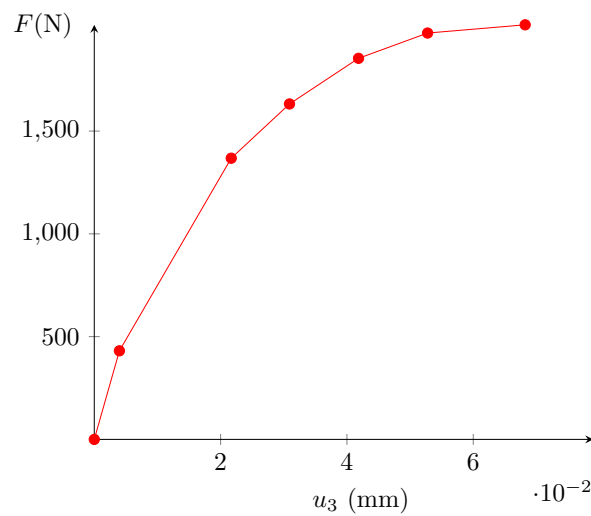


FIGURE 2.21 – Réaction mesurée en cours d’essai (paliers 1 à 6)

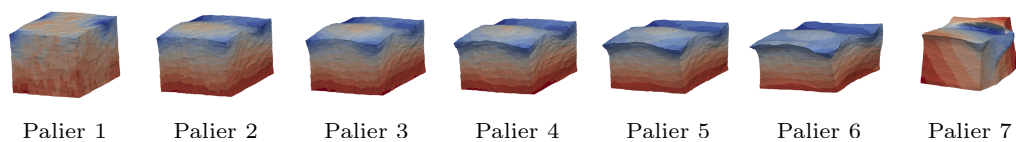
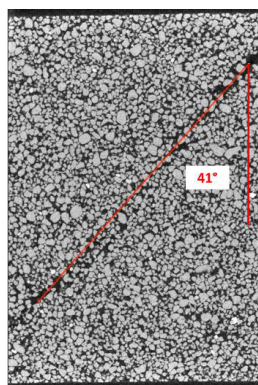
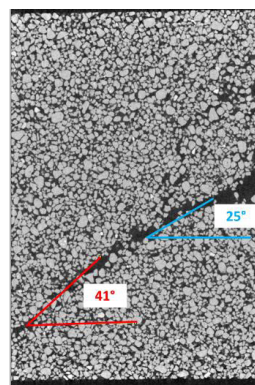


FIGURE 2.22 – Déplacement axial au cours de l’essai (déformée  $\times 75$  pour les paliers 1 à 6 et  $\times 30$  pour le palier 7)



(a) Au centre



(b) Proche du bord

FIGURE 2.23 – Coupe ZY de l’échantillon à rupture

### 2.3.5 Etude de l'essai de Push-out

#### 2.3.5.1 Description de l'expérience

Le test de push-out est originellement un test utilisé dans le milieu des composites. Le test consiste à pousser une fibre en dehors de la matrice afin de déterminer l'énergie de délaminage à l'interface matrice/fibre ainsi que la friction (Zhou *et al.*, 2001). L'essai est représenté en Figure 2.24.

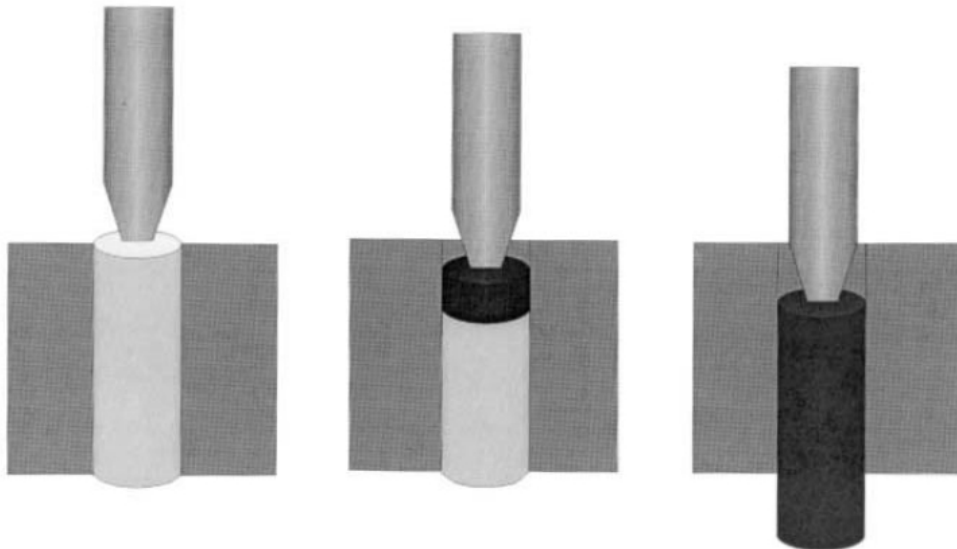


FIGURE 2.24 – Présentation de l'essai de push-out sur un composite fibreux polymère (issue de Zhou *et al.* (2001))

Un tel test a été adapté afin de modéliser l'interface entre les noyaux et l'aluminium après coulée. La "fibre" est un noyau de fonderie de 30mm de diamètre. On vient couler de l'aluminium autour de ce noyau non vieilli. Ainsi trois choses notables se produisent :

- Une dégradation thermique de la résine survient
- Il y a un important retrait thermique de l'aluminium qui vient précontraindre le noyau
- Un phénomène d'abreuvage apparaît au niveau de l'interface aluminium/noyau : l'aluminium va pénétrer entre les grains de sable. Cet abreuvage est illustré en Figure 2.25.

#### 2.3.5.2 Élaboration des éprouvettes

L'éprouvette avant coulée est présentée en Figure 2.26. Les tubes en métal du bas permettent l'évacuation des gaz de pyrolyse. Ces éprouvettes sont ensuite disposées dans un moule où l'on verse à la louche de l'aluminium liquide porté à une température mesurée (capteur dans la louche), voir Figure 2.27. L'aluminium est versé dans l'ouverture visible à droite. On teste plusieurs températures de coulée qui vont modifier l'abreuvage au niveau de l'interface entre l'aluminium et le sable. Un aluminium chaud épousera beaucoup plus la surface rugueuse du sable et sera plus cohésif a priori. Les quatre températures de coulée testées sont 690, 705, 720

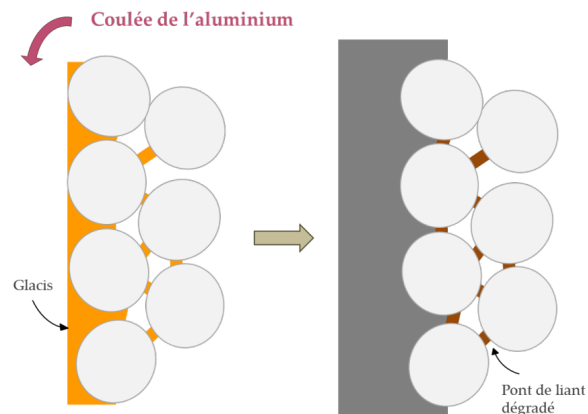


FIGURE 2.25 – Mise en images de l'abreuvage (issue de Menet (2017))



FIGURE 2.26 – Eprouvette avant coulée

et 735 °C sur du sable neuf. Il est bon de noter que si la température est connue au moment de la coulée, elle n'est pas connue au moment de son arrivée au noyau. Les pertes thermiques, indéniables, n'ont pas été mesurées.



(a) Eprouvette dans le moule



(b) "Clarinettes"

FIGURE 2.27 – Dispositif de coulé et "clarinettes" finales

Une fois l'aluminium solidifié, on extrait donc une éprouvette dite "clarinette" appelée ainsi en raison de sa forme (voir Figure 2.27 (b)).

Ces éprouvettes sont ensuite sciées afin de donner des éprouvettes cylindriques. Deux gradients thermiques ont été constatés :

- Un dans l'épaisseur du noyau (gradient latéral) : voir Figure 2.28.
- Un le long de la longueur de l'éprouvette (gradient longitudinal). Ce gradient suit en fait la coulée de l'aluminium et résulte des différentes pertes thermiques non maîtrisées lors de la coulée. Elles sont visibles sur les éprouvettes sciées présentées en Figure 2.29. Les éprouvettes (a) sont les plus proches de l'arrivée d'aluminium tandis que les éprouvettes (c) sont les dernières.



FIGURE 2.28 – Gradient thermique radial dans l'éprouvette

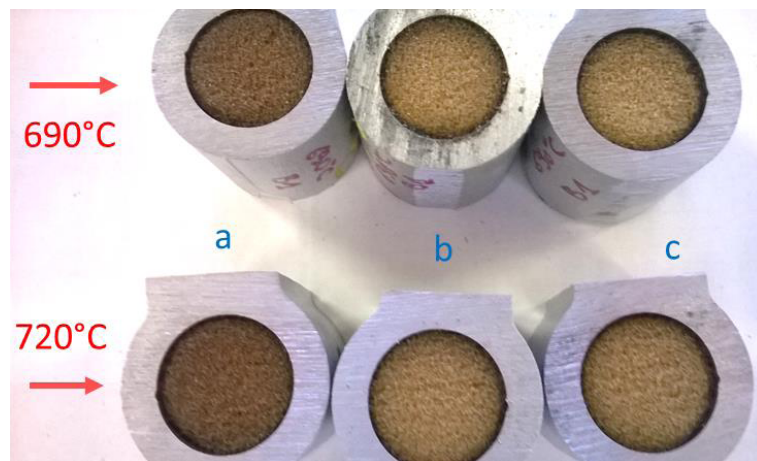


FIGURE 2.29 – Gradient thermique longitudinal dans l'éprouvette

On constate aussi un important retrait thermique : le diamètre, initialement de 30 mm, est réduit de 1 mm du fait de la contraction de l'aluminium lors du refroidissement.

### 2.3.5.3 Essai mécanique

Les éprouvettes testées sont donc les éprouvettes clarinettes sciées. Le dispositif expérimental est similaire à celui de l'essai de Die Pressing, sauf que l'échantillon enserré dans la matrice aluminium est désormais libre de s'écouler. Le dispositif expérimental est détaillé en Figure 2.30. Le piston va appuyer sans frotter sur la matrice afin de pousser les noyaux. Contrairement à des essais de push-out classiques sur des fibres de composites, on ne vient pas indenter la fibre pour la mettre en mouvement. L'appui est plat, et le déplacement au niveau du piston est supposé uniforme. Une fois la pièce extraite, on remarque que l'échantillon fragmenté a une forme de



FIGURE 2.30 – Dispositif expérimental de l'essai de push-out (issu de Menet (2017))

"cloche" et que le haut est largement plus fragmenté (voir Figure 2.31). Cela témoigne d'une grande inhomogénéité de la déformation au cours de l'essai.

Les différentes courbes macroscopiques contrainte-déformation sont tracées en Figure 2.32. Plusieurs constatations peuvent être faites :

- Quand la température de coulée augmente, la résistance maximale macroscopique diminue
- Il y a plusieurs épaulements avant le pic de la courbe de chargement, avec plusieurs fluctuations apparentes de décharge/charge
- Passé le pic, la courbe macroscopique montre plusieurs domaines de glissement entrecoupés de domaines de décohésion partielle

Ces deux derniers points sont mis en exergue dans la Figure 2.33. Ces alternances de glissements et de cohésion rappellent les phénomènes de "collé glissé", ou "*stick-slip*".





FIGURE 2.31 – Epreuve extraite finale

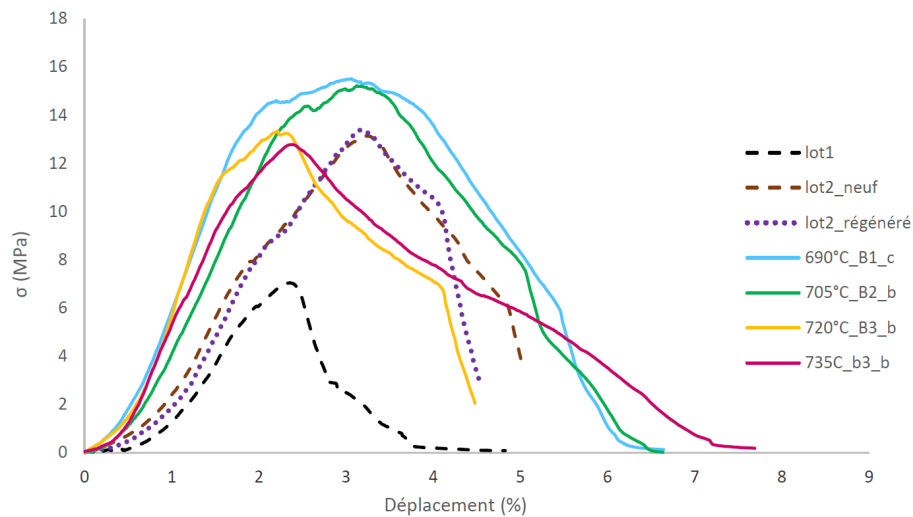


FIGURE 2.32 – Courbes macroscopiques de l'essai de push-out

## 2.4 Modèles constitutifs macroscopiques

### 2.4.1 Une alternative à la Discrete Element Method

Les noyaux de fonderie sont des agrégats de grains liés entre eux par des ponts de résine. Afin de simuler leur comportement mécanique, la première option qui s'impose est d'avoir recours à la Discrete Element Method (DEM), qui est une branche très importante - voire même prédominante - de la simulation du comportement des matériaux granulaires. Elle trouve ses origines dans les travaux de Cundall et Strack (1979) qui décrivent la méthode ainsi :

La méthode des éléments discrets est un modèle numérique capable de décrire le comportement mécanique de l'assemblage de disques et de sphères. La méthode

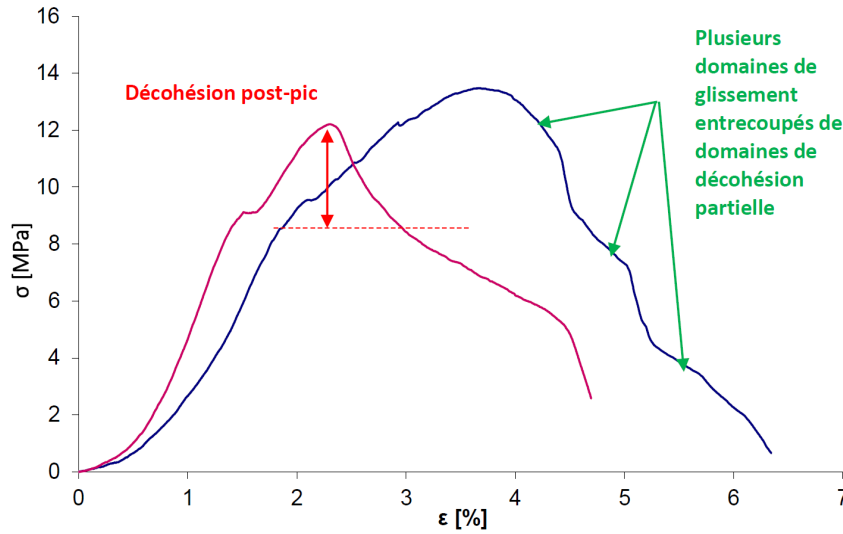
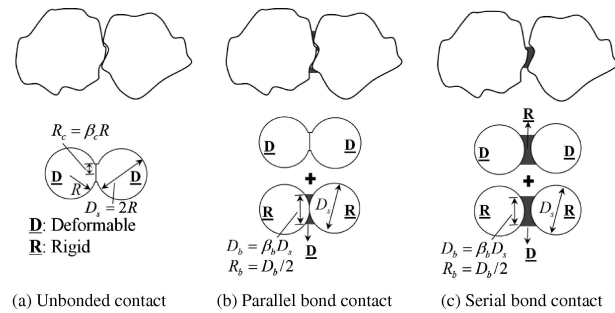


FIGURE 2.33 – Courbes macroscopiques typiques de l'essai de push-out

est basée sur l'utilisation d'un système numérique explicite dans lequel l'interaction des particules est contrôlée contact par contact et le mouvement des particules simulé particule par particule.

La méthode peut être utilisée afin de simuler des essais standards et d'appréhender au mieux les mécanismes complexes en jeu (localisation, rotation des grains, contacts,...). Par exemple, dans Tordesillas *et al.* (2013), un essai de compression triaxial observé en tomographie aux rayons X est calculé à l'aide de la DEM, afin de mieux comprendre la localisation dans le sable.

La DEM a naturellement été adaptée au matériaux granulaires cimentés. Des éléments d'interface intergranulaires sont alors ajoutés (voir Figure 2.34). Des exemples de "bonded DEM" sont par exemple Shen *et al.* (2016); Jiang et Wu (2012); André *et al.* (2012).

FIGURE 2.34 – Représentation idéalisée de la microstructure d'un sable cimenté (issu de Shen *et al.* (2016))

Il est à noter que bien souvent les microstructures simulées sont en 2D ou ont relativement peu d'éléments (plusieurs centaines, tout au plus). En effet, le coût des calculs est un énorme



désavantage de la méthode - que ce soit en quantité de mémoire ou en durée. Il semble encore impossible de simuler le comportement d'une structure complexe pour un chargement simple. Notamment, il est encore impossible de simuler les noyaux d'eau d'une culasse avec cette méthode. C'est ainsi que, bien qu'étant intéressante de part la précision de l'information simulée, cette méthode ne peut pas être utilisée pour résoudre la problématique de Montupet. Il faut donc accepter le compromis de la modélisation élastoplastique. Souvent boudée dans la recherche car elle occulte beaucoup de phénomènes (effets de taille ou de forme des grains, rotation, contacts, porosité locale ...) pour donner une vision assez limitée d'une structure, cette approche constitue un compromis acceptable pour résoudre la problématique industrielle au coeur de ces travaux de thèse.

### 2.4.2 Rappels sur les modèles élastoplastiques

Avant de s'intéresser à des modèles constitutifs élastoplastiques, fixons les notations et les concepts qui sont communs à tous les développements qui vont suivre.

On note le déplacement  $\mathbf{u}$ . Sauf indication contraire, on fait l'hypothèse de petites déformations. On peut définir le tenseur des déformations totale,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (2.9)$$

où  $\nabla \mathbf{u}$  correspond au gradient de  $\mathbf{u}$ .

Pour un matériau élastoplastique, il existe un *seuil* en dessous duquel le comportement est dit *élastique*, c'est-à-dire que la déformation est réversible. Au dessus de ce seuil, une partie de la déformation totale est irréversible. On appelle cette déformation *déformation plastique*, même pour les matériaux granulaires. On pourra aussi trouver le terme de déformation inélastique, car pour certains le terme de "plastique" est réservé aux métaux où la plasticité est liée à des mécanismes physiques bien connus (mise en mouvement de dislocation) absents pour les géomatériaux. Les modèles élastoplastiques des géomatériaux utilisant le même formalisme que ceux des métaux, les abus de langage sont tolérés dans la littérature. On considère que l'on peut diviser le tenseur des déformations en sa partie élastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  et sa partie plastique  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad (2.10)$$

La manière dont la déformation plastique évolue est régie par un *écoulement plastique*. On suppose ici que le seuil comme l'écoulement plastique sont dépendants de *variables internes* (et de leurs équations d'évolution) définissant l'état du matériau.

De plus, on fait l'hypothèse que le comportement du matériau est indépendant du temps, c'est-à-dire qu'il ne dépend pas de la vitesse de sollicitation, que la déformation n'évolue pas si la charge est maintenue constante ou qu'elle ne se dissipe pas après la décharge.

Ce que l'on va appeler modèle élastoplastique correspond donc à la définition des termes clés de la description précédente, à savoir :

- Elasticité
- La fonction de seuil, ou critère, notée  $f$

- La fonction d'écoulement, notée  $g$
- Les variables internes,  $\alpha$ , ainsi que leur équation d'évolution  $\dot{\alpha} = H(\alpha, \dots)$ . Ces variables permettent de modéliser l'écrouissage.

L'objectif du modèle élastoplastique est donc de déterminer un état de contrainte  $\underline{\sigma}$ .

Le critère est une fonction  $f$  qui dépend de la contrainte et des variables d'écrouissage. C'est cette fonction qui définit le domaine d'élasticité  $D_e = \{\underline{\sigma} / f(\underline{\sigma}; \alpha) \leq 0\}$ . Le matériau est dans le domaine plastique lorsque  $f(\underline{\sigma}; \alpha) = 0$ . Contrairement à un matériau élastoviscoplastique,  $f$  ne peut pas être strictement positive.

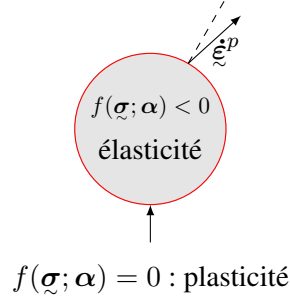


FIGURE 2.35 – Représentation de la fonction de charge dans l'espace des contraintes

La fonction d'écoulement  $g$  permet de déterminer la direction l'incrément de déformation plastique lorsque le matériau plastifie. Cette fonction est dépendante du tenseur des contraintes ( $g = g(\underline{\sigma})$ ). On détermine  $\underline{\xi}^p$  par :

$$\underline{\xi}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}} \quad (2.11)$$

où  $\dot{\lambda} > 0$  est appelé multiplicateur plastique et définit l'intensité de l'écoulement.  $\frac{\partial g}{\partial \underline{\sigma}}$  est la direction d'écoulement, parfois notée  $\underline{P}$ . On la calcule par :

$$P_{ij} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.12)$$

Pour les métaux et certains modèles simples de géomatériaux, la fonction d'écoulement correspond à la fonction de seuil ( $g = f$ ). On appelle alors cela un écoulement associé et on note  $\underline{n} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$  la direction d'écoulement. Lorsque  $g \neq f$  on a écoulement non associé.

Concernant le multiplicateur plastique, il peut-être déterminé en fonction des paramètres du modèle afin d'assurer la cohérence de l'écoulement plastique ( $\dot{f} = 0$ ) (voir Besson *et al.* (2001)) :

$$\dot{\lambda} = \frac{\underline{n} : \underline{C}^e : \underline{\dot{\epsilon}}}{H + \underline{n} : \underline{C}^e : \underline{P}} \quad (2.13)$$

où  $\underline{C}^e$  est le tenseur élastique, explicité lors de la définition de l'élasticité du modèle.

$$\underline{\sigma} = \underline{C}^e : \underline{\xi}^e \quad (2.14)$$

$H$  est le module d'écrouissage, déterminé à partir des équations d'évolution des variables d'écrouissage  $\alpha$  :

$$\dot{\alpha}_I = -\dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial A_I}$$

$$H = \sum_I \frac{\partial f}{\partial A_I} \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_I} M_I$$

Il est important de noter que dans tous les modèles qui vont être présentés dans la suite, la fonction de charge et la fonction d'écoulement seront uniquement dépendante de la pression hydrostatique  $p$  et de la contrainte équivalente de von Mises  $q$ .

### 2.4.3 Remarques importantes sur les signes et les dénominations

En mécanique des sols, les contraintes et les déformations sont traditionnellement notés positivement en compression (car les sols sont principalement testés en compression). En compression, une déformation axiale sera donc positive, et une dilatation d'un échantillon se fera à déformation négative. De même, la pression hydrostatique sera considérée comme positive en compression dans ce qui suit.

### 2.4.4 Élasticité

#### 2.4.4.1 Élasticité linéaire isotrope

Le modèle d'élasticité le plus simple et souvent employé pour les métaux consiste à définir une élasticité linéaire et isotrope, ou encore appelée loi de Hooke généralisée.

"Linéaire" signifie que le tenseur élastique, liant  $\boldsymbol{\sigma}$  à  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  est constant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^e : \boldsymbol{\varepsilon}^e \quad (2.15)$$

Soit en notations indicielles :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl}^e \quad (2.16)$$

"Isotrope" signifie que le tenseur  $\boldsymbol{C}^e$  qui a 81 composantes, donc autant de termes à déterminer a priori, peut-être défini par la donnée de 2 paramètres élastiques. Pour les métaux, on préférera utiliser le module d'Young  $E$  et le coefficient de Poisson  $\nu$  :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E}{1+\nu} \left( \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \boldsymbol{I} \right) \quad (2.17)$$

#### 2.4.4.2 Hypoélasticité isotrope

Le comportement des sols en compression hydrostatique montre qu'un comportement élastique linéaire "classique" n'est pas réaliste. De nombreux modèles pour le sable postulent une déformation sphérique élastique non linéaire. Ecrivons :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e = \boldsymbol{D}^e(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.18)$$

Où  $\underline{\underline{D}}^e$ , le tenseur de compliance élastique, n'est pas constant comme en élasticité linéaire classique mais dépend de l'état de contrainte (Jirasek et Bazant, 2002). Cette formulation est dite *hypoélastique*. Elle implique notamment que le comportement du sol dépend de l'historique de l'état de contrainte (Sheng *et al.*, 1999). Selon Zytynski *et al.* (1978), une formulation hypoélastique ne garantit pas le respect des lois de la thermodynamique. Cependant, ce modèle reste très utilisé.

Il est le plus souvent considéré que l'élasticité demeure isotrope. Cela revient à considérer les coefficients d'élasticité comme variables. Le module d'élasticité isostatique  $K$  est donc d'après l'équation 2.5 :

$$K = \frac{pv_0}{\kappa^*} \quad (2.19)$$

Cette formulation décrit la partie volumétrique de la partie élastique de la loi de comportement. Il faut déterminer un deuxième coefficient d'élasticité. Comme le matériau est supposé isotrope, deux choix sont possibles :

1.  $\nu$  est constant alors  $G$  ne l'est pas
2.  $G$  est constant alors  $\nu$  ne l'est pas

**Cas 1 :  $\nu$  constant.**

On a alors :

$$G = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} K = \frac{3(1-2\nu)}{2(1+\nu)} \frac{pv_0}{\kappa^*} \quad (2.20)$$

Zytynski *et al.* (1978) ont démontré que ce modèle n'est pas conservatif et que l'énergie peut donc être extraite selon certains cycles de chargement. En pratique, Gens et Potts (1988) considèrent que cette énergie est négligeable face à l'énergie due à la déformation plastique dans le cas de chargements monotones. Cependant, ce modèle devient moins pertinent s'il y a de multiples cycles de charge/décharge. De plus, imposer  $G$  constant ne permet pas en pratique de modéliser correctement des résultats expérimentaux (Gens et Potts, 1988).

De même, on constate que pour des pressions proches de 0,  $G$  et  $K$  avoisinent 0. Ceci peut provoquer des instabilités numériques. Sheng *et al.* (1999) proposent de considérer une pression faible  $p_{min}$  en dessous de laquelle ces modules sont constants.

Le tenseur de rigidité élastique s'exprime alors :

$$\underline{\underline{C}}_{\approx}^e = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + 2G \underline{\underline{I}} = \frac{p}{p_{ref}} \underline{\underline{C}}_{\approx_{ref}}^e \quad (2.21)$$

Où  $\underline{\underline{C}}_{\approx_{ref}}^e$  est la valeur du tenseur de rigidité élastique pour une pression de  $p_{ref}$  donnée.

**Cas 2 :  $G$  constant.**

Dans ce cas le tenseur de rigidité élastique devient :

$$\underline{\underline{C}}_{\approx}^e = \left( K - \frac{2}{3}G \right) \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + 2G \underline{\underline{I}} = \frac{pv_0}{\kappa^*} \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} + 2G \left( \underline{\underline{I}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\delta}} \otimes \underline{\underline{\delta}} \right) \quad (2.22)$$

Contrairement à la formulation de l'équation 2.21, le tenseur de rigidité a une partie dépendant de  $p$  et une autre constante. Cette formulation peut être dérivée d'un potentiel élastique et est

donc thermodynamiquement admissible (Jirasek et Bazant, 2002).

Le coefficient de Poisson peut être explicité en fonction de  $K$  et  $G$  :

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2G + 6K}$$

On constate que  $\nu$  peut se révéler négatif pour de petites pressions, étant donné que  $K$  sera lui aussi petit. Ceci est une limite importante de cette formulation.

### 2.4.5 Modèle de Drucker-Prager

Ce modèle a été proposé par Drucker et Prager (1952). Il s'agit du critère le plus simple permettant de prendre en compte la pression hydrostatique  $p$ . Le critère peut aussi se trouver sous le nom de critère linéaire de Drucker-Prager (linear Drucker-Prager). Il existe d'autres formulations pour la fonction de seuil  $f$ , appelées hyperboliques ou exponentielles.

Le critère Drucker-Prager a été largement utilisé dans les études concernant le béton, même récentes (fretté ou non), de part sa simplicité (trois paramètres à définir uniquement) mais aussi sa capacité à modéliser l'augmentation de la résistance au cisaillement à mesure que la pression hydrostatique augmente (voir Bao *et al.* (2013); Karabinis et Rousakis (2002); Jiang et Wu (2012); Papanikolaou et Kappos (2007))

La fonction de charge du critère de Drucker-Prager correspond à celle du critère de von Mises auquel on ajoute un terme de dépendance linéaire à la pression hydrostatique :

$$f(p, q; d) = q - p \tan \beta - d \quad (2.23)$$

On appelle  $\beta$  l'angle de friction.  $d$  peut être une fonction d'écrouissage permettant notamment d'ajouter une tolérance à la traction. Le critère est tracé dans le plan  $(p, q)$  en Figure 2.4.5. Il s'agit d'une droite de pente  $\tan \beta$ . On constate qu'il est possible de comprimer jusqu'à l'infini le matériau à faible cisaillement sans qu'il n'y ait de plasticité.

Il est possible de modifier la formulation du critère de Drucker-Prager pour tenir compte de la dissymétrie traction/compression observée pour les géomatériaux (voir Homand *et al.* (2000)). Pour ce faire, le troisième invariant du déviateur des contraintes  $s$  est utilisé (Jiang et Wu, 2012), ou bien l'angle de Lode. Pour rappel :

$$s = \frac{9}{2}[\mathbf{S} \cdot \mathbf{S} : \mathbf{S}] \quad (2.24)$$

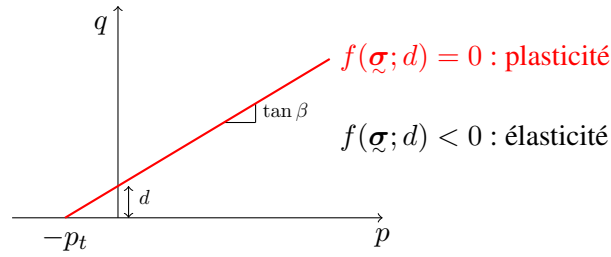
Par exemple, la formulation retenue par Abaqus et Z-set est :

$$f(p, q, r; d) = \frac{q}{2} \left[ 1 + \frac{1}{K} - \left( 1 - \frac{1}{K} \right) \frac{s^3}{q^3} \right] - p \tan \beta - d \quad (2.25)$$

avec  $K$ , correspondant au ratio de la résistance à la traction sur la résistance à la compression. Pour maintenir une convexité du critère,  $K$  doit être compris entre 0.778 et 1.

Le critère a généralement un écoulement non associatif, introduisant un nouvel angle, l'angle de dilatation  $\phi$  :

$$g(p, q) = q - p \tan \phi \quad (2.26)$$

FIGURE 2.36 – Critère de Drucker-Prager dans le plan  $(p, q)$ 

Lorsqu'on calcule la direction d'écoulement  $\tilde{\mathbf{P}}$ , deux termes apparaissent :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \frac{3}{2} \frac{\tilde{\mathbf{S}}}{q} + \frac{1}{3} \tan \phi \tilde{\mathbf{I}} \quad (2.27)$$

$$= \tilde{\mathbf{P}}_{dev} + \tilde{\mathbf{P}}_{hydro} \quad (2.28)$$

où  $\tilde{\mathbf{S}}$  correspond au deviateur du tenseur des contraintes :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \tilde{\mathbf{I}} \quad (2.29)$$

Le premier terme dépend du cisaillement (et est en fait la direction d'écoulement du critère de von Mises). Le second terme est lié aux déformations plastiques volumiques. On obtient notamment, via Equation 2.11 :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \text{tr} \dot{\boldsymbol{\xi}}^p = \dot{\lambda} \tan \phi \quad (2.30)$$

Le changement de volume est contrôlé par la valeur de l'angle de dilatation. L'introduction de cet angle, et donc d'un écoulement non associé, a été motivé par le fait qu'un écoulement associé utilisant l'angle de friction tend à surestimer les déformations volumiques. Ainsi on impose  $\phi < \beta$ .

### 2.4.6 Modèles multi-surfaces

Le critère de Drucker-Prager est un critère très simple mais qui reste pertinent pour modéliser le comportement d'un matériau en cisaillement. Cependant, la surface de charge est ouverte et tolère une compression infinie sans apparition de la plasticité. Pour les études de géomatériaux, les échantillons sont généralement confinés. L'absence de clôture hydrostatique est rapidement devenue une limite handicapante du critère de Drucker-Prager originel.

Les fonctions de charge détaillées dans la bibliographie sont très souvent des modèles à deux surfaces, correspondant à deux mécanismes distincts :

- Le comportement sous chargement déviatorique avec prédominance de glissement de grains et localisation de la déformation
- Le comportement à haut confinement avec la réorganisation du squelette granulaire pour densifier la structure (pour les roches poreuses, on parle aussi de fermeture de pores)

Une de ces premières approches multi-surface est le modèle de Hvorslev de 1937 (soit 15 ans avant Drucker-Prager). La fonction de charge est tracée en Figure 2.37 (a). La partie bleue correspond au comportement sous cisaillement, appelée zone sèche (*dry zone*), tandis que la zone rouge est appelée zone humide (*wet zone*). On remarque que la transition entre les deux zones n'est pas dérivable.

Une autre modification notable de la surface de charge du modèle de Drucker-Prager est le modèle Drucker-Prager Cap initié par Resende et Martin (1985). Une clôture hydrostatique (*cap* ou chapeau) elliptique est ajoutée pour fermer le domaine d'élasticité. Plus récemment, ce modèle a été remanié afin d'ajouter une troisième surface, dite de transition. Cette formulation est indéniablement plus complexe et mène à la définition de trois sous-surfaces de charges, et de deux sous-fonctions d'écoulement avec notamment une surface de charge durcissante dans la zone humide. On pourra citer à titre d'exemple les travaux de Han *et al.* (2008). La surface de charge du modèle de Drucker-Prager Cap Modifié est tracée en Figure 2.37 (b).

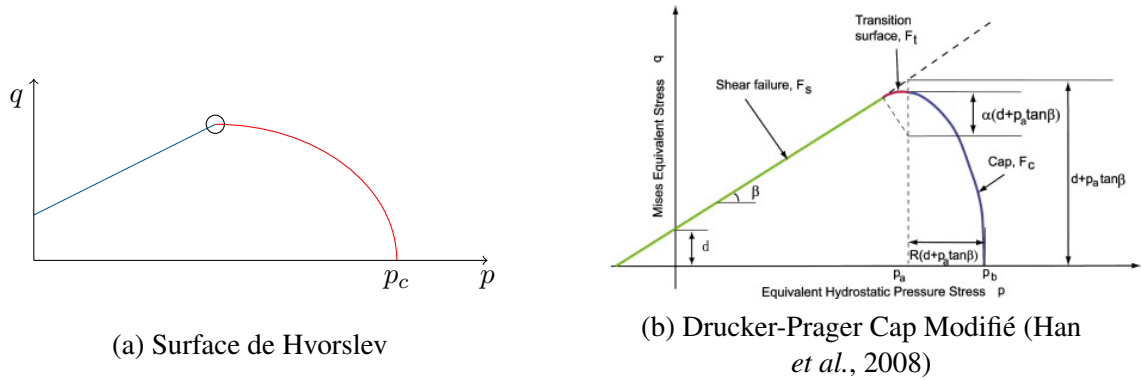


FIGURE 2.37 – Exemples de modèles à deux surfaces de charge

## 2.4.7 Modèle de Cam-clay Modifié

### 2.4.7.1 Introduction

Les modèles multi-surfaces de la Section précédente incluent une dépendance de l'écoulement plastique au confinement, dans le sens où les modèles ont une surface durcissante en zone humide et adoucissante ou plastique parfaite en zone sèche. Ils ne s'inscrivent pas forcément dans la sous-famille de modèles mécaniques des géomatériaux qui s'appelle la mécanique des sols à état critique (*Critical State Soil Mechanics*).

Ces modèles s'appuient sur les observations expérimentales concernant l'apparition de l'Etat Critique décrites en Section 2.2.4.2 qui vient caractériser l'écoulement plastique. Les premiers modèles ont été développés à Cambridge à partir d'essais sur de l'argile de la rivière Cam (d'où le nom du modèle). Le critère de Cam-clay (Roscoe *et al.*, 1958), et surtout sa version modifiée (Schofield et Wroth, 1968) souvent appelée à tort simplement Cam-clay, sont sans doute les modèles élastoplastiques les plus importants. Les modèles plus sophistiqués actuels découlent pour la plupart des travaux de l'Université de Cambridge.

### 2.4.7.2 Elasticité

Les modèles de Cam-clay adoptent l'hypoélasticité isotrope décrite en Section 2.2.4.1, car ils découlent notamment de l'exploitation des essais de compression isotrope.

### 2.4.7.3 Fonction de charge

Les deux modèles de Cam-clay font intervenir dans leur formulation la pression de preconsolidation  $p_c$ , marquant la frontière entre le comportement élastique et le comportement plastique lors des essais de compression isotrope.

Ils font aussi intervenir la pente de la droite d'état critique  $M$ .

**Cam-clay :**

$$f(p, q; p_c) = q + Mp \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) \quad (2.31)$$

**Cam-clay Modifié :**

$$f(p, q; p_c) = q^2 - M^2 p(p_c - p) \quad (2.32)$$

Les deux fonctions de charges sont tracées en Figure 2.38. Pour les deux modèles, la pression de preconsolidation,  $p_c$ , est la variable d'écrouissage.

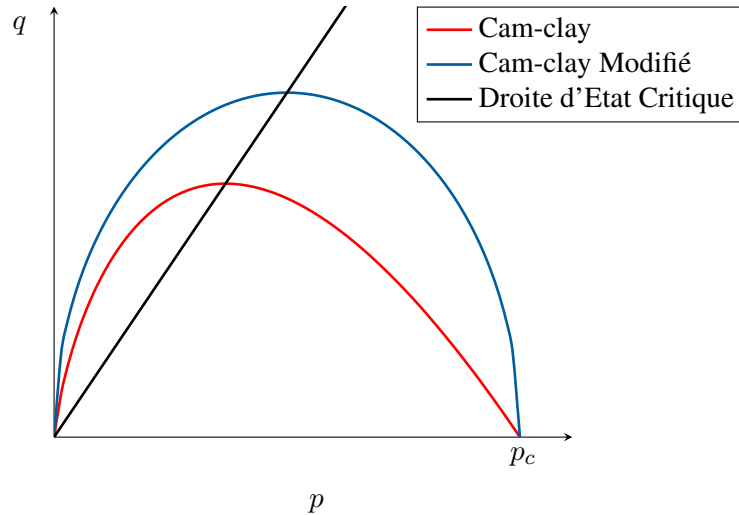


FIGURE 2.38 – Fonction de charge des modèles de Cam-clay

Par la suite, le modèle de Cam-clay originel sera vite abandonné au profit de sa version modifiée. La suite de la description se focalisera donc uniquement sur le modèle de Cam-clay modifié. Ces deux modèles sont définis uniquement pour des matériaux soumis à une compression, aucune traction ( $p < 0$ ) n'est modélisée.

**Remarque :** La droite d'Etat Critique coupe la surface de charge du modèle de Cam-clay modifié au point  $(p_c/2, Mp_c/2)$ . Ceci signifie que lorsque la surface de charge est atteinte à une



valeur de  $p$  inférieure à  $p_c/2$ , le chargement se situe au dessus de la droite d'Etat Critique (resp. pour  $p > p_c/2$ , le chargement est au dessus). Le modèle doit donc modéliser à la fois une dilatation et un adoucissement pour correspondre aux observations expérimentales. Ceci sera possible grâce aux définitions d'un écoulement plastique et d'une relation d'écrouissage sur  $p_c$  pertinents définis ci-après.

#### 2.4.7.4 Ecoulement plastique

Le modèle de Cam-clay Modifié a un écoulement associé, ainsi  $g = f$ . On peut calculer la direction d'écoulement  $\underline{n}$  :

$$\begin{aligned}\underline{n} &= \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}} \\ &= \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \underline{\sigma}}\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$= \frac{M^2}{3}(p_c - 2p)\underline{I} + 3\underline{S}\quad (2.34)$$

En particulier, si on s'intéresse aux déformations plastiques volumiques incrémentales (via Equation 2.11) :

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{M^2}{2} \left( \frac{p_c}{2} - p \right) \quad (2.35)$$

Etant donné que  $\dot{\lambda} > 0$ , le signe de  $\dot{\varepsilon}_v^p$  dépend du signe de  $(\frac{p_c}{2} - p)$  lorsque la surface de charge est atteinte. On retrouve bien ici le fait que le sol se dilate en cisaillement ( $p < p_c/2$ ) et se contracte en haut confinement ( $p > p_c/2$ ). De plus, pour  $p = p_c/2$ , on trouve facilement que  $q = Mp$ , c'est-à-dire que l'on se trouve à l'Etat Critique. On obtient bien  $\dot{\varepsilon}_v^p = 0$  c'est-à-dire aucun changement de volume.

L'écoulement seul ne permet pas de retrouver la dépendance du durcissement au confinement. Ce sera possible avec la considération de  $p_c$  comme variable d'écrouissage.

#### 2.4.7.5 Relation d'écrouissage

La pression de préconsolidation est la variable d'écrouissage du modèle. Son équation d'évolution est directement tirée de l'exploitation expérimentale de l'essai de compression isotrope décrit en Section 2.2.4.1, à savoir :

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = \frac{v_0}{\lambda^* - \kappa^*} \dot{\varepsilon}_v^p \quad (2.36)$$

La valeur de  $p_c$  conditionne l'amplification de l'ellipse qui correspond à la surface de charge du modèle de Cam-clay Modifié. Si  $p_c$  augmente, la surface de charge se dilate et un durcissement est constaté. L'équation précédente lie le signe de l'évolution de  $p_c$  au signe de  $\dot{\varepsilon}_v^p$  (puisque  $\lambda^* > \kappa^*$ ), autrement dit, à la dilation ou à la contraction du géomatériau, elle-même liée au confinement.

Pour une contraction  $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$ ,  $p_c$  augmente, donc il y a durcissement (resp. en dilatation, il y a adoucissement). Les observations expérimentales de durcissement en zone humide issues de la bibliographie (voir Section 2.2.4.2) sont vérifiées.

### 2.4.7.6 Mise en images

Les Figures 2.39 et 2.40 présentent les prédictions du modèle pour un même chargement triaxial monotone de confinement  $q/p$ . Les deux configurations diffèrent seulement par l'amplitude de leur préchargement, qui consiste en une compression isotrope jusqu'à  $p = p_0$ .

Pour un premier confinement relativement élevé, la surface de charge va être atteinte au point A se situant en zone humide (Figure 2.39 (a)). Passé le domaine élastique, il y a donc durcissement (Figure 2.39 (b)) jusqu'à ce que l'Etat Critique soit atteint (point B) et où la contrainte de cisaillement cesse d'augmenter.

Pour un second confinement faible, la surface de charge est atteinte dans la zone sèche (Figure 2.40 (a)). Il y a donc adoucissement jusqu'à l'Etat Critique (Figure 2.40 (b)).

Cet exemple illustre les prédictions du modèle pour deux cas de chargement, mais aussi souligne l'importance d'une précontrainte qui, pour un même chargement triaxial, peut changer significativement le comportement macroscopique du matériau.

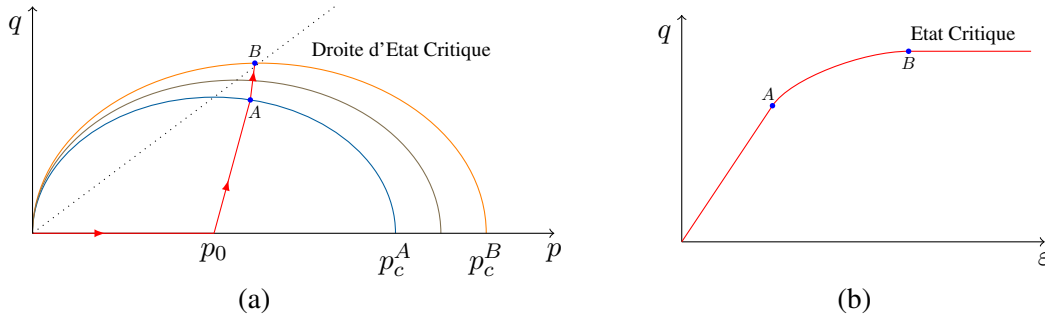


FIGURE 2.39 – Durcissement

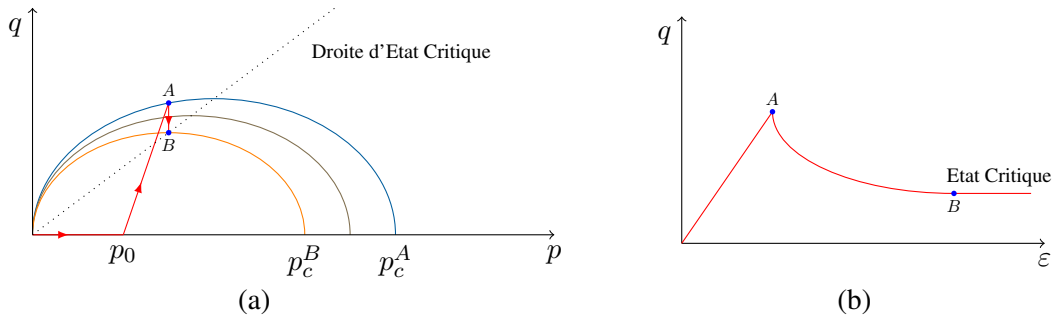


FIGURE 2.40 – Adoucissement

### 2.4.7.7 Limites

Le modèle de Cam-clay Modifié est un classique de la mécanique des sols. Il demeure relativement simple (une seule surface de charge, écoulement associé, une seule variable d'écrouissage) mais permet de prédire l'influence du confinement sur le comportement macroscopique

de l'échantillon. Il a été largement utilisé dans la littérature (voir l'état de l'art de Gens et Potts (1988)). Ce modèle est, de plus, assez facile à implémenter sur les codes éléments finis, ce qui a permis son adoption dans quasiment tous les codes éléments finis.

Cependant, pour bon nombres d'applications modernes, le modèle semble trop simpliste et a quelques limites :

- La surface de charge elliptique en zone sèche tend à surévaluer les contraintes de cisaillement au moment du seuil plastique. Un modèle multi-surfaces de type Hvorslev peut alors être préférée (Tsiamposi *et al.*, 2013) dans cette zone. Cependant, ces modèles sont plus difficiles à être implémentés. De plus, on observe une tendance à multiplier les paramètres à déterminer pour la calibration alors que certains n'ont pas vraiment de sens physique clair et apparaissent plus être des paramètres purement mathématiques afin d'avoir des transitions continues entre les différentes surfaces de charge ou fonction d'écoulement (Yu, 1998).
- L'utilisation d'un écoulement associé ne permet pas de prédire certains comportements observés lors de tests non-drainés de sable lâche (Yu, 1998). Les modèles utilisant un écoulement non-associé préféreront utiliser une fonction d'écoulement découlant de la formule de Rowe (1962) liant la dilatance aux incréments de déformation plastique volumique et de cisaillement.
- Cette théorie ne s'applique absolument pas aux matériaux cimentés. Il n'y a notamment pas de résistance à la traction possible par exemple.

## 2.4.8 Clay And Sand Model

### 2.4.8.1 Introduction

Afin de simplifier et unifier la modélisation des sables comme des argiles, (Yu, 1998) propose le Clay And Sand Model (CASM). Ce modèle s'inscrit dans le cadre de la mécanique des sols à état critique. Il a une surface de charge unique, et ne rajoute que 2 paramètres supplémentaires par rapport au modèle de Cam-clay Modifié.

### 2.4.8.2 Elasticité

Le CASM adopte l'hypoélasticité isotrope décrite en Section 2.2.4.1.

### 2.4.8.3 Fonction de charge

Comme le modèle de Cam-clay Modifié, la fonction de charge du CASM fait intervenir la pression de préconsolidation  $p_c$  et la pente de la droite d'Etat Critique (DEC)  $M$ .

$$f(p, q; p_c) = \left( \frac{q}{Mp} \right)^n + \frac{1}{\ln r} \ln \left( \frac{p}{p_c} \right) \quad (2.37)$$

Un exemple de fonction de charge du CASM est tracé en Figure 2.41.

La fonction de charge du CASM est la somme de deux termes :

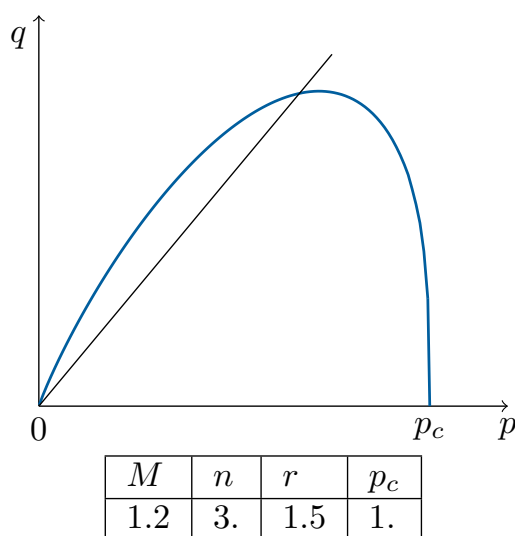
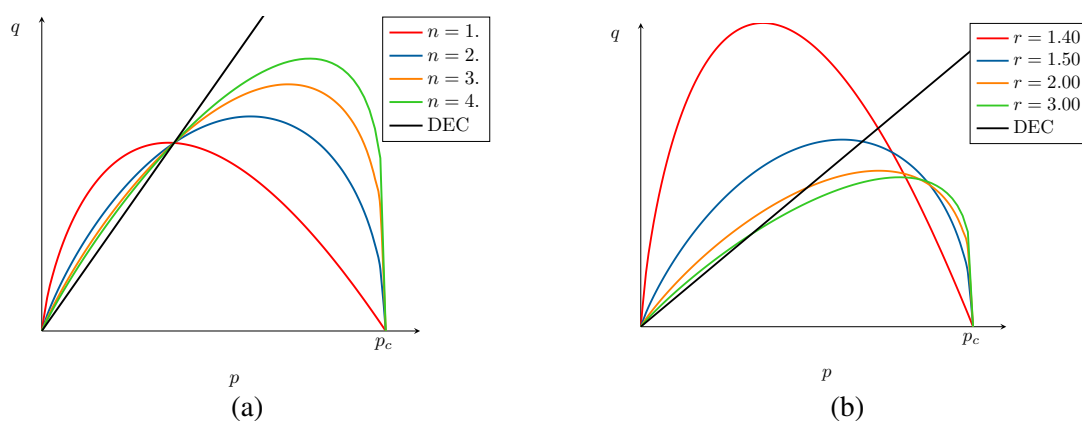


FIGURE 2.41 – Exemple de fonction de charge du CASM

- $\left(\frac{q}{M_p}\right)^n$  qui contrôle le comportement en cisaillement. L'ajout du paramètre de forme  $n$  permet de donner plus ou moins d'importance à ce terme et de transformer l'allure de la surface de charge afin de la rendre moins elliptique et plus proche d'une droite dans la zone sèche (voir Figure 2.42 (a)).
- $\frac{1}{\ln r} \ln\left(\frac{p}{p_c}\right)$  qui assure une clôture hydrostatique en  $p = p_c$ . Ce terme est piloté par l'ajout du paramètre  $r$  appelé ratio d'espacement (*spacing ratio*) (voir Figure 2.42 (b)).

FIGURE 2.42 – Influences de  $n$  et  $r$  sur la surface de charge du CASM

#### 2.4.8.4 Ecoulement plastique

Le CASM, contrairement au modèle de Cam-clay Modifié, a un écoulement non associé ( $g \neq f$ ). La surface d'écoulement se déduit de la relation de Rowe (1962). Cette equation lie la dilatance  $d$  (ratio des incréments de déformation plastique volumique  $\dot{\varepsilon}_v^p$  et de déformation plastique de cisaillement  $\dot{\varepsilon}_s^p$ ) au confinement  $q/p$  :

$$d = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_s^p} = \frac{9(M - \frac{q}{p})}{9 + 3M - 2M\frac{q}{p}} \quad (2.38)$$

De la même manière que pour le critère de Cam-clay Modifié, l'écoulement lie les variations de volume au confinement  $q/p$ . Par exemple, pour  $M > q/p$  (zone humide), on a  $\dot{\varepsilon}_v^p > 0$  soit une contraction. L'intégration de cette relation permet d'établir la fonction d'écoulement  $g$  :

$$g(p, q; \beta) = 3 \ln \left( \frac{p}{\beta} \right) + (3 + 2M) \ln \left( \frac{2q}{p} + 3 \right) - (3 - M) \ln \left( 3 - \frac{q}{p} \right) \quad (2.39)$$

où  $\beta$  est une constante qui est facilement déterminable grâce à l'équation de cohérence  $g = 0$  pour chaque configuration  $(p, q)$ .

#### 2.4.8.5 Relation d'écrouissage

Le CASM utilise aussi  $p_c$  comme unique variable d'écrouissage. L'équation d'évolution de  $p_c$  est la même que pour le modèle de Cam-clay Modifié, à savoir l'Equation 2.7. Par cette équation, l'évolution de  $p_c$  et donc le durcissement/adoucissement macroscopique est à nouveau liée aux variations de volumes, et donc au confinement d'après l'équation de Rowe. Les observations expérimentales de l'Etat Critique sont bien modélisées.

### 2.4.9 Modélisation de la cimentation

#### 2.4.9.1 Cadre théorique de prise en compte de la cimentation

Les modèles constitutifs précédents n'incluent pas de cimentation intergranulaire, qui peut être naturelle (sables argileux, par exemple) ou artificielle (noyaux de fonderie). Les modèles élastoplastiques de matériaux granulaires cimentés sont très peu représentés dans la littérature. Ami Saada *et al.* (1996) ont proposé une version "révisée" du modèle de Cam-clay Modifié, appelée Revised Modified Cam-clay Model, adaptée à un sable de fonderie (argileux et humide). Leur modèle tient compte de la cimentation mais aussi de la température de vieillissement  $\theta$  qui influe naturellement sur la teneur en eau, et donc de liant, des noyaux. La cohésion est modélisée par l'ajout d'un terme de translation sur l'axe  $p$  noté  $p_{c0}$ . C'est en fait un paramètre matériau, à calibrer à chaque température de vieillissement. Cette force de cohésion n'a pas d'équation d'évolution et ne diminue pas lors du chargement, contrairement à d'autres modèles. La version modifiée ajoute aussi une deuxième surface de charge, de type von Mises, qui survient en fait avant la surface de Cam-clay Modifié afin de modéliser le durcissement pré-pic, qui est

quasiment toujours négligé dans la modélisation. Ainsi deux fonctions sont définies :

$$f_1(p, q; \varepsilon_v^p) = \frac{q^2}{M^2(p - p_{c0})} + (p - p_{c0}) - (p_c - p_{c0}) \quad (2.40)$$

$$f_2(p, q; \varepsilon_s^p) = q - \frac{1}{2}M(p_c - p_{c0})\frac{\varepsilon_q^p}{a + \varepsilon_q^p} \quad (2.41)$$

où  $f_1$  correspond à la surface de Cam-clay Modifiée translatée et  $f_2$  est la surface de de type von Mises avec un écrouissage dépendant de la déformation plastique cumulée de cisaillement  $\varepsilon_q^p$ . Ces deux surfaces sont tracées en Figure 2.43, avec en parallèle une courbe  $q-\varepsilon_s$  pour un chargement d'exemple. Le chargement va donc en premier atteindre la fonction de charge  $f_2$  qui dans le plan  $(p, q)$  est une simple droite horizontale. Il y a durcissement jusqu'à atteindre  $f_1$  et donc l'adoucissement pour l'illustration qui se situe en zone sèche. La dépendance à la température de vieillissement signifie, pour eux, de faire une calibration du modèle à chaque température. Il n'y a pas de loi, même phénoménologique, liant les paramètres du modèle à  $\theta$ .

