



HAL
open science

Hyper-réduction d'ordre de modèle en mécanique du contact sous formulation mixte potentiellement non symétrique: analyse théorique et numérique

Simon Le Berre

► To cite this version:

Simon Le Berre. Hyper-réduction d'ordre de modèle en mécanique du contact sous formulation mixte potentiellement non symétrique: analyse théorique et numérique. Mécanique [physics]. Université Paris sciences et lettres, 2023. Français. NNT : 2023UPSLM043 . tel-04438231

HAL Id: tel-04438231

<https://pastel.hal.science/tel-04438231>

Submitted on 5 Feb 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à MINES Paris-PSL

Hyper-réduction d'ordre de modèle en mécanique du contact sous formulation mixte potentiellement non symétrique : analyse théorique et numérique.

Soutenue par

Simon LE BERRE

Le 20 novembre 2023

École doctorale n°621

**Ingénierie des Systèmes,
Matériaux, Mécanique,
Énergétique**

Spécialité

Mécanique

Composition du jury :

Alexandre ERN Professeur, École des Ponts ParisTech	<i>Rapporteur</i>
Frédéric LEBON Professeur, Aix-Marseille Université	<i>Rapporteur</i>
Luisa ROCHA DA SILVA Professeur, École centrale de Nantes	<i>Présidente</i>
Olivier GOURY Chargé de recherche, INRIA Grenoble	<i>Examineur</i>
Tommaso TADDEI Chargé de recherche, INRIA Bordeaux	<i>Examineur</i>
Isabelle RAMIÈRE Directrice de recherche, CEA	<i>Examinatrice</i>
David RYCKELYNCK Professeur, Mines Paris - PSL	<i>Directeur de thèse</i>

Remerciements

Ce travail est le résultat d'une collaboration entre le Centre Des Matériaux (CDM) de l'école des Mines de Paris et le Service d'Etude et de Simulation du comportement du Combustible (SESC) du CEA et a été financé par le projet SICOM (SIMulation COMbustible) ayant pour objectif le développement de la plate-forme PLÉIADES pour la simulation du comportement des éléments combustibles sous irradiation. Les recherches sont co-financées par le CEA, EDF et FRAMATOME.

Je tiens tout d'abord à remercier Isabelle Ramière pour son encadrement, sa présence, sa grande disponibilité et ses conseils (même pendant des week-ends ou congés). Sa rigueur et sa capacité de placer la barre très haut sont admirables et m'ont poussé à dépasser mes limites.

Je souhaite également exprimer toute ma gratitude à David Ryckelynck pour son encadrement, ses encouragements, ses conseils judicieux ainsi que ses nombreuses idées de pistes de recherche.

Je tiens à remercier Alexandre Ern et Frédéric Lebon d'avoir bien voulu rapporter ce travail de thèse. Je remercie également les autres membres du jury, à savoir Luisa Rocha Da Silva qui l'a présidé, ainsi qu'Olivier Goury et Tommaso Taddei en leurs qualités d'examinateurs. J'ai pris beaucoup de plaisir à échanger avec vous sur différentes interrogations que vous avez soulevé concernant ce travail.

Je tiens également à exprimer ma profonde gratitude à l'ensemble du SESC, en particulier aux membres du LSC et LMCP avec qui j'ai partagé de nombreuses pauses café. Les échanges lors de ces moments, qu'ils soient scientifiques ou non, ont été enrichissants et j'en garderai un très bon souvenir. Merci à Jules et sa disponibilité pour mes nombreuses questions concernant son travail sur les modèles réduits, à Louis pour nos discussions qui m'ont souvent permis de me changer les idées. Un remerciement particulier pour le groupe de doctorants avec qui j'ai partagé l'aventure de la thèse et qui ont également enrichi les moments partagés grâce à de nombreuses discussions passionnantes (et passionnées) : Mohamed, Timothé, Salomon, Marius, Alexandre, Plamen, Chung, Max, Héla, Louis, Léo, Guilherme, Théo, Nadia et Daria.

Je suis également reconnaissant envers Josiane, Patricia et Régine pour leur aide au cours de la thèse, que ce soit pour l'organisation de la soutenance ou les démarches administratives. Je remercie aussi Véronique Matos, Précilia Loussac du service enseignement du CDM pour leur assistance concernant les démarches auprès de l'école doctorale. Merci à Vladislav et Vincent d'avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi.

Mes derniers mots de gratitude vont à ma famille pour leur soutien inconditionnel au cours de toutes ces années d'études malgré la distance nous séparant.

Table des matières

Introduction	1
Notations	3
Abréviations	5
1 Contexte et état de l'art	7
1.1 Contexte industriel et scientifique	9
1.1.1 Fonctionnement des réacteurs nucléaires	9
1.1.2 Comportement du crayon combustible sous irradiation	10
1.1.3 Simulation du comportement du combustible	11
1.1.4 Modèle mécanique de l'élément combustible	12
1.2 Problème de mécanique du contact	13
1.2.1 Formulation variationnelle	13
1.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange	14
1.2.3 Discrétisation du problème de contact par la méthode des éléments finis	16
1.2.4 Appariement des surfaces de contact	17
1.3 Autour de la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact	19
1.3.1 Rappel général sur la réduction d'ordre de modèle <i>a posteriori</i>	19
1.3.2 Etat de l'art sur la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange	23
1.4 Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact	27
1.4.1 Formulation variationnelle	27
1.4.2 Construction de la base réduite primale	30
1.4.3 Construction du domaine d'intégration réduit	30
1.4.4 Construction de la base duale du modèle HHR	31
1.4.5 Le problème HHR	32
1.4.6 Reconstruction de la solution duale en dehors du RID	33
1.4.7 Indicateur d'erreur du modèle HHR	34
1.5 Cas tests d'applications numériques	35
1.5.1 Demi-disques de Hertz en contact	35
1.5.2 Interaction pastille-gaine en axisymétrie	36
1.6 Objectifs principaux de la thèse	37
2 Analyse théorique du modèle HHR	39
2.1 Modèles	41
2.1.1 Inégalité variationnelle et modèle continu	41
2.1.2 Modèle élément fini	42
2.1.3 Modèle élément fini en configuration de décomposition de domaine	43
2.1.4 Modèle hyper-réduit hybride (HHR)	44
2.2 Analyse d'erreur <i>a priori</i>	47
2.2.1 Bornes d'erreurs <i>a priori</i> pour une méthode des bases réduites	47
2.2.2 Borne sur l'erreur duale du modèle HHR	50

2.2.3	Borne sur l'erreur primale dans Ω_A	51
2.2.4	Borne sur l'erreur primale sur tout Ω	53
2.3	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> pour le modèle HHR	54
2.3.1	Bornes <i>a posteriori</i> sur l'erreur primale HHR	54
2.3.2	Nouvel indicateur d'erreur primale	57
2.4	Dissimilarité en métrique chordale et relation avec l'erreur primale	57
2.5	Autour de la condition inf-sup/LBB du modèle HHR	59
2.6	Vérifications numériques	60
2.6.1	Mise en pratique de l'évaluation des bornes	60
2.6.2	Cas test académique	62
2.6.3	Cas test industriel	65
2.7	Conclusion	70
3	Autour de la solvabilité et de la précision du modèle HHR	71
3.1	Vérification de la condition inf-sup au sein du modèle HHR	73
3.2	Conséquence de la borne d'erreur duale pour le pilotage de l'enrichissement	73
3.3	Rôle du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée	74
3.4	Méthodes d'enrichissement de la base réduite primale	75
3.4.1	Enrichissement EF de la base réduite primale	75
3.4.2	Enrichissement par modes POD et fonctions de forme EF de la base réduite primale	75
3.5	Etude numérique des méthodes d'enrichissement de la BR primale en appariement nœud-à-nœud	76
3.5.1	Cas test des deux demi-disques de Hertz en contact.	76
3.5.2	Cas test d'interaction pastille-gaine en axisymétrique	78
3.6	Conclusion	87
4	Modèles d'ordres réduits locaux via une méthode de clustering	89
4.1	Motivations	91
4.2	Clustering sur l'espace paramétrique	91
4.2.1	A partir de snapshots réguliers sur l'espace paramétrique	91
4.2.2	A partir de snapshots irréguliers sur l'espace paramétrique	93
4.3	Résultats numériques du clustering	94
4.3.1	Clustering sur grille régulière	94
4.3.2	Clustering sur grille irrégulière	97
4.4	Conclusion	101
5	Extension du modèle HHR aux maillages de contact non concordants	103
5.1	Appariement nœud-à-surface des conditions de contact	105
5.2	Modèle hyper-réduit hybride non symétrique	107
5.2.1	Notations et définitions	107
5.2.2	Projection de type Petrov-Galerkin	108
5.2.3	Construction du RID	109
5.2.4	Modèle HHR généralisé sous formulation matricielle	111
5.2.5	Enrichissement de la BR primale pour le modèle HHR sous formulation de point-selle généralisé	112
5.3	Résultats numériques sur le cas test IPG	113
5.3.1	Construction du modèle HHR	113
5.3.2	Comparaison des solutions HHR et EF	113
5.3.3	Vérification des bornes d'erreurs du modèle HHR en appariement nœud-à-surface	118
5.4	Conclusion	120

6	Application du modèle HHR aux non-linéarités matérielles	121
6.1	Hyper-réduction hybride d'un problème de contact en appariement nœud-à-surface pour des matériaux non-linéaires.	123
6.1.1	Problème mécanique avec matériau non-linéaire	123
6.1.2	Formulation variationnelle	123
6.1.3	Résolution par un processus itératif	124
6.1.4	Problème de mécanique du contact entre matériaux non-linéaires	125
6.1.5	Hyper-réduction hybride d'un problème de contact entre matériaux non-linéaires avec appariement nœud-à-surface	126
6.2	Résultats numériques pour un cas test de contact 2D avec non-linéarités matérielles	128
6.2.1	Comportement non-linéaire élasto-plastique isotrope du combustible	128
6.2.2	Comportement non-linéaire visco-plastique isotrope de la gaine	129
6.2.3	Construction du modèle HHR	129
6.3	Conclusion	135
	Conclusions et perspectives	137
	Liste des figures	139
	Références bibliographiques	145

Introduction

Parmi les approches visant à réduire les temps de calcul de simulations numériques coûteuses, notamment du fait du nombre d'inconnues, deux grandes approches se démarquent, la réduction d'ordre de modèle et le calcul parallèle (ou calcul haute performance). Les méthodes de réduction d'ordre de modèle permettent d'accélérer les temps de calcul de simulation (à ressource informatique donnée) en approchant la solution d'un modèle d'ordre plein, dit "de haute fidélité", par la solution d'un modèle d'ordre réduit avec moins d'inconnues. Nous nous intéressons dans ce travail uniquement aux méthodes de réduction de modèles basées sur des techniques de projection du modèle de haute fidélité. Ces approches conservent la nature du problème initial par opposition à des méta-modèles (ou surrogate models en anglais). Pour ces méthodes dites de projection, il est possible par exemple de certifier théoriquement l'erreur commise entre la solution réduite et celle du modèle d'ordre plein. Ce manuscrit de thèse se focalise sur la réduction d'ordre de modèle de problèmes en mécanique du contact traités par multiplicateurs de Lagrange. Ce thème de recherche reste un vrai défi scientifique, du fait notamment de la contrainte de signe sur les multiplicateurs.

Ce travail s'appuie sur l'hyper-réduction d'ordre de modèles, méthode efficace pour le traitement des non-linéarités. En effet, cette approche consiste à réduire la dépendance du modèle d'ordre réduit vis-à-vis du maillage, permettant ainsi d'accélérer le calcul via la projection uniquement de certains termes du modèle d'ordre plein. L'extension de l'hyper-réduction d'ordre de modèles aux problèmes de contact traités par multiplicateurs de Lagrange est considérée ici. Pour cela un modèle hyper-réduit hybride (HHR) est construit, reposant sur un domaine d'intégration réduit, une base réduite (BR) primale obtenue par POD (Proper Orthogonal Decomposition), et une base réduite duale obtenue via la restriction de la base duale éléments finis (EF) au domaine réduit. Le modèle HHR conserve ainsi la nature de problème de point-selle du modèle de haute fidélité. Jusqu'ici, il a seulement été appliqué à des appariements de contact de type obstacle ou nœud-à-nœud. Dans ce cas, il devient un problème de point-selle standard, c'est à dire symétrique par bloc. Sa capacité à réduire efficacement ce type de problèmes a déjà été montrée. Toutefois, la limitation des configurations possibles restreint le champ d'application de la méthode. Un grand nombre de configurations réelles nécessitent généralement des géométries et/ou maillages plus complexes. De plus, la précision de la méthode sur des problèmes présentant de larges variations paramétriques (notamment de la surface et de la pression de contact) avait montré des faiblesses.

Nous proposons dans ce document d'analyser théoriquement et numériquement le modèle HHR afin d'étendre ses capacités et ses performances. Tout d'abord d'un point de vue théorique, des bornes d'erreurs *a priori* et *a posteriori* sont démontrées dans le but de pouvoir certifier le modèle HHR. Ainsi, nous dégageons des stratégies permettant de garantir la solvabilité du problème mixte d'ordre réduit tout en améliorant les solutions duales obtenues. Par la suite, une construction de modèles d'ordres réduits locaux basée sur du clustering

de l'espace paramétrique est proposée afin de permettre le traitement de problèmes avec de larges variations paramétriques. L'extension du modèle HHR aux maillages de contact non-concordants, en particulier pour des appariements de type nœud-à-surface, est mise en œuvre. La méthode HHR héritant des capacités de l'hyper-réduction à traiter efficacement des problèmes de mécanique non-linéaire, la dernière partie de ce travail concerne l'application de la méthode HHR aux problèmes de contact unilatéral entre matériaux non-linéaires déformables.

L'étude de méthodes de réduction d'ordre de modèle pour des problèmes de mécanique du contact traités par multiplicateurs de Lagrange a été motivée par la simulation du comportement mécanique du combustible nucléaire, conduite au CEA au travers de la plateforme logicielle PLEIADES¹ co-développée par le CEA, EDF et FRAMATOME. Même si cette thèse se concentre sur ce type d'application, les méthodes développées dans ce travail peuvent être utilisées pour d'autres situations impliquant du contact traité numériquement par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. De façon plus générale, la méthodologie adoptée dans ce manuscrit peut être adaptée à tout problème d'inégalité variationnelle traité de manière mixte primale-duale (c.f. torsion élasto-plastique ou modèle de Black-Scholes en finance).

1. Plateforme Logicielle pour les Éléments Irradiés dans les Assemblages, en Démonstration, en Expérimentation ou en Service

Notations

Dans ce manuscrit, un vecteur sera souligné une fois $\underline{\cdot}$, tandis qu'une matrice le sera deux fois $\underline{\underline{\cdot}}$. Les tenseurs seront soulignés autant de fois que leur ordre. Les indices d'un vecteur, d'un tenseur ou d'une matrice permettent d'identifier leurs composantes. Par exemple, $(\underline{\underline{A}})_{ij}$ est la composante située à la i -ème ligne et j -ème colonne de la matrice $\underline{\underline{A}}$.

Les notations $\underline{0}$ et $\underline{\underline{0}}$ dénotent respectivement un vecteur et une matrice de zéros. La matrice identité de taille $N \times N$ est notée $\underline{\underline{I}}_N$. L'exposant \mathbf{T} sur un vecteur $(\underline{v}^{\mathbf{T}})$ ou une matrice $(\underline{\underline{A}}^{\mathbf{T}})$ dénote la transposition de l'objet associé.

La syntaxe du langage de programmation Python est utilisée pour la restriction à certaines lignes ou colonnes des vecteurs et matrices. Par exemple, la restriction une matrice $\underline{\underline{A}}$ aux lignes dont les indices sont dans l'ensemble \mathcal{L} , tout en conservant toutes les colonnes, est notée : $\underline{\underline{A}}[\mathcal{L}, :]$.

Soit H un espace de Hilbert et H' son espace dual, le produit de dualité s'écrit $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H, H'}$, et leurs normes induites respectives sont notées $\|\cdot\|_H$ et $\|\cdot\|_{H'}$.

Abréviations

Sigle	Définition
DDL	degré de liberté
DEIM	Discrete Empirical Interpolation Method (méthode d'interpolation empirique discrète)
EF	Éléments Finis
FOM	Full-Order Model (modèle d'ordre plein)
HR	Hyper-Reduction (hyper-réduction)
HHR	Hybrid Hyper-Reduction (Hyper-Réduction Hybride)
IPG	Interaction Pastille-Gaine
LCP	Linear Complementarity Problem (Problème de complémentarité linéaire)
NNMF	Non Negative Matrix Factorization (Factorisation Non Négative de Matrice)
POD	Proper Orthogonal Decomposition (décomposition orthogonale aux valeurs propres)
REP	Réacteur à Eau Pressurisée
RNR	Réacteur à Neutrons Rapides
RID	Reduced Integration Domain (domaine d'intégration réduit)
ROM	Reduced-Order Model (modèle d'ordre réduit)
SVD	Singular Value Decomposition (décomposition en valeurs singulières)

Chapitre 1

Contexte et état de l'art

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord le contexte scientifique et industriel adossé à la thèse. Un état de l'art sur la réduction d'ordre de modèles de problèmes de mécanique du contact est ensuite proposé. Par la suite le modèle d'hyper-réduction hybride sur lequel porte ce travail de thèse est introduit en détail. Les cas tests d'applications numériques considérés dans ce manuscrit sont également présentés. Pour finir, nous définissons les objectifs de ce travail de thèse.

Sommaire

1.1	Contexte industriel et scientifique	9
1.1.1	Fonctionnement des réacteurs nucléaires	9
1.1.2	Comportement du crayon combustible sous irradiation	10
1.1.3	Simulation du comportement du combustible	11
1.1.4	Modèle mécanique de l'élément combustible	12
1.2	Problème de mécanique du contact	13
1.2.1	Formulation variationnelle	13
1.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	14
1.2.3	Discrétisation du problème de contact par la méthode des éléments finis	16
1.2.4	Appariement des surfaces de contact	17
1.3	Autour de la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact	19
1.3.1	Rappel général sur la réduction d'ordre de modèle <i>a posteriori</i>	19
1.3.2	Etat de l'art sur la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange	23
1.4	Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact	27
1.4.1	Formulation variationnelle	27
1.4.2	Construction de la base réduite primale	30
1.4.3	Construction du domaine d'intégration réduit	30
1.4.4	Construction de la base duale du modèle HHR	31
1.4.5	Le problème HHR	32
1.4.6	Reconstruction de la solution duale en dehors du RID	33
1.4.7	Indicateur d'erreur du modèle HHR	34
1.5	Cas tests d'applications numériques	35
1.5.1	Demi-disques de Hertz en contact	35
1.5.2	Interaction pastille-gaine en axisymétrie	36
1.6	Objectifs principaux de la thèse	37

1.1 Contexte industriel et scientifique

1.1.1 Fonctionnement des réacteurs nucléaires

Nous nous intéressons dans ce manuscrit au comportement des combustibles nucléaires au sein des réacteurs de type réacteurs à eau pressurisée (REP) ou réacteurs à neutrons rapides (RNR). Dans ces filières, le combustible nucléaire est sous forme de pastilles céramiques composées de matière fissile (uranium et/ou plutonium). Ces pastilles sont cylindriques, avec une hauteur et un diamètre de l'ordre du centimètre. Les pastilles sont empilées verticalement dans une gaine métallique scellée à chaque extrémité. Cet ensemble est appelé crayon (pour les REP) ou aiguille (pour les RNR) de combustible, leur hauteur est de plusieurs mètres pour un diamètre proche de 1 centimètre. Par la suite, nous utiliserons le terme générique de "crayons combustibles", tout en sachant que ce terme désigne indifféremment les crayons ou les aiguilles de combustibles. Les crayons sont regroupés dans des assemblages de combustible. Le cœur du réacteur est constitué de plus d'une centaine d'assemblages combustibles, cf. figure 1.1. C'est dans ce cœur qu'a lieu la fission nucléaire produisant de l'énergie sous forme de chaleur. Un fluide caloporteur (REP : eau, RNR : métaux liquides (ex. : sodium)) permet d'évacuer la chaleur produite dans le cœur du réacteur pour l'acheminer vers un générateur de vapeur. La vapeur produite dans le générateur va ensuite entraîner la rotation d'une turbine. L'énergie mécanique de la turbine est ensuite transformée en énergie électrique. Pour des raisons de sécurité, le réacteur nucléaire comporte trois barrières de confinement qui doivent prévenir le risque de relâchement de produits potentiellement radioactifs à l'extérieur du réacteur. La première barrière de confinement est la gaine du crayon combustible, la deuxième la cuve du réacteur, et la troisième l'enceinte en béton, cf. figure 1.1. La gaine du crayon combustible constituant la première barrière de confinement, il est important de garantir son intégrité en toutes situations. Cela passe notamment par la connaissance et la compréhension du comportement des crayons combustible durant l'irradiation.

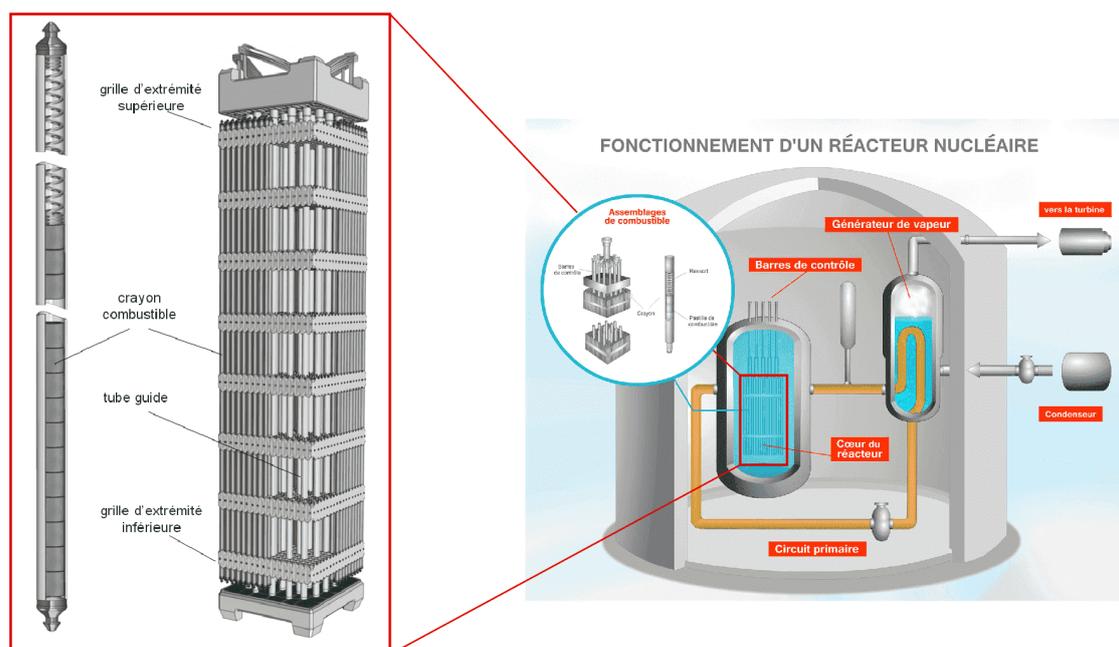


FIGURE 1.1 – Schéma d'un réacteur nucléaire [cea.fr].

1.1.2 Comportement du crayon combustible sous irradiation

La pastille de combustible nucléaire est une céramique fragile (contrainte de rupture d'environ 100 à 150MPa). Dès la première montée en puissance du réacteur, les contraintes thermiques vont conduire à l'apparition de fissures dans les pastilles. Une densification du combustible est également observée au début de l'irradiation. Au cours de l'irradiation, le diamètre du combustible augmente du fait de la dilatation thermique. La pastille de combustible va alors prendre une forme dite de "diabolo", cf. figure 1.2. Dans les réacteurs de la filière REP, le volume du combustible augmente également à cause des produits de fissions (solides ou gazeux). La gaine quant à elle subit un phénomène de fluage d'irradiation qui conduit à une réduction de son diamètre. L'ensemble de ces réactions va fermer le jeu initialement présent entre la pastille et la gaine. L'effet diabolo implique que le contact intervient en premier au plan inter-pastille, avant de s'étendre sur la hauteur totale d'une pastille après plusieurs cycles d'irradiation (cf. figure 1.2).

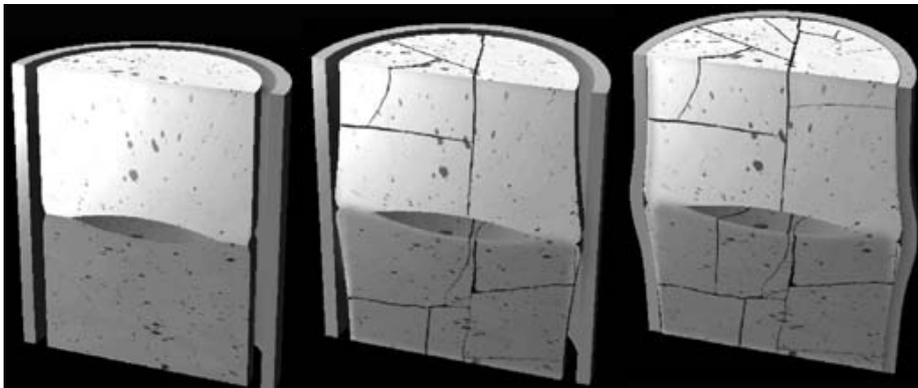


FIGURE 1.2 – Schéma du comportement d'un combustible nucléaire au cours de l'irradiation. Gauche : avant irradiation. Milieu : après première montée en puissance. Droite : après plusieurs cycles d'irradiation. [Guillet *et al.*, 2008]

Il y a une concentration de contraintes forte au droit des fissures et au plan inter-pastilles (point triple). En cas de transitoire de puissance (situation incidentelle ou accidentelle), ces fortes contraintes peuvent amorcer des phénomènes de fissure radiale de la gaine (cf. figure 1.3). Par conséquent, l'interaction pastille-gaine (IPG) est un phénomène important dans la démarche de sûreté du crayon combustible. Pour prévenir tout risque de rupture de gaine, le domaine de fonctionnement autorisé des réacteurs est limité.



(a) Exemple de fissuration d'une pastille de combustible.

(b) Exemple d'un phénomène d'amorce de fissuration radiale dans la gaine.

FIGURE 1.3 – Exemples de fissuration de la pastille de combustible et de la gaine. Coupe horizontale du crayon combustible.

1.1.3 Simulation du comportement du combustible

Le comportement du crayon combustible est un problème qui est par nature multiphysique puisqu'il résulte de nombreux phénomènes physiques (thermique, mécanique, physico-chimie de l'irradiation, neutronique, thermodynamique). Il est également multiéchelle car les phénomènes physiques peuvent affecter différentes échelles (typiquement échelle du crayon, de la pastille et potentiellement l'échelle de la microstructure).

Le CEA, en collaboration avec EDF et Framatome, développe une plateforme logicielle pour simuler le comportement du combustible dans les différentes filières réacteurs. Cette plateforme, nommée PLEIADES [Thouvenin *et al.*, 2006 ; Marelle *et al.*, 2013 ; Michel *et al.*, 2021] (Plateforme Logicielle pour les Éléments Irradiés dans les Assemblages, en Démonstration, en Expérimentation ou en Service), propose notamment les applications nommées ALCYONE [Marelle *et al.*, 2016] et GERMINAL [Lainet *et al.*, 2019] pour simuler le comportement du combustible dans les réacteurs de type REP et RNR-Na (refroidis au sodium) respectivement. Ces deux applications s'attachent à simuler le comportement d'un crayon (ou aiguille) de combustible à l'aide d'une description géométrique basée sur un découpage de cet élément combustible en « tranches » axiales, chaque tranche représentant une partie de l'empilement des pastilles et le morceau correspondant de la gaine les entourant. Chacune de ces tranches peut être modélisée par une représentation 1D axisymétrique, 2D ou 3D, voir figure 1.4.

Une approche consistant à simuler l'historique d'irradiation par un schéma numérique d'intégration en temps est utilisée [Michel *et al.*, 2021].

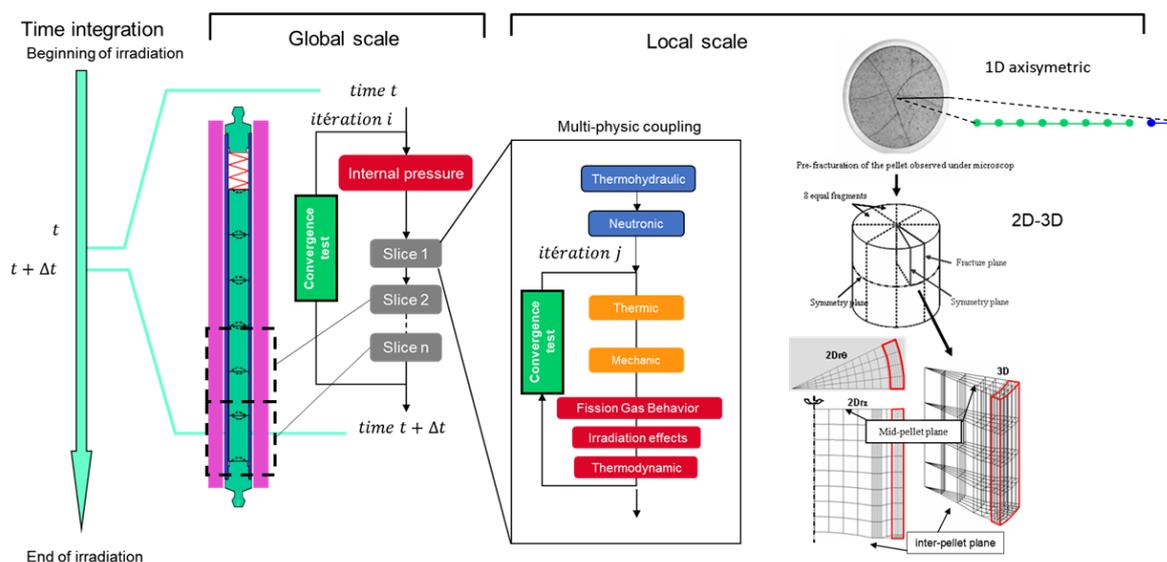


FIGURE 1.4 – Schéma générique du couplage PLEIADES pour les géométries de type crayon/aiguille [Michel *et al.*, 2021].

À chaque pas de temps, un couplage multiphysique est résolu sur chaque tranche du crayon. Un algorithme de point-fixe de Gauss-Seidel par bloc est mis en œuvre entre certains modèles physiques fortement couplés. Ce type d'algorithme implique une boucle de convergence, avec de multiples résolutions de chaque modèle (cf. figure 1.4). L'échelle "globale" représente le crayon dans sa totalité et utilise un chaînage des résolutions locales sur les tranches ainsi que certains modèles 0D sur la totalité du crayon.

Le modèle décrivant le comportement mécanique du combustible et de la gaine à l'échelle locale représente une part importante du temps de calcul total du schéma multiphysique.

C'est à ce modèle que nous nous intéressons dans la suite de ce manuscrit.

1.1.4 Modèle mécanique de l'élément combustible

Le modèle mécanique utilisé dans le schéma de couplage multiphysique des applications ALCYONE et GERMINAL s'attache à décrire notamment le comportement mécanique non-linéaire des matériaux (pastille et gaine) et le possible contact entre la pastille de combustible et la gaine. Les conditions de contact impliquent un problème non régulier. Les caractéristiques des phénomènes mis en jeu permettent de considérer une modélisation quasi-statique sous l'hypothèse des petites déformations. Dans la plateforme PLEIADES, c'est le logiciel éléments finis Cast3M du CEA qui est adopté pour résoudre les problèmes de mécanique (et de thermique). Les problèmes de contact sont résolus par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, conduisant à des problèmes de type point-selle. Concernant les lois de comportement non-linéaires, elles sont intégrées localement aux points d'intégration (points de Gauss) à l'aide du logiciel de calcul MFRONT [Helfer *et al.*, 2015] et une méthode de type quasi-Newton est mise en œuvre pour résoudre le problème d'équilibre mécanique. Même si le frottement est considéré dans le modèle mécanique de PLEIADES, nous nous focalisons dans ce manuscrit, sur des problèmes de contact unilatéral sans frottement de type Hertz-Signorini-Moreau. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, tel que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_1 et Ω_2 sont les objets qui peuvent potentiellement rentrer en contact (ex. le combustible et la gaine). La frontière de Ω , notée $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ est telle que $\partial\Omega = \Gamma^D \cup \Gamma^N \cup \Gamma^C$. La partie de frontière Γ^D va porter des conditions aux limites de type Dirichlet (déplacements imposés). La partie Γ^N quant à elle portera des conditions aux limites de type Neumann (contraintes normales imposées). Enfin, la partie de frontière Γ^C porte les conditions aux limites de contact, elle représente dans le domaine spatial la surface où les deux objets peuvent potentiellement entrer en contact. Par définition, il est imposé que l'intersection des différentes parties de la frontière entre elles soit vide (i.e. $\Gamma^D \cap \Gamma^C = \emptyset$, $\Gamma^D \cap \Gamma^N = \emptyset$ et $\Gamma^N \cap \Gamma^C = \emptyset$). Nous notons \underline{n} la normale extérieure unitaire à la frontière $\partial\Omega$. Une schématisation de ces éléments géométriques est proposée sur la figure 1.5. Sous l'hypothèse des petites déformations, la formulation forte d'un problème de mécanique du contact sans frottement s'écrit [Duvaut et Lions, 1976 ; Kikuchi et Oden, 1987 ; Wriggers, 2006] :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\sigma} = \underline{f} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\sigma} = \mathcal{F}(\underline{\varepsilon}) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{u} + (\operatorname{grad} \underline{u})^T) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{u} = \underline{u}_0 & \text{sur } \Gamma^D, \\ \underline{\sigma} \underline{n} = \underline{\sigma}_0 & \text{sur } \Gamma^N, \\ \underline{\sigma} \underline{n} = F_N \underline{n} & \text{sur } \Gamma^C, \\ u_N \leq d, F_N \leq 0, (d - u_N) F_N = 0 & \text{sur } \Gamma^C. \end{array} \right. \quad (1.1)$$

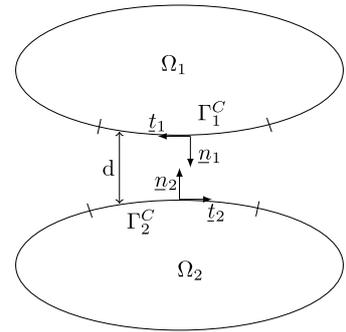


FIGURE 1.5 – Schéma générique d'un problème de contact sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$.

La variable spatiale dont dépendent les inconnues et fonctions du problème (1.1) est omise par souci de clarté. Les variables \underline{u} , $\underline{\sigma}$ et $\underline{\varepsilon}$ représentent respectivement le champ de déplacement,

ments, le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations. La fonction \mathcal{F} définit la loi de comportement du matériau (potentiellement non-linéaire) et \underline{f} représente la densité volumique d'efforts. La condition de Dirichlet aux limites du domaine est définie par le champ des déplacements \underline{u}_0 alors que la condition de Neumann est définie par les efforts surfaciques $\underline{\sigma}_0$. Enfin, la dernière ligne du problème (1.1) définit les conditions de contact de Hertz-Signorini-Moreau [Signorini, 1959]. Le déplacement normal relatif u_N et la force normale de contact F_N sont définis par :

$$\begin{aligned} u_N &= \underline{u}_1(\underline{x}_1)^{\mathbf{T}} \underline{n}_1(\underline{x}_1) + \underline{u}_2(\underline{x}_2)^{\mathbf{T}} \underline{n}_2(\underline{x}_2) & \forall (\underline{x}_1, \underline{x}_2) \in (\Gamma_1^C, \Gamma_2^C), \\ \underline{F}^i(\underline{x}) &= \underline{\sigma}(\underline{x}) \underline{n}_i(\underline{x}) = F_N^i(\underline{x}) \underline{n}_i(\underline{x}) = F_N(\underline{x}) \underline{n}_i(\underline{x}) & i = 1, 2, \underline{x} \in \Gamma_i^C, \end{aligned} \quad (1.2)$$

où le champ de déplacement \underline{u} est décomposé en \underline{u}_i sur Ω_i , $i = 1, 2$. La paire de points $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ de la surface de contact définit la localisation du point de contact potentiel sur chaque surface (Γ_1^C ou Γ_2^C). Les notations \underline{n}_1 et \underline{n}_2 désignent respectivement les normales extérieures unitaires aux domaines Ω_1 et Ω_2 . Sous l'hypothèse des petites déformations $\underline{n}_1(\underline{x}_1) = -\underline{n}_2(\underline{x}_2)$. Enfin le jeu initial entre les deux objets Ω_1 et Ω_2 est noté d . La première condition représente la non-pénétration d'un objet dans l'autre :

$$\text{Condition de non-pénétration : } u_N \leq d \quad (1.3)$$

La seconde représente la non-adhésion du phénomène de contact unilatéral :

$$\text{Condition de non-adhésion : } F_N \leq 0 \quad (1.4)$$

La dernière condition est appelée condition de complémentarité et traduit le fait que lorsque le jeu est non nul, il n'y a pas d'efforts de contact :

$$\text{Condition de complémentarité : } (d - u_N) F_N = 0 \quad (1.5)$$

Ainsi, avec la condition de complémentarité on observe qu'il n'y a que deux statuts possibles pour une solution au problème de contact sans frottement :

- Contact actif : $u_N = d$ et $F_N \leq 0$
- Contact inactif (décollement) : $u_N \leq d$, $F_N = 0$

Remarque : Les conditions de Hertz-Signorini-Moreau correspondent aux conditions de Karush-Kuhn-Tucker [Karush, 1939 ; Kuhn et Tucker, 1951] en optimisation sous contrainte d'inégalité.

1.2 Problème de mécanique du contact

1.2.1 Formulation variationnelle

Pour des raisons de simplification, nous considérons ici que les matériaux suivent un comportement élastique linéaire :

$$\underline{\sigma} = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{\varepsilon}}} \quad \text{dans } \Omega, \quad (1.6)$$

avec $\underline{\underline{\underline{C}}}$ le tenseur d'élasticité d'ordre 4. Le traitement de lois de comportement non-linéaire sera détaillé dans le chapitre 6.

Soient \mathcal{V} et \mathcal{V}^0 les espaces variationnels tels que :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0 &= \{ \underline{v} \in (H^1(\Omega))^m \mid \underline{v} = \underline{0} \text{ sur } \Gamma^D \}, \\ \mathcal{V} &= \{ \underline{v} = r(\underline{u}_0) + \tilde{\underline{u}} \mid \tilde{\underline{u}} \in \mathcal{V}^0 \}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

où $\underline{r}(\underline{u}_0)$ est un relèvement de \underline{u}_0 dans Ω , alors le problème fort (1.1) conduit à une inégalité variationnelle [Duvaut et Lions, 1976] :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V}_C \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, \underline{v} - \underline{u}) \geq l(\underline{v} - \underline{u}) \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_C, \end{cases} \quad (1.8)$$

où $\mathcal{V}_C = \{ \underline{v} \in \mathcal{V} \mid v_N \leq d \text{ sur } \Gamma^C \}$, avec v_N défini comme en (1.2). L'application $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire, continue et coercive tandis que $l(\cdot)$ est linéaire et continue, elles sont définies par :

$$\begin{aligned} a(\underline{v}, \underline{w}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{w}) : \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega \quad \forall \underline{v}, \underline{w} \in (H^1(\Omega))^m, \\ l(\underline{v}) &= \int_{\Omega} \underline{\underline{f}}^T \underline{v} d\Omega + \int_{\Gamma^N} \underline{\underline{\sigma}}_0^T \underline{v} d\Gamma \quad \forall \underline{v} \in (H^1(\Omega))^m. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Le problème (1.8) est entièrement défini par les données du problème fort (i.e. conditions aux limites, propriétés matériaux, jeu initial). Il est démontré dans la littérature [Duvaut et Lions, 1976] que le problème (1.8) est équivalent à un problème de minimisation tel que :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in \mathcal{V}_C \text{ tel que} \\ J(\underline{u}) = \min_{\underline{v} \in \mathcal{V}_C} J(\underline{v}) = \frac{1}{2} a(\underline{v}, \underline{v}) - l(\underline{v}), \end{cases} \quad (1.10)$$

Du fait des conditions de contact (présentes dans l'espace \mathcal{V}_C), le problème (1.10) est intrinsèquement non-linéaire. Il existe plusieurs méthodes dans la littérature pour traiter les inégalités variationnelles (1.8) ou (1.10). Les plus connues sont la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode du Lagrangien augmenté ou la méthode de Nitsche. La méthode de pénalisation transforme la minimisation sous contraintes en ajoutant un terme de pénalisation qui s'active quand les contraintes ne sont pas respectées. Cela permet de se ramener à une égalité variationnelle et une minimisation sans contraintes. Cependant, la méthode est très sensible au choix du paramètre de pénalisation et elle ne permet pas de garantir le respect de la condition de non-pénétration. La méthode des multiplicateurs de Lagrange introduit des DDLs supplémentaires et transforme la minimisation en un problème de type point-selle. Cette méthode présente l'avantage de respecter toutes les conditions de Signorini. Cependant, les DDLs ajoutés (les multiplicateurs de Lagrange) sont sous contrainte de non-négativité. La méthode du Lagrangien augmenté est une méthode hybride entre la pénalisation et les multiplicateurs de Lagrange. Elle permet d'éliminer la contrainte de positivité pour les multiplicateurs et elle respecte la condition de non-pénétration (admissibilité), mais elle est également sensible au choix du paramètre de pénalisation (souvent appelé de régularisation). Enfin, la méthode de Nitsche utilise le tenseur des contraintes pour définir la pression de contact et vérifier les conditions de contact. La formulation n'introduit donc pas de DDLs supplémentaires et n'est pas sensible au choix d'un paramètre, cependant, la variation de la pression de contact dépendant directement des contraintes, la méthode devient plus complexe à mettre en œuvre dans le cas d'un matériau à loi de comportement non-linéaire. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à [Wriggers, 2006].

Dans le contexte de cette thèse, nous considérons uniquement la méthode des multiplicateurs de Lagrange, car comme spécifié en section 1.1.4, il s'agit de la méthode retenue dans les applications de la plateforme PLEIADES.

1.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange introduit des degrés de liberté (DDLs) supplémentaires (les multiplicateurs) qui représentent (au signe près) les forces de contact. Cette

méthode permet de respecter toutes les conditions de contact. Cependant, les multiplicateurs de Lagrange qui constituent la variable duale du problème mixte sont soumis à une condition de non-négativité.

Nous introduisons l'espace de Sobolev $\mathcal{W} = (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C))'$ le dual de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C)$, lui-même que défini par [Dautray et Lions, 1988] :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C) = \{v \in L^2(\Gamma^C); \exists \underline{w} \in H^1(\Omega), \underline{w} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus \Gamma^C, \underline{w} = v \text{ sur } \Gamma^C\}. \quad (1.11)$$

Par définition on a :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C) \subset L^2(\Gamma^C) \subset (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C))'. \quad (1.12)$$

Le cône dual est défini tel que $\mathcal{W}^+ = \{q \in \mathcal{W} \mid q \geq 0\}$. Le produit de dualité est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C))'}$. On introduit $b(\cdot, \cdot)$ l'application bilinéaire continue telle que :

$$b(v, q) = \langle v_N, q \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C))'}, \quad (1.13)$$

avec v_N défini comme en (1.2). De plus l'application $b(\cdot, \cdot)$ est supposée inf-sup stable sur $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$, c'est à dire :

$$0 < \beta = \inf_{q \in \mathcal{W}} \sup_{v \in \mathcal{V}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_{\mathcal{V}} \|q\|_{\mathcal{W}}}, \quad (1.14)$$

L'application $b(\cdot, \cdot)$ permet d'exprimer en formulation variationnelle la condition de non-pénétration en posant $b(v, \eta) \leq g(\eta)$ avec $g(\cdot)$ définie telle que :

$$g(q) = \langle d, q \rangle_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C), (H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma^C))'} \quad (1.15)$$

Remarque : Si \underline{u} est suffisamment régulière, par exemple $\underline{u} \in H^2(\Omega)$, alors on peut choisir $\mathcal{W} = L^2(\Gamma^C)$, ainsi le produit de dualité dans (1.13) et (1.15) devient simplement le produit scalaire dans L^2 [Dautray et Lions, 1988].

Le problème (1.8) traité avec la méthode des multiplicateurs s'écrit [Kikuchi et Oden, 1987] :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}^+ \text{ tel que} \\ a(\underline{u}, v) + b(v, \lambda) = l(v), & \forall v \in \mathcal{V}^0 \\ b(\underline{u}, q - \lambda) \leq g(q - \lambda), & \forall q \in \mathcal{W}^+ \end{cases} \quad (1.16)$$

Le problème (1.16) est ainsi un problème de type point-selle [Kikuchi et Oden, 1987 ; Chabrand et al., 1998] dont l'existence et l'unicité de la solution ont été étudiées dans la littérature [Kikuchi et Oden, 1987]. La condition nécessaire [Brezzi, 1974] dite inf-sup/LBB (pour Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi) (1.14) est primordiale pour démontrer ces propriétés.

Il est important de retenir que la formulation via les multiplicateurs de Lagrange permet de respecter les trois conditions de contact du problème (1.1). Pour la condition de complémentarité, il faut prendre $q = 0$ et $q = 2\lambda$ dans (1.16) pour obtenir :

$$b(\underline{u}, \lambda) = g(\lambda) \quad (1.17)$$

Le multiplicateur de Lagrange solution de (1.16) est alors égal à l'opposé de la force de contact F_N :

$$\lambda = -F_N \quad (1.18)$$

1.2.3 Discrétisation du problème de contact par la méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est la méthode classique de discrétisation en mécanique des milieux continus, et en particulier en mécanique des solides. Elle consiste à discrétiser le domaine spatial Ω par un ensemble d'éléments recouvrant la totalité du domaine $\bar{\Omega}$ et définissant le maillage. Le pas de maillage h est défini comme le diamètre maximal sur l'ensemble des éléments. Nous considérons des EF de Lagrange, i.e. les inconnues sont définies à partir des valeurs aux nœuds du maillage. Soit $\mathcal{V}_h^0 \subset \mathcal{V}^0$ le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de formes EF de Lagrange $(\varphi_i)_{i=1}^N$ associées à tous les nœuds du maillage sauf ceux du bord Dirichlet (sur Γ^D). L'entier N correspond au nombre de degrés de liberté (DDLs) du problème. L'espace d'approximation EF pour la solution primale du problème (1.16) est noté $\mathcal{V}_h = \{v_h = r(u_0) + \tilde{u}_h \mid \tilde{u}_h \in \mathcal{V}_h^0\}$, avec $r(u_0)$ le relèvement de u_0 (cf. (1.7)). De manière similaire, $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ est le sous-espace vectoriel de dimension finie engendré par les fonctions de formes duales EF de Lagrange $(\xi_j)_{j=1}^{N_\lambda}$, qui sont supposées à valeurs positives ou nulles. Le cône dual discret $\mathcal{W}_h^+ \subset \mathcal{W}^+$ est engendré par les fonctions de formes de \mathcal{W}_h en imposant que les éléments engendrés soient dans le cône dual positif \mathcal{W}^+ , $\mathcal{W}_h^+ = Vect_+\{\xi_j\}_{j=1}^{N_\lambda}$. La notation $Vect_+$ indique que la combinaison linéaire est restreinte à des coefficients non-négatifs. Le problème (1.16) peut alors être défini sur les espaces d'approximation EF :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{u}_h, \lambda_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h^+ \text{ tel que} \\ a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) + b(\underline{v}_h, \lambda_h) = l(\underline{v}_h), & \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h^0 \\ b(\underline{u}_h, q_h - \lambda_h) \leq g(q_h - \lambda_h), & \forall q_h \in \mathcal{W}_h^+ \end{cases} \quad (1.19)$$

La formulation variationnelle approchée (1.19) est également un problème de type point-selle [Kikuchi et Oden, 1987 ; Chabrand et al., 1998], dont l'existence et l'unicité de la solution reposent notamment sur la condition nécessaire inf-sup/LBB. Cette condition s'écrit pour le problème EF (variationnel approché) :

$$\exists \beta_0, \quad 0 < \beta_0 \leq \beta_h = \inf_{q_h \in \mathcal{W}_h} \sup_{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_h} \frac{b(\underline{v}_h, q_h)}{\|\underline{v}_h\|_{\mathcal{V}} \|q_h\|_{\mathcal{W}}}, \quad (1.20)$$

Cette condition dépend du choix des espaces tests primaux et duaux mais également de la discrétisation du domaine. Certaines discrétisations des conditions de contact peuvent poser problème pour la vérifier [El-Abbasi et Bathe, 2001] (en fonction notamment de la technique d'appariement choisie, ex. : surface-surface, nœud-à-surface). La condition inf-sup/LBB est à la fois une condition de solvabilité du système et une condition de stabilité. La solvabilité est assurée dès que $\beta_h > 0$ (cf. (1.20)). La stabilité doit être étudiée en fonction du maillage en prouvant qu'il existe β_0 indépendant du maillage. Dans le reste de ce manuscrit, nous supposons que tous les modèles EF considérés respectent la condition inf-sup/LBB (pour la solvabilité et la stabilité).