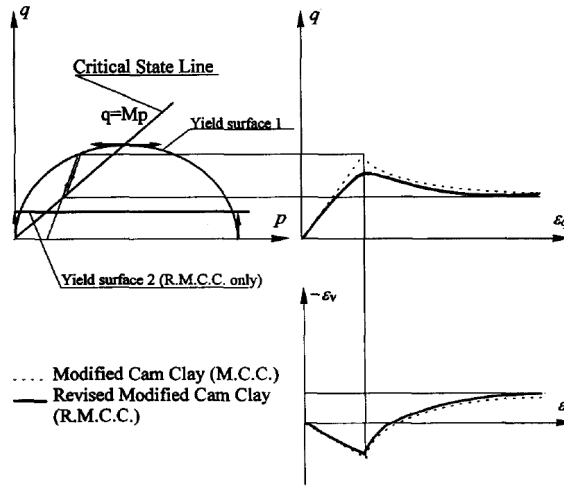
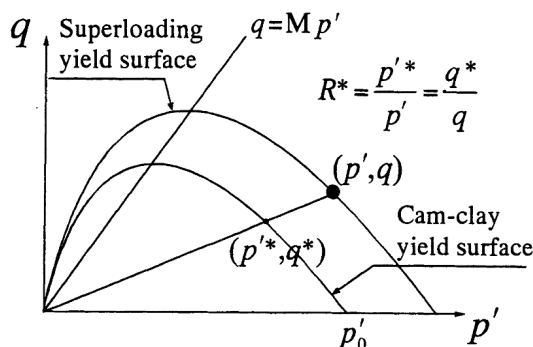


FIGURE 2.43 – Fonction de charge du Revised Modified Cam-clay Model (issu de Ami Saada *et al.* (1996))

Plus récemment, Tengattini *et al.* (2014) et Das *et al.* (2014) ont mis au point un modèle thermomécanique pour des matériaux cimentés granulaires basé sur l'utilisation de variables internes mesurables et inspirées par la micromécanique. Rahimi *et al.* (2016) ont développé un modèle s'inscrivant dans la mécanique des sols à Etat Critique pour des sables, cimentés ou non, prenant en compte l'anisotropie due à la fabrication.

On peut citer à titre d'exemple Asaoka *et al.* (2000) qui s'intéressent à la surface de charge d'un sol très structuré. Cette structuration n'est pas forcément liée à une cimentation. Ils définissent une "sursurface" de charge (*superloading yield surface*) qui vient amplifier une surface de charge originelle sur matériau non structuré (ici celle du modèle de Cam-clay original). Cette sursurface de charge est tracée en Figure 2.44. Les modèles prenant en compte une cimentation

FIGURE 2.44 – Sursurface de charge dans le plan  $(p, q)$  (issu de (Asaoka *et al.*, 2000))

ou une structuration adoptent le plus souvent ce paradigme à deux surfaces de charge, une correspondant à celle du matériau non lié ou non structuré, l'autre étant celle du matériau structuré, ou lié. Cette dernière va, au cours du chargement plastique, graduellement rétrécir jusqu'à atteindre la surface de charge originelle (à mesure que le matériau se déstructure). La définition de cette sursurface de charge à partir de la surface de charge du matériau non lié est donc au cœur de la modélisation de la cimentation. La sursurface de charge de Asaoka *et al.* (2000) consiste à simplement multiplier la surface de charge de Cam-clay par un ratio de surconsolidation  $R^*$ .

Il existe toutefois un cadre théorique plus spécifique pour l'adaptation de modèles élastoplastiques de matériaux non cimentés. Il a été mis au point par Gens et Nova (1993). Ici aussi, deux états du matériau sont distingués : l'état non structuré, ou non cimenté, correspondant au modèle élastoplastique de base, et l'état structuré, ou cimenté. On postule que la surface de charge du matériau cimenté correspond à l'amplification de celle du matériau non cimenté sans déformation.

On considère que la surface de charge est pilotée par le seuil en compression isotrope  $p_o$  et le seuil en traction isotrope  $p_t$ , ce dernier étant non nul du fait de l'existence de cimentation. Ces seuils sont calculés grâce à l'introduction de deux paramètres scalaires :  $b$  le paramètre de liant (*bonding parameter*) et  $\alpha$  paramètre lié à la résistance à la traction.  $p_o$  et  $p_t$  découlent de ces deux nouvelles variables ainsi que de  $p_c$ , la pression de préconsolidation du géomatériau non structuré :

$$p_o = p_c(1 + b) \quad (2.42)$$

$$p_t = \alpha b p_c \quad (2.43)$$

Un exemple de fonctions de charge d'un matériau non lié et d'un matériau lié est disponible en Figure 2.45.

Dans ce cadre-ci, le paramètre de liant,  $b$ , est une variable interne, dont l'évolution au cours du chargement plastique est pilotée par une mesure de la déformation plastique d'endommagement-

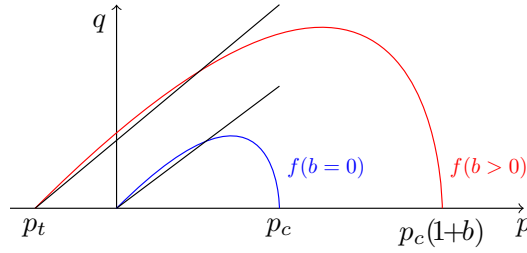


FIGURE 2.45 – Fonctions de charge pour un matériau non structuré (bleu) et cimenté (rouge)

ment  $h$  par :

$$b = b_0 e^{-h} \quad (2.44)$$

$$\dot{h} = h_1 |\varepsilon_s^p| + h_2 |\varepsilon_v^p| > 0 \quad (2.45)$$

$$h(t_0) = 0 \quad (2.46)$$

avec  $h_1$  et  $h_2$  nouveaux coefficients positifs qui modélisent respectivement la sensibilité de la rupture du liant intergranulaires au cisaillement ou aux chargements volumiques. Ces équations signifient notamment que  $b$  ne peut que décroître en chargement plastique.

La loi d'écoulement est juste adaptée en remplaçant  $p$  par  $p + p_t$ .

L'ajout de cette nouvelle variable d'écrouissage liée au comportement cohésif modifie donc le module d'écrouissage qui se trouve être la somme de deux termes :

$$H = H_s - H_d \quad (2.47)$$

Le premier est le terme dû au comportement frictionnel du matériau non lié, et donc notamment son durcissement ( $H_s > 0$ ) et adoucissement ( $H_s < 0$ ) en fonction du confinement. Le deuxième terme correspond à la diminution irréversible de la cimentation. Il est donc toujours négatif. Cela modifie et complexifie quelque peu la zone de chargement telle que  $H = 0$  (c'est-à-dire l'état critique) surtout que celle-ci évolue au cours du chargement.

De plus, Gens et Nova (1993) mettent en évidence le comportement assez complexe de la surface de charge lorsqu'elle est atteinte à haut confinement ( $H < 0$ ). Cette évolution est tracée en Figure 2.46. La pression de préconsolidation va augmenter plus fortement. Ainsi du côté de la zone humide, la surface va s'amplifier (passage du point B au point C). Cependant, comme  $b$  diminue aussi, la résistance à la traction s'étirole.

Le cadre théorique de Gens et Nova (1993) a été appliqué dans la bibliographie par :

- Nova *et al.* (2003) : le modèle prend aussi en compte la dégradation chimique du liant, en plus de sa dégradation mécanique
- Ciantia et di Prisco (2016) : le modèle est appliqué à de la calcarénite (grès formé par de la consolidation de sable calcaire) et prend notamment en compte la dégradation chimique mais aussi l'hydratation du géomatériau

Les deux extensions du CASM (Section 2.4.8) aux matériaux granulaires cimentés sont aussi présents dans la bibliographie et sont analysés ci-après.



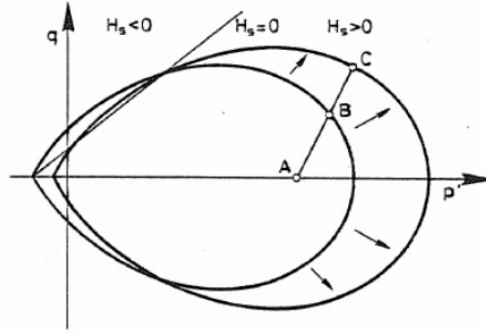


FIGURE 2.46 – Evolution de la surface de charge pour un chargement à haut confinement (tiré de Gens et Nova (1993))

### 2.4.9.2 CASM-n

Dans Yu *et al.* (2007), le Clay And Sand Model est adapté pour les matériaux granulaires cimentés et devient le CASM-n. Le CASM-n ne se revendique pas explicitement comme étant dans le cadre de Gens et Nova (1993) mais dans les faits, il en reprend exactement le même formalisme.

L'effet de la cimentation est piloté par la donnée de trois grandeurs, visibles en Figure 2.47 :

- $p_b$  : ajout de pression de résistance à la compression. Dans les notations de Gens et Nova (1993), ce terme correspond à  $bp_c$ . C'est une variable interne du modèle (qui est en fait une substitution de  $b$ ).
- $p_t$  : pression de résistance à la traction.  $p_t$  est définie par :

$$p_t = \beta p_b \quad (2.48)$$

où  $\beta$  est une constante matériau. Si on utilise les notations de Gens et Nova (1993), on retrouve bien la relation  $\alpha bp_c$  avec  $\alpha = \beta$ .

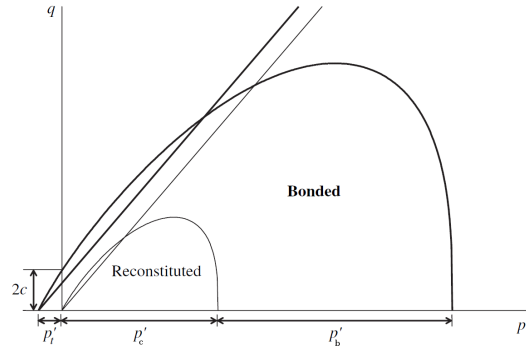
- $c$  : nouveau paramètre matériau appelé cimentation intergranulaire (*interparticle bonding*). Cela correspond à la valeur de la moitié de la contrainte de cisaillement maximale admise pour  $p = 0$  (cisaillement pur). Ce paramètre est une nouvelle variable interne avec sa fonction d'évolution.

La fonction de charge du modèle s'écrit :

$$f(p, q; p_c, p_b) = \left( \frac{q}{M(p + p_t)} \right)^n + \frac{1}{\ln r} \ln \left( \frac{p + p_t}{p_t + p_c + p_b} \right) \quad (2.49)$$

L'équation d'évolution de  $p_c$  est légèrement différente de celle du modèle de Cam-clay (Equation 2.7) et ajoute une dépendance à la déformation plastique de cisaillement, présente dans d'autres articles (par exemple Gens et Nova (1993)) :

$$\frac{\dot{p}_c}{p_c} = (1 + \alpha) \frac{v}{\lambda^* - \kappa^*} (\dot{\varepsilon}_v^p + \omega \dot{\varepsilon}_s^p) \quad (2.50)$$

FIGURE 2.47 – Surface de charge du CASM-n (issu de Yu *et al.* (2007))

avec  $\alpha$  et  $\omega$  deux paramètres scalaires permettant de pondérer les effets des déformations plastiques.

De même que pour l'équation d'évolution du paramètre de liant  $b$  de Gens et Nova (1993), l'évolution de la surpression de résistance à la compression  $p_b$  dépend d'une mesure de déformation plastique d'endommagement  $\varepsilon_d^p$  :

$$\frac{\dot{p}_b}{p_b} = -D_b \dot{\varepsilon}_d^p \quad (2.51)$$

$$\dot{\varepsilon}_d^p = \sqrt{(\dot{\varepsilon}_v^p)^2 + (\dot{\varepsilon}_s^p)^2} \quad (2.52)$$

Contrairement au modèle de Gens et Nova (1993), il n'y a pas de distinction faite entre l'influence des déformations plastiques de cisaillement et les déformations plastiques volumiques (par le biais d'une pondération comme dans l'Equation 2.46). L'influence de l'endommagement plastique sur la cohésion est donc simplement répercutée par le coefficient  $D_p$ .

La cimentation intergranulaire dépend aussi de  $\varepsilon_d^p$  mais avec un taux de dégradation  $D_c$  différent :

$$\frac{\dot{c}}{c} = -D_c \dot{\varepsilon}_d^p \quad (2.53)$$

Concernant l'élasticité, une hypoélasticité isotrope est aussi adoptée. Cependant, le module de compressibilité isostatique  $K$  dépend ici de la cimentation via une relation phénoménologique :

$$K = \frac{vp}{\kappa^*} \left( 1 + \sqrt{\frac{p_b}{p}} \right) \quad (2.54)$$

Concernant l'écoulement plastique, il est aussi adapté, cette fois-ci plus finement que de substituer  $p$  par  $p + p_t$ . L'équation de Rowe (1962) est ainsi adaptée, et tient compte du paramètre  $c$  :

$$\frac{\varepsilon_v^p}{\varepsilon_s^p} = \frac{9(M - \eta) + 6\frac{c}{p}\sqrt{(3 + 2M)(3 - M)}}{9 + 3M - 2M\eta + 4\frac{c}{p}\sqrt{(3 + 2M)(3 - M)}} \quad (2.55)$$

La fonction d'écoulement  $g$  est aussi adaptée de manière non triviale :

$$g(p, q; p_c, p_b) = 3M \ln \left( \frac{p + p_t - k}{\varphi} \right) + (2M + 3) \ln \left( \frac{3(q - h)}{p + p_t - k} + 3 \right) + (M - 3) \ln \left( 3 - \frac{q - h}{p + p_t - k} \right) \quad (2.56)$$

avec :

$$k = \frac{\sqrt{(3 + 2M)(3 - M)}(36 - 12M)c}{18M^2 - 27M - 81}$$

$$h = \frac{\sqrt{(3 + 2M)(3 - M)}(-54 + 18M)c}{18M^2 - 27M - 81}$$

### 2.4.9.3 C-CASM

Le Cemented Clay And Sand Model ou C-CASM est la seconde adaptation du CASM à la cimentation. Le modèle est décrit par Rios *et al.* (2016) et s'inscrit pleinement dans le cadre de Gens et Nova (1993).

Comme pour le CASM-n, l'élasticité considérée est une élasticité hypoélastique isotrope dont le coefficient de compression isostatique dépend de la cimentation :

$$K = \frac{v_0 p}{\kappa^*} \left( 1 + \sqrt{\frac{p_c b}{p}} \right) \quad (2.57)$$

La fonction de charge du matériau lié est :

$$f(p, q; p_c, b) = \left( \frac{q}{M(p + p_t)} \right)^n + \frac{1}{\ln r} \ln \left( \frac{p + p_t}{p_c(1 + b) + p_t} \right) \quad (2.58)$$

La dilatance et la fonction d'écoulement sont adaptées au cas cimenté en remplaçant  $p$  par  $p + p_t$  :

$$d = \frac{\dot{\varepsilon}_v^p}{\dot{\varepsilon}_s^p} = \frac{9(M - \frac{q}{p+p_t})}{9 + 3M - 2M \frac{q}{p+p_t}} \quad (2.59)$$

$$g(p, q; \beta, p_c, b) = 3M \ln((p + p_t)/\beta) + (3 + 2M) \ln \left( 2 \frac{q}{p + p_t} + 3 \right) - (3 - M) \ln \left( 3 - \frac{q}{p + p_t} \right) \quad (2.60)$$

## 2.5 Méthode hybride d'hyper-réduction de modèles - $H^2$ ROM

### 2.5.1 Principe de la $H^2$ ROM

Une méthode hybride d'hyper-réduction de modèles a été employée durant la thèse, notamment pour analyser plus en profondeur l'essai de compression uniaxiale étudié en tomographie aux rayons X (en Section 4.1). La  $H^2$ ROM, ou *Hybrid Hyper-Reduced Order Modeling*, est une méthode mêlant l'hyper-réduction et les éléments finis (d'où le terme "hybride"). En quelques mots, la méthode va s'appuyer sur des modes dit POD pour *Proper Orthogonal Decomposition* (Décomposition orthogonale aux valeurs propres) restreint à un domaine d'intégration réduit, ou RID (*Reduced Integration Domain*). Pour décrire la  $H^2$ ROM il faut expliciter pas à pas les degrés de complexité de la méthode :

1. La réduction de modèles
2. L'hyper-réduction
3. La méthode hybride

L'objectif de cette partie n'est pas de faire un tour d'horizon exhaustif des méthodes de réduction ou d'hyper-réduction de modèles mais plutôt d'expliciter la méthode utilisée durant la thèse.

### 2.5.2 La réduction de modèles

La première étape de la  $H^2$ ROM consiste à réduire la dimension du problème. Traitons à titre d'illustration le cas d'un champ de déplacement solution d'un problème éléments finis  $\mathbf{u}_h$  donné.  $N_d$  est le nombre de degrés de libertés du problème et  $N_t$  le nombre de pas de temps.  $\mathbf{u}_h$  peut aussi être la projection d'un champ expérimental à un sous-espace cinématiquement admissible et sur un maillage de l'éprouvette réelle. Ce champ s'écrit naturellement sur la base des fonctions de forme éléments finis ( $\psi_i$ ),  $i = 1 \dots N_d$ .

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{x}, t_j) = \sum_{i=1}^{N_d} \psi_i(\mathbf{x}) a_i(t_j) \quad (2.61)$$

Ainsi, plutôt que de travailler sur  $\mathbf{u}_h$ , on va s'intéresser à ces coefficients  $a_i$  stockés sous la forme d'une matrice dite de snapshots  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_t}$  définie par :

$$Q_{ij} = a_i(t_j) \quad (2.62)$$

C'est sur la matrice de snapshot qu'est effectuée la réduction de la dimension. L'idée est d'approximer  $\mathbf{Q}$  sur une base  $\mathbf{V}$ , dite base réduite, de taille  $N < N_d$  :

$$\mathbf{Q}_{ij} \simeq \sum_{k=1}^N b_{kj} \mathbf{V}_{ik} \quad (2.63)$$

Cette décomposition est mise en images en Figure 2.48. Si on note  $\mathbf{V}$  la matrice formée des modes  $\mathbf{V}_i(\mathbf{x})$  et  $\mathbf{b}$  la matrice des coefficients  $b_i(t_j)$ , autrement appelées coordonnées réduites, on peut réécrire l'équation précédente :

$$\mathbf{Q} \simeq \mathbf{V} \mathbf{b} \quad (2.64)$$

Ainsi, on ne s'intéresse plus qu'à  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_d \times N}$  et aux coordonnées réduites  $\mathbf{b} \in \mathbb{R} \in \mathbb{R}^{N_t \times N}$ . Le coût de calcul ou de stockage est alors drastiquement moindre pour  $N \ll N_d$ . Plusieurs méthodes existent pour déterminer l'approximation d'ordre  $N$  pour  $\mathbf{Q}$ . On s'intéresse ici à la *Proper Orthogonal Decomposition* (POD) (voir Kirby et Sirovich (1990)), ou Décomposition orthogonale aux valeurs propres en français.

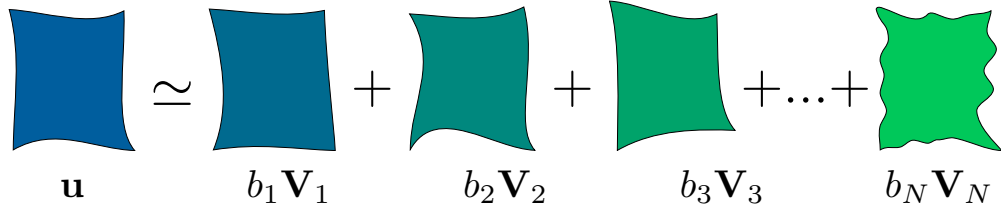


FIGURE 2.48 – Décomposition en modes propres d'un champ

Les modes sont déterminés par une méthode appelée Décomposition aux Valeurs Singulières (abrégée SVD en anglais) tronquée :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{W}^T + \mathbf{R} \quad (2.65)$$

avec :

- $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_d \times N}$  : base réduite précédemment évoquée
- $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$  : matrice diagonale contenant les valeurs singulières de  $\mathbf{Q}$  classées par ordre croissant
- $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{N_t \times N}$  matrice orthogonale
- $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_t}$  matrice de résidus vérifiant :

$$\|\mathbf{R}\|_2 = \sigma_{N+1} < \epsilon_{tol} \sigma_1 \quad (2.66)$$

En pratique, c'est la tolérance  $\epsilon_{tol}$  qui va fixer l'ordre de l'approximation  $N < N_d$  pour  $\mathbf{Q}$  et donc la réduction de dimension. En d'autres termes, la SVD permet de déterminer les valeurs singulières de  $\mathbf{Q}$  et de sélectionner les  $N$  modes prédominants. On constate dans la plupart des cas que les valeurs singulières  $\sigma_i$  décroissent très rapidement et que passé un certain rang, l'apport des modes est très faible relativement aux premiers.

Cette base étant construite, si un nouveau calcul est effectué, au lieu d'effectuer un calcul éléments finis complet, la solution calculée est restreinte à l'espace formé par la base réduite (on cherche donc les coordonnées réduites pertinentes).

### 2.5.3 L'hyper-réduction de modèles

L'analyse empirique précédente ne fait pas de sélection sur les degrés de liberté du problème. Elle est en fait intimement liée à la discrétisation temporelle et permet de réduire énormément le volume du problème quand il y a beaucoup de pas de temps. La démarche d'hyper-réduction de modèles s'intéresse quant à elle à la diminution du domaine d'intégration (voir Ryckelynck *et al.* (2015)). Ce que l'on appelle un modèle hyper-réduit correspond à un ensemble d'équations

éléments finis restreintes à un domaine d'intégration réduit (*Reduced Integration Domain*, ou RID) lorsqu'on cherche une solution approximative d'équations EF avec une base réduite. En quelques mots, cette approche compte sur le faible rang des approximations réduites pour mettre en place les équations réduites d'un modèle donné. Expliquons cela avec un modèle éléments finis simple, linéaire et élastique. Soit  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_d}$  la matrice de raideur de ce modèle EF et  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{N_d}$  le terme de droite de l'équation d'équilibre éléments finis :

$$\mathbf{K} \mathbf{a}^{FE} = \mathbf{c} \quad (2.67)$$

où  $\mathbf{a}^{FE} \in \mathbb{R}^{N_d}$  est la solution des équations éléments finis. Pour une base réduite donnée  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_R}$ , la solution réduite approchée des équations d'équilibre est notée  $\mathbf{a}^R$ . Elle vérifie :

$$\mathbf{a}^R = \mathbf{V} \mathbf{b}^R \quad (2.68)$$

où  $\mathbf{b}^R \in \mathbb{R}^{N_R}$  sont les variables du modèle réduit. Il se trouve que le rang de  $\mathbf{K} \mathbf{V}$  doit être  $N_R$  afin de trouver une solution unique  $\mathbf{b}^R$ . Étant donné que  $N_d$  est généralement supérieur à  $N_R$ , il existe une sélection de quelques lignes de  $\mathbf{K} \mathbf{V}$  préservant le rang de la sous-matrice extraite. En suivant une méthode d'hyper-réduction comme proposée par Ryckelynck *et al.* (2015), cette sélection de lignes est effectuée en considérant les équations d'équilibres restreintes à un domaine d'intégration réduit. La méthode de sélection de lignes peut être effectuée grâce à la méthode d'Empirical Interpolation Method (Barrault *et al.* (2004)) ou de Discrete Empirical Interpolation Method (Chaturantabut et Sorensen (2010)). C'est cette dernière qui sera retenue. La DEIM est un algorithme glouton s'appliquant directement sur le champ POD-Galerkin (projection de Galerkin, comme c'est effectivement le cas dans les éléments finis). Un RID est alors extrait (voir exemple en Figure 2.49). Il est à noter que ce RID peut être l'union de plusieurs "sous-RID" issus de la DEIM appliquée à la matrice de snapshot en déplacement et celle en contraintes ou déformations. En pratique, les matrices de snapshot peuvent provenir non pas d'un seul calcul mais d'une étude paramétrique d'un modèle, où l'on a évalué la réponse d'un modèle à la variation des paramètres.

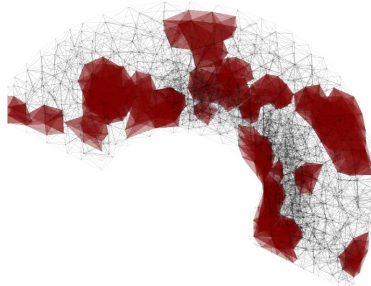


FIGURE 2.49 – Exemple de domaine d'intégration construit par la méthode d'hyper-réduction (Ryckelynck, 2005)

Ce domaine d'intégration réduit étant construit, si un nouveau calcul est effectué, au lieu d'effectuer un calcul éléments finis sur la géométrie complète, la solution calculée est restreinte à l'espace formé par la base réduite (on cherche donc les coordonnées réduites pertinentes) sur le RID. Le coût de calcul peut être extrêmement réduit.

#### 2.5.4 L'hyper-réduction hybride de modèles

La méthode hybride d'hyper-réduction est une variation de la méthode précédente dans laquelle on ajoute une correction éléments finis afin d'améliorer la précision du calcul. C'est en cela qu'on nomme cette méthode hybride (Baiges *et al.*, 2013).

Autour du RID précédemment déterminé par les méthodes d'hyper-réduction de modèles, on ajoute une ou plusieurs couches d'éléments d'interface. A chaque itération de ce modèle hybride, une première approximation hyper-réduite est effectuée. La solution est figée sur les éléments d'interface afin de fournir les conditions aux limites pour la résolution éléments finis qui a lieu à l'intérieur du RID.

L'intérêt de la correction EF avec l'intégration de la loi de comportement au cœur du domaine réduit est de rendre la méthode robuste pour les modèles constitutifs non linéaires comme les modèles élastoplastiques. Les problèmes de contacts (voir Fauque *et al.* (2018)) ou de localisation de la déformation peuvent être ainsi traités.

## Chapitre 3

# Modélisation mécanique

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Cahier des charges du modèle mécanique . . . . .</b>	<b>64</b>
<b>3.2</b>	<b>Élasticité . . . . .</b>	<b>65</b>
<b>3.3</b>	<b>Ajout d'un endommagement . . . . .</b>	<b>67</b>
<b>3.4</b>	<b>Traitement des données expérimentales . . . . .</b>	<b>69</b>
3.4.1	Essais considérés . . . . .	69
3.4.2	Flexion 4 points . . . . .	70
3.4.3	Compression uniaxiale . . . . .	70
3.4.4	Die pressing . . . . .	71
3.4.4.1	Exploitation théorique . . . . .	71
3.4.4.2	Exploitation pratique pour la calibration . . . . .	73
3.4.5	Résumé dans le plan $(p, q)$ . . . . .	73
<b>3.5</b>	<b>Calibration du seuil . . . . .</b>	<b>74</b>
3.5.1	Bilan des variables à calibrer . . . . .	74
3.5.2	Méthodologie de calibration . . . . .	75
3.5.3	Paramètres non admissibles . . . . .	78
<b>3.6</b>	<b>Estimation des termes d'écoulement plastique . . . . .</b>	<b>80</b>
3.6.1	Evolution de $p_c$ . . . . .	80
3.6.2	Evolution des paramètres cohésifs plastiques . . . . .	80
<b>3.7</b>	<b>Discussion . . . . .</b>	<b>83</b>
3.7.1	Limites de la calibration . . . . .	83
3.7.2	Ajout d'un durcissement : MC-CASM . . . . .	83

---



### 3.1 Cahier des charges du modèle mécanique

La bibliographie et les essais de Claire Menet réalisés dans le cadre de l'ANR FIMALIPO ont permis de dresser un ensemble de caractéristiques mécaniques du noyau à liant polyuréthane utilisé par Montupet.

En premier lieu, on peut faire le constat que le matériau est clairement élastoplastique, avec un endommagement plastique non négligeable. L'élastoplasticité n'est pas due à la cimentation, contrairement à ce qu'on pourrait penser : les sables seuls présentent aussi un comportement inélastique important et bien connu. La cimentation artificielle ajoute une cohésion au matériau se traduisant par de meilleures propriétés mécaniques (résistance à la compression et raideur plus élevées par exemple) mais aussi l'apparition de résistance à la traction. Les noyaux de fonderie ont une dualité friction (sable)/cohésion (résine) complexe, où les apports aux propriétés mécaniques du noyau de chaque constituant (sable ou résine) s'entremêlent. La dépendance à la température de vieillissement est aussi cruciale, les propriétés mécaniques du noyaux chutant de manière draconienne passé le pic d'évaporation de la résine ( $\theta > 200^\circ\text{C}$ ). La bibliographie met aussi en évidence l'importance du confinement, avec la distinction de deux zones :

- La zone sèche, à faible confinement, mettant en évidence le comportement du géomatériau en cisaillement s'accompagnant par une dilatation et un adoucissement qui mène ultimement à la rupture
- La zone humide, à haut confinement, mettant en évidence le comportement du géomatériau quand il est très comprimé, s'accompagnant d'une contraction et d'un durcissement très peu propice à une rupture facile.

Dans l'optique de rompre les noyaux, on préférera toujours atteindre la zone sèche au lieu de la zone humide. La simulation du débouillage d'une culasse est un problème qui est loin de se limiter à la simulation du martelage seul. Il convient de simuler aussi toute l'histoire thermomécanique du matériau avant même l'entrée de la pièce dans la déboureuse. Cela signifie notamment prendre en compte la dégradation thermique du liant polyuréthane lors de la coulée de l'aluminium mais aussi la précontrainte thermique de confinement. Cette précontrainte de confinement va avoir tendance à "déplacer" l'état de contrainte vers la zone humide et donc limiter la débourrabilité du matériau. Il faut donc évaluer aussi cette contribution.

Tout ceci permet de dresser un cahier des charges concernant la modélisation mécanique :

- Modèle élastoplastique
- Endommagement plastique
- Prise en compte de la dépendance à la température de vieillissement
- Prise en compte du confinement sur le comportement du matériau

Aucun modèle constitutif n'a été trouvé dans la littérature remplissant exactement ce cahier des charges. Il a été décidé d'adapter un modèle de la littérature.

Le martelage a pour but de rompre les noyaux par cisaillement. Une première approche plus pragmatique consiste donc à se focaliser uniquement sur des modèles mécaniques adaptés pour ce type de chargement. Le premier modèle mécanique testé durant la thèse a été le critère de Drucker-Prager, présenté en 2.4.5. Ce modèle est une première porte d'entrée pour la simulation du comportement mécanique des géomatériaux et s'est montré pertinent en cisaillement. Cependant ce critère échoue à prendre en compte la dépendance au confinement comme pour

les modèles à état critique.

Il a donc été décidé d'adapter le Cemented Clay and Sand Model (C-CASM), détaillé en Section 2.4.9.3. Il convient donc de lui ajouter la dépendance au vieillissement thermique ainsi qu'une loi d'endommagement phénoménologique.

## 3.2 Élasticité

Les lois de comportement en mécanique des sables postulent pour une très large majorité une hypoélasticité héritée du modèle de Cam-clay. Les courbes d'essais monotones réalisés par Claire Menet de flexion 4 points (Figure 2.17) et compression uniaxiale (Figure 2.18) tendent à montrer un comportement élastique linéaire. Pour rappel, pour les essais de compression uniaxiale monotones, les relevés de déplacement ont été obtenus grâce à un extensomètre de 25 mm placé en surface au cœur de l'échantillon. Une autre mesure du champ de déplacement a été testée : utiliser un LVDT de course 1.5 mm fixé sur le plateau supérieur. Les deux types de mesures donnent des résultats différents pour un même essai. Les mesures de LVDT présentent un important pied de courbe qui sous-entend un comportement non linéaire du matériau en élasticité (voir Figure 3.1). Cependant, ce n'est pas l'hypothèse qui a été retenue. En effet, il a été constaté expérimentalement que les noyaux s'écrasent et s'effritent au niveau des plateaux (notamment au plateau supérieur). Menet (2017) explique cela par des contraintes de cisaillement de contact à l'interface noyau/plateau ainsi qu'une moins bonne cohésion des grains aux extrémités de l'échantillon. Les mesures de LVDT ont donc été invalidées et seul l'extensomètre a été retenu.

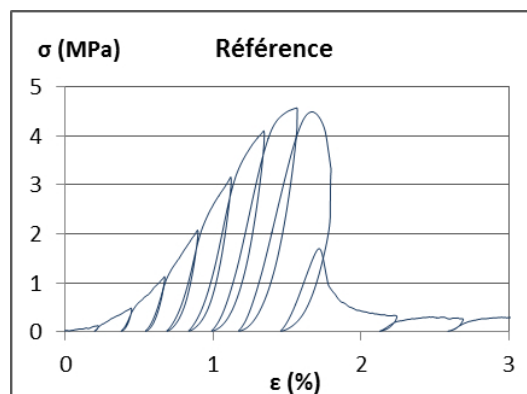
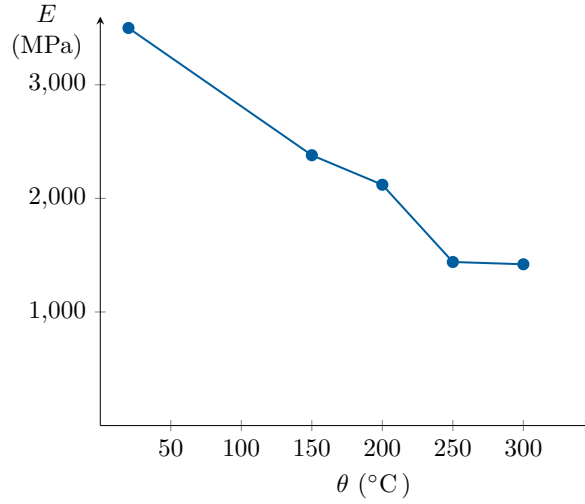


FIGURE 3.1 – Mesures d'un essai de compression uniaxiale avec LVDT (matériau non vieilli)

De fait, il a été postulé une élasticité linéaire isotrope, qui simplifie grandement le modèle et son implémentation informatique.

Il a été supposé que le coefficient de Poisson n'est pas dépendant de la température de vieillissement. C'est alors le module d'Young qui porte la dépendance à  $\theta$ . L'évolution de  $E$  en fonction de  $\theta$  est tracée en Figure 3.2.

Le coefficient de Poisson a été déterminé grâce à l'utilisation de l'essai de compression uniaxiale étudié en tomographie aux rayons X présenté en Section 2.3.4. Pour cet essai, si on



$\theta$ (°C)	20	150	200	250	300
$E$ (MPa)	3120	2380	2120	1440	1420

FIGURE 3.2 – Module d'Young en fonction de la température de vieillissement

suppose que la déformation est homogène et seulement élastique, on a classiquement :

$$\varepsilon_{lat} = -\nu \varepsilon_{ax} \quad (3.1)$$

Le premier palier de chargement de l'essai a été considéré comme élastique. La compression se fait selon l'axe  $z$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ax} &= \varepsilon_{zz}^{exp} \\ \varepsilon_{lat} &= \varepsilon_{xx}^{exp} = \varepsilon_{yy}^{exp} \end{aligned}$$

On détermine alors le coefficient de Poisson par :

$$\nu = -\frac{\langle \varepsilon_{lat}^{exp} \rangle}{\langle \varepsilon_{zz}^{exp} \rangle} \quad (3.2)$$

où  $\langle x \rangle$  correspond à la moyenne spatiale de la variable  $x$  dans l'échantillon. On a :

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{xx}^{exp} \rangle &= 5.027 \cdot 10^{-5} \\ \langle \varepsilon_{yy}^{exp} \rangle &= 5.076 \cdot 10^{-5} \\ \langle \varepsilon_{zz}^{exp} \rangle &= 2.4656 \cdot 10^{-4} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} -\frac{\langle \varepsilon_{xx}^{exp} \rangle}{\langle \varepsilon_{zz}^{exp} \rangle} &= 0.204 \\ -\frac{\langle \varepsilon_{yy}^{exp} \rangle}{\langle \varepsilon_{zz}^{exp} \rangle} &= 0.206 \end{aligned}$$

A partir de ces estimations, le coefficient de Poisson a été fixé à 0.2. Un seul chiffre significatif a été conservé.

### 3.3 Ajout d'un endommagement

Les essais réalisés par Claire Menet ont mis en évidence un endommagement de cimentation qui n'était pas présenté dans la bibliographie ou les cycles de charge/décharge sont rarement effectués (sauf dans Ami Saada *et al.* (1996)). Le bilan des essais de compression uniaxiale avec charge/décharge a été présenté en Figure 2.19. Pour le matériau non vieilli, la perte de raideur macroscopique peut aller jusqu'à 70% montrant que ce phénomène ne peut pas être négligé. L'endommagement n'est pas clairement explicité dans la bibliographie, notamment pour le CASM-n et le C-CASM. Ces deux modèles postulent une hypoélasticité ; le module de compressibilité isostatique  $K_{CASM-n}$  dépend de la pression hydrostatique. Dans le cas du matériau cimenté, un terme dépendant du paramètre de cimentation,  $K_c(p, b, p_c)$  est ajouté :

$$K_{CASM-n} = K_f(p) + K_c(p, b, p_c) \quad (3.3)$$

$$K_f(p) = \frac{vp}{\kappa^*} \quad (3.4)$$

$$K_c(p, b, p_c) = \frac{v}{\kappa^*} \sqrt{bpp_c} \quad (3.5)$$

L'endommagement n'est pas explicite. Certes,  $b$  ne pourra que diminuer, mais  $p_c$  comme  $p$  peuvent tout augmenter et le produit  $bpp_c$  peut croître entraînant une rigidification du matériau.

Dans le cas de la démarche de la thèse, où l'élasticité linéaire isotrope a été adoptée, il a été décidé d'explicitement très clairement une variable d'endommagement  $D$ . Il a été supposé que l'endommagement ne dépend uniquement que de la mesure d'endommagement plastique  $h$ . Ceci signifie qu'au niveau du matériau, la perte de raideur constatée est due à la rupture des ponts de liant (perte de cohésion). On postule donc que le sable lui-même ne participe pas à l'endommagement.

La formulation de la loi d'endommagement est purement phénoménologique. Elle s'appuie sur les courbes de la Figure 2.19 b. qui lient la déformation plastique axiale à la perte de raideur macroscopique.

Dans le cas de la compression uniaxiale, on a considéré que  $h$  et  $\varepsilon_{ax}^p$  sont proportionnels. En effet, on peut montrer, d'après Ami Saada *et al.* (1996) que de manière générale :

$$\dot{\varepsilon}_s^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial q} \quad (3.6)$$

$$\dot{\varepsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (3.7)$$

Ainsi, on peut réécrire l'équation d'évolution de  $h$  (Equation 2.46) :

$$\dot{h} = \dot{\lambda} \left( h_1 \frac{\partial g}{\partial q} + h_2 \left| \frac{\partial g}{\partial p} \right| \right) \quad (3.8)$$

Dans le cas de la compression uniaxiale, via Equation 2.11, on peut montrer que :

$$\varepsilon_{ax}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial q} \quad (3.9)$$

Dire que  $h$  et  $\varepsilon_{ax}^p$  sont proportionnels revient en fait à négliger le terme  $h_2 \left| \frac{\partial g}{\partial p} \right|$  dans le cas de la compression uniaxiale.

Partant de cette supposition, l'équation d'évolution de  $D$  en fonction de  $h$  a été choisie de manière arbitraire et fait intervenir deux paramètres ( $k_0, k_1$ ) :

$$E = E_{ini}(1 - D) \quad (3.10)$$

$$D(h; k_1, k_2) = k_0 h^{k_1} \quad (3.11)$$

$k_0$  est un simple terme d'amplification.  $k_1$  est un terme de puissance dont l'effet est illustré en Figure 3.3.

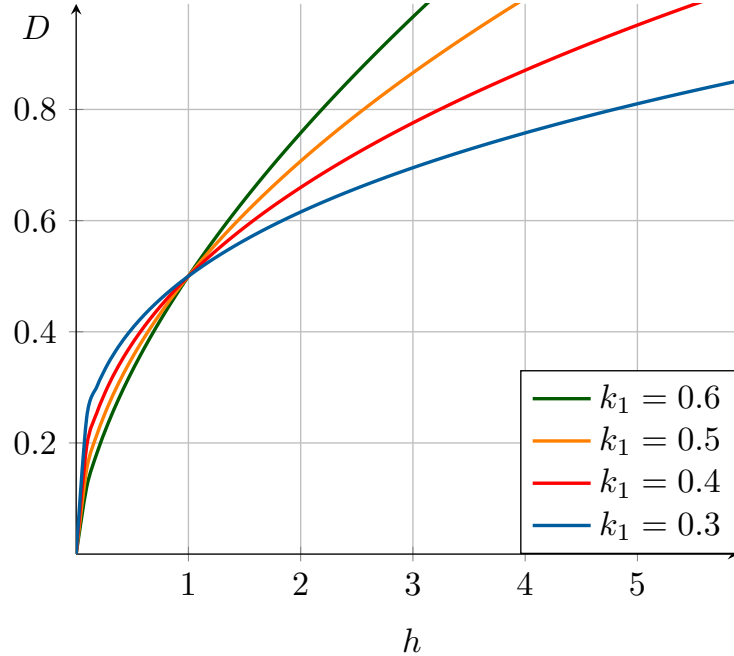


FIGURE 3.3 – Evolution de  $D$  en fonction de  $h$

Avec une telle formulation,  $D$  peut dépasser 1, ce qui n'a aucun sens physique. En pratique, on fixe une valeur maximum à  $D$ . Celle-ci peut-être 1. Cela signifie alors qu'on considère que lorsque les ponts de résine sont suffisamment brisés, le sable flou n'a plus aucune raideur. Le module d'Young du sable est d'environ 80 MPa, contre 1200 MPa ( $\theta = 350^\circ\text{C}$ ) à 3120 MPa (non vieilli). Ce module d'Young peut être négligé.

Une autre option peut être de fixer  $D_{max}$  tel que  $E = E_{sable} = 80 \text{ MPa}$ . Cela revient à :

$$D_{max} = 1 - \frac{E_{sable}}{E_{ini}} \quad (3.12)$$

Les boucles d'hystérésis présentes lors des essais de charge/décharge n'ont pas été modélisées.

### 3.4 Traitement des données expérimentales

#### 3.4.1 Essais considérés

On dispose en entrée d'un ensemble d'essais réalisés par C. Menet pour différentes températures de vieillissement. Les essais considérés sont :

- Flexion 4 points
- Compression uniaxiale
- Die pressing

On ne s'intéresse qu'aux courbes macroscopiques liant la déformation  $\varepsilon$  à la contrainte  $\sigma$ . On considère que le seuil est atteint au pic de cette courbe de chargement. Un exemple de courbe macroscopique est disponible en Figure 3.4. Pour ce cas, on considère que le seuil est atteint au point B. On pourrait cependant considérer comme point de plastification le point A, point marquant un durcissement pré-pic. On assimile le durcissement pré-pic (entre les points A et B) à l'élasticité. Il y a deux motivations derrière cela :

- Le C-CASM ne permet pas de modéliser le durcissement. Dans la littérature, on assimile toujours le domaine pré-pic à de l'élasticité (voir Yu *et al.* (2007) ou Rios *et al.* (2016))
- On préfère correctement évaluer la contrainte maximum admissible par le matériau  $\sigma_{pic}$

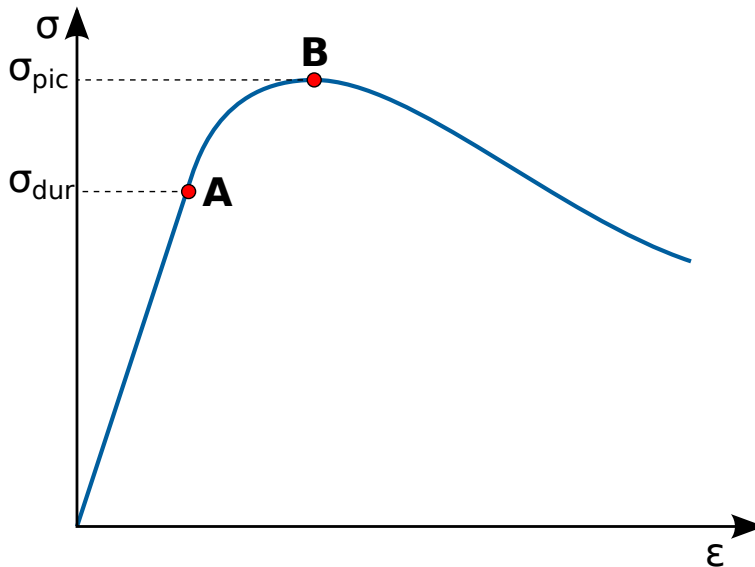


FIGURE 3.4 – Choix du point de plastification

Pour chaque essai, il faut donc estimer le tenseur des contraintes au moment où le seuil est atteint, puis évaluer le couple  $(p, q)$ . L'exploitation des données expérimentales fournit alors divers couples  $(p, q)$  pour divers confinement (flexion, compression uniaxiale et die pressing) et

plusieurs températures de vieillissement.

### 3.4.2 Flexion 4 points

Lors de l'essai de flexion 4 points, le tenseur des contraintes n'est pas homogène dans l'échantillon. L'essai est simulé avec Z-set afin de déterminer l'état de contrainte pour un matériau élastique isotrope. Un quart de l'éprouvette est maillé. Des conditions de symétrie sont appliquées. Un déplacement vertical nul est imposé sur l'appui pas, tandis qu'un déplacement est imposé sur l'appui haut. La Figure 3.5 présente la distribution de la pression hydrostatique  $p$  lors de la simulation. La déformée a été amplifiée afin de mieux la voir. On retrouve bien que la partie inférieure de l'échantillon est en traction ( $p > 0$ ). Si l'on calcule le rapport  $q/p$  on trouve en bas d'échantillon  $q/p = -3$ .

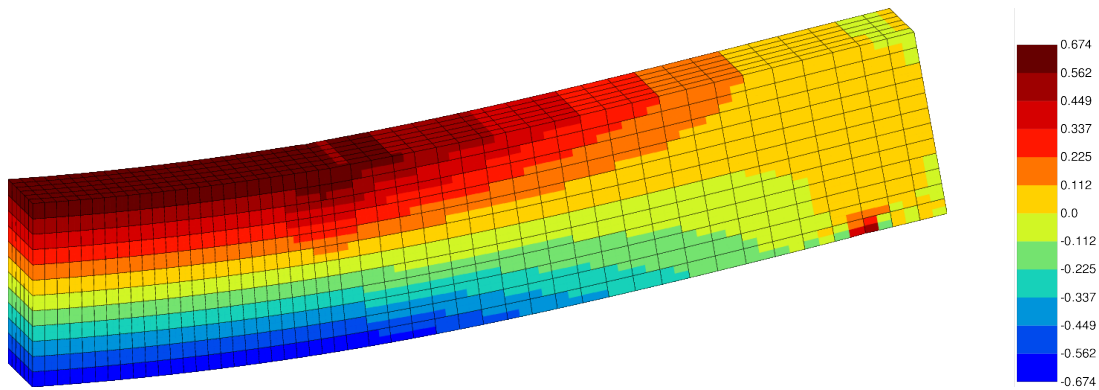


FIGURE 3.5 – Flexion 4 points -  $p$

La théorie des poutres permet d'estimer la contrainte de von Mises par :

$$q = \frac{3F(L_{inf} - L_{sup})}{2BH^2} \quad (3.13)$$

où les grandeurs impliquées dans la formule précédentes ont été définies dans la Figure 2.14.  $L_{inf}$  correspond à la distance entre les appuis inférieurs,  $L_{sup}$  à celle entre les appuis supérieurs (où la charge est appliquée).  $H$  et  $B$  sont respectivement la demi-hauteur de l'éprouvette et la largeur de l'éprouvette.

### 3.4.3 Compression uniaxiale

Lors d'un essai de compression uniaxiale, pour un matériau élastique linéaire, le confinement  $q/p$  est égal à 3. La contrainte équivalente de Mises est  $F/S_0$ .

### 3.4.4 Die pressing

#### 3.4.4.1 Exploitation théorique

L'étude de l'essai de die pressing est beaucoup plus complexe que les essais standards présentés auparavant. La friction au niveau de l'interface aluminium/noyau n'est sans doute pas négligeable. De plus, nous n'avons pas accès à la contrainte radiale au cours de l'essai comme pour d'autres essais présents dans la littérature (voir Mosbah *et al.* (1997)). La seule donnée est la force mesurée au niveau du piston.

L'essai a d'abord été étudié par des calculs éléments finis. On considère un maillage axisymétrique 2D représentant l'échantillon cylindrique dans l'appareillage. Les conditions aux limites sont précisées en Figure 3.6. Dans cette première approche, on ne modélise pas la friction d'interface aluminium/noyau. Les forces de frottement sont supposées nulles. Le déplacement est imposé au niveau du piston (déplacement arbitraire et monotone jusqu'à 0.05 mm).

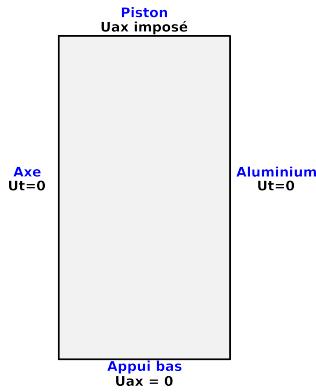


FIGURE 3.6 – Conditions aux limites de la simulation de die pressing

On étudie la réponse d'un matériau linéaire isotrope de module d'Young  $E$  fixe (3500 MPa). On fait varier le coefficient de Poisson  $\nu$  et on étudie la réponse du matériau. Celle-ci est tracée en Figure 3.7. Plus le coefficient de Poisson est élevé, plus la pression hydrostatique  $p$  augmente et la contrainte de Mises  $q$  diminue. Ce faisant, on constate une décroissance quasiment linéaire du rapport  $q/p$  pour un coefficient de Poisson compris entre 0.15 et 0.4. Pour  $\nu = 0.2$  on a  $q/p \simeq 1.5$ . Pour  $\nu = 0.3$ ,  $q/p \simeq 1$ .

Lors de l'essai, pendant le régime élastique, le tenseur des contraintes s'écrit (d'après Mosbah *et al.* (1997)) :

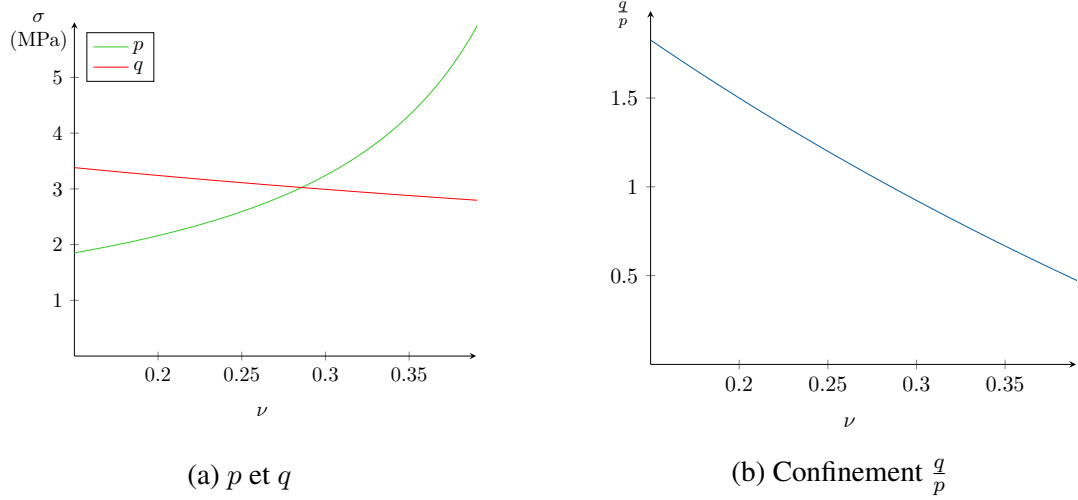
$$\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{ax} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_t & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_t \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

De fait :

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{ax} + 2\sigma_t) \quad (3.15)$$

$$q = \sigma_{ax} - \sigma_t \quad (3.16)$$



FIGURE 3.7 – Influence du coefficient de Poisson  $\nu$  sur la contrainte

Lors de ses essais, Claire Menet n'avait accès qu'à  $\sigma_{ax} = F/S_0$  et pas à la contrainte tangentielle. De fait, il a été retenu l'hypothèse très simplificatrice de fixer le coefficient de Poisson afin de déterminer le couple  $(p, q)$  en régime élastique. Fixer  $\nu$  revient à fixer le rapport  $q/p = \eta$ . Or d'après les équations précédentes on a :

$$\eta(\nu) = 3 \frac{\sigma_{ax} - \sigma_t}{\sigma_{ax} + 2\sigma_t} \quad (3.17)$$

Soit,

$$\sigma_t = \frac{\sigma_{ax}(3 - \eta(\nu))}{2\eta(\nu) + 3} \quad (3.18)$$

Ainsi, en supposant  $\nu$  on peut déterminer le couple  $(p, q)$  :

$$p = \frac{\sigma_{ax}}{3} \left( 1 + 2 \frac{3 - \eta(\nu)}{2\eta(\nu) + 3} \right) \quad (3.19)$$

$$q = \sigma_{ax} \left( 1 - \frac{3 - \eta(\nu)}{2\eta(\nu) + 3} \right) \quad (3.20)$$

Dans le cas où  $\nu = 0.2$ ,  $\eta = 1.5$ , ainsi les équations précédentes deviennent :

$$p = \frac{1}{2} \sigma_{ax} \quad (3.21)$$

$$q = \frac{3}{4} \sigma_{ax} \quad (3.22)$$

Ce traitement des essais de die pressing est assez simpliste et suppose notamment que :

- Le matériau est linéaire isotrope avant le pic de la contrainte axiale.
- Le frottement de contact aluminium/noyau est nul, rendant notamment le tenseur des contraintes homogène. Cette friction sera investiguée plus en détails lors de la simulation de l'essai de Push-out en Section 4.3.

Cet essai est disponible pour du sable seul, des noyaux non vieillis,  $\theta = 250^\circ\text{C}$  et  $\theta = 350^\circ\text{C}$ .

### 3.4.4.2 Exploitation pratique pour la calibration

Pour des raisons de difficultés d'exploitation, les données expérimentales de die pressing ont été exclues. Elles seront néanmoins utilisées pour évaluer les coefficients d'écoulement. Le déplacement des essais de die pressing correspond au déplacement de la traverse. Les courbes force-déplacement montrent alors un important pied de courbe, comme vu précédemment sur les essais de compression uniaxiale (Figure 3.1).

De plus, un épaulement est clairement visible lors de l'essai : voir Figure 3.8. Si l'on calcule la contrainte axiale au niveau de cette singularité, on constate que cela correspond au niveau de contrainte de l'essai de compression uniaxiale. Il semblerait donc que le déplacement latéral ne soit pas nul en tout début d'essai et que le matériau soit plutôt en compression uniaxiale. Un jeu entre le matériau et la matrice aluminium permet un déplacement latéral. Rappelons que le matériau a de faibles niveaux de déformation, ainsi même un faible jeu peut changer radicalement les résultats. Cependant, passé l'épaulement, un changement de pente net survient. Il s'agit du contact avec la matrice qui s'opère. Un durcissement s'observe.