A partir du problème (1.19) on peut obtenir un problème matriciel (1.21) qui définit les inconnues nodales :

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\underline{U}_h, \underline{\Lambda}_h) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{K}\underline{U}_h + \underline{B}^T \underline{\Lambda}_h = \underline{F} \\ \underline{B}\underline{U}_h \leq \underline{D} \\ \underline{\Lambda}_h^T (\underline{B}\underline{U}_h - \underline{D}) = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

avec :

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij} &= a(\varphi_j, \varphi_i), & \underline{F}_i &= l(\varphi_i) - a(r(u_0), \varphi_i), & i, j &\in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \\ \underline{B}_{ij} &= b(\varphi_j, \xi_i), & \underline{D}_i &= g(\xi_i), & i &\in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket, j \in \llbracket 1, N \rrbracket \end{aligned} \quad (1.22)$$

La solution EF peut alors être reconstruite sur tout le domaine en utilisant les fonctions de forme :

$$\underline{u}_h(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\underline{x})(\underline{U}_h)_i \quad (1.23)$$

$$\lambda_h(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \xi_j(\underline{x})(\underline{\Lambda}_h)_j \quad (1.24)$$

L'ordre primal du modèle EF est donc N tandis que l'ordre dual est N_λ . Plusieurs méthodes de résolution sont proposées dans la littérature, les plus connues sont la méthode de point-fixe, la méthode des statuts et la méthode de programmation mathématique ou programmation complémentaire LCP (Linear Complementarity Problem en anglais). La première méthode est une approche itérative qui résout le système puis vérifie la condition de non-pénétration, les conditions de contact sont imposées uniquement lorsque cette dernière n'est pas respectée. La méthode de point-fixe itère jusqu'à convergence, elle peut se présenter avec ou sans paramètre de relaxation [Raous *et al.*, 1988]. La méthode LCP [Raous *et al.*, 1988 ; Cottle *et al.*, 2009] utilise les équations du système de point-selle (1.21) pour exprimer la solution primale en fonction de la solution duale et se ramener à un système en fonction uniquement de l'inconnue duale. La solution primale est ensuite calculée en fonction de la solution duale. Dans ce manuscrit, nous considérons que le système (1.21) est résolu par la méthode des statuts (ou active set en anglais) [Abide *et al.*, 2016]. L'algorithme de résolution de la méthode des statuts (cf. Algorithme 1.1) consiste à itérer sur les statuts de contact (actif/inactif) jusqu'à respecter l'ensemble des conditions de contact (lorsque la liste des statuts ne change plus). A chaque itération, le problème de contact est résolu avec la liste des contacts actifs. Le système à résoudre revient alors à un problème de point-selle sous égalité variationnelle.

Algorithme 1.1 : Algorithme des statuts pour la résolution du contact traité par multiplicateurs de Lagrange.

Entrées : Système à résoudre, initialisation des statuts des points de contact potentiels

Sorties : Solutions primale et duale, liste des statuts de contact actifs

Définition des statuts à partir de l'initialisation donnée;

tant que *des statuts sont modifiés* **faire**

 Résolution du problème de contact avec la liste des contacts actifs ;

pour *chaque point de contact potentiel* **faire**

si *le statut est actif et que le multiplicateur de Lagrange est négatif* **alors**

 └ Changement de statut : actif \Rightarrow inactif;

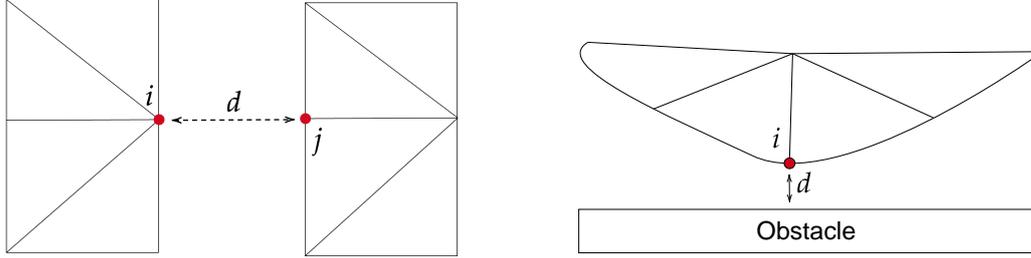
si *le statut est inactif et que le jeu est négatif* **alors**

 └ Changement de statut : inactif \Rightarrow actif;

1.2.4 Appariement des surfaces de contact

Il existe de nombreuses possibilités d'appariement des surfaces de contact, parmi lesquelles les conditions de type nœud-à-nœud [Wriggers, 2006], nœud-à-surface [Wriggers, 2006], surface-à-surface [Wriggers, 2006] ou encore mortier [Wohlmuth, 2000]. Hormis l'appariement nœud-à-nœud, ces formulations ont toutes l'avantage de pouvoir considérer des maillages non concordants.

Nous détaillons ici uniquement la discrétisation des conditions de contact pour un appariement nœud-à-nœud ou de type obstacle. La discrétisation pour un appariement nœud-à-surface sera présentée dans le chapitre 5. Nous présentons sur la figure 1.6 la schématisation générique de ces conditions de contact en 2D.



(a) Condition de contact nœud-à-nœud

(b) Condition de contact de type obstacle

FIGURE 1.6 – Schéma générique 2D de condition de contact nœud-à-nœud et obstacle

La formalisation mathématique s'écrit :

$$\text{Condition de type nœud-à-nœud : } \underline{u}_1(\underline{x}_i)^{\mathbf{T}} \underline{n}_1(\underline{x}_i) + \underline{u}_2(\underline{x}_j)^{\mathbf{T}} \underline{n}_2(\underline{x}_j) \leq d \quad (1.25)$$

$$\underline{n}_1(\underline{x}_i) = -\underline{n}_2(\underline{x}_j) \quad \Rightarrow \quad (\underline{u}_1(\underline{x}_i)^{\mathbf{T}} - \underline{u}_2(\underline{x}_j)^{\mathbf{T}}) \underline{n}_1(\underline{x}_i) \leq d$$

$$\text{Condition de type obstacle : } \underline{u}_1(\underline{x}_i)^{\mathbf{T}} \underline{n}_1(\underline{x}_i) \leq d \quad (1.26)$$

Pour des conditions de contact de type obstacle le jeu initial d est directement calculé à partir de la position du nœud et la position de l'obstacle (connue analytiquement). Pour les conditions de type nœud-à-nœud, le jeu initial d est calculé à partir de la position des nœuds. La rigidité de contact \underline{B} et le vecteur \underline{D} sont les discrétisations sur le maillage EF de ces conditions. Une condition de contact au nœud i correspond à :

$$\underline{B}[i, :] \underline{U}_h \leq \underline{D}[i] \quad (1.27)$$

Si on suppose que les normales \underline{n}_1 et \underline{n}_2 sont colinéaires à un des axes du repère, i.e. $\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la matrice \underline{B} pour 4 conditions de contact nœud-à-nœud a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.28)$$

Pour utiliser l'appariement de contact nœud-à-nœud il est impératif d'avoir un maillage concordant des surfaces de contact, avec tous les nœuds de discrétisation en vis-à-vis.

Le problème (1.21) représente le modèle haute fidélité ou FOM (Full Order Model en anglais) dont nous voulons réduire l'ordre. L'objectif est de réduire le temps de résolution du système tout en contrôlant la précision des solutions.

1.3 Autour de la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact

Dans cette section nous faisons quelques brefs rappels sur les méthodes de réduction d'ordre de modèle et nous abordons l'état de l'art sur la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. Nous nous focalisons sur la réduction d'ordre de modèle *a posteriori* par projection.

1.3.1 Rappel général sur la réduction d'ordre de modèle *a posteriori*

1.3.1.a Modèle réduits dits *a posteriori*

Par opposition aux méthodes dites *a priori* qui ne nécessitent aucune résolution préalable du modèle haute-fidélité, les méthodes dites *a posteriori* ont besoin d'une base de données composée des solutions du FOM, appelées snapshots. Une partie de ces snapshots, appelée ensemble d'entraînement, permet de construire des bases réduites (BR) qui engendrent un sous-espace vectoriel d'approximation inclus dans l'espace d'approximation du FOM. Il existe un grand nombre de techniques pour construire ces bases réduites, l'objectif étant d'obtenir une bonne précision sur l'approximation des solutions tout en ayant une petite dimension de base. Pour cela, des méthodes linéaires de compression de données sont souvent utilisées. La plus courante est la méthode POD-Snapshot [Sirovich, 1987] car elle construit une BR optimale (c'est à dire qu'elle fournit la plus petite erreur en norme euclidienne à dimension de base donnée). Une fois la BR construite, le modèle réduit est obtenu par projection de Galerkin du FOM sur la BR.

Par exemple pour un problème générique EF dans l'espace \mathcal{V}_h^0 (condition de Dirichlet homogène pour simplifier, i.e. $\underline{u}_0 = 0$), on construit une BR \underline{V} , composée de ℓ vecteurs colonnes, engendrant un sous-espace $\mathcal{V}_{ROM} \subset \mathcal{V}_h^0$. On peut réduire le FOM par la projection Galerkin sur \mathcal{V}_{ROM} et ainsi obtenir un modèle d'ordre réduit ou ROM (Reduced Order Model en anglais) :

	FOM	\Rightarrow	ROM
Forme variationnelle	$a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = f(\underline{v}_h),$ $\underline{u}_h, \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h^0$	\Rightarrow	$a(\underline{u}_{ROM}, \underline{v}_{ROM}) = f(\underline{v}_{ROM}),$ $\underline{u}_{ROM}, \underline{v}_{ROM} \in \mathcal{V}_{ROM}$
Forme matricielle	$\underline{K}\underline{U}_h = \underline{F},$	\Rightarrow	$\tilde{\underline{K}}\underline{\gamma} = \tilde{\underline{F}},$
	$\underline{K} \in \mathbb{R}^{N \times N},$ $\underline{U}_h, \underline{F} \in \mathbb{R}^N$		$\tilde{\underline{K}} = \underline{V}^T \underline{K} \underline{V} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ $\underline{\gamma} \in \mathbb{R}^\ell, \tilde{\underline{F}} = \underline{V}^T \underline{F} \in \mathbb{R}^\ell$

L'ordre du ROM est alors ℓ . Le ROM est donc efficace si $\ell \ll N$ et précis si $\underline{U}_{ROM} = \underline{V}\underline{\gamma}$ approxime bien la solution \underline{U}_h du FOM. La matrice $\tilde{\underline{K}} = \underline{V}^T \underline{K} \underline{V} \in \mathbb{R}^{\ell \times \ell}$ est de plus petite dimension que la matrice \underline{K} , mais elle n'est pas creuse. Ainsi, même si le ROM conserve la forme du problème EF (on a bien $\tilde{\underline{K}}\underline{\gamma} = \tilde{\underline{F}}$), il nécessite un solveur capable de résoudre un système avec une matrice pleine.

Les méthodes ROM de type *a posteriori* sont généralement décomposées en deux parties. Une partie offline où la base de données et les BR sont construites. Les projections matricielles possibles (ne dépendant pas du paramètre à faire varier) sont également réalisées dans la partie

offline. La partie offline peut également servir à faire de la validation (estimation d'erreur, étude de solvabilité/stabilité) à partir d'une partie des snapshots appelée espace de validation. La seconde partie, appelée online, est celle où les matrices non projetées offline sont construites puis le problème réduit résolu. Le temps nécessaire pour la partie offline peut être conséquent mais est souvent non regardé car la partie offline n'est effectuée qu'une seule fois, contrairement à la partie online qui peut être appelée de nombreuses fois dans une études paramétrique. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons au temps online même si nous essayons de limiter celui de la partie offline.

1.3.1.b Espace paramétrique

Comme mentionné dans la section 1.3.1.a, les méthodes de réduction d'ordre de modèle *a posteriori* nécessitent la construction d'une base de données de solutions FOM dans la partie offline. Il est nécessaire de définir un espace paramétrique, noté \mathcal{P} , qui représente les données du problème que l'on souhaite faire varier. Dans la partie online, le modèle réduit est utilisé pour résoudre le problème avec différentes valeurs paramétriques dans \mathcal{P} .

L'ensemble de paramètres, noté $\underline{\mu}$, peut modifier une ou plusieurs données du problème (condition aux limites ou caractéristiques matériau par exemple). Ainsi les différents problèmes considérés peuvent avoir une dépendance à l'ensemble des paramètres $\underline{\mu} \in \mathcal{P}$. Pour des raisons de clarté, dans ce manuscrit la dépendance au paramètre n'est pas explicitement écrite dans les modèles.

Dès lors qu'un espace paramétrique est défini, une base de données peut être obtenue en construisant un espace paramétrique d'entraînement $\mathcal{P}_{tr} = \{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_{N_s}\}$ et en utilisant le FOM pour avoir les N_s snapshots, alors rassemblés dans la matrice des snapshots.

Pour valider un modèle d'ordre réduit construit à partir de l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr} , il est nécessaire de considérer l'erreur des solutions réduites vis-à-vis des solutions FOM sur un ensemble de paramètres qui n'est pas compris dans l'espace d'entraînement. En effet, les informations de la base de données conduisent généralement à des précisions satisfaisantes pour les points de \mathcal{P}_{tr} .

1.3.1.c Méthodes d'hyper-réduction

Les méthodes d'hyper-réduction ont été développées dans le but de réduire le coût du calcul des problèmes non-linéaires. En effet, pour ces problèmes, des termes doivent être projetés dans la partie online. Notamment, dans le cas de problèmes mécaniques avec matériau à comportement non-linéaire résolu avec des méthodes de type Newton, la matrice Jacobienne doit être projetée à chaque itération de l'algorithme itératif. Par ailleurs, la loi de comportement doit également être évaluée à chaque itération. Cette évaluation en chaque point d'intégration du maillage EF représente un temps de calcul non négligeable.

Les méthodes d'hyper-réduction rendent le problème réduit moins dépendant des dimensions du maillage EF complet en utilisant des méthodes d'échantillonnage ou de condensation. Ainsi, par exemple, une loi de comportement ne doit être évaluée que sur un échantillon de points de Gauss ou d'éléments du maillage EF complet. La projection des termes non-linéaires qui dépendent du paramètre, ne pouvant pas être projetés dans la partie offline, s'en trouve également accélérée car cette projection est limitée aux termes de l'échantillon. Un exemple d'échantillonnage d'un maillage est présenté sur la figure 1.7.

Parmi les méthodes d'hyper-réduction, nous pouvons citer l'Empirical Interpolation Method (EIM) [Barrault *et al.*, 2004] ou sa version discrète (DEIM) [Chaturantabut et Sorensen, 2010], l'Energy-Conserving Sampling and Weighting (ECSW) [Farhat *et al.*, 2021] ou l'hyper-

réduction par Domaine d'Intégration Réduit (HR-RID) [Ryckelynck, 2005 ; Ryckelynck, 2009].

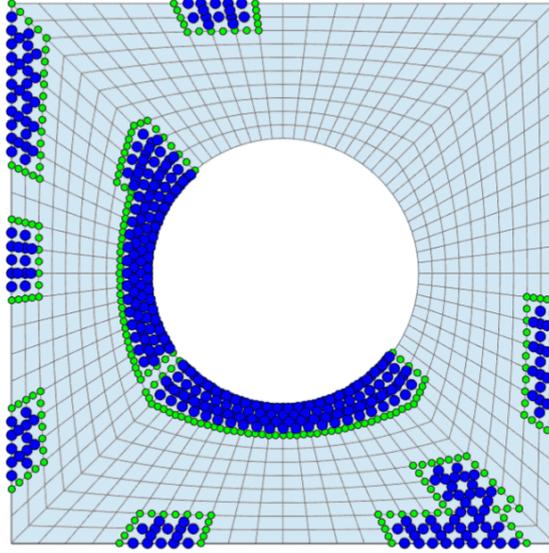


FIGURE 1.7 – Exemple d'un échantillonnage de maillage dans le cadre d'une méthode d'hyper-réduction [Fritzen *et al.*, 2018].

1.3.1.d L'épaisseur de Kolmogorov

La précision d'un modèle d'ordre réduit dépend de l'approximation de l'espace des solutions FOM par l'espace des solutions réduites (cf. section 1.3.1.a). L'efficacité de cette approximation peut être limitée. En effet, l'ordre nécessaire au modèle réduit (ℓ) pour obtenir une bonne précision peut ne pas apporter une accélération de calcul satisfaisante. Cela peut être dû à la complexité de l'espace des solutions FOM (non-linéarité, dimension, non régularité, contraintes de signe) qui peut rendre très difficile une approximation précise même pour un modèle réduit de grand ordre.

La limitation de l'approximation de l'espace des solutions par un modèle réduit peut être reliée au phénomène de la barrière de Kolmogorov. L'épaisseur d'ordre n , ou n -width de Kolmogorov [Kolmogorov, 1936] est définie comme la plus petite erreur que l'on peut obtenir en approximant les éléments d'une variété par un espace vectoriel de dimension finie n . Ainsi pour une variété \mathcal{M} la n -width de Kolmogorov est définie par :

$$d_n(\mathcal{M}) = \inf_{\substack{\mathcal{U}_n \\ \dim(\mathcal{U}_n)=n}} \sup_{\underline{u} \in \mathcal{M}} \inf_{\tilde{\underline{u}} \in \mathcal{U}_n} \|\underline{u} - \tilde{\underline{u}}\| \quad (1.29)$$

avec \mathcal{U}_n un espace vectoriel d'approximation de dimension n . Il est prouvé que pour certains problèmes linéaires, coercifs et décomposables en partie affine, la n -width de Kolmogorov des variétés de solutions décroît rapidement [Binev *et al.*, 2011 ; Ohlberger et Rave, 2016] :

$$d_n(\mathcal{M}) \leq C_1 e^{-C_2 n}, \text{ avec } C_1 < \infty \text{ et } C_2 > 0 \quad (1.30)$$

Cette décroissance est un argument favorable pour la réduction de modèle, même si elle ne détermine pas la technique de construction de l'espace d'approximation. Cependant, une limitation classique des méthodes de réduction de modèle est la barrière de Kolmogorov [Peherstorfer, 2022], qui est caractérisée par une décroissance lente de la n -width pour une variété.

A notre connaissance, il n'y a pas dans la littérature de bornes à la n -width de Kolmogorov pour le cône dual des multiplicateurs de Lagrange, cependant, dans [Fauque *et al.*, 2018 ; Kollerpara *et al.*, 2023] la limitation de l'approximation des multiplicateurs de Lagrange par un espace vectoriel de petite dimension est mise en évidence. Dans [Glas, 2018], un problème de point-selle en formulation espace-temps est considéré et la n -width de Kolmogorov est étudiée numériquement. Les auteurs constatent que la décroissance de la n -width est loin d'être exponentielle pour l'espace dual.

Trouver des solutions pour repousser la barrière de Kolmogorov est un sujet de recherche actif. Parmi les solutions étudiées on peut citer la réduction de modèle non-linéaire [Peherstorfer, 2022 ; Cohen *et al.*, 2023] qui repose sur l'approximation des solutions par interpolation non-linéaire, l'apprentissage des coefficients d'interpolation par réseaux de neurones [Barnett *et al.*, 2023] ou les méthodes de ROM locaux dont nous allons parler dans la section 1.3.1.e.

1.3.1.e Modèles réduits locaux

Pour contourner la difficulté d'approximation de l'espace des solutions FOM lorsque la n -width de Kolmogorov suit une décroissance lente, des approches utilisant des modèles d'ordre réduit locaux ont été développées. L'idée est d'approcher l'espace des solutions de manière linéaire par morceaux. Cela suppose que pour une valeur de paramètre donnée, il est possible de construire un sous-espace permettant d'approcher précisément la solution associée à la valeur du paramètre. On peut citer par exemple, des stratégies avec BR locales [Amsallem *et al.*, 2012 ; Choi *et al.*, 2020] ou de clustering sur l'espace paramétrique [Amsallem *et al.*, 2010 ; Daniel *et al.*, 2020 ; Daniel *et al.*, 2022 ; Boncoraglio et Farhat, 2022] (voir figure 1.8).

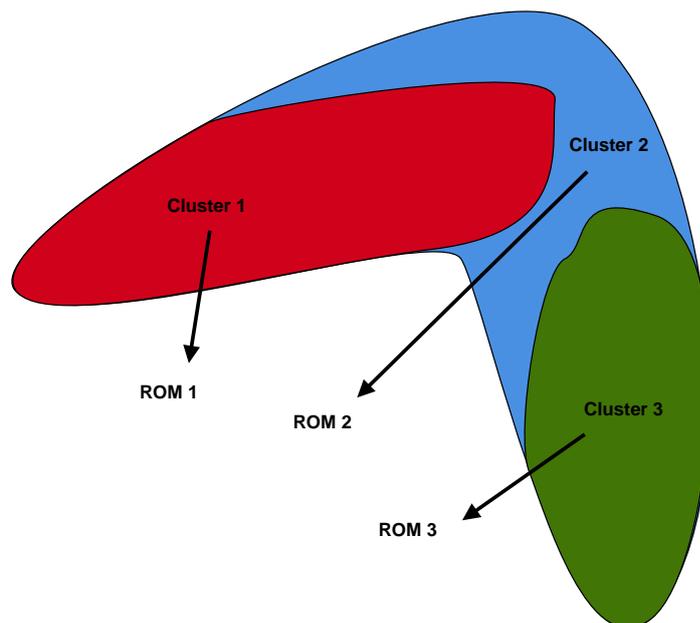


FIGURE 1.8 – Schéma d'une méthode de clustering sur l'espace paramétrique.

1.3.2 Etat de l'art sur la réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange

Les problèmes de contact traités par méthodes de pénalité ou du Lagrangien augmenté peuvent être réduits sans difficultés particulières autres que celles déjà présentes dans les problèmes de mécanique sans contact car il n'y a pas de variable sous contraintes de positivité à réduire. Nous pouvons citer par exemple [Giacoma *et al.*, 2014 ; Giacoma *et al.*, 2016 ; Bader *et al.*, 2016 ; Balajewicz et Toivanen, 2017 ; Ballani *et al.*, 2018 ; Scheffold *et al.*, 2018]. Les deux dernières citations considèrent la méthode LATIN pour traiter le contact qui est similaire à la méthode du Lagrangien augmenté.

La méthode de Nitsche [Nitsche, 1971] est une méthode purement primale sans contrainte de positivité, cependant elle n'est pas très étudiée dans le contexte de la réduction d'ordre de modèle pour les problèmes de contact car il s'agit d'une méthode récemment appliquée au contact [Heintz et Hansbo, 2006 ; Chouly et Hild, 2013]. Les seuls travaux autour de la réduction d'ordre de modèle qui nous sont connus pour cette méthode sont ceux de la thèse [Niakh, 2022].

Comme déjà indiqué, le traitement du contact par une méthode mixte implique une variable duale qui est sous contrainte de positivité. Cette contrainte crée un challenge complexe pour la construction d'un modèle réduit car les méthodes de compression classiques (notamment POD) ne peuvent pas être utilisées pour approcher les solutions duales car elles ne garantissent pas le respect de la non-négativité de la solution. Par ailleurs, tous les modèles réduits reposent sur l'hypothèse que les variables d'un modèle haute fidélité (ici le modèle EF) peuvent être représentées avec précision dans un sous-espace de petite dimension. Or la nature non-linéaire des conditions de contact et la non régularité des forces de contact limitent l'application de cette hypothèse à l'espace dual des problèmes de contact sous formulation mixte. Cette limitation est étudiée et illustrée dans [Fauque *et al.*, 2018 ; Kallepara *et al.*, 2023] et reportée en figure 1.9. On peut constater que même pour une BR POD (optimale mais qui ne respecte pas la condition de non-négativité) la décroissance de l'erreur d'approximation de la matrice des snapshots duaux est loin des performances de l'approximation pour les snapshots primaux.

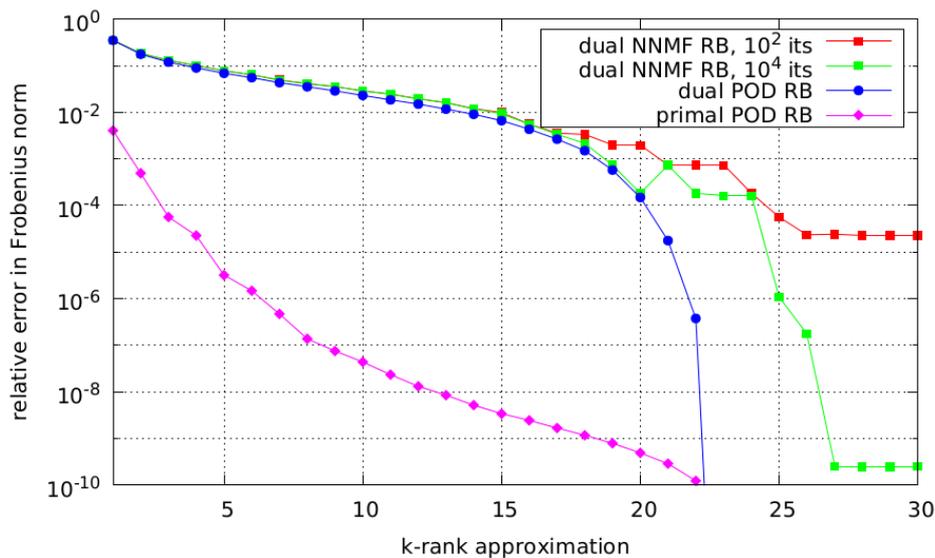


FIGURE 1.9 – Erreur relative entre les matrices de snapshots (primaux et duaux) et une approximation avec une BR de rang k [Fauque *et al.*, 2018].

Plusieurs modèles réduits sont proposés dans la littérature pour traiter les problèmes de contact en formulation mixte. Nous allons tout d'abord parler des travaux qui ne réduisent pas l'ordre dual, c'est à dire en conservant toute la base EF duale, contournant ainsi la

difficulté du problème mais limitant la réduction du modèle (ou les applications possibles) :

- Dans l'article [Delhez *et al.*, 2021], un problème de mécanique dynamique avec contact traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange est considéré. Une réduction de l'ordre primal via POD-snapshots, méthode de Craig-Bampton [Craig et Bampton, 1968] ou méthode de Craig-Bampton améliorée via des dérivées modales (modal derivatives en anglais) est proposée. Les modèles réduits sont appliqués à des cas de contact dynamique avec friction qui présentent des non linéarités géométriques.
- Les travaux [Manvelyan *et al.*, 2021 ; Manvelyan *et al.*, 2022] regardent des cas statique ou dynamique dans lesquels le contact est traité par multiplicateurs de Lagrange et résolu par la méthode de "Linear Complementarity Problem" (LCP). L'ordre primal est réduit via une méthode de sous-espaces de Krylov (cf. [Bai, 2002]). Il est important de remarquer qu'une attention particulière est prêtée au traitement du contact avec la création d'une matrice de transformation partitionnant les parties maître et esclave de la surface du contact. La discrétisation du contact étant projetée sur l'espace réduit primal, cette partition permet d'accélérer la résolution du système en réduisant la complexité du calcul de la projection. L'utilisation de la LCP décorrèle les résolutions primales et duales, cependant la réduction de la variable duale n'a pas été opérée par souci de précision.

Ces méthodes obtiennent généralement des résultats satisfaisants sur les forces de contact puisqu'ils conservent la formulation EF des multiplicateurs de Lagrange, cependant lorsque la surface de contact active contient un grand nombre de nœuds sur le maillage, le gain en temps de calcul est limité.

Pour traiter une grande surface de contact potentielle, il est nécessaire de réduire également l'ordre dual du problème. Lorsque l'ordre dual est réduit par projection via une BR duale, la formulation de point-selle peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\gamma_u, \gamma_\lambda) \in \mathbb{R}^{\ell^u} \times \mathbb{R}_+^{\ell^\lambda} \text{ tel que :} \\ \underline{V}_u^T \underline{K} \underline{V}_u \gamma_u + \underline{V}_u^T \underline{B}^T \underline{V}_\lambda \gamma_\lambda = \underline{V}_u^T \underline{F} \\ \underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \gamma_u \leq \underline{V}_\lambda^T \underline{D} \\ \gamma_\lambda^T (\underline{V}_\lambda^T \underline{D} - \underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \gamma_u) = 0 \end{array} \right. \quad (1.31)$$

avec respectivement \underline{V}_u , \underline{V}_λ , γ_u , γ_λ , ℓ^u et ℓ^λ , les BR primale et duale, les inconnues primale et duale et les ordres primal et dual. Cette formulation permet de vérifier les conditions de contact projetées, notamment la condition de complémentarité :

$$\gamma_\lambda \odot (\underline{V}_\lambda^T \underline{D} - \underline{V}_\lambda^T \underline{B} \underline{V}_u \gamma_u) = \underline{0}. \quad (1.32)$$

La notation \odot de (1.32) désigne le produit terme à terme. Cependant, après reconstruction des solutions réduites ($\underline{U}_{ROM} = \underline{V}_u \gamma_u$, $\underline{\Lambda}_{ROM} = \underline{V}_\lambda \gamma_\lambda$), seule la condition de non-adhésion est respectée. La condition de non-pénétration n'est pas respectée :

$$\underline{V}_\lambda^T (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) \geq \underline{0} \quad \not\Rightarrow \quad \underline{D} - \underline{B} \underline{U} \geq \underline{0}. \quad (1.33)$$

Quant à la condition de complémentarité, même si la relation $\underline{\Lambda}^T (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) = 0$ est vraie, le non respect de la condition de non-pénétration implique que le produit terme à terme n'est pas forcément nul :

$$\underline{\Lambda} \odot (\underline{D} - \underline{B} \underline{U}) \neq \underline{0}. \quad (1.34)$$

La condition de complémentarité peut alors ne pas être respectée localement.

Cette approche est utilisée dans les travaux suivants :

- Les articles [Haasdonk *et al.*, 2012 ; Glas et Urban, 2015] utilisent la méthode des bases réduites pour réduire l'ordre dual de problèmes de contact sans frottement. Ainsi, les

bases réduites primale et duale sont directement des matrices de snapshots, amenant généralement à un faible taux de compression des ordres. La base réduite primale peut être enrichie avec différentes stratégies d'enrichissement afin de s'assurer du respect de la condition nécessaire inf-sup/LBB. Des analyses mathématiques sur la solvabilité et stabilité des modèles réduits sont proposées. Des estimateurs d'erreurs *a posteriori* sont également introduits.

- Dans [Balajewicz *et al.*, 2016 ; Goury *et al.*, 2021 ; Leturcq, 2022], l'ordre dual est réduit via la méthode de Factorisation Non Négative de Matrice (NNMF en anglais). La méthode NNMF permet de construire une BR dont tous les éléments sont positifs ou nuls, cela permet de vérifier la condition de non-négativité en imposant la non-négativité aux coefficients. Cependant, cette méthode est loin de conduire à des précisions optimales en fonction du rang de la BR (cf. figure 1.9).

Dans [Balajewicz *et al.*, 2016], une BR primale est obtenue via POD-snapshots, un enrichissement de la base réduite primale est aussi utilisé pour vérifier la condition inf-sup/LBB lorsqu'elle ne l'est pas initialement. Dans les applications numériques sur des problèmes de contact sans frottement, la méthode NNMF montre des limitations pour obtenir des résultats précis sur la solution duale en conservant une réduction de l'ordre (cf. figure 1.10). Dans [Leturcq, 2022], un problème de contact avec frottement est considéré. La partie normale du contact est traitée par NNMF tandis que la partie tangentielle est traitée via POD-snapshots. La variable primale est réduite via POD-snapshots.

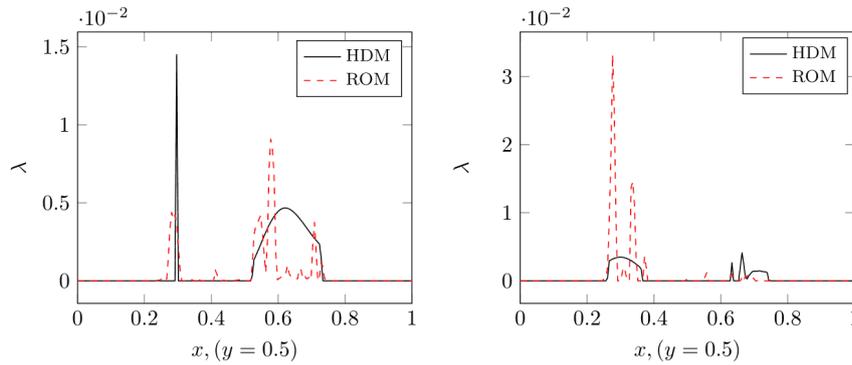


FIGURE 1.10 – Comparaison des solutions FOM (HDM) et ROM pour une approche avec BR duale construite par NNMF [Balajewicz *et al.*, 2016].

- Constatant les limitations de la méthode NNMF, les travaux dans [Benaceur *et al.*, 2020 ; Niakh *et al.*, 2023] s'attachent à proposer une méthode de construction d'une base réduite duale qui soit bien compressée mais qui donne également des résultats précis. Une projection sur le cône convexe positif par l'algorithme Cone projection Greedy (CPG) (ou sa version améliorée dans [Niakh *et al.*, 2023], CPGm (modifié)) est utilisée et montre des résultats plus satisfaisants que la NNMF. La solvabilité et stabilité du modèle réduit dépendant de la condition inf-sup/LBB est étudiée dans [Niakh *et al.*, 2023]. Une méthode d'enrichissement de la base réduite primale, basée sur la minimisation d'une quantité en lien avec la constante inf-sup/LBB (via un algorithme glouton), est introduite.

Dans la thèse [Niakh, 2022], le contact avec frottement traité par multiplicateurs de Lagrange est considéré. Le multiplicateur de Lagrange représentant la partie normale (soumise à la condition de positivité) est réduit via la méthode CPGm. L'espace correspondant à la partie tangentielle, qui n'est pas soumise à la condition de positivité, est réduit via POD-snapshots. Cependant, la précision de la méthode CPG semble limitée pour des valeurs de paramètre en dehors de celles l'espace d'entraînement [Kollepara

et al., 2023] (cf. figure 1.11).

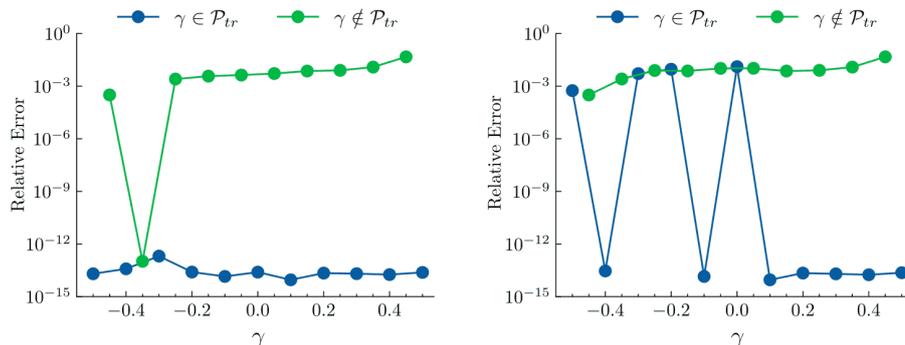


FIGURE 1.11 – Erreur relative primale (norme H^1) pour une approche avec BR duale construite par CPG dans et en dehors de l'espace d'entraînement [Kollepara *et al.*, 2023]. Gauche : BR duale de rang plein. Droite : BR duale avec troncature.

L'utilisation de méthodes d'hyper-réduction dans le cadre de la mécanique du contact est assez rare dans la littérature. Les travaux suivants proposent une approche avec ces méthodes :

- Dans la thèse [Niakh, 2022], déjà citée plus haut, la méthode EIM est utilisée dans le cadre de l'hyper-réduction d'un problème de contact avec frottement traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.
- Dans la thèse [Chapman, 2019] des problèmes de contact sont hyper-réduits par la méthode energy conserving sampling and weighing (ECSW) [Farhat *et al.*, 2014]. Les petites et grandes déformations sont traitées. Une base réduite duale est construite via NNMF, avec une amélioration via des méthodes d'optimisation (complétion de matrice de rang faible, algorithme des directions alternées). En petites déformations, le terme de contact n'est pas hyper-réduit. En grandes déformations, le contact est traité par la méthode Mortar et l'échantillonnage du maillage par l'hyper-réduction conduit à sélectionner la totalité de la surface mortar.
- Dans [Fauque *et al.*, 2018] un problème de contact sans frottement traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange est hyper-réduit avec la méthode HR-RID (cf. section 1.4). La base réduite duale correspond alors à la base duale EF restreinte au domaine d'intégration réduit de la méthode d'hyper-réduction. L'ordre dual est donc réduit sans avoir à faire appel à une méthode de compression non efficace de l'espace dual. En contrepartie les variables duales doivent être reconstruites en dehors du domaine réduit. Le modèle d'ordre réduit présente de très bonnes performances, notamment en comparaison d'approches avec une BR duale NNMF (cf. figure 1.12).

Cette variété de méthodes de réduction d'ordre de modèle dédiées à la mécanique du contact met en évidence la difficulté du sujet. Il y a un équilibre à trouver entre l'accélération du temps de résolution et la précision des solutions que l'on obtient.

Ce travail de thèse se place dans la continuité des travaux de [Fauque *et al.*, 2018 ; Fauque de Maistre, 2018] sur le modèle hyper-réduit hybride. Nous allons donc à présent introduire plus en détail cette méthode.

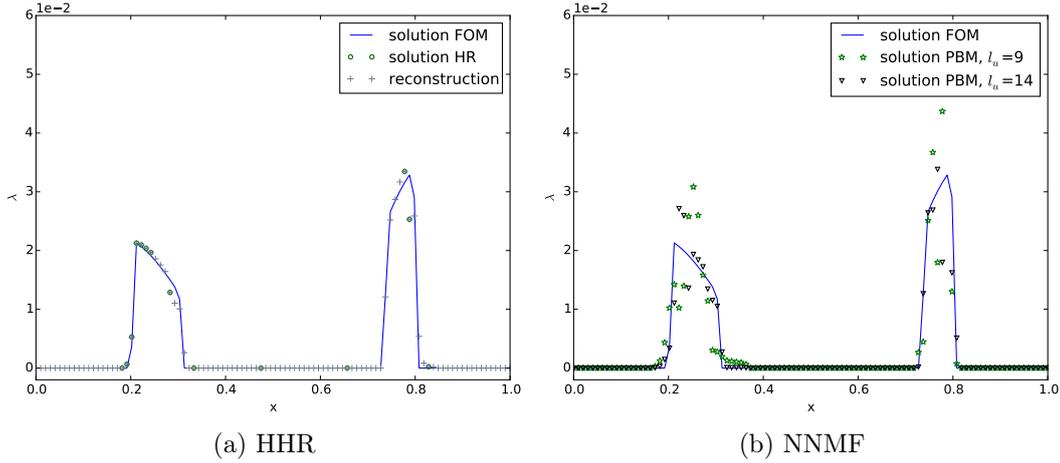


FIGURE 1.12 – Comparaison des solutions duales FOM et ROM pour les approches HHR et NNMF. figure issue de [Fauque *et al.*, 2018].

1.4 Hyper-réduction hybride pour la mécanique du contact

Dans cette section nous présentons en détail la méthode d’hyper-réduction hybride (HHR en anglais) introduite dans [Fauque *et al.*, 2018 ; Fauque de Maistre, 2018]. Cette méthode repose sur l’hyper-réduction via un domaine d’intégration réduit (RID en anglais), initialement introduite dans [Ryckelynck, 2009]. L’ordre primal est réduit via une base réduite POD-Snapshots classique, et l’ordre dual est réduit en utilisant la restriction de la base duale EF au RID. Dans ces travaux le problème de contact est supposé en appariement nœud-à-nœud (ou de type obstacle). Nous précisons les conséquences de ce choix pour le modèle réduit.

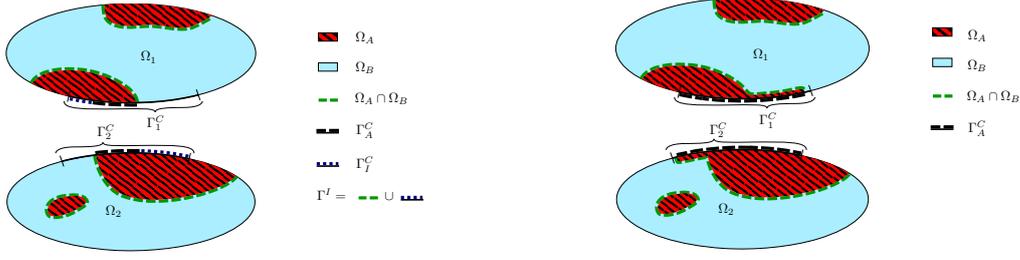
1.4.1 Formulation variationnelle

Soit un domaine ouvert Ω sur lequel est défini le problème de contact (1.1). Soit Ω_A le domaine d’intégration réduit (RID). Dans le cadre de la mécanique du contact il comporte généralement des zones dans différents solides (cf. Ω_1 et Ω_2 de la section 1.1.4). Une schématisation des domaines est proposée en figure 1.13. Le RID Ω_A et son complémentaire Ω_B sont tels que $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_A \cup \bar{\Omega}_B$ et $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$. L’interface entre les deux domaines est notée $\Gamma^I = \bar{\Omega}_A \cap \bar{\Omega}_B$.

Pour appliquer les conditions de contact, il est primordial de pouvoir calculer le jeu entre les deux parties du RID (une sur chaque objet). Pour s’assurer de pouvoir calculer le jeu dans le RID, deux choix sont possibles. Soit, comme sur la figure 1.13a, les parties de la surface de contact du RID où le calcul du jeu est impossible (car la partie en vis-à-vis sur l’autre objet n’est pas dans le RID) deviennent des frontières de type Dirichlet (il s’agit d’une extension de l’interface Γ^I). Soit, comme sur la figure 1.13b, le RID (Ω_A) est agrandi pour pouvoir calculer le jeu sur toutes les surfaces de contact du RID et ainsi traiter le contact. On inclut alors dans le RID les parties de la surface de contact en vis-à-vis qui n’y étaient pas. C’est ce dernier choix que nous faisons dans cette thèse, la méthode d’hyper-réduction hybride sera donc introduite dans ce cadre. Le lecteur peut se reporter à [Fauque *et al.*, 2018] pour l’extension des frontières de type Dirichlet.

Nous définissons \mathcal{A} l’ensemble des DDLs primaux non connectés à Ω_B :

$$\mathcal{A} = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \varphi_i^T \varphi_i d\Omega = 0\}, \quad (1.35)$$



(a) Schéma d'un RID avec extension de l'interface.

(b) Schéma d'un RID avec extension du RID.

FIGURE 1.13 – Schéma générique d'un domaine d'intégration réduit pour des problèmes de contact issu de [Fauque de Maistre, 2018].

et \mathcal{A}_λ l'ensemble des DDLs duaux qui ne sont pas connectés à Ω_B :

$$\mathcal{A}_\lambda = \{j \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \xi_j^\mathbf{T} \xi_j d\Omega = 0\} \quad (1.36)$$

Pour une base réduite primale donnée $\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^\ell$ (avec $\ell \ll N$), nous définissons l'espace réduit $\mathcal{V}_{RB} = Vect(\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^\ell) \subset \mathcal{V}_h^0$. La discrétisation de la BR dans la base EF est la matrice $\underline{\underline{V}} \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$, telle que :

$$\underline{\psi}_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\underline{x})(\underline{\underline{V}})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \forall k = 1, \dots, \ell \quad (1.37)$$

Nous définissons maintenant les modes $\underline{\psi}_k^A$, comme la restriction des modes $\underline{\psi}_k$ à \mathcal{A} et dont le prolongement dans Ω_B est nul. Les modes $\underline{\psi}_k^B$ sont alors définis comme les complémentaires à $\underline{\psi}_k^A$:

$$\begin{aligned} \underline{\psi}_k^A(\underline{x}) &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\underline{x})(\underline{\underline{V}})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \\ \underline{\psi}_k^B(\underline{x}) &= \underline{\psi}_k(\underline{x}) - \underline{\psi}_k^A(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (1.38)$$

L'espace engendré par les modes $\underline{\psi}_k^A$ est noté :

$$\mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0 = Vect(\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^\ell) \not\subset \mathcal{V}_{RB} \quad (1.39)$$

Les conditions aux limites naturelles du problème sont considérées sur $\partial\Omega \cap \Gamma^I$. Par ailleurs, la zone de contact du RID, notée Γ_A^C , est définie telle que :

$$\Gamma_A^C = \Gamma^C \cap \partial\Omega_A. \quad (1.40)$$

Sur $\Gamma^I \setminus \partial\Omega$ des conditions dites de pseudo-Dirichlet sont appliquées. La méthode HHR cherche alors la solution du champ de déplacements dans l'espace d'approximation réduit :

$$\mathcal{V}_{HR, \Omega_A} = \{\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \tilde{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^\mathbf{T}) + \underline{u}_{HR}^0 \mid \underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0\} \quad (1.41)$$

avec $\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_0)$ la restriction au RID du relèvement de \underline{u}_0 (défini en (1.7)) et $\tilde{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^\mathbf{T})$ le relèvement de la valeur Dirichlet $\underline{u}_{HR}^\mathbf{T}$ sur l'interface Γ^I du RID. La valeur de $\underline{u}_{HR}^\mathbf{T}$ reste inconnue, une définition implicite de ce dernier relèvement est donné par la méthode d'hyper-réduction avec RID [Ryckelynck, 2009] :

$$\tilde{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^\mathbf{T})(\underline{x}) = \sum_{k=1}^\ell \underline{\psi}_k^B(\underline{x}) \gamma_k^B, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (1.42)$$

associée à une relation de fermeture $\gamma_k^B = \gamma_k$, $k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$ afin de pouvoir résoudre le problème. Ainsi sur Γ^I , on a une condition de pseudo-Dirichlet. La solution HHR est alors dans l'espace d'approximation réduit :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{RB} = \{\underline{v} = \mathcal{I}_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \underline{v}_{RB}, \text{ tel que } \underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}\} \quad (1.43)$$

L'espace des fonctions tests est $\mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0$ qui est cinématiquement admissible.

Nous avons donc un modèle réduit en formulation Petrov-Galerkin pour la variable primale, puisque l'espace des fonctions tests et l'espace des fonctions solutions n'est pas le même. L'espace dual d'approximation réduit est défini tel que :

$$\mathcal{W}_{h, \Omega_A}^+ = \text{Vect}_+(\{\xi_i\}_{i \in \mathcal{A}_\lambda}) \quad (1.44)$$

dont la dimension correspond au cardinal de \mathcal{A}_λ noté N_λ^C .

En prenant en compte l'appariement nœud-à-nœud du contact (ou obstacle) et le choix de RID (i.e. chaque point de contact potentiel du RID a également son vis-à-vis dans le RID) nous pouvons écrire l'affirmation suivante :

$$\nexists j \in \mathcal{A}_\lambda \text{ tel que } b(\varphi_i, \xi_j) \neq 0 \text{ pour un } i \notin \mathcal{A} \quad (1.45)$$

autrement formulé, l'application $b(\cdot, \cdot)$ ne connecte pas \mathcal{A}_λ à un degré de liberté en dehors de \mathcal{A} .

Avec les notations introduites, le problème hyper-réduit hybride peut être formulé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR}) \in \tilde{\mathcal{V}}_{RB} \times \mathcal{W}_{h, \Omega_A}^+ \text{ tel que} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, \lambda_{HR}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0 \\ b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, q_{HR} - \lambda_{HR}) \leq g_{\Omega_A}(q_{HR} - \lambda_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h, \Omega_A}^+ \end{array} \right. \quad (1.46)$$

Avec $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$, $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$, $l_{\Omega_A}(\cdot)$ et $g_{\Omega_A}(\cdot)$ la restriction des applications $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ et $g(\cdot)$ (respectivement) au RID.

Similairement au problème (1.19), le problème (1.46) est de type point-selle, il est donc également soumis à la condition nécessaire inf-sup/LBB introduite dans la section 1.2.3. Par la formulation de Petrov-Galerkin sur la variable primale, l'application $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ est projetée une fois sur $\mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^{0, \Omega_A}$ et appliquée une fois sur $\tilde{\mathcal{V}}_{RB}$. Dans le cas de l'appariement nœud-à-nœud et du choix fait sur le RID, la propriété (1.45) nous indique cependant que l'application $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ n'est pas affectée par la projection de Petrov-Galerkin. Cette propriété nous donne en effet :

$$b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \eta_{HR}) = b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^0, \eta_{HR}), \quad \forall \eta_{HR} \in \mathcal{W}_{h, \Omega_A}^+, \quad (1.47)$$

avec $\underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0$ introduit dans (1.41). Par conséquent, le problème (1.46) est de type point-selle symétrique par bloc. La condition inf-sup/LBB du modèle HHR s'écrit donc :

$$\exists \beta_1, \quad 0 < \beta_1 \leq \beta_{HR} = \inf_{q_{HR} \in \mathcal{W}_{h, \Omega_A} \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0} \sup \frac{b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, q_{HR})}{\|\underline{v}_{HR}\|_{\mathcal{V}} \|q_{HR}\|_{\mathcal{W}}}, \quad (1.48)$$

et qui porte uniquement sur l'espace primal des fonctions test.

Nous allons à présent détailler la construction de la BR primale et du RID pour la méthode HHR, ainsi que la formulation matricielle du problème (1.46).

1.4.2 Construction de la base réduite primale

Nous considérons un espace paramétrique \mathcal{P} du problème de contact (1.19) et un espace d'entraînement $\mathcal{P}_{tr.} = \{\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_{N_s}\}$ contenant N_s valeurs de paramètres $\underline{\mu}$ pour lesquels nous résolvons le problème haute-fidélité. Les solutions primales pour chaque valeur de paramètre constituent notre base de données et sont conservées dans la matrice des snapshots des déplacements, notée $\underline{\underline{S}}_u \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$.

Une décomposition en valeurs singulières (SVD) est opérée sur les matrices des snapshots :

$$\underline{\underline{S}}_u = \underline{\underline{V}}_u \underline{\underline{\Sigma}}_u \underline{\underline{W}}_u^{\mathbf{T}}, \quad (1.49)$$

avec $\underline{\underline{V}}_u \in \mathbb{R}^{N \times N}$, $\underline{\underline{W}}_u \in \mathbb{R}^{N_s \times N_s}$ les matrices orthogonales des vecteurs singuliers à gauche et à droite (respectivement). La matrice des valeurs singulières $\underline{\underline{\Sigma}}_u \in \mathbb{R}^{N \times N_s}$ s'écrit :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_u = \begin{pmatrix} \underline{\underline{D}}_u & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \underline{\underline{D}}_u = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_d) \in \mathbb{R}^{d \times d}, \text{ t.q. } \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_d \quad (1.50)$$

Une troncature de rang p de la SVD sur $\underline{\underline{S}}_u$ s'écrit :

$$\underline{\underline{S}}_u^p = \underline{\underline{V}}_u[:, 1 : p] \underline{\underline{\Sigma}}_u[1 : p, 1 : p] \underline{\underline{W}}_u^{\mathbf{T}}[1 : p, :] \quad (1.51)$$

On peut caractériser l'erreur d'approximation de $\underline{\underline{S}}_u^p$ sur $\underline{\underline{S}}_u$ par :

$$\mathcal{E}(p) = \|\underline{\underline{S}}_u - \underline{\underline{S}}_u^p\|_F = \frac{\sum_{i=1}^p \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} = 1 - \frac{\sum_{i=p+1}^d \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} \quad (1.52)$$

avec $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius. En s'appuyant sur (1.52) on construit la BR primale en prenant la troncature d'ordre ℓ de la matrice $\underline{\underline{V}}_u$ telle que pour un seuil ϵ fixé :

$$\ell = \underset{p \in \mathbb{N}}{\text{argmin}} (\mathcal{E}(p) \geq 1 - \epsilon) \quad \text{ou} \quad \frac{\sum_{i=p+1}^d \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^d \sigma_i^2} < \epsilon \quad (1.53)$$

La matrice de la BR primale s'écrit :

$$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}_u[:, 1 : \ell] \in \mathbb{R}^{N \times \ell} \quad (1.54)$$

1.4.3 Construction du domaine d'intégration réduit

La construction du RID suit la méthode proposée par [Ryckelynck, 2009 ; Fauque *et al.*, 2018] reposant sur la DEIM [Chaturantabut et Sorensen, 2010]. L'algorithme DEIM (cf. Algorithme 1.2) est d'abord appliqué à la BR primale (cf. (1.54)), et retourne un ensemble de points d'interpolation \mathcal{L} tel que $\text{card}(\mathcal{L}) = \ell$. Au sens mathématique, l'algorithme DEIM choisit les nœuds qui minimisent le résidu de projection de $\underline{\underline{V}}$ sur $\underline{\underline{V}}[\mathcal{L}, :]$. L'algorithme DEIM permet également de s'assurer que la restriction de la BR aux indices des points d'interpolation $\underline{\underline{V}}[\mathcal{L}, :]$ est une matrice de rang plein en colonnes, permettant de conserver le fait que $\underline{\underline{V}}$ soit une base. De plus, l'algorithme garantit ainsi que la restriction de la BR à n'importe quelle extension de la liste d'indices \mathcal{L} reste une base. Cette propriété permet d'étendre l'ensemble \mathcal{L} en y ajoutant d'autres points d'interpolation.

Nous pouvons définir une liste d'indice \mathcal{L}_2 dans laquelle nous incluons des nœuds non sélectionnés à ajouter. Par exemple, des nœuds sur des zones d'intérêts afin de prendre en compte les conditions aux limites du problème peuvent être inclus dans \mathcal{L}_2 . Dans le cas des problèmes de contact, et lorsque cela est nécessaire, il est possible d'élargir le RID pour traiter suffisamment de point de contact potentiels. La liste \mathcal{L}_2 peut également être élargie pour s'assurer

Algorithme 1.2 : Algorithme DEIM

Entrées : matrice de base réduite ordonnée (cf. POD) $\underline{\underline{V}} = [v_1, \dots, v_\ell] \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$

Sorties : ensemble d'indices de nœuds du maillage \mathcal{L} , tel que $\text{card}(\mathcal{L}) = \ell$

Initialisation : $i_1 = \text{argmax}(|v_1|)$;

$\mathcal{L} = \{i_1\}$, $\tilde{\underline{\underline{V}}} = \underline{\underline{V}}[:, 1]$, $\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{e}}_{i_1}]$;

pour $k = 2, \dots, \ell$ **faire**

 résoudre $\underline{\underline{P}}^T \tilde{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{P}}^T v_k$ pour $\underline{\underline{x}} \in \mathbb{R}^{k-1}$;

$\underline{\underline{r}} = v_k - \tilde{\underline{\underline{V}}} \underline{\underline{x}}$;

$i_k = \text{argmax}(|\underline{\underline{r}}|)$;

$\mathcal{L} = \{\mathcal{L}, i_k\}$, $\tilde{\underline{\underline{V}}} = \underline{\underline{V}}[:, 1 : k]$, $\underline{\underline{P}} = [\underline{\underline{P}} \underline{\underline{e}}_{i_k}]$;

du bon traitement des conditions de contact. Par exemple, le choix que nous avons fait sur le RID en section 1.4.1 d'élargir le RID pour pouvoir calculer le jeu initial pour chaque point du RID rentre dans ce cas de figure. La sélection des points d'interpolation peut être réalisée en utilisant l'algorithme DEIM sur une BR duale POD. La BR duale POD est utilisée uniquement pour la construction du RID. L'avantage d'utiliser une DEIM sur une base POD duale est que les ddls sélectionnés seront localisés sur la surface de contact et que nous utilisons les informations contenues dans les snapshots. Des extensions avec l'algorithme DEIM sur d'autres bases POD ont déjà été proposées dans [Ryckelynck, 2009] (base POD sur les contraintes ou déformations par exemple).

Avec les listes \mathcal{L} et \mathcal{L}_2 , le RID est défini par :

$$\Omega_A = \bigcup_{i \in \mathcal{L}} \text{supp}(\underline{\underline{\varphi}}_i) \cup \bigcup_{j \in \mathcal{L}_2} \text{supp}(\underline{\underline{\varphi}}_j) \quad (1.55)$$

où $\text{supp}(\underline{\underline{\varphi}}_i)$ le support de la fonction de forme EF $\underline{\underline{\varphi}}_i$. Les ensembles \mathcal{A} (cf. (1.35)) et \mathcal{A}_λ (cf. (1.36)) peuvent ainsi être construits.

1.4.4 Construction de la base duale du modèle HHR

Une fois le RID construit et l'ensemble \mathcal{A}_λ défini, la base duale du modèle HHR est définie comme la restriction de la base duale EF aux DDLs duaux de \mathcal{A}_λ . La base duale du modèle HHR s'écrit :

$$(\underline{\underline{V}}_\lambda)_{ij} = \begin{cases} \delta_{ij}, & i \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket, j \in \mathcal{A}_\lambda. \\ \underline{\underline{0}} \text{ sinon,} & \end{cases} \quad (1.56)$$

La base duale du modèle HHR est de dimension $\underline{\underline{V}}_\lambda \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_\lambda^C}$ mais elle peut être comparée à un opérateur de restriction de la base duale EF qui projette uniquement sur les ddls duaux de \mathcal{A}_λ . Par conséquent, seules $N_\lambda^C = \text{card}(\mathcal{A}_\lambda)$ fonctions de formes duales EF sont considérées, d'où l'ordre duale réduit du modèle HHR. En pratique cette base n'apparaît pas dans les formulation matricielle du modèle HHR car la base duale EF est déjà présente dans les matrices EF. Ainsi, seule la restriction à \mathcal{A}_λ apparaît.

C'est ce choix de base duale EF restreinte dans le modèle réduit qui procure le nom de "hybride" à la méthode. En fait le modèle HHR s'appuie sur une base POD pour la variable primale et une base local EF pour la variable duale.

1.4.5 Le problème HHR

Connaissant la BR primale \underline{V} et le RID, il est possible d'obtenir la formulation matricielle du problème (1.46). Il s'agit de projeter la première ligne de (1.21) sur $\underline{V}[\mathcal{A}, :]$ et de restreindre la seconde ligne à \mathcal{A}_λ . En posant pour la solution primale $\underline{u}_{HR} = \underline{V}\gamma$ et restreignant la solution duale à \mathcal{A}_λ (DDLs duaux du RID), le problème HHR s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\gamma, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{K} \underline{V} \gamma + \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{B}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{F} \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{V} \gamma \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^{\mathbf{T}} (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{V} \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = 0 \end{array} \right. \quad (1.57)$$

En utilisant la nature creuse des matrices EF et le fait que la matrice \underline{B} soit définie uniquement sur les DDLs de la frontière de contact, nous pouvons restreindre le problème (1.57) à certaines lignes et colonnes. Pour cela nous définissons les ensembles suivants :

$$\mathcal{A}_c = \{i \in \mathcal{A} \mid \exists j \in \mathcal{A}_\lambda \text{ t.q. } \underline{B}_{ji} \neq 0\} \subset \mathcal{A}, \quad (1.58)$$

$$\mathcal{I} = \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket, j \notin \mathcal{A} \mid \exists i \in \mathcal{A} \text{ tel que } \underline{K}_{ij} \neq 0\} \quad (1.59)$$

\mathcal{A}_c est l'ensemble des DDLs de \mathcal{A} connectés à \mathcal{A}_λ via \underline{B} et \mathcal{I} est l'ensemble des DDLs de l'interface du RID Γ^I . La propriété (1.45), établie pour les appariements de contact nœud-à-nœud ou de type obstacle, est équivalente en formulation matricielle à :

$$\nexists j \in \mathcal{A}_\lambda \text{ tel que } (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{V})_{ji} \neq 0 \text{ pour un } i \notin \mathcal{A}_c \quad (1.60)$$

Avec ces ensembles et la propriété (1.60), nous pouvons écrire le problème HHR tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\gamma, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \gamma + \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}_c, :] \underline{B}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{F} \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \gamma \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^{\mathbf{T}} (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = 0 \end{array} \right. \quad (1.61)$$

Le modèle réduit (1.61) respecte toutes les conditions de contact (non projetées) à l'intérieur du RID. Le respect de la condition de complémentarité découle de la troisième ligne de (1.61). Le modèle implique que $\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]$ est négatif ou nul et que $\underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]$ est positif. De plus la troisième ligne indique que la somme $\underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^{\mathbf{T}} (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda])$ est nulle, cela implique que chaque terme est nul, i.e. :

$$\underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] \odot (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :] \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = \underline{0} \quad (1.62)$$

avec \odot le produit terme à terme.

Comme pour le problème EF (1.21), la formulation (1.61) est un problème de point-selle symétrique par bloc. En posant :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{K}} &= \underline{V}^{\mathbf{T}}[\mathcal{A}, :] \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :], \\ \underline{\tilde{B}} &= \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :], \end{aligned} \quad (1.63)$$

nous pouvons le constater en écrivant la matrice par bloc associée au système (1.61) :

$$\begin{pmatrix} \underline{\tilde{K}} & \underline{\tilde{B}}^{\mathbf{T}} \\ \underline{\tilde{B}} & \underline{0} \end{pmatrix}, \quad (1.64)$$

même si $\underline{\tilde{K}}$ est non symétrique (cf. Petrov-Galerkin), cette matrice est symétrique par bloc.

Dans [Fauque *et al.*, 2018], il a également été démontré que la formulation HHR (1.61) en appariement nœud-à-nœud est consistante avec la formulation EF si la condition inf-sup/LBB est vérifiée. En formulation matricielle, la condition inf-sup/LBB est traduite par la nécessité d'avoir la matrice $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda^{actif}, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$ de rang plein en ligne, avec $\mathcal{A}_\lambda^{actif}$ l'ensemble des ddls de \mathcal{A}_λ pour lesquels le statut de contact est actif. Cette matrice permet d'écrire la relation :

$$\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda^{actif}, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :] \underline{\underline{\gamma}} = \underline{\underline{D}}[\mathcal{A}_\lambda^{actif}]. \quad (1.65)$$

La condition de solvabilité s'écrit alors :

$$\text{rang}(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda^{actif}, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) = \text{card}(\mathcal{A}_\lambda^{actif}) \quad (1.66)$$

L'ensemble $\mathcal{A}_\lambda^{actif}$ est inconnu *a priori* (il est déterminé par les itérations de l'algorithme des statuts). Par conséquent, dans ce manuscrit nous considérons une condition inf-sup/LBB plus forte qui porte sur l'ensemble \mathcal{A}_λ :

$$\text{rang}(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) = \text{card}(\mathcal{A}_\lambda) = N_\lambda^C \quad (1.67)$$

Par la suite, toute référence à la condition inf-sup/LBB matricielle fait référence à la condition (1.67) sur \mathcal{A}_λ .

Lorsque la condition inf-sup/LBB n'est pas respectée initialement par le problème HHR, il a été proposé dans [Fauque *et al.*, 2018] d'enrichir la BR primale par des fonctions de forme EF associées aux nœuds de Γ_A^C (1.40) dans le but d'augmenter le rang de la matrice $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$. La BR primale devient :

$$\underline{\underline{V}} = \left(\underline{\underline{V}} \mid \underline{\underline{I}}_N \left[:, \mathcal{L}_C \right] \right), \quad (1.68)$$

avec \mathcal{L}_C un ensemble d'indices associés aux nœuds de la surface de contact potentielle du RID. Nous avons $\mathcal{L}_C \subseteq \mathcal{A}_c$, et $\text{card}(\mathcal{L}_C) = m_e$. La base réduite primale enrichie $\underline{\underline{V}}$ est composée de $\bar{\ell} = \ell + m_e$ vecteurs colonnes, ℓ vecteurs POD et m_e vecteurs EF. Par conséquent, le modèle HHR devient alors également une méthode hybride pour la solution primale.

1.4.6 Reconstruction de la solution duale en dehors du RID

La solution primale du modèle HHR peut être obtenue sans difficulté sur le maillage complet à l'aide de la BR primale POD, en posant :

$$\underline{\underline{U}}_{HR} = \underline{\underline{V}} \underline{\underline{\gamma}} \quad (1.69)$$

Il est possible que la solution primale reconstruite ne respecte pas toutes les conditions de contact en dehors du RID, en particulier il est possible d'avoir $\underline{\underline{B}} \underline{\underline{U}}_{HR} > \underline{\underline{D}}$.

Le modèle HHR (1.61) permet d'obtenir des solutions duales uniquement à l'intérieur du RID sur \mathcal{A}_λ car il n'y a pas de base réduite duale pour la reconstruction en dehors du RID. Il est cependant possible de post-traiter les multiplicateurs obtenus sur le RID pour obtenir une solution duale reconstruite comme proposé dans [Fauque *et al.*, 2018]. En utilisant une matrice de snapshots duaux $\underline{\underline{S}}_\lambda \in \mathbb{R}^{N_\lambda \times N_S}$ telle que les N_S colonnes soit linéairement indépendantes et $N_S \leq N_\lambda + N_\lambda^C$ (pour que le problème de minimisation ne soit pas sur-contraint), la reconstruction cherche des coefficients sous contrainte de positivité (cf. condition de non-adhésion) tout en minimisant la condition de complémentarité et l'erreur avec la solution HHR duale $\underline{\underline{A}}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]$ obtenue sur le RID.

La reconstruction se fait en résolvant le problème de minimisation suivant :

$$\min_{\underline{\gamma}_\lambda \geq 0} \left\| \begin{pmatrix} \underline{S}_\lambda[\mathcal{A}_\lambda, :] \\ [D - \underline{B}U_{HR}]_+ \odot \underline{S}_\lambda \end{pmatrix} \underline{\gamma}_\lambda - \begin{pmatrix} \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2, \quad (1.70)$$

avec $(\underline{U}_{HR}, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda])$ la solution du problème HHR, \odot le produit terme à terme et $[\cdot]_+$ la partie positive. La solution duale reconstruite en dehors de \mathcal{A}_λ est définie par :

$$\underline{\Delta}[[1, N_\lambda] \setminus \mathcal{A}_\lambda] = \underline{S}_\lambda[[1, N_\lambda] \setminus \mathcal{A}_\lambda] \underline{\gamma}_\lambda \quad (1.71)$$

En pratique le problème (1.70) est résolu par la méthode des moindres carrés non-négatifs (NNLS : Non Negative Least Squares en anglais), pour s'assurer que les coefficients $\underline{\gamma}_\lambda$ soit positifs.

1.4.7 Indicateur d'erreur du modèle HHR

En réduction d'ordre de modèle, un indicateur d'erreur permet d'approcher l'erreur du modèle réduit vis à vis du FOM sans avoir à résoudre le FOM. Les indicateurs d'erreurs sont très souvent utilisés pour améliorer les modèles réduits notamment en permettant de bien sélectionner les snapshots composant l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr} (i.e. sélectionner les snapshots permettant d'obtenir la meilleure BR possible).

Dans ce travail, nous pourrions utiliser un algorithme glouton (cf. Algorithme 1.3) couplé à un indicateur d'erreur pour sélectionner les snapshots. L'algorithme glouton minimise/maximise une quantité en faisant le meilleur choix localement à chaque itération. Pour l'utiliser pour la sélection des snapshots, nous donnons en entrées une grille de paramètres potentiels $\mathcal{P}_{grid} \subset \mathcal{P}$, un nombre maximal de snapshots à sélectionner, un seuil de tolérance η_{max} et un indicateur d'erreur η . Il est également nécessaire de construire un premier modèle HHR à partir de quelques snapshots pré-sélectionnés. A chaque itération, l'indicateur prédit l'erreur du modèle HHR pour tous les paramètres de \mathcal{P}_{grid} . L'algorithme sélectionne le paramètre qui présente la plus grande erreur et un nouveau modèle HHR est construit à partir de l'espace d'entraînement mis à jour. Lorsque les erreurs du modèle pour tous les paramètres de \mathcal{P}_{grid} sont en dessous du seuil de tolérance ou que le nombre maximal de snapshots est atteint, l'algorithme s'arrête.

Algorithme 1.3 : Algorithme glouton pour la sélection des snapshots

Entrées : Nombre maximum de snapshots N_{max} , seuil de tolérance η_{max} , ensemble des paramètres d'entraînement \mathcal{P}_{grid} , indicateur d'erreur η

Sorties : Ensemble des paramètres sélectionnés \mathcal{P}_{snap}

$N = 0$;

$\mathcal{P}_{snap} = \emptyset$;

tant que $N < N_{max}$ **faire**

pour $\underline{\mu} \in \mathcal{P}_{grid} \setminus \mathcal{P}_{snap}$ **faire**

 └ calculer $\eta(\underline{\mu})$;

$\underline{\mu}_{max} = \underset{\underline{\mu} \in \mathcal{P}_{grid} \setminus \mathcal{P}_{snap}}{\operatorname{argmax}} (\eta(\underline{\mu}))$;

$\mathcal{P}_{snap} = [\mathcal{P}_{snap} \ \underline{\mu}_{max}]$;

si $\eta_{max} > \eta(\underline{\mu}_{max})$ **alors**

 └ arrêt de l'algorithme ;

$N = N + 1$;

Dans [Fauque *et al.*, 2018], un indicateur d'erreur pour la méthode HHR a été développé, il se base sur la résolution d'un problème EF sur le RID, moins coûteux en temps de calcul que le problème EF sur tout le domaine. Pour une valeur de paramètre donnée $\underline{\mu} \in \mathcal{P}$, une condition aux limites de Dirichlet sur l'interface \mathcal{I} du RID est interpolée à partir des snapshots déjà calculés de l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{snap} :

$$\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{I}] = \sum_{\underline{\rho} \in \mathcal{P}_{snap}} \alpha_{\underline{\rho}}(\underline{\mu}) U(\underline{\rho})[\mathcal{I}], \quad (1.72)$$

avec $\alpha_{\underline{\rho}}(\underline{\mu})$ les coefficients d'interpolation obtenus par interpolation multilinéaire. Pour respecter les conditions de contact dans le RID, lorsque l'interpolation ne permet pas de vérifier la non-pénétration, on impose un jeu nul. Un problème de contact EF restreint au RID est résolu avec cette condition aux limites pour obtenir la solution $(\tilde{U}[\mathcal{A}], \tilde{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda])$. L'indicateur d'erreur est alors défini comme l'erreur relative entre la solution HHR et la solution $(\tilde{U}[\mathcal{A}], \tilde{\Delta}[\mathcal{A}_\lambda])$ pour des normes données :

$$\begin{aligned} \eta(\underline{\mu}) &= \eta_u(\underline{\mu}) + \eta_\lambda(\underline{\mu}) \\ \eta_u(\underline{\mu}) &= \frac{\|(\underline{U}_{HR} - \tilde{U})(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|}{\|\tilde{U}(\underline{\mu})[\mathcal{A}]\|} \\ \eta_\lambda(\underline{\mu}) &= \frac{\|(\underline{\Delta} - \tilde{\Delta})(\underline{\mu})[\mathcal{A}_\lambda]\|}{\|\tilde{\Delta}(\underline{\mu})[\mathcal{A}_\lambda]\|} \end{aligned} \quad (1.73)$$

L'application de cet indicateur reste limité par les performances de l'interpolation multilinéaire (à la fois en temps de calcul et en précision). Notamment, plus la dimension de l'espace paramétrique augmente, plus cette interpolation peut devenir coûteuse. On rejoint ici la notion de malédiction de la dimension ou curse of dimensionality en anglais, courante en réduction d'ordre de modèles.

1.5 Cas tests d'applications numériques

Dans cette section nous introduisons les cas tests d'applications numériques qui serviront dans la suite de ce mémoire. Nous présentons les modèles EF qui servent à la construction des bases de données de solution (snapshots) et dont les solutions seront considérées comme solution de référence pour le calcul des erreurs.

Le solveur utilisé pour les systèmes utilisés dans ce manuscrit est le solveur EF du CEA Cast3M [Cast3M]. Les résolutions sont toutes réalisées en locale sur une unité centrale dotée d'un processeur intel i7.

1.5.1 Demi-disques de Hertz en contact

Ce cas test académique décrit dans [Benaceur *et al.*, 2020], est un cas test classique reprenant la théorie de Hertz [Hertz, 1882] permettant de tester la potentialité des méthodes dans le cas des zones de contact tendues. On considère deux demi-disques en 2D de rayon $R = 1\text{m}$. Les deux disques sont séparés d'un jeu initial de $d = 0.1\text{m}$ à leurs points les plus proches. Les deux objets sont élastiques et ont les mêmes caractéristiques matérielles, un module de Young à $E = 15\text{ Pa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0.35$.

Les bords horizontaux sont soumis à des conditions de Dirichlet telles que $u_x = 0$, $u_y = -\mu/2$ pour le bord supérieur et $u_y = \mu/2$ pour le bord inférieur. Il s'agit d'un cas test avec un seul paramètre, $\mu \in \mathcal{P} = [0.15, 0.45]$ (m). Le maillage est en appariement nœuds-à-nœuds sur la

surface de contact (maillages concordants). Le modèle EF est construit sur un maillage de 678 nœuds qui contient 55 relations de contact. Le maillage EF contient 1214 éléments. Le modèle EF a donc un ordre primal de $N = 1356$ et dual de $N_\lambda = 55$. Le maillage EF pour ce cas test est représenté sur la figure 1.14a, et la déformation obtenue pour une valeur de paramètre de $\mu = 0.30$ (m) est représentée sur la figure 1.14b.

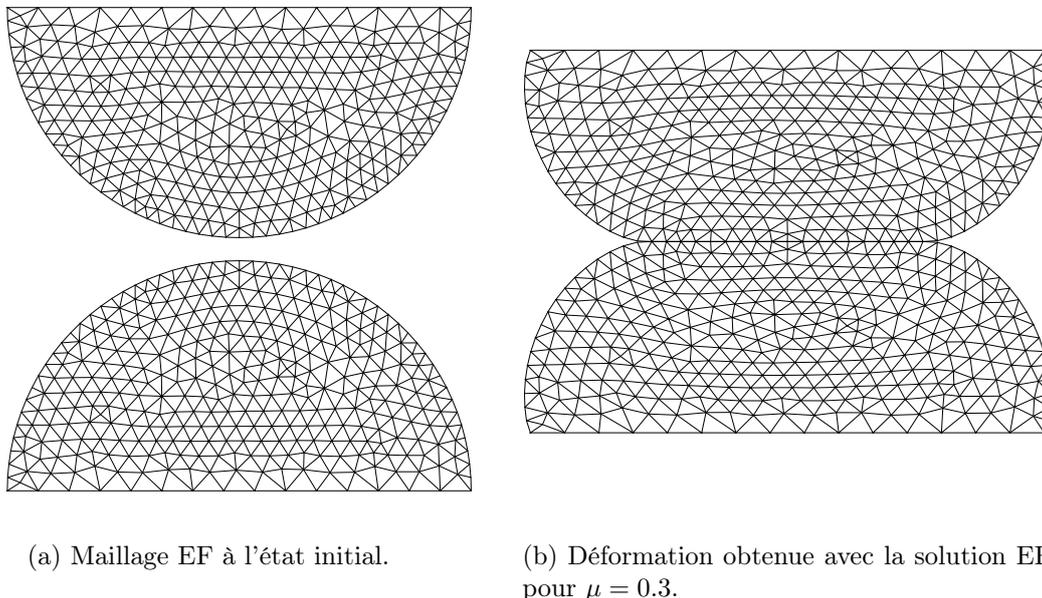


FIGURE 1.14 – Configuration EF du cas test des deux demi-disques de Hertz. $N = 1356$ $N_\lambda = 55$

1.5.2 Interaction pastille-gaine en axisymétrie

Ce cas test, introduit dans [Liu *et al.*, 2017], est issu de la modélisation du combustible nucléaire. Il est utilisé pour modéliser l'interaction pastille-gaine. Le cas test considère une pastille et la partie de gaine l'entourant. Il s'agit d'un cas test en 2D axisymétrique (2D_{rz}), cf. figure 1.4. La géométrie du cas test est présentée par la figure 1.15a. Les deux matériaux suivent une loi de comportement élastique isotrope, le combustible a un module de Young de $E = 190\text{GPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.3$, la gaine quant à elle a un module de Young de $E = 78\text{GPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.34$. Le jeu initial entre les deux objets est de $d = 2\mu\text{m}$. Les deux objets sont mis en contact en appliquant sur l'extérieur de la gaine une pression P_1 sur une hauteur h_1 . Ces deux paramètres varient dans l'espace paramétrique \mathcal{P} défini par $P_1 \in [5, 200]\text{MPa}$ et $h_1 \in [0.6, 6]\text{mm}$, ainsi $\underline{\mu} = \begin{pmatrix} P_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$. Une condition de Dirichlet impose un déplacement vertical nul ($u_z = 0$) en haut du combustible et en haut et en bas de la gaine. Le déplacement vertical en bas de la pastille est contraint par la condition $u_z \geq 0$. Ce cas test présente une forte variation des pressions de contact possible (de par la variation de P_1) et une forte de variation de la surface de contact active possible (liée à la hauteur d'application h_1 de la pression). En appariement nœud à nœud, le modèle EF est construit sur un maillage de 6800 éléments, 6000 pour le combustible et 800 pour la gaine. Ce maillage comprend 7070 nœuds, 6161 pour le combustible et 909 pour la gaine (cf. figure 1.15b). Il y a 101 relations de contact. L'ordre primal du modèle est donc de $N = 14140$ et l'ordre dual $N_\lambda = 101$. Le changement de maillage pour l'appariement nœud-à-surface sera explicité dans le chapitre 5.

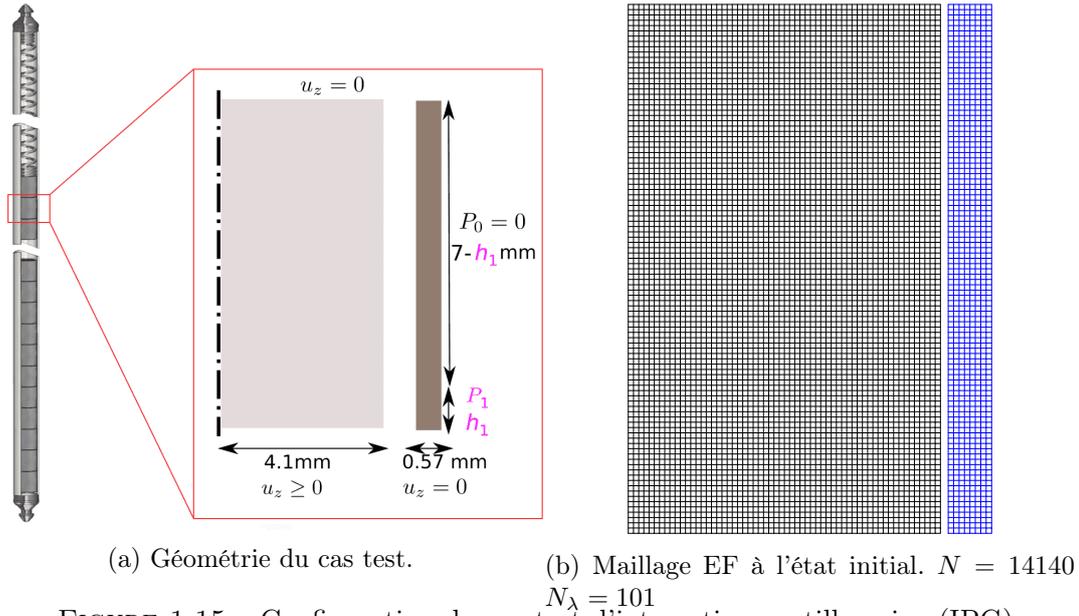


FIGURE 1.15 – Configuration du cas test d'interaction pastille gaine (IPG).

1.6 Objectifs principaux de la thèse

Afin de pouvoir accélérer les temps de simulation du comportement mécanique du combustible nucléaire au sein de la plateforme PLEIADES, composant qui représente une part significative du temps de calcul total du couplage multiphysique (cf. section 1.1.3), nous voulons développer un modèle d'ordre réduit. Dans [Fauque *et al.*, 2018 ; Fauque de Maistre, 2018], le modèle hyper-réduit hybride a été introduit pour traiter des problèmes mécaniques avec contact sans frottement. Ce modèle réduit considérait des conditions de contact en appariement nœud-à-nœud (ou de type obstacle). Sa capacité à réduire efficacement des problèmes de contact a été démontrée, notamment en comparant sa précision avec un modèle d'ordre réduit utilisant une base réduite NNMF [Fauque de Maistre, 2018]. Des interrogations quant à la capacité du modèle réduit à traiter des problèmes présentant de larges variations de la zone de contact ou de la pression de contact avaient été soulevées dans [Fauque de Maistre, 2018].

Le premier objectif de la thèse est d'analyser théoriquement l'erreur du modèle hyper-réduit HHR vis-à-vis du modèle EF (chapitre 2) afin de contrôler l'erreur *a priori* et *a posteriori* commise par l'approximation HHR et permettre d'identifier ses forces et ses limites.

Un deuxième objectif est d'améliorer les performances numériques de la méthode HHR, en s'intéressant particulièrement aux précisions duales pour des problèmes présentant de larges variations de la zone de contact ou de la pression de contact (cf. chapitres 3 et 4).

Par ailleurs, un enjeu important de la thèse est d'étendre l'application du modèle HHR à des maillages de contact non-concordants (chapitre 5). Ce type de maillage permet de traiter des géométries ou configurations plus complexes.

Enfin, nous avons pour objectif d'appliquer le modèle HHR développé pour les appariements nœud-à-surface à des problèmes de contact sur maillage non concordants avec matériaux non-linéaires (chapitre 6).

Chapitre 2

Analyse théorique du modèle HHR

Dans ce chapitre nous étudions l'erreur du modèle hyper-réduit hybride (HHR) vis-à-vis du modèle EF dans le contexte général des inégalités variationnelles traitées par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Nous allons introduire et démontrer des bornes d'erreurs *a priori* et *a posteriori*. Des exemples issus de la mécanique du contact permettront d'illustrer numériquement les estimations obtenues.

Ce travail a été présenté lors d'une communication orale à ICCCM2023 [Le Berre *et al.*, 2023a].

Sommaire

2.1	Modèles	41
2.1.1	Inégalité variationnelle et modèle continu	41
2.1.2	Modèle élément fini	42
2.1.3	Modèle élément fini en configuration de décomposition de domaine	43
2.1.4	Modèle hyper-réduit hybride (HHR)	44
2.2	Analyse d'erreur <i>a priori</i>	47
2.2.1	Bornes d'erreurs <i>a priori</i> pour une méthode des bases réduites	47
2.2.2	Borne sur l'erreur duale du modèle HHR	50
2.2.3	Borne sur l'erreur primale dans Ω_A	51
2.2.4	Borne sur l'erreur primale sur tout Ω	53
2.3	Analyse d'erreur <i>a posteriori</i> pour le modèle HHR	54
2.3.1	Bornes <i>a posteriori</i> sur l'erreur primale HHR	54
2.3.2	Nouvel indicateur d'erreur primale	57
2.4	Dissimilarité en métrique chordale et relation avec l'erreur primale	57
2.5	Autour de la condition inf-sup/LBB du modèle HHR	59
2.6	Vérifications numériques	60
2.6.1	Mise en pratique de l'évaluation des bornes	60
2.6.2	Cas test académique	62
2.6.3	Cas test industriel	65
2.7	Conclusion	70

Pour être le plus général possible, ce chapitre est autoporteur dans ses définitions. Les modèles, espaces, applications et constantes sont définis. Cela permet de considérer une inégalité variationnelle abstraite qu'on pourrait rencontrer dans différents domaines (torsion élastoplastique [Glowinski, 1984], mécanique du contact [Duvaut et Lions, 1976], en finance [Ito et Kunisch, 2006], ...). De plus, afin de simplifier l'étude et les preuves, et dans ce chapitre uniquement, nous considérons, sans perte de généralité, un problème fort où la condition de Dirichlet est homogène (soit dans (1.1) $\underline{u}_0 = \underline{0}$).

Nous focaliserons les vérifications numériques des bornes sur des problèmes de mécanique du contact. Par ailleurs, ces cas tests numériques comportant des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, permettront de constater que l'hypothèse simplificatrice dans les preuves est sans perte de généralité.

Nous commençons par définir les différents modèles en section 2.1, avant de démontrer des bornes d'erreurs *a priori* pour le modèle HHR en section 2.2. Les estimations *a posteriori* ainsi qu'un nouvel indicateur d'erreur sont introduites en section 2.3. La section 2.4 concerne l'étude de la dissimilarité des espaces d'approximation en métrique chordale. Une discussion sur la condition inf-sup/LBB est proposée en section 2.5. Pour finir, des vérifications numériques sur les deux cas test introduits au chapitre 1 (section 1.5) sont réalisées en section 2.6 pour les différentes estimations d'erreurs.

2.1 Modèles

2.1.1 Inégalité variationnelle et modèle continu

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ un domaine spatial ouvert borné (m la dimension), de bordure $\partial\Omega$. Nous désignons par \mathcal{V} , \mathcal{W} deux espaces de Hilbert séparables. L'espace $\mathcal{W}^+ \subset \mathcal{W}$ est un cône convexe fermé et non vide inclus dans \mathcal{W} . Soient $a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une application bilinéaire continue, $l : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, $b : \mathcal{V} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, une application bilinéaire continue, et $g : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue.

Les applications $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$, et $g(\cdot)$ peuvent être dépendantes d'un (ou plusieurs) paramètre qui n'est pas explicitement écrit dans les formulations pour alléger les notations. Les normes induites sur \mathcal{V} et \mathcal{W} sont notées de façon générique $\|\cdot\|$ pour éviter d'alourdir la notation. L'espace associé aux normes est implicite en fonction de la variable considérée (primale ou duale). Quand aucune indication n'est donnée les normes sont sur le domaine spatial complet (Ω). La notation $\|\cdot\|_{\Omega_A}$ indique que la norme est restreinte au domaine spatial Ω_A . Nous focalisons notre attention sur des problèmes d'inégalités variationnelles qui peuvent être traités par la méthode des multiplicateurs de Lagrange, menant à des problèmes sous formulation faible mixte (primale-duale) [Duvaut et Lions, 1976 ; Kikuchi et Oden, 1987] tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}, \lambda) \in \mathcal{V} \times \mathcal{W}^+ \text{ tel que :} \\ a(\underline{u}, \underline{v}) + b(\underline{v}, \lambda) = l(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}, \\ b(\underline{u}, q - \lambda) \leq g(q - \lambda), \quad \forall q \in \mathcal{W}^+. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Nous supposons que le problème (2.1) est bien posé. Nous n'explicitons pas les conditions nécessaires pour cela dans le cas continu mais elles se trouvent dans la littérature [Brezzi, 1974 ; Kikuchi et Oden, 1987], et seront détaillées dans le cas discret en section 2.1.2. Une propriété importante de la formulation mixte est la condition de complémentarité des solutions primale et duale :

$$b(\underline{u}, \lambda) = g(\lambda) \quad (2.2)$$

Cette condition est obtenue à partir du problème (2.1) en prenant $q = 0$ et $q = 2\lambda$ dans la seconde équation. Elle reste vraie pour les modèles discrets et nous y feront référence en tant que "complémentarité" quand nécessaire. Nous définissons :

$$\mathcal{Z} = \{\underline{v} \in \mathcal{V} \mid b(\underline{v}, q) \leq g(q) \forall q \in \mathcal{W}^+\}, \quad (2.3)$$

$$\mathcal{K} = Ker(b, \mathcal{V}, \mathcal{W}) = \{\underline{v} \in \mathcal{V} \mid b(\underline{v}, q) = 0 \forall q \in \mathcal{W}\}. \quad (2.4)$$

Le problème (2.1) induit que $\underline{u} \in \mathcal{Z}$, la solution primale, est aussi solution [Brezzi *et al.*, 1978] de :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = l(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{K}. \quad (2.5)$$

Remarque : La formulation (2.5) sera déclinée en diverses versions discrètes dans la suite de ce chapitre. Que ce soit ici, ou pour les versions discrètes, les démonstrations suivantes ne nécessitent pas l'équivalence des problèmes (2.1) et (2.5) mais juste l'implication de (2.5) par (2.1).

2.1.2 Modèle élément fini

Soit $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ un sous-espace de dimension finie de \mathcal{V} obtenu avec la méthode des éléments finis (EF), tel que $\mathcal{V}_h = Vect(\{\varphi_i\}_{i=1}^N)$ avec N le nombre de degrés de libertés primaux et φ_i les fonctions de forme de Lagrange (i.e. à support compact). Soit $\mathcal{W}_h \subset \mathcal{W}$ le sous-espace de dimension finie de \mathcal{W} obtenu avec la méthode EF, tel que $\mathcal{W}_h = Vect(\{\xi_j\}_{j=1}^{N_\lambda})$ avec N_λ le nombre de degrés de libertés duaux et ξ_j les fonctions de forme duales de Lagrange. L'espace dual EF du cône convexe $\mathcal{W}_h^+ \subset \mathcal{W}^+$ est engendré par $\mathcal{W}_h^+ = Vect_+(\{\xi_j\}_{j=1}^{N_\lambda})$ (pour rappel, $Vect_+$ indique que la combinaison linéaire est restreinte à des coefficients non-négatifs). L'approximation EF de la solution du problème (2.1) est la solution du problème (2.6) dit de haute fidélité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_h, \lambda_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h^+ \text{ t. q.} \\ a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) + b(\underline{v}_h, \lambda_h) = l(\underline{v}_h) \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h, \\ b(\underline{u}_h, q_h - \lambda_h) \leq g(q_h - \lambda_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_h^+. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Nous supposons que la discrétisation EF respecte les conditions nécessaires à l'existence et l'unicité de la solution [Babuška, 1973 ; Brezzi, 1974] reposant sur la (bi)linéarité et la continuité des applications $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ et $g(\cdot)$, ainsi que sur la coercivité de $a(\cdot, \cdot)$ et le respect de la condition inf-sup/LBB sur $b(\cdot, \cdot)$. Nous introduisons les notations suivantes :

$$\text{Continuité de } a(\cdot, \cdot) : |a(\underline{v}_h, \underline{w}_h)| \leq M_a \|\underline{v}_h\| \|\underline{w}_h\| \quad \forall \underline{v}_h, \underline{w}_h \in \mathcal{V}_h, \quad M_a > 0 \quad (2.7)$$

$$\text{Continuité de } b(\cdot, \cdot) : |b(\underline{v}_h, q_h)| \leq M_b \|\underline{v}_h\| \|q_h\| \quad \forall (\underline{v}_h, q_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h, \quad M_b > 0 \quad (2.8)$$

$$\text{Coercivité de } a(\cdot, \cdot) : a(\underline{v}_h, \underline{v}_h) \geq \alpha \|\underline{v}_h\|^2 \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h, \quad \alpha > 0 \quad (2.9)$$

$$\text{inf-sup/LBB} : \exists \beta_0 > 0, \quad \beta_0 \leq \beta_h := \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_h \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_h \\ \underline{v}_h \neq 0}} \frac{b(\underline{v}_h, q_h)}{\|\underline{v}_h\| \|q_h\|} \quad (2.10)$$

Nous définissons les formes discrètes de \mathcal{Z} éq. (2.3) et \mathcal{K} éq. (2.4) par :

$$\mathcal{Z}_h = \{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_h \mid b(\underline{v}_h, q_h) \leq g(q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_h^+\}, \quad (2.11)$$

$$\mathcal{K}_h = Ker(b, \mathcal{V}_h, \mathcal{W}_h) = \{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_h \mid b(\underline{v}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_h\}. \quad (2.12)$$

Pour un problème (2.6) bien posé, la théorie de Brezzi [Brezzi *et al.*, 1978] prouve que l'espace \mathcal{Z}_h n'est pas vide.

Remarque : Rigoureusement, la condition de coercivité (2.9) est plus forte que ce qui est strictement nécessaire mathématiquement pour l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.6). La version suffisante de la condition porte sur la coercivité de l'application a sur le noyau \mathcal{K}_h .

De façon similaire au modèle continu, la solution primale du problème (2.6), $\underline{u}_h \in \mathcal{Z}_h$ est également solution de :

$$a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) = l(\underline{v}_h), \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{K}_h. \quad (2.13)$$

2.1.3 Modèle élément fini en configuration de décomposition de domaine

Soit Ω_A un sous-domaine spatial donné de Ω . Le sous-domaine $\Omega_A \subset \Omega$ est aussi un ouvert borné de bordure $\partial\Omega_A$. Le sous-domaine Ω_B est le complémentaire de Ω_A tel que $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_A \cup \overline{\Omega}_B$ et $\Gamma_I = \overline{\Omega}_A \cap \overline{\Omega}_B$ est l'interface géométrique entre les deux sous-domaines. Les espaces \mathcal{V}_{h,Ω_A} , \mathcal{W}_{h,Ω_A} et $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$ sont les espaces \mathcal{V}_h , \mathcal{W}_h et \mathcal{W}_h^+ (respectivement) restreints à Ω_A . Nous définissons les espaces fonctionnels suivant sur Ω_A :

$$\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 = \{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A} \mid \underline{v}_h = \underline{0} \text{ sur } \Gamma_I\}, \quad (2.14)$$

$$\tilde{\mathcal{V}}_{h,\Omega_A} = \{\underline{v}_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A} \mid \underline{v}_h = \underline{u}_h^{\mathcal{D}} \text{ sur } \Gamma_I\}, \quad (2.15)$$

avec $\underline{u}_h^{\mathcal{D}}$ la valeur Dirichlet imposée sur Γ_I .

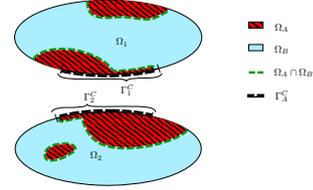


FIGURE 2.1 – Schéma d'un domaine Ω_A pour des problèmes de contact issu de [Fauque de Maistre, 2018].

Nous définissons alors le problème EF suivant sur Ω_A :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{h,\Omega_A}^0, \lambda_{h,\Omega_A}) \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \text{ t. q.} \\ a_{\Omega_A}(r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) + \underline{u}_{h,\Omega_A}^0, \underline{v}_h) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \lambda_{h,\Omega_A}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_h) \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0, \\ b_{\Omega_A}(r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) + \underline{u}_{h,\Omega_A}^0, q_h - \lambda_{h,\Omega_A}) \leq g_{\Omega_A}(q_h - \lambda_{h,\Omega_A}), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+, \end{array} \right. \quad (2.16)$$

avec $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$, $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$, $l_{\Omega_A}(\cdot)$ et $g_{\Omega_A}(\cdot)$ les applications $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ et $g(\cdot)$ (respectivement) où l'intégration est restreinte à Ω_A . On désigne par $r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}})$ le relèvement de $\underline{u}_h^{\mathcal{D}}$ sur Ω_A tel que $r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) \in \tilde{\mathcal{V}}_{h,\Omega_A}$.

La solution primale $\underline{u}_{h,\Omega_A}$ du problème (2.16) s'écrit :

$$\underline{u}_{h,\Omega_A}(\underline{x}) = r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}})(\underline{x}) + \underline{u}_{h,\Omega_A}^0(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega_A. \quad (2.17)$$

Lemme 1 *Quand Ω_A est dans une configuration conforme d'un point de vue "décomposition de domaine" (i.e. le maillage de Ω_A est porté par le maillage de Ω et la bordure Ω_A est bien fermée par des conditions aux bords), si $\underline{u}_h^{\mathcal{D}} = \underline{u}_h^{\mathcal{I}}$ (avec $\underline{u}_h^{\mathcal{I}} = \underline{u}_{h|\Gamma_I}$ la solution EF du problème (2.6) restreinte à l'interface Γ_I), alors les solutions des problèmes (2.6) et (2.16) sont équivalentes sur Ω_A , c'est à dire :*

$$\underline{u}_{h,\Omega_A} = \underline{u}_{h|\Omega_A} \quad (2.18)$$

Preuve : La preuve du Lemme 1 est similaire à celle s'appuyant sur le problème de transmission en décomposition de domaine des problèmes elliptiques (cf. [Dolean *et al.*, 2015]).

Comme les fonctions de $\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$ peuvent être trivialement étendues par 0 sur $\Omega \setminus \Omega_A$, la forme $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ est continue et coercive sur $\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$ avec les mêmes constantes que le problème EF (2.6) (cf. [Iollo *et al.*, 2023]). Le même argument peut être utilisé pour l'application b_{Ω_A} . Par conséquent, le problème (2.16) est bien posé car il hérite du respect des conditions nécessaires du modèle EF (2.6). Afin d'alléger les notations, nous utiliserons les constantes de coercivité et continuité du modèle EF (2.6), M_a , M_b et α , introduites en (2.7)-(2.9). Nous définissons la constante inf-sup/LBB du problème (2.16) par :

$$\text{inf-sup/LBB} : \exists \beta_1 > 0, \quad \beta_1 \leq \beta_h^{\Omega_A} := \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{v_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{\Omega_A} \|q_h\|_{\Omega_A}} \quad (2.19)$$

Avec l'extension de $\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$ à 0 sur $\Omega \setminus \Omega_A$ nous avons l'inclusion :

$$\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \subset \mathcal{V}_h, \quad (2.20)$$

de même nous pouvons obtenir :

$$\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \subset \mathcal{W}_h^+. \quad (2.21)$$

Soient les espaces $\mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0 = \text{Ker}(b_{\Omega_A}, \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0, \mathcal{W}_{h,\Omega_A})$, \mathcal{Z}_{h,Ω_A} et $\mathcal{Z}_{h,\Omega_A}^0$ définis par :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0 &= \{v_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}\} \\ \mathcal{Z}_{h,\Omega_A} &= \{v_h \in \tilde{\mathcal{V}}_{h,\Omega_A} \mid b_{\Omega_A}(v_h, q_h) \leq g(q_h) \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+\} \\ \mathcal{Z}_{h,\Omega_A}^0 &= \{v_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(v_h, q_h) \leq g(q_h) \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+\} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nous introduisons la constante de coercivité $\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}$ de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ sur le noyau $\mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0$, i.e. :

$$a_{\Omega_A}(v_h, v_h) \geq \alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A} \|v_h\|_{\Omega_A}^2 \quad \forall v_h \in \mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0 \quad (2.23)$$

De manière analogue au modèle EF sur tout Ω , la coercivité (2.23) est en fait la condition suffisante pour l'existence de la solution au problème (2.16) [Brezzi *et al.*, 1978]. Il est à noter que la condition de coercivité (2.9) implique (2.23).

Le problème (2.16) induit que $\underline{u}_{h,\Omega_A} \in \mathcal{Z}_{h,\Omega_A}$ est aussi solution de :

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}, v_h) = l_{\Omega_A}(v_h), \quad \forall v_h \in \mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0 \quad (2.24)$$

2.1.4 Modèle hyper-réduit hybride (HHR)

Nous introduisons ici le modèle hyper-réduit hybride basé sur une base réduite primale et une hyper-réduction via un domaine d'intégration réduit (RID) [Ryckelynck, 2009] pour l'inégalité variationnelle traité par la méthode des multiplicateurs de Lagrange. La variable duale est résolue sur la base duale EF restreinte au RID [Fauque *et al.*, 2018 ; Le Berre *et al.*, 2022a]. Le sous-domaine Ω_A introduit dans la section 2.1.3 servira ici de RID.

Étant donné une BR $(\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^\ell)$ construite par la méthode de notre choix [Quarteroni *et al.*, 2015], avec $\ell \ll N$, nous définissons :

$$\mathcal{V}_{RB} = \text{Vect}(\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^\ell) \subset \mathcal{V}_h, \quad (2.25)$$

où la discrétisation des modes $\underline{\psi}_k$ dans la base EF est la matrice $\underline{V} \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$, telle que :

$$\underline{\psi}_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\underline{x})(\underline{V})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \forall k = 1, \dots, \ell. \quad (2.26)$$

Nous appelons $\underline{\psi}_k^A$ les modes hyper-réduits tels que :

$$\underline{\psi}_k^A(\underline{x}) = \sum_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\underline{x})(\underline{V})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2.27)$$

Leurs complémentaires, notés $\underline{\psi}_k^B$, sont définis par :

$$\underline{\psi}_k^B(\underline{x}) = \underline{\psi}_k(\underline{x}) - \underline{\psi}_k^A(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega. \quad (2.28)$$

Les modes $\underline{\psi}_k^A$ sont nuls sur l'interface du RID Γ_I , par conséquent, l'espace engendré par les modes $\underline{\psi}_k^A$ est cinématiquement admissible sur Ω_A :

$$\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 = Vect\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^{\ell} \not\subset \mathcal{V}_{RB}. \quad (2.29)$$

Il est à noter que $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \not\subset \mathcal{V}_{RB}$ suite à la définition générale des modes $\underline{\psi}_k$ qui sont à support sur tout Ω (et non compact comme les fonctions φ_i).

Avec la même hypothèse de prolongement par 0 des fonctions de $\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$ (cf. section 2.1.3), nous avons par contre :

$$\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \subset \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \quad (2.30)$$

Dans cette configuration (similaire aux travaux dans [Ryckelynck *et al.*, 2016]), la solution primale \underline{u}_{HR} est dans un espace d'approximation réduit défini par :

$$\mathcal{V}_{HR,\Omega_A} = \{\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{v}_{HR}^0 \mid \underline{v}_{HR}^0 \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0\} \quad (2.31)$$

où $\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}$ est une condition de Dirichlet sur l'interface Γ_I et $\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$ son relèvement sur Ω_A . Ce relèvement sera spécifié plus tard pour la méthode HHR. L'espace d'approximation dual réduit est l'espace dual EF restreint à Ω_A . C'est donc le même espace $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$ que celui introduit en section 2.1.3. La solution duale réduite est notée $\lambda_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$.