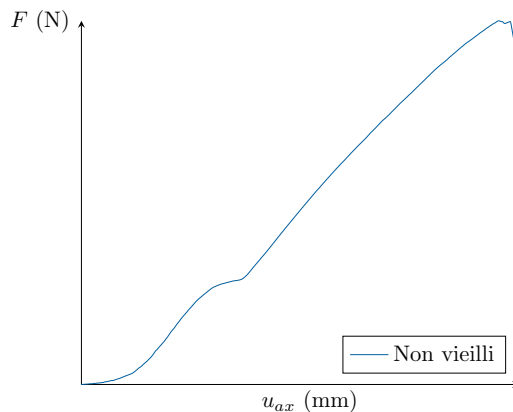
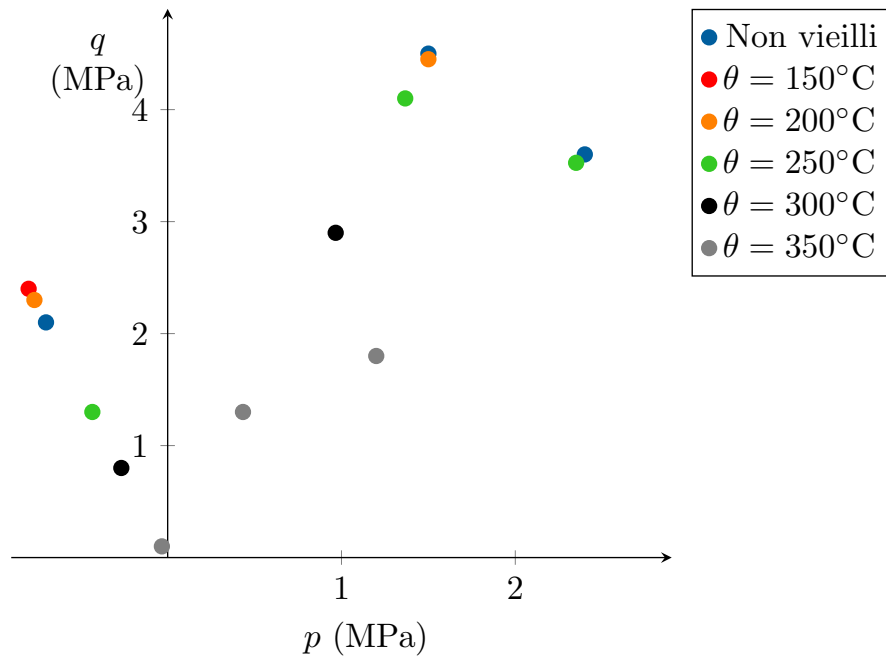


FIGURE 3.8 – Courbe force-déplacement axial type (matériau non vieilli)

### 3.4.5 Résumé dans le plan $(p, q)$

Une partie des essais réalisés par Claire Menet dans le cadre du projet FIMALIPO peuvent à présent être résumés par la Figure 3.9 où les limites d'élasticité des différents essais sont placées dans le plan  $(p, q)$  pour chaque température de vieillissement. Ces données sont donc le point de départ de la calibration du seuil  $f$ .

FIGURE 3.9 – Résumé des limites d'élasticité dans le plan  $(p, q)$ 

### 3.5 Calibration du seuil

#### 3.5.1 Bilan des variables à calibrer

Le vieillissement thermique ne concerne que le liant polyuréthane, pas le sable en lui-même qui ne subit a priori pas de changements pour les températures de vieillissement considérées. Le C-CASM s'inscrit dans le cadre de la modélisation de la cimentation par Gens et Nova (1993). Cela implique qu'il y a une distinction de faite entre les variables liées au sable (variables frictionnelles) et les variables dues à la résine (variables cohésives). A priori, seules les variables cohésives doivent porter la dépendance à la température de vieillissement  $\theta$ .

Les variables frictionnelles du C-CASM sont en fait les variables du Clay And Sand Model, c'est-à-dire :

- $M$  : la pente de la droite d'état critique
- $p_c$  : la pression de préconsolidation
- $n$  et  $r$  : les facteurs de forme du CASM

Les variables cohésives sont celles ajoutées par Gens et Nova (1993) :

- $b$  : le paramètre de liant
- $\alpha$  : le paramètre de cohésion relatif à la résistance à la traction

### 3.5.2 Méthodologie de calibration

La méthodologie de calibration s'appuie grandement sur un script python interactif développé pour l'occasion. Ce script est disponible en Annexe 6.1. L'interface est reproduite en Figure 3.10. Les points expérimentaux aux différentes températures de vieillissement sont tracées dans le plan  $(p, q)$ . Ensuite, l'utilisateur peut fixer les paramètres  $\mu = \{M, n, \alpha, r, b, p_c\}$  grâce aux curseurs visibles en bas de l'interface. La fonction de charge est alors tracée, ainsi que la ligne d'Etat Critique associée.

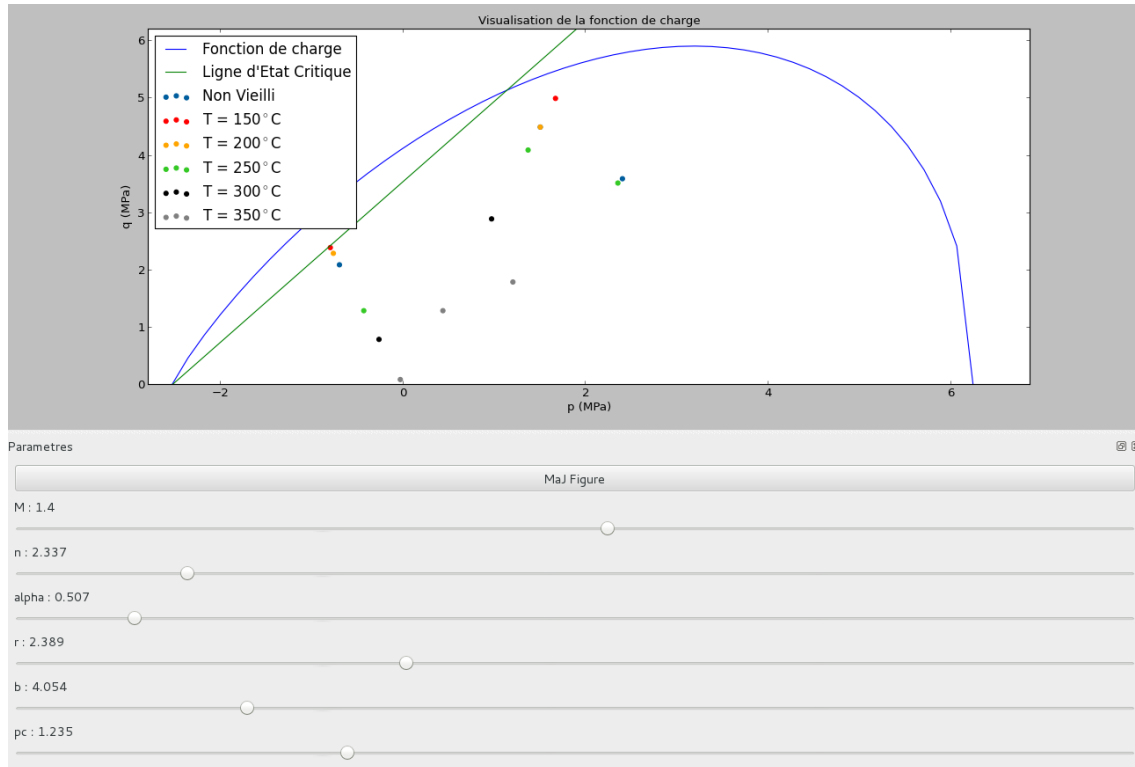


FIGURE 3.10 – Interface python interactive

Dans un tout premier temps, ce script a d'abord une utilisation *pédagogique*. Il permet simplement de mieux appréhender l'impact de tel ou tel paramètre sur la fonction de charge.

Concernant la calibration du modèle, Rios *et al.* (2016) indiquent qu'il faut d'abord calibrer le modèle lié au sable (CASM) à partir d'essais triaxiaux réalisés sur le sable seul afin de déterminer les paramètres frictionnels. Cette démarche fait sens, mais demeure impossible à réaliser dans le cas de l'ANR FIMALIPO. En effet, deux essais (flexion 4 points et compression uniaxiale) ne sont pas réalisables sur du sable non structuré.

Néanmoins, l'essai de die pressing réalisé sur le sable seul a permis déterminer la pression de préconsolidation  $p_c$ . Ami Saada *et al.* (1996) assimilent la pression hydrostatique limite en die pressing à la pression de préconsolidation. La justification intuitive à cela repose sur le fait que la clôture hydrostatique est assez abrupte. De fait, à haut confinement, la pression maximale en

élasticité est quasiment la même.

La procédure de calibration consiste à déterminer les paramètres pour chaque température de vieillissement de manière incrémentale, en commençant par le matériau non vieilli.

La littérature permet de dégager des intervalles de validité pour les variables frictionnelles ( $M$ ,  $n$  et  $r$ ) issues du CASM de Yu (1998). Concernant les variables cohésives ( $b$  et  $\alpha$ ), il semble difficile de transposer les valeurs trouvables dans la littérature au cas des noyaux de fonderie à liant polyuréthane. En effet, la plupart des publications trouvées traitent de sables naturellement cimentés (à savoir des sables argileux). La cohésion apportée par l'argile est indéniablement moindre que celle apportée par la cimentation artificielle (la résistance à la traction ajoutée est moindre). De fait, les valeurs de  $b$  et  $\alpha$  sont totalement libres. Le bilan des intervalles de validité est dressé en Table 3.1.

Paramètre	Intervalle de validité
$M$	1.1 - 1.4
$n$	1.0 - 5.0
$r$	$\gg 3$ .
$\alpha$	Non précisé
$b$	Non précisé

TABLE 3.1 – Intervalles de validité préconisés par Yu (1998)

Pour chaque température de vieillissement, l'objectif est de trouver un jeu de paramètres tel que la fonction de charge passe par les points expérimentaux de la Figure 3.9. La première calibration (matériau non vieilli) est a priori cruciale : elle fixe les paramètres frictionnels qui ne devront pas changer quand  $\theta$  augmente. De fait, pour passer d'une température de vieillissement à une autre, il ne faut que modifier  $b$  (dilatation de la surface de charge) et  $\alpha$  ("translation" de la pression de résistance à la traction). En d'autres termes, il faut trouver un jeu de paramètres frictionnels  $\{M, n, r\}$  tels qu'il ne suffit que d'ajuster  $b$  et  $\alpha$  pour calibrer la surface de charge pour chaque température de vieillissement  $\theta$ . La procédure est alors purement "empirique" et consiste à tester des jeux de paramètres et leur validité. L'utilisation du script interactif permet en outre de mieux connaître l'impact de chaque paramètre sur la fonction de charge. De fait, après une période d'adaptation, il devient assez facile de calibrer le modèle.

Les tests de paramètres n'ont pas permis de dégager un seul jeu de paramètres frictionnels. Deux zones se sont naturellement distinguées :  $\theta \leq 200^\circ\text{C}$  et  $\theta > 200^\circ\text{C}$ . Ce n'est pas étonnant car, comme précisé chez Jomaa *et al.* (2015) et Bargaoui *et al.* (2017) cela correspond au pic de l'évaporation de la résine (Section 2.1). Quand on étudie les limites élastiques en compression et en traction, cette limite apparaît aussi clairement. En Figure 3.11 (a) sont tracées les limites élastiques (von Mises) en traction et en compression. La résistance en compression initie une chute entre  $\theta = 150$  et  $200^\circ\text{C}$ . Si l'on considère la résistance à la traction, en revanche, elle marque une nette décroissance passée  $200^\circ\text{C}$  tandis que pour des vieillissements moindres, elle se maintient. Cette rupture est encore plus claire si l'on s'intéresse au ratio  $\sigma_c/\sigma_t$  qui subit un changement de pente abrupt passé  $200^\circ\text{C}$  (voir Figure 3.11 (b)). De fait, une troisième catégorie de paramètres a été introduite : *les paramètres de zone*. Ces paramètres sont constants, mais par zone de température de vieillissement, c'est-à-dire entre 20 et  $200^\circ\text{C}$  et après  $250^\circ\text{C}$  (les

zones 1 et 2 de la Figure 3.11). Ces paramètres sont  $r$  et  $n$ .  $M$  et  $p_c$  demeurent des paramètres frictionnels et  $b$  et  $\alpha$  des paramètres cohésifs.

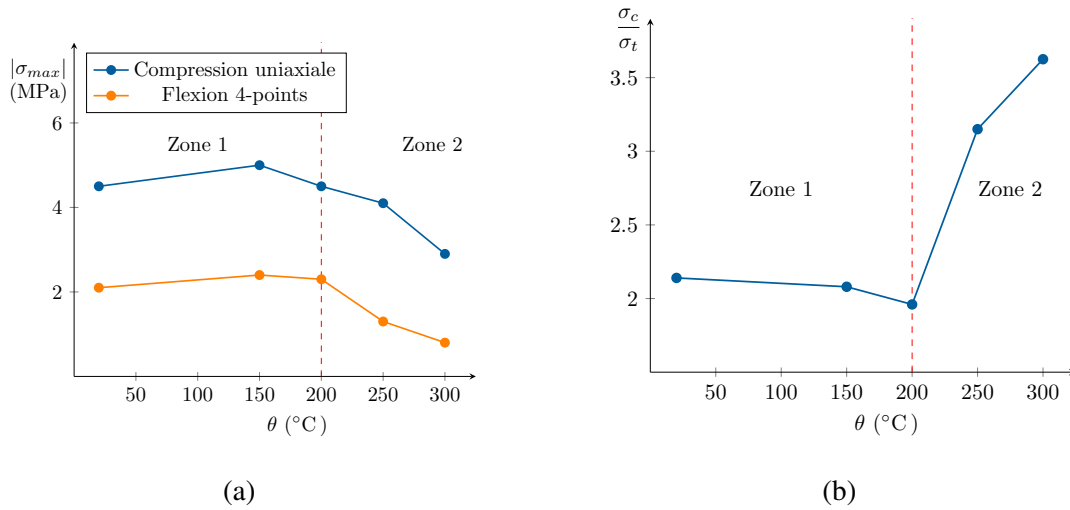


FIGURE 3.11 – Étude des limites élastiques en compression et en traction

Les paramètres finaux calibrés sont résumés en Table 3.2.

$\theta$ (°C)	25	150	200	250	300
$p_c$	2.8	2.8	2.8	2.8	2.8
$M$	1.4	1.4	1.4	1.4	1.4
$n$	2.338	2.338	2.338	2.7	2.7
$r$	2.6	2.6	2.6	1.779	1.779
$b$	1.275	1.451	1.08	0.991	0.606
$\alpha$	0.507	0.507	0.666	0.356	0.356

TABLE 3.2 – Paramètres du seuil calibrés

Comme précisé par Gens et Nova (1993), la prise en compte de la cimentation est pilotée par les dilatations de la surface de charge, en compression et en traction. D'une part l'augmentation de la pression isotrope limite  $p_o = (1 + b)p_c$  et d'autre part, l'apparition d'une résistance à la traction isotrope  $p_t = \alpha bp_c$ .

Les évolutions des deux paramètres cohésifs  $b$  et  $\alpha$  sont à lier respectivement à ces deux grandeurs. La Figure 3.12 (a) montre l'évolution de  $p_o$  et de la résistance à la compression en fonction de  $\theta$ . Les courbes ont été normalisées, c'est-à-dire que les valeurs ont été divisées par la valeur pour le matériau non vieilli. On constate alors que les deux contraintes ont significativement la même évolution. Le paramètre de liant  $b$  est à lier à l'augmentation de la résistance à la compression due à la cimentation. Il apparaît notamment que  $b$  n'est par exemple pas lié uniquement à une quantité de ponts de liant. En effet, ce paramètre augmente entre 20 et 150°C. Il n'y a naturellement pas de création de ponts entre ces deux températures. A 150°C, l'eau présente dans les ponts de résine s'est évaporée et la réticulation du polymère a été peut-être accentuée.

Cela pourrait générer une rigidification des ponts et une légère augmentation de leur contrainte à la rupture.  $b$  dépend aussi de "l'état" de la résine que ce soit sa rigidification ( $150^\circ\text{C}$ ) ou sa dégradation ( $\theta > 200^\circ\text{C}$ ).

La résistance à la traction modélisée  $p_t$  évolue aussi de manière extrêmement similaire à la contrainte maximale déterminées lors des essais de flexion 4-points (Figure 3.12 (b)).

On peut alors en tirer une estimation de  $p_o(\theta)$  et  $p_t(\theta)$  directement en fonction des données expérimentales :

$$p_o(\theta) = p_o(\theta_0) \frac{\sigma_c(\theta)}{\sigma_c(\theta_0)} = p_c(1 + b(\theta)) \quad (3.23)$$

$$p_t(\theta) = p_t(\theta_0) \frac{\sigma_t(\theta)}{\sigma_t(\theta_0)} = \alpha(\theta)b(\theta)p_c \quad (3.24)$$

où  $\theta_0 = 20^\circ\text{C}$ .

Ces estimations permettent donc de dégager une procédure de calibration en fonction de la température de vieillissement :

1. Calibrer la loi de comportement pour le matériau non vieilli afin de fixer les paramètres frictionnels et de zone
2. Pour chaque température de vieillissement  $\theta$ , estimer les paramètres cohésifs par :

$$b(\theta) = (1 + b(\theta_0)) \frac{\sigma_c(\theta)}{\sigma_c(\theta_0)} - 1$$

$$\alpha(\theta) = \frac{\alpha(\theta_0)b(\theta_0)}{b(\theta)} \frac{\sigma_t(\theta)}{\sigma_t(\theta_0)}$$

3. Affiner les valeurs des paramètres de seuil afin de coller au mieux aux données expérimentales

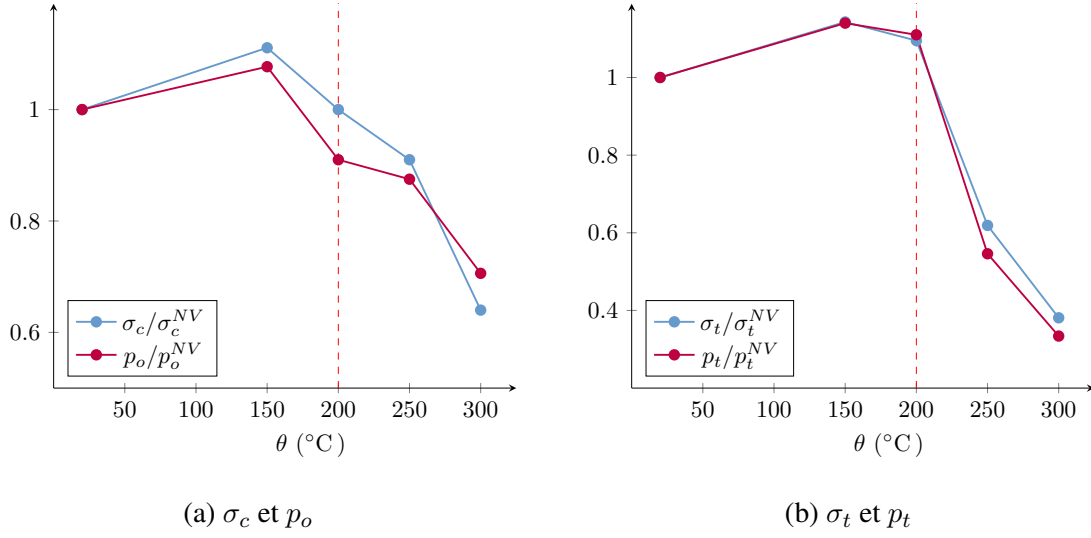
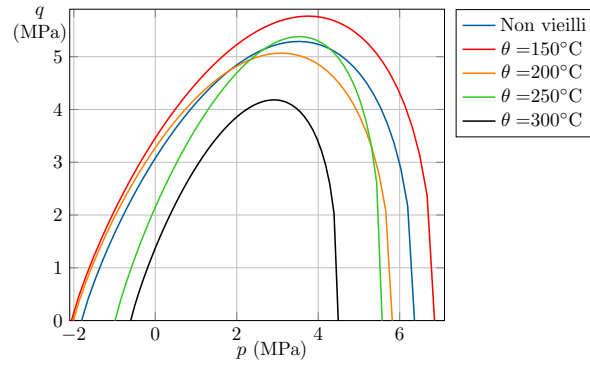
Finalement, les fonctions de charge dans le plan  $(p, q)$  pour chaque température de vieillissement sont tracées en Figure 3.13.

On suppose en outre qu'entre deux températures de vieillissement les paramètres de la fonction de charge peuvent être linéairement interpolés. On vérifie cependant que les fonctions de charge interpolées fournissent des transitions intuitivement correctes. La Figure 3.14 montre les surface de charge interpolées entre 200 et 250  $^\circ\text{C}$ , c'est-à-dire la zone de variations de paramètres la plus brutale. On constate que la transition est effectivement régulière.

### 3.5.3 Paramètres non admissibles

La calibration doit contenir une dernière étape de validation des paramètres trouvés. Il apparaît que pour un jeu de paramètres de la fonction de charge donné, l'écoulement plastique peut ne pas être défini.

D'après Ami Saada *et al.* (1996), les incréments de déformation plastique volumique et de ci-

FIGURE 3.12 – Evolutions des paramètres cohésifs et des limites d'élasticité en fonction de  $\theta$ FIGURE 3.13 – Surfaces de charge en fonction de  $\theta$ 

saillement sont :

$$\dot{\epsilon}_v^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial p} \quad (3.25)$$

$$\dot{\epsilon}_s^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial q} \quad (3.26)$$

où  $\dot{\lambda} > 0$  est le multiplicateur plastique et  $g$  la fonction d'écoulement introduite en Section 2.4.2. Si on utilise la fonction d'écoulement du C-CASM (Equation 2.60), il vient :

$$\dot{\epsilon}_v^p = 27 \dot{\lambda} \frac{(M(p + p_t) - q)}{(3(p + p_t) - q)(2q + 3(p + p_t))} \quad (3.27)$$

$$\dot{\epsilon}_s^p = 3 \dot{\lambda} \frac{3M(p + p_t) - 2Mq + 9(p + p_t)}{(3(p + p_t) - q)(2q + 3(p + p_t))} \quad (3.28)$$



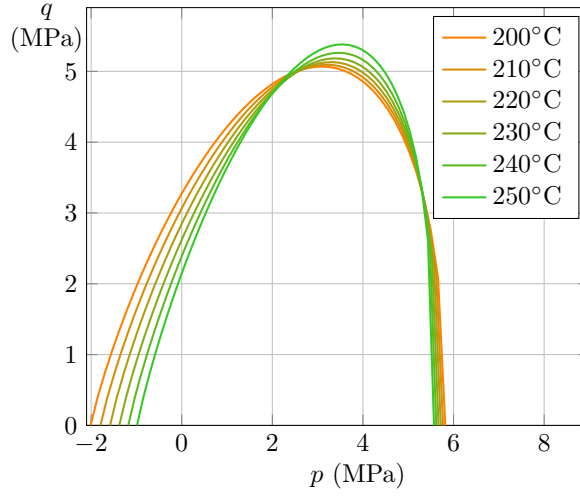


FIGURE 3.14 – Interpolation de la surface de charge entre deux températures de vieillissement

Ces deux termes ont donc un sens si le dénominateur de ces équations est strictement positif, soit :

$$\eta_t < 3 \quad (3.29)$$

où  $\eta_t = q/(p + p_t)$ .

Il faut donc que la surface de charge soit atteinte pour un état de contrainte vérifiant cette condition. Il se trouve que cela ne se vérifie pas toujours. Un exemple d'une telle calibration est disponible en Figure 3.15. Il convient donc de faire une vérification a posteriori de la validité des surfaces de charge. Les surfaces de charges précédemment validées sont admissibles car leur pente à l'origine est inférieure à 3.

## 3.6 Estimation des termes d'écoulement plastique

### 3.6.1 Evolution de $p_c$

L'évolution la pression de préconsolidation  $p_c$  est pilotée par le ratio :

$$c_n = \frac{v_0}{\lambda^* - \kappa^*} \quad (3.30)$$

L'indice des vides initial  $v_0$  a été estimé à 1.67.

Les coefficients de gonflement  $\lambda^*$  et  $\kappa^*$  ont été déterminés par Claire Menet durant sa thèse. Ils ont été estimés à respectivement 0.1 et 0.02. Le résumé des paramètres est disponible en Table 3.3.

### 3.6.2 Evolution des paramètres cohésifs plastiques

Rios *et al.* (2016) décrivent en détail la calibration du C-CASM. Leur procédure s'appuie sur les courbes macroscopiques contrainte-déformation de toute une série de tests faisant varier

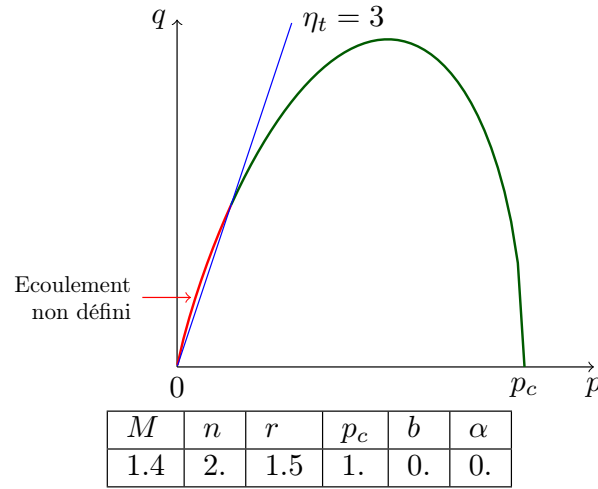


FIGURE 3.15 – Surface de charge avec un écoulement partiellement non défini

$v_0$	$\lambda^*$	$\kappa^*$	$c_n$
1.667	0.1	0.02	20.83

TABLE 3.3 – Résumé des paramètres déterminés par Menet (2017) pour l'essai de die pressing

le confinement de l'échantillon pour calibrer les coefficients de décohesion ( $h_1, h_2$ ). Comme monté par l'Equation 2.46,  $h_2$  pilote la rupture des ponts de liant lors d'un chargement volumique. L'utilisation du comportement post-pic lors de compression isotrope est alors préconisée afin de le déterminer. Concernant le terme de cisaillement, il est calibré grâce à deux essais triaxiaux à large pression. Plusieurs relations entre  $h_2$  et  $h_1$  sont évaluées. Les auteurs préconisent  $h_1 = 1$  pour leur matériau (sable argileux).

Dans un même esprit, une estimation des paramètres cohésifs plastiques a été effectuée en se basant sur les courbes macroscopiques des essais disponibles. Deux hypothèses ont été effectuées :

- Le paramètre  $h_2$  pilotant la décohesion due aux chargements volumiques a été considéré comme constant à 5. Les effets volumiques ont été négligés dans le comportement de la résine. Il a été estimé que le cisaillement est prédominant dans la rupture des ponts intergranulaires.
- Le coefficient de puissance de loi d'endommagement,  $k_1$ , a été pris comme valant 1/2. Ceci signifie simplement que  $D$  est proportionnel à la racine carrée de la déformation plastique d'endommagement  $h$ .

Le bilan de l'estimation des paramètres cohésifs est présenté en Table 3.4.  $h_1$  croît avec la température de vieillissement  $\theta$ . En effet, les ponts sont plus friables et adhèrent moins à la surface des grains (porosités dues à des bulles d'évaporation). Il devient donc plus facile de rompre le liant. En revanche, l'amplitude de l'endommagement  $k_0$  diminue. Cela provient du fait que l'endommagement lui-même diminue en intensité.

A titre d'illustration, on peut tracer la courbe contrainte-déformation obtenue par le modèle

$\theta$ (°C)	$h_1$	$h_2$	$k_0$	$k_1$
20	8	5	0.5	0.5
150	9	5	0.45	0.5
200	10	5	0.4	0.5
250	15	5	0.3	0.5
300	18	5	0.3	0.5

TABLE 3.4 – Estimation des paramètres cohésifs plastiques

dans le cas d'une compression uniaxiale. La simulation est menée sur un élément. Cette courbe est alors confrontée aux résultats expérimentaux en Figure 3.16.

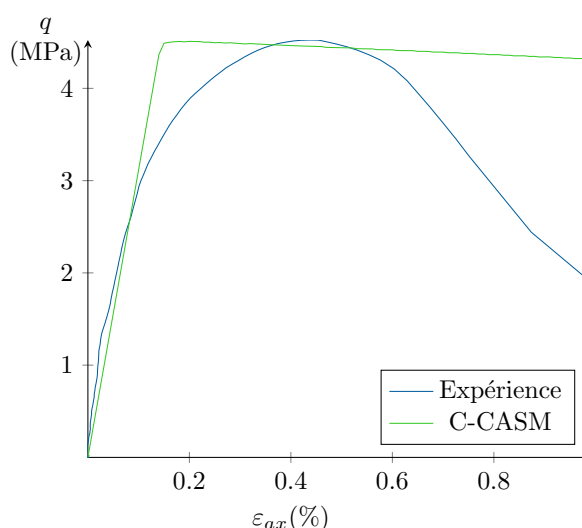


FIGURE 3.16 – Comparaison des courbes macroscopiques pour une compression uniaxiale

Les courbes macroscopiques diffèrent notablement. L'une des raisons principales est l'absence de durcissement pré-pic. Le pic de la courbe de chargement est alors atteint à une déformation axiale sensiblement moindre (0.1% contre 0.45% expérimentalement). L'adoucissement survient plus tôt dans la modélisation. L'objectif fixé du modèle est de déterminer le maximum de la contrainte et non la déformation. Dans ce cas-ci, le modèle est donc acceptable. Cet adoucissement peut d'ailleurs apparaître très faible par rapport à celui constaté expérimentalement. La simulation est cependant très simpliste : le matériau considéré est homogène et ne présente pas de bande de localisation post-pic alors que les essais si. Cette localisation de la déformation va altérer la courbe macroscopique et causer un adoucissement plus abrupt.

## 3.7 Discussion

### 3.7.1 Limites de la calibration

La procédure de calibration s'est déroulée en deux temps : la calibration des termes de la fonction de charge  $f$  et celle des paramètres d'écoulement plastique. Cette procédure s'est appuyée sur un panel d'essais relativement restreint. Les confinements ( $q/p$ ) testés sont peu nombreux, contrairement à la majorité des publications de la littérature où une grande variété d'essais de compression triaxiale sont effectués. Notons toutefois que l'influence de la température de vieillissement n'a pas été testée dans ces études. Varier  $\theta$  décuple le nombre d'essais à effectuer.

Des essais complémentaires, notamment à plus grand confinement, pourraient remettre en cause la fonction de charge. C'est pour cela que la procédure de calibration a été détaillée afin d'être menée à nouveau si besoin. Cette procédure serait alors relativement aisée à effectuer, notamment grâce au script interactif. La procédure peut aussi s'adapter à de nouveaux type de noyaux de fonderie (nouvelle résine, nouveau sable, ...).

Toujours concernant les termes de seuil, un des défauts de la modélisation demeure la redondance des paramètres. Deux jeux de paramètres peuvent fournir deux surfaces de charge proches. Ceci est illustré en Figure 3.17.

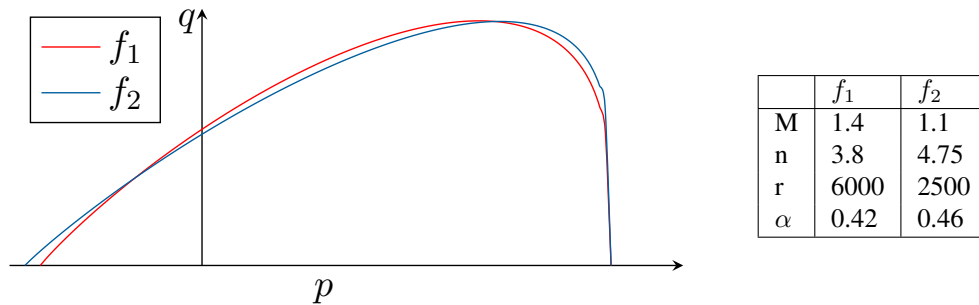


FIGURE 3.17 – Redondance des paramètres du C-CASM

### 3.7.2 Ajout d'un durcissement : MC-CASM

Dans le cadre fixé par Gens et Nova (1993), le paramètre de liant,  $b$  ne peut que décroître lors de l'écoulement plastique. A l'échelle des grains, cela signifie que la résine va se briser directement en plasticité. Les courbes de chargement macroscopique des noyaux, vieillis thermiquement ou non, montrent un durcissement pré-pic. Ce durcissement peut être dû à un durcissement avant rupture de la résine au niveau des ponts intergranulaires.

Le C-CASM peut être modifié en ajoutant un durcissement avant l'adoucissement dans la loi d'évolution de  $b$ . On subdivise  $b$  en une différence de deux termes :

$$b = (b_0 - b_1) \quad (3.31)$$

où  $b_0$  est semblable à la valeur de  $b$  au pic et  $b_1$  est un nouveau paramètre de durcissement.  $b_1$  va tendre vers 0 en plasticité. De fait,  $b$  va augmenter vers  $b_0$ . La motivation derrière une telle formulation est que  $b_0$  correspond à la valeur de  $b$  initiale du C-CASM.

On postule aussi que la décroissance de  $b_1$  est liée à la mesure de déformation plastique d'endommagement  $h$  par une relation exponentielle :

$$b_1 = b_1^{ini} e^{-h_2 h} \quad (3.32)$$

où  $h_2$  est un nouveau paramètre contrôlant la vitesse de durcissement en déformation plastique. L'équation d'évolution de  $b$  devient alors :

$$b = b_0 e^{-h} - b_1 e^{-h_2 h} \quad (3.33)$$

Ce nouveau sous-modèle a été par la suite appelé MC-CASM pour *Modified Cemented Clay and Sand Model*. Naturellement, pour  $b_1$  nul, le MC-CASM et le C-CASM sont identiques. Les comparaisons des évolutions de  $b$  pour le MC-CASM et le C-CASM sont tracés en Figure 3.18. Passé un certain seuil, les deux valeurs de  $b$  sont quasiment identiques ( $b_1$  est nul).

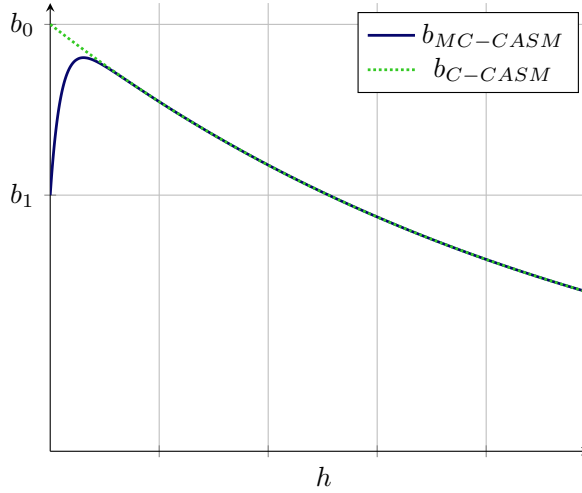


FIGURE 3.18 – Evolution  $b$  en fonction de  $h$

Afin de comparer les deux modèles, un essai de compression uniaxiale a été simulé sur un élément. Les deux modèles ont un même  $b_0$  et de même paramètres d'écoulement plastique ( $c_n$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $k_0$  et  $k_1$ ). Les paramètres  $b_1$  et  $h_2$  ont été pris arbitrairement. La Figure 3.19 montre les courbes macroscopiques déformation-contrainte obtenues. L'ajout de ce durcissement va décaler l'apparition du pic, qui survient dans cette illustration à une déformation plus de deux fois plus grande que celle du C-CASM. Une fois le pic atteint, les modèles ont une réponse quasiment identique (toujours car  $h_1$  est presque nul, donc les modèles sont les mêmes). On remarque en outre que les pics ne sont pas exactement les mêmes. L'équation d'évolution de  $b$  du MC-CASM (Equation 3.33) fait apparaître une compétition entre le terme de durcissement ( $-b_1 e^{-h_2 h}$ ) et le terme d'adoucissement ( $b_0 e^{-h}$ ). Lorsque le pic est atteint (terme de durcissement nul), il y a eu de l'adoucissement.

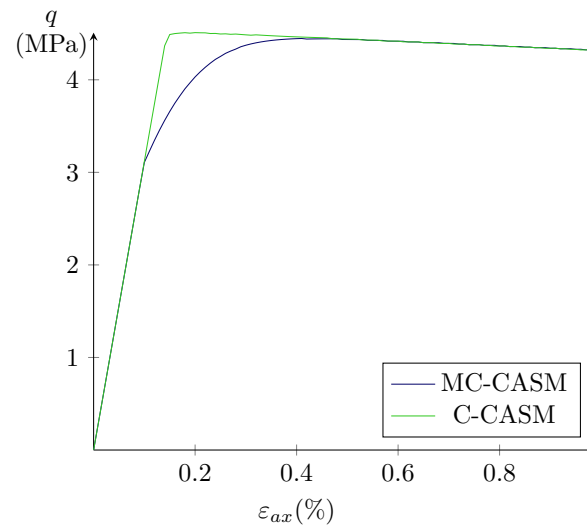


FIGURE 3.19 – Simulation d'un essai de compression uniaxiale avec les deux modèles

La calibration des termes d'écoulement plastique et d'endommagement du MC-CASM sera détaillée dans la Section 4.2.7 uniquement pour le matériau non vieilli. La calibration du MC-CASM pour toutes les températures de vieillissement nécessiterait de reconsidérer tout le protocole de calibration. Pour chaque essai, il faudrait déterminer les points correspondant au seuil mais aussi au pic (respectivement les points A et B de la Figure 3.4). Pour les études liées au débouffrage et la fragmentation des noyaux, le C-CASM ainsi calibré a été estimé comme étant assez pertinent.



# Chapitre 4

## Validations sur structure

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Etude de l'essai de compression observé aux rayons X avec le C-CASM</b>	<b>89</b>
4.1.1	Introduction	89
4.1.2	Analyse de l'essai	89
4.1.2.1	Champ de déplacement pré-pic	89
4.1.2.2	Champ de déplacement post-pic	91
4.1.3	Première simulation avec le C-CASM	91
4.1.3.1	Motivation et méthodologie	91
4.1.3.2	Calcul de validation du C-CASM	92
4.1.3.3	Intérêt pour la calibration	93
<b>4.2</b>	<b>L'élague de données expérimentales</b>	<b>95</b>
4.2.1	Introduction	95
4.2.2	Digital Volume Correlation	96
4.2.3	Réduction de la dimension tenant compte de la distribution du résidu	98
4.2.4	Domaine Réduit Expérimental	100
4.2.5	Maillage réduit du DRE	103
4.2.6	Application au sable de fonderie	105
4.2.6.1	Construction de la base réduite expérimentale	105
4.2.6.2	DRE après DVC sur l'échantillon	106
4.2.7	FEMU-H <sup>2</sup> ROM	108
4.2.7.1	Introduction	108
4.2.7.2	Évaluer la pertinence des données élaguées	109
4.2.7.3	Procédure de calibration en utilisant la H <sup>2</sup> ROM	109
4.2.7.4	Concernant les conditions aux limites de type Dirichlet	111
4.2.7.5	Fonction de coût et mise-à-jour des paramètres	113
4.2.7.6	Vérification EF et calibration du modèle	114
4.2.8	Discussion	115
4.2.8.1	Limitations de la procédure d'élague de données	115
4.2.8.2	Etude a posteriori du DRE	117



<b>4.3</b>	<b>Simulation de l'essai de push-out . . . . .</b>	<b>118</b>
4.3.1	Rappels . . . . .	118
4.3.2	Objectifs de l'étude numérique . . . . .	119
4.3.3	Géométrie et maillage . . . . .	120
4.3.4	Éléments cohésifs d'interface . . . . .	120
4.3.5	Calcul thermique . . . . .	121
4.3.5.1	Objectif . . . . .	121
4.3.5.2	Estimation de la dégradation thermique . . . . .	121
4.3.6	Calcul mécanique . . . . .	123
4.3.6.1	Valeur initiale des paramètres . . . . .	123
4.3.6.2	Compression thermique initiale . . . . .	123
4.3.6.3	Push-out en lui-même . . . . .	125
4.3.7	Sensibilité au maillage . . . . .	127
4.3.8	Discussion . . . . .	129

---

## 4.1 Etude de l'essai de compression observé aux rayons X avec le C-CASM

### 4.1.1 Introduction

La capacité de la loi de comportement C-CASM est d'abord évaluée avec l'utilisation des données expérimentales de l'essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X par Claire Menet dans le cadre de l'ANR FIMALIPO. Cet essai a été décrit en Section 2.3.4. Dans un premier temps, on se propose d'analyser plus finement cet essai afin de justifier notamment son utilisation pour de la validation ou de la calibration de modèle. Dans un second temps, le champ de déplacement expérimental obtenu est utilisé comme condition aux limites d'un calcul élément fini avec le C-CASM précédemment calibré. Cela permet d'évaluer la pertinence du modèle sur un cas réel 3D.

### 4.1.2 Analyse de l'essai

Pour rappel, l'essai présenté ici consiste en un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X. 7 paliers de chargement croissant ont été acquis, le septième correspondant au matériau rompu. L'essai a été effectué sur un matériau non vieilli, et la zone d'intérêt retenue est un parallélépipède de  $20.0 \times 22.4 \times 15.8 \text{ mm}^3$ .

#### 4.1.2.1 Champ de déplacement pré-pic

L'acquisition d'images au cœur de l'échantillon grâce à la tomographie aux rayons X et à la corrélation d'images donne accès au champ de déplacement à l'intérieur de l'échantillon. La détermination a été effectuée grâce au logiciel Ufreckles (voir (Réthoré *et al.*, 2007) et Réthoré (2018)). Comme relevé par Claire Menet, le champ de déplacement avant le pic de la courbe de chargement - ou plus simplement appelé "champ pré-pic" - est inhomogène et montre plusieurs initiations de bandes de localisation, comme constaté par la littérature concernant les matériaux granulaires (voir Figure 2.2.3). Considérons une mesure de la déformation totale de cisaillement  $\varepsilon_s$  définie par :

$$\begin{aligned}\xi_s &= \text{dev}(\xi) \\ \varepsilon_s &= \sqrt{\frac{3}{2} \xi_s : \xi_s}\end{aligned}$$

Ces initiations de localisation peuvent être plus nettement observées pour le dernier palier pré-pic. La Figure 4.1 montre les voxels de l'échantillon vérifiant  $\varepsilon_s > \varepsilon_s^{max}/2$ . Deux zones se distinguent en haut de l'éprouvette et une dernière bande diagonale semble s'amorcer aussi par le bas.

D'un point de vue mécanique, si l'on regarde les déformations totales de cisaillement au cœur de l'échantillon, on constate qu'elles ne sont pas homogènes. Si on trace l'évolution de la déformation de cisaillement  $\varepsilon_s$  au cours de l'essai, on constate qu'elle n'est pas homogène. Les histogrammes de la Figure 4.2 montrent l'évolution de la distribution de  $\varepsilon_s$ . La distribution

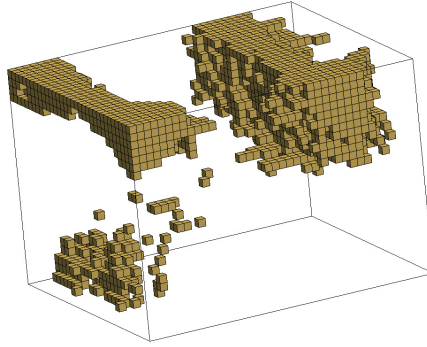


FIGURE 4.1 – Localisation au dernier palier pré-pic : voxels vérifiant  $\varepsilon_s > \varepsilon_s^{max}/2$

des déformations au premier palier est la moins étalée. Même s'il n'y a pas une homogénéité absolue, elle est nettement plus acceptable que pour les paliers suivant, où la gaussienne de la répartition des déformations de cisaillement tend à voir sa variance significativement augmenter et, naturellement, sa valeur moyenne croître.

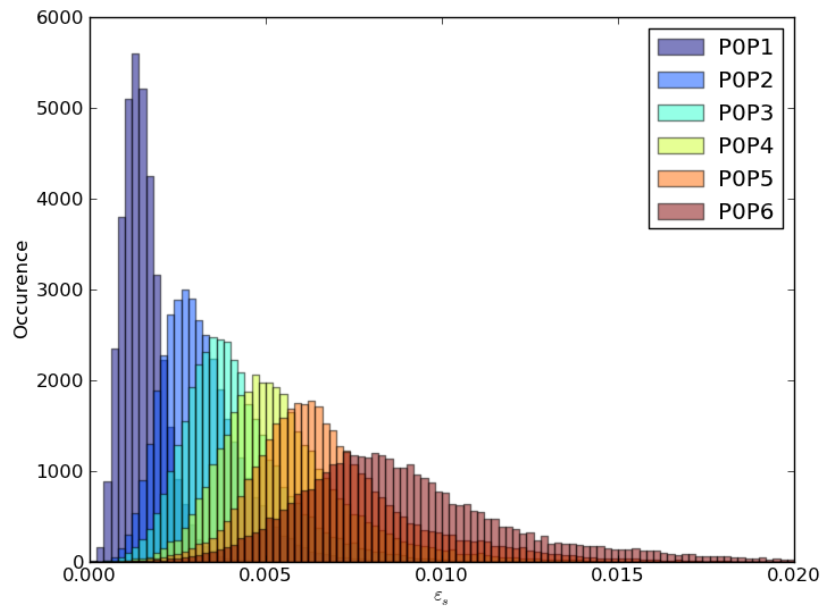


FIGURE 4.2 – Evolution de la déformation de cisaillement au cours de l'essai

#### 4.1.2.2 Champ de déplacement post-pic

La dernière étape du test *in-situ* est située dans la zone post-pic. Les bandes de cisaillement ont provoqué la fracture de l'échantillon, plutôt rapidement après le pic de la réaction. La bande de localisation finale est présentée en Figure 4.3. Elle peut être aussi visible sur les côtés de l'échantillon 4.4.

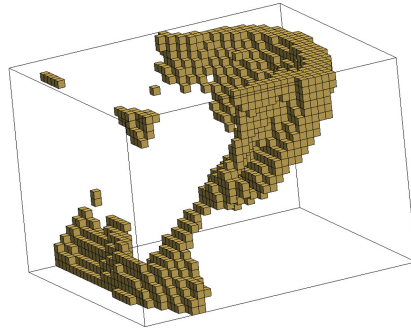


FIGURE 4.3 – Surface de rupture post-pic : voxels vérifiant  $\varepsilon_s > \varepsilon_s^{max}/2$

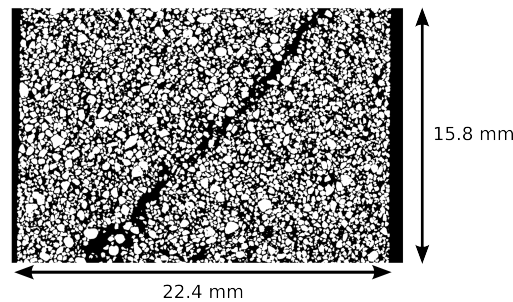


FIGURE 4.4 – Rupture à la surface de l'échantillon

#### 4.1.3 Première simulation avec le C-CASM

##### 4.1.3.1 Motivation et méthodologie

L'analyse de l'essai montre un comportement riche avec une grande variété d'états de contraintes apparaissant en cours de chargement. De plus, de multiples bandes de localisation sont amorcées au dernier palier post-pic. Cet essai, pourtant standard, est à considérer comme un essai sur structure complexe.

L'utilisation d'un champ de déplacement expérimental comme condition aux limites de type Dirichlet semble être une piste intéressante afin d'évaluer la capacité du modèle à anticiper le comportement de la structure.

Ce champ de déplacement peut-être imposé partout dans l'échantillon en oubliant le principe d'équilibre des forces internes. Cela n'a pas été la démarche retenue. Le déplacement a été

imposé en haut et en bas de l'échantillon. Le modèle doit prédire le comportement du noyau au cœur, avec notamment la bonne anticipation des bandes de localisation avec l'équilibre des contraintes mécaniques.

Seuls les paliers pré-pic ont été considérés. Lors du dernier palier post-pic, l'échantillon est totalement rompu. Simuler ce stade de l'essai reviendrait à introduire de la rupture dans la modélisation et complexifierait la simulation de manière draconienne.

L'essai est analysé à trois échelles :

- L'échelle macroscopique (échelle de l'échantillon) : avec la comparaison des réactions mesurées et calculées en haut de l'échantillon.
- L'échelle mésoscopique (échelle de quelques grains) : avec la comparaison des bandes de localisation mesurées et calculées
- L'échelle microscopique (échelle du grain, du voxel) : avec la comparaison des champs de déplacement mesurés et calculés (à chaque noeud du maillage)

Ces trois échelles sont diversement étudiées dans la bibliographie. La plupart des modèles élastoplastiques se restreignent à l'échelle macroscopique en comparant les courbes déformation-contrainte, et l'évolution des déformations plastiques volumique ou de cisaillement. Les études utilisant la Discrete Element Method se focalisent sur l'échelle microscopique, par la bonne description des mouvements des grains. L'échelle mésoscopique - et surtout la localisation dans les matériaux granulaires - demeure majoritairement étudiée expérimentalement, notamment grâce à l'utilisation de l'imagerie 2D ou 3D.

#### 4.1.3.2 Calcul de validation du C-CASM

Les comparaisons entre les résultats expérimentaux et simulés après calibration (voir Section 3.5) sont présentées en Figure 4.5 pour l'échelle macroscopique et en Figure 4.6 pour l'échelle mésoscopique. Lors de la simulation, la localisation de la déformation survient avant celle de l'expérience. Ceci peut être expliqué par le fait que le modèle ne possède pas de durcissement pré-pic. Pour un tel confinement, dès que le seuil est atteint, il y a adoucissement et par conséquent localisation. L'adoption d'un durcissement comme dans le modèle MC-CASM permettrait de réduire cette anticipation de la localisation.

Toujours à cause de l'absence de durcissement, le maximum de la force calculée en haut de l'échantillon est atteint à une déformation sensiblement moindre que l'expérimentale. Cependant, le maximum de cette force est correctement estimé. Le C-CASM échoue à déterminer correctement les déformations, cependant les efforts sont pertinents. Si l'on se donne comme objectif seulement le maximum de l'effort, le C-CASM est approprié.

A l'échelle mésoscopique, la localisation de la déformation est correctement capturée. Les bifurcations au coin supérieur et dans les diagonales ont été estimées avec des bonnes magnitudes. Toutefois, si l'on se concentre sur les déformations de cisaillement, les valeurs calculées sont significativement plus grandes que les expérimentales.

La simulation met aussi en exergue le fait que la déformation plastique est très localisée au dernier palier pré-pic. En fait, une majorité de l'échantillon apparaît comme peu voire pas plastifié. L'essentiel de la plasticité est confiné dans une faible zone. La Figure 4.7 (a) montre la valeur de la mesure d'endommagement plastique  $h$  à ce dernier palier. Si l'on se restreint les

#### 4.1. ETUDE DE L'ESSAI DE COMPRESSION OBSERVÉ AUX RAYONS X AVEC LE C-CASM93

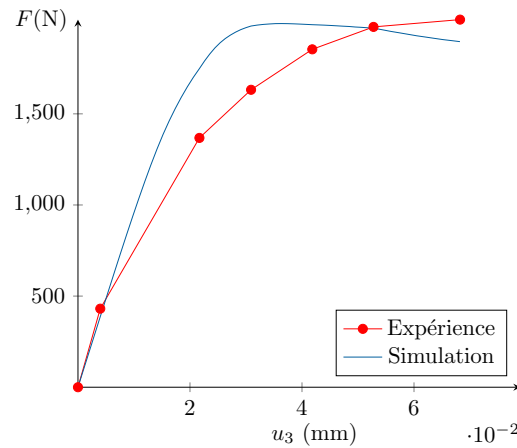


FIGURE 4.5 – Réactions mesurée et calculée en haut de l'échantillon

résultats aux éléments vérifiant  $h > h_{max}/6$  la zone est très petite (Figure 4.7 (b)). La majorité de l'échantillon est alors relativement intact.

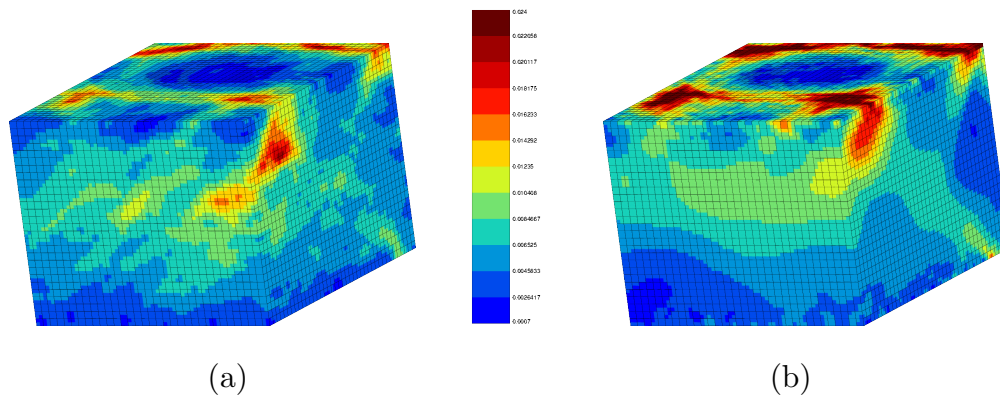


FIGURE 4.6 –  $\varepsilon_s$  au dernier palier pré-pic : (a) expérimental (b) simulé

##### 4.1.3.3 Intérêt pour la calibration

Le champ de déplacement obtenu par la tomographie aux rayons X a montré que le champ de déformation d'un essai standard comme l'essai de compression uniaxial n'est pas homogène. Cette inhomogénéité peut avoir plusieurs explications :

- Le comportement du matériau est extrêmement complexe
- Le matériau testé n'est pas homogène. D'une part, la distribution des grains peut être en cause. Cela regroupe non seulement le squelette granulaire initial, mais aussi les différences dans la distribution des tailles ou des formes des grains. D'autre part, la répartition de la résine a sans doute un impact sur le comportement mésoscopique du matériau,

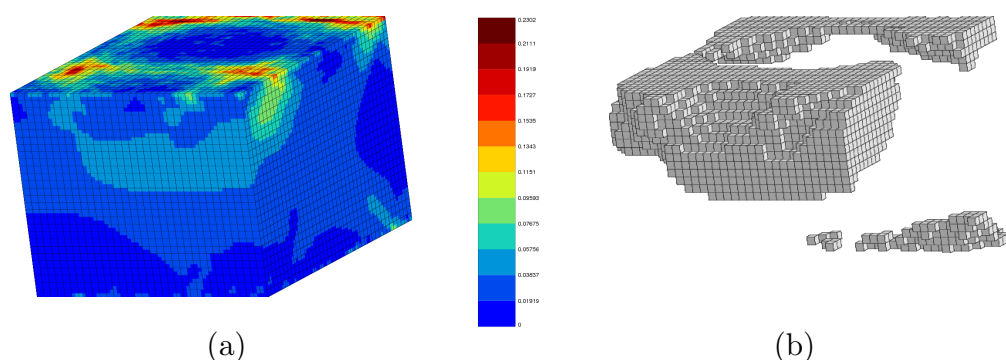


FIGURE 4.7 –  $h$  au dernier palier pré-pic : (a) tout l'échantillon (b) zone vérifiant  $h > h_{max}/6$

créant potentiellement des agglomérats plus cohésifs.