En utilisant ces définitions, par construction, nous avons les deux propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_B}(\underline{v}_{HR}, \underline{w}_{HR}) &= 0, \quad \forall (\underline{v}_{HR} \times \underline{w}_{HR}) \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0, \\ b_{\Omega_B}(\underline{v}_{HR}, q_h) &= 0, \quad \forall (\underline{v}_{HR} \times q_h) \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+, \end{aligned} \quad (2.32)$$

avec $a_{\Omega_B}(\cdot, \cdot)$ et $b_{\Omega_B}(\cdot, \cdot)$ les applications $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$ (respectivement) où l'intégration est restreinte à Ω_B . Pour une condition de Dirichlet $\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}$ donnée, le problème HHR peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{HR}^0, \lambda_{HR}) \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \text{ t. q.} \\ a_{\Omega_A}(\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{HR}^0, \underline{v}_{HR}) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, \lambda_{HR}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \\ b_{\Omega_A}(\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{HR}^0, q_{HR} - \lambda_{HR}) \leq g_{\Omega_A}(q_{HR} - \lambda_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \end{array} \right. \quad (2.33)$$

La solution primale \underline{u}_{HR} du problème (2.33) s'écrit :

$$\underline{u}_{HR}(\underline{x}) = \check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})(\underline{x}) + \underline{u}_{HR}^0(\underline{x}), \quad \forall \underline{x} \in \Omega_A. \quad (2.34)$$

De manière analogue à la section 2.1.3, nous définissons les espaces

$\mathcal{K}_{HR}^0 = Ker(b_{\Omega_A}, \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0, \mathcal{W}_{h,\Omega_A})$ et \mathcal{Z}_{HR}^0 par :

$$\mathcal{K}_{HR}^0 = \{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}\}, \quad (2.35)$$

$$\mathcal{Z}_{HR}^0 = \{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, q_h) \leq g_{\Omega_A}(q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+\}, \quad (2.36)$$

Grâce aux solutions duales hybrides (cherchées dans $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$) nous avons la propriété fondamentale :

$$\mathcal{K}_{HR}^0 \subset \mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0. \quad (2.37)$$

Cette inclusion est spécifique au modèle HHR du fait de l'hybridité et n'est pas vraie dans le cas général (cf. [Brezzi et Fortin, 1991] par exemple).

Nous supposons que la forme $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ est inf-sup/LBB stable sur $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}$ et nous définissons la constante inf-sup/LBB du modèle (2.33) par :

inf-sup/LBB :

$$\exists \beta_2 > 0, \quad \beta_2 \leq \beta_{HR} := \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{v_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \\ v_{HR} \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(v_{HR}, q_h)}{\|v_{HR}\|_{\Omega_A} \|q_h\|_{\Omega_A}} \quad (2.38)$$

Sous cette condition inf-sup/LBB, de manière similaire au modèle EF sur le RID (2.16), le problème HHR (2.33) est bien posé car il hérite du respect des conditions nécessaires de continuité et coercivité du modèle EF (2.6). Afin d'alléger les notations, nous utiliserons les constantes de coercivité et continuité du modèle EF (2.6), M_a , M_b et α , introduites en (2.7)-(2.9).

Une fois de plus, il est possible de considérer une condition de coercivité uniquement sur le noyau \mathcal{K}_{HR}^0 , et l'inclusion (2.37) nous permet d'utiliser la même constante $\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}$ issue de la condition (2.23) :

$$a_{\Omega_A}(v_{HR}, v_{HR}) \geq \alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A} \|v_{HR}\|_{\Omega_A}^2 \quad \forall v_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0 \quad (2.39)$$

Dans la méthode HR-RID introduite dans [Ryckelynck, 2009], le relèvement $\check{r}_{\Omega_A}(u_{HR}^T)$ est défini par :

$$\check{r}_{\Omega_A}(u_{HR}^T)(x) = \sum_{k=1}^{\ell} \underline{\psi}_k^B(x) \gamma_k^B, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.40)$$

Il suit donc les modes $\underline{\psi}_k^B$ qui vivent jusqu'à Γ_I inclus (cf. (2.28) et (2.27)). La solution primale s'écrit alors : $\underline{u}_{HR}(x) = \sum_{k=1}^{\ell} [\underline{\psi}_k^B(x) \gamma_k^B + \underline{\psi}_k^A(x) \gamma_k^A]$, $\forall x \in \Omega$. Une relation de fermeture doit être ajoutée pour résoudre le problème. Dans [Ryckelynck et al., 2016], il est proposé de poser :

$$\gamma_k^B = \gamma_k, \quad k \in \llbracket 1, \ell \rrbracket \quad (2.41)$$

Par conséquent, la solution primale s'écrit :

$$\underline{u}_{HR}(x) = \sum_{k=1}^{\ell} [\underline{\psi}_k^B(x) \gamma_k + \underline{\psi}_k^A(x) \gamma_k] = \sum_{k=1}^{\ell} \underline{\psi}_k(x) \gamma_k, \quad \forall x \in \Omega, \quad (2.42)$$

et elle appartient donc à \mathcal{V}_{RB} , i.e. $\underline{u}_{HR} \in \mathcal{V}_{RB}$. Nous définissons alors l'espace \mathcal{Z}_{HR} tel que :

$$\mathcal{Z}_{HR} = \{v_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \mid b_{\Omega_A}(v_{RB}, q_h) \leq g_{\Omega_A}(q_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+\}. \quad (2.43)$$

Dans cette configuration, la formulation HHR est une projection de Petrov-Galerkin qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR}) \in \mathcal{V}_{RB} \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \text{ t. q.} \\ a(\underline{u}_{HR}, v_{HR}) + b(v_{HR}, \lambda_{HR}) = l(v_{HR}), \quad \forall v_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \\ b(\underline{u}_{HR}, q_{HR} - \lambda_{HR}) \leq g(q_{HR} - \lambda_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+. \end{array} \right. \quad (2.44)$$

Les supports des fonctions dans $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$ et $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$ donnent des intégrations nulles en dehors de Ω_A pour $a(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ et $g(\cdot)$ (cf. (2.32)). La condition au bord sur l'interface du RID

est calculée implicitement via les modes de la BR. Les conditions de solvabilité et d'unicité pour le problème (2.44) sont par conséquent différentes d'une projection de Galerkin. Soit :

$$\mathcal{K}_{HR} = \{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \mid b_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, q_h) = 0, \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}\}, \quad (2.45)$$

le problème HHR (2.44) est bien posé si en plus des conditions de coercivité sur $a(\cdot, \cdot)$, continuité sur $a(\cdot, \cdot)$ et $b(\cdot, \cdot)$, d'inf-sup/LLB sur $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}$ (cf. 2.38), la condition inf-sup sur $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ (2.46) est vérifiée :

$$\text{inf-sup} : \exists \alpha' > 0, \quad \alpha' := \inf_{\substack{\underline{w}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR} \\ \underline{w}_{HR} \neq 0}} \sup_{\substack{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR,\Omega_A}^0 \\ \underline{v}_{HR} \neq 0}} \frac{a(\underline{w}_{HR}, \underline{v}_{HR})}{\|\underline{w}_{HR}\| \|\underline{v}_{HR}\|} \quad (2.46)$$

Remarque : En toute rigueur, la solvabilité et l'unicité de (2.44) dans le cas général suppose la vérification d'une condition inf-sup/LBB sur $\mathcal{V}_{RB} \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}$ qui s'écrit :

$$\exists \hat{\beta} > 0, \quad \hat{\beta} \leq \beta_{HR}^2 := \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \\ \underline{v}_{RB} \neq 0}} \frac{b(\underline{v}_{RB}, q_h)}{\|\underline{v}_{RB}\| \|q_h\|} \quad (2.47)$$

La solution primale $\underline{u}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}$ est aussi solution de :

$$a(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) = l(\underline{v}_{HR}) \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0. \quad (2.48)$$

2.2 Analyse d'erreur *a priori*

2.2.1 Bornes d'erreurs *a priori* pour une méthode des bases réduites

Dans cette section nous rappelons d'abord les bornes d'erreurs *a priori* pour un modèle réduit générique d'un problème EF d'inégalité variationnelle. Nous adaptions ensuite ces bornes sur le RID Ω_A dans le cas hypothétique d'une méthode des bases réduites appliquée sur le RID.

Soit $\mathcal{V}_{RB} \subset \mathcal{V}_h$ et $\mathcal{W}_{RB}^+ \subset \mathcal{W}_h^+$ des espaces d'approximation réduits (primal et dual respectivement) pour un modèle réduit donné. La réduction du problème EF (2.6) avec ces espaces s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{RB}, \lambda_{RB}) \in \mathcal{V}_{RB} \times \mathcal{W}_{RB}^+ \text{ t. q.} \\ a(\underline{u}_{RB}, \underline{v}_{RB}) + b(\underline{v}_{RB}, \lambda_{RB}) = l(\underline{v}_{RB}) \quad \forall \underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}, \\ b(\underline{u}_{RB}, q_{RB} - \lambda_{RB}) \leq g(q_{RB} - \lambda_{RB}), \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+. \end{array} \right. \quad (2.49)$$

Nous pouvons définir de manière analogue à la section 2.1 les espaces :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{RB} &= \{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \mid b(\underline{v}_{RB}, q_{RB}) \leq g(q_{RB}) \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+\} \\ \mathcal{K}_{RB} &= \text{Ker}(b, \mathcal{V}_{RB}, \mathcal{W}_{RB}^+) = \{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \mid b(\underline{v}_{RB}, q_{RB}) = 0 \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+\}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Dans ce cas nous n'avons pas l'inclusion des noyaux, i.e. :

$$\mathcal{K}_{RB} \not\subset \mathcal{K}_h \quad (2.51)$$

Nous définissons β_{RB} la constante inf-sup/LLB de $b(\cdot, \cdot)$ sur les espaces d'approximation réduits \mathcal{V}_{RB} et \mathcal{W}_{RB}^+ et α_{Ker} la constante de coercivité de l'application $a(\cdot, \cdot)$ sur le noyau \mathcal{K}_{RB} .

Théorème 1 Soit $(\underline{u}_{RB}, \lambda_{RB})$ la solution du modèle réduit (2.49). L'erreur de $(\underline{u}_{RB}, \lambda_{RB})$ vis à vis de $(\underline{u}_h, \lambda_h)$, la solution EF du problème (2.6), respecte les bornes suivantes :

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}\| \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_{Ker}}\right) \inf_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{Z}_{RB}} \|\underline{u}_h - \underline{v}_{RB}\| + \frac{M_b}{\alpha_{Ker}} \inf_{q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+} \|\lambda_h - q_{RB}\| \quad (2.52)$$

$$\|\lambda_h - \lambda_{RB}\| \leq \left(1 + \frac{M_b}{\beta_{RB}}\right) \inf_{q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+} \|\lambda_h - q_{RB}\| + \frac{M_a}{\beta_{RB}} \|\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}\| \quad (2.53)$$

Preuve : La preuve s'appuie sur [Brezzi, 1974 ; Brezzi et al., 1978] avec une adaptation aux inégalités variationnelles.

La solution primale \underline{u}_{RB} respecte également :

$$a(\underline{u}_{RB}, \underline{v}_{RB}) = l(\underline{v}_{RB}), \quad \forall \underline{v}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}, \quad (2.54)$$

Nous supposons que l'espace \mathcal{K}_{RB} ne contient pas que l'élément nul¹. Ainsi $\forall \underline{w}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}$, nous avons :

$$b(\underline{u}_{RB} + \underline{w}_{RB}, q_{RB}) \leq g(q_{RB}) \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+ \quad (2.55)$$

ce qui indique que $\underline{u}_{RB} + \underline{w}_{RB} \in \mathcal{Z}_{RB}$. Ainsi $\exists \underline{v}_{RB} \in \mathcal{Z}_{RB}$ tel que $\underline{u}_{RB} - \underline{v}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}$ (en posant $\underline{v}_{RB} = \underline{u}_{RB} + \underline{w}_{RB}$ dans (2.55)). On considère alors l'inégalité triangulaire suivante :

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}\| \leq \|\underline{u}_h - \underline{v}_{RB}\| + \|\underline{v}_{RB} - \underline{u}_{RB}\| \quad (2.56)$$

Puisque $\underline{u}_{RB} - \underline{v}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_{Ker} \|\underline{u}_{RB} - \underline{v}_{RB}\| &\leq \sup_{\underline{w}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}} \frac{a(\underline{u}_{RB} - \underline{v}_{RB}, \underline{w}_{RB})}{\|\underline{w}_{RB}\|} \\ &= \sup_{\underline{w}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}} \frac{a(\underline{u}_h - \underline{v}_{RB}, \underline{w}_{RB}) + a(\underline{u}_{RB} - \underline{u}_h, \underline{w}_{RB})}{\|\underline{w}_{RB}\|} \\ &\leq M_a \|\underline{u}_h - \underline{v}_{RB}\| + \sup_{\underline{w}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB}} \frac{a(\underline{u}_{RB} - \underline{u}_h, \underline{w}_{RB})}{\|\underline{w}_{RB}\|} \end{aligned} \quad (2.57)$$

En utilisant (2.54) et le fait que $\underline{w}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB} \subset \mathcal{V}_{RB} \subset \mathcal{V}_h$:

$$\begin{aligned} a(\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}, \underline{w}_{RB}) &= a(\underline{u}_h, \underline{w}_{RB}) - l(\underline{w}_{RB}) \\ &= -b(\underline{w}_{RB}, \lambda_h) = -b(\underline{w}_{RB}, \lambda_h - q_{RB}) \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+ \\ \Rightarrow |a(\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}, \underline{w}_{RB})| &\leq M_b \|\lambda_h - q_{RB}\| \|\underline{w}_{RB}\| \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+ \end{aligned} \quad (2.58)$$

En intégrant (2.58) dans (2.57), puis en utilisant l'inégalité triangulaire (2.56) nous obtenons (2.52) en considérant les infimum sur \mathcal{Z}_{RB} et \mathcal{W}_{RB} .

Concernant la variable duale, soit l'inégalité triangulaire $\forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+$:

$$\|\lambda_h - \lambda_{RB}\| \leq \|\lambda_h - q_{RB}\| + \|q_{RB} - \lambda_{RB}\| \quad (2.59)$$

nous avons la relation $\forall \underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB} \subset \mathcal{V}_h$:

$$b(\underline{v}_{RB}, \lambda_h - \lambda_{RB}) = -a(\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}, \underline{v}_{RB}) \quad (2.60)$$

1. C'est en pratique généralement le cas. Par exemple en mécanique du contact il contient au moins l'ensemble des déplacements constants le long de la surface de contact.

Grâce à la condition inf-sup/LBB nous pouvons écrire $\forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB}^+$, $(q_{RB} - \lambda_{RB}) \in \mathcal{W}_{RB}$:

$$\begin{aligned}
\beta_{RB} \|q_{RB} - \lambda_{RB}\| &\leq \sup_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}} \frac{|b(\underline{v}_{RB}, q_{RB} - \lambda_{RB})|}{\|\underline{v}_{RB}\|} \\
&= \sup_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}} \frac{|b(\underline{v}_{RB}, \lambda_h - \lambda_{RB}) + b(\underline{v}_{RB}, q_{RB} - \lambda_h)|}{\|\underline{v}_{RB}\|} \\
&= \sup_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}} \frac{|-a(\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}, \underline{v}_{RB}) + b(\underline{v}_{RB}, q_{RB} - \lambda_h)|}{\|\underline{v}_{RB}\|} \\
&\leq M_a \|\underline{u}_h - \underline{u}_{RB}\| + M_b \|q_{RB} - \lambda_h\|
\end{aligned} \tag{2.61}$$

En insérant (2.61) dans (2.59) et en considérant l'infimum sur \mathcal{W}_{RB}^+ cela conduit à l'estimation de l'erreur duale de (2.53). \square

En considérant maintenant un problème réduit défini uniquement sur Ω_A (en configuration de décomposition de domaine, cf. [Iollo *et al.*, 2023] par exemple) avec les espaces d'approximation réduits $\mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0 = \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0$ (cf. éq. (2.29)) et $\mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+$ (l'espace dual d'approximation réduit \mathcal{W}_{RB}^+ restreint à Ω_A). On suppose que le relèvement au bord de Ω_A est le même que celui introduit en section 2.1.4. Le problème réduit s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{RB}^0, \lambda_{RB}) \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+ \text{ t. q.} \\ a_{\Omega_A}(\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{RB}^0, \underline{v}_{RB}) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, \lambda_{RB}) = l(\underline{v}_{RB}) \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0, \\ b_{\Omega_A}(\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{RB}^0, q_{RB} - \lambda_{RB}) \leq g_{\Omega_A}(q_{RB} - \lambda_{RB}), \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+. \end{array} \right. \tag{2.62}$$

La solution primale s'écrit $\underline{u}_{RB} = \check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{RB}^0$, avec $\underline{u}_{RB}^0 \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0$ et $\check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) \in \mathcal{V}_{h, \Omega_A}$, par conséquent $\underline{u}_{RB} \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}$ (cf. (2.31)). Nous pouvons définir de manière analogue à la section 2.1 les espaces :

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_{RB, \Omega_A}^0 &= \{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, q_{RB}) \leq g_{\Omega_A}(q_{RB}), \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+\} \\
\mathcal{K}_{RB, \Omega_A}^0 &= \text{Ker}(b, \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0, \mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+) = \{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0 \mid b_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, q_{RB}) = 0, \quad \forall q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB, \Omega_A}^+\}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Dans ce cas nous n'avons pas l'inclusion des noyaux, i.e.

$$\mathcal{K}_{RB, \Omega_A}^0 \not\subset \mathcal{K}_{h, \Omega_A}^0. \tag{2.64}$$

Nous définissons $\beta_{RB}^{\Omega_A}$ la constante inf-sup/LLB de $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ sur les espaces d'approximation réduits $\mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0$ et $\mathcal{W}_{RB, \Omega_A}$ et $\alpha_{Ker}^{\Omega_A}$ la constante de coercivité de l'application $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ sur le noyau $\mathcal{K}_{RB, \Omega_A}^0$:

$$\exists \beta_4 > 0, \quad \beta_4 \leq \beta_{RB}^{\Omega_A} := \inf_{\substack{q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB, \Omega_A} \\ q_{RB} \neq 0}} \sup_{\substack{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB, \Omega_A}^0 \\ \underline{v}_{RB} \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, q_{RB})}{\|\underline{v}_{RB}\|_{\Omega_A} \|q_{RB}\|_{\Omega_A}} \tag{2.65}$$

$$a_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, \underline{v}_{RB}) \geq \alpha_{Ker}^{\Omega_A} \|\underline{v}_{RB}\|_{\Omega_A}^2 \quad \forall \underline{v}_{RB} \in \mathcal{K}_{RB, \Omega_A}^0 \tag{2.66}$$

Nous introduisons une hypothèse supposant l'équivalence des relèvements des problèmes (2.16) et (2.33) sur le bord du RID :

$$(H) : \quad \tau_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) = \check{\tau}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) = \hat{\tau}^{\mathcal{I}} \tag{2.67}$$

Théorème 2 Soient $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ la solution du problème (2.16) et $(\underline{u}_{RB}, \lambda_{RB})$ solution du modèle réduit (2.62) sur Ω_A . Sous l'hypothèse (H), les bornes d'erreurs suivantes sont respectées :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{RB}\|_{\Omega_A} &\leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_{Ker}^{\Omega_A}}\right) \inf_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{Z}_{RB,\Omega_A}^0} \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{v}_{RB}\|_{\Omega_A} \\ &\quad + \frac{M_b}{\alpha_{Ker}^{\Omega_A}} \inf_{q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB,\Omega_A}^+} \|\lambda_{h,\Omega_A} - q_{RB}\|_{\Omega_A} \end{aligned} \quad (2.68)$$

$$\|\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{RB}\|_{\Omega_A} \leq \left(1 + \frac{M_b}{\beta_{RB}^{\Omega_A}}\right) \inf_{q_{RB} \in \mathcal{W}_{RB,\Omega_A}^+} \|\lambda_{h,\Omega_A} - q_{RB}\|_{\Omega_A} + \frac{M_a}{\beta_{RB}^{\Omega_A}} \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{RB}\|_{\Omega_A} \quad (2.69)$$

Preuve : Les bornes résultent de la même démonstration que celle du théorème 1, mais cette fois sur le RID (en adaptant les espaces).

Remarque : Dans le cas des égalités variationnelles, nous retrouvons bien le même type de bornes du modèle réduit que celles introduites dans [Gerner et Veroy, 2012].

2.2.2 Borne sur l'erreur duale du modèle HHR

Dans cette section, nous démontrons une borne générale sur l'erreur duale du modèle HHR.

Théorème 3 Soit $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement solution des problèmes (2.16) et (2.33) (ou (2.44)). La borne suivante est vérifiée :

$$\|\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\beta_{HR}} \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \quad (2.70)$$

Preuve : Avec les problèmes (2.16) et (2.33) (ou (2.44)), $\forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$, nous avons la relation :

$$b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, \lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) = -a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) \quad (2.71)$$

Etant donné que $(\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}$, nous pouvons utiliser la condition inf-sup/LBB du modèle HHR et la continuité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ pour écrire $\forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$:

$$\begin{aligned} \beta_{HR} \|\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}\|_{\Omega_A} &\leq \sup_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0} \frac{|-a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR})|}{\|\underline{v}_{HR}\|_{\Omega_A}} \\ &\leq M_a \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \end{aligned} \quad (2.72)$$

La relation (2.72) mène directement à la borne (2.70). \square

Remarques :

- La preuve peut également suivre le même raisonnement de celle du théorème 1 pour l'erreur duale, conduisant à une borne avec un infimum sur $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$ (cf. 2.69), qui est nul dans notre cas du fait du choix de l'espace dual réduit.

- L'hybridité du modèle HHR (BR primale POD et base duale EF restreinte au RID) résulte en un avantage conséquent lorsque l'on considère l'erreur duale. En effet, l'erreur duale du modèle HHR dépend uniquement de l'erreur primale et des constantes de continuité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ et inf-sup de $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$. Ce n'est pas le cas d'une formulation non-hybride (BR primale et duale, cf. théorème 1).
- La borne d'erreur duale ne dépend pas de l'hypothèse (H) ni du choix du relèvement $\check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^T)$.

2.2.3 Borne sur l'erreur primale dans Ω_A

Dans cette section, des bornes d'erreurs sur le RID entre la solution primale EF $\underline{u}_{h,\Omega_A}$ et la solution primale HHR \underline{u}_{HR} du problème (2.33) sont introduites. Dans un premier temps, nous supposons la vérification de l'hypothèse (H), cf. éq. (2.67) :

Théorème 4 *Soit $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement les solutions des problèmes (2.16) et (2.33). Sous l'hypothèse (H), la borne d'erreur suivante est respectée :*

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0} \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{v}_{HR}\|_{\Omega_A}, \quad (2.73)$$

Dans une situation où seule la coercivité sur \mathcal{K}_{HR}^0 est supposée, nous obtenons la borne suivante avec la condition suffisante (2.39) :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}}\right) \inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0} \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{v}_{HR}\|_{\Omega_A}, \quad (2.74)$$

Preuve : Sous l'hypothèse (H) nous avons :

$$\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR} = \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{u}_{HR}^0 \quad (2.75)$$

et puisque $\mathcal{K}_{HR}^0 \subset \mathcal{K}_{h,\Omega_A}^0$, en utilisant les définitions des problèmes (2.24) et (2.48) nous pouvons écrire :

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{w}_{HR}) = 0 = a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{u}_{HR}^0, \underline{w}_{HR}) \quad \forall \underline{w}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0. \quad (2.76)$$

Par conséquent nous pouvons appliquer le lemme de Céa [Céa, 1964]. Puisque $\exists \underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0$ tel que $\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{K}_{HR}^0$ (nous utilisons des arguments similaires à ceux en (2.55) pour la justification de l'existence d'une telle fonction) :

$$\begin{aligned} \alpha \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A}^2 &\leq a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}) \\ &= a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{u}_{HR}^0) \\ &= a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{w}_{HR}) + \underbrace{a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0)}_{=0 \leftarrow (2.76)} \end{aligned} \quad (2.77)$$

cela conduit à (2.73).

Concernant la preuve de la borne avec la condition suffisante de coercivité sur le noyau, nous considérons toujours $\exists \underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0$ tel que $\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{K}_{HR}^0$, alors nous pouvons écrire :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{u}_{HR}^0\|_{\Omega_A} \leq \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A} + \|\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0\|_{\Omega_A} \quad (2.78)$$

En utilisant la coercivité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ sur le noyau \mathcal{K}_{HR}^0 nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A} \|\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0\|_{\Omega_A}^2 &\leq a_{\Omega_A}(\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0, \underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0) \\ &= a_{\Omega_A}(\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{h, \Omega_A}^0, \underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0) \\ &\leq M_a \|\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{h, \Omega_A}^0\|_{\Omega_A} \|\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0\|_{\Omega_A} \end{aligned} \quad (2.79)$$

La borne (2.74) est obtenue en insérant (2.79) dans (2.78) \square

Remarque : La borne (2.74) est cohérente avec celle du théorème 2 en supposant l'infimum sur l'espace dual nul. Le choix du modèle HHR d'utiliser la restriction au RID de la base duale EF permet donc d'obtenir des bornes de type Céa [Céa, 1964] au lieu de type Brezzi.

Nous supposons maintenant que nous sommes dans le cadre général où l'hypothèse (H) n'est pas vérifiée, donc $r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) \neq \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$. Nous obtenons le théorème suivant.

Théorème 5 Soit $(\underline{u}_{h, \Omega_A}, \lambda_{h, \Omega_A})$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ les solutions respectives des problèmes (2.16) et (2.33). La borne suivante est vérifiée :

$$\|\underline{u}_{h, \Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}}\right) \left(\inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0} \|\underline{u}_{h, \Omega_A}^0 - \underline{v}_{HR}\|_{\Omega_A} + \|r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \right) \quad (2.80)$$

Preuve : Puisque $\mathcal{K}_{HR}^0 \subset \mathcal{K}_{h, \Omega_A}^0$, en utilisant les problèmes (2.24) et (2.48) nous avons $\forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0$:

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h, \Omega_A}, \underline{v}_{HR}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}) = a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) \quad (2.81)$$

Par conséquent, pour $\underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0$ tel que $\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{K}_{HR}^0$, avec $\underline{u}_{HR}^0 = \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$ (nous utilisons des arguments similaires à ceux en (2.55) pour la justification de l'existence d'une telle fonction), nous pouvons écrire :

$$\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A} \|\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A}^2 \leq a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}, \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}) \quad (2.82)$$

Nous pouvons utiliser (2.81) pour obtenir :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}, \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}) &= \\ &= a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h, \Omega_A} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}, \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}) \end{aligned} \quad (2.83)$$

en injectant (2.83) dans (2.82) et en ajoutant et retirant $r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}})$, nous avons :

$$\begin{aligned} \alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A} \|\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A}^2 &\leq a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h, \Omega_A} - r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{w}_{HR}, \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}) \\ &\quad + a_{\Omega_A}(r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}), \underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}) \end{aligned} \quad (2.84)$$

En utilisant la continuité de a_{Ω_A} dans (2.84) nous obtenons :

$$\|\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}} \left(\|\underline{u}_{h, \Omega_A} - r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A} + \|r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \right) \quad (2.85)$$

En considérant l'inégalité triangulaire suivante :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_{h, \Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} &= \|\underline{u}_{h, \Omega_A} - r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{w}_{HR} + r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - (\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR})\|_{\Omega_A} \\ &\leq \|\underline{u}_{h, \Omega_A} - r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A} + \|r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \\ &\quad + \|\underline{u}_{HR} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) - \underline{w}_{HR}\|_{\Omega_A} \end{aligned} \quad (2.86)$$

la borne résulte de la combinaison de (2.85) et (2.86) et la considération de l'infimum sur \mathcal{Z}_{HR}^0 . \square

Remarque : Sous l'hypothèse (H), nous retrouvons la borne (2.74) du théorème 4.

Corollaire 1 *La borne du théorème 5 reste vraie pour (2.44) en utilisant le relèvement défini par la relation de fermeture (2.41), mais le relèvement étant implicite, il s'agit alors d'une borne a posteriori.*

2.2.4 Borne sur l'erreur primale sur tout Ω

Les bornes des sections 2.2.2 et 2.2.3 sont sur le RID (Ω_A). Pour la solution duale, il n'y a pas de solution HHR en dehors de Ω_A du fait de l'absence de BR duale sur tout Ω . Au contraire, pour la variable primale, comme indiqué en (2.42), la solution HHR primale \underline{u}_{HR} est définie sur le domaine Ω , permettant d'étudier l'erreur vis à vis de la solution EF sur tout Ω .

Théorème 6 *Soit $(\underline{u}_h, \lambda_h)$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement solutions des problèmes (2.6) et (2.44). Si (2.46) est vérifiée, alors :*

$$\|\underline{u}_h - \underline{u}_{HR}\| \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha'}\right) \inf_{\underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}} \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| \quad (2.87)$$

Preuve : En utilisant une fonction test dans $\mathcal{K}_{HR}^0 \subset \mathcal{K}_{h, \Omega_A}^0 \subset \mathcal{K}_h$ (à cause de l'intégrale nulle en dehors de Ω_A) dans le problème (2.13) nous obtenons :

$$a(\underline{u}_h, \underline{v}_{HR}) = l(\underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0 \quad (2.88)$$

De fait, en utilisant (2.48) nous obtenons :

$$a(\underline{u}_h, \underline{v}_{HR}) = a(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0 \quad (2.89)$$

Nous pouvons ainsi écrire, $\forall \underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}$, tel que $\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}$ (nous utilisons des arguments similaires à ceux en (2.55) pour la justification de l'existence d'une telle fonction) :

$$\begin{aligned} \|\underline{u}_h - \underline{u}_{HR}\| &\leq \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| + \|\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}\| \\ &\leq \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| + \frac{1}{\alpha'} \sup_{\substack{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0 \\ \|\underline{v}_{HR}\| \neq 0}} \frac{|a(\underline{w}_{HR} - \underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR})|}{\|\underline{v}_{HR}\|} \\ &= \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| + \frac{1}{\alpha'} \sup_{\substack{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{K}_{HR}^0 \\ \|\underline{v}_{HR}\| \neq 0}} \frac{|a(\underline{w}_{HR} - \underline{u}_h, \underline{v}_{HR})|}{\|\underline{v}_{HR}\|} \\ &\leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha'}\right) \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| \end{aligned} \quad (2.90)$$

En prenant l'infimum sur \mathcal{Z}_{HR} nous obtenons (2.87). \square

Remarque : Ce théorème est équivalent à un Lemme de Strang [Strang, 1972] pour le modèle HHR.

2.3 Analyse d'erreur *a posteriori* pour le modèle HHR

Dans cette section nous proposons des bornes d'erreurs *a posteriori* pour le modèle HHR en utilisant les résidus des problèmes de point-selles (2.16) et (2.33) (ou (2.44)). Nous dérivons d'une de ces bornes un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori*.

2.3.1 Bornes *a posteriori* sur l'erreur primale HHR

De manière analogue à [Gerner et Veroy, 2012], nous définissons les résidus de (2.33) :

$$\mathcal{R}_{\Omega_A}(\underline{v}_h) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_h) - a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_h) - b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \lambda_{HR}) \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h, \quad (2.91)$$

$$\mathcal{R}_{\Omega_A}^b(q_h) = b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, q_h) - g_{\Omega_A}(q_h) \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+, \quad (2.92)$$

avec $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ la solution du problème (2.33). Pour tout $(\underline{v}_h, q_h) \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$:

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}, \underline{v}_h) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) = \mathcal{R}_{\Omega_A}(\underline{v}_h), \quad (2.93)$$

$$\mathcal{R}_{\Omega_A}^b(q_h) \leq 0, \quad (2.94)$$

avec $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ la solution du problème (2.16).

Théorème 7 Soit $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement solutions des problèmes (2.16) et (2.33). Sous l'hypothèse (H) (cf. (2.67)), la borne *a posteriori* suivante est respectée :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} \quad (2.95)$$

où $\|\cdot\|_{\mathcal{V}',\Omega_A}$ est la norme sur \mathcal{V}' le dual de \mathcal{V} sur Ω_A .

Preuve : Nous notons $\underline{e}_{u,\Omega_A} = (\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR})$ l'erreur sur Ω_A . Et en utilisant l'hypothèse (H) :

$$\underline{e}_{u,\Omega_A} = (\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}) = r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) + \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - (\check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \underline{u}_{HR}^0) = \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{u}_{HR}^0 \quad (2.96)$$

Par définition $\underline{e}_{u,\Omega_A} \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$. Avec ces notations, et en utilisant (2.93) et les problèmes (2.16) et (2.33) nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_A}(\underline{e}_{u,\Omega_A}, \underline{e}_{u,\Omega_A}) &= \mathcal{R}_{\Omega_A}(\underline{e}_{u,\Omega_A}) - b_{\Omega_A}(\underline{e}_{u,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \\ &\leq \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} \|\underline{e}_{u,\Omega_A}\|_{\Omega_A} + b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{HR} - \lambda_{h,\Omega_A}) + b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \end{aligned} \quad (2.97)$$

Grâce aux secondes équations des problèmes (2.16) et (2.33) on a directement :

$$b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{HR} - \lambda_{h,\Omega_A}) \leq g_{\Omega_A}(\lambda_{HR} - \lambda_{h,\Omega_A}) \quad (2.98)$$

$$b_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \leq g_{\Omega_A}(\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \quad (2.99)$$

Donc par la linéarité de $g_{\Omega_A}(\cdot)$:

$$\begin{aligned} a_{\Omega_A}(\underline{e}_{u,\Omega_A}, \underline{e}_{u,\Omega_A}) &\leq \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} \|\underline{e}_{u,\Omega_A}\|_{\Omega_A} + g_{\Omega_A}(\lambda_{HR} - \lambda_{h,\Omega_A}) + g_{\Omega_A}(\lambda_{h,\Omega_A} - \lambda_{HR}) \\ &= \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} \|\underline{e}_{u,\Omega_A}\|_{\Omega_A} \end{aligned} \quad (2.100)$$

On obtient finalement (2.95) avec la coercivité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$. \square

Nous introduisons maintenant un Lemme utile pour la démonstration d'une borne *a posteriori* avec une hypothèse moins contraignante que (H).

Lemme 2 Soient 2 solutions EF du problème (2.16), $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ et $(\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A})$ avec (respectivement) deux conditions de Dirichlet différentes $\underline{u}_h^{\mathcal{D}}$, $\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}}$ et leurs deux relèvements $\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}})$ et $\underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}})$ respectifs.

Sous l'hypothèse :

$$(H2) \quad b_{\Omega_A}(\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}}), q_h) = 0, \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \quad (2.101)$$

nous avons la borne suivante :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}\|_{\Omega_A} \leq (1 + \frac{M_a}{\alpha}) \|\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}})\|_{\Omega_A} \quad (2.102)$$

Preuve : L'erreur peut s'écrire

$$\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A} = (\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) + (\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}})) \quad (2.103)$$

avec $\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0 \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$. Avec la coercivité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ nous pouvons écrire :

$$\alpha \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0\|_{\Omega_A}^2 \leq a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \quad (2.104)$$

En utilisant le problème (2.16) nous pouvons écrire $\forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$:

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \underline{v}_h) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \lambda_{h,\Omega_A}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_h) \quad (2.105)$$

$$a_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \underline{v}_h) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_h) \quad (2.106)$$

$$\Rightarrow a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \underline{v}_h) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_h, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) = 0. \quad (2.107)$$

Nous utilisons $\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0 \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0$ comme fonction test dans (2.107) :

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) + b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) = 0 \quad (2.108)$$

Sous l'hypothèse (H2) et en utilisant la bilinéarité de $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$:

$$b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) = b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) \quad (2.109)$$

En utilisant la deuxième équation de (2.16) avec $\tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}$ et $\lambda_{h,\Omega_A} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$ comme fonctions tests (pour $\underline{u}_{h,\Omega_A}$ et $\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}$ respectivement), nous obtenons :

$$b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A} - \lambda_{h,\Omega_A}) \leq g(\tilde{\lambda}_{h,\Omega_A} - \lambda_{h,\Omega_A}) \quad (2.110)$$

$$b_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) \leq g(\lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) \quad (2.111)$$

Le fait d'avoir $\underline{u}_{h,\Omega_A}$ et $\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}$ dans deux \mathcal{Z}_{h,Ω_A} différents (à cause des conditions Dirichlet différentes) n'empêche pas l'obtention de l'inégalité précédente.

Nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) + b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) &= 0 \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) &= -a_{\Omega_A}(\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}}), \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \\ &\quad - b_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A} - \tilde{\lambda}_{h,\Omega_A}) \end{aligned} \quad (2.112)$$

Cela conduit à :

$$a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \leq -a_{\Omega_A}(\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}}), \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \quad (2.113)$$

nous pouvons utiliser (2.113) dans (2.104), ce qui donne :

$$\begin{aligned} \alpha \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0\|_{\Omega_A}^2 &\leq a_{\Omega_A}(\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0, \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \\ &\leq -a_{\Omega_A}(\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}}), \underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0) \end{aligned} \quad (2.114)$$

et en utilisant la continuité de $a_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ nous obtenons :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \underline{r}_{\Omega_A}(\tilde{\underline{u}}_h^{\mathcal{D}})\|_{\Omega_A} \quad (2.115)$$

l'estimation finale est obtenue en utilisant l'inégalité triangulaire appliquée sur (2.103). \square

Nous proposons maintenant une borne d'erreur *a posteriori* sous l'hypothèse (H2).

Théorème 8 Soit $(\underline{u}_{h,\Omega_A}, \lambda_{h,\Omega_A})$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement les solutions des problèmes (2.16) et (2.33). Sous l'hypothèse (H2) sur les deux relèvements respectifs, la borne d'erreur suivante est vérifiée :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} + (1 + \frac{M_a}{\alpha}) \|\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \quad (2.116)$$

Preuve : Soit $\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A} = \check{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) + \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}^0$ la solution au problème (2.16) avec une condition de Dirichlet modifiée $\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}$ et le relèvement $\check{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$ associé au problème HHR.

Nous pouvons écrire :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}\|_{\Omega_A} + \|\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \quad (2.117)$$

les solutions $\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}$ et \underline{u}_{HR} vérifient l'hypothèse (H), donc en utilisant le théorème 7 nous avons

$$\|\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}',\Omega_A} \quad (2.118)$$

L'erreur $\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}\|_{\Omega_A}$ est majorée par le Lemme 2 :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}\|_{\Omega_A} \leq (1 + \frac{M_a}{\alpha}) \|\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \quad (2.119)$$

En associant les deux bornes nous obtenons (2.116). \square

Remarque : De façon symétrique à la borne *a priori* (2.80), la borne *a posteriori* (2.116) n'est pas vraiment *a posteriori* puisqu'elle dépend de la solution EF.

Corollaire 2 Pour le problème (2.44), on peut utiliser le relèvement défini par la relation de fermeture (2.41) dans la borne (2.116).

Remarque : Le Lemme 2 peut également servir à démontrer une version modifiée de la borne d'erreur *a priori* du théorème 5. Sous l'hypothèse (H2), la borne *a priori* suivante peut être obtenue :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\alpha} \inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}^0} \|\underline{u}_{h,\Omega_A}^0 - \underline{v}_{HR}\|_{\Omega_A} + (1 + \frac{M_a}{\alpha}) \|\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{D}}) - \check{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \quad (2.120)$$

La démonstration repose également sur :

$$\|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \|\underline{u}_{h,\Omega_A} - \tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}\|_{\Omega_A} + \|\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \quad (2.121)$$

avec $\tilde{\underline{u}}_{h,\Omega_A}$ la solution du problème (2.16) introduite dans la preuve du théorème 8 pour laquelle l'hypothèse (H) est vérifiée avec la solution du problème HHR. La borne (2.120) est obtenue directement en utilisant (2.102) pour le premier terme et (2.73) pour le second.

La borne (2.120) est cohérente avec (2.80) mais avec une hypothèse H2 supplémentaire que ne nécessite pas le théorème 5.

2.3.2 Nouvel indicateur d'erreur primale

L'estimation (2.116) ouvre la voie à la construction d'un nouvel indicateur d'erreur. En posant $\underline{u}_h^{\mathcal{D}} = \underline{u}_h^{\mathcal{I}}$ (cf. Lemme 1) nous pouvons reformuler la borne (2.116) du théorème 8 telle que :

$$\|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}', \Omega_A} + \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \|r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{I}}) - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \quad (2.122)$$

De cette façon, l'équation (2.122) est une borne de l'erreur primale sur le RID du modèle HHR (2.44) vis-à-vis du modèle EF (2.6).

Nous proposons d'approcher $r_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{I}})$ par $\tilde{r}^{\mathcal{I}}$ défini tel que :

$$\tilde{r}^{\mathcal{I}}(\underline{x}) = \sum_{i; \underline{x}_i \in \Gamma_I} \varphi_i(\underline{x}) \tilde{u}^{\mathcal{I}}(\underline{x}_i) \quad (2.123)$$

avec \underline{x}_i les coordonnées du noeud du maillage associé à l'indice i (i.e. $\varphi_i(\underline{x}_i) = \delta_{ij}$).

En pratique, la solution $\tilde{u}^{\mathcal{I}}$ sur l'interface du RID est obtenue par interpolation multilinéaire sur l'espace d'entraînement EF (pour des paramètres du modèle), comme pour l'indicateur introduit dans [Fauque *et al.*, 2018] et rappelé en section 1.3.1.b.

Le relèvement $\check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$ est quant à lui défini par (2.40) avec la relation de fermeture associée (2.41).

Nous pouvons ainsi définir un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* :

$$\eta_2 = \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{\mathcal{V}', \Omega_A} + \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \|\tilde{r}^{\mathcal{I}} - \check{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{\Omega_A} \quad (2.124)$$

Ce nouvel indicateur d'erreur ne nécessite aucune résolution du problème EF sur le RID, il est donc automatiquement plus avantageux d'un point de vue du temps de calcul.

2.4 Dissimilarité en métrique chordale et relation avec l'erreur primale

Les bornes d'erreurs proposées en section 2.2 démontrent clairement que la précision du modèle HHR dépend principalement de l'approximation de la solution primale. Dans cette section, nous proposons une estimation d'erreur primale vis à vis de la dissimilarité des espaces d'approximation \mathcal{Z}_{HR} (qu'on suppose dans la variété de Grassmann $Gr(\ell, N)$) et \mathcal{Z}_h . Nous utiliserons la distance chordale pour quantifier cette dissimilarité [Ke et Lek-Heng, 2016]. Pour cette étude nous devons supposer qu'il existe une base réduite parfaite $(\{\underline{\psi}_k^*\}_{k=0}^{\ell})$, telle que l'hypothèse $\mathcal{Z}_h = Vect(\{\underline{\psi}_k^*\}_{k=0}^{\ell})$ ne change pas la solution du problème EF. Cette supposition, est significative car elle indique que \mathcal{Z}_h est aussi dans la grassmannienne $Gr(\ell, N)$.

Nous introduisons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}}^{\dagger} &\in \mathbb{R}^{N \times \ell}, \text{ la discrétisation de la BR de } \mathcal{Z}_{HR} \text{ telle que : } \underline{U}_{HR} = \underline{\underline{V}}^{\dagger} \underline{\underline{\gamma}} \quad \underline{\underline{\gamma}} \in \mathbb{R}^{\ell} \\ \underline{\underline{V}}^* &\in \mathbb{R}^{N \times \ell}, \text{ la discrétisation de la BR de } \mathcal{Z}_h \text{ telle que } \underline{U}_h = \underline{\underline{V}}^* \underline{\underline{\gamma}}^*, \quad \underline{\underline{\gamma}}^* \in \mathbb{R}^{\ell} \end{aligned} \quad (2.125)$$

où \underline{U}_{HR} sont les valeurs nodales de \underline{u}_{HR} et \underline{U}_h celles de \underline{u}_h . Nous supposons que les matrices de discrétisation des BR respectent :

$$\underline{\underline{V}}^{\dagger \mathbf{T}} \underline{\underline{V}}^{\dagger} = \underline{I}_{\ell} \quad (2.126)$$

$$\underline{\underline{V}}^{* \mathbf{T}} \underline{\underline{V}}^* = \underline{I}_{\ell} \quad (2.127)$$

En utilisant les notations introduites ci-dessus, la borne d'erreur primale *a priori* sur tout Ω (2.87) du théorème 6 peut être reformulée en (2.128) :

$$\|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}\|_2 \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha'}\right) \inf_{\gamma_v \in \mathbb{R}^\ell} \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \gamma_v\|_2 \quad (2.128)$$

La norme 2 est utilisée en s'appuyant sur le fait qu'au niveau discret nous avons l'équivalence des normes. De plus, nous supposons que la constante d'équivalence est égale à 1 pour alléger les notations.

En suivant la même démarche que celle introduite dans [Ryckelynck *et al.*, 2020], nous pouvons obtenir une borne supérieure de (2.128) dépendant de la distance chordale.

Théorème 9 Pour $\underline{V}^\dagger \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$ et $\underline{V}^* \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$ deux matrices orthonormée du même espace \mathbb{R}^N , engendrant des sous-espaces de la même variété de Grassmann, et telles que définies dans (2.125) et (2.128), la borne suivante est vérifiée :

$$\|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}\|_2 \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha'}\right) \|\underline{\sin}(\underline{\theta}) \underline{U}^{*T} \underline{\gamma}^*\|_2 \quad (2.129)$$

$$\leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha'}\right) d^{Ch}(\underline{V}^*, \underline{V}^\dagger) \sqrt{\ell} \|\underline{\gamma}^*\|_2 \quad (2.130)$$

avec d^{Ch} la distance chordale [Ke et Lek-Heng, 2016] utilisant les angles principaux $\underline{\theta} \in \mathbb{R}^\ell$ ($\theta_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$, pour $k = 1, \dots, \ell$) calculés avec la SVD :

$$\begin{aligned} \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^* &= \underline{U} \underline{\cos}(\underline{\theta}) \underline{U}^{*T} \\ t. q. : \underline{U}^T \underline{U} &= \underline{U} \underline{U}^T = \underline{I}_\ell, \quad \underline{U}^* \underline{U}^{*T} = \underline{U}^{*T} \underline{U}^* = \underline{I}_\ell, \\ \|\underline{U}\|_F^2 &= \ell \\ d^{Ch}(\underline{V}^*, \underline{V}^\dagger) &= \|\underline{\sin}(\underline{\theta})\|_F \end{aligned} \quad (2.131)$$

où $\underline{\cos}(\cdot)$, $\underline{\sin}(\cdot)$ sont les matrices cosinus et sinus (respectivement) diagonales, $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius et \underline{I}_ℓ est la matrice identité de rang ℓ .

Preuve : En norme 2, la meilleure projection de la solution exacte $\underline{U}_h = \underline{V}^* \underline{\gamma}^*$ dans l'espace d'approximation \mathcal{Z}_{HR} , i.e. l'infimum dans la borne (2.128), est notée :

$$\underline{\gamma}_P = \underset{\gamma_v \in \mathbb{R}^\ell}{\operatorname{argmin}} \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \gamma_v\|_2^2 = \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^* \underline{\gamma}^* \quad (2.132)$$

En utilisant la norme 2 et la définition de $\underline{\gamma}_P$ nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \underline{\gamma}^{*T} (\underline{V}^* - \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^*)^T (\underline{V}^* - \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^*) \underline{\gamma}^* \\ &= \underline{\gamma}^{*T} \left(\underline{V}^{*T} \underline{V}^* - \underline{V}^{*T} \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^* - \underline{V}^{*T} \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^* + \underline{V}^{*T} \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^* \right) \underline{\gamma}^* \\ &= \underline{\gamma}^{*T} (\underline{I}_\ell - \underline{V}^{*T} \underline{V}^\dagger \underline{V}^{\dagger T} \underline{V}^*) \underline{\gamma}^* \end{aligned} \quad (2.133)$$

avec la définition de la distance chordale nous avons :

$$\begin{aligned} \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \underline{\gamma}^{*T} (\underline{I}_\ell - \underline{U}^* \underline{\cos}(\underline{\theta})^2 \underline{U}^{*T}) \underline{\gamma}^* \\ \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \underline{\gamma}^{*T} \underline{U}^* (\underline{I}_\ell - \underline{\cos}(\underline{\theta})^2) \underline{U}^{*T} \underline{\gamma}^* \\ \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \underline{\gamma}^{*T} \underline{U}^* \underline{\sin}(\underline{\theta})^2 \underline{U}^{*T} \underline{\gamma}^* \\ \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \|\underline{\sin}(\underline{\theta}) \underline{U}^{*T} \underline{\gamma}^*\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.134)$$

ce qui démontre (2.129).

Étant donné que la norme de Frobenius d'un vecteur est égale à la norme 2 de ce vecteur :

$$\begin{aligned} \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &= \|\underline{\sin}(\underline{\theta}) \underline{U}^{*\mathbf{T}} \underline{\gamma}^*\|_F^2 \\ \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &\leq \|\underline{\sin}(\underline{\theta})\|_2^2 \|\underline{U}^{*\mathbf{T}}\|_F^2 \|\underline{\gamma}^*\|_2^2 \\ \|\underline{V}^* \underline{\gamma}^* - \underline{V}^\dagger \underline{\gamma}_P\|_2^2 &\leq \|\underline{\sin}(\underline{\theta})\|_2^2 \ell \|\underline{\gamma}^*\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.135)$$

ce qui nous mène à (2.130). \square

La distance chordale nous permet de quantifier la dissimilarité entre deux sous-espaces de solutions locales et donc d'estimer l'erreur d'approximation. La dissimilarité indique si les deux sous-espaces de solutions locales sont suffisamment proches dans variété de Grassmann pour être représentés par le même espace d'approximation. Au contraire, si deux sous-espaces de solutions locales ont une dissimilarité élevée, ils ne devraient pas être représentés par le même espace d'approximation, ce qui crée un intérêt pour l'utilisation de modèles réduits locaux afin d'approcher l'espace de solutions par morceaux.

2.5 Autour de la condition inf-sup/LBB du modèle HHR

Les estimations d'erreurs proposées dans ce chapitre reposent notamment sur la vérification de la condition inf-sup/LBB (2.38) pour le modèle HHR.

Comme introduit dans le chapitre 1, section 1.4.5, et dans [Fauque *et al.*, 2018], il a été proposé d'enrichir la base réduite primale par des modes EF lorsque la condition de solvabilité n'était pas respectée. Nous allons ici regarder la relation entre β_{HR} et $\beta_h^{\Omega_A}$.