- Les conditions aux limites peuvent être altérées par de fortes fluctuations. Même si le matériau est modélisé à l'échelle macroscopique, il faut garder à l'esprit qu'il demeure un matériau granulaire. Par exemple, les faces d'un échantillon donné ne peuvent être exactement planes et parallèles. La taille du grain est la dernière limite à l'aspect plat d'une géométrie. On peut aussi mentionner des frottements au niveau des plateaux lors des essais de compression uniaxiale qui créent un cône de friction et empêchent les déplacements latéraux aux extrémités (voir Homand *et al.* (2000)).

Evaluer la performance d'un modèle élastoplastique en comparant des courbes macroscopiques n'est pas pertinent. La bibliographie concernant les phénomènes de localisation dans le sable seul, ainsi que l'essai de compression uniaxiale sur échantillon non vieilli montrent qu'un essai standard est en fait un essai sur structure (Desrues *et al.*, 1996).

Dans cette étude, l'inhomogénéité due au sable n'a pas été étudiée. On considère que les noyaux générés par le procédé de Cold-box sont homogènes. Seules les fluctuations au niveau des conditions aux limites sont donc considérées.

Les calculs éléments finis ont permis de correctement prédire les zones localisées ainsi que la magnitude de la réaction. Cependant, les déformations ont tendance à être surestimées. Cette procédure demeure cependant un bon compromis pour les études industrielles entre coût de calculs (en mémoire et en temps de calculs) et adéquation avec les essais. Certes des calculs DEM fourniraient sans aucun doute de meilleurs résultats, mais pour l'instant il est impossible de simuler des essais avec des échantillons aussi gros et avec tant de grains, que ce soit en coût de calculs ou en temps de calculs.

On remarque ensuite que deux phases semblent se détacher lors de l'essai. Une phase relativement intacte, peu plastifiée ( $h < h_{max}/6$ ) et une phase perturbée concentrant l'essentiel de la déformation plastique. Cette observation peut être liée au modèle DSC (Disturbed State Constitutive Model) de Desai et Toth (1996).

Le durcissement qui apparaît lors des essais en observant la courbe macroscopique résulte de la combinaison des contributions des deux phases présentes dans l'échantillon testé. Au lieu d'une réponse purement élastique, on observe une réponse élastique perturbée localement par une perte locale de raideur. Cette perturbation est due à la localisation, elle-même due à des conditions aux

limites ou à un matériau inhomogène.

Cependant, l'approche numérique développée ici n'a pas consisté définir deux matériaux comme pour le modèle DSC. Une loi matériau, ici le C-CASM, est considérée suffisante, en supposant que les calculs éléments finis ont de bonnes conditions aux limites. On remarque qu'avec ces conditions de déplacement réels, la courbe de charge macroscopique calculée décrit bien un petit durcissement pré-pic, certes de moindre amplitude que l'expérimental.

Face à la richesse de ces données expérimentales, on peut être tenté de vouloir les utiliser afin d'optimiser le vecteur de paramètres  $\mu = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$  d'un modèle élastoplastique donné (C-CASM ou MC-CASM). Cependant, mener toute une série de calculs d'optimisation sur le maillage complet est trop coûteux en temps de calculs, surtout à l'échelle d'une thèse qui est supposée durer 3 ans, rédaction comprise.

Une méthode d'élagage de données a alors été développée afin de réduire sensiblement les données expérimentales à traiter. Cette procédure dérive d'une méthode d'hyper-réduction. Elle sera détaillée en Section 4.2.

Ensuite, une méthode d'optimisation des paramètres d'un modèle éléments finis (FEMU - *Finite Element Model Updating*) couplée avec une méthode hybride d'hyper-réduction a été développée. Cette procédure est nommée FEMU-H<sup>2</sup>ROM et sera détaillée en Section 4.2.7. Elle permet en outre de justifier l'utilisation des données élaguées comme seules données d'entrée. Cette procédure a été appliquée au C-CASM ainsi qu'au MC-CASM sur les paramètres d'écoulement plastique et d'endommagement. La fonction de charge  $f$  a été supposée complètement calibrée dans les deux cas. Il est apparu qu'aucune optimisation n'a été permise pour le C-CASM. L'ajout du durcissement s'est donc avéré nécessaire pour améliorer le modèle, d'où l'élaboration du MC-CASM.

Dans la prochaine section, les développements ne s'attarderont donc pas sur l'amélioration du C-CASM mais sur la calibration des termes d'écoulement et d'endommagement du MC-CASM.

## 4.2 L'élagage de données expérimentales

### 4.2.1 Introduction

Avec le développement et la généralisation de la Digital Image Correlation (DIC) et de la Digital Volume Correlation (DVC) pour les images 3D appliquées à des données issues de tomographie aux rayons X, le volume de données acquises a augmenté de manière draconienne. De nouveaux défis apparaissent, comme les problèmes de stockage et d'exploration de données, ainsi que la mise au point de méthodes pertinentes de dialogues essais-calculs (pour, par exemple, la calibration de modèle). Comme vu précédemment avec l'essai de compression uniaxiale étudié en tomographie aux rayons X, l'accès aux champs 3D de déplacement ou de déformation lors de l'essai donne accès à des informations bien plus riches et nuancées que les courbes macroscopiques de type force-déplacement. Ces données peuvent servir à mener des calculs éléments finis 3D. Bien qu'extrêmement attrayante sur le papier, cette idée est rendue souvent impossible en pratique par les coûts de calculs, tant en mémoire qu'en temps. L'augmentation de la résolution des mesures à champs complets, comme la tomographie aux rayons X, mène à une explosion des volumes de données à stocker. C'est devenu de nos jours un réel



problème (voir van Ooijen *et al.* (2008)).

Cette partie propose une méthode numérique afin d'élaguer les données issues de la corrélation d'images 3D (DVC) quand il devient nécessaire de libérer de la mémoire. Le but demeure de préserver la capacité à utiliser ces données, comme par exemple afin d'identifier les paramètres d'un modèle constitutif dans un cas présentant de la localisation des déformations. La méthode d'élagage se base sur de la mécanique et permet d'identifier un domaine réduit expérimental (DRE). Les données expérimentales originales sont ensuite conservées uniquement sur ce domaine réduit.

La compression de données est connue pour être une approche pratique afin de libérer de l'espace de stockage. Par exemple, dans le domaine de l'audio, les fichiers MP3 sont un moyen très répandu de réduire la taille des fichiers pour une utilisation standard (voir Pan (1995)). Cependant, une perte non négligeable de l'information est nécessaire, mais contrôlée. Pour résumer l'algorithme, la compression MP3 consiste à filtrer les composantes non audibles par la plupart des gens de la piste sonore non compressée. En d'autres termes, la compression MP3 consiste en un élagage des données audio non nécessaires. Il est à noter que le taux de compression est autour de 12.

Dans la même philosophie, il peut exister une méthode permettant de compresser massivement les données issues de la corrélation d'images 3D tout en ayant un contrôle sur la perte d'information. La procédure doit s'appuyer sur un algorithme qui détecte l'information pertinente. Cela a été proposé par Cioaca et Sandu (2014) en utilisant une étude de sensibilité basée sur la variation de paramètres à calibrer. Ces paramètres sont les coefficients d'un modèle donné devant refléter les observations expérimentales. Les données élaguées dépendent donc d'un modèle plus ou moins pertinent. Ici, nous souhaitons développer une approche sans modèle. Cela permet notamment d'effectuer une étude en deux temps : d'abord l'élagage, sans modèle, et ensuite l'évaluation ou la calibration de tel ou tel modèle à partir des données réduites. Ici les données dites pertinentes sont locales mais situées dans des régions soumises à de la localisation de la déformation. Les données à élaguer sont les sorties de la procédure de Digital Volume Correlation qui permet de reconstruire le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  pour des observations effectuées aux instants  $(t_j)_{j=1, \dots, N_t}$  sur un domaine appelé  $\Omega$ , où  $\mathbf{x}$  est un vecteur position. On considère que la géométrie de l'échantillon testé est approchée par un maillage et le déplacement est décomposé selon les fonctions de forme éléments finis (voir Réthoré *et al.* (2007)).

Pour finir, la méthode proposée ici peut être liée à des méthodes d'élagage ou de nettoyage de données décrites dans la bibliographie concernant le machine learning (apprentissage automatique en français) (Rojanaarpa et Kataeva, 2016). Le but de ces procédures n'est cependant pas de réduire le stockage de données mais d'en améliorer la qualité (méthodes de détection de données aberrantes, comme dans Hu *et al.* (2016)). Dans Hong *et al.* (2008), une méthode d'élagage de données est employée afin de filtrer le bruit des données. Ici, au contraire, la méthode développée ici tient compte de la distribution du bruit comme une donnée d'entrée importante à conserver avec élagage.

#### 4.2.2 Digital Volume Correlation

Considérons un échantillon occupant un domaine  $\Omega$  subissant un chargement mécanique donné. Grâce à des techniques d'acquisition, des images 3D en niveaux de gris sont obtenues.

La Digital Volume Correlation (DVC) a pour but de déterminer le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  pour chaque vecteur position  $\mathbf{x}$  de  $\Omega$  à des instants  $t$ . Notons  $f$  et  $g$  les niveaux de gris respectivement à l'état de référence et à l'état déformé. Ils sont liés par la relation :

$$g(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) \quad (4.1)$$

La conservation du flux optique est linéarisé en supposant que l'image de référence est différentiable. Ainsi, le résidu local à minimiser,  $\eta(\mathbf{x}, t)$ , est :

$$\eta^2(\mathbf{x}, t) = [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]^2 \quad (4.2)$$

où  $\nabla f$  est le gradient de  $f$ .

Ce résidu local est intégré sur tout le domaine  $\Omega$  afin de définir une fonction à minimiser :

$$\phi^2(\mathbf{u}, t) = \int_{\Omega} [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x})]^2 d\mathbf{x} \quad (4.3)$$

Ce problème est en fait mal posé. Afin de bien le poser, on restreint le champ de déplacement à un sous-espace cinématiquement admissible.  $\mathbf{u}$  est alors décomposé selon les fonctions de forme éléments finis  $\psi_j(\mathbf{x})$  du maillage défini sur  $\Omega$ .

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_d} a_i^{exp}(t) \psi_i(\mathbf{x}) \quad (4.4)$$

où  $N_d$  est le nombre de degrés de liberté du maillage,  $a_i^{exp}$  le  $i^{ème}$  degré de liberté nodal du modèle éléments finis.  $\mathbf{a}^{exp}$  correspond au vecteur de degrés de liberté à déterminer. Avec cette restriction au sous-espace cinématiquement admissible, la fonction objectif à minimiser est une forme quadratique des  $a_i^{exp}$ . Sa minimisation est un système linéaire à résoudre pour chaque instant d'observation de l'état déformé :

$$\mathbf{M} \mathbf{a}^{exp} = \mathbf{f} \quad (4.5)$$

où la matrice  $\mathbf{M}$  et le vecteur  $\mathbf{f}$  sont :

$$M_{ij} = \int_{\Omega} (\psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})) (\psi_j(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x})) d\mathbf{x} \quad (4.6)$$

$$f_i = \int_{\Omega} [g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})] \psi_i(\mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (4.7)$$

Dans la suite,  $N_t$  observations de la déformation de l'échantillon aux instants  $t_j, j=1, \dots, N_t$  sont considérées. La DVC donne accès au la champ de déplacement corrélé  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_j)$  grâce au vecteur coefficient  $\mathbf{a}^{exp}(t_j)$ . Le résidu local  $\eta(\mathbf{x}, t_j)$  est aussi déterminé.

Le champ de déformation  $\varepsilon$  est alors extrait à partir du champ de déplacement, en supposant de petites déformations :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \quad (4.8)$$

Cette déformation est alors calculée à chaque point de Gauss du maillage utilisé pour la DVC. Pour des matériaux sensibles à la pression hydrostatique, comme les géomatériaux ou les

matériaux plastiques, il peut être pertinent de subdiviser le tenseur des déformations en sa partie sphérique et sa partie déviatorique :

$$\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}^s + \underline{\varepsilon}^v, \quad \text{avec } \underline{\varepsilon}^v = \text{tr}(\underline{\varepsilon}) \underline{I} \quad (4.9)$$

où  $\underline{I}$  est le tenseur unité.

Il est important de noter que la procédure d'élagage de données ne va se concentrer que sur les déplacements et non les déformations. On considère que ces dernières peuvent être calculées en post-traitement et donc ne pas être conservées. Les déformations servent en fait de données temporaires pour permettre la détermination d'un domaine réduit expérimental.

### 4.2.3 Réduction de la dimension tenant compte de la distribution du résidu

Avant l'élagage, une réduction de dimension linéaire est effectuée. Elle est basée sur la décomposition en valeurs singulières (*singular value decomposition*, ou SVD en anglais). Cette approche est similaire à l'Analyse aux Composantes Principales (ACP). Toutefois, ici la base réduite des modes empiriques est obtenue sans centrer les données. L'ACP est connue pour sa capacité à filtrer la donnée (Balvay *et al.*, 2011). La cause d'un résidu local peut être multiple : un défaut local, une mauvaise homogénéité, etc. Cette erreur de corrélation peut être expliquée plus précisément avec des modèles constitutifs futurs. Une part de cette erreur est peut-être due à un manque de savoir. La distribution du résidu peut être synonyme d'un phénomène inconnu à sauvegarder. C'est pourquoi la méthode d'élagage de données se focalise non seulement sur les données DVC mais incluent aussi la distribution du bruit avec une approche heuristique. Les données expérimentales issues de la DVC sont stockées dans deux matrices,  $\mathbf{Q}_u$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  définies par :

$$\mathbf{Q}_u[i, j] = a_i^{exp}(t_j), \quad i = 1 \dots N_d, \quad j = 1 \dots N_t \quad (4.10)$$

et

$$\mathbf{Q}_\varepsilon[i, j] = \varepsilon_{\alpha\beta}^s(e_\gamma, t_j) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{Q}_\varepsilon[i, j + N_t] = \varepsilon_{\alpha\beta}^v(e_\gamma, t_j) \quad (4.12)$$

où  $e_\gamma$  est le  $\gamma^{ème}$  point de Gauss, et :

$$i = \beta + 3(\alpha - 1) + 9(\gamma - 1)$$

$$\alpha = 1 \dots 3, \quad \beta = 1 \dots 3, \quad \gamma = 1 \dots N_g$$

$$j = 1 \dots N_t$$

avec  $N_g$  nombre de points d'intégration du maillage.  $\mathbf{Q}_u$  est une matrice de taille  $N_d \times N_t$  tandis que  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  est de taille  $(9N_g) \times (2N_t)$ . Par simplicité, la symétrie du tenseur des déformations n'a pas été considérée.

La première étape de l'élagage de données consiste à effectuer une première réduction de la dimensionnalité sur les données brutes de déplacement. Cela permet de ne plus conserver la matrice de snapshot de déplacement entière mais seulement une base réduite et des coordonnées

réduites (voir Section 2.5.2). Il s'agit du premier pas vers la réduction du volume de données à conserver.

La détermination des modes empiriques est effectuée grâce à une décomposition aux valeurs singulières (voir 2.5.2). Ceci donne accès à la base réduite  $\mathbf{V}_u^{exp}$  telle que :

$$\mathbf{Q}_u^{exp} = \mathbf{V}_u^{exp} \mathbf{S}_u^{exp} (\mathbf{W}_u^{exp})^T + \mathbf{R}_u^{exp} \quad (4.13)$$

où  $\mathbf{V}_u^{exp} \in \mathbb{R}^{N_d \times N_u^{exp}}$ , est une base réduite empirique,  $N_u^{exp} \leq \text{rank}(\mathbf{Q}_u^{exp})$ ,  $\mathbf{S}_u^{exp} = \text{diag}(\sigma_1^{exp}, \dots, \sigma_{N_u^{exp}}^{exp}) \in \mathbb{R}^{N_u^{exp} \times N_u^{exp}}$ ,  $\sigma_1^{exp} \geq \sigma_2^{exp} \geq \dots \geq \sigma_{N_u^{exp}}^{exp}$  et  $\mathbf{W}_u^{exp} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_u^{exp}}$ .  $\mathbf{V}_u^{exp}$  et  $\mathbf{W}_u^{exp}$  sont tous deux orthogonales. Le résidu  $\mathbf{R}_u^{exp}$  a une norme 2 telle que :

$$\|\mathbf{R}_u^{exp}\|_2 = \sigma_{N_u^{exp}+1} < \epsilon_{tol} \sigma_1 \quad (4.14)$$

où  $\epsilon_{tol}$  est un paramètre numérique (typiquement  $10^{-3}$ ) qui va permettre de fixer l'ordre  $N_u^{exp}$  de l'approximation. Selon le théorème de Eckart-Young, la matrice  $\mathbf{V}_u^{exp} (\mathbf{V}_u^{exp})^T \mathbf{Q}_u^{exp}$  est la meilleure approximation de rang  $N_u^{exp}$  de  $\mathbf{Q}_u^{exp}$  en utilisant la base réduite  $\mathbf{V}_u^{exp}$ .

La pertinence de la réduction de la dimensionnalité apparaît donc conditionnée par la différence entre  $N_t$  et l'ordre de l'approximation  $N_u^{exp}$ ,  $\mathbf{Q}_u$  étant une matrice de taille  $N_d \times N_t$  tandis que  $\mathbf{V}_u^{exp}$  est de taille  $N_d \times N_u^{exp}$ .

Un même raisonnement peut être appliqué afin de déterminer une base réduite expérimentale pour les déformations ( $\mathbf{V}_\varepsilon^{exp}$ ). Celle-ci n'est pas calculée afin de réduire les données (car les déformations ne sont pas stockées) mais afin de déterminer le domaine réduit expérimental dans la suite de la procédure.

La construction du domaine réduit peut s'appuyer sur des bases réduites "brutes". Cependant, cela ne permet pas de tenir compte du bruit. Dans la procédure d'élagage proposée, la distribution du bruit est incluse de manière arbitraire. Trois configurations sont considérées :

Cas 1 : ajout de  $+\eta(\mathbf{x}, t)$  aux données issues de la DVC. On note les matrices correspondantes  $\mathbf{Q}_u^{(+)}$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^{(+)}$  ;

Cas 2 : ajout de  $-\eta(\mathbf{x}, t)$  aux données issues de la DVC. On note les matrices correspondantes  $\mathbf{Q}_u^{(-)}$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^{(-)}$  ;

Cas 3 : ajout de  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)\eta(\mathbf{x}, t)$  aux données issues de la DVC.  $\mathbf{r}(\mathbf{x}, t)$  correspond à un champ aléatoire compris entre -1 et 1 (distribution normale). On note les matrices correspondantes  $\mathbf{Q}_u^{(r)}$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^{(r)}$ .

La matrice expérimentale *finale* est une concaténation de ces quatre matrices précédentes :

$$\mathbf{Q}_u^\eta = [\mathbf{Q}_u, \mathbf{Q}_u^{(+)}, \mathbf{Q}_u^{(-)}, \mathbf{Q}_u^{(r)}] \quad (4.15)$$

$$\mathbf{Q}_\varepsilon^\eta = [\mathbf{Q}_\varepsilon, \mathbf{Q}_\varepsilon^{(+)}, \mathbf{Q}_\varepsilon^{(-)}, \mathbf{Q}_\varepsilon^{(r)}] \quad (4.16)$$

Cette matrice enrichie a pour but d'améliorer la détermination de domaine expérimental réduit. Elle n'a pas pour but d'être stockée à la fin de la procédure, elle est juste un outil temporaire.

L'idée derrière la réduction de dimension repose sur le fait de décomposer un champ donné (ici les matrices de snapshot enrichies) sur ses modes respectivement de déplacement ou de déformation.

Appliquons la SVD aux matrices de snapshot enrichies  $\mathbf{Q}_u^\eta$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^\eta$  :

$$\mathbf{Q}_u^\eta = \mathbf{V}_u^\eta \mathbf{S}_u^\eta (\mathbf{W}_u^\eta)^T + \mathbf{R}_u^\eta \quad (4.17)$$

$$\mathbf{Q}_\varepsilon^\eta = \mathbf{V}_\varepsilon^\eta \mathbf{S}_\varepsilon^\eta (\mathbf{W}_\varepsilon^\eta)^T + \mathbf{R}_\varepsilon^\eta \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{V}_x^\eta \in \mathbb{R}^{N_d \times N_x}$ , avec  $x = u$  ou  $\varepsilon$ , est une base réduite empirique,  $N_x \leq \text{rank}(\mathbf{Q}_x^\eta)$ ,  $\mathbf{S}_x^\eta = \text{diag}(\sigma_{x1}, \dots, \sigma_{xN_x}) \in \mathbb{R}^{N_x \times N_x}$ ,  $\sigma_{x1} \geq \sigma_{x2} \geq \dots \geq \sigma_{xN_x}$  et  $\mathbf{W}_x^\eta \in \mathbb{R}^{N_t \times N_x}$ .  $\mathbf{V}_x^\eta$  et  $\mathbf{W}_x^\eta$  sont tous deux orthogonales. Le résidu  $\mathbf{R}_x^\eta$  a une norme 2 telle que :

$$\|\mathbf{R}_x^\eta\|_2 = \sigma_{xN_x+1} < \epsilon_{tol} \sigma_{x1}, \quad x = u \text{ ou } \varepsilon \quad (4.19)$$

où  $\epsilon_{tol}$  est la tolérance permettant de fixer l'ordre  $N_x$  de l'approximation.

Dans la situation théorique d'observations dénuées de bruit ou d'erreur de corrélation, la procédure d'enrichissement ne fait que dupliquer les données sans enrichir les bases réduites empiriques. Ainsi, l'impact de cet enrichissement dépend de l'importance du résidu.

Cette enrichissement des données expérimentales permet en outre d'augmenter le nombre de snapshots (colonnes des matrices de snapshots). Paradoxalement, les données issues de la tomographie aux rayons X ont beaucoup de degrés de liberté (nombre de lignes de la matrice de snapshots) mais peu de pas de temps/snapshots. De fait, les bases réduites extraites des données expérimentales non enrichies auront un ordre faible. Cette enrichissement par la considération de l'erreur de la DVC permet aussi d'enrichir de manière significative le nombre de snapshots.

#### 4.2.4 Domaine Réduit Expérimental

La procédure d'élagage de données proposée est intimement liée à la méthode de détermination du modèle réduit dans les études utilisant l'hyper-réduction proposée par Ryckelynck *et al.* (2015) ou la Section 2.5. Lors de travaux précédents concernant l'hyper-réduction, les domaines réduits ont été générés en utilisant des données issues de simulations. Ici, ce n'est pas le cas. Le domaine d'intégration réduit expérimental est très similaire aux domaines réduits des anciennes études, mais sa construction repose exclusivement sur l'exploitation de données expérimentales. L'approche ne repose pas sur un modèle ou des calculs. Un des avantages d'une telle méthode est que l'élagage de données n'a pas à être effectué à nouveau si un nouveau modèle est évalué. On note le domaine réduit expérimental (DRE)  $\Omega_R^{exp} \subset \Omega$ . Pour un DRE donné, un ensemble de quelques indices de degrés de liberté peut être défini comme :

$$\mathcal{F} = \left\{ i \in \{1, \dots, N_d\} \mid \int_{\Omega \setminus \Omega_R^{exp}} \psi_i^2(\mathbf{x}) dx = 0 \right\} \quad (4.20)$$

Les équations d'équilibre hyper-réduites peuvent être restreintes au DRE en utilisant des fonctions de test commodées (Ryckelynck *et al.*, 2015) telles que :

$$(\mathbf{V}[\mathcal{F}, :])^T \mathbf{K}[\mathcal{F}, :] \mathbf{V} \mathbf{b}^R = (\mathbf{V}[\mathcal{F}, :])^T \mathbf{c}[\mathcal{F}] \quad (4.21)$$

Quand la base réduite contient des modes empiriques et quelques fonctions de formes EF situées dans  $\Omega_R$ , on appelle cette méthode une hyper-réduction hybride (Baiges *et al.*, 2013). Le

domaine réduit doit être suffisamment large afin d'avoir  $\text{rang}(\mathbf{K}[\mathcal{F}, :] \mathbf{V}) = N_R$  et  $\text{rang}(\mathbf{V}[\mathcal{F}, :]) = N_R$ . Ainsi  $\text{card}(\mathcal{F}) \geq N_R$ .

Dans la méthode usuelle d'hyper-réduction, le domaine réduit est généré par l'assemblage d'éléments contenant des points d'interpolation relatifs aux diverses bases réduites. Ces bases réduites sont extraites de simulations générées par un modèle mécanique donné testé avec plusieurs paramètres (Ryckelynck *et al.*, 2015). Ici, la construction du DRE est basée exclusivement sur les bases réduites relatives aux données expérimentales enrichies  $\mathbf{Q}_u^\eta$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^\eta$ . Le DRE est l'union de plusieurs sous-domaines :

- $\Omega_u$  : généré à partir de la base réduite en déplacement  $\mathbf{V}_u^\eta$
- $\Omega_\varepsilon$  : généré à partir de la base réduite en déformation  $\mathbf{V}_\varepsilon^\eta$
- $\Omega_+$  : ensemble des éléments voisins des précédents sous-domaines
- $\Omega_{user}$  : zone d'intérêt choisie par l'utilisateur. Par la suite,  $\Omega_{user}$  est choisie comme étant le haut de l'éprouvette afin d'évaluer la force appliquée lors de l'essai

$\Omega_u$  est conçu comme si l'on voulait reconstruire des déplacements expérimentaux en dehors de  $\Omega_u$  en utilisant  $\mathbf{V}_u^\eta$  et en lui donnant un déplacement expérimental dans  $\Omega_u$ . Sur un sous-domaine restreint  $\Omega_u$ , nous n'avons accès qu'à un ensemble restreint de déplacements nodaux.

L'ensemble de leurs indices est noté  $\mathcal{P}_u$ . L'ensemble des indices de déplacement restants est noté  $\mathcal{H}_u$  tel que  $\mathbf{a}^{exp}[\mathcal{H}_u]$  est le vecteur à reconstruire en connaissant  $\mathbf{a}^{exp}[\mathcal{P}_u]$ . Diverses approches ont été proposées dans la littérature pour effectuer ce type de reconstruction. Ils sont liés à la complétion des données (Liu *et al.*, 2013) ou à l'imputation des données (Shang *et al.*, 2018) par exemple. Ici, nous avons la possibilité de choisir l'ensemble  $\mathcal{P}_u$ , car le problème de la reconstruction n'est que formel. En utilisant la méthode DEIM proposée dans Chaturantabut et Sorensen (2010), on peut obtenir l'ensemble  $\mathcal{P}_u$  tel que  $\mathbf{V}_u^\eta[\mathcal{P}_u, :]$  est une matrice carrée inversible. Alors, dans cette situation, le nombre de degrés de liberté choisis dans  $\mathcal{P}_u$  est le nombre de modes empiriques dans  $\mathbf{V}_u^\eta$ . Mais dans la présente application, cet ensemble pourrait être trop petit pour obtenir des calibrations robustes après l'élagage des données car il y a peu de snapshots. De fait, nous proposons une modification de l'algorithme DEIM afin de multiplier le nombre d'indices sélectionnés par un facteur donné  $K$ . Nous nommons cet algorithme K-Selection With empirical Modes (K-SWIM). L'algorithme modifié est montré dans l'Algorithme 1. Lorsque  $K = 1$ , cet algorithme est exactement le même que l'algorithme DEIM habituel de Chaturantabut et Sorensen (2010). Dans la suite, l'ensemble des indices sélectionnés en utilisant l'algorithme K-SWIM est noté  $\mathcal{P}_u^{(K)}$ . Le même raisonnement est appliqué à la reconstruction du tenseur de déformations expérimental. L'algorithme K-SWIM appliqué à  $\mathbf{V}_\varepsilon^\eta$  définit  $\mathcal{P}_\varepsilon^{(K)}$ .

Pour des ensembles d'indices  $\mathcal{P}_u^{(K)}$  et  $\mathcal{P}_\varepsilon^{(K)}$  données, le DRE est :

$$\Omega_R^{exp} := \Omega_u \cup \Omega_\varepsilon \cup \Omega_+ \cup \Omega_{user}, \quad \Omega_u := \bigcup_{k \in \mathcal{P}_u^{(K)}} \text{supp}(\psi_k) \quad \Omega_\varepsilon := \bigcup_{k \in \mathcal{P}_\varepsilon^{(K)}} \text{supp}(\psi_k^\varepsilon). \quad (4.22)$$

où  $\text{supp}$  est le support de la fonction et  $\psi_k^\varepsilon$  sont les fonctions de formes relatives au tenseur des déformations dans le modèle EF utilisé pour calculer  $\mathbf{a}^{exp}$ .

L'Algorithme 1 est proprement défini si dans la ligne 3, la matrice  $(\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^T \mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :]$  est inversible, pour  $l > 1$  avec  $j = (l - 1)K$ , ou de manière équivalente, si la propriété suivante est vérifiée :

**Algorithm 1:** K-SWIM Selection of variables With empirical Modes

---

**Input** : entier  $K$ , modes empiriques linéairement indépendants  $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^d, k = 1, \dots, M$   
**Output**: ensemble des indices des variables  $\mathcal{P}^{(K)}$

```

1 set  $\mathcal{P}_0 := \emptyset, j = 0, \mathbf{U}_1 = []$ ; // initialisation
2 for  $l = 1, \dots, M$  do
3    $\mathbf{q}_l \leftarrow \mathbf{v}_l - \mathbf{U}_l ((\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^T \mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^{-1} (\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^T \mathbf{v}_l[\mathcal{P}_j]$ ; // vecteur
   résiduel
4   for  $k = 1, \dots, K$  do
5      $j \leftarrow j + 1$ ; // incrément
6      $i_j \leftarrow \arg \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |\mathbf{q}_l[i]|$ ; // sélection d'indices
7      $\mathbf{q}_l[i_j] \leftarrow 0$ ; // variable déjà sélectionnée
8      $\mathcal{P}_j \leftarrow \mathcal{P}_{j-1} \cup \{i_j\}$ ; // ensemble d'indices étendu
9    $\mathbf{U}_{l+1} \leftarrow [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_l]$ ; // matrice réduite tronquée
10 set  $\mathcal{P}^{(K)} := \mathcal{P}_j$ .
```

---

**Propriété 1.**  $\mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j+K}, :]^T \mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j+K}, :]$  est inversible pour  $l > 0$  et  $j = (l - 1)K$ .

*Démonstration.* Supposons que  $\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :]^T \mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :]$  est inversible pour  $l > 1$  et  $j = (l - 1)K$ . Ensuite, calculons  $\mathbf{q}_l$ .  $(\mathbf{v}_k)_{k=1}^M$  est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants. Ainsi  $\max_{i \in \{1, \dots, d\}} |\mathbf{q}_l[i]| > 0$ . Introduisons le premier indice additionnel,  $j^* = (l - 1)K + 1$ ,  $\mathcal{P}_{j^*} = \mathcal{P}_j \cup \{\arg \max_{i \in \{1, \dots, d\}} |\mathbf{q}_l[i]|\}$  et le vecteur résiduel suivant :

$$\mathbf{q}_l^* = \mathbf{v}_l[\mathcal{P}_{j^*}] - \mathbf{U}_l[\mathcal{P}_{j^*}, :] ((\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^T \mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^{-1} (\mathbf{U}_l[\mathcal{P}_j, :])^T \mathbf{v}_l[\mathcal{P}_j]$$

Ensuite,  $\mathbf{q}_l^* = \mathbf{q}_l[\mathcal{P}_{j^*}]$  et  $\|\mathbf{q}_l^*\|_2 > 0$ . Ainsi  $\mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j^*}, :]$  a ses colonnes de rang complet.

Etant donné que  $\mathcal{P}_{j^*} \subset \mathcal{P}_{j+K}$ , alors  $\mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j+K}, :]$  a ses colonnes de rang complet et  $\mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j+K}, :]^T \mathbf{U}_{l+1}[\mathcal{P}_{j+K}, :]$  est inversible. De plus,  $\mathbf{U}_2[\mathcal{P}_K, :] = \mathbf{v}_1[\mathcal{P}_K]$  est un vecteur non nul. Alors  $\mathbf{U}_2[\mathcal{P}_K, :]^T \mathbf{U}_2[\mathcal{P}_K, :] > 0$  est inversible.  $\square$

Une autre propriété intéressante est l'annulation possible de l'élagage des données en utilisant une grande valeur du paramètre  $K$  de Algorithme 1. La propriété suivante est conservée :

**Propriété 2.** Si  $K = N_d$  et si  $|\mathbf{V}_u^\eta[i, 1]| > 0 \forall i = 1, \dots, N_d$  alors  $\Omega_R = \Omega$ . Le DRE devient le domaine entier et toutes les données sont conservées.

*Démonstration.* En suivant l'Algorithme 1, pour  $l = 1$  avec  $K = N_d$  et  $\mathbf{V}_u^\eta$  comme entrées, on obtient  $\mathbf{q}_l = \mathbf{V}_u^\eta[:, 1]$ . If  $|\mathbf{V}_u^\eta[i, 1]| > 0 \forall i = 1, \dots, N_d$ , alors  $\mathcal{P}_K = \{1, \dots, N_d\}$ . Ainsi,  $\mathcal{P}_u^{(N_d)} = \{1, \dots, N_d\}$  et  $\Omega_u = \Omega$  and  $\Omega_R^{exp} = \Omega$ .  $\square$

La deuxième propriété est assez restrictive. En pratique, les grandes valeurs de  $K$ , avec  $K < N_d$ , permettent de conserver toutes les données. La valeur de  $K$  doit être choisie en fonction de l'espace de mémoire à libérer.

Quand le DRE est disponible, les bases expérimentales de DVC ( $\mathbf{V}_u^{exp}$  et  $\mathbf{V}_\varepsilon^{exp}$ ) sont limitées à  $\Omega_R$  et les données à stocker sont :

1. Les données élaguées  $\overline{\mathbf{Q}}_u^{exp}$  ou la base réduite  $\overline{\mathbf{V}}_u^{exp}$ , où  $\overline{\mathbf{V}}_u^{exp}$  est obtenue par la SVD appliquée sur  $\overline{\mathbf{Q}}_u^{exp}$  seulement, les coordonnées réduites consécutives  $\mathbf{b}_u^{exp}$  et  $\boldsymbol{\eta}(x, t_j)$  dans  $\Omega_R^{exp}$  pour  $j = 1, \dots, N_t$
2. Un maillage réduit, c'est-à-dire la restriction du maillage FE à  $\Omega_R^{exp}$ .
3. L'historique de chargement appliqué à l'échantillon sur le sous-domaine  $\Omega_{user}$ .
4. Métadonnées habituelles liées à l'expérience (température, paramètres matériaux, ...).

Il est également conseillé de stocker la distribution d'une valeur d'intérêt dans le domaine complet et dans le domaine réduit. Ces données peuvent être enregistrées sous forme d'histogrammes par exemple. Dans la présente étude, la distribution de la déformation de cisaillement a été sauvegardée, car cette variable est extrêmement intéressante dans le cas de la localisation de la déformation. Le coût additionnel de la mémoire est en fait négligeable car il consiste à stocker quelques centaines de nombres.

*Remarque :* lorsqu'il est choisi d'enregistrer  $\overline{\mathbf{Q}}_u^{exp}$  le bruit est également sauvegardé, alors que dans  $\overline{\mathbf{V}}_u^{exp}$  il est partiellement filtré, comme dans l'analyse ACP.

Les données concernant les déformations ne sont pas stockées car elles peuvent être calculées avec les données de déplacement grâce à l'équation 4.8.

Généralement, les expériences *in-situ* observées en tomographie aux rayons X n'ont pas de nombreux pas de temps, donc la réduction de dimensionnalité ci-dessus ne réduit pas drastiquement la taille des données à stocker. Ceci sera illustré avec l'exemple suivant dans Section 4.2.6. L'hyper-réduction du domaine est en fait l'étape prédominante pour l'élagage des données.

Il est à noter que le DRE peut être déterminé avec seulement les snapshots expérimentaux non enrichis par le bruit.

#### 4.2.5 Maillage réduit du DRE

Afin de mettre en place le modèle hybride hyper-réduit sur le DRE  $\Omega_R^{exp}$  pour la procédure de calibration consécutive à l'élagage, on introduit un modèle EF restreint au DRE. Cela définit un maillage réduit. Les fonctions de forme éléments finis du maillage réduit sont notées  $(\psi_i)_{i=1, \dots, \text{card}(\overline{\mathcal{F}})}$  et sont définies telles que :

$$\overline{\psi}_i(\mathbf{x}) = \psi_{\overline{\mathcal{F}}_i}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_R^{exp} \quad (4.23)$$

où  $\overline{\mathcal{F}}_i$  est le  $i^{\text{ème}}$  indice de l'ensemble  $\overline{\mathcal{F}}$  de degrés de liberté du DRE :

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ i \in \{1, \dots, d\} \mid \int_{\Omega_R^{exp}} \psi_i^2(\mathbf{x}) d\Omega > 0 \right\} \quad (4.24)$$

$\text{card}(\overline{\mathcal{F}})$  est le nombre de degrés de liberté du maillage réduit. La numérotation des indices est changée. L'ensemble  $\mathcal{F}$  devient alors  $\mathcal{F}^*$  tel que :

$$\mathcal{F}^* = \{i \in \{1, \dots, \text{card}(\overline{\mathcal{F}})\} \mid \overline{\mathcal{F}}_i \in \mathcal{F}\} \quad (4.25)$$

Le complémentaire de  $\mathcal{F}^*$  est noté  $\mathcal{I}$ . Il contient les degrés de libertés de  $\Omega_R^{exp}$  qui sont connectés à  $\Omega \setminus \Omega_R^{exp}$  dans le maillage complet original. Pour une base empirique de données  $\mathbf{V}$ ,



$\bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{\text{card}(\bar{\mathcal{F}}) \times \bar{N}}$  est sa restriction au DRE :

$$\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}[\mathcal{F}, :] \quad (4.26)$$

L'approximation EF/réduite hybride est obtenue en ajoutant quelques colonnes de la matrice d'identité à  $\bar{\mathbf{V}}$ . Dans cette approximation hybride, nous ajoutons seulement des degrés de liberté EF qui ne sont pas connectés aux degrés de liberté dans  $\mathcal{I}$ . L'ensemble de degrés de liberté obtenu est noté  $\mathcal{R}$ . Dans Baiges *et al.* (2013), il a été montré que cela permettait d'avoir un fort couplage dans l'approximation hybride. Définissons le sous-domaine connecté à  $\mathcal{I}$  :

$$\Omega_{\mathcal{I}} = \cup_{i \in \mathcal{I}} \text{supp}(\bar{\psi}_i) \quad (4.27)$$

Dès lors, il vient :

$$\mathcal{R} = \left\{ i \in \{1, \dots, \text{card}(\bar{\mathcal{F}})\} \mid \int_{\Omega_{\mathcal{I}}} \bar{\psi}_i^2(\mathbf{x}) dx = 0 \right\} \quad (4.28)$$

La base réduite hybride est notée  $\bar{\mathbf{V}}^H$ . En notant le symbole de Kronecker  $\delta_{ji}$ , on obtient :

$$\bar{\mathbf{V}}^H[:, 1 : \bar{N}] = \bar{\mathbf{V}}, \quad \bar{\mathbf{V}}^H[i, \bar{N} + k] = \delta_{\mathcal{R}_k i} \quad k = 1, \dots, \text{card}(\mathcal{R}) \quad (4.29)$$

On suppose que :

$$(\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}}^H = (\mathbf{V}^H[\mathcal{F}, :])^T \mathbf{K}[\mathcal{F}, :] \mathbf{V}^H \quad (4.30)$$

où  $\mathbf{V}^H$  contient  $\mathbf{V}$  dans ses premières colonnes et conserve les mêmes colonnes de la matrice d'identité (avec des rangées renumérotées) dans les dernières colonnes et  $\bar{\mathbf{K}}$  et  $\bar{\mathbf{c}}$  sont calculés sur le maillage réduit de  $\Omega_R^{exp}$ . Cette hypothèse est pertinente dans les problèmes mécaniques sans condition de contact, dans le cadre de la théorie du premier gradient. L'extension de la méthode d'hyper-réduction hybride dans le cas du contact a été traitée par Fauque *et al.* (2018). Il s'ensuit que les équations hyper-réduites hybrides pour un problème linéaire sont :

$$(\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}}^H \bar{\mathbf{b}}^R = (\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{c}}[\mathcal{F}^*] \quad (4.31)$$

Dans le cas de problèmes non linéaires,  $\bar{\mathbf{K}}$  est la matrice de rigidité tangentielle EF calculée sur le maillage réduit et  $\bar{\mathbf{c}}$  est l'opposé du résidu des équations de bilan EF dans le maillage réduit. Si la matrice  $(\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}}^H$  n'a pas de rang complet, il est suggéré de supprimer les colonnes de  $\bar{\mathbf{V}}$  qui causent la perte de rang, de façon incrémentale en commençant par la dernière colonne. Lorsque la SVD est utilisée pour obtenir  $\bar{\mathbf{V}}$  à partir des données, les dernières colonnes ont la plus petite contribution dans l'approximation des données. Ce cas de figure n'est jamais apparu au cours de cette étude.

**Propriété 3.** Si  $\Omega_R^{exp} = \Omega$  alors les équations hybrides hyper-réduites sont les équations éléments finis originales sur le maillage entier.

*Démonstration.* Si  $\Omega_R^{exp} = \Omega$ , alors  $\mathcal{I} = \emptyset$ ,  $\mathcal{F}^* = \mathcal{R} = \{1, \dots, N_d\}$  et le maillage réduit est le maillage d'origine. De plus, tous les modes empiriques doivent être supprimés de  $\bar{\mathbf{V}}^H$  pour obtenir un système complet d'équations. Donc  $\bar{\mathbf{V}}^H$  est la matrice d'identité. Ainsi, les équations hybrides hyper-réduites sont exactement les équations EF initiales. Il n'y a pas de réduction de la complexité.  $\square$

Dans la suite, la base réduite empirique est extraite des données restreintes au DRE, en utilisant une SVD. Notons  $\mathbf{X}$  les données disponibles sur le maillage entier, avant l'élagage. Ensuite, après la procédure d'hyper-réduction de données, la base empirique réduite est liée à  $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{X}[\bar{\mathcal{F}}, :]$  :

$$\bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{W}}^T + \bar{\mathbf{R}}, \quad \bar{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{\text{card}(\bar{\mathcal{F}}) \times \bar{N}} \quad (4.32)$$

avec  $\|\bar{\mathbf{R}}\| < \epsilon_{tol} \max(\text{diag}(\bar{\mathbf{S}}))$ .

**Propriété 4.** Si  $\epsilon_{tol} = 0$ . Si les équations hybrides hyper-réduites et les équations EF ont toutes les deux une unique solution respectivement, et si la solution EF  $\mathbf{a}^{FE}$  appartient au sous-espace généré par les données, tel que  $\|\mathbf{a}^{FE} - \mathbf{X} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{a}^{FE}[\bar{\mathcal{F}}]\| = 0$ , alors  $\bar{\mathbf{b}}^R[1 : \bar{N}] = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{a}^{FE}[\bar{\mathcal{F}}]$  et  $\bar{\mathbf{b}}^R[1 + \bar{N} : \text{card}(\mathcal{H}) + \bar{N}] = \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T$ , où  $\mathbf{0}_{\mathcal{R}}$  est un vecteur nul dans  $\mathbb{R}^{\text{card}(\mathcal{R})}$ . Cela signifie que la solution hyper-réduite est exacte et que la correction EF dans l'approximation hybride est nulle.

*Démonstration.* Introduisons la matrice  $\hat{\mathbf{V}} = \mathbf{X} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{S}}^{-1}$ . Alors,

$$\hat{\mathbf{V}}[\bar{\mathcal{F}}, :] = \bar{\mathbf{X}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{S}}^{-1} = \bar{\mathbf{V}} \quad (4.33)$$

If  $\|\mathbf{a}^{FE} - \hat{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{a}^{FE}[\bar{\mathcal{F}}]\| = 0$ , alors  $\|\mathbf{a}^{FE}[\bar{\mathcal{F}}] - \bar{\mathbf{V}} \hat{\mathbf{b}}^{FE}\| = 0$  avec  $\hat{\mathbf{b}}^{FE} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{a}^{FE}[\bar{\mathcal{F}}]$  et  $[(\hat{\mathbf{b}}^{FE})^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T$  vérifie l'équation suivante :

$$\bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}}^H [(\hat{\mathbf{b}}^{FE})^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T = \bar{\mathbf{c}}[\mathcal{F}^*] \quad (4.34)$$

Dès lors, les équations d'équilibre des équations hybrides hyper-réduites sont vérifiées par  $[(\hat{\mathbf{b}}^{FE})^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T$ . Si les équations hybrides hyper-réduites et les équations EF ont toutes les deux une unique solution respectivement, alors la solution des équations hybrides hyper-réduites sont  $\bar{\mathbf{b}}^R = [(\hat{\mathbf{b}}^{FE})^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T$ .  $\square$

## 4.2.6 Application au sable de fonderie

### 4.2.6.1 Construction de la base réduite expérimentale

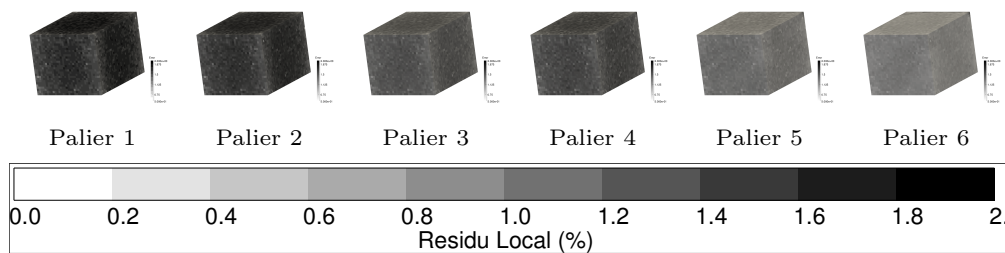


FIGURE 4.8 – Résidus aux paliers pré-pic

Comme précisé dans la procédure d'élagage de données, les matrices expérimentales de déplacement et de déformations sont calculées. L'attention est attirée sur le fait que l'essai étudié

n'a pas beaucoup de pas de temps ( $N_t = 7$ ) et que le maillage expérimental n'est pas très grand. Les matrices DVC  $\mathbf{Q}_u$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  sont respectivement  $474.405 \times 7$  et  $1.774.080 \times 14$ . Si la SVD tronquée est appliquée sur ces matrices, seulement 6 modes sont extraits. Comme le nombre d'étapes de temps est plutôt petit, l'utilisation de modes empiriques ne réduit pas la taille des données expérimentales, comme indiqué précédemment. La prise en compte de l'erreur (tracée en Figre 4.8) augmente naturellement le nombre total de snapshots.  $\mathbf{Q}_u^\eta$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon^\eta$  sont respectivement  $474.405 \times 28$  et  $1.774.080 \times 56$ . Les bases réduites suivantes  $\mathbf{V}_u^\eta$  et  $\mathbf{V}_\varepsilon^\eta$  contiennent respectivement 23 et 55 modes. Là encore, l'utilisation de modes empiriques ne réduit pas significativement la dimension du problème.

#### 4.2.6.2 DRE après DVC sur l'échantillon

La procédure de construction a trois entrées principales :

- Les modes empiriques  $\mathbf{V}_u^\eta$  et  $\mathbf{V}_\varepsilon^\eta$ .
- Le paramètre  $K$  pour K-SWIM (Algorithme 1).
- Zone d'intérêt (ZOI)  $\Omega_{user}$ .

Pendant l'essai, la courbe de chargement a été mesurée en haut de l'échantillon. Afin de comparer les réactions calculées et mesurées pour l'évaluation du modèle, les éléments en haut du maillage sont considérés comme ZOI. Dans le reste,  $\Omega_+$  est une couche sur les éléments autour de  $\Omega_u \cup \Omega_\varepsilon \cup \Omega_{user}$ .

Le DRE a été déterminé en faisant varier les deux premières entrées. Tout d'abord, une SVD tronquée a été effectuée sur les matrices de snapshots DVC  $\mathbf{Q}_u$  et  $\mathbf{Q}_\varepsilon$  (sans bruit). Les lignes sélectionnées (paramètre  $K$  dans l'Algorithme 1) ont été évaluées dans la Figure 4.9. Pour  $K = 1$ , l'algorithme standard DEIM sélectionne très peu de degrés de liberté. La plupart du DRE est en fait la ZOI. Cela est dû au nombre relativement faible de modes contenus dans la base réduite (seulement 6). Ce problème apparent peut être surmonté en sélectionnant plusieurs lignes pendant l'algorithme K-SWIM. En augmentant  $K$ , le nombre de degrés de liberté augmente linéairement en pratique. L'attention est attirée sur le fait que les DRE résultants pour  $K = 15$  ou  $K = 50$  sont discontinus, comme c'est habituellement le cas lors de l'utilisation de méthodes d'hyper-réduction. Les zones nouvellement sélectionnées sont situées dans les régions cisailées.

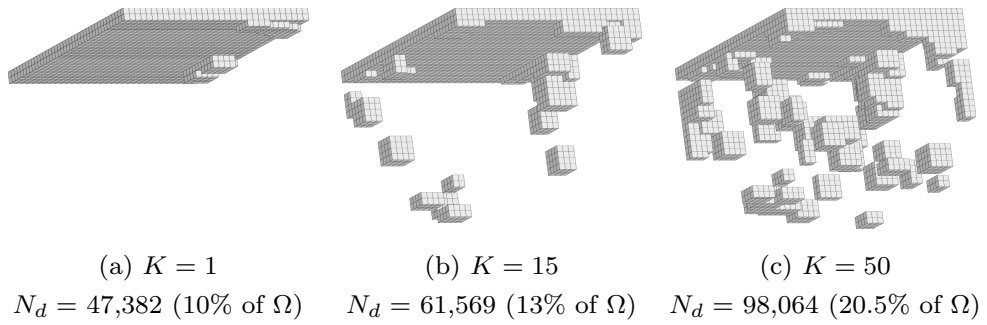


FIGURE 4.9 – Données brutes : influence de  $K$  dans l'algorithme K-SWIM

Dans la suite, le DRE a été calculé en utilisant les bases réduites incluant le bruit dans  $\mathbf{V}_u^\eta$  et  $\mathbf{V}_\varepsilon^\eta$ . L'influence de  $K$  a été évaluée de la même manière et le résultat est affiché dans la Figure

4.10. Comme la base est plus grande, les domaines réduits résultants sont plus vastes. Avec  $K = 1$  (DEIM originale), les zones sélectionnées sont directement les régions cisailées (alors qu'avec les résultats directs de DVC ce n'était pas le cas). L'augmentation de  $K$  augmente linéairement le DRE, en sélectionnant plus de zones à l'intérieur de l'échantillon. Le choix de  $K$  (et donc du DRE) est complètement défini par l'utilisateur. Cela peut dépendre de l'espace mémoire disponible ou de la forme du DRE. Il est à noter que la ZOI peut être utilisée pour imposer directement le DRE en fonction des choix de l'utilisateur (zones avec des instabilités locales, etc.), donnant moins d'importance à la sélection K-SWIM.

Dans l'étude présente, la stratégie retenue consistait à laisser l'algorithme décider pour la plupart des DRE, en n'imposant qu'une ZOI pour comparer les simulations aux expériences à des fins de calibration du modèle.

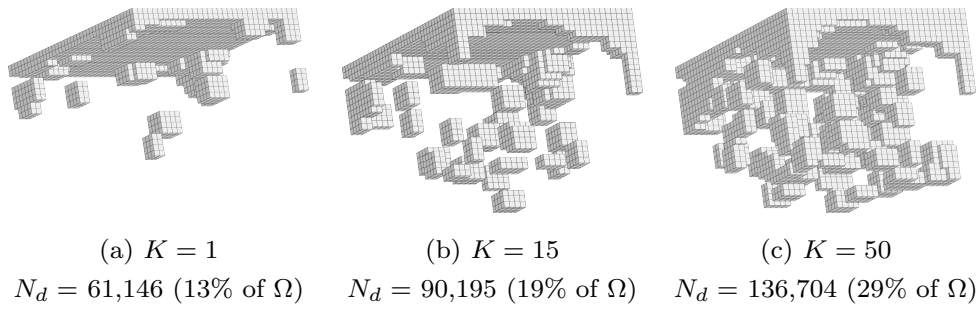


FIGURE 4.10 – Données enrichies : influence de  $K$  dans l'algorithme K-SWIM

Le DRE final est celui utilisant les bases réduites expérimentales enrichies et  $K = 15$ . Il représente environ 19% du domaine total  $\Omega$ . Il est présenté en Figure 4.10 b. La construction du domaine réduit est analysé en Figure 4.11 où les sous-domaines  $\Omega_u$ ,  $\Omega_\varepsilon$ ,  $\Omega_{user}$  et  $\Omega_I$  sont séparément présentés.

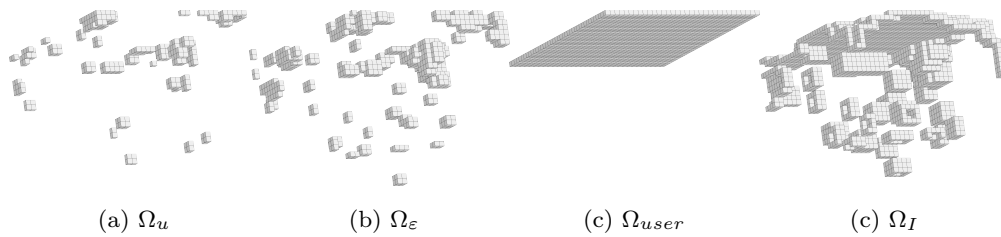


FIGURE 4.11 – Sous-domaines différents du DRE

Un résumé des différentes tailles de matrice à chaque étape est affiché dans la table 4.1. Comme indiqué précédemment, il est clair que pour ce type de données, l'analyse PCA ne réduit pas significativement l'utilisation de la mémoire. Le schéma d'hyper-réduction utilisé permet d'économiser jusqu'à 85% de l'espace mémoire pour l'exemple illustratif.

Données expérimentales		Modes empiriques		Données élaguées	
$\mathbf{Q}_u$	$474405 \times 7$	$\mathbf{V}_u^{exp}$	$474405 \times 6$	$\overline{\mathbf{V}}_u^{exp}$	$90195 \times 6$
		$\mathbf{b}_u^{exp}$	$6 \times 7$	$\mathbf{b}_u^{exp}$	$6 \times 7$
Mémoire sauvée		15%		85%	

TABLE 4.1 – Tailles des matrices sauvegardées à chaque étape de l'élagage de données

## 4.2.7 FEMU-H<sup>2</sup>ROM

### 4.2.7.1 Introduction

L'utilisation de l'approximation EF des champs expérimentaux ouvre la voie à d'autres simulations. Dans la procédure de calibration, les mesures à champ complet sont utilisées comme entrées d'un problème inverse qui vise à déterminer un ensemble donné de paramètres  $\boldsymbol{\mu} = \{\mu_1, \dots, \mu_m\}$ . Ces paramètres sont les coefficients d'équations constitutives données. Leurs valeurs sont inconnues ou déterminées peu précisément. La méthode la plus directe est appelée FEMU (*Finite Element Model Updating*) (voir Kavanagh et Clough (1971); Kavanagh (1972)). C'est un moyen plutôt courant d'optimiser un ensemble de paramètres prenant en compte les données expérimentales et les équations d'équilibre en mécanique. Il consiste à calculer l'écart entre l'approximation EF des champs expérimentaux et les simulations EF. Ainsi, une boucle d'optimisation est faite sur  $\boldsymbol{\mu}$  où la méthode EF est utilisée comme un outil pour évaluer la pertinence de l'ensemble de paramètres. La fonction objectif, ou fonction de coût, de l'optimisation peut se focaliser sur la différence entre les champs de déplacement calculés et expérimentaux (FEMU-U), les forces (FEMU-F, ou méthode de balance de force) ou les champs de déformation (FEMU -  $\varepsilon$ ) ou un mélange entre toutes ces sous-méthodes.

Une revue des applications FEMU peut être trouvée dans Jenny *et al.* (2009). La méthode est particulièrement adaptée pour :

- Matériaux non isotropes (par exemple : matériaux orthotropes dans Lecompte *et al.* (2007) ou Molimard *et al.* (2005) ou matériaux anisotropes tels que la peau humaine (Meijer *et al.*, 1999));
- Matériaux hétérogènes tels que composites (Bruno, 2018);
- Tests hétérogènes comme les tests en open-hole (par exemple : Lecompte *et al.* (2007), Molimard *et al.* (2005)) ou éprouvettes CT (Mahnken et Stein, 1996);
- Cas particuliers de phénomènes locaux comme la localisation ou le necking (par exemple : Forestier *et al.* (2002); Giton *et al.* (2006)) ou le cas illustratif de la présente étude;
- Configurations multi-matériaux (par exemple : joints de soudure étudiés dans Cugnoni *et al.* (2006) ou identification de matériaux hétérogènes faite dans Latourte *et al.* (2008));
- Détermination des conditions aux limites (Padmanabhan *et al.*, 2006).

L'un des développements récents concernant FEMU est de coupler cette méthode avec des modèles réduits (ROMs) pour réduire le temps de calcul dans la boucle d'optimisation des paramètres. Un exemple de ces développements récents peut être trouvé dans Neggers *et al.* (2017)

où une méthode appelée FEMU-b est mise en exergue, ou dans Cugnoni *et al.* (2007). La FEMU-b consiste à déterminer un espace intermédiaire de modes empiriques prédominants associés à une procédure de réduction, comme la Décomposition Orthogonale aux Valeurs Propres ou POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) (voir Aubry *et al.* (1988)) ou la PGD (Passieux et Perie, 2012). L'écart est calculé entre les variables réduites expérimentales et simulées, où les variables réduites sont des solutions d'équations réduites.

Ici est introduite une nouvelle méthode de calibration, appelée FEMU-H<sup>2</sup>ROM. Elle s'inscrit dans la famille des méthodes FEMU : un vecteur de paramètres d'un modèle élastoplastique est mis-à-jour au cours d'une boucle d'optimisation. Contrairement aux méthodes plus classiques, l'outil d'évaluation du jeu de paramètres n'est pas la méthode des éléments finis mais l'hyper-réduction hybride, appliquée sur un Domaine Réduit Expérimental déterminé en amont de l'étude.

Pour rappel, l'étude se focalisera sur l'optimisation du MC-CASM.

#### 4.2.7.2 Évaluer la pertinence des données élaguées

Dans cette section, la pertinence des données élaguées pour un usage ultérieur est discutée. Les données extraites de la tomographie aux rayons X peuvent avoir plusieurs objectifs. Ici, on se concentre sur son utilisation pour l'étalonnage du modèle, et est illustré par le test de compression *in-situ* d'un sable lié à la résine présenté dans la section précédente. On suppose ici que les entrées de la section actuelle sont :

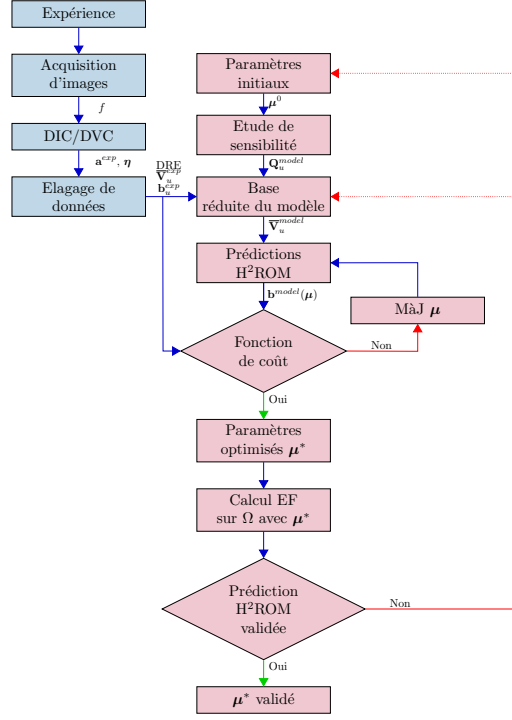
- Le maillage du domaine expérimental total  $\Omega$  ;
- Le maillage du domaine expérimental réduit  $\Omega_R^{exp}$  ;
- La base réduite du déplacement sur le DRE et les coordonnées réduites correspondantes  $\bar{\mathbf{V}}_u^{exp}$  et  $\mathbf{b}_u^{exp}$  ;
- Les conditions aux limites pertinentes ;
- Les distributions de probabilité de la déformation de cisaillement sur  $\Omega$  et  $\Omega_F^{exp}$ .

Le modèle utilisé pour l'exemple illustratif est un modèle élastoplastique constitutif avec  $m$  paramètres inconnus à calibrer. La procédure utilisée est une technique FEMU (*Finite Element Model Updating*), couplée à une méthode d'hyper-réduction hybride pour la résolution d'équations d'équilibre approximatives. L'utilisation d'une telle méthode est simple car les données d'entrée sont en réalité hyper-réduites. Cette approche est appelée FEMU-H<sup>2</sup>ROM.

La méthode FEMU-H<sup>2</sup>ROM totale est reprise dans l'organigramme de la Figure 4.12. La partie bleue concerne la procédure d'élagage des données et est déjà terminée. La présente section se concentrera sur la partie rouge, étape par étape.

#### 4.2.7.3 Procédure de calibration en utilisant la H<sup>2</sup>ROM

La FEMU-H<sup>2</sup>ROM est précédée d'une phase hors ligne similaire à une phase d'apprentissage automatique non supervisée (*unsupervised machine learning*). Elle consiste à construire la base empirique réduite  $\bar{\mathbf{V}}$  qui est obligatoire pour mettre en place les équations hyper-réduites hybrides. Il est similaire à la première étape de la méthode d'élagage des données : une matrice de snapshot est construite sur la base de simulations et de résultats expérimentaux (et non uniquement sur des expériences).

FIGURE 4.12 – Diagramme de la FEMU-H<sup>2</sup>ROM

Le point de départ de la phase hors ligne est d'évaluer les sensibilités des paramètres du modèle éléments finis à partir d'une estimation initiale  $\mu^0 = \{\mu_1^0, \dots, \mu_m^0\}$ . Cette valeur d'entrée peut provenir d'une calibration précédente, ou d'une calibration effectuée en utilisant des courbes force-déplacement macroscopiques de tests standards sans prédire la localisation de la déformation.

Les calculs hors ligne sont effectués sur le domaine complet  $\Omega$  et peuvent donc prendre beaucoup de temps. Les conditions aux limites sont les déplacements expérimentaux pris à partir de la tomographie aux rayons X imposés en haut et en bas de l'échantillon. Le champ de déplacement n'est pas imposé à l'intérieur de l'échantillon car l'un des objectifs du modèle est de capturer correctement la localisation de la déformation apparaissant à l'intérieur de l'échantillon lors du chargement, sous la contrainte d'équations d'équilibre. Imposer le champ de déplacement à l'intérieur de l'échantillon donne moins d'équation d'équilibre à remplir. Les  $m$  calculs sont faits sur  $\Omega$ . L'attention est attirée sur le fait que ces calculs peuvent être faits en parallèle. Seules les matrices de snapshot de déplacement sont nécessaires. Un total de  $m + 1$  calculs indépendants sont effectués :

- Un calcul initial avec  $\mu = \mu^0$ , fournissant  $\mathbf{Q}_u(\mu^0)$
- $m$  calculs de sensibilité lancés en parallèle où  $\mu = \mu^i = \{\mu_1^0, \dots, \mu_i^0 + \delta\mu_i^0, \dots, \mu_m^0\}$ , fournissant  $\mathbf{Q}_u(\mu^i)$  pour  $i = 1, \dots, m$

Une fois cela fait, ces calculs sont limités au domaine expérimental réduit  $\Omega_R^{exp}$ . Ils sont notés  $\bar{\mathbf{Q}}_u(\boldsymbol{\mu}^i)$  pour  $i = 0, \dots, m$ . Tous ces résultats doivent être agrégés dans une matrice de snapshot  $\bar{\mathbf{X}}$  avant le calcul des modes empiriques  $\bar{\mathbf{V}}$ . Au lieu de concaténer les  $m + 1$  matrices en une, une méthode de décomposition orthogonale étendue (*Derivative Extended Proper Orthogonal Decomposition* ou DEPOD) est utilisée (voir Schmidt *et al.* (2013)). Cette approche a été validée dans des travaux antérieurs sur la calibration de modèles avec hyper-réduction (Ryckelynck et Missoum Benziane, 2016). Cela permet de capturer les effets de chaque variation de paramètre.

$$\bar{\mathbf{X}} = [\alpha \bar{\mathbf{V}}_u^{exp} \mathbf{b}_u^{exp}, \bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0), \frac{\|\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0)\|}{2 \|\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^1) - \bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0)\|} (\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^1) - \bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0)), \dots, \frac{\|\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0)\|}{2 \|\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^m) - \bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0)\|} (\bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^m) - \bar{\mathbf{Q}}(\boldsymbol{\mu}^0))] \quad (4.35)$$

Le premier terme  $\alpha \bar{\mathbf{V}}_u^{exp} \mathbf{b}_u^{exp}$  correspond aux données expérimentales élaguées. Il est pondéré par un paramètre personnalisé  $\alpha$  qui permet de donner plus d'impact aux fluctuations expérimentales des modes empiriques. Les méthodes des éléments finis ont tendance à lisser ces fluctuations, provoquant ainsi une certaine perte d'information.

Les modes empiriques dépendant du facteur  $\alpha$  sont affichés dans la Figure 4.13. Pour  $\alpha = 0$ , c'est-à-dire sans données expérimentales dans la construction, les modes empiriques ont de fortes fluctuations seulement en haut et en bas de l'échantillon, où les conditions aux limites expérimentales sont imposées. Ceci peut s'expliquer par le lissage naturel provoqué par la méthode des éléments finis avec des équations plutôt elliptiques. L'augmentation de l'importance des données expérimentales tend naturellement à perturber le champ de déplacement à l'intérieur de l'échantillon. Même pour les modes fortement perturbés ( $\alpha = 10$ ), le dernier mode empirique est à peu près lisse : ceci est dû à l'algorithme POD qui filtre les données. Dans la suite, nous choisissons  $\alpha = 1$ . Les données expérimentales sont aussi importantes que les données de simulation liées aux équations d'équilibre EF.

Une fois que  $\bar{\mathbf{V}}$  est disponible,  $\bar{\mathbf{V}}^H$  peut être défini. Ensuite, les coordonnées réduites expérimentales sont projetées sur la base réduite empirique afin de les comparer lors de la boucle d'optimisation :

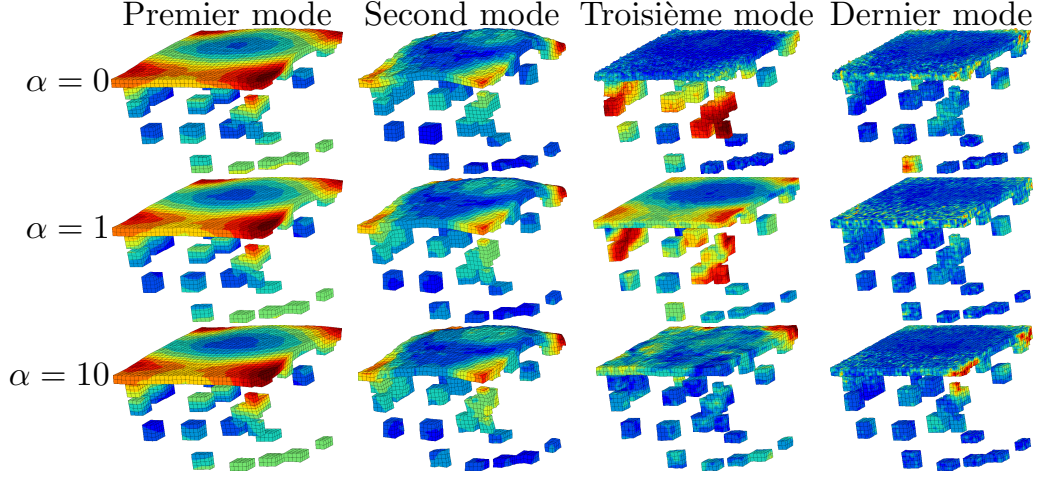
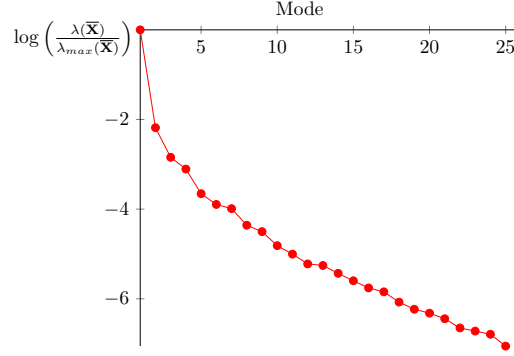
$$\hat{\mathbf{b}}^{exp} = (\bar{\mathbf{V}}^H)^T \bar{\mathbf{V}}_u^{exp} \mathbf{b}_u^{exp} \quad (4.36)$$

Pour l'exemple proposé, il y a une décroissance rapide des valeurs singulières (voir Figure 4.14 où  $\epsilon_{POD}$  est défini à  $10^{-4}$ ). Lorsque cette décroissance est suffisante pour fournir un petit nombre de modes empiriques, nous renvoyons le lecteur à Ghavamian *et al.* (2017), Peherstorfer *et al.* (2014) et Haasdonk *et al.* (2011) pour regrouper les données afin de diviser l'intervalle de temps et construire une base locale réduite dans le temps.

#### 4.2.7.4 Concernant les conditions aux limites de type Dirichlet

Après l'élagage des données, les données expérimentales sont disponibles dans tout  $\Omega_R^{exp}$ . Lorsque les déplacements sont contraints de suivre les données expérimentales, nous perdons des



FIGURE 4.13 –  $\|\mathbf{u}\|$  après DEPOD en fonction de  $\alpha$ FIGURE 4.14 – Valeurs singulières de  $\bar{\mathbf{X}}$  vérifiant  $\lambda(\bar{\mathbf{X}}) > \epsilon_{POD} \lambda_{max}(\bar{\mathbf{X}})$ 

équations d'équilibre EF. La propriété suivante permet de discuter des conditions aux limites de Dirichlet.

**Propriété 5.** Si  $\alpha > 0$ ,  $\epsilon_{tol} = 0$  si les données expérimentales  $\bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}$  vérifient les équations EF sur  $\Omega_R^{ex}$  avec les conditions aux limites de type Dirichlet suivantes :

$$\mathbf{a}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu})[\mathcal{I}] = \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}[\mathcal{I}, j], \quad (4.37)$$

et si les équations hybrides hyper-réduites et les équations EF sur  $\Omega_R^{ex}$  sont uniques, alors la solution de l'équation hybride hyper-réduite est la projection exacte des données expérimentales sur la base empirique réduite  $\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu}) = [(\bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex})^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T$ , avec  $\|\bar{\mathbf{Q}}_u^{ex} - \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}\| = 0$ .

*Démonstration.* Considérons un problème EF linéaire élastique. Si  $\bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}$  remplit les équations EF sur  $\Omega_R^{ex}$ , avec des conditions aux limites de Dirichlet supplémentaires, alors :

$$\mathbf{a}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) = \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}[:, j] \quad j = 1 \dots M$$

et

$$\bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \mathbf{a}^{FE} - \bar{\mathbf{c}}[\mathcal{F}^*] = 0$$

Si  $\alpha > 0$  et  $\epsilon_{tol} = 0$ , alors

$$\mathbf{a}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) = \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{b}}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) \quad j = 1 \dots M,$$

avec

$$\bar{\mathbf{b}}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) = \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}[:, j] \quad j = 1 \dots M$$

Alors

$$\bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{b}}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) - \bar{\mathbf{c}}[\mathcal{F}^*] = 0 \quad j = 1 \dots M$$

et

$$(\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{K}}[\mathcal{F}^*, :] \bar{\mathbf{V}} \bar{\mathbf{b}}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}) - (\bar{\mathbf{V}}^H[\mathcal{F}^*, :])^T \bar{\mathbf{c}}[\mathcal{F}^*] = 0 \quad j = 1 \dots M$$

Donc  $\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu}) = [(\bar{\mathbf{b}}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu}))^T, \mathbf{0}_{\mathcal{R}}^T]^T$  est la solution unique des équations hyper-réduites hybrides, et la projection exacte de la solution EF restreinte.  $\square$

La dernière propriété n'implique pas qu'imposer  $\mathbf{a}^{FE}(t_j, \boldsymbol{\mu})[\mathcal{I}] = \bar{\mathbf{Q}}_u^{ex}[\mathcal{I}, j]$  comme condition limite aux degrés de liberté dans  $\mathcal{I}$  est la meilleure façon de vérifier les équations d'équilibre EF. En fait, avec les conditions aux limites additionnelles sur  $\mathcal{I}$ , le maximum d'équations EF disponibles est  $\text{card}(\mathcal{F}^*)$ . La Propriété 4 signifie que si la base empirique réduite est exacte, alors toutes les  $N_d$  équations d'équilibre EF sont vérifiées dans  $\Omega$ . Dans un sens, dans le protocole de calibration proposé, nous ferions mieux d'avoir confiance dans les équations d'équilibre EF que dans les données expérimentales. Des équations d'équilibre EF précises peuvent être obtenues par un maillage pertinent de  $\Omega$ , bien que le bruit soit toujours présent dans les données expérimentales.

#### 4.2.7.5 Fonction de coût et mise-à-jour des paramètres

Dans la boucle d'optimisation, un ensemble donné de paramètres  $\boldsymbol{\mu}$  est évalué. Les calculs H<sup>2</sup>ROM fournissent les coordonnées réduites associées à la base empirique précédemment déterminée sur le DRE notées  $\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu})$ . La réaction supérieure  $\mathbf{F}^{comp}(\boldsymbol{\mu})$  est également calculée comme la contrainte axiale moyenne dans le ZOI.

Dans l'exemple, la fonction de coût évalue deux échelles d'erreur : l'erreur à l'échelle microscopique entre les coordonnées réduites expérimentales et calculées et l'erreur à l'échelle macroscopique entre les réactions supérieures mesurées et calculées. Ces fonctions d'erreur sont respectivement notées  $\chi_u^2(\boldsymbol{\mu})$  et  $\chi_F^2(\boldsymbol{\mu})$ .

L'erreur à l'échelle microscopique est définie par :

$$\chi_u^2(\boldsymbol{\mu}) = \|\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu}) - \hat{\mathbf{b}}^{exp}\|_{\Omega_R^{exp}}^2 \quad (4.38)$$

Le choix de la norme dépend de l'utilisateur. La matrice de covariance inverse du déplacement est la meilleure norme pour un bruit gaussien selon Tarantola (1987); Kaipio et Somersalo (2007)

pour un cadre bayésien. Cependant, dans la présente étude, pour garder le problème traité assez simple, cette fonction d'erreur est choisie :

$$\chi_u^2(\boldsymbol{\mu}) = (\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu}) - \hat{\mathbf{b}}^{exp})^T (\bar{\mathbf{b}}^R(\boldsymbol{\mu}) - \hat{\mathbf{b}}^{exp}) \quad (4.39)$$

l'erreur à l'échelle macroscopique est définie par :

$$\chi_F^2(\boldsymbol{\mu}) = \|\mathbf{F}^{comp}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{F}^{exp}\|_{\Omega_F^{exp}}^2 \quad (4.40)$$

où  $\Omega_F^{exp}$  est le sommet de l'éprouvette, où la charge expérimentale a été mesurée. Les mesures de charge expérimentales sont supposées non corrélées et leur variance est notée  $\sigma_F^2$ . Dans un cadre bayésien, pour un bruit gaussien corrigeant les mesures de charge (Neggers *et al.*, 2017), l'équation précédente peut être écrite comme suit :

$$\chi_F^2(\boldsymbol{\mu}) = \frac{1}{N_t \sigma_F^2} \{\mathbf{F}^{comp}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{F}^{exp}\}^T \{\mathbf{F}^{comp}(\boldsymbol{\mu}) - \mathbf{F}^{exp}\} \quad (4.41)$$

Pour la boucle d'optimisation, la fonction objective finale est une somme pondérée des précédentes sous-fonction objectives :

$$\chi^2(\boldsymbol{\mu}) = c_u \chi_u^2(\boldsymbol{\mu}) + c_F \chi_F^2(\boldsymbol{\mu}) \quad (4.42)$$

où  $c_u$  et  $c_F$  sont des poids. Ils peuvent être choisis pour équilibrer les deux fonctions de coût ou pour privilégier une échelle à l'autre. Dans l'exemple illustratif, la fonction de coût est équilibrée. Un algorithme classique de Levenberg-Marquardt est employé pour la minimisation de la fonction d'erreur et la mise à jour du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\mu}$ .

#### 4.2.7.6 Vérification EF et calibration du modèle

La boucle d'optimisation a pris 46 itérations. Le rapport de temps de calcul entre les calculs EF et les prédictions H<sup>2</sup>ROM est d'environ 70. De plus, les prédictions H<sup>2</sup>ROM n'ont nécessité que 3% du coût de la mémoire de calcul EF.

La Figure 4.15 affiche les réactions supérieures expérimentales et calculées (initiales et optimisées). À la fin de la boucle d'optimisation, il est obligatoire d'évaluer la pertinence de la prédiction H<sup>2</sup>ROM. La FEMU-H<sup>2</sup>ROM dépend du jeu de paramètres initial  $\boldsymbol{\mu}^0$ . Cette donnée d'entrée détermine la pertinence de la base réduite du modèle après l'étude de sensibilité des paramètres et l'analyse DEPOD. Pendant la mise à jour du modèle, le jeu de paramètres peut être trop différent de la supposition initiale. Par conséquent, la base empirique réduite  $\bar{\mathbf{V}}^H$  peut ne pas être exacte et les prédictions de H<sup>2</sup>ROM ne seront pas admissibles. C'est-à-dire que l'écart entre les calculs hyper-réduits et les calculs d'éléments finis peut ne pas être négligeable. C'est pourquoi les paramètres optimisés  $\boldsymbol{\mu}^*$  doivent être validés avec des calculs EF sur le domaine complet  $\Omega$ . Il convient de noter que si les données expérimentales sont incluses dans la DEPOD, la prédiction finale de H<sup>2</sup>ROM devrait être proche des expériences. La base empirique réduite est théoriquement pertinente.

D'une manière similaire à la boucle d'optimisation, une fonction d'erreur entre les deux calculs peut être définie en se concentrant sur l'échelle microscopique (erreur de déplacement) et

l'échelle macroscopique (différences de réactions supérieures). En ce qui concerne l'échelle microscopique, l'erreur n'est calculée que dans le DRE, car les prédictions H<sup>2</sup>ROM ne sont faites que sur ce domaine et ne peuvent pas être reconstruites dans le domaine complet avec cette approche particulière.

$$r_u^2(\boldsymbol{\mu}^*) = \|\mathbf{a}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{a}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*)\|_{\Omega_F^{exp}}^2 \quad (4.43)$$

$$= \left( \mathbf{a}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{a}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*) \right)^T \left( \mathbf{a}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{a}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*) \right) \quad (4.44)$$

De la même manière, l'erreur à l'échelle macroscopique est :

$$r_F^2(\boldsymbol{\mu}^*) = \|\mathbf{F}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{F}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*)\|_{\Omega_F^{exp}}^2 \quad (4.45)$$

$$= \left( \mathbf{F}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{F}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*) \right)^T \left( \mathbf{F}^{H^2ROM}(\boldsymbol{\mu}^*) - \mathbf{F}^{FEM}(\boldsymbol{\mu}^*) \right) \quad (4.46)$$

Les erreurs à l'échelle microscopique et macroscopique ne doivent pas dépasser quelques pourcents des calculs FEM. Dans la figure 4.15, la réaction de haut niveau FEM est représentée en orange. Il est clair que sa valeur est extrêmement proche de celle calculée grâce à H<sup>2</sup>ROM. L'erreur est d'environ 1% à chaque étape.

Cette vérification finale est purement numérique. Si les prédictions H<sup>2</sup>ROM sont validées, il est conseillé d'analyser plus en profondeur le calcul EF complet. Le calcul et l'expérience peuvent être extrêmement différents dans les zones en dehors du DRE. Dans l'exemple illustratif, les distributions de déformation de cisaillement calculées et mesurées ont été comparées. L'analyse est résumée dans les histogrammes affichés dans la Figure 4.16 pour la dernière étape de pré-pic. L'écart entre les distributions calculées et mesurées a été considéré ici comme satisfaisant.

En cas de différences notables entre la prédiction H<sup>2</sup>ROM et les calculs EF, ou entre calculs EF et expérience, la FEMU-H<sup>2</sup>ROM n'est pas validée. Deux solutions sont possibles pour surmonter ce problème :

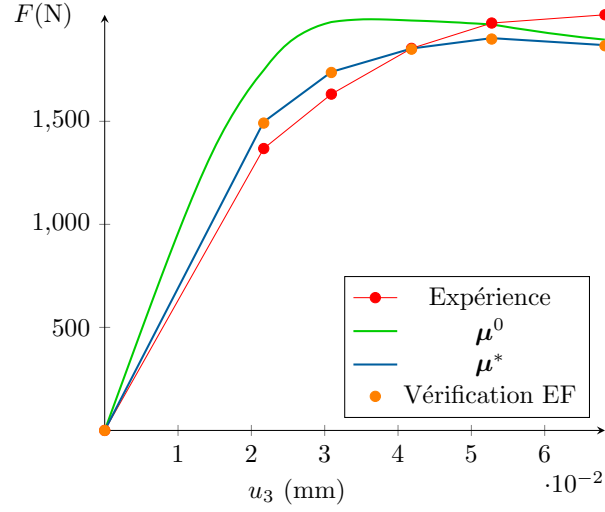
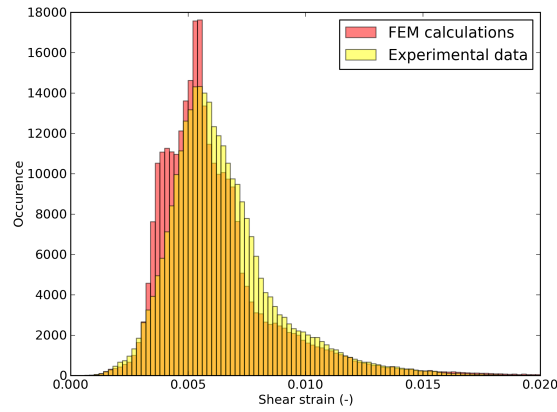
1. Reproduire l'étude de sensibilité des paramètres avec  $\boldsymbol{\mu}^0 = \boldsymbol{\mu}^*$ . Cela implique de refaire  $m$  calculs en parallèle.
2. Concaténer la matrice précédemment déterminée  $\bar{\mathbf{X}}$  à partir de l'équation 4.35 avec  $\bar{\mathbf{Q}}_u(\boldsymbol{\mu}^*)$  et effectuer une nouvelle SVD tronquée pour déterminer finalement une réduction enrichie base  $\bar{\mathbf{V}}^H$ . Aucun nouveau calcul EF n'est nécessaire.

La première solution devrait être effectuée en cas de fortes différences entre la prédiction H<sup>2</sup>ROM et les calculs EF. La deuxième option "seulement" coûte un calcul EF. Il est également possible de modifier la boucle d'optimisation pour inclure régulièrement la comparaison FEMU-H<sup>2</sup>ROM et enrichir incrémentalement  $\bar{\mathbf{V}}^H$ .

## 4.2.8 Discussion

### 4.2.8.1 Limitations de la procédure d'élagage de données

La présente partie se concentre sur les données issues de la DVC et non sur les images elles-mêmes. Elles sont connues pour être bien plus lourdes et peut-être plus problématiques que les

FIGURE 4.15 – Résultat de l'optimisation  $H^2$ ROMFIGURE 4.16 – Probability distribution of shear strain at the last pre-peak step in the whole domain  $\Omega$ , comparing FEM calculation and experimental data

données DVC. La procédure d'élagage considère qu'elles peuvent être supprimées. En fait, cela peut être problématique. Par exemple, un nouvel algorithme DVC pourrait améliorer la détermination du champ de déplacement (par exemple pour des problèmes complexes impliquant des fissures).

Les images peuvent également être élaguées, dans le sens où seuls les pixels des images à l'intérieur du DRE déterminé peuvent être conservés. Cependant, il est préconisé de ne stocker que les données DVC réduites lorsque le stockage de données est un problème.

Dans le cas de matériaux non homogènes, les données concernant l'inhomogénéité en dehors du DRE doivent également être sauvegardées.

#### 4.2.8.2 Etude a posteriori du DRE

Une étude a posteriori du DRE déterminé a été réalisée. La présente discussion se concentrera sur les distributions de déformation de cisaillement à l'intérieur du domaine entier  $\Omega$  et le DRE  $\Omega_R^{exp}$  pour l'exemple illustratif. Il serait préférable que la procédure d'élagage stocke dans le DRE le plus de configurations différentes. Les distributions de déformation de cisaillement dans le domaine entier et dans le DRE peuvent toutefois être différentes (pas la même valeur moyenne par exemple). Les Figures 4.17 (a) et 4.18 (a) présentent les distributions de déformation de cisaillement au premier et dernier pas pré-pic. Il semble que la distribution statistique de la déformation de cisaillement à l'intérieur du RED ne soit pas la même que celle à l'intérieur du domaine entier. Néanmoins, les zooms sur les deux histogrammes des Figures 4.17 (b) et 4.18 (b) révèlent que les valeurs extrêmes de la déformation de cisaillement sont conservées. On peut voir que le DRE contient presque tous les éléments où le cisaillement est maximal. Même si la procédure proposée est exempte de modèle, elle est intimement liée à la mécanique des solides : elle stocke de préférence les données qui sont mécaniquement plus pertinentes. Pour le phénomène de localisation des déformations, c'est la zone la plus cisailée. La méthode proposée n'est pas statistique : elle induit en fait un biais d'échantillonnage, qui est interprété par un modèle mécanique, ici la  $H^2$ ROM.

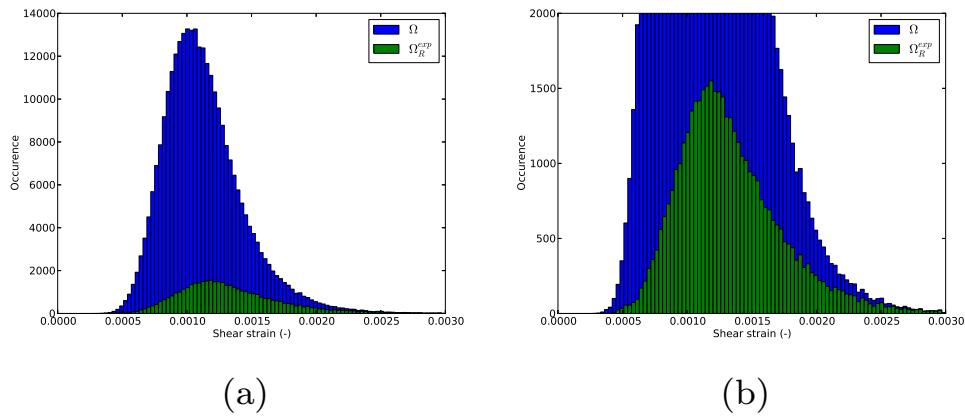


FIGURE 4.17 – Répartition des déformations de cisaillement dans tout le domaine et dans le DRE à la première étape

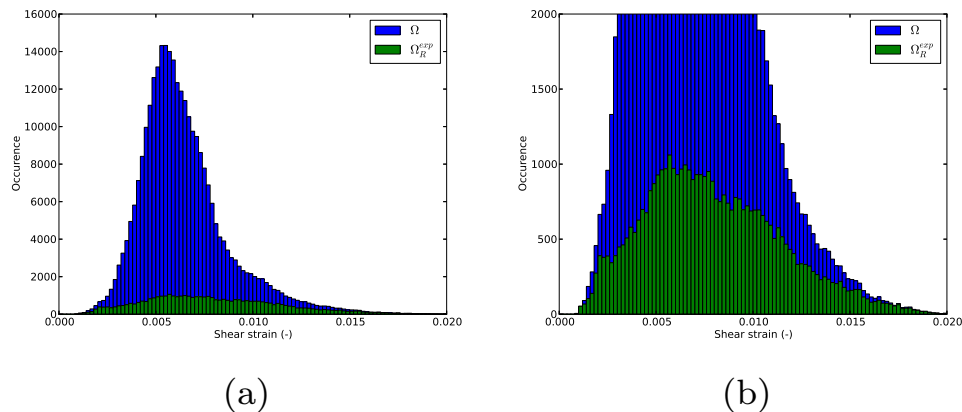


FIGURE 4.18 – Répartition des contraintes de cisaillement dans tout le domaine et dans le RED à la dernière étape pré-pic

### 4.3 Simulation de l'essai de push-out

#### 4.3.1 Rappels

L'essai de push-out a été effectué par Claire Menet durant sa thèse. Il a été présenté en Section 2.3.5.

On peut résumer l'essai par ses deux étapes clé :

1. Une éprouvette cylindrique d'un noyau non vieilli est placée dans un moule en acier. De l'aluminium est versé dans une des extrémités du moule. Plusieurs températures de coulée sont testées (690, 705, 720 et 735°C). La coulée de l'aluminium va induire une dégradation thermique de l'échantillon. Cette dégradation présente un gradient axial (dans l'épaisseur du cylindre) et longitudinal (le long de l'axe du cylindre, qui correspond aussi à la direction de la coulée). Lors du refroidissement de l'aluminium post-solidification, les noyaux sont comprimés et une réduction de la section des éprouvettes a été constatée.
2. Une fois les éprouvettes sciées pour former de nouvelles éprouvettes cylindriques mêlant noyau et aluminium, le push-out en lui-même est effectué. Il s'agit de pousser le noyau par sa face du haut via un piston pouvant appuyer sans frotter la matrice d'aluminium. Le bas de l'éprouvette est libre de circuler. On relève le déplacement de du piston (via un LVDT) et la force appliquée en haut de l'échantillon.

L'éprouvette testée, enserrée dans une matrice en aluminium, a une histoire thermique complexe. La coulée de l'aluminium dans le moule va induire deux gradients de températures vues par l'échantillon, un axial et un longitudinal. Cette disparité de dégradation thermique va induire un gradient de comportement mécanique complexe de l'échantillon lors de l'extraction.

La réduction de rayon constatée après coulée de l'éprouvette a aussi un impact crucial. Elle comprime les noyaux, induisant potentiellement des déformations plastiques de confinement et un durcissement. Elle assure aussi une plus grande cohésion aluminium/noyau.

L'essai de push-out en lui-même met en jeu un chargement mécanique sur un matériau graduel-

lement vieilli dans son épaisseur et dans sa longueur. Contrairement à l'essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X précédent, l'échantillon testé n'est pas non vieilli. Claire Menet estime que le vieillissement est supérieur à 300 °C en surface et aux alentours de 220 °C à coeur.

La sollicitation mécanique met aussi en jeu la problématique de délaminage à l'interface aluminium/noyau, qui n'a pas été abordée dans la modélisation jusqu'à présent.

### 4.3.2 Objectifs de l'étude numérique

Comme présenté précédemment, l'essai de push-out est d'une très grande richesse. La modélisation et la simulation du test a plusieurs objectifs :

- Tester la robustesse du modèle sur un cas avec un gradient de température de vieillissement  $\theta$ . Cela permet notamment de tester les calibrations du modèle C-CASM précédemment effectuée. Aucune calibration du modèle n'a été faite en plus pour simuler le push-out.
- Modéliser le plus simplement et de manière pragmatique l'interface aluminium/noyau
- Expliquer la forme de cloche qu'a l'échantillon extrait en fin d'essai (voir Figure 2.31).

Cependant, certains aspects du problème ont délibérément été laissés de côté et ne font pas partie des enjeux de l'étude. La plupart concerne le chargement thermique de l'éprouvette de noyau :

- Le chargement thermique *réel* n'a pas été simulé. Seule la température de coulée à l'entrée du moule en acier est mesurée. Aucune information n'a été relevée concernant la température vue en peau ou à coeur de l'échantillon au cours de l'essai. Il semble difficile, à première vue, d'estimer cette température vue par le noyau. Les pertes thermiques lors de la coulée (réchauffement du moule, temps de trajet de la coulée, ...) ainsi que les coefficients d'échange entre l'aluminium et le noyau ne sont pas connus. La simulation complète de la coulée nécessiterait en outre une simulation multiphysique et compliquerait donc l'étude de manière draconienne.
- pour les mêmes raisons, la magnitude du retrait thermique n'a pas été simulée, c'est-à-dire que la réduction de section expérimentale a été imposée comme condition aux limites des calculs.

La simulation de l'essai complet est aussi l'occasion de mettre au point une **chaîne de calculs** :

1. Estimation simplifiée de l'histoire thermique dans l'échantillon après coulée
2. Détermination des paramètres matériaux du modèle C-CASM en fonction de la distribution de températures de vieillissement  $\theta(\mathbf{x})$  précédemment déterminée
3. Simulation du retrait thermique
4. Simulation du push-out c'est-à-dire de l'extraction

Ici, on ne s'intéresse pas au modèle MC-CASM. Ce dernier n'a été mis au point uniquement pour l'étude du matériau non vieilli dont le comportement en compression a été étudié en tomographie. Il n'a pas été calibré pour des températures de vieillissement supérieures.



### 4.3.3 Géométrie et maillage

On utilisera une géométrie 2D axisymétrique, permettant de gagner sensiblement en temps de calcul. L'éprouvette du noyau fait 15 mm de rayon pour 45mm de hauteur. La taille d'un élément est de 0.5mm. On a rajouté une couche d'éléments d'aluminium autour du noyau.

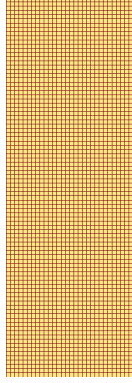


FIGURE 4.19 – Maillage utilisé

On impose une condition de symétrie sur les noeuds à gauche ( $u_1 = 0$ ). Le comportement de l'aluminium est supposé linéaire élastique et isotrope.

### 4.3.4 Éléments cohésifs d'interface

L'un des enjeux de la simulation du push-out concerne la modélisation de l'interface entre le noyau et l'aluminium. Des éléments dits *cohésifs* ont été utilisés afin de modéliser l'interface aluminium/noyau. Ce sont des éléments 1D. Ils ont été développés afin de traiter des problèmes d'interface comme des délaminages. Ils sont donc tout à fait adaptés à ce problème.

Le comportement mécanique des éléments cohésifs de type Tvergaard est le suivant :

On considère la grandeur scalaire  $\lambda$  qui caractérise l'ouverture de la fissure. Cette grandeur se calcule par :

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{\langle u_N \rangle}{\delta_N}\right)^2 + \left(\frac{\|\mathbf{u}_T\|}{\delta_T}\right)^2} \quad (4.47)$$

où, si on considère la normale à l'interface  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{u}_N = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = u_N \mathbf{n}$  et  $\mathbf{u}_T = \mathbf{u} - \mathbf{u}_N$  sont respectivement les composantes normales et tangentielles du déplacement.  $\delta_N$  et  $\delta_T$  correspondent aux valeurs maximales admissibles pour ces normes. De plus  $\langle u_N \rangle = u_N$  pour  $u_N > 0$ , 0 sinon.

La variable d'endommagement  $\lambda_{max}$ , qui est la valeur maximum que  $\lambda$  a atteint jusqu'à l'instant présent, varie de 0 (aucun endommagement) à 1 (élément cassé). Les composantes normales et tangentielles de la traction de cohésion  $\mathbf{T}$  sont définies par :

$$T_N = \frac{u_N}{\delta_N} F(\lambda_{max}), \quad \mathbf{T}_T = \alpha \frac{\mathbf{u}_T}{\delta_T} F(\lambda_{max}), \quad F(\lambda) = \frac{27}{4} \sigma_{max} (1 - \lambda)^2 \quad (4.48)$$

où  $\alpha$  est le rapport entre l'amplitude des efforts tangentiels sur les efforts normaux,  $\sigma_{max}$  est la contrainte maximum admissible.

En cas de compression,  $u_N < 0$ ,  $T_N$  est déterminée autrement :

$$T_N = \alpha_c \frac{u_N}{\delta_N} F(0) \quad (4.49)$$

où  $\alpha_c$  est un facteur de pénalisation que la littérature conseille de prendre supérieur à  $10\alpha$ .

**Bilan :** les paramètres des éléments cohésifs sont donc :

- $\sigma_{max}$
- $\delta_N$
- $\delta_T$
- $\alpha$
- $\alpha_c$

On fixe ces grandeurs en fonction des paramètres matériaux :

- $\sigma_{max}$  correspond à la contrainte maximum pour un matériaux vieilli entre 250/300°C : 5 MPa
- $\delta_T$  est fixé à 1 mm : expérimentalement, c'est la distance limite où l'on commence à voir la décohésion
- $\delta_N$  est fixé à 1 mm : pris identique à  $\delta_T$
- $\alpha = 1/M$ . En effet,  $M$  peut aussi être lié à l'angle de friction du sable, et donc à un rapport entre les efforts normaux et les efforts tangents
- $\alpha_c = 1000/M$

### 4.3.5 Calcul thermique

#### 4.3.5.1 Objectif

Comme précisé précédemment, l'objectif n'est pas de mener une étude multiphysique précise de la coulée afin d'obtenir un champ de température de vieillissement précis  $\theta^{rel}(\mathbf{x})$ .

L'objectif est de déterminer un champ approché noté  $\theta(\mathbf{x})$ . Ce champ s'appuie grandement sur les constatations expérimentales de Claire Menet. Un lien peut être fait entre la couleur d'un échantillon et son état de vieillissement thermique.

Le gradient thermique longitudinal n'a pas été considéré dans l'étude. Seul le latéral a été modélisé.

#### 4.3.5.2 Estimation de la dégradation thermique

L'estimation du gradient latéral de dégradation a été effectué grâce à un calcul thermique dit unitaire. On considère un chargement thermique  $T^u(\mathbf{x}, t)$  au niveau de l'aluminium. On calcule alors la diffusion du champ unitaire dans le noyau. Il est à noter que cette simulation ne tient pas compte du gradient de température axial mais permet seulement d'appréhender le gradient de température radial.

Les paramètres matériaux pour le noyaux sont ceux déterminés par Claire Menet durant sa thèse.

Il a été établi qu'ils ne dépendent notamment pas de la température :

- Conductivité thermique isotrope  $\lambda = 0.65$  W/m/K
- Capacité thermique massique  $c_p = 0.75$  kJ/kg/K

— Densité volumique  $\rho = 1.6 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$

L'évolution temporelle de ce champ thermique dans l'aluminium est présenté en Figure 4.2. Il s'agit d'un pic unitaire de 0 à 1 en 60 ms suivi d'un lent refroidissement de 300 s. Ces intervalles de temps sont des données d'entrée de Montupet : on peut considérer la coulée comme un choc thermique d'environ 60 ms. Le refroidissement des éprouvettes clarinette est de 5 minutes. Compte tenu de la simplicité de la modélisation du comportement thermique du noyau en sable, considérer un pic entre 0 et 1°C ou entre 0 et 600 °C donnera le même résultat à une constante multiplicative près. L'idée est donc de considérer un chargement unitaire afin d'étudier en premier lieu la répartition du champ de température plutôt que sa valeur car l'amplitude du pic n'est pas connue.

La seule valeur expérimentale de température qui a été obtenue est celle de la température de vieillissement à cœur. En effet, Claire Menet a estimé que la couleur de l'échantillon change en fonction de sa température de vieillissement. Il est alors possible d'établir une relation entre la couleur et la température de vieillissement pour des températures inférieures à 350°C (au delà, l'échantillon est complètement noirci). Ainsi, si la température de vieillissement vue à l'interface est difficilement lisible car l'échantillon est noir, celle à cœur est de l'ordre de 200-220°C. Pour les 2 mm de périphérie de l'échantillon, la température de vieillissement dépasse 300°C. Pour déterminer le champ de température de vieillissement après coulée, on multipliera donc le champ unitaire par le coefficient faisant que la température à cœur est de l'ordre de 200-220°C. Le processus de dégradation de la résine étant irréversible, il faut considérer à chaque position  $x$  du noyau le maximum de température subi. C'est bien cette grandeur qui va conditionner l'état de dégradation du liant et non, par exemple, la température finale. Cette grandeur se détermine facilement en post-traitement.

Le résultat de ce post-traitement permet de dégager l'évolution de la température maximale vue dans l'épaisseur de l'échantillon  $T_{max}^u$ . Celle-ci ne dépend que de la distance à l'axe de symétrie de l'échantillon ( $x$ ) et pas de la hauteur dans le noyau ( $y$ ). Ce gradient uniforme dans la hauteur est tracé en Figure 4.20 a.  $x = 0 \text{ mm}$  correspond au cœur de l'échantillon tandis que l'interface noyau/aluminium se trouve à  $x = 15 \text{ mm}$ . Naturellement, à l'extrémité on retrouve  $T_{max}^u = 1$ . Au niveau de l'axe de symétrie de l'éprouvette, la température unitaire maximale est environ à 0.55.

$t \text{ (s)}$	0.	60.e-3	300.
$T^u$	0.	1.	0.

TABLE 4.2 – Chargement thermique dans l'aluminium

L'accès à  $T^u$  permet d'estimer finalement le champ de vieillissement  $\theta$  (Figure 4.20 (b)). On retrouve bien que les 2 mm de périphérie ont vu une température de vieillissement supérieure à 300°C.

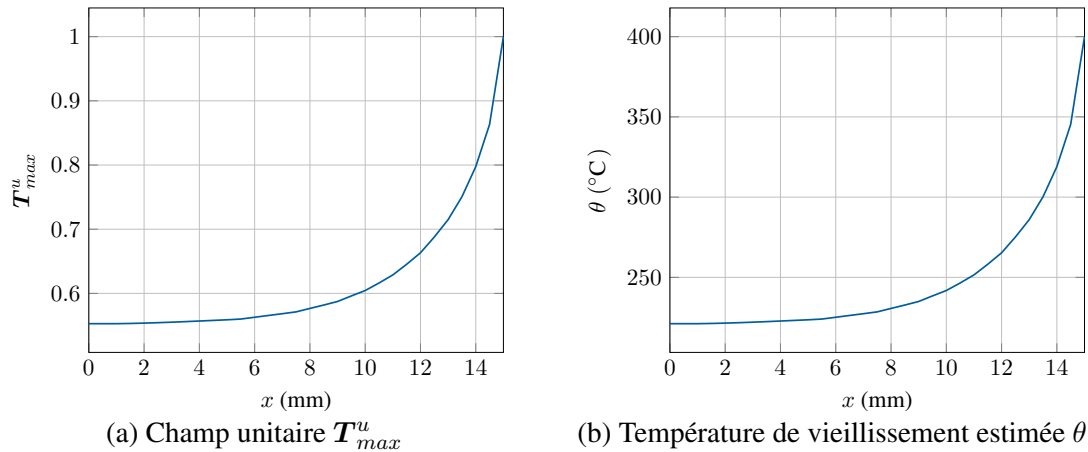


FIGURE 4.20 – Evolution de la température de vieillissement vue à cœur

### 4.3.6 Calcul mécanique

#### 4.3.6.1 Valeur initiale des paramètres

Grâce à l'étude thermique précédente, on a accès à la température de vieillissement  $\theta$  en fin de coulée. On peut alors définir pour le noyau les différents paramètres du C-CASM qui sont les paramètres de la fonction de seuil, d'écoulement mais aussi le module d'Young. Comme précisé précédemment, on postule une interpolation linéaire des différents coefficients du modèle pour les températures situées entre les différentes températures de calibration (200, 250 et 300°C). Pour  $\theta > 300^\circ\text{C}$ , on utilise simplement la loi de comportement C-CASM pour  $\theta = 300^\circ\text{C}$ .

#### 4.3.6.2 Compression thermique initiale

La première étape du calcul consiste à calculer la compression thermique initiale due à la dilatation de l'aluminium. On impose un déplacement uniforme de la couche d'aluminium de  $u_{th} = 0.1\text{mm}$  correspondant à la valeur relevée lors des essais. Pour les modèles à Etat Critique avec une forme de surface de charge de type Hvorslev, l'impact de la précontrainte thermique de confinement est double :

- Comme évoqué lors de l'étude du modèle de Cam-clay Modifié (Section 2.4.7.6), l'ajout d'une précontrainte de confinement peut changer la zone du seuil atteinte, c'est-à-dire la zone sèche (faible confinement, adoucissement) ou la zone humide (haut confinement, durcissement). Ainsi ce confinement avant le chargement peut altérer le comportement du sol et le rendre durcissant par exemple.
- La forme de la surface de charge est telle que des plus grandes contraintes sont tolérée avant d'atteindre le seuil.

Ces deux effets sont illustrés dans la Figure 4.21. On considère un chargement  $(p_0, q_0)$  qui atteint la surface de charge sans précontrainte thermique. Ce chargement correspond à la flèche bleue. Le seuil est atteint dans la zone sèche (en vert) : il va donc avoir adoucissement. En revanche, si on ajoute un confinement  $(p_{th}, q_{th})$  (flèche rouge) et qu'on applique à nouveau

ce même changement jusqu'à atteindre le point  $(p_1, q_1)$ . On constate alors deux choses :

- On est toujours sous le seuil, le comportement est donc toujours élastique linéaire. Mais même si on augmentait le chargement, on atteindrait la surface de charge dans la zone humide (en violet), donc il y aurait durcissement
- On remarque que  $p_1 > p_0$  et  $q_1 > q_0$ . Du fait de la forme de la surface de charge, les chargements avec haut confinement peuvent être plus élevés. Ce phénomène ne se retrouve pas dans le modèle de Cam-clay Modifié par exemple, vu la forme elliptique du seuil (voir à nouveau les Figures 2.39 et 2.40).

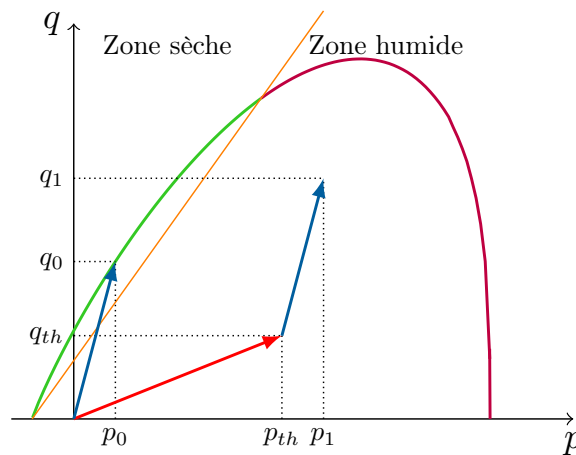


FIGURE 4.21 – Effet d'une précontrainte de confinement

Le calcul mécanique du refroidissement est résumé en Figure 4.22. La première constatation est que tout le noyau a plastifié (l'endommagement est non nul par exemple) et la pression de préconsolidation est supérieure à sa valeur initiale, 2.797 MPa quelque soit le vieillissement. Le gradient de propriétés mécaniques a entraîné un gradient d'endommagement, mais aussi de pression de préconsolidation. Le bord de l'échantillon a beaucoup plus plastifié que le coeur, du fait de sa plus faible résistance mécanique. La pression de préconsolidation,  $p_c$ , a donc augmenté plus significativement, mais aussi l'endommagement.

Il est à noter que  $D$  et  $b$  dépendent de la même mesure de déformation plastique  $h$ . Ainsi  $b$  présente le même gradient d'endommagement que  $D$ . Cela signifie en outre qu'il y a eu une plus grande décohérence en surface.

Cette précontrainte de refroidissement met donc en évidence la compétition entre l'augmentation de résistance mécanique due au caractère frictionnel du matériau ( $p_c$  qui augmente à cause du confinement) et la perte de résistance mécanique due au caractère cohésif du matériau ( $b$  qui diminue lors du chargement plastique). L'une des grandeurs permettant de juger cette compétition est la pression de résistance à la traction,  $p_t = \alpha b p_c$ . Si on trace l'évolution de  $p_t$  dans l'échantillon en début et en fin de refroidissement (Figure 4.23), on constate que cette grandeur s'est conservée malgré la chute de  $b$  et l'augmentation de  $p_c$ .

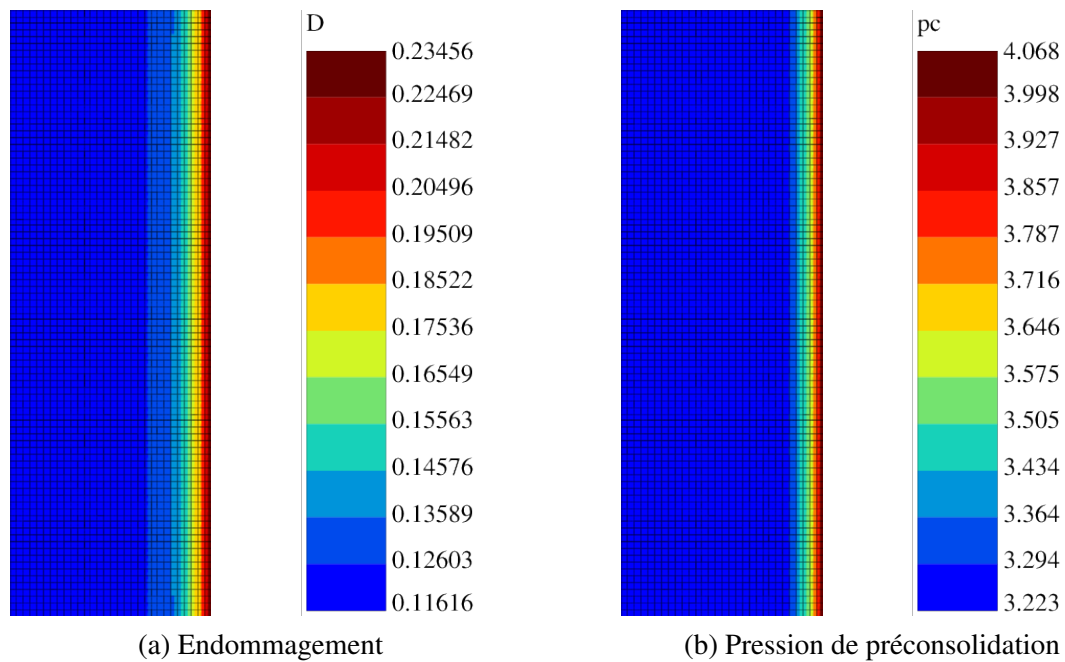


FIGURE 4.22 – Endommagement et pression de préconsolidation en fin de refroidissement

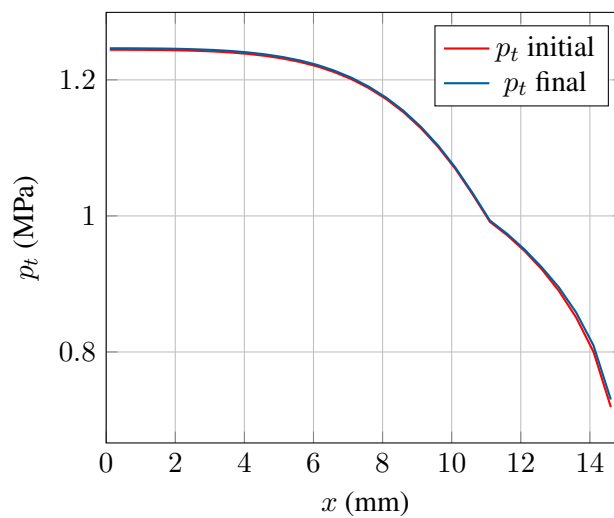


FIGURE 4.23 – Evolution de la pression de la résistance à la traction après la précontrainte thermique

#### 4.3.6.3 Push-out en lui-même

La suite de la chaîne de calculs de simulation de l'essai consiste à présent à s'intéresser au push-out en lui-même c'est-à-dire l'extraction du noyau vieilli. Un impose un déplacement sur

la face du haut. La face du bas reste libre. Du fait de la cohésion à l'interface sable/alu, le champ de déplacement est immédiatement inhomogène et prend une forme de sablier, avec la partie du haut très nettement sollicitée. L'évolution de  $u_2$  est présentée en Figure 4.24.