Afin de formaliser mathématiquement l'enrichissement de la base réduite primale proposé dans [Fauque *et al.*, 2018 ; Le Berre *et al.*, 2022a], nous définissons \mathcal{S}_{enri} tel que :

$$\mathcal{S}_{enri} = Vect(\underline{\varphi}_{i_1}, \dots, \underline{\varphi}_{i_{m_e}}) \quad (2.136)$$

avec $\{i_j\}_{j=1}^{m_e}$ des degrés de libertés localisés dans Ω_A . Le nouvel espace réduit d'approximation primal est défini par :

$$\mathcal{V}_{RB}^{enr.} = \mathcal{V}_{RB} + \mathcal{S}_{enri} \quad (2.137)$$

L'espace réduit des fonctions tests enrichi $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^{0,enr.}$ est défini comme en section 2.1.4 par les modes $\underline{\psi}_k^A$ de $\mathcal{V}_{RB}^{enr.}$, donc :

$$\mathcal{S}_{enri} \subset \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^{0,enr.} \quad (2.138)$$

Nous appelons m_{card} le cardinal de l'ensemble des degrés de libertés EF localisés dans Ω_A . Nous pouvons écrire la propriété suivante :

$$\mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 = Vect(\underline{\varphi}_{i_1}, \dots, \underline{\varphi}_{i_{m_{card}}}) \quad (2.139)$$

Nous définissons l'enrichissement maximal de la BR primale par l'espace \mathcal{S}_{enri} qui contient toutes les fonctions de formes EF associées aux ddls localisés dans Ω_A , i.e. :

$$\mathcal{S}_{enri} = Vect(\underline{\varphi}_{i_1}, \dots, \underline{\varphi}_{i_{m_{card}}}) = \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \quad (2.140)$$

Théorème 10 *Lorsque l'espace réduit d'approximation primale \mathcal{V}_{RB} du modèle HHR (2.44) est enrichi au maximum, la constante inf-sup/LBB du modèle (2.38) est supérieure à la constante inf-sup/LBB du modèle EF sur le RID (2.16). Par conséquent, le modèle (2.33) est inf-sup stable.*

Preuve :

$$\beta_h^{\Omega_A} = \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{v_h \in \mathcal{V}_{h,\Omega_A}^0 \\ v_h \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{\Omega_A} \|q_h\|_{\Omega_A}} = \inf_{\substack{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_h \neq 0}} \sup_{\substack{v_h \in \mathcal{S}_{enri} \\ v_h \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(v_h, q_h)}{\|v_h\|_{\Omega_A} \|q_h\|_{\Omega_A}}$$

$$\mathcal{S}_{enri} \subset \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^{0,enr.} \Rightarrow \leq \inf_{\substack{q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \\ q_{HR} \neq 0}} \sup_{\substack{v_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^{0,enr.} \\ v_{HR} \neq 0}} \frac{b_{\Omega_A}(v_{HR}, q_{HR})}{\|v_{HR}\|_{\Omega_A} \|q_{HR}\|_{\Omega_A}} = \beta_{HR}$$
(2.141)

Nous avons donc $\beta_h^{\Omega_A} \leq \beta_{HR}$. Le modèle HHR vérifie la condition inf-sup/LBB $\beta_0 < \beta_{HR}$ puisque (2.19) est supposée vraie. \square

Remarque : Étant donné que \mathcal{S}_{enri} est aussi inclus dans l'espace réduit $\mathcal{V}_{RB}^{enr.}$, on peut substituer $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^{0,enr.}$ par $\mathcal{V}_{RB}^{enr.}$ dans (2.141). Par conséquent, sous condition d'enrichissement maximal, la condition inf-sup/LBB est également vérifiée sur $\mathcal{V}_{RB}^{enr.}$.

Remarque : Avec cette formalisation mathématique, nous pourrions obtenir un modèle d'ordre réduit pour lequel l'ordre primal est plus grand que le modèle EF si le domaine Ω_A est grand (si $\ell + m_{card} > N$) car l'ensemble des ddls EF du RID (Ω_A) doivent être considérés pour respecter $\beta_{HR} \geq \beta_h^{\Omega_A}$ et ainsi garantir la condition inf-sup/LBB. Cependant, en se ramenant à un problème de mécanique du contact, on peut comprendre que l'enrichissement ne concernera jamais la totalité des ddls de Ω_A ce qui rend la stratégie d'enrichissement intéressante. En effet, pour un problème de contact seuls les ddls de la surface de contact du RID, Γ_A^C seront sélectionnés puisque l'intégrale de $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ y est restreinte.

2.6 Vérifications numériques

Dans cette section, des résultats numériques sont présentés pour vérifier les estimations d'erreurs proposées. Nous restreignons notre attention à des cas tests issus de la mécanique du contact sans frottement. Nous avons ainsi $\mathcal{V}_h \subset H^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\mathcal{W}_h^+ \subset L^2(\Gamma_C, \mathbb{R}^+)$, construits en utilisant des éléments finis P1 ou Q1 en déplacement ainsi que pour les multiplicateurs de Lagrange [Brezzi *et al.*, 1978]. Nous considérons des cas où le contact est traité par un appariement nœud-à-nœud. De plus nous considérons que les relèvements des modèles EF sont portés par les fonctions de formes associés aux nœuds de la surface Dirichlet, et sont par conséquent à supports restreints aux éléments associés à la surface Dirichlet. Ce type de relèvement est par exemple obtenu lorsque les conditions de Dirichlet sont traitées par des multiplicateurs de Lagrange, c'est ce traitement que nous considérons ici. Par ailleurs, de cette façon l'hypothèse (H2) (cf. 2.101)) est naturellement vérifiée. En effet, par choix de construction du RID (cf. section 1.4.3), les conditions de contact impliquent uniquement des nœuds de l'intérieur du RID (\mathcal{A}), or par définition des relèvements HHR et EF, ces derniers sont nuls aux nœuds intérieurs du RID.

2.6.1 Mise en pratique de l'évaluation des bornes

Dans la partie théorique, les bornes que nous avons démontrées sont souvent sur des espaces contraints ($\mathcal{Z}_{HR}, \mathcal{Z}_{HR}^0$). Calculer des infimum sur ces espaces peut se révéler très complexe, notamment car il faut construire une base pour les espaces contraints. Par conséquent nous allons évaluer les infimum sur les espaces non contraints ($\mathcal{V}_{RB}, \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$). D'un point

de vue théorique, nous n'avons aucune preuve que les bornes restent vraies sur ces espaces. Cependant, avec l'inclusion des espaces, nous savons que :

$$\inf_{\underline{w}_{HR} \in \mathcal{V}_{RB}} \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\| \leq \inf_{\underline{w}_{HR} \in \mathcal{Z}_{HR}} \|\underline{u}_h - \underline{w}_{HR}\|. \quad (2.142)$$

Ainsi si la borne est vérifiée numériquement avec le calcul de l'infimum sur l'espace non contraint, nous pouvons valider la borne théorique qui porte sur l'espace contraint.

Par ailleurs, les erreurs sont évaluées en utilisant la norme 2, grâce à l'équivalence des normes discrètes et nous supposons le rapport des constantes d'équivalence égal à 1 par simplification car nous travaillons sur des maillages réguliers. Les constantes inf-sup sont évaluées en calculant la valeur singulière minimale non-nulle de la matrice associée. Les constantes M_a et α sont calculées par :

$$M_a = 2 \left(\frac{E * \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} + \frac{0.5E}{1 + \nu} \right) \quad (2.143)$$

$$\alpha = 2 \frac{0.5E}{1 + \nu} \quad (2.144)$$

De plus nous savons d'après (2.23) que $\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}$ est supérieure à α , dans les bornes nous utiliserons donc α au lieu de $\alpha_{\mathcal{K}}^{\Omega_A}$.

Pour $(\underline{u}_h, \lambda_h)$ et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ respectivement solutions des problèmes (2.6) et (2.44), nous définissons les notations suivantes :

$$\epsilon_{\lambda, \Omega_A} = \|\lambda_{h|\Omega_A} - \lambda_{HR}\|_{2, \Omega_A}, \quad (2.145)$$

$$\delta_{\lambda, \Omega_A} = \frac{M_a}{\beta_{HR}} \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{2, \Omega_A}, \quad (2.146)$$

$$\epsilon_u = \|\underline{u}_h - \underline{u}_{HR}\|_2, \quad (2.147)$$

$$\delta_u = \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \inf_{\underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}} \|\underline{u}_h - \underline{v}_{RB}\|_2, \quad (2.148)$$

$$\epsilon_{u, \Omega_A} = \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{2, \Omega_A}, \quad (2.149)$$

$$\delta_{u, \Omega_A} = \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \left(\inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0} \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{v}_{HR}\|_{2, \Omega_A} + \|\mathcal{I}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{I}}) - \check{\mathcal{I}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{2, \Omega_A} \right), \quad (2.150)$$

$$\delta_{u, \Omega_A}^{post.} = \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{R}_{\Omega_A}\|_{2, \Omega_A} + \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \|\mathcal{I}_{\Omega_A}(\underline{u}_h^{\mathcal{I}}) - \check{\mathcal{I}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})\|_{2, \Omega_A}. \quad (2.151)$$

Ces définitions seront utilisées pour désigner les bornes et les erreurs dans les figures des sections suivantes. Nous choisissons $\underline{u}_h^{\mathcal{I}}$ comme condition de Dirichlet afin d'avoir l'équivalence sur le RID, des solutions entre le modèle EF défini sur le RID (2.16) et celui défini sur le domaine complet (2.6) (cf. Lemme 1). Le relèvement HHR $\check{\mathcal{I}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}})$ est défini par (2.40) avec la relation de fermeture associée (2.41). En pratique ce relèvement est post-traité à partir de la solution HHR du problème (2.44).

Nous ajoutons les définitions de ϵ_{u, Ω_A}^H et δ_{u, Ω_A}^H qui serviront à illustrer la borne primale a priori sur le RID sous l'hypothèse (H) (2.74) :

$$\begin{aligned} \epsilon_{u, \Omega_A}^H &= \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}^H\|_{2, \Omega_A} \\ \delta_{u, \Omega_A}^H &= \frac{M_a}{\alpha} \inf_{\underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0} \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{v}_{HR}\|_{2, \Omega_A} \end{aligned} \quad (2.152)$$

où \underline{u}_{HR}^H est la solution primale du problème (2.33), où nous imposons le respect de l'hypothèse (H) en imposant $\underline{u}_h^{\mathcal{I}}$ comme condition de Dirichlet pour le modèle HHR (2.33), i.e $\check{\mathcal{I}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^{\mathcal{I}}) =$

$r_{\Omega_A}(u_h^T)$.

Enfin, nous définissons l'indice d'efficacité d'une borne comme le rapport entre la valeur de cette borne et la valeur de l'erreur. Par exemple, l'indice d'efficacité de δ_u (cf. (2.147)) vis-à-vis de ϵ_u (cf. (2.148)) est calculé par :

$$\frac{\delta_u}{\epsilon_u} \quad (2.153)$$

L'indice d'efficacité doit être supérieur à 1 pour que la borne soit plus grande que l'erreur. Plus l'indice est proche de 1 plus la borne est efficace.

2.6.2 Cas test académique

Dans cette section nous considérons le cas test des deux demi-disques de Hertz en contact introduit en section 1.5.1. Pour rappel, le modèle EF a un ordre primal de $N = 1356$ et dual de $N_\lambda = 55$ et l'espace paramétrique est défini tel que $\mu \in \mathcal{P} = [0.15, 0.45]$ (m). L'espace d'entraînement est composé de 31 points de \mathcal{P} et est défini par $\mathcal{P}_{tr} = \{0.15 + 0.01i \mid 0 \leq i \leq 30\}$ (m). Nous ne détaillons par ici la construction du modèle HHR (BR, RID), nous utilisons la construction telle qu'introduite en section 1.4.3, avec seulement une DEIM sur la base réduite primale. Nous avons un modèle HHR avec un ordre primal de $\ell = 9$ et dual de $N_\lambda^C = 8$, avec donc 8 points de contact potentiels dans le RID (cf. figure 2.2). Aucun enrichissement n'est nécessaire dans ce cas test, la condition discrète inf-sup/LBB du problème HHR est respectée ($\beta_{HR} \approx 0.54$). Pour illustrer les résultats théoriques nous évaluons les erreurs et les bornes sur 101 points de l'espace paramétrique (incluant les 31 snapshots), c'est à dire $\mathcal{P}_{valid} = \{0.15 + 0.003i \mid 0 \leq i \leq 100\}$ (m).

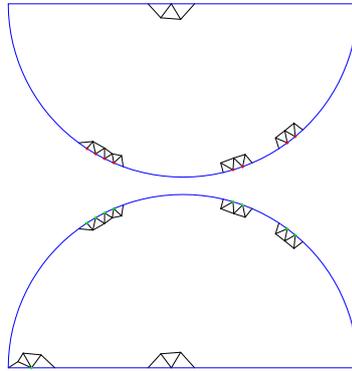


FIGURE 2.2 – Cas test académique. Domaine d'intégration réduit du modèle HHR ($\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$).

Pour ce cas test nous avons $M_a \approx 37.03$, $\alpha \approx 11.11$ et $\alpha' \approx 0.005$.

2.6.2.a Borne d'erreur duale sur tout Ω_A

Nous présentons sur la figure 2.3 l'erreur duale du modèle HHR et la borne comme définies dans (2.145) et (2.146) (respectivement) afin de vérifier le théorème 3.

Le graphique montre que la borne d'erreur duale est respectée pour tous les points de l'espace paramétrique. Dans ce cas, les comportements diffèrent légèrement l'un de l'autre. L'erreur duale est entre 10^{-5} et 10^{-2} tandis que la borne est dans l'intervalle $[10^{-3}; 10^{-1}]$. La borne est donc assez grande devant l'erreur réelle. L'indice d'efficacité moyen de la borne est de 71.5 pour un maximum de 732.7 et un minimum de 7.9. Il y a donc une variation assez grande de

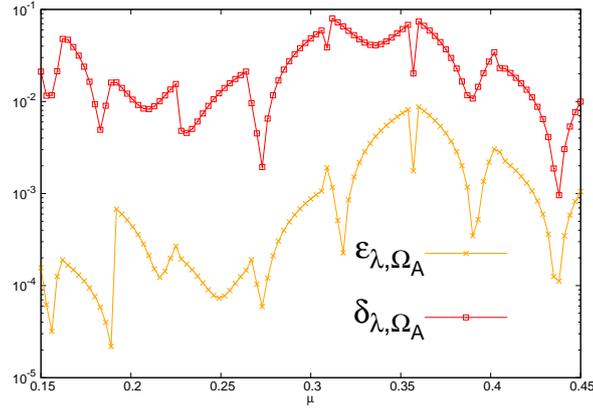


FIGURE 2.3 – Erreur duale $\epsilon_{\lambda,\Omega_A}$ et borne $\delta_{\lambda,\Omega_A}$ comme définies en (2.145) et (2.146) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid} .

l'efficacité selon la valeur du paramètre.

Cette efficacité assez faible est en partie due à la valeur de la constante $\frac{M_a}{\beta_{HR}}$. En effet cette constante est le ratio entre M_a (qui dépend des caractéristiques matérielles) et β_{HR} (qui ne dépend pas du matériau). Ce ratio peut conduire à une borne très large devant l'erreur réelle car la valeur de β_{HR} est assez petite ($\beta_{HR} = 0.54$ pour ce cas test) alors que M_a peut devenir très grande si un module de Young de l'ordre du MégaPascal est considéré.

2.6.2.b Bornes d'erreurs primales a priori sur tout Ω_A

Borne d'erreur primale sur le RID avec l'hypothèse (H)

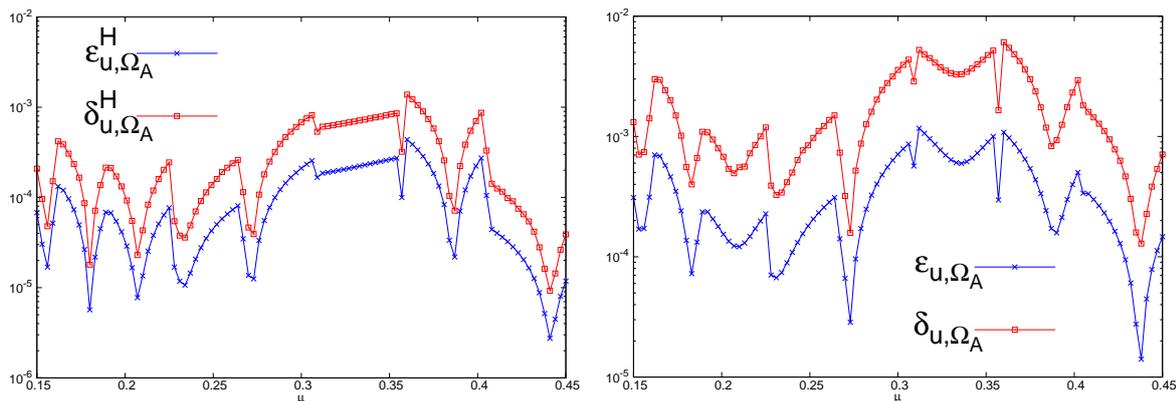
Pour vérifier l'hypothèse (H) dans le modèle HHR afin de vérifier la borne (2.73), nous imposons la solution EF comme condition de Dirichlet sur l'interface du RID. Nous pouvons observer sur la figure 2.4a que la borne d'erreur est respectée pour tous les paramètres μ de l'espace de validation. De plus, la borne qui est dans l'intervalle $[10^{-5}; 10^{-3}]$ est proche de l'erreur qui est entre 10^{-6} et 10^{-4} . L'indice d'efficacité (sur \mathcal{P}_{valid}) de la borne est quasiment constant et égal à 3 (max. 3.3, min. 2.8). La borne est donc dans ce cas très efficace.

Borne d'erreur primale sur le RID dans le cas général (sans hypothèse (H))

Nous présentons sur la figure 2.4b l'erreur du modèle HHR et la borne d'erreur primale sur le RID comme définies en (2.149) et (2.150) (respectivement) afin de vérifier la borne (2.80). Tout d'abord, nous pouvons constater sur la figure 2.4b que de la même façon que la borne sous l'hypothèse (H), la borne pour le cas général est vérifiée sur tout l'espace paramétrique. L'erreur du modèle HHR est entre 10^{-5} et 10^{-3} tandis que la borne est dans l'intervalle $[10^{-3}; 10^{-2}]$. Il est compréhensible que l'erreur et la borne dans le cas général soient plus grandes que sous l'hypothèse (H) car elles prennent en compte l'erreur engendrée par la différence de Dirichlet sur l'interface du RID. L'indice d'efficacité moyen (sur \mathcal{P}_{valid}) de la borne dans le cas général est de 5.0, pour un maximum de 9.1 et un minimum de 3.9. L'efficacité de la borne dans le cas général est donc moins bonne que sous l'hypothèse (H) mais reste très satisfaisante.

2.6.2.c Borne d'erreur primale a priori sur tout Ω

Nous proposons ici la validation de la borne de l'erreur primale a priori du modèle HHR sur tout Ω du théorème 6. Nous présentons sur la figure 2.5 l'erreur primale du modèle HHR sur tout Ω , ϵ_u (cf. (2.147)) et sa borne, δ_u (cf. (2.148)).



(a) Erreur ϵ_{u, Ω_A}^H et la borne δ_{u, Ω_A}^H comme définies en (2.152) sous l'hypothèse (H).

(b) Erreur ϵ_{u, Ω_A} et la borne δ_{u, Ω_A} comme définies en (2.149) et (2.150) (respectivement) dans le cas général.

FIGURE 2.4 – Erreur et borne primales, avec ou sans hypothèse (H), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid} .

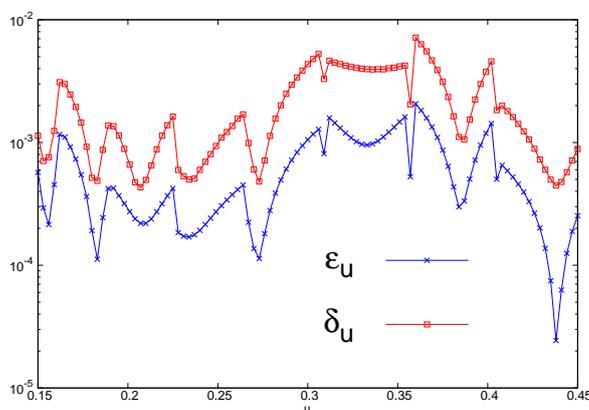


FIGURE 2.5 – Erreur primaire ϵ_u et la borne δ_u sur tout Ω comme définies en (2.147) et (2.148) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P} .

Le graphique montre clairement le respect de la borne sur tout l'espace paramétrique. L'erreur est entre 10^{-3} et 10^{-5} tandis que la borne se trouve dans l'intervalle $[10^{-2}; 3 \times 10^{-4}]$. L'indice d'efficacité moyen de la borne est de 3.6 pour un maximum de 18.2 et un minimum de 1.9. L'efficacité est donc très satisfaisante même si elle présente une légère variation selon le paramètre. Cette variation de l'efficacité est due à la minimisation aux moindres carrés, qui dans ce cas est sur tout le domaine Ω .

2.6.2.d Borne d'erreur *a posteriori*

Dans cette section, nous proposons uniquement de vérifier la borne d'erreur primaire *a posteriori* du théorème 8. Des résultats sur le nouvel indicateur d'erreur proposé seront présentés sur le cas test suivant en section 2.6.3, le présent cas test s'y prêtant assez peu vu la simplicité de la construction de la BR primale.

Nous présentons sur la figure 2.6 l'erreur primaire du modèle HHR sur Ω_A , notée ϵ_{u, Ω_A} , et la borne $\delta_{u, \Omega_A}^{post.}$ (cf. (2.149) et (2.151) respectivement).

Nous pouvons constater que la borne *a posteriori* est vérifiée sur la totalité de l'espace paramétrique. La borne *a posteriori* est assez précise, de plus son indice d'efficacité est quasiment constant autour de 3.0 (max. 3.4, min. 2.6). La borne a donc une très bonne efficacité avec peu de variation selon le paramètre.

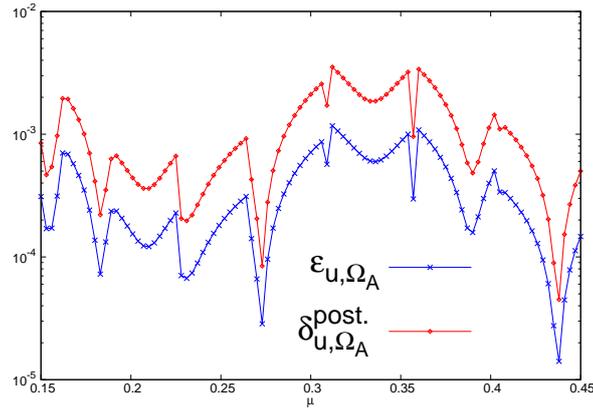


FIGURE 2.6 – Erreur primaire ϵ_{u,Ω_A} et borne *a posteriori* $\delta_{u,\Omega_A}^{post.}$ comme définies en (2.149) et (2.151) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}

2.6.2.e Limitation du cas test

La complexité paramétrique de ce cas test reste modérée, du fait notamment des multiples symétries. Même si en pratique, un module de Young de 15 Pa ne représente pas un matériau existant, il est possible de considérer un changement d'unité pour se ramener à des modules plus réalistes. Cependant les dimensions du domaine en seront d'autant plus petites (millimètres voire micromètres). De plus les chargements considérés sortent le cas test du cadre théorique des HPP (la théorie de Hertz ne s'applique pas à ce cas test à cause du trop grand écrasement). Nous allons donc étudier et vérifier les bornes d'erreurs sur un cas test issu du domaine de la simulation du combustible nucléaire (avec de vrais caractéristiques matériaux).

2.6.3 Cas test industriel

Dans cette section nous allons considérer le cas test introduit en section 1.5.2 représentant l'interaction pastille-gaine (IPG) en 2D axisymétrique. Pour rappel, le modèle EF a un ordre primal de $N = 14140$ et dual de $N_\lambda = 101$ et l'espace paramétrique est constitué de la pression $P_1 \in [5; 200]$ MPa que l'on applique sur l'extérieur de la gaine sur une hauteur $h_1 \in [0, 6; 6]$ mm. L'espace d'entraînement, noté \mathcal{P}_{tr} , est composé de 500 points de \mathcal{P} régulièrement distribués. Nous utilisons une construction du modèle HHR avec DEIM sur la base réduite primale, ainsi qu'une DEIM sur une BR POD duale et une zone d'intérêt sur l'extérieur de la gaine. Nous obtenons donc un modèle HHR avec un ordre primal de $\ell = 36$ et dual de $N_\lambda^C = 34$, avec donc 34 points de contact potentiels dans le RID (cf. figure 2.7). Dans ce cas test, la condition inf-sup/LBB discrète du modèle HHR n'est pas respectée initialement. Nous considérons donc un enrichissement maximal conduisant à un ordre primal effectif de $\bar{\ell} = 70$. Pour illustrer les résultats théoriques nous évaluons les erreurs et les bornes sur l'espace de validation \mathcal{P}_{valid} constitué de 3100 points de l'espace paramétrique (régulièrement distribués).

Dans ce cas test nous avons $M_a \approx 3.65 \times 10^{11}$, $\alpha \approx 5.82 \times 10^{10}$, $\alpha' \approx 18.6 \times 10^3$ et $\beta_{HR} \approx 0.5$.

2.6.3.a Borne d'erreur duale sur tout Ω_A

Nous représentons sur la figure 2.8 l'erreur duale du modèle HHR et la borne comme définies dans (2.145) et (2.146) (respectivement) afin de vérifier le théorème 3. La constante $\frac{M_a}{\beta_{HR}}$ est évaluée à environ 5.16×10^{11} .

Le graphique montre bien que la borne est vérifiée sur tout l'espace paramétrique, cependant,

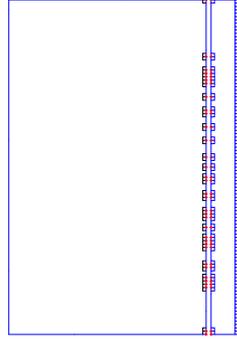


FIGURE 2.7 – Cas test industriel. Domaine d'intégration réduit (RID) du modèle HHR. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$, $\bar{\ell} = 70$).

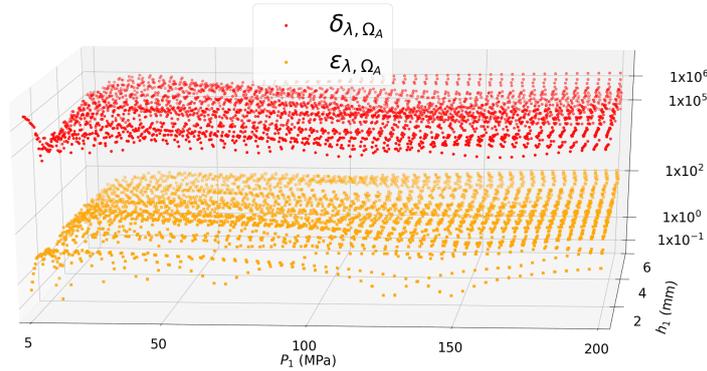


FIGURE 2.8 – Erreur duale $\epsilon_{\lambda, \Omega_A}$ et la borne $\delta_{\lambda, \Omega_A}$ comme définies en (2.145) et (2.146) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid} .

la borne est très grande devant l'erreur. En effet, l'indice d'efficacité moyen est très grand (environ 20.6×10^3) avec une très grande variation en fonction du paramètre (max. de 5.9×10^6 pour min. de 419). Cette observation peut directement être reliée au rapport entre la constante de continuité M_a (qui est très grande avec les caractéristiques matérielles du cas test) et la constante inf-sup/LBB β_{HR} (qui est restée du même ordre de grandeur que celle du cas test académique).

2.6.3.b Bornes d'erreurs primales sur tout Ω_A

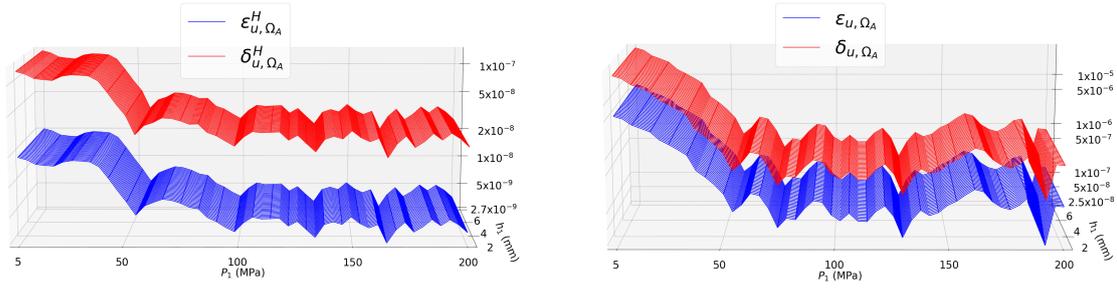
Borne d'erreur primaire sur Ω_A avec l'hypothèse (H)

Comme pour le cas test des deux demi-disques de Hertz, nous imposons la solution EF comme condition de Dirichlet sur l'interface du RID dans le modèle HHR afin de respecter l'hypothèse (H) et vérifier la borne (2.73). Nous présentons sur la figure 2.9a l'erreur primaire du modèle HHR sur le RID, notée ϵ_{u, Ω_A}^H , et la borne, notée δ_{u, Ω_A}^H (cf. (2.152)). Les observations du cas académique pour la borne sous l'hypothèse (H) sont confirmées sur ce cas test. La borne est supérieure à l'erreur sur tout l'espace paramétrique et son indice d'efficacité moyen est de 6.0 pour un maximum de 6.2 et un minimum de 4.8.

Borne d'erreur primaire sur Ω_A dans le cas général (sans hypothèse (H))

Nous présentons sur la figure 2.9b l'erreur du modèle HHR ϵ_{u, Ω_A} et la borne d'erreur primaire sur le RID δ_{u, Ω_A} comme définies en (2.149) et (2.150) (respectivement) afin de vérifier la borne (2.80). Une fois encore, les observations du cas test académique sont confirmées sur ce cas test. La borne est respectée sur tout l'espace paramétrique et son indice d'efficacité est très bon (6.3 en moyenne pour un maximum de 10.0 et un minimum de 5.5). De plus l'erreur et la borne sont plus grandes que sous l'hypothèse (H) car elles prennent en compte l'erreur

introduite par la différence des valeurs Dirichlet sur l'interface du RID.



(a) Erreur ϵ_{u, Ω_A}^H et la borne δ_{u, Ω_A}^H comme définies en (2.152) sous l'hypothèse (H)

(b) Erreur ϵ_{u, Ω_A} et la borne δ_{u, Ω_A} comme définies en (2.149) et (2.150) (respectivement) dans le cas général.

FIGURE 2.9 – Erreur et borne primales, avec ou sans hypothèse (H), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid} .

Les observations sur la figure 2.9 conduisent à la vérification des bornes primales sur le RID pour le cas test industriel. Les caractéristiques matériaux ne semblent pas avoir d'influence particulière pour ces estimations.

2.6.3.c Borne d'erreur primale *a priori* sur tout Ω

Nous proposons ici la vérification de la borne de l'erreur primale *a priori* du modèle HHR sur tout Ω , cf. théorème 6. Nous présentons sur la figure 2.10 l'erreur primale du modèle HHR sur tout Ω , ϵ_u (cf. (2.147)) et sa borne, δ_u (cf. (2.148)). Comme observé précédemment sur le cas test académique, la borne est vérifiée en chaque point. Les erreurs vont de 10^{-5} à 5×10^{-8} alors que la borne va de 10^{-4} à 4×10^{-6} . Il est important de remarquer sur la figure 2.10 que contrairement au cas test académique (cf. section 2.6.2.c), l'indice d'efficacité varie fortement selon le paramètre. L'indice d'efficacité moyen est de 59.9 pour un maximum de 497.5 et un minimum de 3.3. Ici, la borne est beaucoup plus lisse, et ne réussit à capter qu'une toute petite partie des variations de l'erreur. Cette différence peut s'expliquer par la complexité du cas test industriel, qui conduit à une minimisation aux moindres carrés sur tout Ω beaucoup moins adaptée pour reproduire le comportement de l'erreur HHR sur le domaine complet. Néanmoins, la borne est numériquement vérifiée.

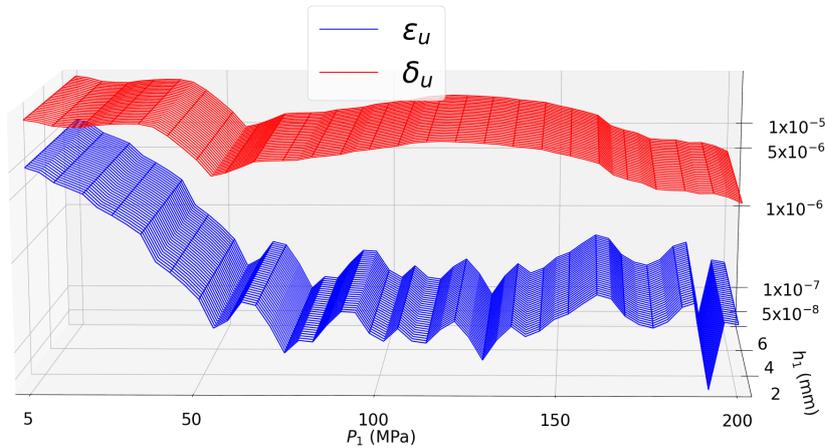


FIGURE 2.10 – Erreur primale ϵ_u et la borne δ_u sur tout Ω comme définies en (2.147) et (2.148) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid} .

2.6.3.d Borne d'erreur *a posteriori*

Dans cette section, nous proposons de vérifier la borne d'erreur primale *a posteriori* du théorème 8. Nous représentons sur la figure 2.11 l'erreur primale du modèle HHR sur Ω_A , notée ϵ_{u,Ω_A} , et la borne *a posteriori* $\delta_{u,\Omega_A}^{post.}$ telles que définies en (2.149) et (2.151) (respectivement). Comme pour le cas test des deux demi-disques de Hertz précédemment, la borne est respectée sur tout l'espace paramétrique, elle est assez précise avec un indice d'efficacité qui varie très peu (moyenne de 4.8 pour un maximum de 6.2 et un minimum de 4.1).

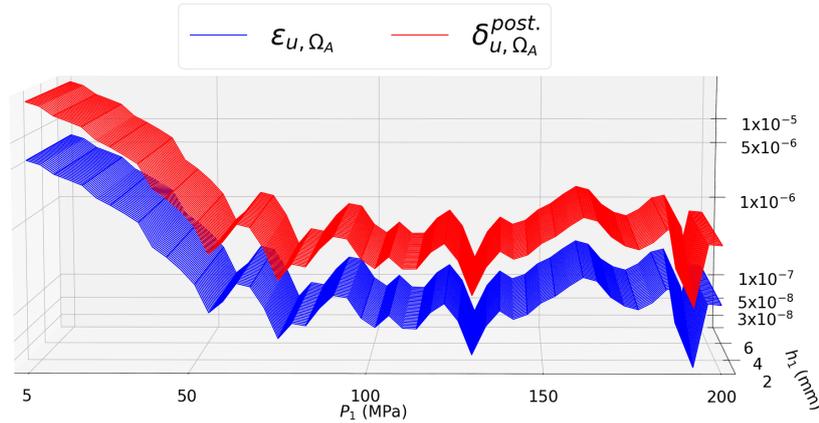
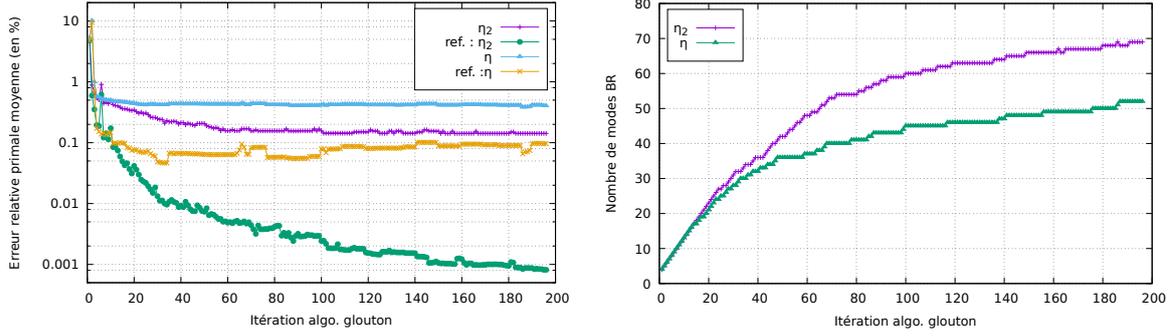


FIGURE 2.11 – Erreur primale ϵ_{u,Ω_A} et borne *a posteriori* $\delta_{u,\Omega_A}^{post.}$ comme définies en (2.149) et (2.151) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}

2.6.3.e Résultats numériques du nouvel indicateur d'erreur

Dans cette section nous voulons illustrer l'efficacité du nouvel indicateur d'erreur dérivé de la borne d'erreur *a posteriori* (2.124), noté η_2 et introduit en section 2.3.2. Nous utilisons un algorithme glouton de sélection de snapshots (cf. Algorithme 1.3) basé sur ce nouvel indicateur (en norme 2). L'algorithme est initialisé avec 4 snapshots localisés aux extrémités de l'espace paramétrique ($P_1 = 5$ ou 200 MPa et $h_1 = 0.6$ ou 6 mm). L'algorithme glouton sélectionne un snapshot supplémentaire par itération sur une grille de 1600 points de l'espace paramétrique potentiels $\mathcal{P}_{param.}$. La base réduite primale du modèle HHR est construite avec un seuil POD primal de 10^{-8} . Le RID est construit en appliquant l'algorithme DEIM sur la BR primale, ainsi que sur une BR POD duale obtenue avec un seuil POD de 10^{-6} . Une zone d'intérêt est également ajoutée sur l'extérieur de la gaine (pour prendre en compte la condition de Neumann). Un enrichissement EF maximal est appliqué. A chaque itération de l'algorithme glouton, le modèle HHR est reconstruit pour prendre en compte le nouveau snapshot. Nous nous intéressons à l'évolution de la valeur moyenne de l'erreur relative primale estimée sur $\mathcal{P}_{param.}$ au cours des itérations de l'algorithme glouton, ainsi qu'à l'évolution du cardinal de la base réduite primale POD. Nous comparons les résultats obtenus avec ce nouvel indicateur η_2 avec ceux obtenus avec l'indicateur introduit dans [Fauque *et al.*, 2018], qu'on appellera η (cf. section 1.4.7 du chapitre 1). Nous regardons également les erreurs relatives primales moyennes de référence (par rapport à la solution EF) associées aux modèles réduits construits avec chaque ensemble de snapshots (celui de η_2 et celui de η). Nous présentons ces résultats sur la figure 2.12.



(a) Erreur relative primale moyenne (sur \mathcal{P}_{param}) au cours des itérations de l'algorithme glouton de sélection. (b) Cardinal de la BR primale POD au cours des itérations de l'algorithme glouton de sélection.

FIGURE 2.12 – Comparaison des capacités des indicateurs η et η_2 .

Nous pouvons voir sur la figure 2.12a que l'indicateur η_2 permet de construire un modèle HHR plus précis car son erreur relative primale de référence associée diminue plus rapidement et au cours de toutes les itérations de l'algorithme, ce qui n'est pas le cas pour l'indicateur η . Nous pouvons également constater que même s'ils constituent des versions modifiées de la borne *a posteriori* du théorème 8, les deux indicateurs restent des bornes de leurs erreurs de référence respectives. Sur la figure 2.12b nous observons que l'indicateur η_2 conduit à un modèle HHR qui aura une plus grande BR primale pour un nombre d'itération fixé. L'indicateur η_2 permet donc de choisir des snapshots qui ont peu ou pas de redondance d'information. Le nouvel indicateur η_2 est très performant en comparaison de l'indicateur η .

Il est à noter que la partie primale de l'indicateur η (cf. η_u section 1.4.7) est borné par η_2 cf. éq. (2.116). C'est donc la composante duale η_λ de η qui rend ce dernier moins efficace.

2.6.3.f Validation numérique de la borne avec la distance chordale

Dans cette section, une illustration numérique de la borne d'erreur primale *a priori* en fonction de la distance chordale (cf. section 2.4) est présentée sur le cas test industriel. Le même cas que celui de la section 2.6.3.b est considéré, mais avec un espace paramétrique différent. La pression $P_1 \in [100; 140]$ MPa devient le seul paramètre réel tandis que la hauteur h_1 est fixée à un ensemble de 5 valeurs possibles ($[0.5; 0.75; 1.0; 1.25; 1.5]$ mm). L'ensemble d'apprentissage est défini comme $\mathcal{P}_{tr} = \{100 + 10i \text{ MPa} \mid i = 0, \dots, 4\}$, et la matrice des snapshots est construite en résolvant le cas test pour toutes les valeurs possibles de h_1 à chaque point de \mathcal{P}_{tr} . Le modèle HHR est construit pour obtenir une base réduite de taille $\ell = 5$. Pour calculer la base réduite \underline{V}^* pour un P_1 donné, une SVD est effectuée sur la matrice des snapshots composée des solutions EF pour chaque valeur possible de h_1 avec la même pression P_1 . Aucune troncature n'est utilisée sur le résultat de la SVD, ce qui donne une base réduite \underline{V}^* de taille $\mathbb{R}^{N \times \ell}$, égale aux dimensions de \underline{V} . Le vecteur $\underline{\gamma}^*$ est alors calculé en utilisant une minimisation par les moindres carrés pour le problème $\underline{V}^* \underline{\gamma}^* = \underline{U}_h$ pour un ensemble donné de paramètres (P_1, h_1) . L'erreur est indiquée par la notation \mathcal{E}_u^Ω , tandis que les deux versions de la borne sont écrites dans les légendes avec la constante $K_1 = (1 + \frac{M_a}{\alpha})$. Les bornes et l'erreur sont présentées sur la figure 2.13.

La figure met en évidence la vérification des bornes d'erreurs (2.129) et (2.130) du théorème 9 d'un point de vue numérique. Comme démontré dans la partie théorique, la borne $(1 + \frac{M_a}{\alpha}) \|\underline{\sin}(\theta) \underline{U}^{*T} \underline{\gamma}^*\|_2$ est plus proche de l'erreur que $d^{Ch}(V^*, V) \sqrt{\ell} \|\underline{\gamma}^*\|_2$. De plus, la plus petite borne capture mieux certaines caractéristiques de l'erreur réelle.

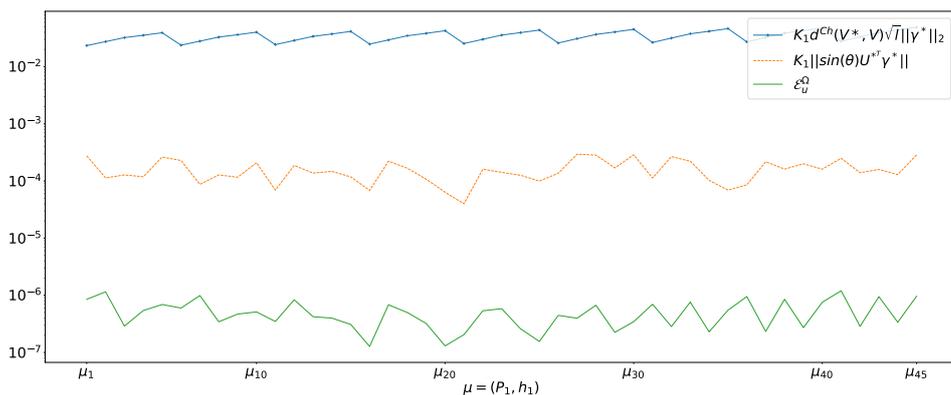


FIGURE 2.13 – Erreur primale \mathcal{E}_u^Ω et bornes en fonction de la distance chordale (2.130).

2.7 Conclusion

L'analyse théorique du modèle HHR proposée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les atouts majeurs de ce dernier. En particulier, l'obtention d'estimateurs *a priori* de type Céa dans le cadre d'un problème de point-selle, au lieu d'estimateurs classiques de type Brezzi, conduit à des erreurs primale et duale qui ne dépendent que de l'espace d'approximation réduit primal. La constante de la borne d'erreur duale est directement liée à l'inverse de la constante inf-sup/LBB du modèle, ce qui incite à avoir une valeur aussi grande que possible de cette constante lors de la construction de la BR primale. Le modèle HHR possède donc des estimations d'erreurs *a priori* très avantageuses.

Les estimations d'erreurs *a posteriori* démontrées ont permis de proposer un nouvel indicateur d'erreur *a posteriori* pour le modèle HHR. Cet indicateur est non seulement moins coûteux à utiliser d'un point de vue temps de calcul mais il est aussi très performant. En particulier, utilisé en association avec un algorithme glouton pour la sélection de snapshots, le nouvel indicateur propose des performances supérieures à l'indicateur proposé dans [Fauque *et al.*, 2018] et utilisé jusqu'ici.

Finalement, une borne *a priori* en fonction de la distance chordale permet de relier la dissimilarité de l'espace d'approximation réduit primal vis-à-vis de l'espace primal EF à l'erreur primale commise par le modèle réduit. Ce qui ouvre la voie à l'utilisation de méthodes de clustering pour réduire l'erreur primale.

Chapitre 3

Autour de la solvabilité et de la précision du modèle HHR

Ce chapitre est consacré à l'étude de la solvabilité et de la précision associées au système de point-selle du modèle hyper-réduit hybride pour des problèmes de mécanique du contact traités par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Pour ce faire, la relation entre le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée (associée à la valeur de la constante inf-sup/LBB) et la précision duale du modèle réduit est mise en évidence à l'aide d'expériences numériques. Cette relation aide à piloter les méthodes d'enrichissement développées via un algorithme glouton.

Deux méthodes d'enrichissement de la base réduite primale sont proposées pour le modèle HHR. Ces deux méthodes permettent au modèle réduit HHR de vérifier la condition inf-sup, mais également de réduire les erreurs duales.

Les méthodes et la majorité des résultats présentés dans ce chapitre sont contenus dans la publication [Le Berre *et al.*, 2022a]. Ces travaux ont par ailleurs été présentés lors de la conférence CSMA 2022 [Le Berre *et al.*, 2022b].

Sommaire

3.1	Vérification de la condition inf-sup au sein du modèle HHR	73
3.2	Conséquence de la borne d'erreur duale pour le pilotage de l'enrichissement	73
3.3	Rôle du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée . . .	74
3.4	Méthodes d'enrichissement de la base réduite primale	75
3.4.1	Enrichissement EF de la base réduite primale	75
3.4.2	Enrichissement par modes POD et fonctions de forme EF de la base réduite primale	75
3.5	Etude numérique des méthodes d'enrichissement de la BR primale en appariement nœud-à-nœud	76
3.5.1	Cas test des deux demi-disques de Hertz en contact.	76
3.5.2	Cas test d'interaction pastille-gaine en axisymétrique	78
3.6	Conclusion	87

Nous considérons dans ce chapitre, uniquement des appariements de contact nœud-à-nœud, le modèle HHR est donc le même que celui introduit au chapitre 1.

3.1 Vérification de la condition inf-sup au sein du modèle HHR

Nous considérons la condition inf-sup/Ladyzenskaia-Babuška-Brezzi étendue, introduite au chapitre 1 en (1.67), qui porte sur toute la liste des points de contact potentiels. Cette condition impose que la matrice de la rigidité de contact projetée $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, \cdot]$ doit être de rang plein en ligne :

$$\text{rang}(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, \cdot]) = \text{card}(\mathcal{A}_\lambda) = N_\lambda^C \quad (3.1)$$

Il est évident qu'une condition nécessaire pour respecter (3.1) est d'avoir $N_\lambda^C \leq \ell$. Ceci n'est pas toujours le cas du fait de la construction du RID. Pour pouvoir vérifier la condition (3.1) sans avoir à modifier le RID, la BR primale doit être enrichie.

Dans [Fauque *et al.*, 2018], et comme rappelé dans le chapitre 1, il était proposé d'enrichir la BR primale avec des fonctions de forme EF associées au nœuds de la surface de contact du RID. Dans le cas des EF de Lagrange, la BR enrichie, notée $\overline{\underline{\underline{V}}}$ s'écrit alors comme :

$$\overline{\underline{\underline{V}}} = \left(\underline{\underline{V}} \mid \underline{\underline{I}}_N \left[\cdot, \mathcal{L}_c \right] \right). \quad (3.2)$$

La BR primale est alors de dimension $\bar{\ell} = \ell + \text{card}(\mathcal{L}_c)$, avec $\mathcal{L}_c \subset \mathcal{A}_c$ les indices de nœuds des fonctions de forme EF à ajouter. Cet enrichissement est avantageux pour obtenir une solution précise sur la surface de contact mais le choix de \mathcal{L}_c peut ne pas être trivial. Dans [Fauque *et al.*, 2018] cet enrichissement était soit manuel (avec une sélection arbitraire) soit il était proposé d'ajouter toutes les fonctions de forme EF de la surface de contact du RID, de façon à assurer le respect de la condition de rang plein en ligne et la précision des solutions sur la zone de contact. Dans ce dernier cas $\mathcal{L}_c = \mathcal{A}_c$, ce qui peut entraîner une extension significative de la taille de la BR primale.

Une des principales contributions de ce chapitre est de proposer des stratégies automatiques et judicieuses pour obtenir l'ensemble \mathcal{L}_c afin d'optimiser le ratio entre la dimension de la BR primale $\bar{\ell}$ et la précision des solutions duales réduites.

3.2 Conséquence de la borne d'erreur duale pour le pilotage de l'enrichissement

La borne sur l'erreur duale (2.70) introduite dans le chapitre 2 est rappelée ici :

$$\|\lambda_{h|\Omega_A} - \lambda_{HR}\|_{\Omega_A} \leq \frac{M_a}{\beta_{HR}} \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A}, \quad (3.3)$$

avec β_{HR} la constante inf-sup/LBB du modèle HHR, $(\underline{u}_{h|\Omega_A}, \lambda_{h|\Omega_A})$ la solution EF restreinte au RID, $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ la solution HHR et M_a la constante de continuité de l'application $a(\cdot, \cdot)$. Or en dimension finie la condition inf-sup/LBB est équivalente à un problème aux valeurs singulières [Ciarlet *et al.*, 2003].

Par conséquent, nous posons $\beta_{HR} = \sigma_{min}$, σ_{min} la plus petite valeur singulière non nulle de $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\overline{\underline{\underline{V}}}[\mathcal{A}_c, \cdot]$. Avec la norme matricielle induite par la norme euclidienne le conditionnement κ s'écrit :

$$\kappa = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{min}} = \frac{\sigma_{max}}{\beta_{HR}}, \quad (3.4)$$

avec σ_{max} la plus grande valeur singulière de $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$.

Avec la borne d'erreur duale (3.3), nous pensons intuitivement à développer des stratégies d'enrichissement de la BR primale pour maximiser la constante inf-sup/LBB $\beta_{HR}(\sigma_{min})$ afin de diminuer les erreurs duales. Cependant, les valeurs de β_{HR} sont souvent très petites et dépendent du problème considéré, ce qui rend le pilotage de l'enrichissement assez complexe.