L'endommagement présente aussi une distribution complexe (voir Figure 4.25). Le gradient latéral d'endommagement va progressivement laisser place à une distribution où la moitié haute de l'éprouvette est nettement plus endommagée. Des bifurcations apparaissent en cours de chargement et vont se succéder. Leur angle diffère au cours du chargement. La rupture finale arrive par le bas de l'éprouvette où la bande de localisation finale se développe (à  $u_2 = u_2^f$ ). Celle-ci apparaît du fait de la cohésion en bas de l'éprouvette qui retient le coin inférieur droit de l'échantillon. Il y a localement l'apparition d'une zone cisailée qui va initier la bande de rupture. Il est à noter que cette bande survient relativement tard durant l'essai. Dans un premier temps, la déformation va se concentrer sur le haut de l'éprouvette, le bas est alors comparativement peu sollicité. La zone du bas devient sollicitée quand à mesure que le glissement s'effectue le long de l'interface aluminium/noyau.

En postulant une rupture par concentration de la déformation ou de l'endommagement, ce premier calcul permet de retrouver le début de la forme de la "cloche" de l'éprouvette extraite expérimentale. De plus, comme dans l'expérience, la partie supérieure de l'échantillon est nettement plus endommagée.

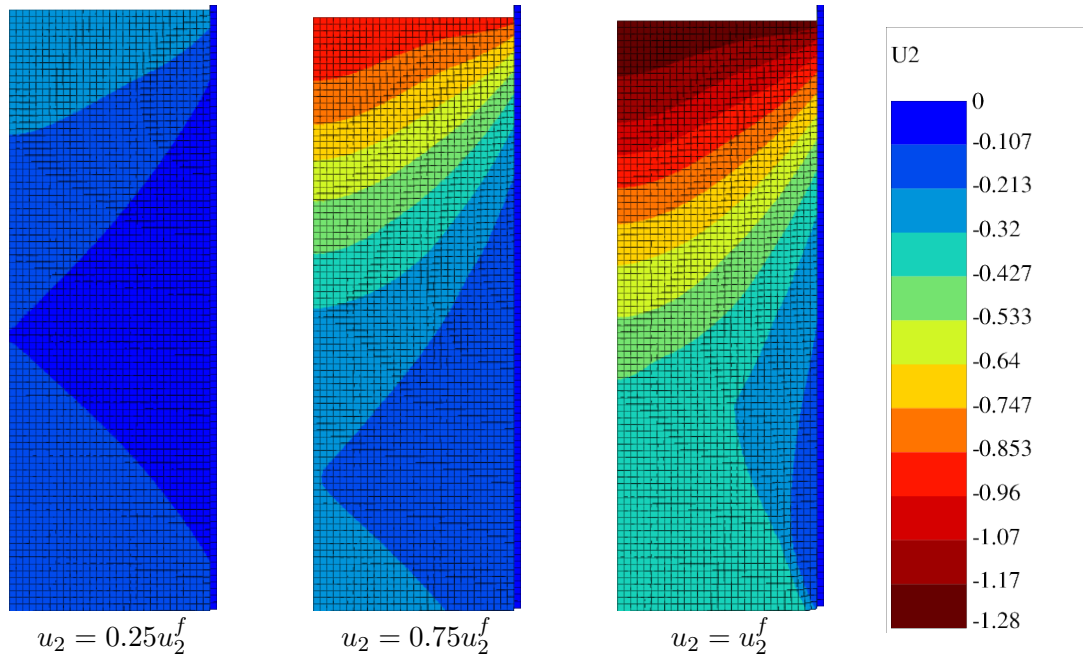
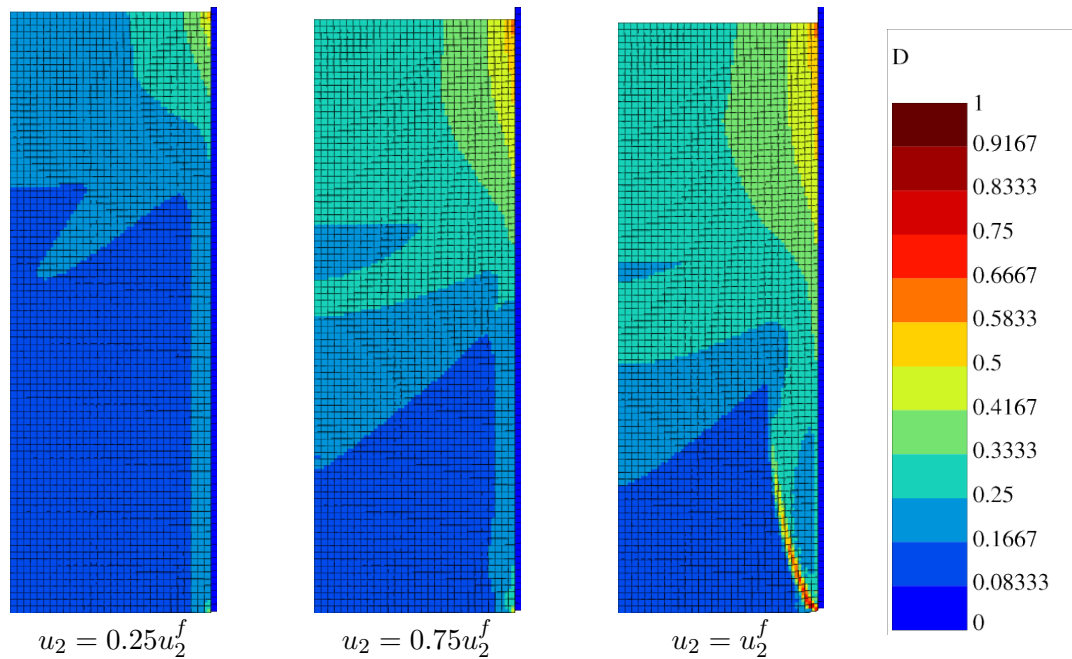


FIGURE 4.24 – Evolution de  $u_2$  au cours du temps

Les courbes macroscopiques, qui évaluent la contrainte en haut d'éprouvette avec la donnée des efforts axiaux, sont présentées en Figures 4.26 et 4.27. L'ordre de grandeur de 16 MPa pour la contrainte maximum obtenue correspond à ce qui est observé expérimentalement. Ceci est d'autant plus satisfaisant que les paramètres matériaux choisis pour la simulation du push-out

FIGURE 4.25 – Évolution de  $D$  au cours du temps

n'ont pas été calibrés à partir des constatations expérimentales du push-out mais bien par la calibration du modèle qui ne s'est intéressée qu'aux résultats de compression uniaxiale, flexion 4 pts et die pressing. La prédiction de la forme en cloche du noyau final est aussi un élément de satisfaction. De ce point de vue, cette simulation permet d'apporter des éléments de validation du modèle.

Lorsqu'on se focalise sur la seconde partie de la courbe macroscopique, on observe des petites décharges/recharges (Figure 4.27). Ces fluctuations peuvent s'expliquer par l'apparition et la disparition de bifurcations locales, ou des succession de "collé/glissé" au niveau de l'interface (phénomène de *stick slip*). Expérimentalement, on observe bien de légères fluctuations pré-pic (revoir la Figure 2.32). Elles sont cependant largement moins nombreuses.

#### 4.3.7 Sensibilité au maillage

Un calcul de sensibilité au maillage a été effectué. Le calcul est effectué sur 3 maillages de taille de maille de 1, 0.5 et 0.25 mm. Pour rappel, les calculs précédents s'effectuaient sur maillage à taille de maille de 0.5 mm. Les différentes contraintes  $\sigma_c$  calculées pour les trois tailles de maille sont présentées dans la Figure 4.28.

On constate une dépendance au maillage qui n'est pas surprenante du fait de la localisation des déformations sans longueur interne dans le modèle. La contrainte maximum calculée n'est pas extrêmement changée par la taille de maille. En revanche, l'aire sous la courbe est différente. Plus le maillage est fin, plus la localisation semble arriver tôt dans la simulation, causant une précocité de l'adoucissement macroscopique (et donc une aire plus petite et la fin du calcul qui



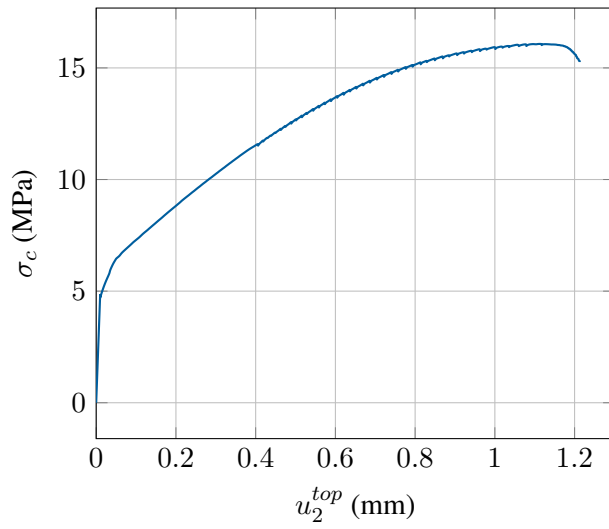
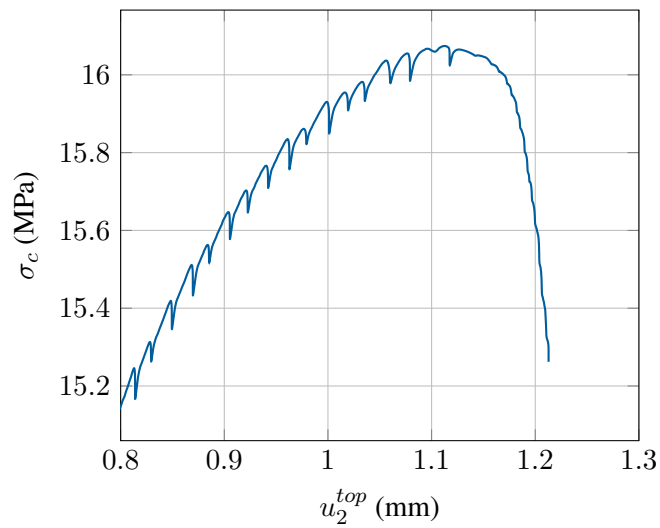
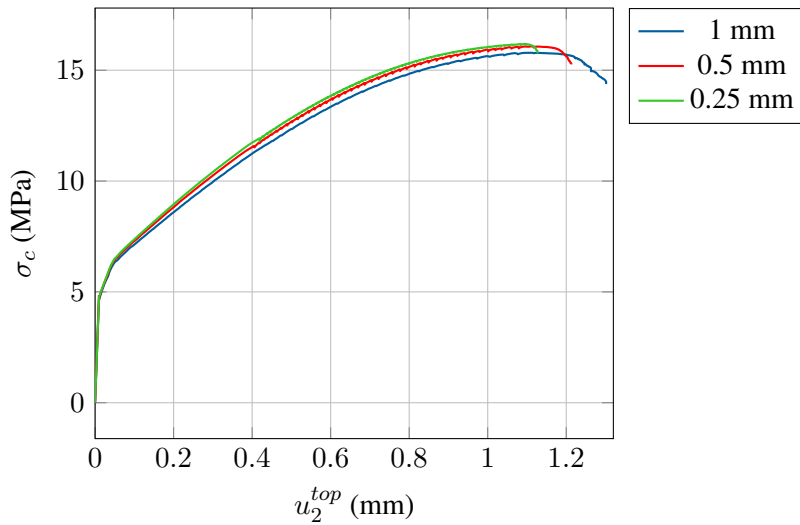
FIGURE 4.26 – Evolution de  $\sigma_c = F_2/S_0$  au cours du temps

FIGURE 4.27 – Faibles décharges observées dans la courbe macroscopique

finir par diverger). Si l'on zoome à nouveau sur la fin du calcul, on constate que le nombre de charge/décharge observés semble dépendre du maillage. Un maillage deux fois plus fin voit deux fois plus de cycles de charge/décharge. Il n'y a pour l'instant pas d'explications concernant l'impact de la taille de maille sur la fréquence des décharges/recharges.

FIGURE 4.28 –  $\sigma_c = F_2/S_0$  obtenu en fonction de la taille de maille

### 4.3.8 Discussion

L'étude de l'essai de push-out s'est montrée riche et a permis d'étudier la pertinence du modèle à correctement prédire le comportement d'un matériau à gradient de température de vieillissement. L'estimation de l'état de dégradation  $\theta(\mathbf{x})$  s'est largement appuyée sur les observations expérimentales de Claire Menet et a été simplifiée. Il a été préféré une approche plus pragmatique de la modélisation de ce problème afin de plutôt se concentrer sur la partie purement mécanique du problème.

La précontrainte thermique de refroidissement a eu un impact de premier plan sur le comportement mécanique du noyau lors du push-out. Le gradient de propriétés mécaniques ( $p_c$ ,  $b$  et  $D$  notamment) s'est montré non négligeable. Une réduction de diamètre de 0.2 mm sur un échantillon de 30mm de diamètre peut sembler négligeable, mais pour un matériau tolérant peu de déformation, ce déplacement est très important.

Cette pré-contrainte montre aussi la concurrence entre l'augmentation de  $p_c$  due au confinement et la diminution de  $b$  due à l'endommagement plastique. Assez étonnamment, la résistance à la traction  $p_t = \alpha b p_c$  se maintient.

L'amplitude de la réaction en haut de l'échantillon est aussi satisfaisante. On constate qu'elle demeure un peu supérieure à celle de la réaction expérimentale. Deux améliorations sont possibles :

- Mener une étude expérimentale pour des noyaux ayant subi une température de vieillissement supérieure à 300°C et en déduire une calibration du C-CASM pour  $\theta > 300^\circ\text{C}$ . Ainsi la modélisation du gradient de propriétés mécaniques pourrait être affinée dans la zone où l'on avait considéré, faute de mieux, la loi de comportement à  $\theta = 300^\circ\text{C}$  alors que l'expérience et la simulation montraient une température de vieillissement supérieure. Cette remarque est cependant à nuancer. Les échantillons très dégradés sont nettement plus difficile à caractériser mécaniquement pour les essais standards consi-

dérés (notamment la flexion 4 points et la compression uniaxiale). La résine est très dégradée et la cohésion quasiment nulle, rendant les échantillons extrêmement friables et difficiles à déplacer sans les abimer. Néanmoins, considérer le matériau très dégradé thermiquement à l'interface devrait diminuer la résistance mécanique à l'extraction.

- Optimiser les paramètres de la zone cohésive. Le jeu de paramètres utilisés a été estimé assez simplement à partir d'ordres de grandeurs expérimentaux. Cette opération n'a pas été menée car l'étude numérique du push-out n'avait pas pour but premier d'optimiser la zone cohésive mais bien de tester le modèle et d'affiner la compréhension de l'essai.

De plus, l'analyse de la courbe macroscopique a pu être affinée. Les petites fluctuations observées expérimentalement et numériquement ont pu être expliquées en partie grâce à la simulation. Elles seraient dues à de multiples bifurcations pré-pic et aussi à des décohésions partielles, mais pré-pic. Cependant, si ce phénomène est appréhendé par le calcul, il n'est sans doute pas correctement modélisé. Les cycles de collé/glissé sont notamment trop nombreux et dépendants du maillage. Pour conclure plus finement sur ces décohésions partielles, il faut sans doute régulariser le modèle afin de le rendre indépendant de la discrétisation choisie, ainsi qu'améliorer la calibration des éléments cohésifs. Toutefois, mener de tels développements pour correctement simuler ce phénomène serait aller au-delà des objectifs de l'étude numérique. C'est pourquoi ces pistes n'ont pas été investiguées.

## Chapitre 5

# Déboufrage numérique de la culasse

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Le cycle de vie du noyau . . . . .</b>	<b>133</b>
5.1.1	Variables d'ajustement . . . . .	133
5.1.2	Chaîne de calculs de déboufrage . . . . .	134
5.1.3	Panoplie des noyaux et zones d'intérêt . . . . .	134
<b>5.2</b>	<b>Etude de la précontrainte thermique . . . . .</b>	<b>135</b>
5.2.1	Instrumentation d'un noyau sur une ligne industrielle . . . . .	135
5.2.2	Calcul thermique . . . . .	137
5.2.2.1	Méthode . . . . .	137
5.2.2.2	Résultat . . . . .	138
5.2.3	Calcul mécanique . . . . .	139
5.2.3.1	Méthode . . . . .	139
5.2.3.2	Résultat . . . . .	139
5.2.4	Discussion . . . . .	141
<b>5.3</b>	<b>Modélisation du bridage . . . . .</b>	<b>142</b>
5.3.1	Eléments ressorts . . . . .	142
5.3.2	Bridages considérés . . . . .	142
<b>5.4</b>	<b>Etude modale de la culasse . . . . .</b>	<b>142</b>
5.4.1	Approximation en base réduite . . . . .	142
5.4.2	Méthode . . . . .	144
5.4.2.1	Détermination des modes . . . . .	145
5.4.2.2	Normalisation des modes . . . . .	145
5.4.2.3	Chargement mécanique considéré . . . . .	145
5.4.2.4	Méthode de <i>remove element</i> . . . . .	146
5.4.3	Résultats . . . . .	147
5.4.3.1	Déformées de la pièce métallique . . . . .	147
5.4.3.2	Bridage strict . . . . .	147
5.4.3.3	Bridage lâche . . . . .	149
5.4.4	Discussion . . . . .	152

5.4.4.1	Bridage strict . . . . .	152
5.4.4.2	Bridage lâche . . . . .	152
<b>5.5</b>	<b>Etude dynamique de la culasse . . . . .</b>	<b>153</b>
5.5.1	Modélisation pragmatique du martelage . . . . .	153
5.5.2	Méthode . . . . .	154
5.5.3	Résultats . . . . .	155
5.5.3.1	Déformées de la pièce métallique . . . . .	155
5.5.3.2	Débourrabilité en fonction des bridages . . . . .	156
5.5.4	Discussion . . . . .	158
<b>5.6</b>	<b>Discussion et perspectives . . . . .</b>	<b>158</b>
5.6.1	Concernant le zoom structural . . . . .	158
5.6.2	La transmission des efforts . . . . .	160
5.6.3	Saturation de l'endommagement . . . . .	161
5.6.4	Variabilité des conditions aux limites . . . . .	162
5.6.4.1	Motivation et formalisme . . . . .	162
5.6.4.2	Modélisation continue . . . . .	163
5.6.4.3	Modélisation discrète . . . . .	163

---

## 5.1 Le cycle de vie du noyau

Dans ce présent chapitre, on va s'intéresser plus précisément à la modélisation du processus de déburrage. Ces développements vont capitaliser les divers résultats précédemment présentés.

### 5.1.1 Variables d'ajustement

Comme précisé en introduction du mémoire, l'étape de déburrage est la conclusion de toute une chaîne d'étapes du cycle de vie du noyau. Chacune de ces étapes comporte des choix et donc des variables d'ajustement possiblement envisageables afin d'améliorer la déburrabilité de la pièce de fonderie. En d'autres termes, améliorer le déburrage ne consiste pas seulement à améliorer les positions des marteaux par exemple, mais tout le cycle de vie du noyau.

Pour rappel le cycle de vie des noyaux peut se décomposer en 5 étapes clés :

1. Noyautage
2. Coulée
3. Refroidissement
4. Déburrage
5. Recyclage

On peut faire un inventaire (non exhaustif) des différents choix possibles lors de chacune de ces étapes. Elles peuvent autant concerner le sable, le liant ou des paramètres du martelage :

1. Noyautage :
  - Choix du sable impactant les paramètres frictionnels du modèle dont notamment  $p_c$  et  $M$
  - Choix du liant impactant les paramètres cohésifs du modèle ( $b$  et  $\alpha$ ) ainsi que les paramètres dits de "zone" ( $r$  et  $n$ ). Le taux de liant est aussi une variable cruciale
  - Porosité initiale du noyau ( $v_0$ ) impactant notamment l'évolution de  $p_c$
  - Homogénéité des noyaux
2. Coulée :
  - Sensibilité du liant (et donc du noyau) à la dégradation thermique. Il faut notamment une chute des propriétés mécaniques des noyaux après coulées afin de faciliter le déburrage
  - Irréversibilité ou non de la dégradation thermique du liant. Les noyaux à résine inorganiques, ou silicates, sont notamment connus pour une reprise en humidité permettant une *rerigidification* partielle des noyaux après coulée
3. Refroidissement :
  - Importance de la dilatation thermique des noyaux  $\alpha_{noyau}$  lors du refroidissement
4. Déburrage :
  - Appuis dans la déburreuse
  - Position des marteaux
  - Nombre de marteaux
  - Synchronicité des marteaux

- Force du martelage
- Durée du martelage
- Forme de la masselotte
- Forme des bouterolles des marteaux
- ...

5. Recyclage :

- Modification de la forme des grains
- Pourcentage de sable régénéré dans le mélange

L'objectif de cette étude est de notamment déterminer les paramètres les plus influents pour le débouillage à travers l'étude numérique.

### 5.1.2 Chaîne de calculs de débouillage

Dans le même esprit que pour l'étude de l'essai de push-out, la modélisation du débouillage fait aussi intervenir la notion de chaîne de calcul. Chaque maillon de la chaîne permettra d'évaluer l'évolution du noyau de fonderie :

1. **Noyautage** : Mise au point du noyau non vieilli. Celui-ci a été étudié expérimentalement par Claire Menet et modélisé dans le Chapitre 3 avec l'adaptation du C-CASM. Dans ces développements, on ne se focalisera que sur le C-CASM et non le MC-CASM.
2. **Coulée** : Détermination du champ de température perçu dans les noyaux internes pour en déduire le vieillissement thermique et donc la loi de comportement à utiliser.
3. **Refroidissement** : Détermination de l'état de contrainte et de plasticité du noyau lors de la contraction thermique de la culasse
4. **Débouillage** : Estimation de la déformation du noyau après martelage pour un bridage de culasse dans la débouilleuse donnée

Chaque maillon est pensé comme étant modulable. Par exemple, en cas de changement de type de noyau (nouvelle résine, nouveau sable,...), il suffit donc de changer le maillon concernant le noyautage, mais le reste de la procédure devrait être inchangé.

### 5.1.3 Panoplie des noyaux et zones d'intérêt

On appelle panoplie l'ensemble des noyaux assemblés afin de réaliser la culasse. Ces sous-types de noyaux sont :

- Les noyaux d'eau (inférieurs et supérieurs) servant pour les circuits de refroidissement
- Les noyaux de pipe (d'admission et d'échappement) servant pour les circuits d'admission et d'échappement de gaz
- Les noyaux de toit, servant à mouler la partie supérieure de la culasse

Cette panoplie est représentée en Figure 5.1.

La problématique de débouillage concerne surtout les noyaux d'eau, qui, en pratique, sont les noyaux les plus difficiles à éliminer. A l'inverse, les noyaux de toit, qui sont extérieurs, ne posent aucun problème d'évacuation. On considère donc que la zone d'intérêt de la panoplie de noyau est l'ensemble des noyaux d'eau.

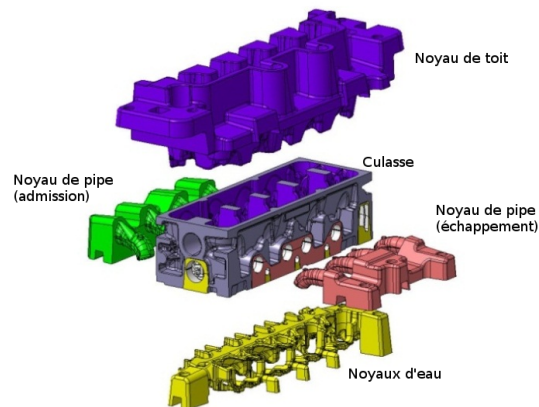


FIGURE 5.1 – Panoplie de noyaux de culasse

Au lieu de considérer la totalité des noyaux internes, la démarche s’est concentrée sur un zooms structural afin de réduire le temps de calcul. La zone considérée est le noyau transverse d’allègement (Figure 5.2 en bleu).

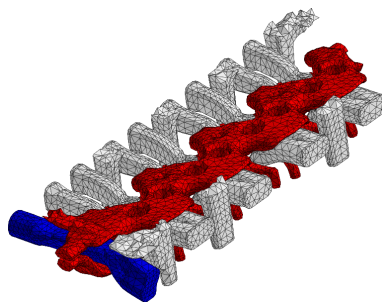


FIGURE 5.2 – Zoom structural au niveau des noyaux internes

## 5.2 Etude de la précontrainte thermique

### 5.2.1 Instrumentation d’un noyau sur une ligne industrielle

L’étude de la précontrainte thermique s’est effectuée en deux temps, en décorrélant la thermique et la mécanique. Un premier calcul thermique est effectué afin de déterminer la température de vieillissement vue par les noyaux internes.

Les conditions de chargement thermiques sont issues d’une étude préalablement effectuée par Montupet. L’aluminium est versé à une température d’environ 700°C. Contrairement à l’essai de push-out, les noyaux ont été instrumentés en conditions réelles, c’est-à-dire sur une ligne industrielle. Les noyaux internes étudiés sont visibles en Figure 5.3.

3 thermocouples ont été utilisés ; ils ont été placés :



- Dans un noyau d'eau inférieur (Figure 5.4 (a))
- Dans un noyau d'eau supérieur (Figure 5.4 (b))
- Dans un noyau de toit (qui ne sera pas exploité dans cette étude)

Pour les noyaux d'eau, les thermocouples sont placés à environ 0.5mm de l'interface noyau/aluminium.

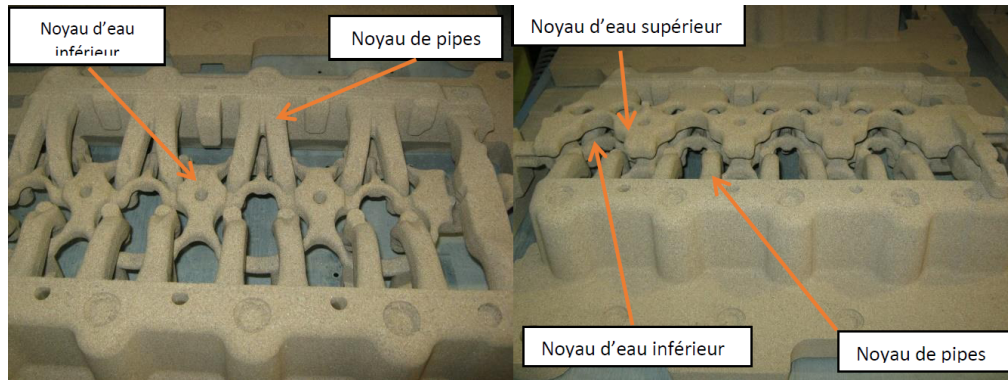
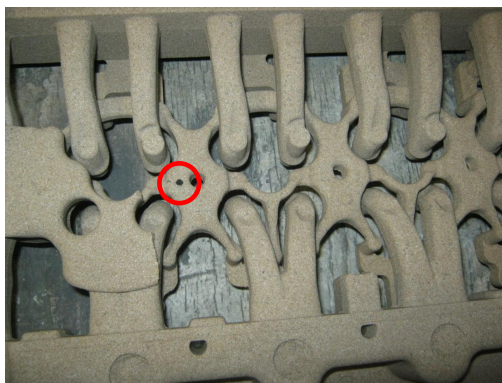
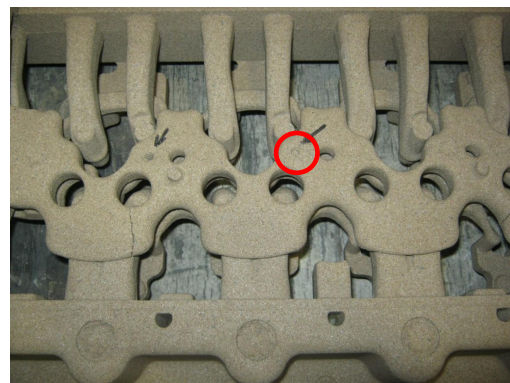


FIGURE 5.3 – Noyaux étudiés



(a) Noyau d'eau inférieur



(b) Noyau d'eau supérieur

FIGURE 5.4 – Positions des thermocouples des noyaux d'eau

L'instrumentation suit les étapes de coulée et de refroidissement dans le tunnel de refroidissement. L'évolution des températures relevées par les thermocouples est présentée en Figure 5.5. Dans les noyaux d'eau, qui sont très fins (environ 2cm de diamètre), la température maximale relevée est de l'ordre de 550-600°C. Une différence de température de 50°C est constatée entre les noyaux d'eau inférieur et supérieur. Lors de la coulée, il a été observé qu'un peu de métal fondu a pénétré le trou foré pour le thermocouple du noyau d'eau inférieur ce qui entraîne une surestimation de la température.

Cette étude sert donc de donnée d'entrée précieuse pour la modélisation des étapes de coulée et de refroidissement.

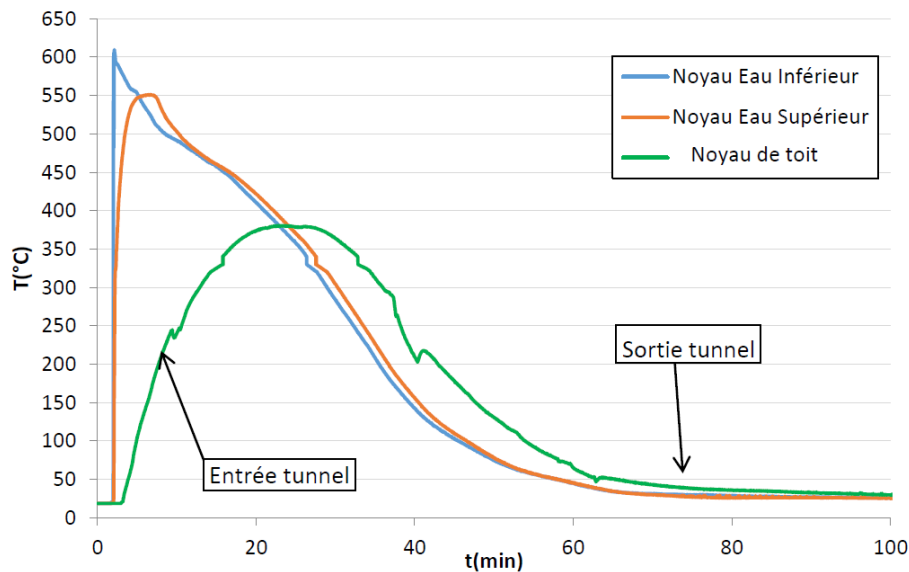


FIGURE 5.5 – Evolution de la température des noyaux en conditions industrielles

### 5.2.2 Calcul thermique

Le calcul thermique sert à déterminer l'état de vieillissement thermique du noyau après coulée. On formule une première hypothèse simplificatrice que la température relevée de l'instrumentation de la panoplie correspond à la température en peau des noyaux, c'est-à-dire celle au niveau de l'interface aluminium/noyau.

L'étude expérimentale précédente montre que les noyaux d'eau voient en peau une température supérieure à 550°C au maximum. De plus, durant les 30 premières minutes du cycle de vie du noyau, la température en peau excède les 300°C. Cependant, on ne connaît a priori pas la température à cœur. Les noyaux d'eau ont une section très fine mais sont très réfractaires. Il faut mener un calcul thermique afin de déterminer l'état de dégradation thermique post-coulée.

#### 5.2.2.1 Méthode

Le calcul thermique est effectué sur un maillage comprenant la culasse (avec masselotte) et la panoplie de noyau. Il est visible en Figure 5.6. Le noyau de toit (au niveau de la masselotte) a été enlevé afin de simplifier la simulation car ils n'ont pas d'intérêt.

Le transitoire thermique appliqué est une simplification des relevés expérimentaux présentés ci-avant. On considère que l'aluminium impose un champ de température en peau de noyau. Ce champ est schématisé par un pic rapide jusqu'à 600°C suivi d'un relativement lent refroidissement jusqu'à 50 minutes. La partie du transitoire où la température stagne progressivement (entre 50 et 100 minutes) n'a pas été modélisée car il ne se passe plus rien. Les noyaux sont supposés être à l'instant initial à 20°C. Cette modélisation se veut avant tout pragmatique.

Comme pour la simulation de l'essai de push-out, la grandeur objectif n'est pas de déterminer la température en fin de transitoire mais le maximum de température vu par le noyau. Cette

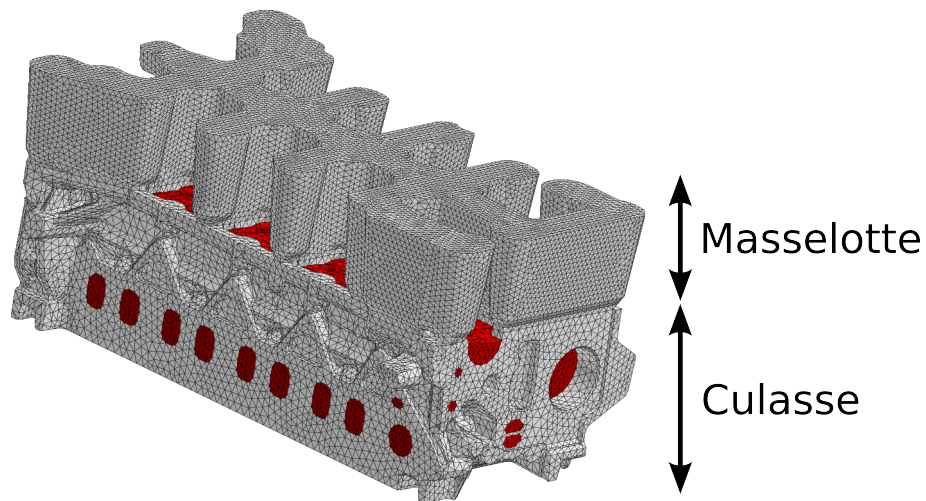


FIGURE 5.6 – Maillage de l'ensemble culasse (gris) et panoplie de noyaux (rouge)

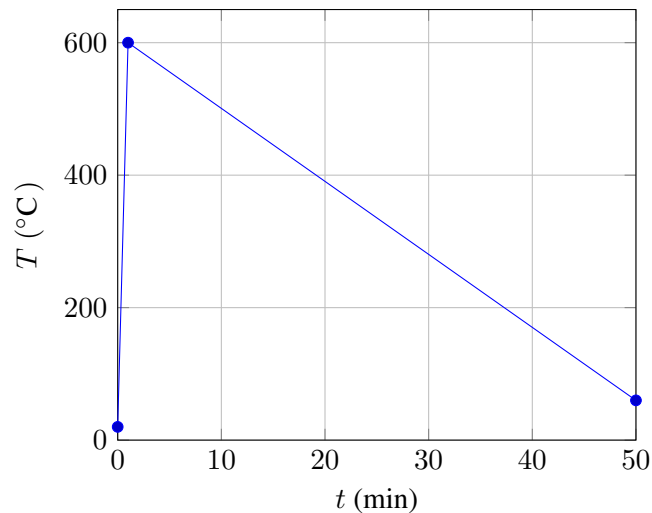


FIGURE 5.7 – Transitoire thermique simplifié au niveau de l'aluminium

température servira de température de vieillissement  $\theta$  pour le calcul mécanique de refroidissement thermique.

### 5.2.2.2 Résultat

La température moyenne à l'intérieur des noyaux d'eau est tracée en Figure 5.3.

Pendant près de 25 minutes, cette température est supérieure à  $300^{\circ}\text{C}$ . Il a été conclu que la température de vieillissement à considérer pour la loi de comportement est  $300^{\circ}\text{C}$ . Contrairement au cas de l'essai de push-out, il n'y a pas de gradient de température à considérer.

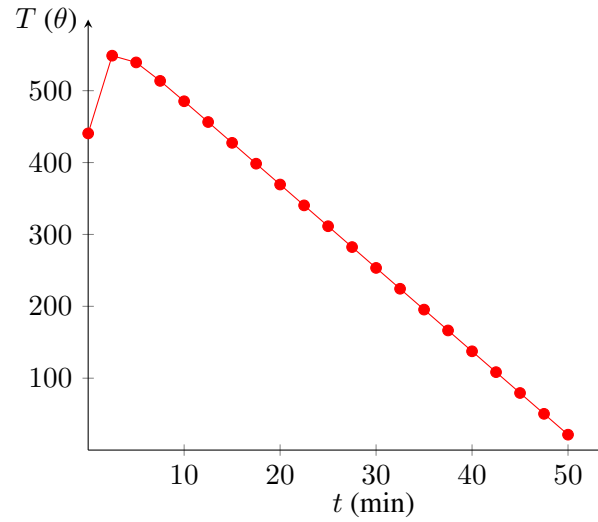


FIGURE 5.8 – Température moyenne dans les noyaux d'eau au cours du refroidissement

### 5.2.3 Calcul mécanique

#### 5.2.3.1 Méthode

Le refroidissement de la culasse induit une contraction qui va comprimer les noyaux. L'effet d'une telle pression initiale sur un matériau à Etat Critique a été abordé dans l'étude de la simulation de l'essai de push-out (voir notamment la Section 4.3.6.2 et la Figure 4.21). L'objectif de ce calcul est donc de déterminer l'état de contrainte et de rigidification potentielle des noyaux. Seul le refroidissement a été simulé. La loi de comportement utilisée pour les noyaux correspond au C-CASM avec  $\theta = 300^\circ\text{C}$ . Le coefficient de dilatation thermique  $\alpha$  est supposé indépendant de la température et est fixé à  $8 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ .

La loi de comportement considérée pour la culasse est une loi de comportement élastique linéaire et isotrope. Le coefficient de dilatation thermique dépend, lui, de la température. Son évolution est tracée en Figure 5.9. Pour des températures supérieures à  $350^\circ\text{C}$ ,  $\alpha = 23.5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$  car aucune donnée expérimentale existe au-delà.

#### 5.2.3.2 Résultat

Le calcul mécanique de refroidissement montre que les noyaux d'eau ont été très fortement comprimés. La Figure 5.10 montre l'état de contrainte  $(p, q)$  dans les noyaux d'eau en fin de refroidissement. Chaque point correspond à un point d'intégration du maillage. La courbe en violet correspond à la surface de charge originelle (C-CASM pour  $\theta = 300^\circ\text{C}$ ). Les points en rouge correspondent aux points où  $p_c > p_c^0$  c'est-à-dire les zones où il y a eu durcissement. Les points vers correspondent aux zones adoucies et les points bleus (quasiment invisibles) correspondent aux zones encore élastiques. La très vaste majorité des noyaux est durcie.

Si l'on considère la valeur moyenne de la pression de préconsolidation  $\langle p_c \rangle$  lors de la si-

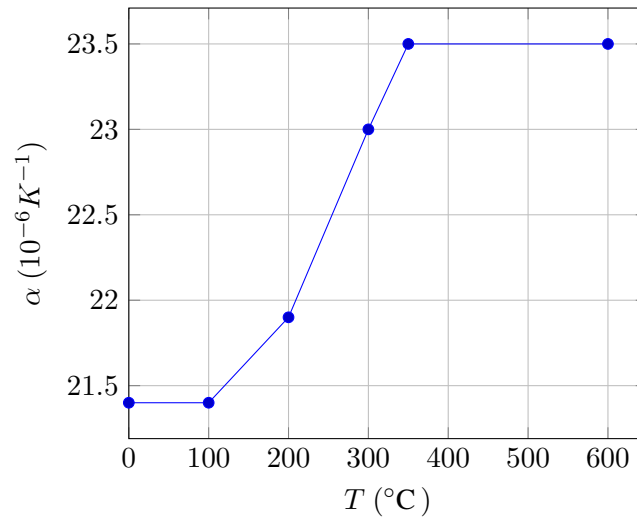


FIGURE 5.9 – Coefficient de dilatation thermique de l'aluminium

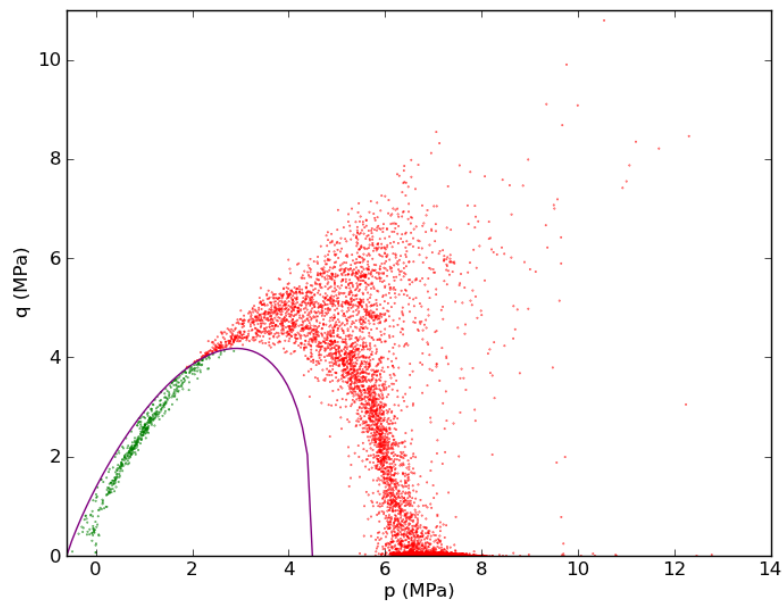
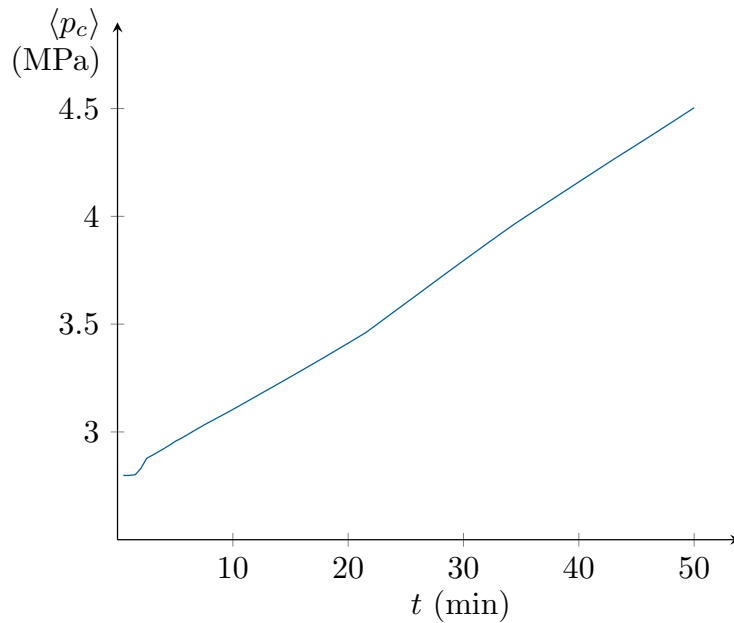


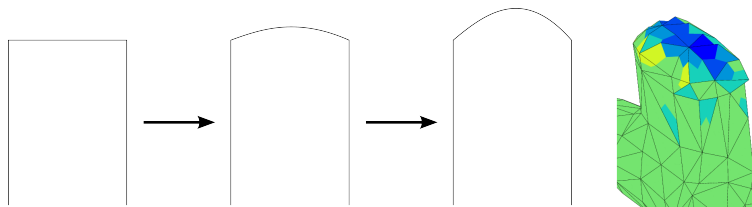
FIGURE 5.10 – Etat de contrainte dans les noyaux d'eau après refroidissement

mulation, on constate que celle-ci double, traduisant à nouveau l'important durcissement des noyaux lors du refroidissement (voir Figure 5.11).

Les calculs montrent que des zones ont été cisailées. Elles se trouvent au niveau des échappements c'est-à-dire sur les bords débouchants de la culasse. Un exemple de ces zones cisailées

FIGURE 5.11 – Evolution de la valeur moyenne de  $p_c$  lors du refroidissement

est disponible en Figure 5.12. Du fait de la compression latérale sans glissement du cylindre, la partie débouchante du noyau a tendance à avoir une forme de "dôme" (le noyau essaie de s'écouler par ce trou débouchant). Au sommet de ce dôme, le noyau est en traction et donc le cisaillement est plus important.

FIGURE 5.12 – Zones cisaillées après refroidissement (isovaleur de  $p_c$ , déformée  $\times 75$ )

#### 5.2.4 Discussion

Cette étude très simplifiée de la précontrainte thermique a permis de mettre en évidence l'importance de cette pré-compaction. Celle-ci va changer radicalement le comportement du noyau, qui semble globalement très durci. Les zones d'échappement sont cependant très affaiblies. Au moment du déburrage, les noyaux internes ont donc vécu une histoire thermomécanique très riche. Jusqu'à présent, seules les dégradations thermiques (sur la résine et donc sur le comportement mécanique) avaient été considérées. Cependant, l'importance de l'écroutissage dû au

refroidissement n'avait pas été investigué. Celui-ci a une importance de premier rang. Ces états de contrainte et d'écrouissage servent aussi de condition d'entrée pour les calculs de la prochaine étape du cycle de vie du débouillage. Cela signifie que les noyaux ont un état de contrainte  $\sigma$ , de déformation ( $\epsilon$ ,  $\epsilon^p$ ) mais aussi d'écrouissage ( $p_c$ ,  $b$ ,...) non vierge.

Concernant le débouillage, deux approches sont proposées pour l'étudier :

- L'approche modale : les modes propres de la culasse avec son bridage sont étudiés afin de déterminer ceux plus propices à l'élimination des noyaux (Section 5.4).
- L'approche martelage : un calcul dynamique de martelage sur la culasse bridée est effectué et permet d'évaluer la position des marteaux (Section 5.5).

## 5.3 Modélisation du bridage

### 5.3.1 Eléments ressorts

La première étape correspond à la modélisation des appuis de la culasse lorsqu'elle est dans la débouilleuse. La méthode retenue consiste à définir des éléments ressorts au niveau des zones de bridage. Ces éléments vont s'opposer à un déplacement donné par l'ajout d'une force de rappel  $\mathbf{F}$  telle que :

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{u} \quad (5.1)$$

où  $k$  est la raideur de l'élément ressort.

Durant l'étude, cette raideur n'a pas été prise comme une variable d'entrée. Elle a été fixée comme étant très élevée ( $210^9 \text{N/m}$ ), empêchant presque tout déplacement. Elle peut cependant être évaluée à une valeur bien moindre afin de modéliser un appui plus mou, comme un bloc en polymère autorisant un peu plus le déplacement. Moins brider la pièce permet de laisser la culasse se déformer.

### 5.3.2 Bridages considérés

Deux conditions de bridage ont été considérées. Elles diffèrent au niveau de la face "feu" c'est-à-dire au niveau de la face qui est en face de la zone martelée (en bas, non visible, sur la Figure 5.6). Ces deux conditions de bridages sont disponibles en Figure 5.13. Les appuis communs aux deux conditions de bridages, c'est-à-dire les appuis latéraux et au niveau de la masselotte, sont visibles en Figure 5.13 (a). La première condition est un bridage très strict où toute la face feu est en appui (Figure 5.13 (b)). La seconde consiste à mettre en appui uniquement les quatre coins de la phase feu, laissant la pièce plus libre de se déformer (5.13 (c)).

## 5.4 Etude modale de la culasse

### 5.4.1 Approximation en base réduite

Une première approche concernant l'étude du débouillage consiste à mettre en place une représentation en bases réduites des mouvements de la culasse et sa masselotte. L'apport mé-



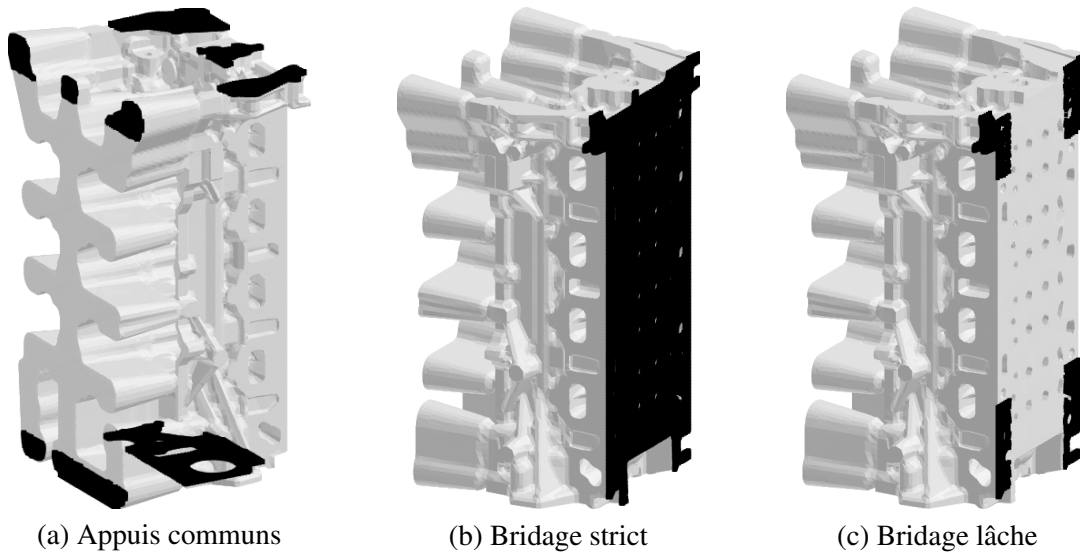


FIGURE 5.13 – Conditions de bridage

canique des noyaux de sable lors du martelage a été négligé, leur inertie et leur raideur étant largement moindres que celle de l'aluminium. Le comportement de la pièce d'aluminium est considéré comme élastique linéaire et isotrope.

Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est supposé cinématiquement admissible. On note  $\mathbf{x} \in \Omega$  le vecteur position et  $t \in [0, T]$  le temps. Dans un premier temps, une approximation éléments finis est effectuée. Le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  est décomposé sur le sous-espace vectoriel formé des fonctions de forme du modèle éléments finis,  $\mathcal{V}_h$  :

$$\mathcal{V}_h = \text{span}(\psi_1, \dots, \psi_{N_d}) \quad (5.2)$$

où  $(\psi_i)_{i=1}^{N_d}$  sont les fonctions de forme et  $N_d$  le nombre de degrés de liberté. On écrit alors  $\mathbf{u}$  sur cette décomposition :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{N_d} \psi_i(\mathbf{x}) a_i(t) \quad (5.3)$$

$\mathbf{a} = [a_1, \dots, a_{N_d}]$  vérifie :

$$\mathbf{a}(0) = 0 \quad (5.4)$$

$$\dot{\mathbf{a}}(0) = 0 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}} + \mathbf{K}\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (5.6)$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse et  $\mathbf{K}$  la matrice de raideur.

Dans un second temps, on suppose que le mouvement de la pièce d'aluminium peut être représenté par une base modale réduite. Ces modes vérifient les conditions de Dirichlet de bridage dans la déboureeuse grâce à l'ajout de raideurs d'interface sur les zones d'appui et de serrage de



la pièce métallique. Le problème de vibration consiste à trouver  $\mathbf{a} = \mathbf{X}e^{j\omega t}$  ( $j^2 = -1$ ) vérifiant l'équation précédente (Equation 5.6). Cela mène au problème aux valeurs propres standard :

$$\det(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) = 0, \quad 0 \leq \omega_k \leq \omega_{k+1}, \quad k \in \{1, \dots, N_d\} \quad (5.7)$$

Soit

$$(\mathbf{K} - \omega_k^2 \mathbf{M}) \mathbf{X}_k = 0, \quad k \in \{1, \dots, N_d\} \quad (5.8)$$

On détermine alors  $N$  modes propres formant la base modale  $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_N]$ . Il faut noter que ces modes dépendent du bridage mais pas des positions des marteaux. L'approximation modale s'écrit :

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^N \alpha_k(t) \mathbf{X}_k(\mathbf{x}) \quad (5.9)$$

L'étude consiste donc à se focaliser sur la base réduite  $\mathbf{X}$  et non pas sur  $\mathbf{a}$ . Les coefficients de pondération  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_N]$  sont inconnus. Pour appréhender un peu mieux ces termes, on postule que le martelage de la culasse correspond à une impulsion de type Dirac. Cela signifie alors que chaque mode propre est activé lors d'un martelage. On peut écrire le terme  $\alpha_k$  comme étant :

$$\alpha_k(t) = \beta_k \cos(\omega_k t) \quad (5.10)$$

L'amplitude  $\beta_k$  est demeure une inconnue du problème et ne sera pas déterminée. Il est important de noter que cette décomposition est effective pour un seul martelage mais pas une succession de martelages.

Chaque sollicitation du mode de la forme  $\mathbf{X}_k(\mathbf{x})\beta_k \cos(\omega_k t)$  est alors étudiée séparément. La capacité du mode à faciliter la fragmentation des noyaux internes est alors évaluée par une méthode qui sera détaillée en Section 5.4.2.4. Les modes pertinents sont alors déterminés. L'objectif alors n'est par exemple pas de fixer la fréquence de martelage pour qu'elle corresponde à celle du mode idéal. Comme dit précédemment, un martelage n'est pas vu comme une sollicitation harmonique de pulsation  $\omega_{martelage}$ . Il s'agit d'une impulsion qui va solliciter tous les modes propres de la structure. On peut cependant favoriser certains modes en appliquant un martelage dans une zone correspondant à un ventre du mode. La position des marteaux est donc bien une donnée de sortie de la méthode, pas une donnée d'entrée.

La procédure est illustrée en Figure 5.14. Tout d'abord, la première étape consiste à modéliser le bridage de la pièce dans la déboureurse (Figure 5.14 (a)). Ensuite, en tenant compte de ces conditions aux limites, des modes propres  $\mathbf{X}$  de la structure sont déterminés. Ils sont ensuite étudiés et évalués par une méthode qui sera détaillée en Section 5.4.2.4 (Figure 5.14 (b)). Une fois un mode - ou une combinaison de modes - sélectionnés, les positions des marteaux peuvent se déduire grâce à la déformée de la pièce. Ici en Figure 5.14 (c), les marteaux se positionnent sur les nœuds de la face supérieure.

## 5.4.2 Méthode

L'étude modale se concentre uniquement sur les noyaux d'allègement pour le bridage strict.

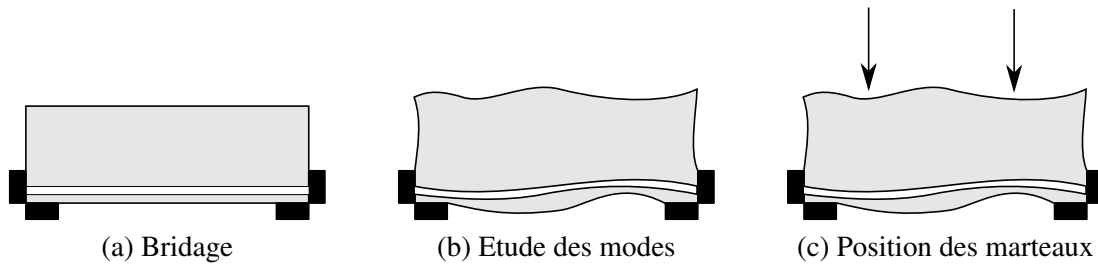


FIGURE 5.14 – Principe de la démarche modale

#### 5.4.2.1 Détermination des modes

20 modes propres ont été déterminés en utilisant l'algorithme de Lanczos. Ces modes ont été calculés sur le maillage de la culasse seule, sans les noyaux de sable. Leur raideur étant négligeable d'un facteur 1000 par rapport à l'aluminium, leur participation mécanique a été négligée. Cela permet aussi d'alléger significativement les calculs.

#### 5.4.2.2 Normalisation des modes

Les modes propres sont toujours déterminés à une constante multiplicative près. Dans Z-set, cette constante est fixée par la condition :

$$\max_{\text{noeuds}} \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1 \quad (5.11)$$

Ce ne fut pas la normalisation retenue pour l'étude des modes dans le cadre du déburrage. La normalisation proposée se concentre sur la déformée de la culasse au niveau des zones martelables. Dans le cas de la culasse R9M, 12 zones martelables,  $(\Omega_m^i)_{i=1,\dots,12}$  ont été considérées. Elles sont représentées en Figure 5.15. La procédure de martelage consiste à :

1. Calculer la moyenne de la norme du déplacement  $\|\underline{u}\|$  sur chaque zone martelable  $(\Omega_m^i)$
2. Fixer le maximum de ces moyennes à 1

On peut résumer aussi la normalisation comme ceci :

$$\max_{\Omega_m^i} \langle \|\underline{u}\| \rangle = 1 \quad (5.12)$$

#### 5.4.2.3 Chargement mécanique considéré

Les modes propres  $\mathbf{X}$  ont été déterminés sur la pièce métallique seule. Il faut donc les appliquer sur les géométries des zooms structuraux. Pour un mode  $\mathbf{X}_k$  donné, on peut déduire un champ de déplacement au niveau de l'interface entre les noyaux et l'aluminium :  $\mathbf{X}_k^s = \mathbf{X}_k[\mathcal{F}^s]$  où  $\mathcal{F}^s$  correspond aux degrés de liberté situés à cette interface.

Pour chaque zoom structural, on impose en condition aux limites de type Dirichlet  $\beta_k \mathbf{X}_k[\mathcal{F}^s] \cos(\omega t)$ . Plusieurs amplitudes arbitrairement choisies seront testées ( $\beta_k = 0.1, 0.5,$

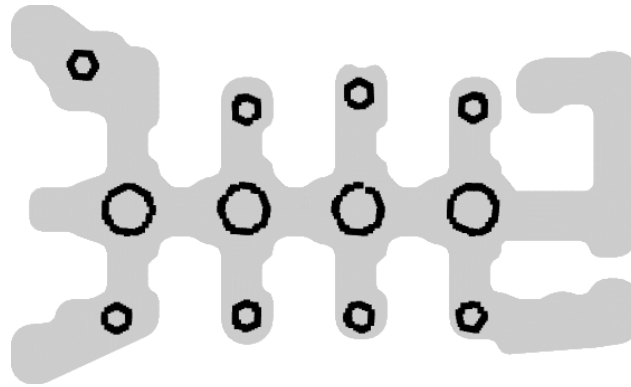


FIGURE 5.15 – Zones martelables de la masselotte

1 ou 5). Une centaine de cycles est simulée ( $t \in [0, 100T_k]$ ) (le rapport  $f_k/f_{martelage}$  étant de l'ordre de la centaine).

Pour rappel, les calculs mécaniques sont effectués sur des noyaux ayant subi la précontrainte thermique de refroidissement. Leur histoire mécanique n'est donc pas nulle (écrouissage, déformation,...).

#### 5.4.2.4 Méthode de *remove element*

La simulation du martelage se doit de contenir une méthode d'estimation de la fragmentation des noyaux internes. Compte tenu de la relativement faible ductilité du sable lié vieilli, une première approche consiste à considérer le matériau comme élastique fragile. La surface de charge du C-CASM sert alors de surface de rupture. Cependant, l'étude de la précontrainte thermique a montré que le matériau est plastifié d'emblée.

Une approche de type *remove element* (ou *kill element*) a été retenue. Lorsqu'une variable d'intérêt atteint un certain seuil dans un élément, celui-ci est retiré du maillage. Le *remove element* est l'une des méthodes les plus simples pour prendre en compte une rupture ou l'érosion progressive. Ici, aucun remaillage n'est nécessaire. L'un des désavantages de cette méthode est cependant la non conservation de la masse du fait de la suppression progressive d'éléments. Dans le cas de la fragmentation des noyaux de fonderie, ce n'est pas un défaut. En effet, on considère que l'élément fragmenté est devenu du sable non lié (ou parfois appelé sable flu). On peut supposer qu'il s'est écoulé par un des trous débouchant, ou que tout simplement il ne participe plus mécaniquement. Pour rappel, l'ordre de grandeur du module d'Young du sable est de 60-80 MPa tandis qu'il a été estimé à 1420 MPa pour un noyau à liant polyuréthane vieilli à 300°C.

La variable d'intérêt pour le *kill-element* est l'endommagement. Pour rappel,  $D$  dépend de la déformation plastique cumulée d'endommagement  $h$  (Equation 3.11). Cette mesure de la déformation est uniquement liée à la décohésion (diminution de  $b$ ). La décision de considérer  $D$  comme variable de rupture revient à considérer que la rupture survient à cause de la décohésion et que passé un certain seuil, l'élément de noyau n'est quasiment plus que du sable flu.

Il est à noter qu'en pratique, la méthode de *kill element* a deux paramètres : le seuil de la

variable mais aussi le nombre de points d'intégration devant vérifier la condition par élément afin que l'élément soit retiré. Les éléments utilisés dans l'étude de débouillage sont des éléments tétraédriques quadratiques à 4 points de Gauss. Le seuil d'endommagement a été fixé à  $D = 0.5$  et le nombre minimum de point d'intégration par élément est de 1 sur 4.

La condition de *remove element* retenue pour cette étude peut être résumée ainsi :

$$\text{Si } D \geq 0.5 \text{ dans un point d'intégration d'un élément, alors cet élément est supprimé} \quad (5.13)$$

Il faut aussi noter qu'on néglige les effets d'inertie pour la fragmentation.

### 5.4.3 Résultats

#### 5.4.3.1 Déformées de la pièce métallique

Divers modes propres sont tracés en Figures 5.16 pour le bridage strict et 5.17 pour l'encastrement lâche. Les déformées des modes diffèrent naturellement au niveau de la face feu, où le bridage lâche permet une déformée de la culasse (en flexion ou en torsion notamment) tandis que pour le bridage strict il n'y a aucun mouvement.

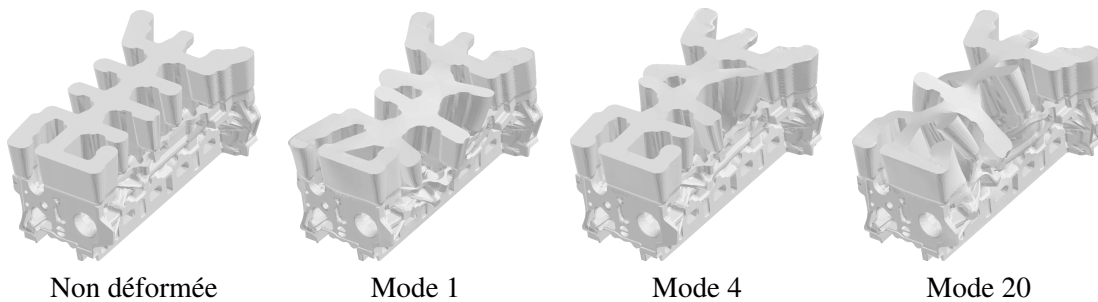


FIGURE 5.16 – Modes propres pour l'encastrement strict

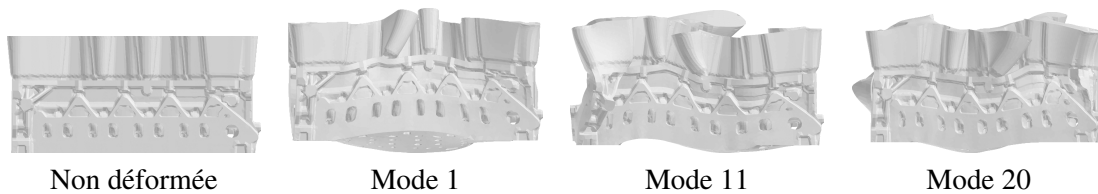


FIGURE 5.17 – Modes propres pour l'encastrement lâche

Les fréquences propres obtenues pour les deux bridages sont de l'ordre du kHz (entre 1.5 et 6 kHz). Elles sont tracées en Figre 5.18. La fréquence de martelage est de 24 Hz. Il est invisable de multiplier cette fréquence par 100 pour atteindre celles correspondant aux modes.

#### 5.4.3.2 Bridage strict

Trois amplitudes ont été considérées pour le bridage strict :

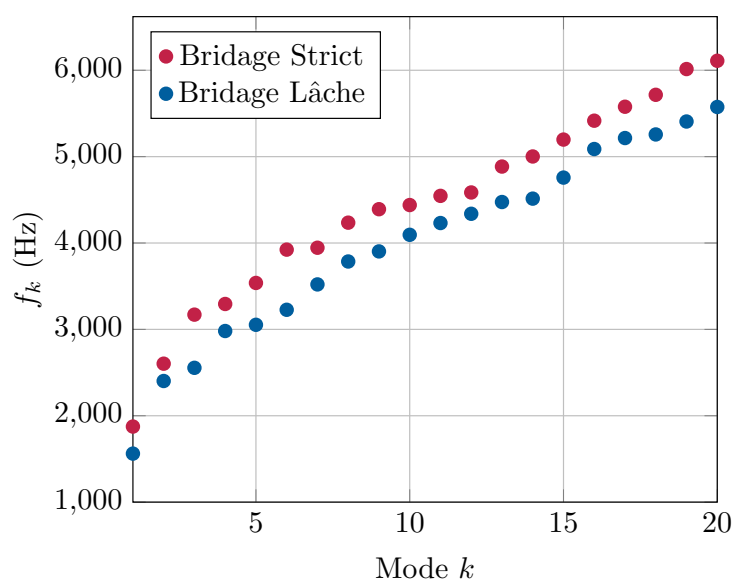


FIGURE 5.18 – Fréquences propres pour les deux bridages

- Une amplitude faible  $\beta_k = 0.1$
- Une amplitude moyenne  $\beta_b = 0.5$
- Une amplitude forte  $\beta_k = 5$

Lorsqu'un mode est faiblement sollicité ( $b_k$  faible), il est constaté que l'endommagement finit par stagner au bout de plusieurs cycles de chargement. Cette saturation de l'endommagement est illustrée en Figure 5.19, qui concerne l'évolution du mode 1 pour le noyau d'allégement.

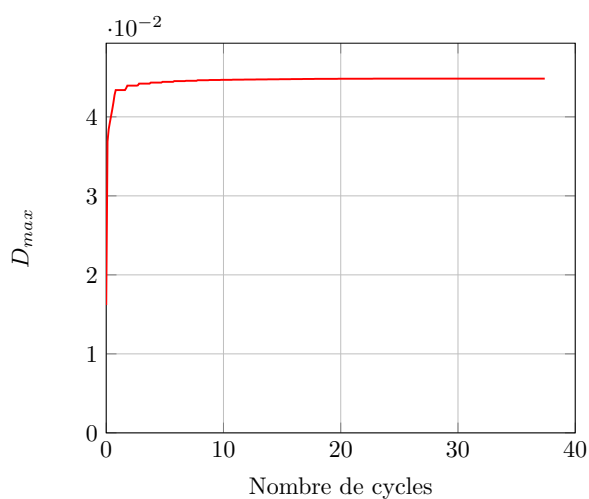


FIGURE 5.19 – Bridage strict - sollicitation faible : saturation de l'endommagement

Ce résultat met en évidence l'apparition d'un *seuil de débourrabilité* c'est-à-dire qu'il existe une amplitude minimale pour endommager et rompre les noyaux. Cette notion peut sembler triviale pour un matériau n'ayant pas subi une précontrainte thermique. Ce seuil de débourrabilité pourrait alors correspondre à l'amplitude maximale laissant le noyau encore élastique. Cependant, dans ces simulations les noyaux internes sont déjà écrouis et légèrement endommagés. L'effet d'une sollicitation donnée sur l'évolution de l'endommagement n'est pas triviale.

Pour une amplitude de sollicitation plus élevée, la simulation permet de mettre en évidence une fragmentation des noyaux. Ce phénomène apparaît pour une amplitude de sollicitation "moyenne" ( $\beta_k = 0.5$ ). L'impact des modes a été étudié avec le *remove element*. La Figure 5.20 présente les résultats de la simulation d'élimination pour quelques modes sélectionnés pour leur représentativité. L'abscisse retenue est le nombre de cycles (de période  $T_k = 2\pi/\omega_k$ ). Il est à noter que pour certains modes, il n'y a pas eu d'éléments supprimés. L'amplitude de sollicitation est fixée arbitrairement à  $\beta_k = 0.5$ . Cette valeur apparaît comme une valeur limite pour la débourrabilité.

Parmi les modes qui mettent bien en évidence une fragmentation, on observe deux profils différents : ceux qui initient une fragmentation presque instantanément (modes 1, 17 et 19) et ceux qui mettent plusieurs dizaines voire centaines de cycles pour entamer la rupture (modes 3 et 4). Pour ces derniers, l'endommagement va en fait progresser au fur et à mesure des cycles de chargements jusqu'à finalement atteindre la valeur seuil pour la rupture ( $D = 0.5$ ).

Dans les deux cas de figure, la débourrabilité semble très insatisfaisante. Le meilleur des modes n'atteint même pas 6% d'éléments supprimés. On observe en outre une saturation de la fragmentation. La fragmentation passe d'une propagation rapide à un plateau où le nombre d'éléments supprimés ne bouge quasiment pas d'un cycle sur l'autre. L'amplitude fixée est peut-être trop faible. Les conditions aux limites de la culasse, bridée sur toute la face feu, sont aussi à remettre en question.

Pour une sollicitation forte ( $\beta_k = 5$ , soit 10 fois plus que précédemment), la réponse du noyau est différente. Tous les modes ont entraîné une fragmentation conséquente du noyau d'allègement, au minimum 40%. On constate à nouveau la saturation de l'endommagement au bout de plusieurs dizaines de cycles de sollicitation. Cependant, plus de la moitié des noyaux est débourrée.

### 5.4.3.3 Bridage lâche

Le bridage lâche a été testé avec une amplitude de sollicitation moyenne ( $\beta_k = 1$ ). Le bilan de la fragmentation du noyau d'allègement en fonction des modes est disponible en Figure 5.22. Trois catégories de modes se détachent : ceux qui ne permettent quasiment pas de débourrage de la culasse (modes 1, 2, 3, 6, 7, 12 et 14), ceux qui débourent "moyennement" c'est-à-dire entre 20 et 40% du noyau (modes 4, 5, 8, 9, 13 et 17) et ceux plus performant qui suppriment plus de la moitié des éléments (modes 10, 11, 15, 16, 18, 19 et 20). Cette disparité est due aux faciès de déformation des modes. Ceux qui ne permettent pas la fragmentation sont ceux qui ne sollicitent pas ou peu le noyau d'allègement. Pour rappel, le noyau d'allègement se situe entre deux zones d'appui. Les modes qui n'ont pas de déformation entre les appuis dans la largeur ne cassent pas les noyaux. Par exemple, le mode 1 est un mode de déformation en torsion le long de la longueur de la face feu.

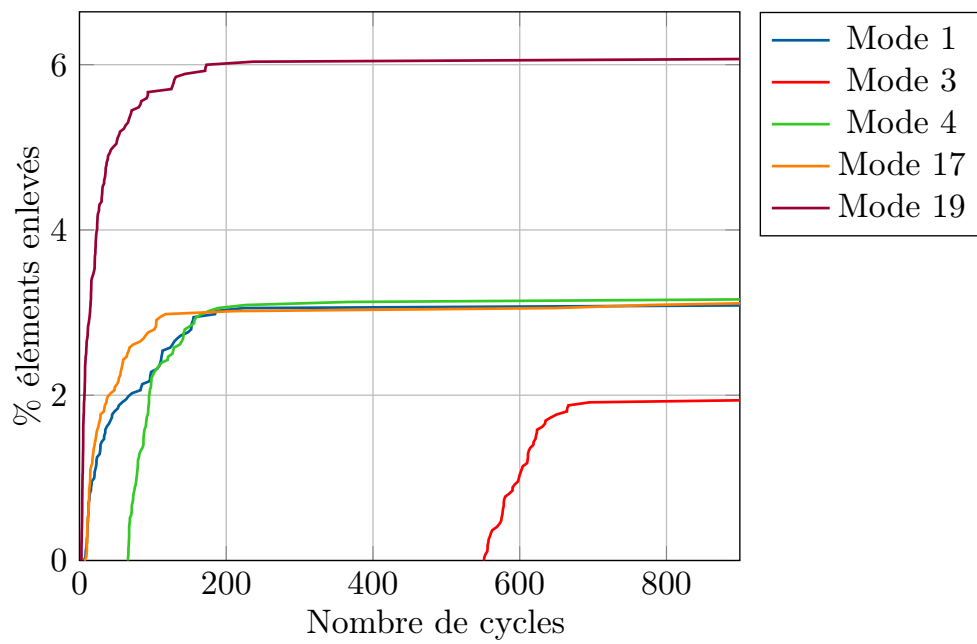


FIGURE 5.20 – Bridage strict - sollicitation moyenne : Comparaison des modes

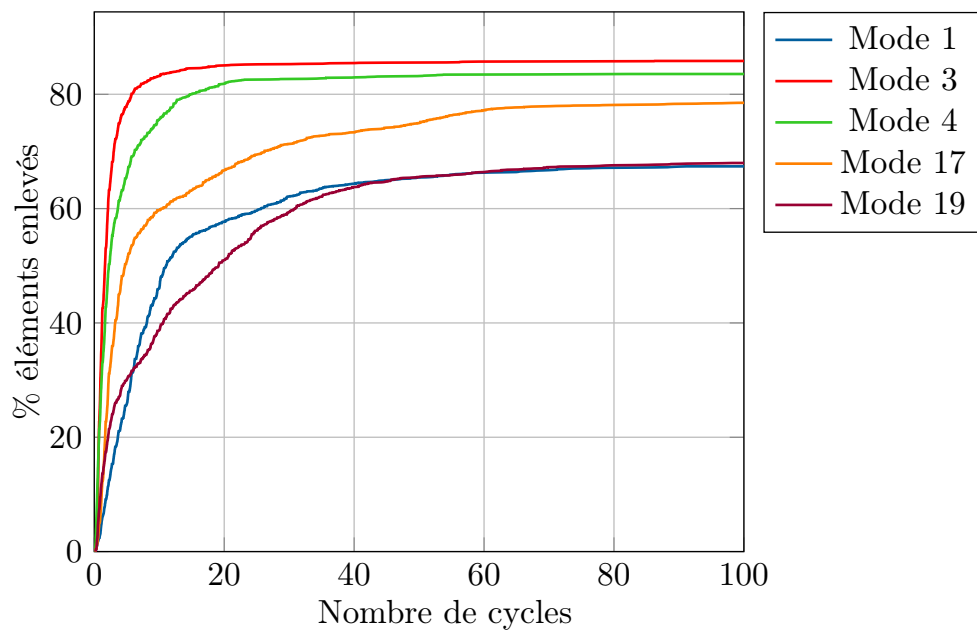


FIGURE 5.21 – Bridage strict - sollicitation forte : Comparaison des modes

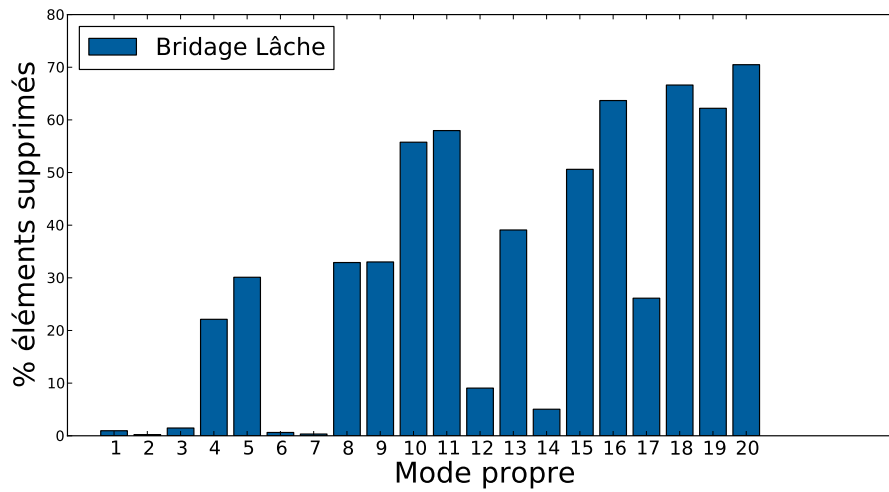


FIGURE 5.22 – Bridage lâche - Bilan des modes

Comme précédemment, on observe aussi une saturation de l'endommagement comme présenté en Figure 5.22.

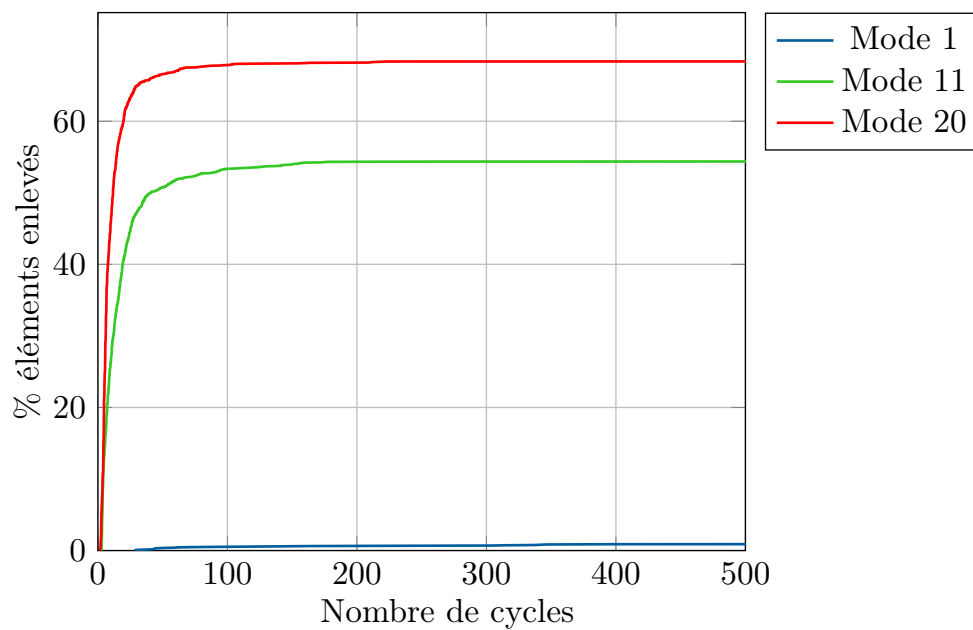


FIGURE 5.23 – Bridage lâche : Comparaison de quelques modes



### 5.4.4 Discussion

#### 5.4.4.1 Bridage strict

Concernant le maintien strict, le mode de déformation mis en exergue dans l'étude est indubitablement le mode 19 pour un martelage moyen. Le nombre d'éléments supprimés avec ce mode est quasiment le double de celui du second mode dans le classement. La démarche préconisée consiste donc à imposer un martelage qui facilite l'activation du mode. Le mode est tracé en Figure 5.24. On constate qu'au niveau de la masselotte, deux zones de martelages se dessinent assez clairement. Elles sont signalées par les deux flèches en Figure 5.24 (b). Cette configuration indique un martelage qui est quasiment normal à la surface de la masselotte. L'angle obtenu sur la déformée n'est pas pertinent : les calculs sont faits avec l'hypothèse des petites déformations.

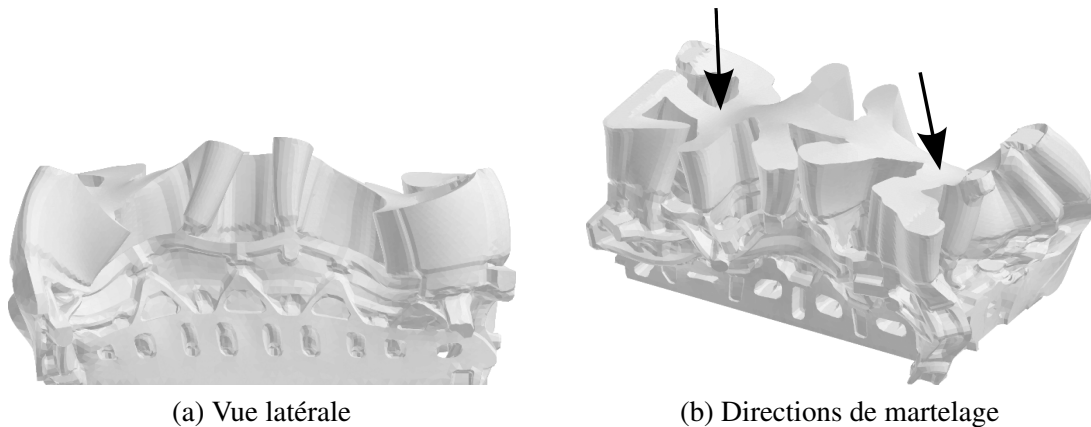


FIGURE 5.24 – Martelage préconisé pour le bridage strict

Cette configuration de martelage se trouve actuellement être celle utilisée par Montupet. A défaut de proposer une condition de martelage nouvelle, on confirme ici ce que les retours d'expérience ont permis.

#### 5.4.4.2 Bridage lâche

Pour le bridage lâche, et le niveau de sollicitation "moyen" considéré, un groupe de modes se distingue mais pas "un" mode en particulier. Le mode 20, tracé en Figure 5.17 (a), tend à considérer un martelage dans la même zone que pour le bridage strict. Cependant, ici, la déformation de la culasse n'est pas la même au niveau de la face feu. Le noyau d'allègement est légèrement mis en flexion (Figure 5.17 (b) où le trait en pointillés rouge correspond à la face feu non déformée). Cela confirme que la débourrabilité est améliorée lors de la mise en flexion des noyaux internes.

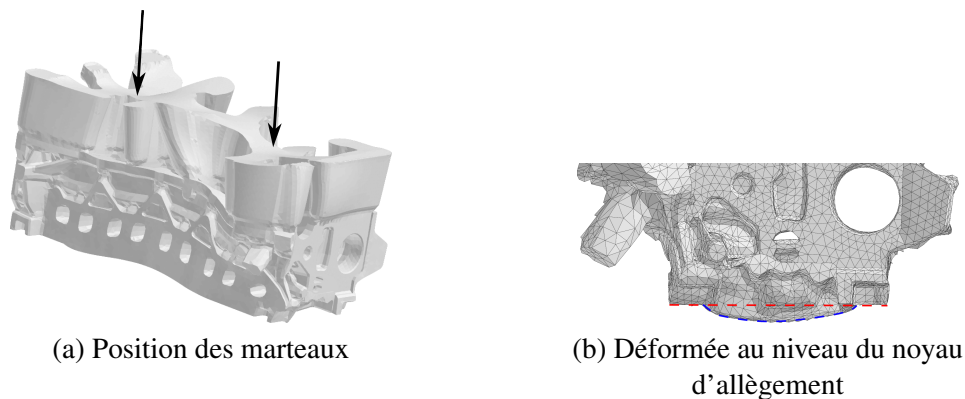


FIGURE 5.25 – Martelage préconisé pour le bridage lâche

## 5.5 Etude dynamique de la culasse

### 5.5.1 Modélisation pragmatique du martelage

Une deuxième méthode concernant la modélisation du débouillage consiste à développer une approche plus pragmatique du martelage. L'étude modale prenait en entrée une condition de bridage et après l'étude des modes propres résultants, une condition de martelage était obtenue. Cependant, l'observation d'une masselotte révèle assez rapidement qu'elles n'ont pas une infinité de zones martelables. Les combinaisons de martelages possibles peuvent être étudiées de manière exhaustive. Pour la culasse R9M étudiée, 12 zones martelables ont été déterminées. Elles sont visibles et numérotées en Figure 5.15. Deux sous-catégories de zones sont distinguées :

- Les zones centrales : ce sont les 4 régions centrales. Elles sont situées au dessus de zones plus massives de la pièce métallique. Elles correspondent aux marteaux 2, 5, 8 et 11.
- Les zones latérales : ce sont les 8 régions latérales. Elles sont situées au dessus de zones moins massives de la pièce. Marteler ces régions peut provoquer une rupture de la pièce.

La numérotation des marteaux permet une paramétrisation du problème. On note par exemple un martelage à deux marteaux par le doublet constitué des deux numéros des marteaux. Par exemple, le martelage effectué par Montupet sur cette pièce est actuellement le (2,11).

On se limite en outre à un martelage normal de la pièce. On suppose que les marteaux sont synchrones, c'est-à-dire qu'ils tapent la pièce en même temps. L'intensité de martelage est supposée la même pour les deux marteaux.

En incluant toutes les zones martelables, cela fait 66 combinaisons possibles. Si on se limite aux zones centrales, ce nombre chute à 6 combinaisons possibles ((2,5), (2,8), (2,11), (5,8), (5,11) et (8,11)).

Le noyau d'allègement se trouve au niveau des marteaux 10, 11 et 12. Pour le bridage strict, toutes les combinaisons de marteaux ont été testées. Pour le bridage lâche, pour gagner du temps, seuls les marteaux centraux ont été considérés.

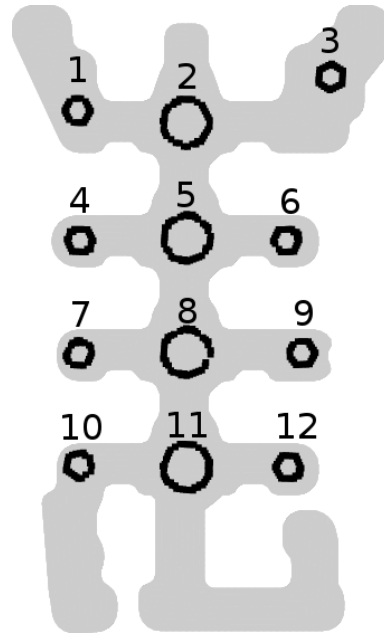


FIGURE 5.26 – Identification des zones martelables

### 5.5.2 Méthode

Pour une combinaison  $(i, j)$  donnée, un calcul de martelage sur la culasse seule est effectué. Comme pour l'étude modale, l'impact des noyaux sur les déformées a été négligé. Pour les deux conditions de bridage, un calcul dynamique est mené. Au niveau des zones martelées, une réaction est imposée. Celle-ci correspond à un pic linéaire de durée  $2T$  et d'intensité  $F_0$  (voir Figure 5.27).

Expérimentalement,  $T$  a été mesurée à environ 0.03 s grâce à des accéléromètres placés sur une culasse dans une déboureuruse pour des conditions réelles de martelage.  $F_0$  a été fixée à une valeur menant à un déplacement de l'ordre du millimètre c'est-à-dire  $2 \cdot 10^6$  N.

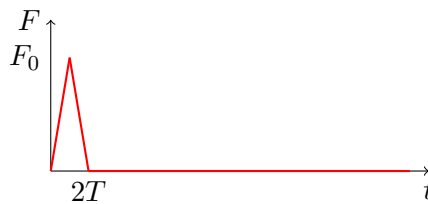


FIGURE 5.27 – Chargement imposé au niveau des marteaux

Le résultat du calcul dynamique de martelage peut être encore plus approché de manière pragmatique. Quelles que soient les configurations de martelage testées, le champ de déplacement passé  $t = 2T$  est négligeable par rapport au champ à  $t = T$ . En effet si on compare la

valeur moyenne de la norme du déplacement,  $\langle \|\mathbf{u}\| \rangle$ , on obtient :

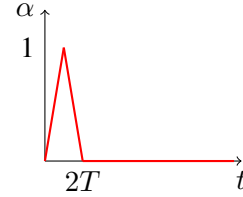
$$\langle \|\mathbf{u}\| \rangle [T] > 100 \langle \|\mathbf{u}\| \rangle [2T]$$

Le champ de déplacement obtenu au niveau de la culasse  $\mathbf{u}[\Omega_c, :]$  est alors approché :

$$\mathbf{u}[\Omega_c, t] = \alpha(t) \mathbf{u}[\Omega_c, T] \quad (5.14)$$

où  $\alpha(t)$  est un pic linéaire et unitaire défini par l'équation suivante :

$$\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ 2 - \frac{t}{T}, & T \leq t \leq 2T \\ 0, & t > 2T \end{cases}$$



Cette approximation revient à négliger les propagations d'ondes dues à un martelage. On néglige aussi l'impact des réflexions d'ondes dues aux martelages précédents. On estime que pour la fragmentation, seule la déformée au moment du martelage est mécaniquement pertinente. Cette hypothèse permet aussi de réduire significativement les coût de stockage des différents calculs menés. Seule la carte à  $t = T$  est nécessaire.

Enfin, il faut utiliser ce champ au niveau de la culasse  $\mathbf{u}[\Omega_c, T]$  pour estimer la fragmentation dans la zone d'intérêt du noyau  $\Omega_n$ . Pour chaque couple de marteaux  $(i, j)$  la procédure proposée consiste à :

1. Effectuer le calcul dynamique d'un seul martelage sur la pièce métallique seule  $\Omega_c$ . On obtient alors le champ de déplacement  $\mathbf{u}[\Omega_c, T]$  au pic de martelage.
2. Pour chaque zone de zoom structural, on extrait le champ de déplacement dans la zone d'interface entre l'aluminium et le noyau, notée  $\mathcal{F}_{ij} : \mathbf{u}[\mathcal{F}_{ij}, T]$ . Ce champ sert alors de donnée d'entrée pour définir la condition aux limites pour le calcul de fragmentation sur la zone d'intérêt  $\Omega_n$ .
3. Le calcul de déburrage consiste à répéter le champ de martelage et donc à imposer le champ  $\tilde{\alpha}(t) \mathbf{u}[\mathcal{F}_{ij}, T]$  où  $\tilde{\alpha}(t)$  est un pic linéaire et unitaire de fréquence  $2T$ . La méthode de *kill element* est employée pour simuler l'érosion des noyaux (cf Section 5.4.2.4). En conditions réelles de déburrage, la fréquence de martelage est de 24 Hz pendant 30 à 40s. 1000 cycles sont donc simulés.

### 5.5.3 Résultats

#### 5.5.3.1 Déformées de la pièce métallique

Le constat est le même que pour l'analyse modale : la déformée se concentre au niveau de la masselotte pour le bridage strict tandis qu'un bridage plus lâche permet une déformée plus ample au niveau de la face feu. Les différences sont illustrées par la Figure 5.28 pour le martelage (2,11).

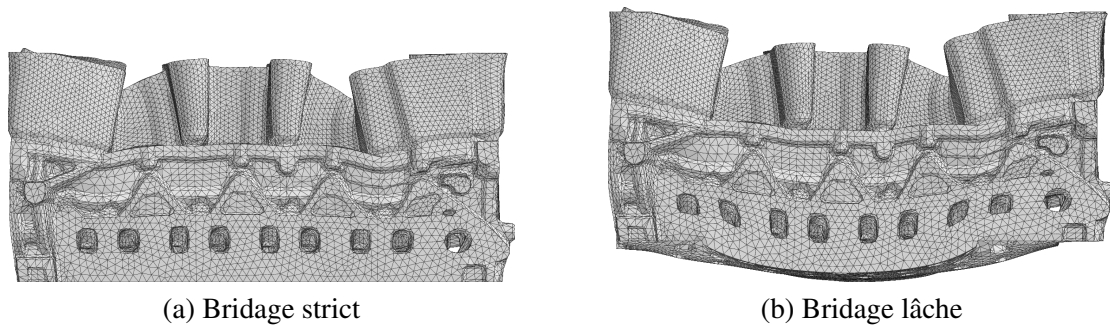


FIGURE 5.28 – Comparaison des déformées de la pièce métallique après martelage (2,11)

### 5.5.3.2 Débourrabilité en fonction des bridages

L'étude de la fragmentation du noyau d'allègement s'effectue en deux temps. Dans un premier temps, pour un bridage donné, on étudie l'impact de la position des marteaux. Dans un second temps, pour plusieurs configurations de martelages données, on étudie l'impact du bridage.

Le bilan de l'étude paramétrique des positions  $(i, j)$  des marteaux est disponible en Figure 5.29. Les deux images se lisent comme un tableau. L'abscisse (resp. l'ordonnée) correspond à la position du marteau 1 (resp. 2) selon la numérotation des marteaux de la Figure 5.26. Le tableau obtenu est symétrique (le déboufrage  $(i, j)$  est le même que le  $(j, i)$ ). Plus un carré est noir, plus il y a eu d'éléments supprimés. Pour rappel, le noyau d'allègement se situe légèrement en dessous des marteaux 10, 11 et 12.

Pour le bridage strict, on constate que si on limite les deux marteaux aux zones supérieures (de 1 à 6), il n'y a quasiment pas de déboufrage (la sous-matrice restreinte aux marteaux 1 à 6 est blanche). Ce résultat est logique, puisqu'aucun marteau ne se trouve dans la zone du noyau d'allègement et va déformer le noyau.

A l'inverse, les marteaux supérieurs permettent de bien débouffrer. Le marteau 10 se distingue notamment bien quelque soit l'autre marteau.

Pour le bridage lâche, seuls les marteaux centraux ont été étudiés. Comme précédemment, le martelage localisé dans la zone haute (martelage (2, 5)) ne permet pas de déboufrage du noyau d'allègement. Les martelages incluant le marteau 11 permettent une excellente débouffrabilité (notamment le (8,11) et le (5,11)).

Ce qui est surtout notable dans les figures précédentes sont les différences nettes de débouffrabilités du noyau considéré en fonction du bridage. En effet, même dans la meilleure configuration (marteaux situés au dessus), le noyau n'est fragmenté qu'à hauteur de presque 24% pour le bridage strict. En revanche, pour une même amplitude de sollicitation, la débouffrabilité est multipliée par 3 pour le bridage lâche. L'étude comparative des bridages pour les martelages centraux est mis en évidence dans la Figure 5.30. Comme dit précédemment, le changement de bridage n'a pas permis d'améliorer la débouffrabilité des martelages (2,5) et (2,8). Cependant, la pertinence de certains martelages a été grandement améliorée. Cela concerne principalement les marteaux 5 et 8 qui sollicitent le milieu de la culasse. Etant donné que ce bridage permet de mettre en flexion la culasse, il n'est pas étonnant de constater que ces marteaux deviennent

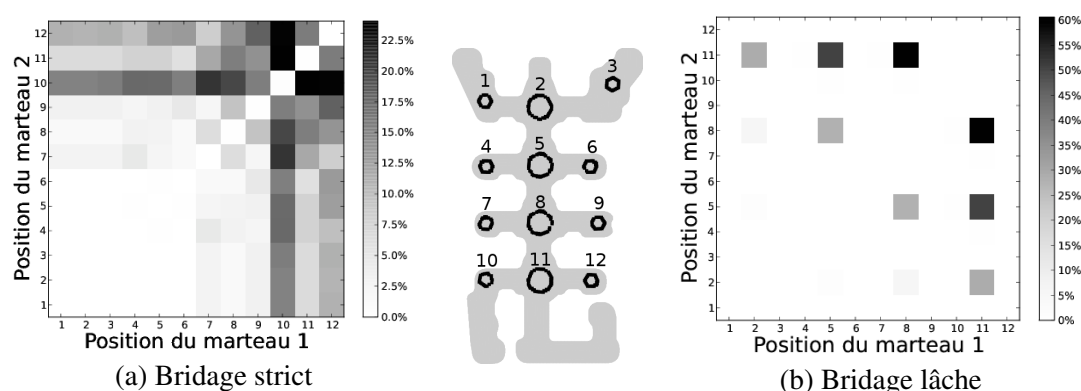


FIGURE 5.29 – Impact de la position des marteaux

d'excellents candidats. Toutefois, le noyau d'allègement demeure malgré tout proche de appuis et loin du maximum de la flèche de la culasse lorsqu'elle est mise en flexion. Il ne se situe donc pas là où la déformée est radicalement changée et où les améliorations sont attendues.

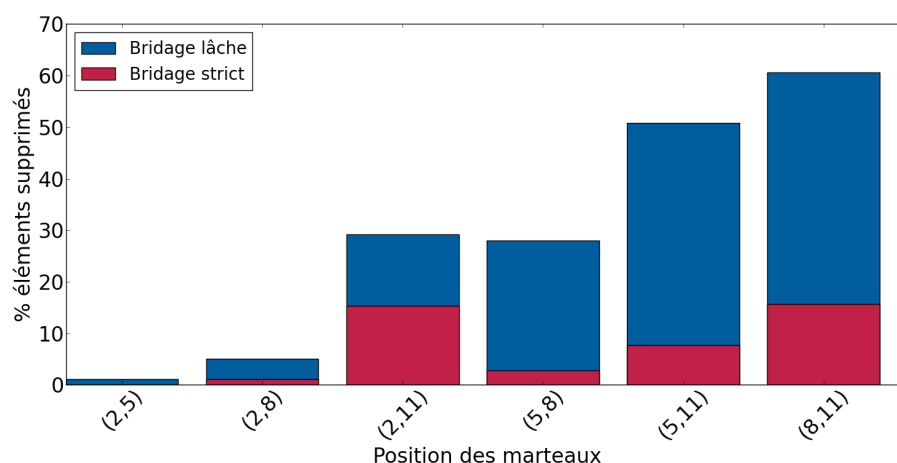


FIGURE 5.30 – Comparaison des bridages

Comme pour l'étude modale, le phénomène de saturation de la déburrabilité est observé au bout de plusieurs dizaines de cycles. L'évolution de l'érosion du noyau d'allègement est tracée en Figure 5.31. Selon la modélisation actuelle, il semble inutile de marteler plus longtemps la pièce métallique afin de la déburrer. Notons que le martelage (8, 11) du bridage strict exhibe une évolution de l'érosion assez atypique (Figure 5.31 (a)). Au lieu d'arriver à saturation au bout de 200 cycles, la fragmentation connaît un regain. Cela s'explique par l'apparition d'une nouvelle concentration de la déformation à ce stade là du martelage, qui initie une nouvelle propagation de l'érosion.

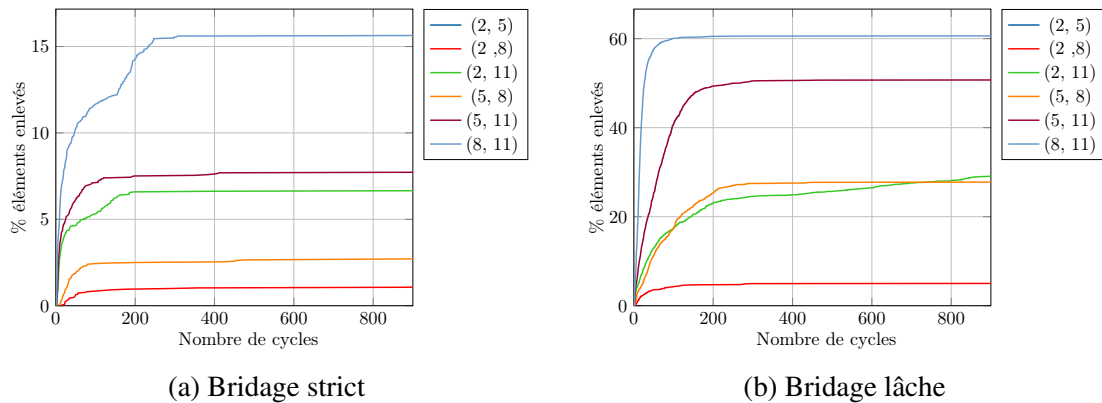


FIGURE 5.31 – Etat de fragmentation en fonction des bridages

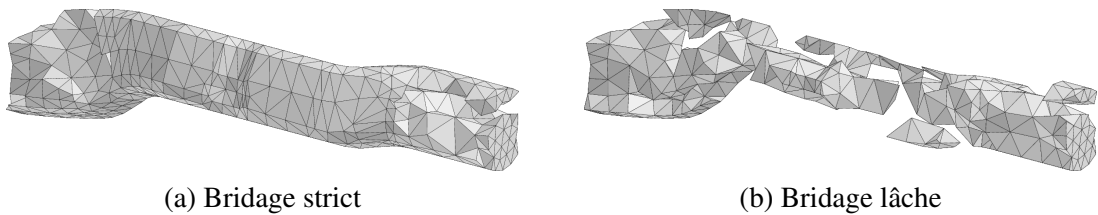


FIGURE 5.32 – Fragmentation finale pour le martelage (8,11) pour les deux bridages

### 5.5.4 Discussion

La modélisation pragmatique de l'étape de débouillage a permis de relativiser l'importance de la position des marteaux sur la fragmentation des noyaux.

Il apparaît assez clairement qu'il ne faut pas réfléchir au problème comme étant uniquement un problème d'optimisation de positions de marteaux mais comme un problème d'optimisation de bridage et de martelage. La fragmentation est nettement plus facilitée par le bridage que par l'optimisation du martelage en lui-même, que ce soit la position des marteaux, mais aussi de la durée ou de l'amplitude de martelage.

Ce raisonnement est d'autant plus important qu'en pratique, il n'y a pas forcément de possibilités de changements concernant les positions des marteaux.

## 5.6 Discussion et perspectives

### 5.6.1 Concernant le zoom structural

Les deux approches de modélisation du débouillage se sont concentrées sur une zone d'intérêt qui est le noyau d'allègement. Les quantifications de débouillabilité sont donc locales et peuvent difficilement se généraliser à tout le noyau. Il faut lire les résultats précédents avec précaution. Par exemple, pour le bridage strict, l'étude par simulation directe du martelage préconise d'utiliser les positions de marteaux (10,11) ou (10,12). Certes, la zone d'intérêt serait probablement bien fragmentée, mais causerait certainement un martelage déséquilibré qui ne

solliciterait pas du tout les noyaux situés en haut de la culasse (au niveau des marteaux 1, 2 et 3).

L'étude aurait pu être menée sur tous des noyaux internes plus vastes tels que les noyaux d'eau. Cependant, cette possibilité a été nettement plus difficile à mettre en pratique, notamment car :

- L'augmentation de la taille de la zone d'intérêt allonge énormément les temps de calculs, surtout quand plusieurs centaines de cycles sont simulées
- La méthode du *remove element* est en pratique assez difficile à utiliser. La suppression d'un élément provoque souvent des problèmes de convergence et ralentissent le calcul. Hors pour les noyaux d'eau qui comportent plus d'éléments, il y a fatalement plus d'éléments supprimés. Donc le temps de calcul est d'autant plus long.

Pour palier au problème d'augmentation de la dimension du problème, la méthode hybride  $H^2ROM$  peut-être employée. Un sous-domaine  $\Omega_R$  d'un noyau  $\Omega_s$  serait alors étudié. Ce sous-domaine peut être une donnée d'entrée du problème (zone difficile à évacuer d'après le retour d'expérience,...), ou provenir d'une étude numérique préalable. Dans la littérature, le domaine réduit provient d'une étude numérique préalable (Ryckelynck *et al.*, 2015). Il n'y a que pour l'étude de l'essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X qu'un domaine réduit indépendant d'une modélisation a été utilisé.

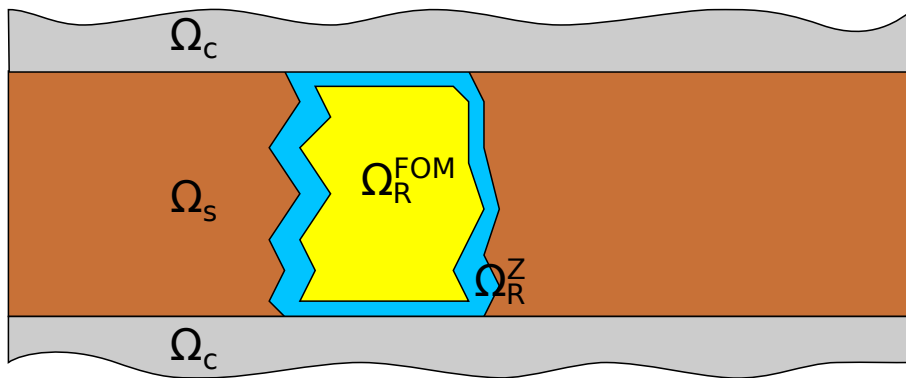


FIGURE 5.33 – Utilisation de la  $H^2ROM$  pour le déburrage

On peut lister deux méthodes afin de déterminer  $\Omega_R$  grâce à une étude numérique. Ces méthodes diffèrent dans leur méthode de détermination de la base réduite  $\mathbf{V}$  qui va servir de support à la construction du domaine réduit :

**Etude modale** : Déterminer les  $N$  champs de déplacement dans le noyau pour un mode propre  $k$  donné calculé pour quelques cycles de variation (sans *remove element*). On obtient alors  $k$  matrices de snapshots  $\mathbf{Q}^k = \mathbf{u}^k[\Omega_s, :]$ . On peut alors déterminer une matrice de snapshots globale de l'étude modale qui est la concaténation des  $k$  matrices modales. Une décomposition en valeurs singulières peut ensuite être menée afin de déterminer une base réduite  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^1, \dots, \mathbf{Q}^N] \quad (5.15)$$

$$= \mathbf{V} \mathbf{S} \mathbf{W}^T + \mathbf{R} \quad (5.16)$$



**Étude par martelage :** Le principe est très similaire à ce qui précède. On considère  $M$  combinaisons de martelage. On effectue alors ces  $M$  martelages pendant quelques cycles (sans *remove element*) afin d'obtenir une  $M$  matrices de snapshots pour chaque combinaison  $k$  :  $\mathbf{Q}^k = \mathbf{u}^k[\Omega_s, :]$ . On peut alors déterminer une matrice de snapshots globale de l'étude par martelage qui est la concaténation des  $k$  matrices de martelages. Une décomposition en valeurs singulières peut ensuite être menée afin de déterminer une base réduite  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}^1, \dots, \mathbf{Q}^M] \quad (5.17)$$

$$= \mathbf{V}\mathbf{S}\mathbf{W}^T + \mathbf{R} \quad (5.18)$$

A partir de là, on peut déterminer le domaine réduit  $\Omega_R$  correspondant à une sélection de degrés de liberté de  $\Omega_S$  permettant de préserver le rang de la base réduite. Cette sélection peut être effectuée grâce à une DEIM ou grâce à l'algorithme  $K$ -SWIM introduit en Section 1. Rappelons qu'avec cette méthode, le domaine réduit obtenu a de grandes chances d'être discontinu. Une schématisation du domaine réduit  $\Omega_R = \Omega_R^Z \cup \Omega_R^{FOM}$  est présentée en Figure 5.33. Dans l'approximation hybride hyper-réduite, dans  $\Omega_R^Z$ , les déplacements sont restreints aux modes empiriques précédemment déterminés par une des méthodes retenues. Cela fournit des conditions aux limites de type Dirichlet pour effectuer des calculs éléments finis dans  $\Omega_R^{FOM}$ . L'utilisation d'une méthode hybride permet d'intégrer la loi de comportement à l'intérieur du domaine réduit et permet une meilleure robustesse de la méthode pour des problèmes impliquant de la localisation de la déformation ou de l'endommagement comme c'est le cas pour l'étude de l'érosion des noyaux.

Néanmoins, la méthode se heurte à deux problèmes :

- Les prédictions  $H^2$ ROM s'incluent dans la chaîne de calculs de déburrage au moment de la simulation du martelage. L'état de contrainte et de déformation dans le domaine réduit n'est pas nul. Cette étape de précontrainte complique les prédictions  $H^2$ ROM.
- L'utilisation du *remove element* rend encore plus difficile la convergence de l'hyper-réduction hybride.

Pour ces raisons, cette méthode n'a pas été employée.

### 5.6.2 La transmission des efforts

Indépendamment du modèle constitutif retenu pour les noyaux de fonderie, la modélisation du déburrage ne peut appréhender un certain nombre de phénomènes dont l'importance est non triviale à estimer.

Le premier concerne la possibilité d'observer un décollement des noyaux au niveau de l'interface avec la pièce métallique. Ce décollement va alors altérer la transmission des efforts de martelage au niveau de la culasse. Un espace de vide va se créer entre les noyaux et l'aluminium. Les déplacements de la culasse vont donc moins affecter les noyaux. Dans la modélisation actuelle, les déplacements de la culasse se transmettent totalement sans prendre en compte un décollement. De plus, ce non décollement au niveau des nœuds d'interface peut provoquer une surestimation des déplacements en traction (qui vont particulièrement fragmenter les noyaux car ils sont moins résistants en traction). Ce phénomène est illustré en Figure 5.34. Le cas (b) correspond aux simulations présentées dans ce chapitre. Aucune donnée expérimentale ne permet d'estimer

vraiment le faciès réel de décollement (sous-figure (c)). La mise au point d'un processus expérimental semble aussi complexe. De plus, inclure ce décollement ou son impact sur le champ de déplacement n'est pas évident.

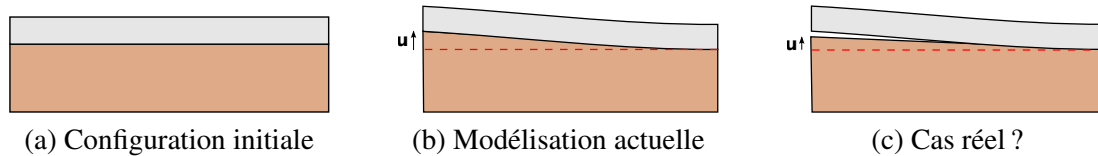


FIGURE 5.34 – Surestimation de la traction

La transmission des efforts est aussi au cœur du problème de formation de *boulettes*, c'est-à-dire de fragments de noyaux décollés de l'aluminium mais d'une taille conséquente (plusieurs millimètres voire centimètres de rayon). Ces agrégats vont alors rebondir lors du martelage. En pratique, cela suffit pour les briser mais il arrive que des boulettes durcies résistent au martelage. Le durcissement de ces agrégats est sans doute dû à la compaction provoquée par le refroidissement de la culasse.

La modélisation actuelle, que ce soit pour l'étude modale ou l'étude en martelage, applique les conditions aux limites de la pièce moulée au niveau de l'interface noyau/alu. Les boulettes, qui peuvent apparaître après le *remove element*, seraient alors sans chargement mécanique. La gravité ou les effets inertiels de martelage étant négligés, le problème des boulettes ne sera pas pris en compte.

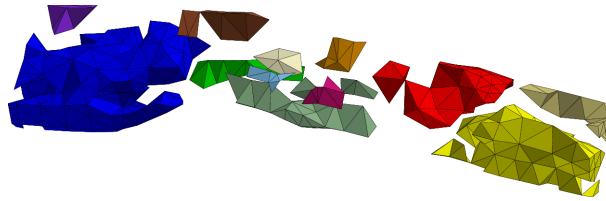
Les résultats de simulation présentés ci-avant n'ont pas fait apparaître de boulettes, définies comme des éléments non supprimés en fin de simulation et n'étant pas rattachés aux nœuds d'interface avec l'aluminium. Cela peut être dû au fait que les conditions de chargement considérés ne permettent pas l'apparition de boulettes, mais aussi au fait que le maillage du noyau d'allègement est assez grossier et comporte peu d'éléments dans l'épaisseur.