Nous allons donc ici utiliser le conditionnement de $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$ pour le pilotage de l'enrichissement. Considérant (3.4) la borne sur l'erreur duale (3.3) peut être reformulée :

$$\|\lambda_{h|\Omega_A} - \lambda_{HR}\|_{\Omega_A} \leq C_1 \kappa \|\underline{u}_{h|\Omega_A} - \underline{u}_{HR}\|_{\Omega_A}, \quad C_1 > 0 \quad (3.5)$$

La borne (3.5) met en évidence la relation entre le conditionnement κ de la matrice de rigidité de contact projetée et les erreurs duales du modèle HHR. La constante C_1 contient la valeur singulière σ_{max} pour laquelle nous ne connaissons pas, théoriquement, de borne supérieure indépendante de l'enrichissement. Cependant, numériquement, nous avons constaté que la valeur de σ_{max} est insensible à l'enrichissement de $\underline{\underline{V}}$. Nous allons numériquement démontrer l'efficacité du pilotage par le conditionnement pour améliorer les précisions duales des solutions HHR.

3.3 Rôle du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée

Dans le modèle EF, le conditionnement de la matrice de rigidité de contact $\underline{\underline{B}}$, noté $\kappa(\underline{\underline{B}})$, est égal à 1. Dans le modèle HHR, plus le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée, noté $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$, est proche de 1, plus les solutions duales sont précises. D'autre part, la précision des solutions primales est moins sensible à ce conditionnement. Cela est en cohérence avec les bornes d'erreurs de la solution primale qui ne dépendent pas de la constante inf-sup/LBB (cf. (2.80) et (2.87)). Une illustration numérique de ce comportement des précisions primale et duale est présentée sur la figure 3.1. Les erreurs relatives considérées sont introduites en section 3.5 (équations (3.7) et (3.9)). Par ailleurs, on remarque que le respect stricte de la condition de solvabilité (3.1) ne suffit pas à garantir la précision de la solution duale.

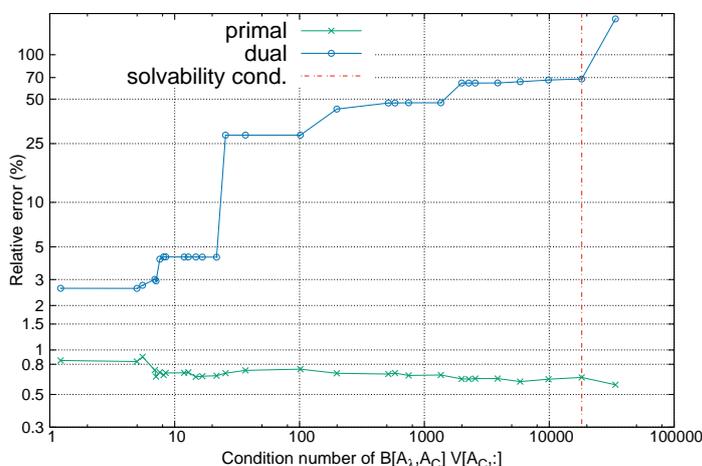


FIGURE 3.1 – Rôle du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour les erreurs relatives primales et duales.

3.4 Méthodes d'enrichissement de la base réduite primale

Nous proposons ici deux stratégies d'enrichissement visant à la fois à vérifier la condition de solvabilité et à diminuer les erreurs duales.

3.4.1 Enrichissement EF de la base réduite primale

Dans le but de diminuer le conditionnement $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$ et de le rapprocher de $\kappa(\underline{\underline{B}})$, nous proposons de conserver l'enrichissement par fonctions de forme EF introduit dans [Fauque *et al.*, 2018], mais en construisant l'ensemble \mathcal{L}_c automatiquement via un algorithme glouton qui minimise ce conditionnement, voir algorithme 3.1. Dans cet algorithme, $\mathcal{A}_c(p)$ désigne l'indice du ddl associé à l'élément p de \mathcal{A}_c . De cette façon, même si la condition de solvabilité est vérifiée, l'ensemble \mathcal{L}_c peut continuer à être enrichi pour améliorer la précision des solutions duales. Lorsque $\mathcal{L}_c = \mathcal{A}_c$, nous avons alors $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) = \kappa(\underline{\underline{B}})$.

Algorithme 3.1 : Algorithme glouton basé sur le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour l'enrichissement de la BR primale par fonctions de forme EF.

Entrées : Conditionnement maximal κ_{max} , matrice $\underline{\underline{B}}$ et $\underline{\underline{V}}$, l'ensemble \mathcal{A}_c (ddls EF primaux sur la surface de contact potentielle du RID).

Sorties : L'ensemble $\mathcal{L}_c \mathcal{A}_c$ des ddls EF à enrichir et la base réduite primale enrichie

$\underline{\underline{V}}$
 $\mathcal{L}_c = \emptyset$; $k = 0$; $\mathcal{G} = \llbracket 1, \text{card}(\mathcal{A}_c) \rrbracket$;

$\kappa_{min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :])$;

$\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{V}}$;

tant que ($\kappa_{min} > \kappa_{max}$) **ou** ($\text{rang}(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]) < N_\lambda^C$) **et** $k < \text{card}(\mathcal{A}_c)$ **faire**

$k = k + 1$;

pour $p \in \mathcal{G}$ **faire**

$\underline{\underline{V}}_{tmp} = (\underline{\underline{V}} \underline{\underline{I}}_N[:, \mathcal{A}_c(p)])$;

si $\kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}_{tmp}[\mathcal{A}_c, :]) < \kappa_{min}$ **alors**

$\kappa_{min} = \kappa(\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\underline{V}}_{tmp}[\mathcal{A}_c, :])$;

$p_{min} = p$;

$\mathcal{G} = \mathcal{G} \setminus \{p_{min}\}$;

$\mathcal{L}_c = \{\mathcal{L}_c, \mathcal{A}_c(p_{min})\}$;

$\underline{\underline{V}} = (\underline{\underline{V}} \underline{\underline{I}}_N[:, \mathcal{A}_c(p_{min})])$;

3.4.2 Enrichissement par modes POD et fonctions de forme EF de la base réduite primale

L'enrichissement avec fonctions de forme EF est une stratégie d'extension de la BR primale, mais il est naturel d'imaginer utiliser une stratégie d'enrichissement qui utilise plus de modes POD (via une SVD moins tronquée) pour un RID donné. De cette façon, plus d'informations venant des snapshots sont incluses dans la BR primale enrichie. En pratique, cette stratégie est basée sur un second seuil POD tel que $\epsilon_{POD2} < \epsilon_{POD}$ pour obtenir ℓ_2 modes POD supplémentaires. La base réduite primale est alors notée $\underline{\underline{V}} \in \mathbb{R}^{N \times (\ell + \ell_2)}$.

L'enrichissement via les vecteurs singuliers supplémentaires ne garantit pas la vérification de la condition inf-sup/LBB ou une valeur satisfaisante du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée. Cette stratégie doit donc être combinée avec l'enrichissement par fonctions de forme EF présenté en section 3.4.1 (Algorithme 3.1) pour obtenir des solutions duales précises. La dimension finale de la base réduite primale est $\bar{\ell} = \ell + \ell_2 + \text{card}(\mathcal{L}_c)$.

L'avantage principal de cette méthode est d'utiliser un seul POD plus précis sans conduire à une augmentation de la taille du RID. En effet il y a une relation forte entre la taille de la BR primale et la taille du RID à cause de l'algorithme DEIM notamment (cf. section 1.4.3). Avec la méthode d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF, le RID est toujours construit avec la base POD venant du seuil ϵ_{POD} , mais le modèle HHR repose sur la base POD étendue avec le seuil ϵ_{POD2} .

Il est important de garder un seuil POD ϵ_{POD2} assez grand pour ne pas observer un phénomène d'overfitting dans le modèle réduit. Par conséquent, cette stratégie est principalement d'intérêt pour les problèmes avec de grands espaces paramétriques.

Remarque : Pour les deux stratégies d'enrichissement, il faut vérifier après construction de la base réduite enrichie que la matrice $\bar{\underline{V}}$ est toujours une base sur le RID. Cette vérification est réalisée dans la partie offline sans influence sur la partie online.

3.5 Etude numérique des méthodes d'enrichissement de la BR primale en appariement nœud-à-nœud

3.5.1 Cas test des deux demi-disques de Hertz en contact.

Dans cette section nous allons considérer le cas test introduit en section 1.5.1. Pour cela, nous regardons l'espace paramétrique $\mathcal{P} = [0.15, 0.45](\text{m})$ pour μ et nous construisons les snapshots sur l'espace d'entraînement $\mathcal{P}_{tr} = \{0.15 + 0.01i \mid 0 \leq i \leq 30\}(\text{m})$ de cardinal $\text{card}(\mathcal{P}_{tr}) = 31$. Pour ce cas test nous considérons quatre types d'erreurs, les erreurs relatives en norme 2 primale et duale, l'erreur relative primale en norme H1 ainsi que l'erreur sur le minimum d'énergie utilisée dans [Benaceur *et al.*, 2020] :

$$e_u(\mu) = \left(\frac{\|\underline{u}_h(\mu) - \underline{u}_{HR}(\mu)\|_{2,\Omega}^2}{\|\underline{u}_h(\mu)\|_{2,\Omega}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.6)$$

$$e_\lambda(\mu) = \left(\frac{\|\lambda_h(\mu) - \lambda_{HR}(\mu)\|_{2,\Gamma_A^C}^2}{\|\lambda_h(\mu)\|_{2,\Gamma_A^C}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

$$e_{u,H1}(\mu) = \left(\frac{\|\underline{u}_h(\mu) - \underline{u}_{HR}(\mu)\|_{H1,\Omega}^2}{\|\underline{u}_h(\mu)\|_{H1,\Omega}^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.8)$$

$$e_{ener}(\mu) = \frac{1}{2} \left| a(\underline{u}_{HR}(\mu), \underline{u}_{HR}(\mu)) - l(\underline{u}_{HR}(\mu)) - \left(a(\underline{u}_h(\mu), \underline{u}_h(\mu)) - l(\underline{u}_h(\mu)) \right) \right|, \quad (3.9)$$

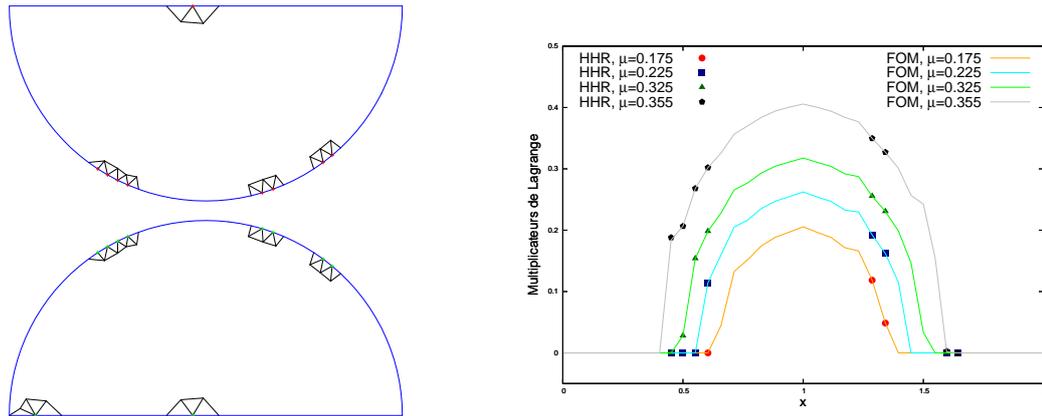
avec $(\underline{u}_h, \lambda_h)$ la solution EF et $(\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR})$ la solution HHR. La norme relative duale est uniquement évaluée sur le RID. L'erreur relative primale est quant à elle évaluée sur tout le domaine Ω .

Le cas test a la particularité de présenter une double symétrie (en x et en y) pour les solutions primales et duales. Cette symétrie, en plus de la surface de contact potentielle relativement petite et de l'espace paramétrique unidimensionnel conduit à un cas test relativement simple à traiter pour les modèles réduits. Avec la méthode HHR, un petit RID est suffisant pour

donner des résultats précis.

Pour illustrer la méthode HHR sur ce cas test nous construisons une BR primale avec un seuil POD $\epsilon = 10^{-8}$ conduisant à une base avec 9 vecteurs colonnes ($\ell = 9$). Le RID est construit en utilisant les nœuds obtenus en appliquant l'algorithme DEIM sur la BR primale et en prenant les nœuds en vis-à-vis sur la surface de contact. Deux nœuds sont ajoutés au RID pour prendre en compte les conditions de Dirichlet (un nœud sur la surface horizontale en bas et un sur la surface horizontale en haut). Nous n'utilisons pas de DEIM sur une base POD duale pour étendre le RID sur ce cas test. Le RID est présenté sur la figure 3.2a. Il contient 16 nœuds sur la surface de contact (8 de chaque côté), résultant en un ordre dual réduit de $N_\lambda^C = 8$.

Avec ce RID, la condition inf-sup/LBB est vérifiée initialement. De plus, le conditionnement est aussi très bon initialement, avec $\kappa(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{V}[\mathcal{A}_c, :]) = 3.4$. Par conséquent, ce cas test ne nécessite aucune méthode d'enrichissement de la BR primale pour obtenir des résultats précis avec le modèle HHR. Sur la figure 3.2b, les multiplicateurs de Lagrange du modèle EF et HHR sont représentés pour différentes valeurs de $\mu \notin \mathcal{P}_{tr}$. Cette figure confirme le très bon niveau de précision locale des multiplicateurs de Lagrange du modèle HHR.



(a) Domaine d'intégration réduit (RID).

(b) Multiplicateurs de Lagrange pour différentes valeurs de $\mu \notin \mathcal{P}_{tr}$.

FIGURE 3.2 – Demi-disques de Hertz. Modèle HHR : RID et multiplicateurs de Lagrange $\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$.

Pour évaluer plus en détail la précision de la méthode HHR nous calculons les erreurs $e_u(\mu)$, $e_\lambda(\mu)$ et $e_{ener}(\mu)$ sur un ensemble de 101 points de l'espace \mathcal{P} (incluant les 31 points de \mathcal{P}_{tr}). Les résultats sont représentés sur la figure 3.3. La solution primale est toujours approximée avec précision, avec des erreurs relatives en norme 2 en dessous de 0.05% ($5 \cdot 10^{-4}$) sur la totalité de l'espace paramétrique. La solution duale est elle aussi estimée précisément avec de 0.1% à 0.8% d'erreurs relatives en norme 2. L'erreur sur le minimum d'énergie est très satisfaisante, en dessous de 10^{-4} sur Ω , même en dehors de l'espace d'entraînement. Les erreurs relatives primales en norme H1 sont légèrement supérieures à celles en norme 2, mais restent inférieures à 2×10^{-3} sur la totalité de l'espace paramétrique.

Dans [Benaceur et al., 2020], la méthode d'algorithme CPG (Cone-Projected Greedy) a été appliquée sur le même cas test, avec le même espace d'entraînement et le même seuil POD. La méthode CPG présente une erreur sur le minimum d'énergie entre 10^{-6} et 10^{-3} , et entre 10^{-5}

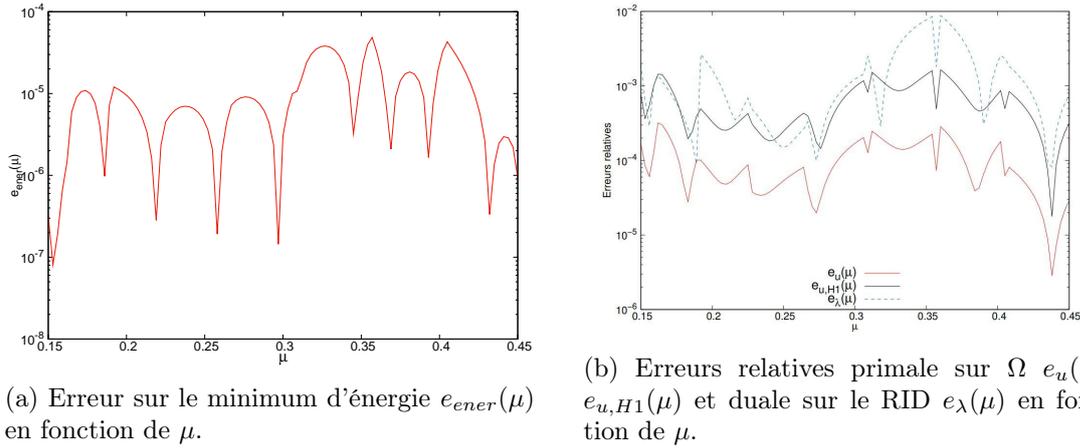


FIGURE 3.3 – Demi-disques de Hertz. Erreurs HHR évaluées sur 101 points. $\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$.

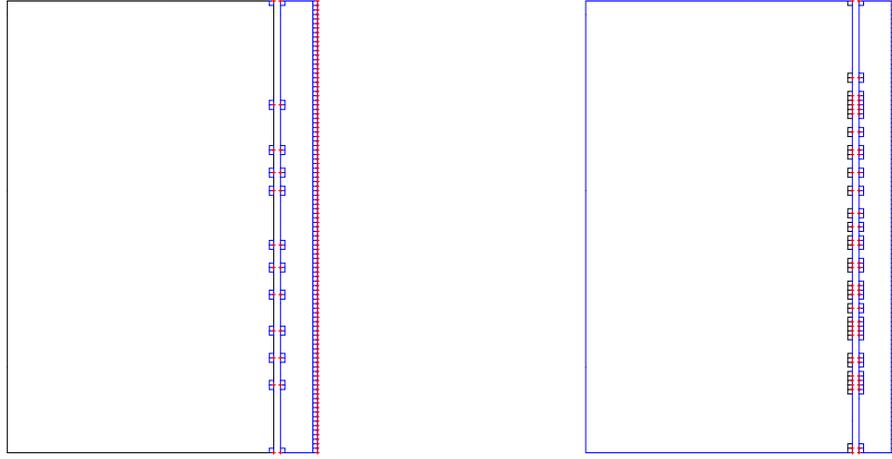
et 4.10^{-3} pour l'erreur relative (en norme H1) sur le champ des déplacements. Ces erreurs sont calculées sur l'espace d'entraînement uniquement. Les erreurs sur les multiplicateurs de Lagrange ne sont pas présentées. Comparées aux erreurs de la figure 3.3, cela démontre la précision de la méthode HHR proposée, même en dehors de l'espace d'entraînement.

3.5.2 Cas test d'interaction pastille-gaine en axisymétrique

Dans cette section nous allons considérer le cas test introduit en section 1.5.2 représentant l'interaction pastille-gaine (IPG) en 2D axisymétrique. L'espace paramétrique considéré est $\mathcal{P} = [5, 200]\text{MPa} \times [0.6, 6.0]\text{(mm)}$. Il s'agit d'un "grand" espace paramétrique car il peut conduire à de grandes variations de la pression de contact ainsi qu'à de grandes variations de la surface de contact active.

Pour construire le modèle HHR, nous utilisons un espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr} de 500 snapshots distribués régulièrement sur l'espace paramétrique. Du fait des grandes variations induites par l'espace paramétrique, nous utilisons un seuil POD de $\epsilon = 10^{-6}$ pour initialement limiter la dimension de la BR primale à $\ell = 36$. Nous appliquons l'algorithme DEIM à la base réduite primale pour construire le RID en ajoutant une région d'intérêt sur l'extérieur de la gaine pour prendre en compte les conditions au bord de Neumann. Le RID obtenu est représenté sur la figure 3.4a avec un jeu amplifié pour une meilleure visualisation. Le RID contient $N_\lambda^C = 12$ points de contact potentiels. Ce RID conduit à des précisions insatisfaisantes sur les solutions primales. Par conséquent nous élargissons le RID en utilisant l'algorithme DEIM sur une BR duale POD obtenue avec un seuil POD de $\epsilon = 4.10^{-4}$. Cette base réduite duale est uniquement utilisée pour la construction du RID, cf. section 1.4.3). Le RID étendu est présenté en figure 3.4b. Dans ce cas il contient $N_\lambda^C = 34$ relations de contact. L'avantage d'utiliser l'algorithme DEIM sur une BR POD duale est de sélectionner uniquement des DDLs de la surface de contact.

Par la suite, les résultats présentés se concentrent sur le modèle HHR avec le RID étendu ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$) et sur des paramètres en dehors de l'espace d'entraînement. Il est important de savoir que la condition de solvabilité inf-sup/LBB n'est pas vérifiée initialement dans ce contexte. Nous allons donc pouvoir étudier les méthodes d'enrichissement présentées en section 3.4 sur ce cas test.


 (a) RID obtenu avec l'algorithme DEIM sur la BR primale. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 12$)

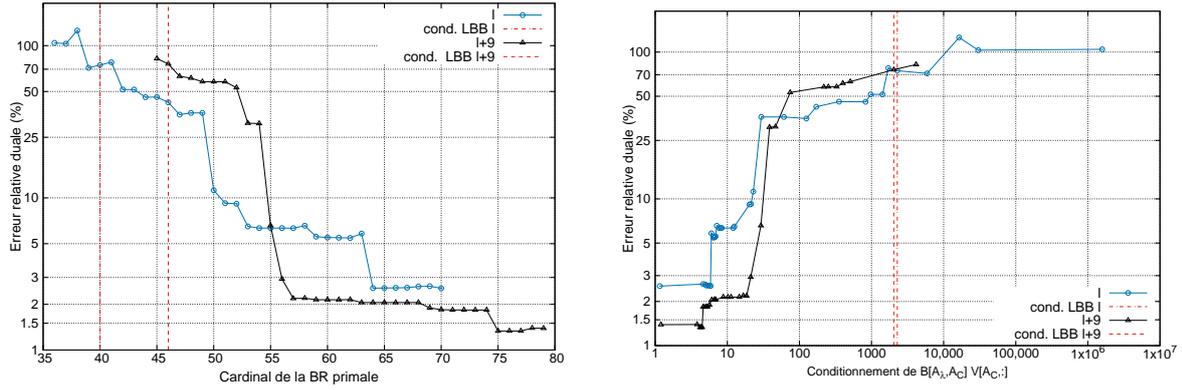
 (b) RID étendu avec l'algorithme DEIM sur une BR duale POD. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$)

FIGURE 3.4 – IPG axisymétrique. Domaine d'intégration réduit.

3.5.2.a Etude numérique des méthodes d'enrichissement

Nous nous focalisons dans cette section sur l'étude numérique des méthodes d'enrichissement de la BR primale présentées en section 3.4. Même si la condition de solvabilité n'est pas vérifiée initialement, une solution numérique peut être obtenue, cette dernière montre une erreur duale très forte. La figure 3.5 montre que le respect de la condition inf-sup/LBB seul (indiqué par des lignes rouges), ne suffit pas à obtenir une précision satisfaisante sur les solutions duales. Avec enrichissement par fonctions de forme EF, la condition de solvabilité est respectée pour $\ell = 40$ (4 fonctions de forme ajoutées), mais pour un conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée supérieur à 1000, menant à des erreurs relatives duales de plus de 70%. L'enrichissement additionnel de la BR primale basé sur l'amélioration du conditionnement permet d'améliorer drastiquement les erreurs relatives duales, jusqu'à obtenir 2% d'erreur pour le point $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$ de l'espace paramétrique considéré. Les erreurs relatives duales deviennent significativement plus petites pour un conditionnement autour de 10, cf. figure 3.5b. Pour $\kappa_{max} = 10$, l'algorithme glouton d'enrichissement conduit à $\text{card}(\underline{\bar{V}}) = 55$ et une erreur relative duale de 6.3%. La stratégie d'enrichissement avec modes POD et EF, introduite en section 3.4.2, peut être comparée avec la méthode d'enrichissement basée sur les modes EF que nous venons d'illustrer. Nous fixons $\kappa_{max} = 1$ (enrichissement maximal) pour les deux approches. Nous reportons dans le tableau 3.1 les résultats obtenus pour différents seuils POD ϵ_{POD2} pour l'enrichissement par modes POD et EF sur deux points de l'espace paramétrique en dehors des snapshots \mathcal{P}_{tr} .

La stratégie d'enrichissement par modes POD+EF nous permet d'atteindre des erreurs relatives plus petites que l'approche avec uniquement des modes EF. En fixant un conditionnement maximal à $\kappa_{max} = 1$, l'enrichissement est maximal et conduit naturellement la stratégie d'enrichissement par modes POD à des cardinaux de BR primale plus élevés (cf. tableau 3.1). Concernant les erreurs, nous observons que pour le point déjà bien traité par la méthode d'enrichissement par modes EF ($P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$), quelques modes POD sont suffisants pour diminuer l'erreur relative duale. Cependant, quand les erreurs relatives duales sont grandes avec l'enrichissement EF, il est utile d'ajouter plus de modes POD pour diminuer les erreurs duales. Par exemple, pour le point $P_1 = 30\text{MPa}$ et $h_1 = 5.25\text{mm}$, ajouter 9 modes POD (correspondant à un seuil $\epsilon_{POD2} = 3.5 \cdot 10^{-7}$) permet de diviser les erreurs relatives duales par quatre. Nous pouvons retenir du tableau 3.1 que le choix de ϵ_{POD2} n'est pas trivial étant donné que des valeurs trop basses peuvent conduire à des phénomènes associés à l'overfitting, dégradant la précision des solutions.



(a) Erreur relative duale en fonction du nombre de modes EF ajoutés à la BR primale enrichie ('l+9') ou non ('l').

(b) Erreur relative duale en fonction du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour les stratégies d'enrichissement.

FIGURE 3.5 – IPG axisymétrique. Etude des deux stratégies d'enrichissement : par modes EF uniquement ('l') et par POD+EF ('l+9', 9 modes POD ajoutés), avec $\ell = 36$ et $N_\lambda^C = 34$. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$.

	nb mod. POD ajout.	$\epsilon_{\mathcal{POD}2}$ $\times 10^{-7}$	$\kappa(\underline{B}[A_\lambda, A_c] \underline{V}[A_c, :])$ après enri. POD	$\bar{\ell} = \text{card}(\underline{V})$ final	$P_1 = 170\text{MPa}$ $h_1 = 3.2\text{mm}$		$P_1 = 30\text{MPa}$ $h_1 = 5.25\text{mm}$	
					Err. rel.		Err. rel.	
					prim.	duale	prim.	duale
Enr. EF	0	—	$1.5 \cdot 10^6$	70	1.0%	2.5%	2.9%	21%
Enr. POD+EF	3	7.5	$2.3 \cdot 10^4$	73	2.5%	1.8%	0.5%	26%
Enr. POD+EF	6	5	$4.5 \cdot 10^3$	76	0.5%	1.6%	1.6%	16%
Enr. POD+EF	9	3.5	$4.1 \cdot 10^3$	79	0.1%	1.3%	3.5%	5.6%
Enr. POD+EF	12	2.7	$3.4 \cdot 10^3$	82	1.4%	1.7%	2.5%	6.7%
Enr. POD+EF	15	2.2	878	85	1.9%	1.7%	1.3%	5.8%
Enr. POD+EF	18	1.7	386	88	1.1%	1.4%	0.2%	5.3%
Enr. POD+EF	21	1.3	383	91	7.8%	1.8%	13.4%	9.3%
Enr. POD+EF	23	1.1	330	93	0.8%	1.3%	16%	9.9%
Enr. POD+EF	26	0.9	328	96	12%	1.3%	1.5%	9.5%

TABLEAU 3.1 – IPG axisymétrique. Etude des stratégies d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF ($\ell = 36$ et $N_\lambda^C = 34$). $\kappa_{max} = 1$.

Nous pouvons également remarquer qu'enrichir la BR primale uniquement avec des modes POD ne sera pas efficace pour diminuer le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée.

Sur la figure 3.5, les résultats de l'algorithme glouton sur la BR primale avec 9 modes POD ajoutés (noté 'l+9' dans la légende) sont présentés. Pour une dimension de BR primale équivalente, l'approche POD+EF devient intéressante uniquement pour de petites erreurs relatives duales (cf. figure 3.5a). Cependant, en regardant le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée, la méthode POD+EF améliore toujours la précision duale pour un conditionnement fixé (cf. figure 3.5b) inférieur à 100. Il est intéressant de voir que la condition de solvabilité est respectée pour un conditionnement similaire.

Nous présentons maintenant des résultats sur les figures 3.6, 3.7 et 3.8 les comparaisons des solutions en u_r , en contraintes de Von Mises déduites des déplacements et sur les multiplicateurs de Lagrange, sur le point de l'espace paramétrique $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$,

pour les modèles EF et HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour un conditionnement maximal de κ_{max} . Les résultats des deux modèles HHR en u_r et en contraintes de Von Mises sont très satisfaisants et sont indiscernables à l'œil nu des résultats EF. Dans ce cas, les erreurs relatives en norme 2 sont également très bonnes, avec une erreur relative légèrement meilleure pour le modèle HHR avec enrichissement POD+EF. C'est en s'intéressant aux solutions duales (cf. figure 3.8) que la méthode d'enrichissement POD+EF apporte une amélioration significative, en proposant une erreur relative de 2.1% au lieu de 6.3% pour la méthode avec enrichissement EF uniquement. C'est en particulier autour de la zone de changement de statut de contact que les solutions duales sont améliorées par la méthode POD+EF (cf. zoom figure 3.8).

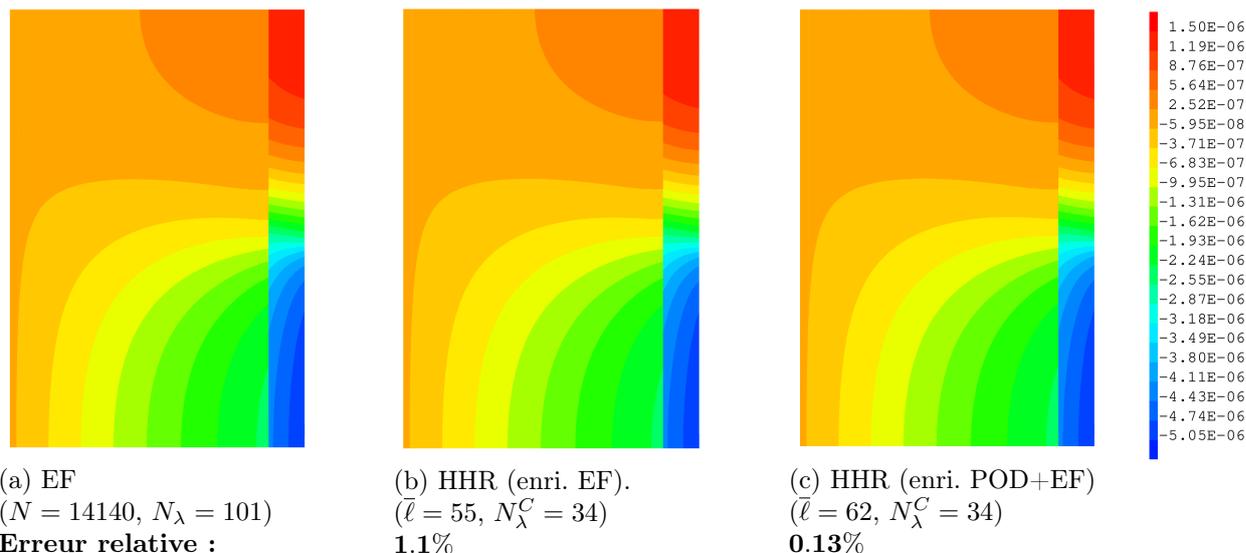


FIGURE 3.6 – IPG axisymétrique. Comparaison des solutions en u_r pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$.

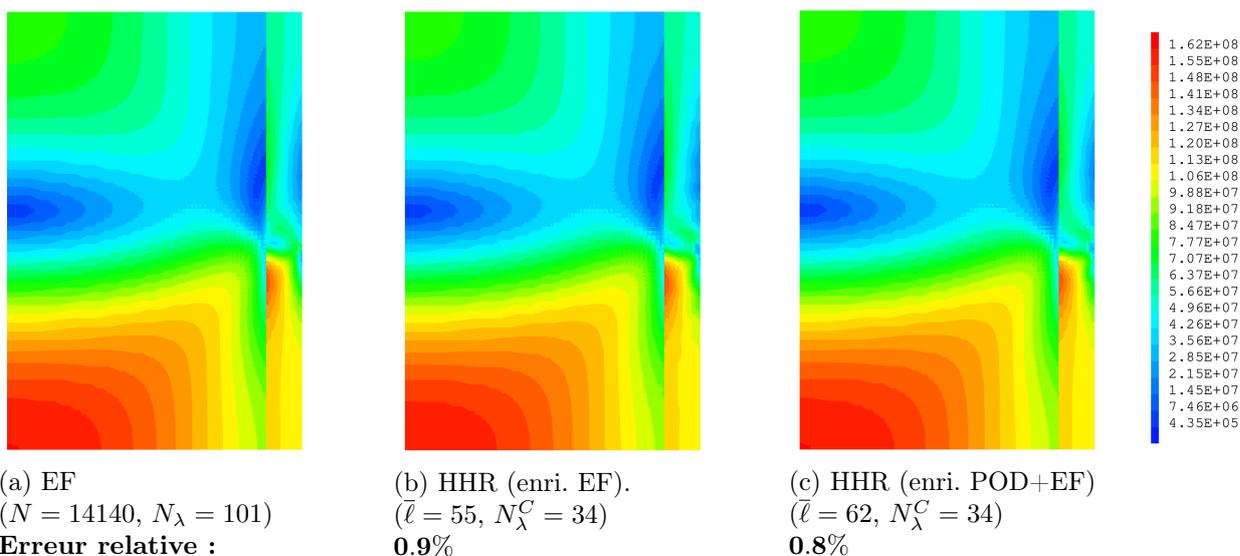


FIGURE 3.7 – IPG axisymétrique. Comparaison des solutions en contraintes de Von Mises (déduites des déplacements) pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$.

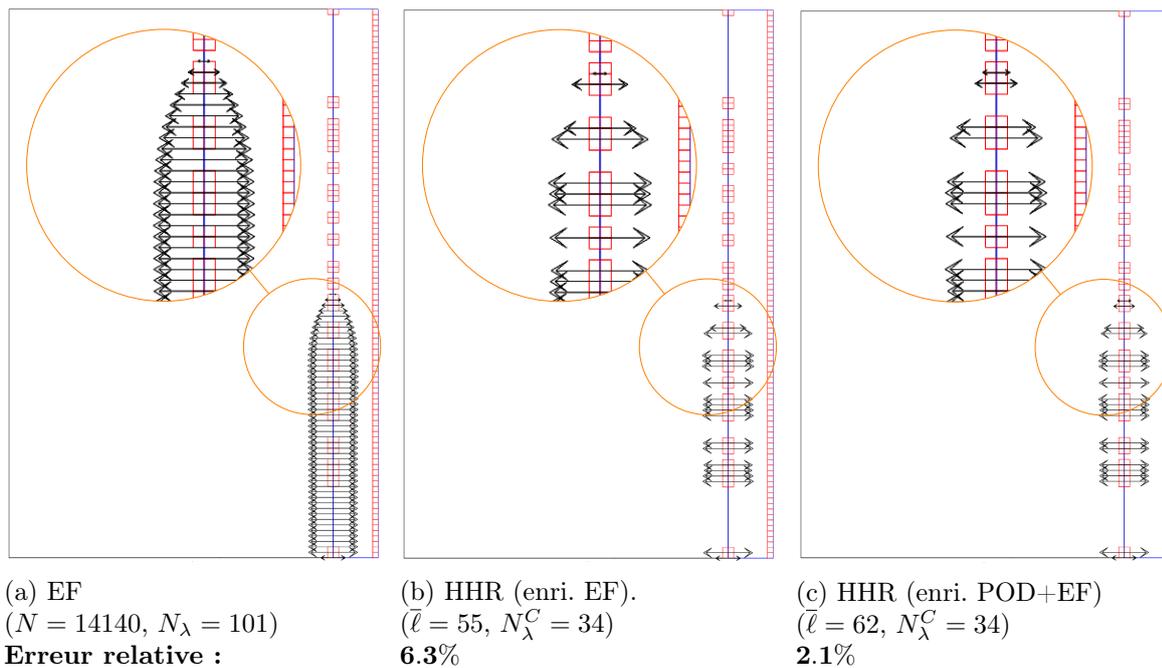


FIGURE 3.8 – IPG axisymétrique. Comparaison des solutions duales pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$.

Les deux méthodes d'enrichissement sont maintenant comparées sur la totalité de l'espace paramétrique. Pour cela, les solutions HHR et EF sont calculées sur 3100 points, régulièrement distribués sur l'espace paramétrique, et les erreurs sont calculées pour obtenir des cartes d'erreurs relatives sur l'espace paramétrique. Nous fixons un conditionnement maximum à $\kappa_{max} = 10$, qui semble être un bon compromis entre précision et dimension des BR primales enrichies.

Les cartes des erreurs relatives duales sont présentées en figure 3.9 pour la stratégie d'enrichissement EF (Fig. 3.9a) et la stratégie POD+EF avec 9 modes POD supplémentaires (Fig. 3.9b). Cette figure montre clairement une amélioration liée à la méthode d'enrichissement POD+EF. La dimension finale de la BR primale est plus grande de 7 vecteurs colonnes avec la méthode POD+EF (au lieu de 9), ce qui indique que la minimisation du conditionnement est légèrement facilitée par l'ajout des modes POD.

Pour les deux méthodes d'enrichissement, il y a de fortes erreurs relatives duales sur la partie gauche des cartes d'erreurs, pour des faibles valeurs de pression P_1 (contact affleurant). Cela met en évidence la complexité de réduire le problème de façon efficace sur un tel espace paramétrique, où la pression de contact peut être forte, faible ou même nulle, et peut s'appliquer sur de grandes ou petites surfaces.

Dans le tableau 3.2 nous proposons les temps de résolutions moyens des modèles EF et HHR avec les deux stratégies d'enrichissement (calculés sur les mêmes paramètres que les cartes d'erreurs relatives de la figure 3.9). Pour le modèle EF nous présentons le temps de résolution moyen pour une version "native" du solveur EF Cast3M et pour une version "PLEIADES" correspondant à la configuration du solveur dans la plateforme logicielle PLEIADES. La principale modification qui nous concerne pour nos applications est la désactivation du super-élément (cf. Complément de Schur). Cette option a été désactivée de PLEIADES pour des questions de stabilité des résultats et des problèmes de résolution de problèmes non-linéaires. Le modèle HHR ne vérifiant pas les conditions nécessaires pour pouvoir utiliser un super-élément pour accélérer la résolution, la version EF "PLEIADES" est plus adaptée pour une comparaison des temps de calcul. Nous observons dans le tableau 3.2 que les temps de ré-

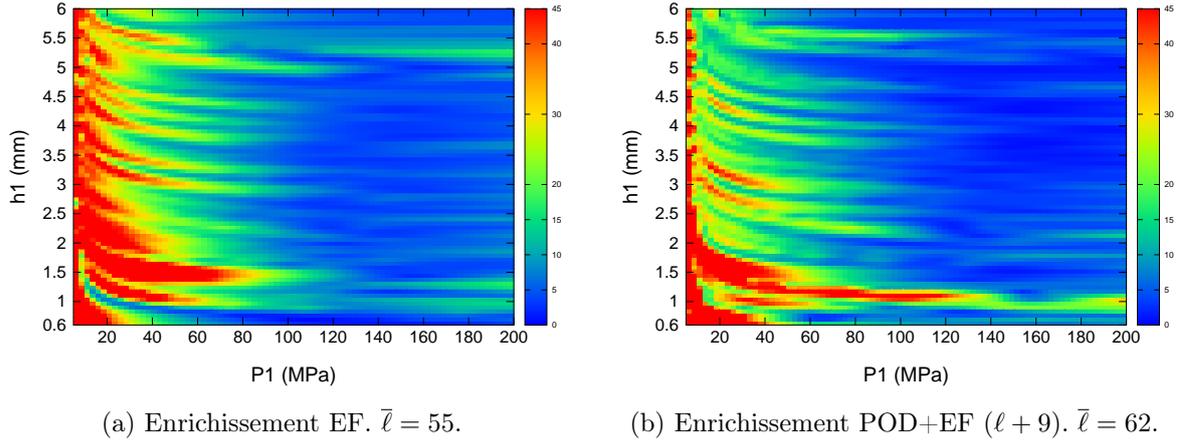


FIGURE 3.9 – IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_{\chi}^C = 34$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$.

solutions moyens pour les modèles HHR avec enrichissement EF et POD+EF sont plus petits que pour les deux configurations EF. Nous remarquons également que le modèle HHR avec enrichissement EF présente un temps de résolution moyen plus petit que celui du modèle HHR avec enrichissement EF+POD. En effet l'ordre plus élevé du second modèle HHR conduit à une augmentation du temps de résolution moyen vis à vis du premier. Cette observation nous ramène à l'équilibre classique entre précision et temps de résolution, cet équilibre est également à trouver pour le modèle HHR. En terme d'accélération nous avons une accélération intéressante vis à vis du modèle EF pour la version "native" ($\simeq 3$) et très intéressante vis à vis du modèle EF "PLEIADES" ($\simeq 20$).

	Temps moyen de résolution (ms)	Accélération
EF (CAST3M natif)	704	×
EF "PLEIADES"	4829	×
HHR (EF) $\bar{\ell} = 55$	220	3.2/21.9
HHR (POD+EF) $\bar{\ell} = 62$	270	2.6/17.8

TABLEAU 3.2 – IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d'enrichissement par fonctions de formes EF et/ou modes POD appliquées avec $\kappa_{max} = 10$. ($\ell = 36$ et $N_{\chi}^C = 34$). 3100 points de tests.

3.5.2.b Résultats sur la reconstruction des solutions duales

Nous présentons sur la figure 3.10 les cartes d'erreurs relatives pour les solutions duales reconstruites selon les deux méthodes d'enrichissement avec conditionnement maximum fixé à $\kappa_{max} = 10$. La reconstruction des solutions duales réduites en dehors du RID est réalisée avec la méthode introduite au chapitre 1 en section 1.4.6 (problème de minimisation résolu par la méthode des moindres carrés non-négatifs). Les erreurs relatives sur les solutions reconstruites sont globalement similaires à celles sur le RID, cf. figure 3.9. Les erreurs sont surtout localisées sur les mêmes endroits de l'espace paramétrique (faibles pressions de contact P_1). Cependant on observe quand même une grande augmentation des erreurs pour les faibles valeurs du paramètres h_1 (entre 0.6 et 1.5 mm). On peut expliquer ce phénomène en observant le RID et en remarquant qu'il n'y a aucun nœud de contact dans le RID entre le bas de la gaine et environ 1.5mm. Cette absence de nœuds ne permet pas à la méthode de reconstruction de produire de bonnes solutions duales reconstruites pour ces valeurs de h_1 .

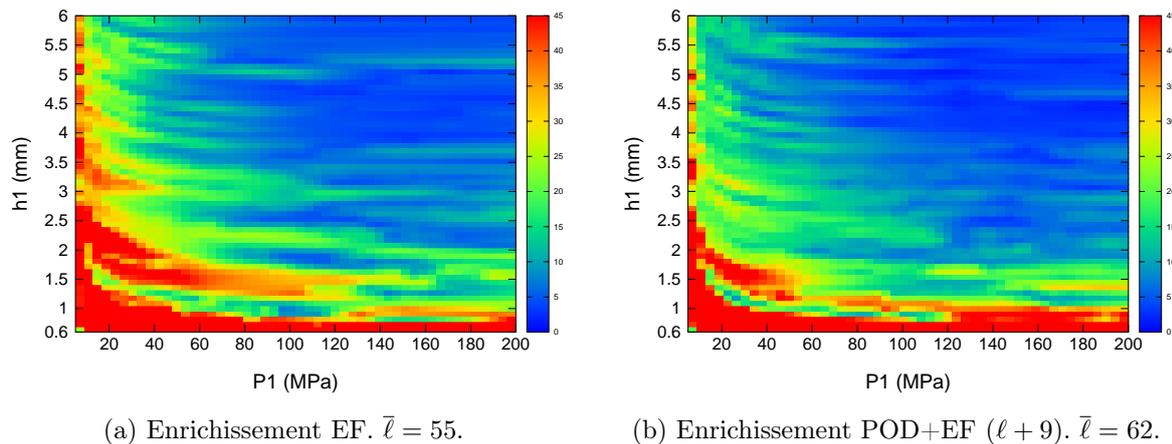


FIGURE 3.10 – IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives sur les solutions duales reconstruites (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$.

Les observations sont les mêmes pour les deux stratégies d'enrichissement, la méthode POD+EF ne présente pas d'amélioration sur les solutions reconstruites.

Sur la figure 3.11, nous présentons les solutions duales pour deux points de l'espace para-

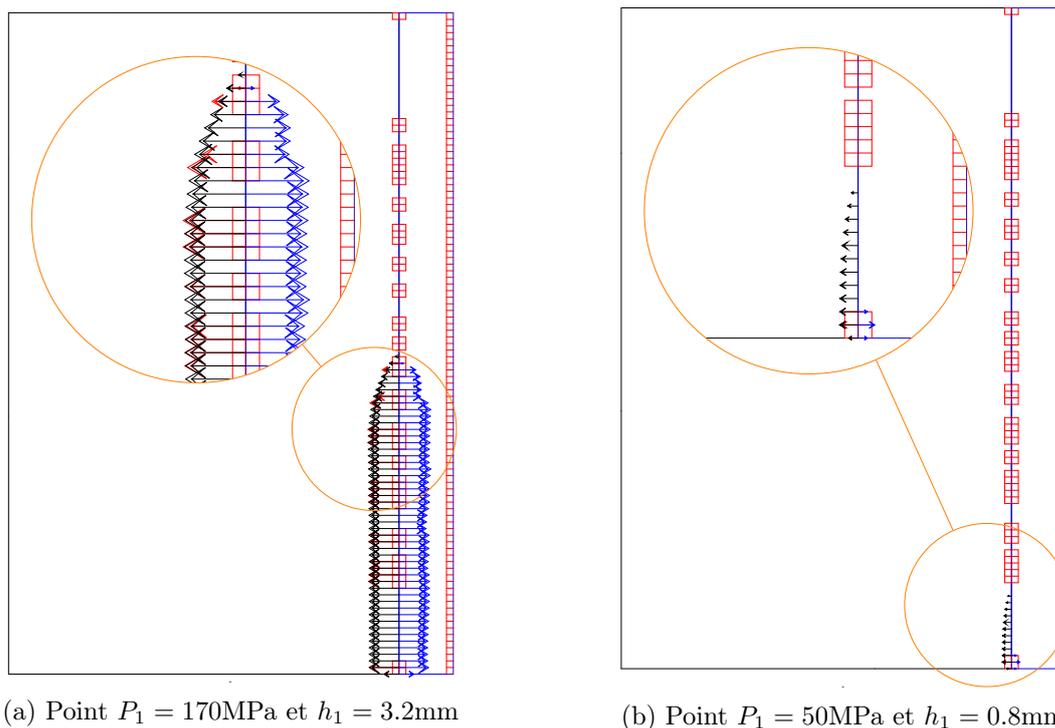


FIGURE 3.11 – IPG axisymétrique. Solutions duales HHR (rouges), HHR reconstruites (bleues) et EF (noires) pour deux points de l'espace paramétrique. Modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$ et $\bar{\ell} = 55$ (Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$.)

métrique. Les solutions EF (flèches noires) et HHR (flèches rouges) sont présentées à gauche tandis que les solutions duales HHR reconstruites (flèches bleues) sont présentées à droite. Sur la figure 3.11a, pour le point $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$ on observe des résultats globalement satisfaisants pour la reconstruction des forces même si le haut de la zone de contact (cf. zoom) est assez mal estimé. Pour les solutions au point $P_1 = 50\text{MPa}$ et $h_1 = 0.8\text{mm}$, présentées sur la figure 3.11b, la reconstruction des solutions en dehors du RID n'est pas du

tout efficace. Les forces sont nulles sur toute la partie où il n'y a pas d'éléments du RID. Cette dernière figure permet d'expliquer l'apparition de grandes erreurs dans certaines zones de l'espace paramétrique lors de la reconstruction.

3.5.2.c Influence de la taille du RID sur les méthodes d'enrichissement

Dans cette section nous allons nous intéresser à l'impact de la dimension du RID sur les méthodes d'enrichissement. En effet, l'enrichissement avec les fonctions de formes EF se fait avec des ddls associés à la surface de contact du RID, i.e. de l'ensemble \mathcal{A}_c (cf. (1.58)). Changer le RID conduit bien souvent à changer \mathcal{A}_c , et en conséquence cela modifie la condition inf-sup/LBB et les stratégies d'enrichissement. Nous allons donc élargir le RID pour considérer plus de points de contact. Pour cela nous utilisons simplement un seuil POD plus petit sur la BR duale POD déjà utilisée pour étendre le RID, ce seuil est cette fois fixé à $\epsilon = 10^{-4}$. Avec cette configuration, le RID contient $N_\lambda^C = 60$ relations de contact, avec toujours $\ell = 36$ POD modes dans la BR primale. Le nouveau RID étendu est illustré sur la figure 3.12.

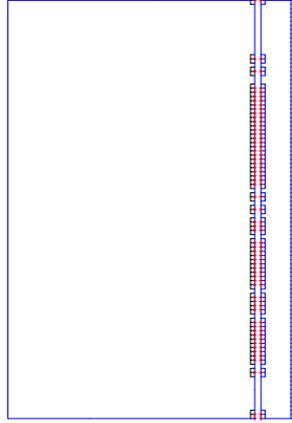


FIGURE 3.12 – IPG axisymétrique. Domaine d'intégration réduit étendu. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 60$)

La condition de solvabilité du modèle HHR pour ce nouveau RID requiert un enrichissement de la BR primale plus important, avec une condition vérifiée pour une dimension $\bar{\ell} = 62$ avec l'enrichissement EF, 26 modes EF supplémentaires dans la BR primale. Cependant, comme nous avons observé précédemment, pour cette BR primale qui assure uniquement le respect de la condition de solvabilité, les solutions duales ne sont pas satisfaisantes. Un enrichissement plus grand est requis afin de diminuer le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée.

Sur la figure 3.13, nous présentons les cartes d'erreurs relatives duales sur l'espace paramétrique pour les méthodes d'enrichissement EF et POD+EF avec un conditionnement maximal κ_{max} fixé à 10 comme précédemment. Le résultat est une BR primale de $\bar{\ell} = 83$ pour l'enrichissement EF, et de $\bar{\ell} = 91$ pour la POD+EF avec 9 modes POD supplémentaires. Comparée à la figure 3.9a, la première conclusion est que l'augmentation de N_λ^C n'améliore pas les erreurs relatives duales pour la stratégie d'enrichissement EF (cf. Fig. 3.13a). En revanche, nous observons une amélioration significative pour la méthode POD+EF (cf. figures 3.9b et 3.13b).

Il y a un point important à rappeler lorsque nous comparons les résultats des erreurs relatives entre les deux RID. Le RID avec $N_\lambda^C = 60$ contient bien plus de nœuds duaux (i.e. de multiplicateurs de Lagrange) que celui avec $N_\lambda^C = 34$. Le calcul de l'erreur relative duale, cf. éq. (3.7), implique plus de forces de contact dans le cas $N_\lambda^C = 60$.

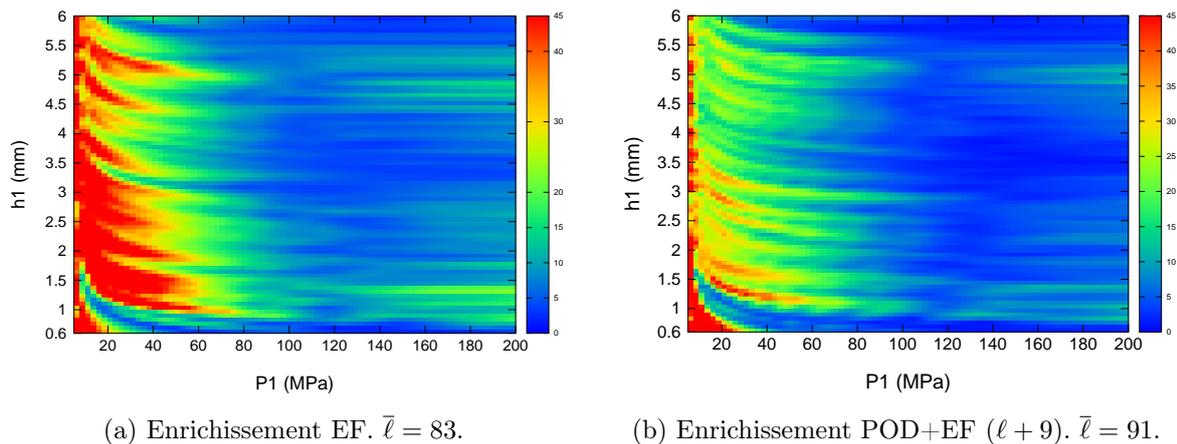


FIGURE 3.13 – IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 60$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$.

Dans le tableau 3.3 nous proposons les temps de résolutions moyens des modèles EF et HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour les modèles avec le RID étendu ($N_\lambda^C = 60$). Nous observons dans le tableau 3.3 que les temps de résolutions moyens pour les modèles HHR avec enrichissement EF et POD+EF sont plus grands que pour la configuration EF natif. Pour la comparaison avec la version EF "PLEIADES", il y a bien une accélération des temps de calcul avec les modèles HHR, mais elle est bien plus petite que celle observée pour le RID avec $N_\lambda^C = 34$ (de l'ordre de 5 ici, au lieu de 20 auparavant). L'ordre dual plus élevé dans le cas du RID élargi, induit également un ordre primal plus élevé (du fait de l'enrichissement), et cela conduit à une augmentation conséquente du temps de résolution moyen. Par ailleurs ce tableau souligne l'intérêt d'utiliser un solveur de système linéaire adapté à la méthode HHR au lieu d'utiliser un solveur EF.

	Temps moyen de résolution (ms)	Accélération
EF (CAST3M natif)	704	×
EF "PLEIADES"	4829	×
HHR (EF) $\bar{\ell} = 83$	919	× /5.25
HHR (POD+EF) $\bar{\ell} = 91$	1092	× /4.42

TABEAU 3.3 – IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF appliquées avec $\kappa_{max} = 10$ pour le RID élargi. ($\ell = 36$ et $N_\lambda^C = 60$). 3100 points de tests.

Les forces de contact pour le point $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$, pour les deux configurations de RID, avec enrichissement maximal (i.e. $\kappa_{max} = 1$), sont représentées en figure 3.14. Dans les deux situations, les solutions duales sont très précises localement sur le RID, avec des erreurs relatives à 2.6% pour $N_\lambda^C = 60$ et 2.5% pour $N_\lambda^C = 34$. Le RID étendu avec $N_\lambda^C = 60$ présente plus de forces de contact, permettant un avantage certain pour l'interprétation physique de la simulation, mais également pour la reconstruction des solutions duales (moins de forces à reconstruire). Cependant, ces avantages viennent au prix d'une BR primale qui grandit avec N_λ^C .

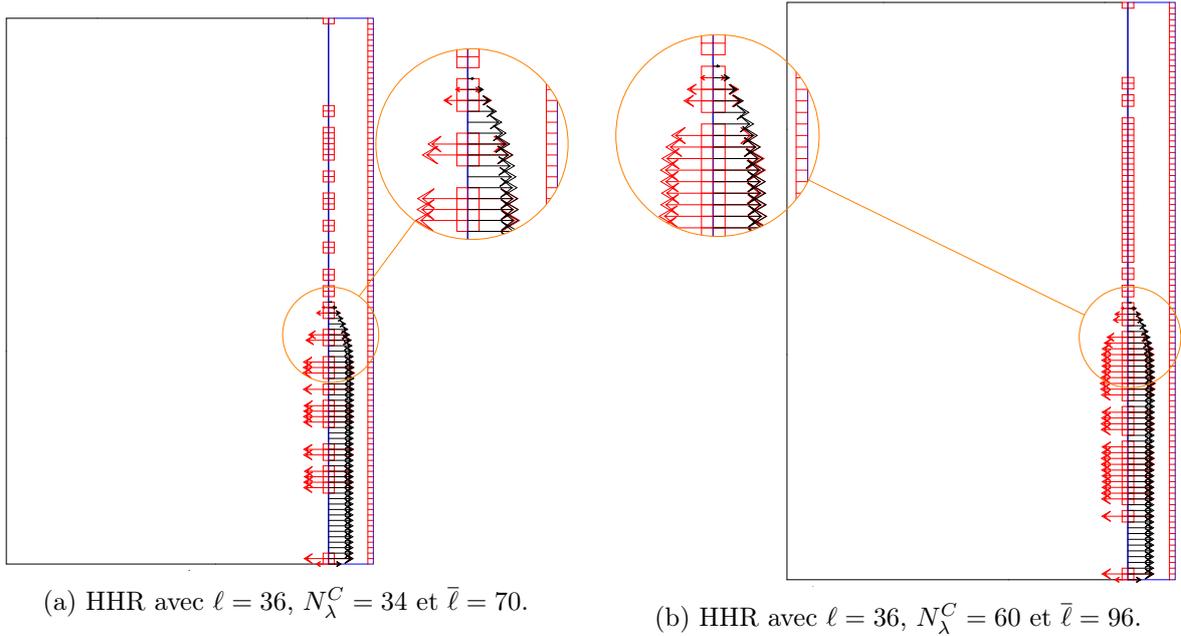


FIGURE 3.14 – IPG axisymétrique. Forces de contact pour $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$. Modèle HHR avec enrichissement EF (flèches rouges) et modèle FOM (flèches noires). (Forces superposées du côté droit).

3.6 Conclusion

Nous avons proposé deux stratégies d'enrichissement de la base réduite primale pour le modèle HHR. Ces stratégies visent à s'assurer du respect de la condition de solvabilité par le modèle HHR (si non vérifiée initialement) tout en améliorant la précision des solutions duales obtenues. Pour cela, la corrélation entre ce conditionnement et la précision duale du modèle réduit a été mise en évidence numériquement. Ainsi, l'enrichissement procède à une minimisation du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée. Les enrichissements peuvent être réalisés soit à partir de fonctions de forme EF soit de modes POD (SVD moins tronquée) et de modes EF. La très grande efficacité de ces stratégies a été démontré sur des exemples académique et industriel présentant une large variation de la zone de contact active et de la pression de contact. La stratégie POD+EF s'avère plus intéressante pour diminuer les erreurs duales mais au prix d'un coût de calcul un peu plus important. L'augmentation de la dimension de la BR primale peut devenir un frein à l'obtention de résultats satisfaisants sur la totalité de l'espace paramétrique quand le cas test est complexe.

Chapitre 4

Modèles d'ordres réduits locaux via une méthode de clustering

Dans ce chapitre nous proposons une stratégie de clustering sur l'espace paramétrique pour construire des modèles d'ordres réduits locaux. Cette stratégie, applicable aussi bien sur une grille de snapshots régulière qu'irrégulière, approche la variété non-linéaire des solutions du problème de mécanique du contact de manière linéaire par morceaux sur l'espace paramétrique. Sur chaque cluster de l'espace paramétrique, discrétisé par un ensemble de snapshots, un modèle hyper-réduit hybride local est construit. La sélection du modèle local adapté à un paramètre donné est réalisée dans la partie online par une méthode de classification. Cette stratégie est donc peu intrusive, ne modifiant pas la construction du modèle ou le solveur, et impactant principalement la partie offline sans ralentir la partie online. Les résultats numériques obtenus sont très satisfaisants et démontrent la puissance de cette stratégie.

La méthode de clustering utilisée est dérivée de [Daniel *et al.*, 2020], elle constitue une première réponse aux limitations de la barrière de Kolmogorov [Peherstorfer, 2022] et de la limitation d'approximation des multiplicateurs de Lagrange mis en évidence dans [Kollepara *et al.*, 2023]

Les méthodes et la majorité des résultats présentés dans ce chapitre sont contenus dans la publication [Le Berre *et al.*, 2022a]. Ces travaux ont par ailleurs été présentés lors de la conférence CSMA 2022 [Le Berre *et al.*, 2022b].

Sommaire

4.1	Motivations	91
4.2	Clustering sur l'espace paramétrique	91
4.2.1	A partir de snapshots réguliers sur l'espace paramétrique	91
4.2.2	A partir de snapshots irréguliers sur l'espace paramétrique	93
4.3	Résultats numériques du clustering	94
4.3.1	Clustering sur grille régulière	94
4.3.2	Clustering sur grille irrégulière	97
4.4	Conclusion	101

4.1 Motivations

Dans le chapitre 3, des méthodes d’enrichissement de la BR primale ont montré leurs capacités à diminuer les erreurs duales du modèle HHR, notamment sur un cas test pour lequel l’espace paramétrique peut conduire à de grandes variations de la pression de contact et de la zone de contact. Cependant, comme nous avons pu l’observer sur la figure 3.9, il reste des zones de l’espace paramétrique où l’erreur relative duale est très élevée. Cela peut en partie s’expliquer par la présence de contact affleurant dans le cas test (pour les pressions P_1 entre 5 et 10 MPa), qui est assez complexe à approcher en mécanique du contact. Les deux solutions naturelles pour réduire ces erreurs (agrandir la taille du RID et/ou de la BR primale) ont pour désavantage d’augmenter l’ordre du modèle réduit. Cette augmentation peut devenir contre productive dans le cadre de la réduction d’ordre de modèle.

Dans le chapitre 2, nous avons démontré que les erreurs duales étaient bornées en fonction de la constante LBB et des erreurs primales. Nous pouvons donc affirmer que diminuer l’erreur primale du modèle HHR va également améliorer la précision duale de la méthode. Pour ce faire, l’idée de ce chapitre est d’approcher la variété non-linéaire des solutions primales de façon plus précise (linéaire par morceaux), tout en utilisant une dimension de BR comparable.

Dans le cas des problèmes non-linéaires et non réguliers comme ceux de la mécanique du contact, les stratégies de clustering peuvent offrir une possibilité de traiter la non-linéarité par morceaux à partir d’approximations d’ordre réduit (de rang faible) sur différents clusters de l’espace paramétrique [Daniel *et al.*, 2020]. En partitionnant un grand espace paramétrique, nous pouvons ainsi espérer améliorer la précision des solutions pour une dimension de BR donnée.

Nous allons utiliser une métrique de Grassmann en s’appuyant sur la borne d’erreur primale démontrée au chapitre 2 en section 2.4.

Les motivations de la stratégie de clustering sont donc d’améliorer les précisions obtenues dans le chapitre 3, tout en conservant les mêmes ordres primaux et duaux.

4.2 Clustering sur l’espace paramétrique

La méthode consiste à calculer des bases réduites très locales dans l’espace des solutions primales, puis à regrouper dans un même cluster celles qui sont similaires.

4.2.1 A partir de snapshots réguliers sur l’espace paramétrique

La partie gauche du schéma de la figure 4.1 présente le plan de construction des modèles réduits locaux de la stratégie de clustering. L’espace d’entraînement \mathcal{P}_{tr} est un ensemble de snapshots de solutions primales constituant une grille régulière de l’espace paramétrique \mathcal{P} . Les solutions EF sont calculées pour chaque point de \mathcal{P}_{tr} .

Nous considérons ensuite une partition de \mathcal{P} composée de N_s éléments reposant sur la discrétisation induite par \mathcal{P}_{tr} . Sur chaque élément, une base orthonormée \underline{V}_j , $j = 1, \dots, N_s$, est obtenue par POD sur la matrice de snapshots locale associée à chaque élément de la partition. Cette matrice de snapshots locale est composée des snapshots associés aux points de \mathcal{P}_{tr} appartenant à l’élément j .

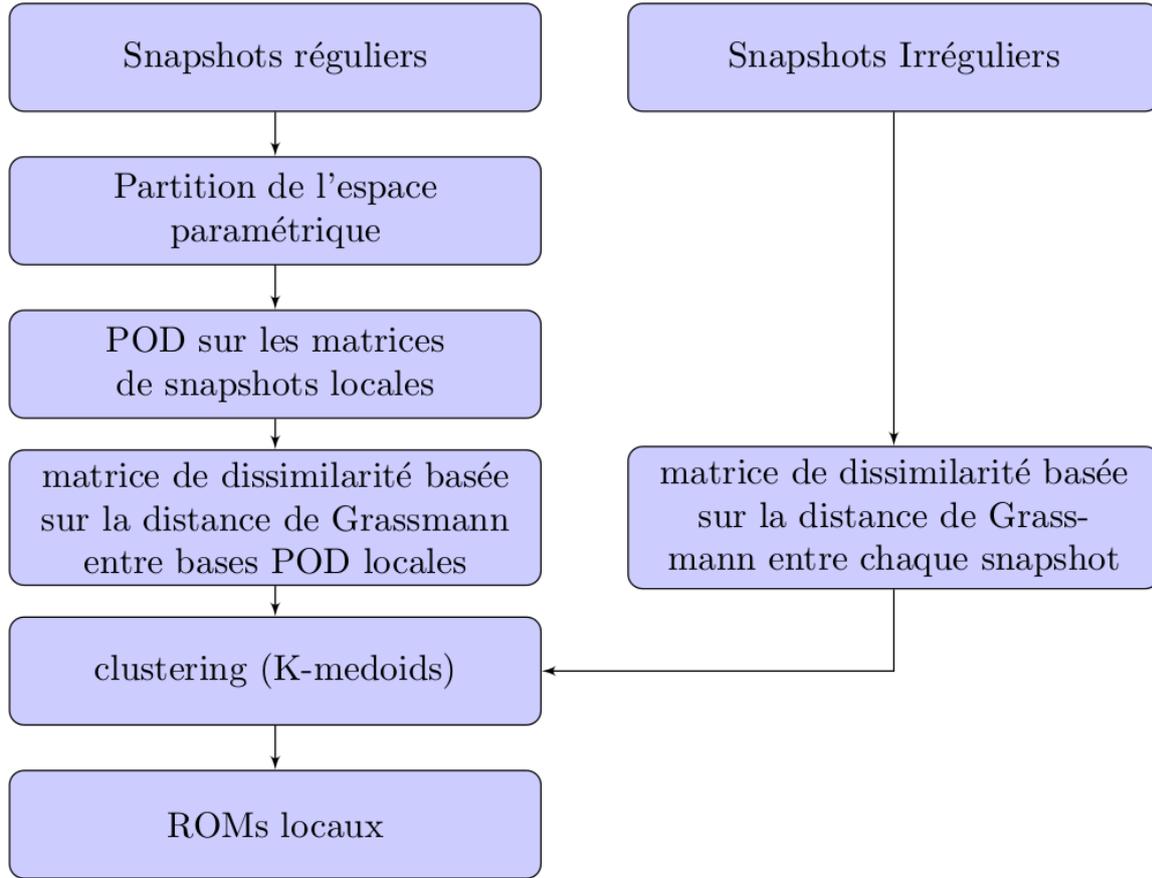


FIGURE 4.1 – Schéma explicatif de la partie offline de la stratégie de clustering de l'espace paramétrique.

Comme suggéré dans [Daniel *et al.*, 2020 ; Ryckelynck *et al.*, 2020], la distance de Grassmann $d_{Gr(\infty, \infty)}$ entre bases réduites est utilisée comme métrique pour le clustering des snapshots. La matrice de dissimilarité $\underline{\delta} \in \mathbb{R}^{M_s \times M_s}$ s'écrit :

$$\forall j_1, j_2 \in \llbracket 0, N_s \rrbracket^2, \quad (\underline{\delta})_{j_1, j_2} = d_{Gr(\infty, \infty)}(\underline{V}_{j_1}, \underline{V}_{j_2}), \quad (4.1)$$

avec

$$d_{Gr(\infty, \infty)}(\underline{A}_1, \underline{A}_2) = \left(\frac{\pi^2}{4} |a_1 - a_2| + \sum_{i=1}^{\min(a_1, a_2)} \alpha_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

où a_1 et a_2 sont les dimensions des bases réduites \underline{A}_1 et \underline{A}_2 (respectivement). Les angles α_i sont associés aux valeurs singulières Σ_{ii} , $1 < i \leq \min(a_1, a_2)$, de $\underline{A}_1^T \underline{A}_2$ par l'équation (4.3)

$$\Sigma_{ii} = \cos(\alpha_i). \quad (4.3)$$

Plus $(\underline{\delta})_{j_1, j_2}$ est petit, plus les sous-espaces vectoriels engendrés séparément par \underline{V}_{j_1} et \underline{V}_{j_2} sont proches. Un algorithme de clustering basé sur la matrice de dissimilarité $\underline{\delta}$ est enfin appliqué pour construire K clusters issus de la partition initiale de \mathcal{P} en N_s éléments. Nous considérons dans ce travail l'algorithme des k-medoids [Park et Jun, 2009], pour se focaliser sur la compacité (au lieu de se focaliser sur la connectivité cf. k-means).

Sur chaque cluster k , $k = 1, \dots, K$, la matrice de snapshots locale associée au cluster, est assemblée en collectant chaque snapshot de l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr} inclus dans le cluster. A partir de cette matrice de snapshots locale, un modèle HHR local est construit. En

particulier, un RID local et unique est considéré pour chaque cluster.

Puisque le clustering a pour objectif de réduire l'intervalle de variation des paramètres, une base réduite primale précise et de rang faible peut être obtenue sur le cluster. Par conséquent, dans ce cas, l'enrichissement par fonctions de formes EF est le seul à être considéré pour s'assurer de vérifier la condition inf-sup/LBB et d'avoir un conditionnement faible pour la matrice de rigidité de contact projetée du modèle local (cf. section 3.4.1 du chapitre 3). Ce choix est motivé par la nécessité d'éviter le phénomène d'over-fitting qui pourrait survenir plus rapidement sur des matrices de snapshots locales.

Dans la partie online, il faut utiliser une classification sur l'espace paramétrique pour sélectionner un modèle local adapté au paramètre donné (généralement en dehors de l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr}). Dans le cas d'une grille de snapshots régulière, une stratégie triviale basée sur la partition de l'espace paramétrique \mathcal{P} par le clustering est utilisée.

4.2.2 A partir de snapshots irréguliers sur l'espace paramétrique

Les grilles de snapshots régulières peuvent devenir limitantes pour les espaces paramétriques de grandes tailles car elles sont longues à générer et peuvent contenir des redondances d'informations. Les bases réduites construites sont alors moins précises à rang fixé pour approcher l'espace vectoriel des solutions. Dans ces situations, une grille de snapshots irrégulière doit être construite généralement à l'aide d'un algorithme glouton basé sur un indicateur d'erreur. Cet indicateur d'erreur permet de localiser les paramètres conduisant aux plus fortes erreurs pour le modèle réduit. L'algorithme glouton en sélectionnant ces derniers va construire une matrice des snapshots contenant des informations de fortes valeurs pour le modèle réduit. Nous considérons ici une telle grille irrégulière pour l'espace paramétrique d'entraînement \mathcal{P}_{tr} . Il n'est alors plus possible de se reposer sur la partition de l'espace paramétrique induite par \mathcal{P}_{tr} . Le plan de construction des modèles réduits locaux dans cette configuration est présenté sur la partie droite de la figure 4.1. La matrice de dissimilarité est maintenant basée sur la distance de Grassmann entre chaque snapshots normalisés \underline{S}_j , $j = 1, \dots, M_s$, avec $M_s = \text{card}(\mathcal{P}_{tr})$ le nombre de snapshots. Dans ce cas, l'équation (4.2) se réécrit :

$$d_{Gr(\infty, \infty)}(\underline{S}_{j_1}, \underline{S}_{j_2}) = \arccos(\underline{S}_{j_1}^T \underline{S}_{j_2}), \quad \forall j_1, j_2 \in \llbracket 0, M_s \rrbracket^2. \quad (4.4)$$

La stratégie de clustering repose cette fois sur la labellisation des snapshots pour partitionner l'espace paramétrique. Les modèles locaux sont construits de la même façon que pour la stratégie sur grille régulière à partir des matrices de snapshots locales associées aux clusters.

La partie offline relativement plus simple pour le clustering sur grille irrégulière induit une difficulté supplémentaire pour la classification. On ne peut pas utiliser de partition naturelle de \mathcal{P}_{tr} dans cette configuration. Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de classification pour sélectionner un modèle dans la partie online. Des méthodes de classification avancées, par apprentissage profond (deep learning) (comme par exemple dans [Daniel *et al.*, 2020]), doivent être considérées. Il est important de considérer le nombre de snapshots pour faire le choix d'une méthode. En effet, l'entraînement d'un classificateur par apprentissage profond nécessite souvent une base de donnée très grande. Pour pouvoir utiliser une base de données de taille limitée, nous proposons dans ce travail de construire dans la partie offline une fonction de prédiction par apprentissage supervisé (supervised learning). L'entraînement de la fonction de prédiction par classification supervisée se fait sur les paramètres et leurs labels les associant aux clusters. Étant donné un paramètre, la fonction de prédiction donne le label du cluster ayant la plus forte probabilité de contenir le paramètre. Dans les exemples numériques, la méthode de classification par forêt aléatoire (random Forest) est utilisée [Breiman, 2001 ; Pedregosa *et al.*, 2011].

4.3 Résultats numériques du clustering

4.3.1 Clustering sur grille régulière

Nous nous focalisons ici sur la stratégie de clustering proposée en section 4.2.1 pour le cas test IPG axisymétrique. La même grille régulière de 500 snapshots que dans la section 3.5.2 du chapitre 3 est considérée pour l'espace d'entraînement \mathcal{P}_{tr} . La partition de l'espace paramétrique est formée par des groupes de 4 snapshots formant des rectangles dans la représentation 2D de l'espace paramétrique de la figure 4.2a. Sur la figure 4.2b nous pouvons voir les résultats de l'algorithme de clustering pour $K = 3$ clusters. Chaque point représente un snapshot, et la couleur de fond représente un cluster.

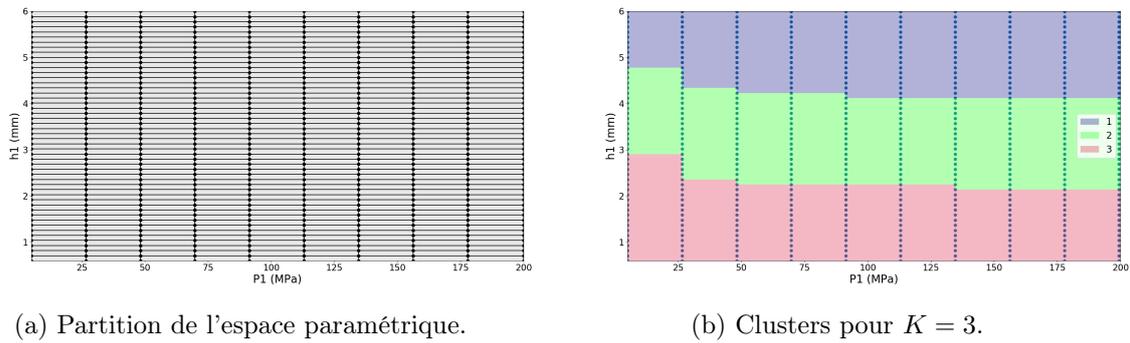


FIGURE 4.2 – IPG axisymétrique. Partition et clustering de l'espace paramétrique à partir de snapshots réguliers.

Les clusters contiennent respectivement 170, 194 et 170 snapshots dans leurs matrices de snapshots locales associées. La figure 4.2b montre que la stratégie de clustering sur l'espace paramétrique se focalise naturellement sur les positions h_1 de la zone de contact potentielle. Cela confirme qu'une grande variation de la surface de contact active est un facteur prépondérant de non-linéarité. Etant donné que l'espace paramétrique est réduit par les clusters, nous fixons un seuil d'erreur POD de $\epsilon_{POD} = 10^{-8}$ dans la construction des modèles locaux HHR. Ce choix, plus petit que dans le chapitre 3 permet néanmoins la construction d'une base réduite primale de faible rang comme la figure 4.3 le confirme. La dimension de la BR primale pour chaque cluster est de $\ell = \{31, 39, 36\}$. Un RID local est construit pour chaque cluster. Comme précédemment, l'algorithme DEIM sur la BR primale et une contribution de l'algorithme DEIM appliqué sur une BR duale POD (avec seuil d'erreur de $\epsilon = 10^{-6}$) sont utilisés pour obtenir l'ensemble de nœuds des RID. Les RID locaux obtenus sont représentés sur la figure 4.4. Les nombres de relations contact (et ordres duaux) sont respectivement de $N_{\chi}^C = \{36, 40, 35\}$. Le résultat de la forme des clusters sur l'espace paramétrique est directement visible sur les RID locaux, avec des RID qui sont beaucoup plus localisés sur une partie de la surface de contact potentielle. La figure 4.4 confirme les observations de la figure 4.2b, car les trois RID forment une décomposition de domaine de la surface de contact potentiellement active du modèle EF. Pour chaque cluster, le RID est localisé autour des valeurs de h_1 du cluster, qui représente la zone où le changement de statut (actif/inactif) du contact va avoir lieu.

Sur chaque cluster, l'enrichissement de la BR primale est réalisé avec la méthode d'enrichissement EF uniquement. En effet, étant donné que ϵ_{POD} est déjà bas, calibrer un second seuil POD tout en évitant l'overfitting est délicat. Les résultats obtenus avec un enrichissement maximal ($\kappa_{max} = 1$) pour les deux points étudiés dans le tableau 3.1 sont reportés dans

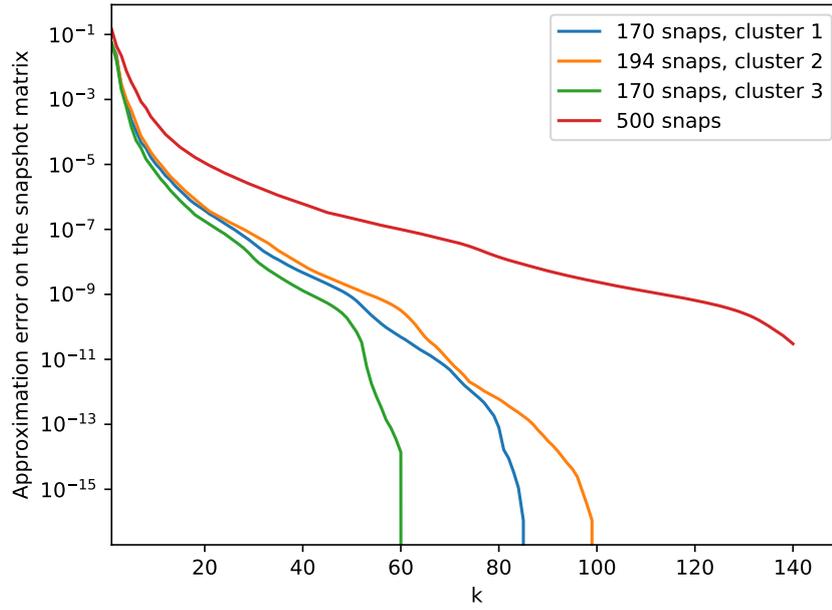
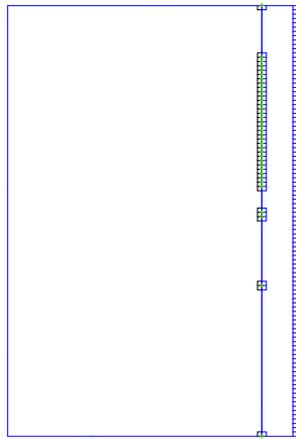
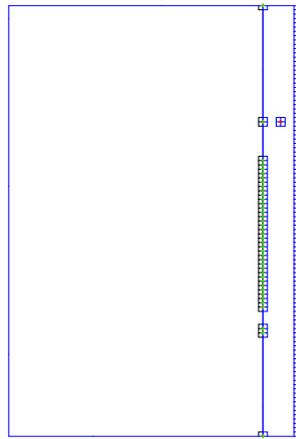


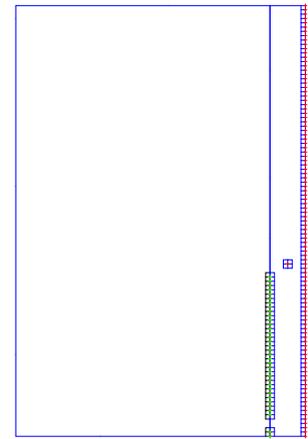
FIGURE 4.3 – IPG axisymétrique. Erreur d’approximation sur les matrices de snapshots locales pour le cas test avec ($K=3$) clusters et sans clustering.



(a) RID pour le modèle HHR associé au cluster 1. ($l = 31$, $N_\lambda^C = 36$)



(b) RID pour le modèle HHR associé au cluster 2. ($l = 39$, $N_\lambda^C = 40$)



(c) RID pour le modèle HHR associé au cluster 3. ($l = 36$, $N_\lambda^C = 35$)

FIGURE 4.4 – IPG axisymétrique. RID locaux.

le tableau 4.1. Pour le point $P1 = 170\text{MPa}, h_1 = 3.2\text{mm}$, déjà traité avec précision avec les méthodes d’enrichissement sans clustering, des erreurs duales comparables sont obtenues avec la méthode de clustering. Toutefois une amélioration significative de la précision primale est à signaler (0.03% au lieu de 1%).

Pour le point $P1 = 30\text{MPa}, h_1 = 5.25\text{mm}$ les résultats sont bien meilleurs que ceux observés avec le modèle sur la totalité de l’espace paramétrique, et ce, peu importe la méthode d’enrichissement (cf. tableau 3.1). De plus, la dimension des BR primales reste limitée ($\bar{\ell} = 67$).

De façon générale, la méthode de clustering aide à diminuer les erreurs relatives duales. En particulier, les zones qui présentaient de grandes erreurs relatives sans la stratégie de clustering dans la section 3.5.2, sont très largement améliorées avec la stratégie de clustering,

TABLEAU 4.1 – IPG axisymétrique. Etude de la stratégie de clustering avec enrichissement EF maximal.

	Label du Cluster	$\kappa(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c]\underline{\bar{V}}[\mathcal{A}_c, :])$ avant enri. EF	$\ell = \text{card}(\underline{V})$ initial	$\bar{\ell} = \text{card}(\underline{\bar{V}})$ final	Err. rel. Primale	Err. rel. Duale
$P_1 = 170\text{MPa}$ $h_1 = 3.2\text{mm}$	2	$1.5 \cdot 10^5$	39	79	0.03%	2.0%
$P_1 = 30\text{MPa}$ $h_1 = 5.25\text{mm}$	1	$2.2 \cdot 10^4$	31	67	0.02%	2.4%

comme le montre la figure 4.5.

Concernant les dimensions des BR, la stratégie de clustering conduit à des tailles comparables à celle de la méthode HHR sans clustering utilisée en section 3.5.2. Cependant les erreurs duales sont largement diminuées par la stratégie de clustering vis-à-vis des résultats obtenus sans (comparaison des figures 4.5 et 3.9).

La carte d'erreurs de la figure 4.5 est même meilleure que celle obtenue sur un RID élargi avec enrichissement POD+EF, voir la figure 3.13. Dans cette dernière configuration, les dimensions des bases étaient supérieures de presque 40%.

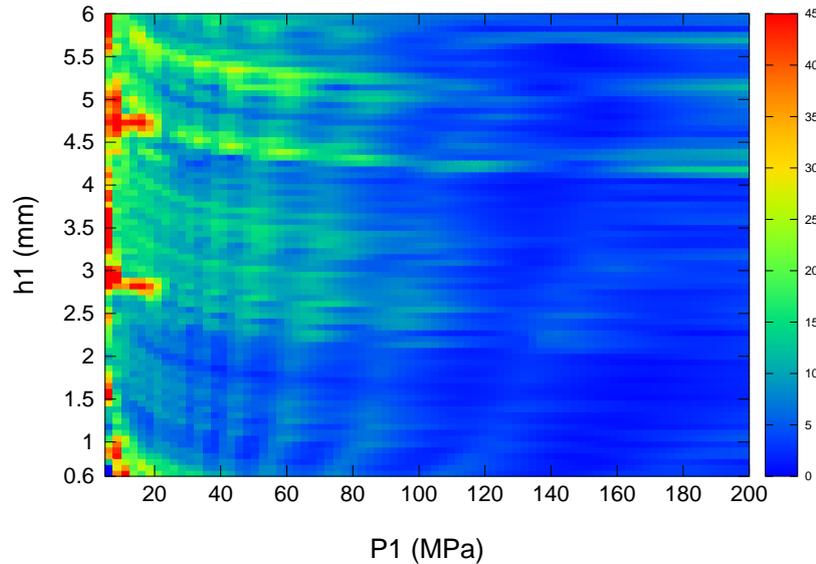


FIGURE 4.5 – IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Espace test de 3100 points. Méthode d'enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR avec $\ell = \{31, 39, 36\}$, $N_\lambda^C = \{36, 40, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{54, 67, 57\}$

Nous pouvons souligner que même avec la stratégie de clustering, le traitement des zones de contact affleurant (faibles pressions) demeure difficile.

Le nombre de clusters K ne peut pas être augmenté sans limites. En effet, plus il y a de clusters plus l'espace paramétrique local devient petit. Mais chaque cluster doit avoir assez de snapshots pour construire une BR POD représentative et donc un modèle HHR local précis. Il est possible d'utiliser plus de snapshots, mais une autre approche intéressante à étudier serait de considérer une stratégie de clustering récursive sur les clusters présentant les solutions HHR les moins précises (possiblement en ajoutant des snapshots dans ces derniers).

Dans le tableau 4.2 nous proposons les temps de résolutions moyens des modèles EF et

HHR avec la stratégie de clustering pour $K = 3$ clusters. Nous observons que les temps de résolutions moyens sont moins grands pour le modèle HHR avec clustering que pour la configuration EF natif et "PLEIADES". Pour la comparaison avec la version EF "PLEIADES", il y a une accélération satisfaisante des temps de calcul de l'ordre de 13. Pour la comparaison avec la version EF natif, l'accélération est bien plus faible de l'ordre de 2. L'ordre dual assez élevé d'un des modèles locaux $N_\lambda^C = 40$, induit également un ordre primal plus élevé $\bar{\ell} = 67$ (du fait de l'enrichissement), et cela conduit à une augmentation du temps de résolution moyen.

	Temps moyen de résolution (ms)	Accélération
EF (CAST3M natif)	704	×
EF "PLEIADES"	4829	×
HHR $\ell = \{31, 39, 36\}$ $N_\lambda^C = \{36, 40, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{54, 67, 57\}$	352	2/13.7

TABLEAU 4.2 – IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec la stratégie de clustering sur grille régulière pour $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. 3100 points de tests.

4.3.1.a Solutions duales reconstruites avec stratégie de clustering sur grille régulière

Nous présentons sur la figure 4.6 les erreurs relatives sur les solutions duales reconstruites pour le modèle HHR avec stratégie de clustering sur grille régulière avec $K = 3$ clusters. La méthode d'enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$ est appliquée. La reconstruction des solutions duales suit la méthode introduite dans la section 1.4.6 du chapitre 1 pour chaque modèle local. Nous pouvons observer sur la figure 4.6 une cohérence des résultats vis-à-vis des erreurs avant reconstruction (cf. figure 4.5). Cependant, nous observons également de fortes erreurs relatives sur une bande horizontale pour des valeurs de h_1 entre 2.5 et 3mm. Cette bande correspond à la frontière entre les clusters 2 et 3 dans l'espace paramétrique. La méthode de reconstruction utilisant les snapshots pour obtenir la solution en dehors du RID, il semble que le manque d'information (snapshots) à proximité de la frontière d'un cluster puisse poser problème. Les erreurs relatives sur les solutions duales reconstruites obtenues avec la stratégie de clustering sur grille régulière pour $K = 3$ clusters restent cependant bien meilleures que celles obtenues sans la stratégie de clustering (cf. figure 3.10).

4.3.2 Clustering sur grille irrégulière

Nous nous focalisons dans cette section sur une grille de snapshots irrégulière dans l'espace paramétrique \mathcal{P} . Cette grille a été obtenue par un algorithme glouton de sélection de snapshots (voir algorithme 1.3) basé sur l'indicateur d'erreur (1.73) introduit dans [Fauque *et al.*, 2018]¹. L'espace d'entraînement qui en résulte, noté \mathcal{P}_{tr} , contient 200 snapshots, que l'on peut visualiser sur la figure 4.8a. Nous constatons que les snapshots sont principalement localisés autour des faibles valeurs de pression P_1 . L'indicateur a donc permis de bien se focaliser sur les zones de l'espace paramétrique qui conduisent à de grandes erreurs relatives selon les observations du chapitre 3.

Afin de bien interpréter les résultats de la stratégie de clustering sur grille de snapshots irrégulière introduite dans la section 4.2.2, nous présentons dans un premier temps quelques

1. ce choix a été réalisé et publié avant le développement du nouvel indicateur d'erreur présenté au chapitre 2

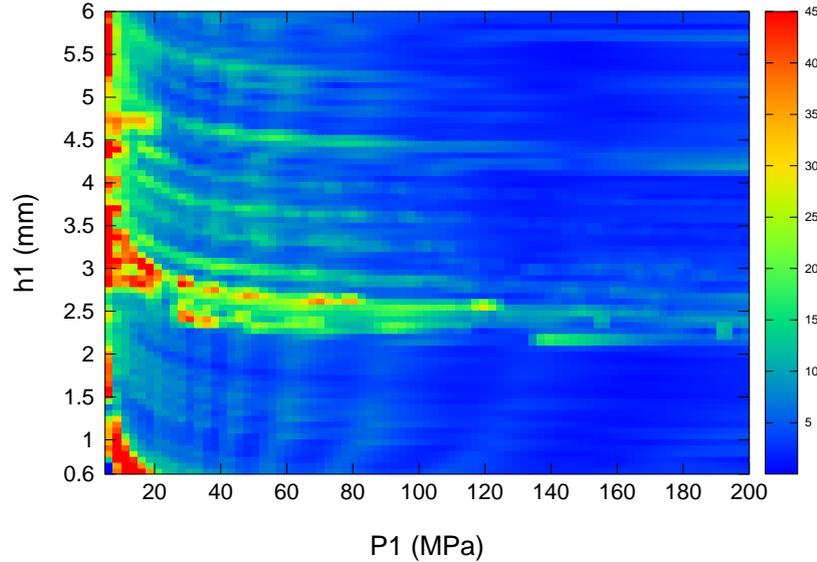


FIGURE 4.6 – IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales reconstruites (en %) pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Espace test de 3100 points. Méthode d'enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR avec $\ell = \{31, 39, 36\}$, $N_\lambda^C = \{36, 40, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{54, 67, 57\}$

résultats obtenus avec la méthode HHR sans clustering construite à partir de la grille de snapshots irrégulière de \mathcal{P}_{tr} .

4.3.2.a Résultats avec grille irrégulière sans clustering

Le modèle HHR est construit avec un seuil POD primal de $\epsilon_{\mathcal{POD}} = 10^{-6}$, conduisant à une base réduite primale contenant $\ell = 33$ vecteurs colonnes. Le RID est obtenu en appliquant l'algorithme DEIM à la BR primale et en ajoutant une contribution via l'algorithme DEIM sur une base réduite POD duale (obtenue avec un seuil de $\epsilon = 10^{-4}$). Une zone d'intérêt est également ajoutée sur l'extérieur de la gaine afin de bien prendre en compte les conditions aux limites du problème. Nous obtenons un RID contenant $N_\lambda^C = 57$ relations de contact. Pour la méthode d'enrichissement POD+EF un seuil POD de $\epsilon_{\mathcal{POD}2} = 3.5 \times 10^{-7}$ est utilisé conduisant à une BR primale avec $\ell + 5 = 38$ vecteurs colonnes avant enrichissement EF.

Les deux stratégies d'enrichissement sont appliquées pour un conditionnement maximum de $\kappa_{max} = 10$ dans l'algorithme d'enrichissement 3.1. La méthode d'enrichissement EF conduit à une BR primale de cardinal $\bar{\ell} = 60$ quand la méthode POD+EF conduit à un cardinal de $\bar{\ell} = 82$. Nous présentons sur la figure 4.7 les erreurs relatives duales sur l'espace paramétrique pour les deux méthodes d'enrichissement.

Le comportement des erreurs sur l'espace paramétrique concorde bien avec celui obtenu pour 500 snapshots réguliers sur un RID de dimension comparable (voir figure 3.13). Il est important de remarquer que de meilleures précisions sont obtenues globalement et avec des BR primales plus compactes. Ceci confirme l'intérêt d'une sélection des snapshots par algorithme glouton basé sur un indicateur d'erreur.

Pour conclure sur les résultats du modèle HHR sans clustering pour la grille de snapshots irrégulière nous présentons dans le tableau 4.3 les temps de calcul et accélérations des deux modèles HHR considérés. Les observations sont très proches de celles faites sur le modèle HHR sur le RID élargi en section 3.5.2.c du chapitre 3. Les temps de résolutions moyens pour les modèles HHR avec enrichissement EF et POD+EF sont plus grands que pour la configuration

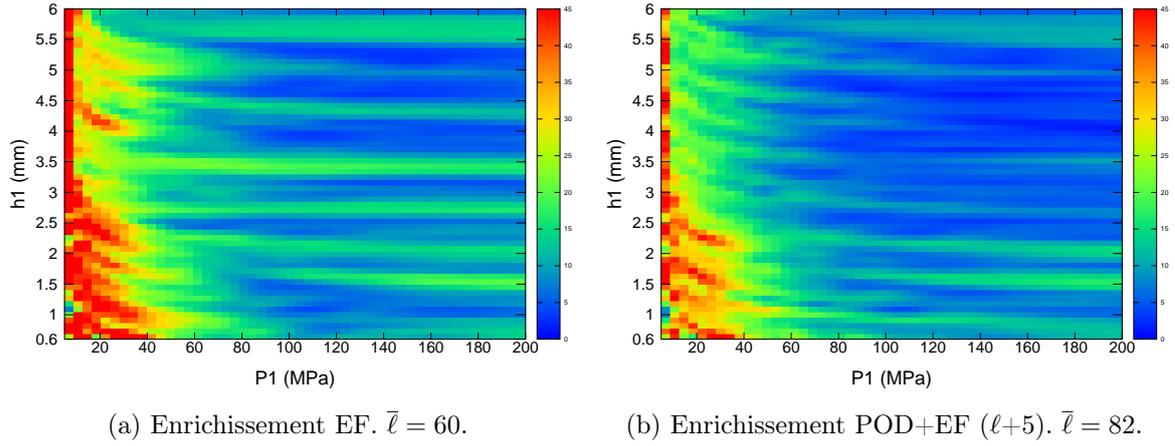


FIGURE 4.7 – IPG axisymétrique. Espace d’entraînement avec snapshots irréguliers. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 33$, $N_\lambda^C = 57$ sur un espace test de 3100 points. Stratégies d’enrichissement appliquée avec conditionnement max. de $\kappa_{max} = 10$.

EF natif. Pour la comparaison avec la version EF "PLEIADES", il y a bien une accélération des temps de calcul avec les modèles HHR. Cette observation est due à l’ordre dual élevé des modèles HHR avec $N_\lambda^C = 57$.

	Temps moyen de résolution (ms)	Accélération
EF (CAST3M natif)	704	×
EF "PLEIADES"	4829	×
HHR (EF) $\bar{\ell} = 60$	913	× /5.28
HHR (POD+EF) $\bar{\ell} = 82$	918	× /5.26

TABLEAU 4.3 – IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d’enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF appliquées avec $\kappa_{max} = 10$ pour la grille de snapshots irrégulière. ($\ell = 33$ et $N_\lambda^C = 57$). 3100 points de tests.

4.3.2.b Résultats de la stratégie de clustering avec snapshots irréguliers

Pour étudier la stratégie de clustering pour les grilles de snapshots irrégulières sur cet espace d’entraînement, nous construisons $K = 3$ clusters à l’aide de l’algorithme des k-medoids. Sur la figure 4.8a, les labels des clusters sont reportés. La méthode de classification supervisée Random Forest est entraînée pour obtenir une fonction de prédiction, représentée sur la figure 4.8b comme une partition de l’espace paramétrique. Dans cette configuration, les clusters ne sont pas uniquement définis en fonction du paramètre h_1 mais aussi en fonction de la pression P_1 de l’espace paramétrique.

Les modèles réduits locaux sont construits avec la même stratégie que pour la configuration sur snapshots réguliers. Les RIDs associés aux modèles locaux sont représentés en figure 4.9. Comme pour le cas des snapshots réguliers, les RIDs sont localisés autour des surfaces de contact potentielles des clusters (paramètre h_1). Les RIDs du cluster 0 et 2 sont ainsi assez similaires.

La carte des erreurs relatives duales sur l’espace paramétrique est représentée sur la figure 4.10. La stratégie de clustering permet de diminuer les erreurs relatives duales, comme

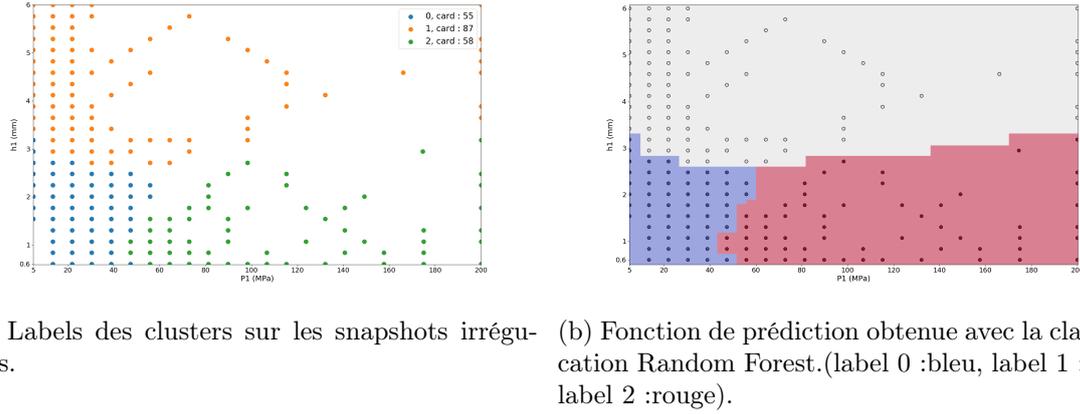


FIGURE 4.8 – IPG axisymétrique. Stratégie de clustering pour des snapshots irréguliers. $K = 3$ clusters

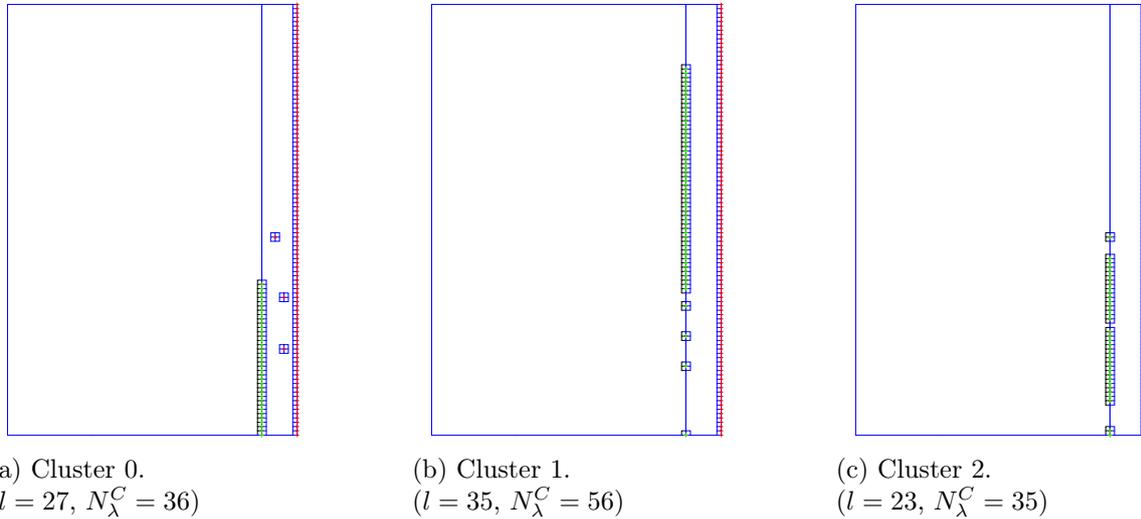


FIGURE 4.9 – IPG axisymétrique. Snapshots irréguliers. RIDs associés aux modèles réduits locaux.

observé précédemment. Les erreurs sont considérablement réduites pour des ordres comparables à ceux sans clustering (cf. figure 4.7), même pour les faibles pressions de contact.

L'amélioration de stratégie récursive évoquée pour les snapshots réguliers serait également intéressante dans cette configuration. En particulier, un des clusters (label 1) représente un grand sous-espace de l'espace paramétrique avec peu de snapshots. Ce dernier cluster contient les zones de la carte d'erreur présentant les plus fortes erreurs relatives (cf. figure 4.10). Une amélioration pourrait également être proposée en s'intéressant à la délimitation des clusters. En effet sur la figure 4.10, la limite entre le cluster 1 et les deux autres clusters présente des erreurs assez grandes. Il pourrait être utile d'étudier différentes méthodes de classification afin de minimiser les erreurs liées à la délimitation des clusters.