### 5.6.3 Saturation de l'endommagement

La saturation de l'endommagement apparaît comme une impasse pour une évacuation complète des noyaux internes. Les simulations donnent un résultat assez pessimiste : même en martelant toujours plus longtemps, quelque soit la configuration considérée (bridage, zone sollicitée), des zones resteront non fragmentées. Ces zones représentent au mieux 30% de la géométrie complète, ce qui n'est pas négligeable.

Pour les deux méthodes de modélisation et d'optimisation, le noyau résultant est morcelé (voir à nouveau la Figure 5.32 (b) pour le martelage et la Figure 5.35 pour l'étude modale). Certains agrégats se limitent à quelques éléments "collés" à l'interface. Dans la Figure 5.35, on peut mettre en évidence les sous-domaines colorés en marron par exemple. Ces micro-fragments de quelques millimètres peuvent certainement être considérés comme "éliminés". Si l'on considère qu'ils se sont décollés, les secousses lors du martelage pourraient les fragmenter encore plus. De même, du fait de leur petite taille, on peut aussi estimer qu'ils seront évacués lors de la mise en vibration de la pièce (étape non simulée).

Ces fragments isolés peuvent être supprimés en post-traitement des calculs afin de déterminer un nouvel état de débarrassabilité moins pessimiste. Cela permettrait de considérer, certes



Bridage lâche, mode 20

FIGURE 5.35 – Noyau après martelage

assez rustiquement, l'étape de mise en vibration de la pièce, jusqu'ici négligée.

La saturation de l'endommagement peut aussi être due au fait que le chargement imposé sur les noyaux ne varie pas en amplitude. Les mouvements ou les modes propres de la pièce moulée ont été déterminés sans la présence des noyaux. Cette présence des noyaux a un impact sur le mouvement de la culasse, impact négligé dans une approche simplifiée. Un culasse ayant des noyaux internes va moins se déformer au niveau de ses cavités. Lors du martelage, ces noyaux vont se fragmenter, permettant un plus grand mouvement de la pièce, et donc un effort transmis de plus en plus grand sur les noyaux restant. Ce "cercle vertueux" peut permettre d'outrepasser cette saturation de la fragmentation.

#### 5.6.4 Variabilité des conditions aux limites

##### 5.6.4.1 Motivation et formalisme

Deux conditions de maintien de la culasse au niveau de la face feu ont été considérées. Il apparaît que ce sont ces conditions qui vont radicalement affecter le comportement de la pièce lors de son martelage et avoir un rôle de premier plan sur l'élimination des noyaux de sable. La présente discussion présente deux méthodes envisagées pour une étude plus exhaustive de ce maintien. Dans les deux cas, seul le bridage en face feu est une inconnue du problème, les appuis latéraux et au niveau de la masselotte sont identiques. La géométrie de la face feu est schématisée par un rectangle (voir Figure 5.36). On exploite les symétries de la géométrie. On modélise les appuis sur un quart de la pièce et on complète sur l'ensemble de la pièce grâce aux deux symétries axiales. On propage les appuis aux zones hors du rectangle lorsque les zones voisines sont elles-mêmes en appui.

Ces nouveaux appuis peuvent alors être étudiés par l'une des méthodes détaillées précédemment (modale ou martelage). La base de ce formalisme repose sur le fait que la face feu ressemble approximativement à un rectangle. C'est généralement le cas pour les culasses.

On peut alors envisager une nouvelle approche de l'optimisation du débouillage. Au lieu d'optimiser la position des marteaux en fonction d'un bridage donné (comme cela a été fait actuellement), on peut optimiser conjointement le bridage et le martelage, voire le bridage en fonction d'une configuration de martelage donnée.

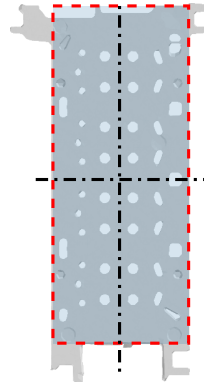
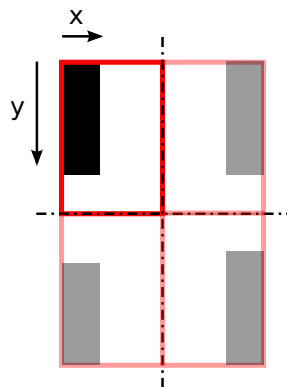


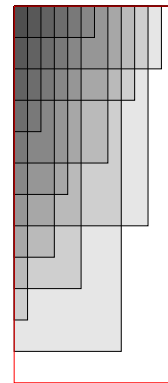
FIGURE 5.36 – Approximation géométrique de la face feu

#### 5.6.4.2 Modélisation continue

La première approche consiste à adopter une modélisation "continue" du maintien en face feu. Considérons le quart supérieur gauche du rectangle de la face feu. On modélise l'appui par un rectangle  $(x, y)$  ayant pour origine le coin supérieur gauche (voir Figure 5.37 (a)). Les deux bridages considérés s'inscrivent en fait dans ce formalisme.



(a) Mise en données



(b) Exemple d'échantillonnage

FIGURE 5.37 – Paramétrisation continue du bridage

Pour explorer l'espace des paramètres de bridages, un échantillonnage peut être effectué afin de déterminer un ensemble de bridages :  $\mathbf{B} = [(x_1, y_1), \dots, (x_s, y_s)]$ . La Figure 5.37 (b) montre un exemple d'échantillonnage avec 12 appuis obtenus grâce à un échantillonnage par hypercube latin (LHS ou *Latin hypercube sampling*).

#### 5.6.4.3 Modélisation discrète

La modélisation discrète consiste à diviser le rectangle de la face feu en plusieurs sous-rectangles, eux-même divisés en sous-rectangles. Ce formalisme est représenté par un arbre

avec au premier étage la discrétisation des éléments  $A_i$  et au second étage celle des éléments  $B_j$  (Figure 5.38 (c)). Etudier les martelages revient à parcourir cet arbre. L'illustration de la méthode montre 6 niveaux de discrétisation à l'échelle  $A$  et 4 à l'échelle  $B$ . Cela peut naturellement être amené à être évoluer. De même, les "patches" n'ont pas forcément besoin d'être de même taille ou d'être rectangulaires.

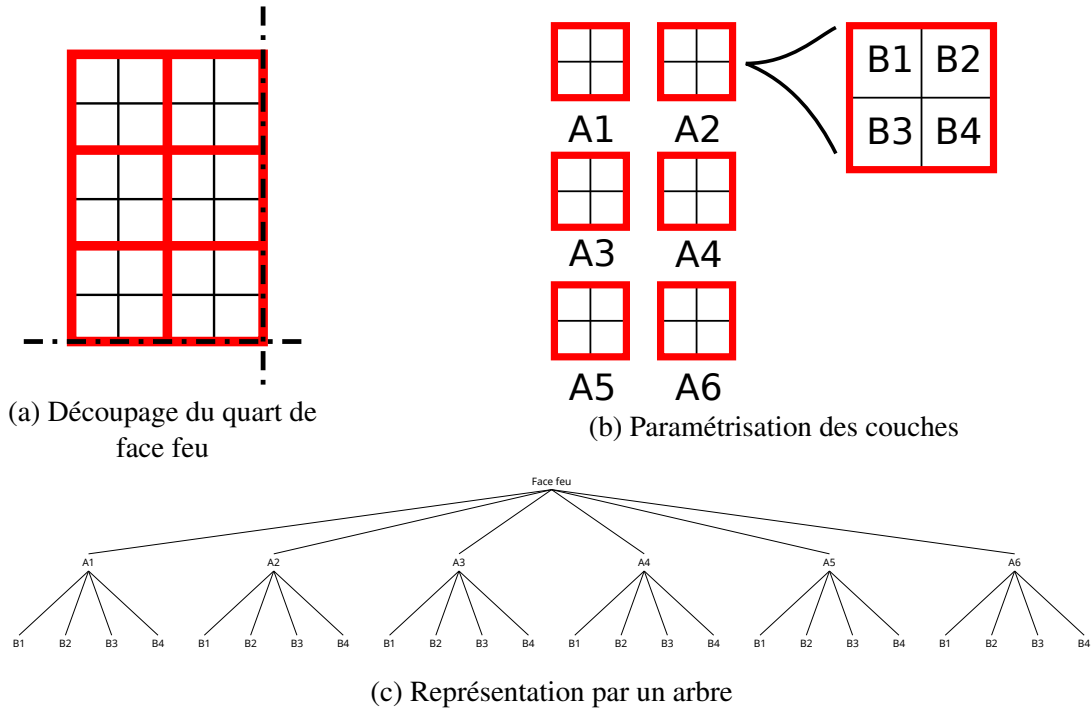


FIGURE 5.38 – Paramétrisation discrète du bridage

# Conclusion générale

Les travaux de thèse avaient pour objectif de modéliser et simuler le comportement des noyaux de fonderie en vue de l'optimisation du processus de débouillage. Ce matériau, qui est un sable à liant polyuréthane, a un comportement mécanique complexe. Il manifeste à la fois des caractéristiques dites frictionnelles, comme les sables non liés (plasticité, localisation de la déformation, ...), mais aussi des caractéristiques cohésives dues à l'ajout d'une résine qui va former des ponts intergranulaires. Cette cohésion artificielle assure de meilleures caractéristiques mécaniques : raideur plus élevée, seuil à rupture plus grand, résistance à la traction, etc. Le comportement de ce sable lié se trouve radicalement altéré par la température de vieillissement. La résine polyuréthane est irréversiblement dégradée par un chargement thermique. Cela se traduit par une importante perte de masse qui va affaiblir les ponts de résine - qui voient leur section réduire - mais aussi leur adhérence au niveau des grains à cause de bulles d'évaporation qui les rendent poreux.

Ces phénomènes complexes et souvent peu évoqués dans la littérature ont été au cœur des travaux de thèse de Claire Menet (2017). Les observations et les caractérisations expérimentales par le biais d'essais standards ont été les points d'entrée de cette présente thèse.

Le premier objectif de la thèse a donc été de savoir capitaliser et synthétiser ces résultats expérimentaux denses afin de mettre au point une chaîne de calculs concernant la problématique de débouillage. Le premier maillon de la chaîne concerne la mise au point d'une modélisation du comportement mécanique du noyau permettant d'appréhender la sensibilité au vieillissement thermique. Une loi élastoplastique a été retenue. Ce choix permet d'obtenir un compromis entre le coût de calcul et la pertinence des résultats. La modélisation doit être menée à Montupet sur une géométrie réelle. La *Discrete Element Method* n'est absolument pas envisageable à l'heure actuelle.

Le choix a été fait d'adapter le *Cemented Clay and Sand Model* afin de lui ajouter une dépendance à la température de vieillissement et un endommagement. Une démarche de calibration basée sur l'exploitation d'un panel relativement restreint d'essais standards a été développée. Deux plages de températures de vieillissement ont alors émergé. A une température inférieure à  $\theta_c = 200^\circ\text{C}$ , les propriétés mécaniques du matériau demeurent solides. La raideur comme la résistance mécanique se maintiennent. Au-delà, les propriétés mécaniques se dégradent radicalement. Le matériau perd en cohésion et devient plus friable.

La capacité du modèle à prédire la localisation et l'endommagement a été testée grâce aux études de l'essai de compression uniaxiale étudié en tomographie et à l'essai de push-out. L'exploitation des données de tomographie a permis d'analyser le phénomène de localisation de la déformation

en jeu lors des essais standards. Le champ de déplacement est très inhomogène avant le pic de la courbe de chargement. Des amorces de localisation ont lieu au sein de l'échantillon. La déformation plastique concerne au final une zone très restreinte. Les déplacements expérimentaux ont servi de conditions aux limites pour un calcul éléments finis utilisant le C-CASM. Le modèle a alors montré sa capacité à appréhender la localisation ainsi que la magnitude de l'effort maximal appliqué. Cependant, les déformations plastiques sont surestimées, du fait de l'absence de durcissement pré-pic dans la modélisation.

Cette relative impasse fut en partie surmontée en modifiant la loi d'écrouissage du paramètre de liant  $b$  du C-CASM afin d'inclure un premier durcissement. Ce nouveau modèle fut nommé *Modified Cemented Clay And Sand Model* (MC-CASM). Afin de le calibrer, les données expérimentales issues de la tomographie furent utilisées. A cette fin, une méthode d'élagage de données fut élaborée. Cela a permis de réduire de près de 85% le volume des données à traiter. Grâce à l'utilisation d'une méthode hybride d'hyper-réduction, la  $H^2$ ROM, le MC-CASM fut calibré en un temps et un coût de calculs raisonnables. La procédure de mise à jour des paramètres du modèle via le système hyper-réduit hybride fut nommée la FEMU- $H^2$ ROM pour Finite Element Model Updating-  $H^2$ ROM. Elle peut s'étendre à tous les problèmes de calibrations de modèles constitutifs élastoplastiques souhaitant utiliser des données issues de la tomographie, trop massives pour être conservées sur le long terme dans le but d'en améliorer éventuellement la modélisation.

L'autre étude de validation du C-CASM concerne la simulation de l'essai de push-out. Cet essai met en jeu plusieurs phénomènes cruciaux : un gradient de dégradation thermique de la résine, et donc de propriétés mécaniques, de l'endommagement, de la localisation, de l'érosion, et du contact à l'interface entre l'aluminium et le noyau dégradé. Ce dernier point fut modélisé grâce à l'utilisation d'éléments cohésifs. Ces éléments ont été développés dans l'optique de traiter le délaminage de composites. La dégradation thermique du noyau durant la coulée fut déterminée grâce à une étude simplifiée s'appuyant avant tout sur des observations expérimentales de dégradation thermique du matériau. Cette approche pragmatique permet d'avoir accès à un gradient de propriétés mécaniques dans l'échantillon post-coulée. La simulation de l'extraction permet d'obtenir le faciès de rupture en forme de cloche du noyau final. Des bandes localisation apparaissent durant le calcul jusqu'à ce que celle du coin inférieur au niveau de l'interface aluminium/noyau ne prenne le dessus jusqu'à esquisser le faciès de rupture campaniforme. Des séquences de *stick slip* (collé glissé) sont aussi observées. Ces dernières se traduisent par des petites charges/décharges sur la courbe de chargement macroscopiques. Elles apparaissent aussi sur les courbes expérimentales. Cependant, il est apparu que la fréquence d'apparition des bandes dépend fortement de la taille de maille. Ce problème de dépendance au maillage n'a pas été traité par exemple par une régularisation du modèle. La procédure, certes simpliste pour son traitement de la dégradation thermique, et le modèle complet, c'est-à-dire en tenant compte de plusieurs températures de vieillissement, ont pu alors être validées.

Tous ces travaux ont alors posé les bases de l'étude du débouillage de culasses. Cette étude numérique peut être vue comme une mise en application du modèle et de diverses méthodes utilisées lors des chapitres précédents. Ici aussi une chaîne de calculs a été mise au point. Cette chaîne correspond aux étapes du cycle de vie du noyau. La première étape de la vie d'un noyau est tout simplement sa création (étape dite de noyautage). Cette étape concerne notamment le

choix du sable, de la résine ainsi que son taux. Le comportement de ce matériau est alors caractérisé et modélisé numériquement. Ici, pour le noyau de fonderie à liant polyuréthane, on propose d'utiliser le C-CASM adapté précédemment. Pour un autre noyautage un autre modèle peut être naturellement utilisé.

Le deuxième maillon de cette chaîne concerne la coulée de l'aluminium liquide sur le noyau, menant à une dégradation thermique du liant. Comme pour le push-out, une étude simplifiée du chargement thermique a été menée. Il a été conclu que pour les noyaux internes, la dégradation thermique est supérieure à 300°C. L'étude du débouillage utilise donc la loi de comportement pour un vieillissement de 300°C. Il n'y a pas de gradient de propriétés mécaniques comme pour l'étude du push-out.

Le troisième maillon de la chaîne correspond au refroidissement de la culasse qui va comprimer les noyaux et les durcir. Cette étape avait aussi été traitée dans le cas du push-out. La contraction de la culasse va comprimer fortement les noyaux et les écraser. Cette étape est en fait primordiale pour comprendre le comportement des noyaux lors du débouillage. Lors du refroidissement, ils sont fortement durcis, rendant le matériau plus difficile à fragmenter.

Le quatrième et dernier maillon de la chaîne de calculs est la simulation du martelage au niveau de la masselotte. L'étude numérique menée a montré la prédominance de l'impact des appuis de la pièce moulée en face feu. Ce bridage va conditionner la bonne débouillabilité de la pièce. Deux approches pour étudier le martelage ont été mises au point : une étude dite modale qui va se focaliser sur les modes propres de la pièce (en fonction des conditions d'appuis) et une étude dite par martelage où la déformée de la pièce est calculée par application d'une configuration de martelage donnée. Pour les deux méthodes, les conditions aux limites de la pièce moulée sont imposées sur un noyau interne au niveau de l'interface aluminium/noyau. Pour alléger les calculs, l'étude a ensuite concerné uniquement une zone d'intérêt de la géométrie plutôt que tous les noyaux internes. La fragmentation est évaluée grâce à l'utilisation du *remove element* dépendant de la variable d'endommagement comme grandeur seuil.

Les deux méthodes mettent en évidence que marteler plus longtemps ne permet pas de fragmenter plus les noyaux. Un phénomène de saturation de la fragmentation apparaît. De même, un seuil de débouillabilité survient : un mode peu sollicité ou un martelage trop faible ne permettra jamais de casser un noyau. La fragmentation de la zone d'intérêt est avant tout conditionnée par le bridage, ensuite par les positions des marteaux. L'idée est de laisser la culasse se déformer le plus possible et donc d'appliquer un bridage plus lâche.

Les perspectives de l'étude concernent l'utilisation de la méthode hybride d'hyper-réduction sur une zone d'intérêt. Cette zone peut provenir de retours d'expérience (zone qui ne se fragmente pas) ou d'une étude numérique.





# Bibliographie

- R. AFFES, J.-Y. DELENNE, Y. MONERIE, F. RADJAÏ et V. TOPIN : Tensile strength and fracture of cemented granular aggregates. *The European Physical Journal E*, 35(11):117, Nov 2012. URL <https://doi.org/10.1140/epje/i2012-12117-7>.
- A. AHMADI et E. S. HOSSEININIA : An experimental investigation on stable arch formation in cohesionless granular materials using developed trapdoor test. *Powder Technology*, 2018. ISSN 0032-5910. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0032591018301323>.
- K. ALSHIBLI, S. STURE, N. C. COSTES, M. L. FRANK, M. LANKTON, S. BATISTE et R. A. SWANSON : Assessment of localized deformations in sand using x-ray computed tomography. *Geotechnical Testing J.*, 23, 02 2000.
- R. AMI SAADA, G. BONNET et D. BOUVARD : Thermomechanical behavior of casting sands : Experiments and elastoplastic modeling. *International Journal of Plasticity*, 12(3):273 – 294, 1996. ISSN 0749-6419. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641996000083>.
- E. ANDÒ, S. A. HALL, G. VIGGIANI, J. DESRUES et P. BÉSUELLE : Grain scale experimental investigation of localised deformation in sand : a discrete particle tracking approach. *Acta Geotechnica*, 7(1):1–13, 2012. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01571111>.
- D. ANDRÉ, I. IORDANOFF, J.-L. CHARLES et J. NÉAUPORT : Discrete element method to simulate continuous material by using the cohesive beam model. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 213–216:113 – 125, 2012. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782511003811>.
- J. R. F. ARTHUR, R. G. JAMES et K. H. ROSCOE : The determination of stress fields during plane of a sand mass. *Géotechnique*, 14(4):283–308, 1964. URL <https://doi.org/10.1680/geot.1964.14.4.283>.
- A. ASAOKA, M. NAKANO et T. NODA : Superloading yield surface concept for highly structured soil behavior. *soils and foundations*, 40(2):99–110, 2000.
- N. AUBRY, P. HOLMES, J. L. LUMLEY et E. STONE : The dynamics of coherent structures in the wall region of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 192:115–173, 1988.

- J. BAIGES, R. CODINA et S. IDELSON : A domain decomposition strategy for reduced order models. application to the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, 267:23–42, 2013.
- D. BALVAY, N. KACHENOURA, S. ESPINOZA, I. THOMASSIN-NAGGARA, L. S. FOURNIER, O. CLEMENT et C.-A. CUENOD : Signal-to-noise ratio improvement in dynamic contrast-enhanced CT and MR imaging with automated principal component analysis filtering. *Radiology*, 258(2):435–445, 2011. URL <https://doi.org/10.1148/radiol.10100231>. PMID : 21177386.
- J.Q. BAO, X. LONG, K.H. TAN et C.K. LEE : A new generalized drucker–prager flow rule for concrete under compression. *Engineering Structures*, 56:2076 – 2082, 2013. ISSN 0141-0296. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029613003921>.
- H. BARGAOU, F. AZZOUZ, D. THIBAUT et G. CAILLETAUD : Thermomechanical behavior of resin bonded foundry sand cores during casting. *Journal of Materials Processing Technology*, 246:30 – 41, 2017. ISSN 0924-0136. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924013617300869>.
- M. BARRAULT, Y. MADAY, N. Cuong NGUYEN et A. T. PATERA : An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9):667 – 672, 2004. ISSN 1631-073X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631073X04004248>.
- J. BESSON, G. CAILLETAUD, J.L. CHABOCHE et S. FOREST : *Mécanique non linéaire des matériaux*. Etudes en mécanique des matériaux et des structures. Hermès Science Publ., 2001. ISBN 9782746202689. URL <https://books.google.fr/books?id=AUuFmgEACAAJ>.
- L. BRUNO : Mechanical characterization of composite materials by optical techniques : A review. *Optics and Lasers in Engineering*, 104:192 – 203, 2018. ISSN 0143-8166. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143816617304190>. Optical Tools for Metrology, Imaging and Diagnostics.
- S. CHATURANTABUT et D. C. SORESENSEN : Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *Siam Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764, 2010.
- E. CHICHTI, V. LULLIEN-PELLERIN, M. GEORGE, F. RADJAI, R. AFFÈS et J.-Y. DELENNE : Bottom-up model for understanding the effects of wheat endosperm microstructure on its mechanical strength. *Journal of Food Engineering*, 190:40 – 47, 2016. ISSN 0260-8774. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0260877416302175>.
- M. O. CIANTIA et C. di PRISCO : Extension of plasticity theory to debonding, grain dissolution, and chemical damage of calcarenites. *International Journal for Numerical and Analytical*

- Methods in Geomechanics*, 40(3):315–343, 2016. ISSN 1096-9853. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nag.2397>. NAG-14-0265.R2.
- A. CIOACA et A. SANDU : Low-rank approximations for computing observation impact in 4D-Var data assimilation. *Computers and Mathematics with Applications*, 67(12):2112 – 2126, 2014. ISSN 0898-1221. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122114000650>. Efficient Algorithms for Large Scale Scientific Computations.
- J. CUGNONI, J. BOTSIS et J. JANCZAK-RUSCH : Size and constraining effects in lead-free solder joints. *Advanced Engineering Materials*, 8(3):184–191, 2006. ISSN 1527-2648. URL <http://dx.doi.org/10.1002/adem.200400236>.
- J. CUGNONI, T. GMÜR et A. SCHORDERET : Inverse method based on modal analysis for characterizing the constitutive properties of thick composite plates. *Computers and Structures*, 85 (17):1310 – 1320, 2007. ISSN 0045-7949. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794906003592>. Computational Structures Technology.
- P. A. CUNDALL et O. D. L. STRACK : A discrete numerical model for granular assemblies. *Géotechnique*, 29(1):47–65, 1979. URL <https://doi.org/10.1680/geot.1979.29.1.47>.
- A. DAS, A. TENGATTINI, G. D. NGUYEN, G. VIGGIANI, S. A. HALL et I. EINAV : A thermomechanical constitutive model for cemented granular materials with quantifiable internal variables. part ii – validation and localization analysis. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 70:382 – 405, 2014. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509614001203>.
- C. S. DESAI et J. TOTH : Disturbed state constitutive modeling based on stress-strain and nondestructive behavior. *International Journal of Solids and Structures*, 33(11):1619 – 1650, 1996. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768395001158>.
- J. DESRUES : *La localisation de la déformation dans les milieux granulaires*. Theses, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, juin 1984. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00008343>.
- J. DESRUES et E. ANDÒ : Strain localisation in granular media. *Comptes Rendus Physique*, 16(1):26 – 36, 2015. ISSN 1631-0705. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S163107051500002X>. Granular physics / Physique des milieux granulaires.
- J. DESRUES, R. CHAMBON, M. MOKNI et F. MAZEROLLE : Void ratio evolution inside shear bands in triaxial sand specimens studied by computed tomography. *Géotechnique*, 46(3):529–546, 1996. URL <https://doi.org/10.1680/geot.1996.46.3.529>.

- J. DESRUES et B. DUTHILLEUIL : Mesure du champ de déformation d'un objet plan par la méthode stéréophotogrammétrique de faux relief. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, 3(1):79–103, 1984. ISSN 0750-7240. URL <http://www.refdoc.fr/Detailnotice?idarticle=12149499>. fre.
- J. DESRUES et G. VIGGIANI : Strain localization in sand : an overview of the experimental results obtained in grenoble using stereophotogrammetry. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28(4):279–321, 2004. ISSN 1096-9853. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nag.338>.
- T. A. DEWERS, K. A. ISSEN, D. J. HOLCOMB, W. A. OLSSON et M. D. INGRAHAM : Strain localization and elastic-plastic coupling during deformation of porous sandstone. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, 98:167 – 180, 2017. ISSN 1365-1609. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1365160917306901>.
- G. DING, Q. ZHANG et Y. ZHOU : Strengthening of cold-setting resin sand by the additive method. *Journal of Materials Processing Technology*, 72(2):239 – 242, 1997. ISSN 0924-0136. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092401369700174X>.
- A. DRESCHER et G. de Josselin de JONG : Photoelastic verification of a mechanical model for the flow of a granular material. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 20(5):337 – 340, 1972. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509672900294>.
- D.C. DRUCKER et W. PRAGER : *Soil mechanics and plastic analysis for limit design*, volume 10. Quarterly of Applied Mathematics, 1952. pp. 157-165.
- J. FAUQUE, I. RAMIÈRE et D. RYCKELYNCK : Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 0(0), 2018. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/nme.5798>.
- R. FORESTIER, E. MASSONI et Y. CHASTEL : Estimation of constitutive parameters using an inverse method coupled to a 3D finite element software. *Journal of Materials Processing Technology*, 125-126:594 – 601, 2002. ISSN 0924-0136. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924013602004065>.
- J.T. FOX, F.S. CANNON, N.R. BROWN, H. HUANG et J.C. FURNESS : Comparison of a new, green foundry binder with conventional foundry binders. *International Journal of Adhesion and Adhesives*, 34(Supplement C):38 – 45, 2012. ISSN 0143-7496. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0143749611001679>.
- A. GENS et R. NOVA : Conceptual bases for a constitutive model for bonded soils and weak rocks. *Geotechnical engineering of hard soils-soft rocks*, 1(1):485–494, 1993.
- A. GENS et D.M. POTTS : Critical state models in computational geomechanics. *Engineering Computations*, 5:178–197, 1988.

- F. GHAVAMIAN, P. TISO et A. SIMONE : POD–DEIM model order reduction for strain-softening viscoplasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 317:458 – 479, 2017. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782516304054>.
- M GITON, A.-S. CARO-BRETELLE et P. IENNY : Hyperelastic behaviour identification by a forward problem resolution : Application to a tear test of a silicone-rubber. *Strain*, 42:291–297, 11 2006.
- B. HAASDONK, M. DIHLMANN et M. OHLBERGER : A training set and multiple bases generation approach for parameterized model reduction based on adaptive grids in parameter space. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 17(4):423–442, 2011. URL <https://doi.org/10.1080/13873954.2011.547674>.
- S. A. HALL, M. BORNERT, J. DESRUES, Y. PANNIER, N. LENOIR, G. VIGGIANI et P. BÉ-SUELLE : Discrete and continuum analysis of localised deformation in sand using x-ray ct and volumetric digital image correlation. 60, 01 2010.
- L.H. HAN, J.A. ELLIOTT, A.C. BENTHAM, A. MILLS, G.E. AMIDON et B.C. HANCOCK : A modified Drucker-Prager Cap model for die compaction simulation of pharmaceutical powders. *International Journal of Solids and Structures*, 45(10):3088 – 3106, 2008. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768308000322>.
- F. HOMAND, P. DUFFAUT et Comité français de mécanique des ROCHES : *Manuel de mécanique des roches*. Numéro vol. 1 in Manuel de mécanique des roches. Les Presses de l’Ecole des Mines, 2000. ISBN 9782911762239.
- Y. HONG, S. KWONG, Y. CHANG et Q. REN : Unsupervised data pruning for clustering of noisy data. *Knowledge-Based Systems*, 21(7):612–616, OCT 2008. ISSN 0950-7051.
- Y. HU, H. CHEN, G. LI, H. LI, R. XU et J. LI : A statistical training data cleaning strategy for the PCA-based chiller sensor fault detection, diagnosis and data reconstruction method. *Energy and Buildings*, 112:270 – 278, 2016. ISSN 0378-7788. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378778815304291>.
- P. IENNY, A.-S. CARO-BRETELLE et E. PAGNACCO : Identification from measurements of mechanical fields by finite element model updating strategies. *European Journal of Computational Mechanics*, 18(3-4):353–376, 2009. URL <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.3166/ejcm.18.353-376>.
- J.-F. JIANG et Y.-F. WU : Identification of material parameters for drucker–prager plasticity model for {FRP} confined circular concrete columns. *International Journal of Solids and Structures*, 49(3–4):445 – 456, 2012. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768311003325>.
- M. JIRASEK et Z.P. BAZANT : *Inelastic analysis of structures*. J. Wiley and Sons, 2002.

- G. JOMAA, P. GOBLET, C. COQUELET et V. MORLOT : Kinetic modeling of polyurethane pyrolysis using non-isothermal thermogravimetric analysis. *Thermochimica Acta*, 612:10 – 18, 2015. ISSN 0040-6031. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0040603115002051>.
- J. KAIPIO et E. SOMERSALO : Statistical Inverse Problems : Discretization, Model Reduction and Inverse Crimes. *J. Comput. Appl. Math.*, 198(2):493–504, janvier 2007. ISSN 0377-0427. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.cam.2005.09.027>.
- A.I KARABINIS et T.C ROUSAKIS : Concrete confined by FRP material : a plasticity approach. *Engineering Structures*, 24(7):923 – 932, 2002. ISSN 0141-0296. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029602000111>. {SEMC} 2001.
- K. T. KAVANAGH : Extension of classical experimental techniques for characterizing composite-material behavior. *Experimental Mechanics*, 12(1):50–56, Jan 1972. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/BF02320791>.
- K. T. KAVANAGH et R. W. CLOUGH : Finite element applications in the characterization of elastic solids. *International Journal of Solids and Structures*, 7(1):11 – 23, 1971. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768371900151>.
- M. KIRBY et L. SIROVICH : Application of the karhunen-loeve procedure for the characterization of human faces. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 12(1):103–108, Jan 1990. ISSN 0162-8828.
- Y. KLAUSNER : *Fundamentals of continuum mechanics of soils*. Springer-Verlag, 1991. ISBN 9783540195467.
- F. LATOURTE, A. CHRYSOCHOOS, S. PAGANO et B. WATTRISSE : Elastoplastic behavior identification for heterogeneous loadings and materials. *Experimental Mechanics*, 48:435–449, 2008. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00347461>.
- A. LE BOUIL, A. AMON, J.-C. SANGLEBOEUF, H. ORAIN, P. BÉSUELLE, G. VIGGIANI, P. CHASLE et J. CRASSOUS : A biaxial apparatus for the study of heterogeneous and intermittent strains in granular materials. *Granular Matter*, 16(1):1–8, Feb 2014. ISSN 1434-7636. URL <https://doi.org/10.1007/s10035-013-0477-x>.
- D. LECOMPTE, A. SMITS, H. SOL, J. VANTOMME et D. Van HEMELRIJCK : Mixed numerical–experimental technique for orthotropic parameter identification using biaxial tensile tests on cruciform specimens. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1643 – 1656, 2007. ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768306002848>.
- J. LIU, P. MUSIALSKI, P. WONKA et J. YE : Tensor completion for estimating missing values in visual data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 35:208–220, 2013.

- R. MAHNKEN et E. STEIN : A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 136(3):225 – 258, 1996. ISSN 0045-7825. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0045782596009917>.
- R. MEIJER, L. F. A. DOUVEN et C. W. J. OOMENS : Characterisation of anisotropic and non-linear behaviour of human skin in vivo. *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 2(1):13–27, 1999. URL <https://doi.org/10.1080/10255849908907975>. PMID : 11264815.
- C. MENET : *Etude du comportement thermomécanique de matériaux sable-résine et application aux noyaux de fonderie d'aluminium*. Manuscrit de thèse, Université de Lyon - Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2017.
- J. MOLIMARD, R. LE RICHE, A. VAUTRIN et J. R. LEE : Identification of the four orthotropic plate stiffnesses using a single open-hole tensile test. *Experimental Mechanics*, 45(5):404–411, Oct 2005. URL <https://doi.org/10.1007/BF02427987>.
- P. MOSBAH, D. BOUVARD, E. OUEDRAOGO et P. STUTZ : Experimental techniques for analysis of die pressing and ejection of metal powder. *Powder Metallurgy*, 40(4):269–277, 1997. URL <https://doi.org/10.1179/pom.1997.40.4.269>.
- J. NEGGERS, O. ALLIX, F. HILD et S. ROUX : Big data in experimental mechanics and model order reduction : Today's challenges and tomorrow's opportunities. *Archives of Computational Methods in Engineering*, Jul 2017. ISSN 1886-1784. URL <https://doi.org/10.1007/s11831-017-9234-3>.
- T. B. NGUYEN et A. AMON : Experimental study of shear band formation : bifurcation and localization. *EPL - Europhysics Letters*, novembre 2016. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01358198>.
- R. NOVA, R. CASTELLANZA et C. TAMAGNINI : A constitutive model for bonded geomaterials subject to mechanical and/or chemical degradation. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 27(9):705–732, 2003. ISSN 1096-9853. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nag.294>.
- J. OTANI, T. MUKUNOKI et Y. OBARA : Characterization of failure in sand under triaxial compression using an industrial x-ray ct scanner. *International Journal of Physical Modelling in Geotechnics*, 2(1):15–22, 2002. URL <https://doi.org/10.1680/ijpmg.2002.020102>.
- S. PADMANABHAN, J. P. HUBNER, A. V. KUMAR et P. G. IFJU : Load and boundary condition calibration using full-field strain measurement. *Experimental Mechanics*, 46(5):569–578, Oct 2006. ISSN 1741-2765. URL <https://doi.org/10.1007/s11340-006-8708-2>.
- D. PAN : A tutorial on MPEG/audio compression. *IEEE MultiMedia*, 2(2):60–74, 1995. ISSN 1070-986X.



- V. PAPANIKOLAOU et A. KAPPOS : Confinement-sensitive plasticity constitutive model for concrete in triaxial compression. *International Journal of Solids and Structures*, 2007.
- J. C. PASSIEUX et J. N. PERIE : High resolution digital image correlation using proper generalized decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(6):531–550, NOV 9 2012. ISSN 0029-5981.
- B. PEHERSTORFER, D. BUTNARU, K. WILLCOX et H.-J. BUNGARTZ : Localized discrete empirical interpolation method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 36(1):A168–A192, 2014. URL <https://doi.org/10.1137/130924408>.
- M. RAHIMI, D. CHAN, A. NOURI et R. RASOULI : Effects of inherent fabric anisotropy and intermediate principal stress on constitutive behavior of uncemented and cemented sands. *Computers and Geotechnics*, 80:237 – 247, 2016. ISSN 0266-352X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X16301926>.
- L. RATKE et S. BRÜCK : Mechanical properties of aerogel composites for casting purposes. *Journal of Materials Science*, 41(4):1019–1024, Feb 2006. URL <https://doi.org/10.1007/s10853-005-3152-8>.
- L. RESENDE et J.B. MARTIN : Formulation of Drucker-Prager Cap model. *Journal of Engineering Mechanics*, 111(7):855–881, 1985. cited By 34.
- J. RICE : The initiation and growth of shear bands. *Symp. on Plasticity in Soil Mechanics*, pages 263–278, 01 1973.
- J.R. RICE : The localization of plastic deformation. in : W.T. Koiter (Ed.), *Theoretical and Applied Mechanics*, pages 207–220, 1976.
- S. RIOS, M. CIANTIA, N. GONZALEZ, M. ARROYO et A. Viana da FONSECA : Simplifying calibration of bonded elasto-plastic models. *Computers and Geotechnics*, 73:100 – 108, 2016. ISSN 0266-352X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X15002499>.
- T. ROJANAARPA et I. KATAEVA : Density-based data pruning method for deep reinforcement learning. In *2016 15th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)*, pages 266–271, Dec 2016.
- K. H. ROSCOE : The influence of strains in soil mechanics. *Géotechnique*, 20(2):129–170, 1970. URL <https://doi.org/10.1680/geot.1970.20.2.129>.
- K.H. ROSCOE : *Determination of Strains in Soils by X-ray Method*. Defense Technical Information Center, 1963.
- K.H. ROSCOE et J.B. BURLAND : On the generalized stress strain behaviour of 'wet' clay. *Engineering plasticity*, 1968.
- K.H. ROSCOE, A.N. SCHOFIELD et A. THURAIRAJAH : Yielding of clays in states wetter than critical. *Geotechnique* 13(3), pages 211–240, 1963.

- K.H. ROSCOE, A.N. SCHOFIELD et C.P. WROTH : On the yielding of soils. *Geotechnique* 8(1), pages 22–52, 1958.
- P.W. ROWE : The stress-dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 269(1339):500–527, 1962. ISSN 0080-4630. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/269/1339/500>.
- J.W. RUDNICKI et J.R. RICE : Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23(6):371 – 394, 1975. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509675900010>.
- D. RYCKELYNCK : A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366, 2005. ISSN 0021-9991.
- D. RYCKELYNCK, K. LAMPOH et S. QUILICI : Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, pages 1–9, 2015. ISSN 0025-6455. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-015-0244-7>.
- D. RYCKELYNCK et D. MISSOUM BENZIANE : Hyper-reduction framework for model calibration in plasticity-induced fatigue. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1):15, May 2016. ISSN 2213-7467. URL <https://doi.org/10.1186/s40323-016-0068-6>.
- J. RÉTHORÉ : Ufreckles, octobre 2018. URL <https://doi.org/10.5281/zenodo.1433776>.
- J. RÉTHORÉ, S. ROUX et F. HILD : From pictures to extended finite elements : extended digital image correlation (x-dic). *Comptes Rendus Mécanique*, 335(3):131 – 137, 2007. ISSN 1631-0721. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1631072107000137>.
- A. SCHMIDT, A. POTSCHKA, S. KOERKEL et H. G. BOCK : Derivative-Extended POD Reduced-Order Modeling for Parameter Estimation. *J. Sci. Comput.*, 35, 2013.
- A.N. SCHOFIELD et P. WROTH : *Critical State Soil Mechanics*. European civil engineering series. McGraw-Hill, 1968.
- Q. SHANG, Z. YANG, S. GAO et D. TAN : An imputation method for missing traffic data based on FCM optimized by PSO-SVR. *Journal of Advanced Transportation*, 2018.
- Z. SHEN, M. JIANG et C. THORNTON : DEM simulation of bonded granular material. Part I : Contact model and application to cemented sand. *Computers and Geotechnics*, 75:192 – 209, 2016. ISSN 0266-352X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X16300234>.

- D. SHENG, S. W. SLOAN et H. S. YU : *Aspects of finite element implementation of critical state models*. The University of Newcastle Newcastle, N.S.W, 1999. ISBN 0725910704.
- B.J. STAUDER, H. KERBER et P. SCHUMACHER : Foundry sand core property assessment by 3-point bending test evaluation. *Journal of Materials Processing Technology*, 237(Supplement C):188 – 196, 2016. ISSN 0924-0136. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0924013616301819>.
- D. TAKANO, N. LENOIR, J. OTANI et S. A. HALL : Localised deformation in a wide-grained sand under triaxial compression revealed by x-ray tomography and digital image correlation. *Soils and Foundations*, 55(4):906 – 915, 2015. ISSN 0038-0806. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S003808061500092X>.
- A. TARANTOLA : *Inverse Problem Theory : Methods For Data Fitting and Model Parameter Estimation*, volume 130. Amsterdam : Elsevier, 1987, 01 1987.
- D.W. TAYLOR : *Fundamentals of soil mechanics*. J. Wiley, 1948.
- A. TENGATTINI, A. DAS, G. D. NGUYEN, G. VIGGIANI, S. A. HALL et I. EINAV : A thermomechanical constitutive model for cemented granular materials with quantifiable internal variables. part i—theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 70:281 – 296, 2014. ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509614001185>.
- V. TOPIN : *Cemented granular materials : modeling and application to wheat endosperm*. Manuscrit de thèse, Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, novembre 2008. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00371864>.
- V. TOPIN, J.-Y. DELENNE, F. RADJAI, L. BRENDÉL et F. MABILLE : Strength and failure of cemented granular matter. *European Physical Journal E : Soft matter and biological physics*, 23: 413–429, 2007. URL <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00759645>.
- A. TORDESILLAS, D. M. WALKER, E. ANDÒ et G. VIGGIANI : Revisiting localized deformation in sand with complex systems. *Proceedings of the Royal Society of London A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 469(2152), 2013. ISSN 1364-5021. URL <http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/469/2152/20120606>.
- A. TSIAMPOUSI, L. ZDRAVKOVIĆ et D. M. POTTS : A new hvorslev surface for critical state type unsaturated and saturated constitutive models. *Computers and Geotechnics*, 48:156 – 166, 2013. ISSN 0266-352X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0266352X12001929>.
- P. M. A. van OOIJEN, A. BROEKEMA et M. OUDKERK : Use of a Thin-Section Archive and Enterprise 3-Dimensional Software for Long-Term Storage of Thin-Slice CT Data Sets—A Reviewers' Response. *Journal of Digital Imaging*, 21(2):188–192, Jun 2008. ISSN 1618-727X. URL <https://doi.org/10.1007/s10278-007-9041-8>.

- I. VARDOULAKIS : Equilibrium theory of shear bands in plastic bodies. *Mechanics Research Communications*, 3(3):209 – 214, 1976. ISSN 0093-6413. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0093641376900148>.
- I. VARDOULAKIS, M. GOLDSCHIEDER et G. GUDEHUS : Formation of shear bands in sand bodies as a bifurcation problem. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2(2):99–128, 1978. ISSN 1096-9853. URL <http://dx.doi.org/10.1002/nag.1610020203>.
- I. VARDOULAKIS et B. GRAF : Calibration of constitutive models for granular materials using data from biaxial experiments. *Géotechnique*, 35(3):299–317, 1985. URL <https://doi.org/10.1680/geot.1985.35.3.299>.
- G. VIGGIANI et S. A. HALL : “full-field measurements, a new tool for laboratory experimental geomechanics”. 1:3–26, 01 2008.
- H. S. YU : CASM : a unified state parameter model for clay and sand. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 22(8):621–653, 1998. ISSN 1096-9853. URL [http://dx.doi.org/10.1002/\(SICI\)1096-9853\(199808\)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8](http://dx.doi.org/10.1002/(SICI)1096-9853(199808)22:8<621::AID-NAG937>3.0.CO;2-8).
- H. S. YU, S. M. TAN et F. SCHNAID : A critical state framework for modelling bonded geomaterials. *Geomechanics and Geoengineering*, 2(1):61–74, 2007. URL <http://dx.doi.org/10.1080/17486020601164275>.
- X.-F. ZHOU, H.D. WAGNER et S.R. NUTT : Interfacial properties of polymer composites measured by push-out and fragmentation tests. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 32(11):1543 – 1551, 2001. ISSN 1359-835X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359835X01000185>.
- M. ZYTYSKI, M.F. RANDOLPH, R. NOVA et C.P. WROTH : On modelling the unloading reloading behaviour of soils. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.* 2, page 87–93, 1978.



# Chapitre 6

## Annexes

### 6.1 Script Python interactif pour la calibration

On présente ici le script interactif utilisé pour la calibration de la fonction de charge  $f$  présentée en Section 3.5.2.

Ce script, présenté dans le manuscrit, nécessite le paquet PyQt4 afin de fonctionner. Ce paquet n'est pas forcément dans les distributions standards (notamment PyQt4.QtCore).

```
#!/usr/bin/env python
#-*- coding: utf-8 -*-

# IMPORTS
## This program works with Qt only
import numpy as np
import matplotlib
matplotlib.use("Qt4Agg")
from pylab import *
import matplotlib.pyplot as plt
import matplotlib.cm as cm
from PyQt4 import QtGui
from PyQt4 import QtCore
from PyQt4.QtCore import Qt

# DEFINING THE FIG
fig, ax1 = subplots()

# DEFINING THE FUNCTIONS FOR PLOTTING

## Yield function

def f(M, n, alpha, r, b, pc):
```

```

    pt = alpha*b*pc
    po = pt + (1.+b)*pc
    eps = 0.000
    p = np.linspace(-pt+eps, po-eps-pt, num = 50)
    q = np.zeros(50)
    for i in xrange(1,50):
        try:
            q[i] = M*(p[i]+pt)*(-log((p[i]+pt)/po)/log(r))**(1
        except:
            q[i] = 0.
    mp = M*(p+pt)
    mn = (9.+3.*M)/(2.*M)*(p+pt)
    return p,q, mp, mn

## Critical value of eta = q/p
def eta(M, n, alpha, r, b,pc):
    pt = alpha*b*pc
    po = (1.+b)*pc
    a_p,q, mp, mn = f(M, n, alpha, r, b,pc)
    qM = np.amax(q)
    a_q = np.linspace(0.,qM, num = 50)
    a_eta = np.zeros((50,50))
    for i in xrange(50):
        for j in xrange(50):
            try:
                if a_q[i]/(a_p[j]+pt)>3.:
                    a_eta[i,j] = 1.
            except:
                a_eta[i,j] = 0.

    return a_p, a_q, a_eta

## Setting some initial values for f
M = 1.4
pc = 1.31
n = 2.338
r = 2.6
b = 1.275
alpha = 0.507

neta_crit = (9.+3.*M)/(2.*M)
pt = alpha*b*pc

```

*## Choosing the colors for the plot*

```
cnv = [0.,94./255.,158./255.,1.]
c150 = [1.,0.0,0.0,1.0]
c200 = [1.,165./255.,0.,1.]
c250 = [52./255.,201./255.,36./255.,1.]
c300 = "black"
c350 = "gray"
```

*## Inital plots (yield , critical state line , critical eta ,...)*

```
p,q, mp, mn = f(M, n, alpha , r , b,pc)
line ,=ax1.plot(p,q)
line2 ,=ax1.plot(p,mp)
line3 ,=ax1.plot(p,mn)
line4 ,=ax1.plot(p,3.*mp/M)
ax1.set_xlim([-alpha*b*pc*1.1,+(1.+b)*pc*1.1])
ax1.set_ylim([0, 1.1*np.amax(q)])
```

*# DATA POINTS BY AGING TEMPERATURE*

*## as received*

```
pnv10 = [-2.1/3., 4.5/3.,2*1.2]
qnv10 = [2.1, 4.5,1.2*3/4]
```

*## 150*

```
p15010 = [-2.4/3.,5.0/3.]
q15010 = [2.4,5.0]
```

*## 200*

```
p20010 = [-2.3/3.,4.5/3.]
q20010 = [2.3,4.5]
```

*## 250*

```
p25010 = [-1.3/3.,4.1/3.,2.35]
q25010 = [1.3,4.1,3.525]
```

*## 300*

```
p30010 = [-0.8/3.,2.9/3.]
q30010 = [0.8,2.9]
```

*## 350*

```
p35010 = [-0.1/3.,1.3/3.,1.2]
q35010 = [0.1,1.3,1.8]
```

*# PLOTTING THE DATA POINTS*

```
ax1.scatter(pnv10,qnv10,color=cnv)
```



```

ax1.scatter(p15010,q15010,color=c150)
ax1.scatter(p20010,q20010,color=c200)
ax1.scatter(p25010,q25010,color=c250)
ax1.scatter(p30010,q30010,color=c300)
ax1.scatter(p35010,q35010,color=c350)

ax1.set_title("Visualisation_de_la_fonction_de_charge", fontsize=12)
ax1.set_ylabel("q_(MPa)", fontsize = 12)
ax1.set_xlabel("p_(MPa)", fontsize = 12)
ax1.legend(['Fonction_de_charge',"Ligne_d'Etat_Critique","Etat_crit", "Etat

# INTERACTIVE SCRIPT PART
## Update of the figure
def update():
    global neta_crit
    M = float(Mslider.value())/1000.
    neta_crit = (9.+3.*M)/(2.*M)
    n = float(nslider.value())/1000.
    alpha = float(aslider.value())/1000.
    r = float(rslider.value())/1000.
    b = float(bslider.value())/1000.
    pc = float(pslider.value())/1000.
    Mlabel.setText('M_:_' + str(float(Mslider.value())/1000.))
    nlabel.setText('n_:_' + str(float(nslider.value())/1000.))
    alabel.setText('alpha_:_' + str(float(aslider.value())/1000.))
    rlabel.setText('r_:_' + str(float(rslider.value())/1000.))
    blabel.setText('b_:_' + str(float(bslider.value())/1000.))
    plabel.setText('pc_:_' + str(float(pslider.value())/1000.))
    p,q, mp, mn = f(M, n, alpha, r, b,pc)
    line.set_data(p,q)
    line2.set_data(p,mp)
    line3.set_data(p,mn)
    line4.set_data(p,3.*mp/M)
    fig.canvas.draw_idle()

root = fig.canvas.manager.window
panel = QtGui.QWidget()

hbox = QtGui.QVBoxLayout(panel)
##A simple update button to update the x_lim and y_lim of the plot
def update_plot():
    M = float(Mslider.value())/1000.

```

```

n = float(nslider.value())/1000.
alpha = float(aslider.value())/1000.
r = float(rslider.value())/1000.
b = float(bslider.value())/1000.
pc = float(pslider.value())/1000.
p,q, mp, mn = f(M, n, alpha, r, b,pc)
#~ line.set_data(p,q)
#~ line2.set_data(p,mp)
ax1.set_xlim([-alpha*b*pc*1.1,+(1.+b)*pc*1.1])
ax1.set_ylim([0, 1.1*np.amax(q)])
fig.canvas.draw_idle()

replot = QtGui.QPushButton('MaJ_Figure',parent = panel)
replot.clicked.connect(update_plot)
hbox.addWidget(replot)
##The different sliders for each parameter:

Mslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal,parent = panel)
Mslider.setMaximum(2200)
Mslider.setMinimum(500)
Mslider.setSingleStep(1.)
Mslider.setValue(M*1000.)
Mlabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
Mlabel.setText('M:_' +str(float(Mslider.value())/1000.))
Mslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(Mlabel)
hbox.addWidget(Mslider)

nslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal,parent = panel)
nslider.setMaximum(10000)
nslider.setMinimum(1000)
nslider.setSingleStep(1)
nslider.setValue(n*1000.)
nlabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
nlabel.setText('n:_' +str(float(nslider.value())/1000.))
nslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(nlabel)
hbox.addWidget(nslider)

aslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal,parent = panel)
aslider.setMaximum(5000)
aslider.setMinimum(0)

```

```

aslider.setSingleStep(1)
aslider.setValue(alpha*1000.)
alabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
alabel.setText('\alpha:_' + str(float(aslider.value())/1000.))
aslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(alabel)
hbox.addWidget(aslider)

```

```

rslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal, parent = panel)
rslider.setMaximum(5000)
rslider.setMinimum(1001)
rslider.setSingleStep(1)
rslider.setValue(r*1000.)
rlabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
rlabel.setText('r:_' + str(float(rslider.value())/1000.))
rslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(rlabel)
hbox.addWidget(rslider)

```

```

bslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal, parent = panel)
bslider.setMaximum(20000)
bslider.setMinimum(0)
bslider.setSingleStep(1)
bslider.setValue(b*1000.)
blabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
blabel.setText('b:_' + str(float(bslider.value())/1000.))
bslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(blabel)
hbox.addWidget(bslider)

```

```

pslider = QtGui.QSlider(QtCore.Qt.Horizontal, parent = panel)
pslider.setMaximum(3000)
pslider.setMinimum(500)
pslider.setSingleStep(1)
pslider.setValue(pc*1000.)
plabel = QtGui.QLabel(parent=panel)
plabel.setText('pc:_' + str(float(pslider.value())/1000.))
pslider.valueChanged.connect(update)
hbox.addWidget(plabel)
hbox.addWidget(pslider)

```

```

##bottom panel

```

```
panel.setLayout(hbox)

dock = QtGui.QDockWidget("Parametres", root)
root.addDockWidget(Qt.BottomDockWidgetArea, dock)
dock.setWidget(panel)
#####

show()
```





## Résumé

Le moulage des culasses en aluminium de moteurs automobile utilise une grande quantité de noyaux en sable lié par une résine polyuréthane. Ces noyaux doivent être extraits sans laisser de résidus dans les pièces. L'opération d'extraction, appelée débouillage, consiste à marteler les pièces de fonderie au niveau de la masselotte afin de fragmenter les noyaux. Cette opération est de plus en plus difficile à réaliser par la diminution de la taille des moteurs. Or, elle est cruciale pour l'amélioration de la qualité des culasses. L'objectif de la thèse est de développer un modèle de comportement mécanique élastoplastique tenant notamment compte la dépendance du matériau à la température de vieillissement. Ce modèle s'inscrit dans le cadre de la mécanique des sols à Etat Critique. Par la suite, le champ de déplacement d'un essai de compression uniaxiale observé en tomographie aux rayons X a permis de calibrer et valider le modèle. Pour cette étude, une méthode d'élagage de données a été développée afin de réduire drastiquement les coûts et les temps de calculs de l'optimisation des paramètres ainsi que le poids des données de corrélation d'images à stocker. Ces données ainsi élaguées sont utilisées afin d'optimiser le modèle élastoplastique grâce à l'utilisation d'une méthode hybride d'hyper-réduction ( $H^2ROM$ ).

La simulation a permis ensuite d'améliorer la compréhension du débouillage des pièces de fonderie. La démarche numérique développée a mis en évidence l'influence de la précontrainte de compression thermique due au refroidissement de la culasse, ainsi que des conditions de bridage de la pièce lors du martelage.

## Mots Clés

Sable lié, Modèle Elastoplastique, Tomographie aux rayons X

## Abstract

In casting foundry, resin bonded sand cores are used to mold the internal cavities of metallic parts, like cylinder heads. These cores are placed in the metallic die before casting and undergo a thermal loading during casting and solidification that leads to a chemical degradation of the binder. After the solidification, the internal casting sand cores have to be extracted. This so-called decoring operation is carried out by mechanical means, by knocking on the part with pneumatic hammers to fracture the cores first and then vibrating to eliminate the fragmented pieces. The degradation of the resin caused by the thermal loading facilitates drastically the decoring process. The aim of this work is to understand and model the behavior of such heterogeneous media, taking into account the ageing temperature, in order to correctly assess the remaining fragmented cores after the decoring process. An elastoplastic model within the Critical State framework was adapted from the literature. Subsequently, the displacement field taken from an uniaxial test observed in X-ray Computed Tomography enabled to complete the calibration and the validation of the model. For this work, a data pruning method was developed. It saves memory space for long term storage and speed-up the parameters optimization. These pruned data are used to optimize the elastoplastic model through the use of a hybrid hyper-reduction method ( $H^2ROM$ ).

Afterwards, the simulation helped to improve the understanding of the decoring process of foundry parts. The numerical approach developed has highlighted the influence of the thermal compression preload due to the cooling of the cylinder head, as well as the conditions of clamping during hammering.

## Keywords

Bonded Sand, Constitutive Modeling, X-ray Computed Tomography