Enfin, nous présentons dans le tableau 4.4 les temps de calcul et accélérations pour la stratégie de clustering sur grille de snapshots irrégulière. Le temps de résolution moyen n'accélère que très peu la résolution en comparaison du modèle EF natif. Cela vient de l'ordre dual élevé pour le modèle 2 ($N_\lambda^C = 56$), modèle qui correspond au cluster le plus large dans l'espace paramétrique. C'est une limitation de la méthode hybride. Pour la comparaison avec la version EF "PLEIADES", l'accélération des temps de calcul est intéressante.

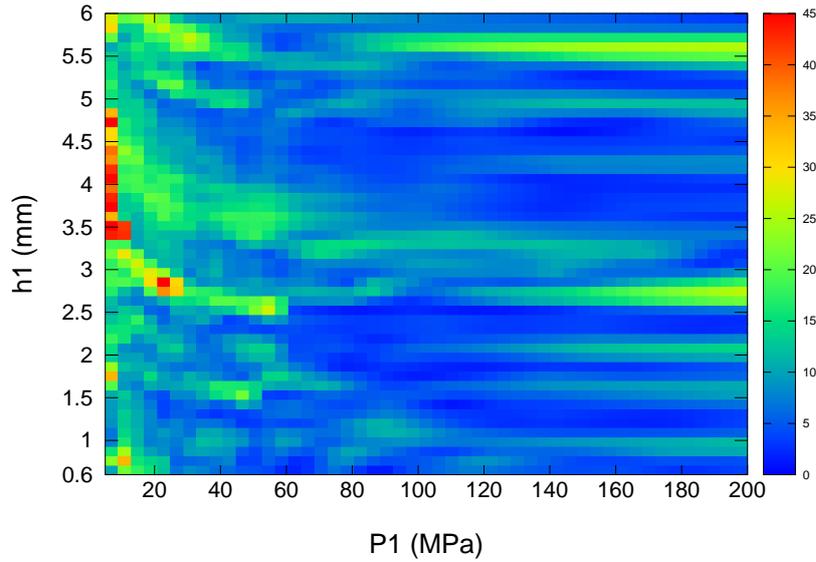


FIGURE 4.10 – IPG axisymétrique. Snapshots irréguliers. Carte des erreurs relatives duales (en %) sur l'espace paramétrique pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR models avec $\ell = \{27, 35, 23\}$, $N_\lambda^C = \{36, 56, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{52, 77, 48\}$

	Temps moyen de résolution (ms)	Accélération
EF (CAST3M natif)	704	×
EF "PLEIADES"	4829	×
HHR $\ell = \{27, 35, 23\}$ $N_\lambda^C = \{36, 56, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{52, 77, 48\}$	603	1.16/8.0

TABLEAU 4.4 – IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec la stratégie de clustering sur grille irrégulière pour $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. 3100 points de tests.

4.4 Conclusion

Nous avons proposé et mis en oeuvre une stratégie de clustering sur l'espace paramétrique visant à améliorer les précisions du modèle hyper-réduit hybride sans augmenter les ordres de ce dernier. La stratégie de clustering a été construite sur la variable primale car sa précision pilote aussi les erreurs duales (cf. chapitre 2). Ainsi, des ROM locaux permettent de traiter la variété non-linéaire des solutions de manière linéaire par morceaux sur l'espace paramétrique. Son efficacité a été démontrée sur un cas test présentant une large variation de la zone et de la pression de contact, qui restait un vrai défi. Le clustering sur l'espace paramétrique a été adapté à toutes sortes de grilles de snapshots (régulière ou irrégulière). Des limites en temps de calcul du modèle HHR apparaissent lorsque l'ordre dual devient trop important. La stratégie de clustering pourrait alors être pilotée sur une limite de taille de l'espace dual des RID locaux.

Chapitre 5

Extension du modèle HHR aux maillages de contact non concordants

Ce chapitre est consacré à l’extension du modèle hyper-réduit hybride pour le traitement de conditions de contact sur des maillages non concordants, qui permettent de traiter des géométries ou situations plus complexes. Nous nous focaliserons ici sur de type nœud-à-surface.

Dans un premier temps, nous présentons l’appariement nœud-à-surface et l’adaptation du modèle HHR qui conduit à un système de point-selle généralisé (non symétrique par bloc) avec des conditions de solvabilité associées. Nous proposons ensuite quelques résultats numériques pour ce modèle HHR non symétrique par bloc sur le cas test d’interaction pastille-gaine.

Les méthodes et une partie des résultats présentés dans ce chapitre ont fait l’objet d’une communication lors de la conférence USNCCM 2023 [[Le Berre *et al.*, 2023b](#)].

Sommaire

5.1	Appariement nœud-à-surface des conditions de contact	105
5.2	Modèle hyper-réduit hybride non symétrique	107
5.2.1	Notations et définitions	107
5.2.2	Projection de type Petrov-Galerkin	108
5.2.3	Construction du RID	109
5.2.4	Modèle HHR généralisé sous formulation matricielle	111
5.2.5	Enrichissement de la BR primale pour le modèle HHR sous formulation de point-selle généralisé	112
5.3	Résultats numériques sur le cas test IPG	113
5.3.1	Construction du modèle HHR	113
5.3.2	Comparaison des solutions HHR et EF	113
5.3.3	Vérification des bornes d’erreurs du modèle HHR en appariement nœud-à-surface	118
5.4	Conclusion	120

5.1 Appariement nœud-à-surface des conditions de contact

Nous introduisons dans cette section l'appariement de type nœud-à-surface des conditions de contact. Cette configuration permet l'utilisation de maillages de contact non concordants et par conséquent de considérer des géométries et/ou situations plus complexes dans les problèmes de mécanique du contact. De plus, cela permet également de considérer des cas de glissement.

La figure 5.1 présente un schéma d'appariements nœud-à-surface 2D et 3D. Le jeu initial, noté d , représente la distance du nœud k du premier maillage au point le plus proche du second maillage. Ce point le plus proche n'est pas un nœud du second maillage.

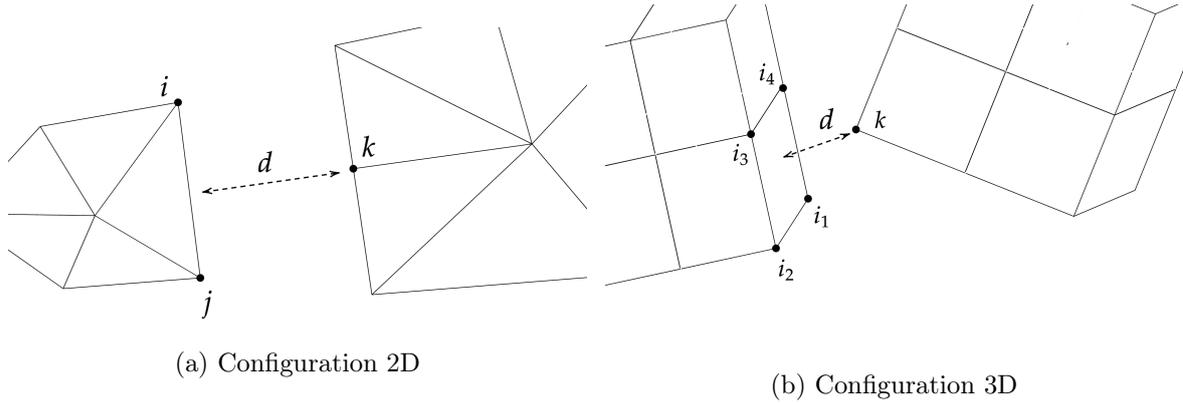


FIGURE 5.1 – Schéma générique d'une condition de contact nœud-à-surface.

Par exemple, en s'appuyant sur les notations de la figure 5.1a les conditions de contact 2D s'écrivent au nœud k :

$$\underline{u}_1(\underline{x}_k)^{\mathbf{T}} \underline{n}_1(\underline{x}_k) + \underline{u}_2(\underline{x}_{k'})^{\mathbf{T}} \underline{n}_2(\underline{x}_{k'}) \leq d \quad (5.1)$$

avec $\underline{x}_{k'}$ le point le plus proche de \underline{x}_k sur le second maillage. Le déplacement de $\underline{x}_{k'}$ s'écrit en fonction des fonctions de forme associées aux nœuds i et j :

$$\underline{u}_2(\underline{x}_{k'}) = \underline{\varphi}_i(\underline{x}_{k'}) \underline{u}_i + \underline{\varphi}_j(\underline{x}_{k'}) \underline{u}_j \quad (5.2)$$

Si on suppose que les normales \underline{n}_1 et \underline{n}_2 sont définies en fonction d'une seule coordonnée, i.e. $\underline{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\underline{n}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors la matrice de la rigidité de contact $\underline{\underline{B}}$ pour 4 conditions de contact nœud-à-surface a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_1 & (1 - \omega_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_2 & (1 - \omega_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_3 & (1 - \omega_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \omega_4 & (1 - \omega_4) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

avec les coefficients d'interpolation $\omega_{1,2,3,4}$ définis par les fonctions de formes EF de Lagrange (cf. (5.2)).

La méthode des éléments finis utilise des nœuds duaux pour porter les variables duales (multiplicateurs de Lagrange) et exprimer les conditions de contact. Pour les conditions de contact nœud-à-surface, les nœuds duaux sont localisés sur le nœud pour lequel on calcule le jeu (cf. nœud k sur le schéma 5.1). Un multiplicateur de Lagrange est donc associé à chaque

condition de contact (cf. (5.1)).

On peut considérer plusieurs formulations de contact en appariement nœud-à-surface, parmi lesquelles la formulation symétrique [El-Abbasi et Bathe, 2001] et la formulation maître-esclave [Hughes *et al.*, 1976]. La première introduit des nœuds duaux sur chaque surface de contact, une condition de contact est donc définie pour chaque point de contact potentiel. La seconde formulation définit une surface esclave qui doit respecter les conditions de contact vis-à-vis de la surface maître. Les nœuds duaux sont donc introduits uniquement sur la surface esclave. Chaque nœud du maillage de la surface esclave porte une condition d'appariement de type nœud-à-surface via un multiplicateur de Lagrange associé. Il est possible de considérer la formulation symétrique comme une formulation "double-pass" [El-Abbasi et Bathe, 2001] de la formulation maître-esclave, où chaque surface de contact est considérée une fois comme la surface esclave et une fois comme la surface maître.

Dans le contexte de l'hyper-réduction hybride des problèmes de contact, nous supposons que les modèles EF utilisés pour la construction du modèle réduit (calcul des snapshots, définition des matrices à projeter) sont des modèles bien posés (i.e. solvable, stable). Pour cela, notre attention se focalise sur une formulation maître-esclave des conditions de contact de type nœud-à-surface. Ce choix est motivé par le non respect de la stabilité (condition inf-sup/LBB) par la formulation symétrique pour certaines configurations [El-Abbasi et Bathe, 2001] (exemple : en présence d'une géométrie de type nœud-à-nœud dans l'ensemble du maillage nœud-à-surface ; d'autres problèmes peuvent survenir avec cette approche pour des EF d'ordre plus élevé). Il est d'usage de définir la surface présentant le maillage le plus fin comme surface esclave pour obtenir de meilleurs résultats [El-Abbasi et Bathe, 2001].

Nous définissons ici le modèle EF utilisé pour la construction du modèle réduit. Nous utilisons les mêmes suppositions que celles introduites dans la section 1.2.3 du chapitre 3 (solvabilité, stabilité). Le modèle EF peut s'écrire sous ses deux formulations (faible ou matricielle) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_h, \lambda_h) \in \mathcal{V}_h \times \mathcal{W}_h^+ \text{ t. q.} \\ a(\underline{u}_h, \underline{v}_h) + b(\underline{v}_h, \lambda_h) = l(\underline{v}_h), \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h^0 \\ b(\underline{u}_h, q_h - \lambda_h) \leq g(q_h - \lambda_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_h^+ \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{U}_h, \underline{\Lambda}_h) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda} \text{ t. q.} \\ \underline{K}\underline{U}_h + \underline{B}^T \underline{\Lambda}_h = \underline{F} \\ \underline{B}\underline{U}_h \leq \underline{D} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Dans les modèles de (5.4), il y a uniquement la définition de \underline{B} qui diffère vis-à-vis des modèles (1.19) et (1.21) du chapitre 1. En effet, comme indiqué en (5.2) l'absence de valeur pour $\underline{u}_{k'}$ implique le besoin d'interpoler le déplacement à partir des fonctions de forme EF des nœuds du segment de k' . La matrice \underline{B} porte donc l'interpolation EF de $\underline{U}_{k'}$ à partir de \underline{U}_i et \underline{U}_j (dont les valeurs sont résolues).

Remarque : Le possible non respect de la condition de stabilité de la formulation symétrique des conditions de nœud-à-surface peut être évité en procédant à une élimination des conditions de contact en doublon (pour une occurrence nœud-à-nœud dans le maillage non concordant). Le solveur Cast3M implémentant ce genre d'élimination, il est donc possible d'utiliser une formulation symétrique dans les applications numériques de nos modèles. Cependant, dans la suite de ce chapitre, pour les définitions mathématiques du modèle hyper-réduit hybride, nous considérons uniquement la formulation maître-esclave.

5.2 Modèle hyper-réduit hybride non symétrique

Dans cette section nous proposons l'extension du modèle hyper-réduit hybride pour des problèmes avec appariement nœud-à-surface. L'objet désigné esclave est noté Ω_S (choisi entre Ω_1 et Ω_2 , les deux objets en contact considérés, cf. chapitre 1). Dans un premier temps, en section 5.2.2, nous considérons que nous avons un RID (Ω_A) donné pour définir le modèle HHR pour des appariements de contact nœud-à-surface. Dans un second temps nous nous intéressons à la construction du RID adapté pour ce modèle.

5.2.1 Notations et définitions

Soit Ω_A un RID donné (donc un ouvert borné sous-domaine de Ω avec bordure $\partial\Omega_A$). Nous reprenons les notations et définitions de Ω_B , Γ^I et Γ_A^C qui ne changent pas par rapport à l'appariement nœud-à-nœud introduit dans le chapitre 1 :

$$\begin{aligned}\Omega_B &\text{ complémentaire de } \Omega_A \text{ tel que } \bar{\Omega} = \bar{\Omega}_A \cup \bar{\Omega}_B, \\ \Gamma^I &= \bar{\Omega}_A \cap \bar{\Omega}_B \text{ l'interface du RID,} \\ \Gamma_A^C &= \partial\Omega_A \cap \Gamma^C \text{ surface de contact du RID.}\end{aligned}$$

Avec ces objets, on peut reprendre la définition des ensembles de DDLs primaux non connectés à Ω_B et celle de l'ensemble des nœuds duaux \mathcal{A}_λ qui ne sont pas connectés à Ω_B :

$$\mathcal{A} = \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \varphi_i^T \varphi_i d\Omega = 0\}, \quad (5.5)$$

$$\mathcal{A}_\lambda = \{j \in \llbracket 1, N_\lambda \rrbracket \mid \int_{\Omega_B} \xi_j^T \xi_j d\Omega = 0\}. \quad (5.6)$$

Par définition, ces ensembles incluent tous les DDLs primaux/duaux (respectivement) spatialement localisés à l'intérieur du RID, en excluant ceux localisés sur l'interface.

De la même façon qu'en nœud-à-nœud nous définissons l'espace $\mathcal{V}_{RB} = Vect(\{\psi_k\}_{k=1}^\ell) \subset \mathcal{V}_h^0$, engendré par une base réduite donnée ($\{\underline{\psi}_k\}_{k=1}^\ell$) (avec $\ell \ll N$) qui est discrétisée dans la base EF par la matrice $\underline{V} \in \mathbb{R}^{N \times \ell}$, telle que :

$$\underline{\psi}_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(\underline{x})(\underline{V})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \forall k = 1, \dots, \ell. \quad (5.7)$$

Avec \mathcal{A} nous pouvons définir les modes $\underline{\psi}_k^A$, restreints à \mathcal{A} , qui sont nuls sur Ω_B , et leurs complémentaires $\underline{\psi}_k^B$:

$$\begin{aligned}\underline{\psi}_k^A(\underline{x}) &= \sum_{i \in \mathcal{A}} \varphi_i(\underline{x})(\underline{V})_{ik}, \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \\ \underline{\psi}_k^B(\underline{x}) &= \underline{\psi}_k(\underline{x}) - \underline{\psi}_k^A(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega.\end{aligned} \quad (5.8)$$

La méthode HHR cherche la solution du champ de déplacement dans l'espace d'approximation réduit :

$$\mathcal{V}_{HR, \Omega_A} = \{\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \tilde{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^T) + \underline{u}_{HR}^0 \mid \underline{u}_{HR}^0 \in \mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0\} \quad (5.9)$$

avec $\underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_0)$ le relèvement de la condition Dirichlet \underline{u}_0 du problème (1.16) restreint au RID et $\tilde{\underline{r}}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}^T)$ le relèvement d'une condition de Dirichlet \underline{u}_{HR}^T sur l'interface Γ^I du RID, et l'espace engendré par les modes $\underline{\psi}_k^A$:

$$\mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0 = Vect(\{\underline{\psi}_k^A\}_{k=1}^\ell) \not\subset \mathcal{V}_{RB} \quad (5.10)$$

Le relèvement est donné par la méthode d'hyper-réduction avec RID défini par (1.42) et avec la relation de fermeture classique donnant l'espace solution HHR :

$$\tilde{\mathcal{V}}_{RB} = \{\underline{v} = \underline{r}_{\Omega_A}(\underline{u}_0) + \underline{v}_{RB}, \text{ tel que } \underline{v}_{RB} \in \mathcal{V}_{RB}\} \quad (5.11)$$

L'espace des fonctions tests est quant à lui toujours engendré par les modes $\underline{\psi}_k^A$, i.e. $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$. L'espace dual d'approximation réduit est défini tel que :

$$\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ = Vect_+(\{\xi_i\}_{i \in \mathcal{A}_\lambda}) \quad (5.12)$$

dont la dimension correspond au cardinal de \mathcal{A}_λ noté N_λ^C .

5.2.2 Projection de type Petrov-Galerkin

Nous allons maintenant projeter le problème de point-selle EF sur les espaces d'approximations réduits HHR. Pour mettre en évidence le changement de formulation du problème de point-selle en appariement nœud-à-surface, nous écrivons le problème projeté sans imposer les restrictions d'intégration (comme introduit en section 2.1.4 du chapitre 2). Le problème HHR est une projection de type Petrov-Galerkin pour la variable primale qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR}) \in \tilde{\mathcal{V}}_{RB} \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \text{ tel que} \\ a(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) + b(\underline{v}_{HR}, \lambda_{HR}) = l(\underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \\ b(\underline{u}_{HR}, q_{HR} - \lambda_{HR}) \leq g(q_{HR} - \lambda_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \end{array} \right. \quad (5.13)$$

Pour les applications $a(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ et $g(\cdot)$, il n'y a pas de changement vis-à-vis du nœud-à-nœud, elles peuvent être restreintes à Ω_A du fait du support des fonctions tests.

Pour l'application $b(\cdot, \cdot)$ nous pouvons remarquer qu'elle doit être une fois projetée sur la BR de l'espace test primal $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$, et une fois sur la BR de l'espace des solutions \mathcal{V}_{RB} . La variable duale, elle, ne change pas d'espace et sera toujours dans $\mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+$.

Le problème (5.13) est bien un problème de type point-selle. Cependant, contrairement au cas nœud-à-nœud nous ne pouvons pas affirmer la propriété (1.45) qui nous permettait d'obtenir un point-selle classique (symétrique par bloc). Dans le cas du nœud-à-surface, les intégrales de $b(\cdot, \cdot)$ ne peuvent pas se restreindre seulement sur l'espace $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0$ car :

$$b(\underline{v}_{HR}, q_{HR}) \neq b(\underline{v}_{HR}^0, q_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+, \quad \underline{v}_{HR}^0 \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0, \quad \underline{v}_{HR} \in \tilde{\mathcal{V}}_{RB} \quad (5.14)$$

Nous définissons donc deux applications :

$$b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot) : \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (5.15)$$

$$\tilde{b}_{\Omega_A}(\cdot, \cdot) : \tilde{\mathcal{V}}_{RB} \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (5.16)$$

Avec la restriction de l'intégration des applications $a(\cdot, \cdot)$, $l(\cdot)$ et $g(\cdot)$ induite par les supports des fonctions du modèle, ainsi que les applications $b_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$ et $\tilde{b}_{\Omega_A}(\cdot, \cdot)$, le problème HHR peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{u}_{HR}, \lambda_{HR}) \in \tilde{\mathcal{V}}_{RB} \times \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \text{ tel que} \\ a_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, \underline{v}_{HR}) + b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, \lambda_{HR}) = l_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}), \quad \forall \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \\ \tilde{b}_{\Omega_A}(\underline{u}_{HR}, q_{HR} - \lambda_{HR}) \leq g_{\Omega_A}(q_{HR} - \lambda_{HR}), \quad \forall q_{HR} \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A}^+ \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Par conséquent, la formulation (5.17) constitue un problème de point-selle généralisé. La solvabilité de la formulation (5.17) repose non plus seulement sur une condition inf-sup/LBB mais sur deux [Ciarlet *et al.*, 2003], i.e. :

$$\exists \beta_0 > 0, \quad \beta_0 \leq \beta_{HR}^1 = \inf_{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \underline{v}_{HR} \in \mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0} \sup \frac{b_{\Omega_A}(\underline{v}_{HR}, q_h)}{\|\underline{v}_{HR}\| \|q_h\|}, \quad (5.18)$$

$$\exists \beta_1 > 0, \quad \beta_1 \leq \beta_{HR}^2 = \inf_{q_h \in \mathcal{W}_{h,\Omega_A} \underline{v}_{RB} \in \tilde{\mathcal{V}}_{RB}} \sup \frac{\tilde{b}_{\Omega_A}(\underline{v}_{RB}, q_h)}{\|\underline{v}_{RB}\| \|q_h\|}, \quad (5.19)$$

Remarque : Du fait de l'absence d'inclusion des espaces primaux, i.e. $\mathcal{V}_{HR,\Omega_A}^0 \not\subset \tilde{\mathcal{V}}_{RB}$, il n'y a pas d'implication d'une condition inf-sup/LBB par une autre.

5.2.3 Construction du RID

En utilisant la restriction de la variable duale nous pouvons définir deux ensemble de DDLs pour déterminer la connexion des DDLs primaux au DDLs duaux de \mathcal{A}_λ via l'application $b(.,.)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_c &= \{i \in \mathcal{A} \mid \exists j \in \mathcal{A}_\lambda \text{ t.q. } b(\underline{\varphi}_i, \xi_j) \neq 0\} \subset \mathcal{A}, \\ \tilde{\mathcal{A}}_c &= \{i \in \llbracket 1, N \rrbracket \mid \exists j \in \mathcal{A}_\lambda \text{ t.q. } b(\underline{\varphi}_i, \xi_j) \neq 0\}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

L'ensemble \mathcal{A}_c est l'ensemble des DDLs de \mathcal{A} qui sont connectés à \mathcal{A}_λ par l'application $b(.,.)$ (i.e. les DDLs de \mathcal{A} localisés sur la surface de contact du RID). L'ensemble $\tilde{\mathcal{A}}_c$ contient tout les DDLs primaux qui sont connectés à \mathcal{A}_λ par l'application $b(.,.)$. Ces dds ne sont pas nécessairement dans \mathcal{A} . Par contre, nous avons toujours l'inclusion suivante $\mathcal{A}_c \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_c$.

Dans le cas d'appariement de type nœud-à-nœud, il est toujours possible soit d'inclure dans l'interface \mathcal{I} (cf. (1.59)) les nœuds dont les vis-à-vis sur la surface de contact opposée ne sont pas dans \mathcal{A} , soit, en choisissant l'approche opposée, d'inclure dans \mathcal{A} ces derniers nœuds (cf. chapitre 1). Il est donc toujours possible d'obtenir $\mathcal{A}_c = \tilde{\mathcal{A}}_c$ en appariement nœud-à-nœud. Cette configuration est représentée sur le schéma 5.2a.

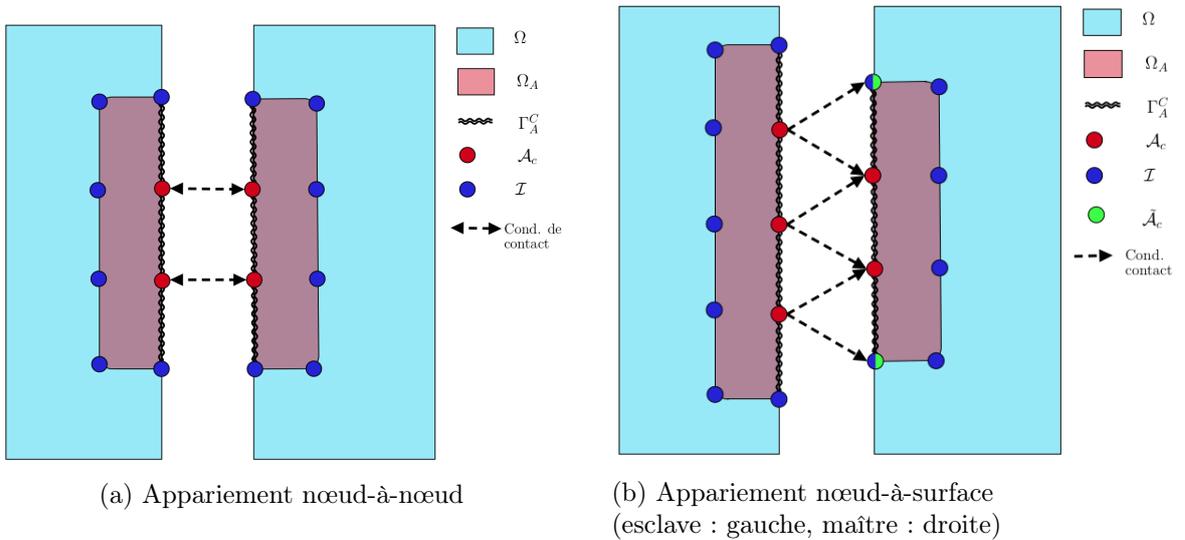


FIGURE 5.2 – Schéma des conditions de contact sur le RID.

En revanche pour le cas nœud-à-surface, l'inclusion $\mathcal{A}_c \subseteq \tilde{\mathcal{A}}_c$ est toujours vraie, mais il est

très courant d'obtenir des situations où $\mathcal{A}_c \neq \tilde{\mathcal{A}}_c$. Pour illustrer ces situations nous proposons le schéma de la figure 5.2b. Dans ce schéma les nœuds duaux sont localisés sur l'objet de gauche uniquement (surface esclave), les conditions de contact sont représentées par des flèches partant du nœud primal localisé au même endroit que le nœud dual associé à la condition. Nous pouvons remarquer que plusieurs conditions de contact sont en relation avec des nœuds de l'interface du RID. Les DDLs associés à ces nœuds sont donc dans $\tilde{\mathcal{A}}_c$ car connectés à \mathcal{A}_λ par $b(\cdot)$, mais ils ne sont pas dans \mathcal{A}_c car ils ne sont pas dans \mathcal{A} (intérieur strict du RID).

Dans le cas du nœud-à-surface il n'est pas possible de simplement inclure dans \mathcal{A} les nœuds associés au DDLs de $\tilde{\mathcal{A}}_c$ qui ne sont pas dans \mathcal{A} . Cette inclusion conduirait à un problème mal posé sur le RID. Pour illustrer cela nous allons étudier la construction du RID et définir des prérequis pour que le problème de contact hyper-réduit hybride en appariement nœud-à-surface soit bien posé. Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre 2, le domaine d'intégration réduit peut être considéré comme un sous-domaine d'une méthode de décomposition de domaine. A ce titre, la bordure $\partial\Omega_A$ doit être entièrement fermée par des conditions aux bords (Dirichlet, Neumann, contact ou autres) pour que le problème soit bien posé. Dans le modèle HHR c'est l'interface du RID qui porte les conditions de Dirichlet qui sont implicites via la relation de fermeture sur le relèvement [Ryckelynck *et al.*, 2016]. Nous représentons sur la figure 5.3a le schéma de la fermeture du RID déjà présenté sur la figure 5.2b. Le RID est bien fermé par les conditions aux limites, le problème HHR sera bien posé avec cette configuration.

En observant le RID de la figure 5.2b, une option qui semble naturelle pour avoir $\tilde{\mathcal{A}}_c = \mathcal{A}_c$ est d'inclure dans \mathcal{A} les nœuds de $\tilde{\mathcal{A}}_c$ qui n'y sont pas (de façon similaire à ce que nous faisons en nœud-à-nœud, cf. section 1.4.1 du chapitre 1). Malheureusement ce n'est pas une option possible en nœud-à-surface car le RID n'est alors plus fermé par les conditions aux limites. Nous illustrons sur la figure 5.3b le défaut de fermeture du contour du RID par un condition aux bords avec l'extension évoquée. Cette absence de fermeture vient de la nature des conditions de nœud-à-surface maître-esclave. En effet, les conditions sont imposées telles que les nœuds de la surface esclave respectent les conditions de contact pour le segment/surface en vis-à-vis. Les segments/surfaces du côté maître ne sont soumis à des conditions de contact que si il y a un nœud dual en vis-à-vis. Sur la figure 5.3b nous observons qu'en utilisant l'extension du RID proposée nous obtenons deux segments de la frontière du RID qui ne sont soumis à aucune condition aux limites (représentés par les points d'interrogations). Le problème de fermeture par des conditions aux limites d'un sous-domaine en mécanique du contact avait déjà été soulevé dans [Liu *et al.*, 2017] dans le contexte du raffinement adaptatif de maillage.

Enfin, pour démontrer que le choix de la configuration maître-esclave n'est pas responsable de l'inégalité $\tilde{\mathcal{A}}_c \neq \mathcal{A}_c$, nous représentons sur la figure 5.3c le schéma du RID avec extension en appariement de contact nœud-à-surface symétrique. Dans cette configuration le RID est bien fermé par les conditions aux limites, mais l'ajout de nœuds duaux sur l'objet de droite conduit à la présence de nœuds de $\tilde{\mathcal{A}}_c$, cette fois sur l'objet de gauche.

Dans le cas d'un appariement nœud-à-surface la fermeture du RID doit donc être assurée lors de la construction. Dans nos applications numériques, le RID sera toujours basé sur l'algorithme DEIM appliqué à une BR primale (et à une BR duale POD pour contribution si besoin) et des modifications permettront de fermer le RID si il ne l'est pas initialement, notamment en sortant des nœuds de \mathcal{A} pour se retrouver dans la configuration 5.3a.

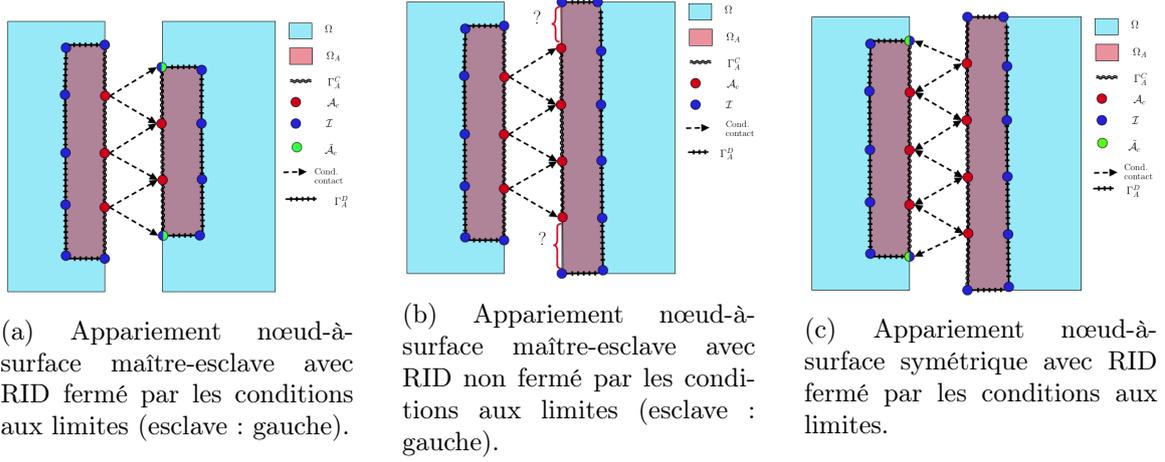


FIGURE 5.3 – Schéma de la discrétisation du contact et de la fermeture du RID pour différents appariements nœud-à-surface.

5.2.4 Modèle HHR généralisé sous formulation matricielle

Le fait d'avoir $\mathcal{A}_c \neq \tilde{\mathcal{A}}_c$ implique une modification importante de la formulation de point-selle du modèle HHR à cause de la projection de l'application $b(\cdot)$ sur différents espaces primaux. Nous définissons tout d'abord le problème HHR matriciel sans les restrictions liées aux connexions des ddls (cf. formulation variationnelle (5.13)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\gamma, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{K} \underline{V} \gamma + \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{B}^T[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{F} \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{V} \gamma \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, :] \underline{V} \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = 0 \end{array} \right. \quad (5.21)$$

Nous définissons l'ensemble \mathcal{I} tel que :

$$\mathcal{I} = \{j \in \llbracket 1, N \rrbracket, j \notin \mathcal{A} \mid \exists i \in \mathcal{A} \text{ tel que } \underline{K}_{ij} \neq 0\}. \quad (5.22)$$

En utilisant les ensembles \mathcal{A}_c , $\tilde{\mathcal{A}}_c$ et \mathcal{I} nous pouvons restreindre les ddls primaux considérés dans la formulation (5.21). La formulation, est alors un point-selle généralisé qui n'est pas symétrique par bloc dans sa formulation matricielle. Cette forme matricielle s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\gamma, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{K}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \gamma + \underline{V}^T[\mathcal{A}_c, :] \underline{B}^T[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{F} \\ \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \gamma \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] \\ \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \gamma - \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda]) = 0 \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Les conditions de solvabilité pour la forme matricielle s'écrivent :

$$\text{rang}(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{V}[\mathcal{A}_c, :]) = N_\lambda^C, \quad (5.24)$$

$$\text{rang}(\underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :]) = N_\lambda^C, \quad (5.25)$$

i.e., les matrices de rigidités de contact projetées doivent être de rang plein en ligne.

De manière similaire à l'appariement nœud-à-nœud, le problème (5.23) vérifie toutes les conditions de contact dans le RID sans projection (cf. section 1.4.5 du chapitre 1). En définissant

les matrices suivantes :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\tilde{K}}} &= \underline{\underline{V}}^T[\mathcal{A}, :] \underline{\underline{K}}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :], \\ \underline{\underline{\tilde{B}}}_1 &= \underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :], \\ \underline{\underline{\tilde{B}}}_2 &= \underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{\underline{V}}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :],\end{aligned}\tag{5.26}$$

on peut définir la matrice par bloc associée au problème (5.23) :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\tilde{K}}} & \underline{\underline{\tilde{B}}}_1^T \\ \underline{\underline{\tilde{B}}}_2 & \underline{\underline{0}} \end{pmatrix}\tag{5.27}$$

Il s'agit bien d'un problème de point-selle non symétrique par bloc car $\underline{\underline{\tilde{B}}}_1 \neq \underline{\underline{\tilde{B}}}_2$. Obtenir une matrice par bloc non symétrique est assez logique car la matrice $\underline{\underline{\tilde{K}}}$ issue de la méthode d'hyper-réduction avec RID standard [Ryckelynck, 2009] est également non symétrique. La symétrie par bloc du problème de contact avec discrétisation nœud-à-nœud était un cas particulier spécifique à la mécanique du contact.

Pour résoudre le système de point-selle généralisé nous utilisons un solveur dédié, similaire à des relations non associées en mécanique. On utilisera celui introduit dans Cast3M [Verpeaux *et al.*, 2022].

5.2.5 Enrichissement de la BR primale pour le modèle HHR sous formulation de point-selle généralisé

Lorsque les conditions de solvabilité (5.24)-(5.25) ne sont pas vérifiées initialement par le modèle réduit, nous utilisons comme dans le chapitre 3 une stratégie d'enrichissement de la BR primale par fonctions de formes EF. L'algorithme glouton doit alors garantir le respect des conditions sur le rang pour les deux matrices.

Une fois que les conditions (5.24)-(5.25) sont vérifiées, l'algorithme glouton minimisera un conditionnement. En prenant en compte la borne d'erreur duale démontrée au chapitre 2, le choix judicieux est de piloter notre algorithme d'enrichissement sur le conditionnement de la matrice $\underline{\underline{B}}[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\underline{V}}[\mathcal{A}_c, :]$. En effet, il s'agit de la matrice de la condition (5.24) qui est la version discrète associée à la condition sur l'espace $\mathcal{V}_{HR, \Omega_A}^0$. Et puisque c'est la constante de la condition inf-sup/LBB sur cet espace qui apparaît dans la borne d'erreur duale, l'algorithme glouton permettra ainsi de diminuer l'erreur duale.

Enfin, l'enrichissement de la base réduite primale est choisi tel que les fonctions de formes EF sélectionnées sont toutes associées à des DDLs de la surface esclave du problème.

Remarques :

- Dans la suite de ce chapitre nous considérons un enrichissement maximal dans le but d'évaluer l'erreur minimale du modèle HHR non symétrique.
- Dans le chapitre 2, les preuves d'erreurs *a priori* portent sur la projection de Petrov-Galerkin. Par conséquence, si la condition (5.18) est vérifiée, le modèle HHR non symétrique vérifiera les estimations d'erreurs *a priori* introduites dans le chapitre 2. Par contre, là où l'appariement nœud-à-nœud respectait l'hypothèse nécessaire à l'estimation *a posteriori* du chapitre 2 (cf. (H2) en section 2.3), ce n'est plus le cas pour l'appariement nœud-à-surface. Cependant, d'un point de vue discret, l'hypothèse (H2) sera respectée presque partout.

5.3 Résultats numériques sur le cas test IPG

5.3.1 Construction du modèle HHR

Dans cette section, nous illustrons les résultats du modèle HHR non symétrique par bloc pour le cas test d'interaction pastille-gaine 2D introduit en section 1.5.2 dans le chapitre 1 mais cette fois en appariement nœud-à-surface. Les dimensions de la pastille et de la gaine ainsi que les caractéristiques matérielles restent les mêmes. Le maillage est modifié pour obtenir des surfaces de contact non concordantes. Le maillage EF est représenté sur la figure 5.4a. Le modèle HHR est construit à partir d'un ensemble d'entraînement de 500 snapshots régulièrement distribués sur l'espace paramétrique. Une BR primale POD est obtenue avec un seuil d'erreur de $\epsilon = 10^{-6}$ conduisant à une base réduite de $\ell = 35$ vecteurs colonnes. Comme nous avons eu l'habitude de le faire pour ce cas test en appariement nœud-à-nœud, nous ajoutons une contribution des snapshots duaux en appliquant l'algorithme DEIM à une BR duale POD avec un seuil de 10^{-3} . Le RID est ensuite construit avec l'ensemble des nœuds des algorithmes DEIM plus une région d'intérêt sur l'extérieur de la gaine (pour prendre en compte les conditions aux limites de Neumann, cf. pression P_1). Des modifications sont ensuite apportées (extension, changement de \mathcal{A}) pour s'assurer de la fermeture du RID par les conditions aux bords (cf. section 5.2.3), toujours en s'assurant de ne pas perdre de DDLs donnés par l'algorithme DEIM sur la BR primale (pour conserver une base). Le RID résultant est présenté sur la figure 5.4b, il contient $N_\lambda^C = 53$ relations de contact.

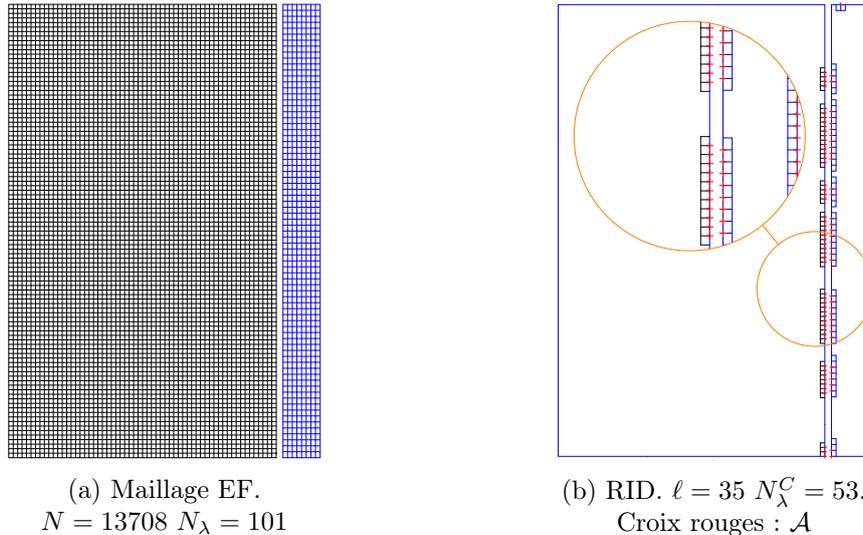
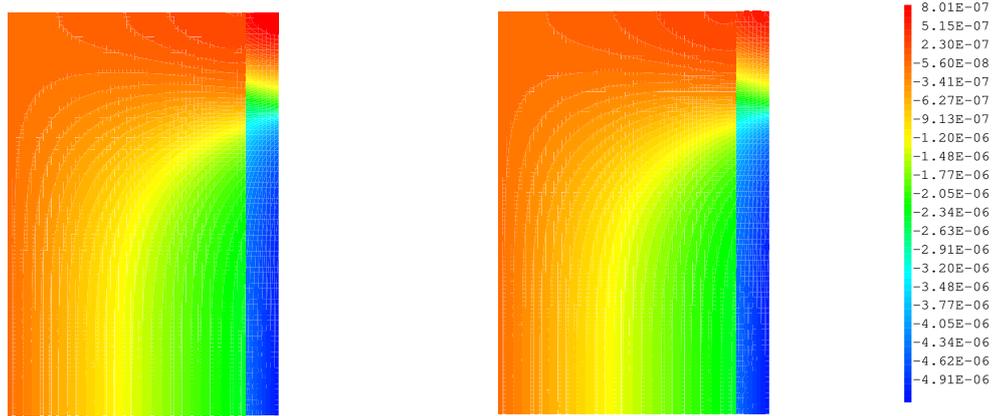


FIGURE 5.4 – Configuration du cas test d'interaction pastille gaine (IPG) en appariement nœud-à-surface (maître : gaine, esclave : pastille).

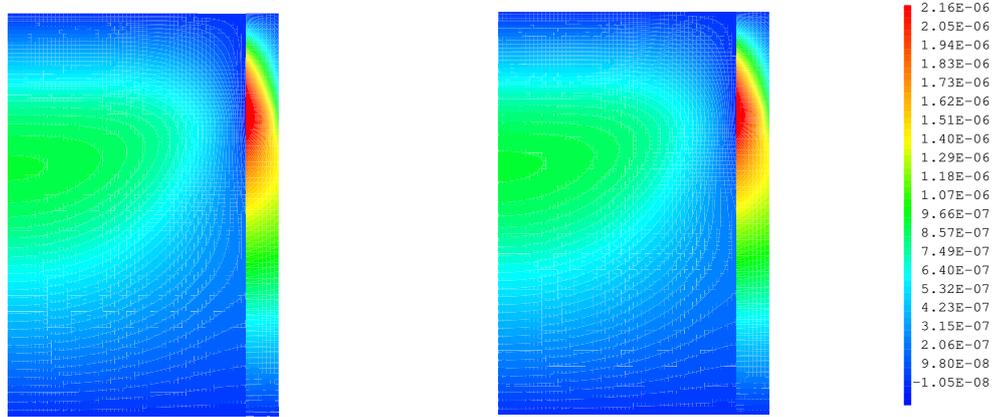
5.3.2 Comparaison des solutions HHR et EF

Dans un premier temps, pour évaluer les performances du modèle HHR non symétrique nous utilisons un enrichissement EF maximal conduisant à une BR primale d'ordre $\bar{\ell} = 88$. Nous comparons en dehors des snapshots les solutions pour un point de l'espace paramétrique donné : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$. Sur les figures 5.5 et 5.6 nous présentons les solutions en déplacement pour les modèles EF et HHR. De façon similaire à l'appariement nœud-à-nœud, le modèle HHR non symétrique produit des solutions primales très satisfaisantes vis-à-vis des solutions EF (avec une erreur relative sur le domaine de 2.1%).



(a) Modèle EF. $N = 13708$ $N_\lambda = 101$ (b) Modèle HHR non symétrique. $\bar{\ell} = 88$
 $N_\lambda^C = 53$.

FIGURE 5.5 – Comparaison des solutions selon u_r des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.



(a) Modèle EF. $N = 13708$ $N_\lambda = 101$ (b) Modèle HHR non symétrique. $\bar{\ell} = 88$
 $N_\lambda^C = 53$.

FIGURE 5.6 – Comparaison des solutions selon u_z des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

Nous représentons sur la figure 5.7 les erreurs absolues sur les déplacements. Ces erreurs absolues sont très bonnes globalement (un maximum de 3×10^{-7} pour u_r et un maximum de 9×10^{-8} pour u_z). Pour référence la solution u_r EF est dans l'intervalle $[-5 \times 10^{-6}; 10^{-6}]$ et celle u_z est dans l'intervalle $[-8 \times 10^{-8}; 2.5 \times 10^{-6}]$ MPa.

La gaine présente des erreurs plus grandes, en particulier au delà de la hauteur h_1 d'application de la pression P_1 . Cette zone correspond à la hauteur après changement du statut du contact, où les objets ne sont plus en contact.

Sur la figure 5.8 nous représentons les contraintes de Von Mises calculées à partir des déplacements obtenues par les modèles EF et HHR. Sur la figure 5.9 les contraintes σ_{rr} obtenues avec les modèles EF et HHR non symétrique sont reportées. Les solutions sur les contraintes sont également très satisfaisantes avec une erreur relative globale de 0.76% pour celles de Von mises et de 0.78% pour celles selon σ_{rr} .

Nous représentons sur la figure 5.10 les erreurs absolues sur les contraintes de Von Mises et les contraintes σ_{rr} . Les erreurs absolues sur les contraintes de Von Mises se concentrent à

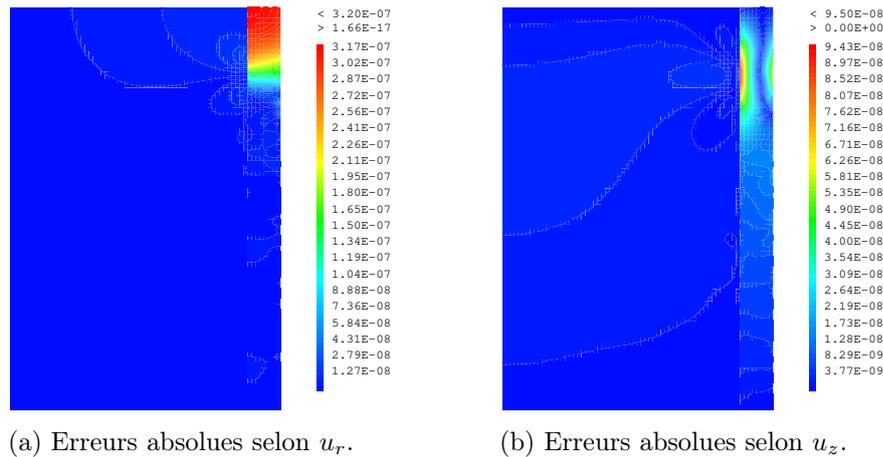
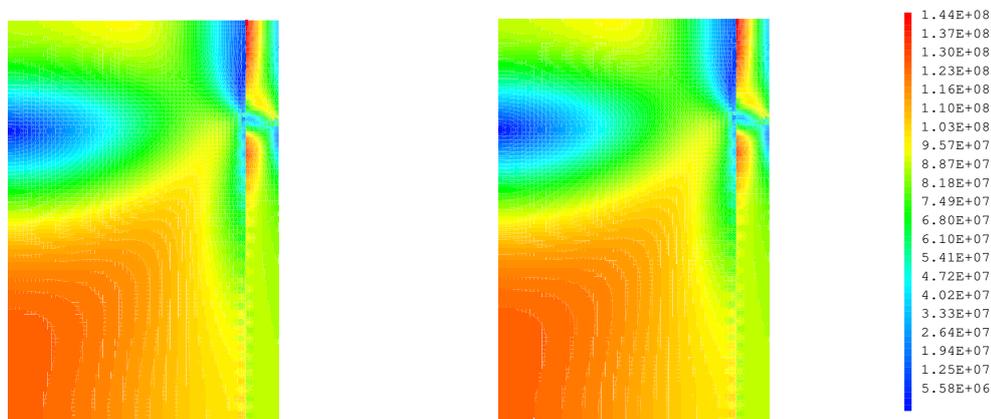


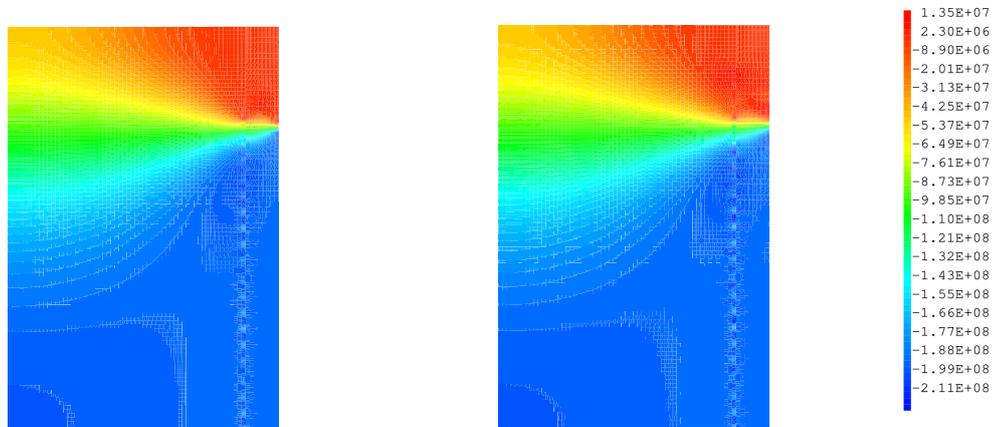
FIGURE 5.7 – Erreurs absolues sur les déplacements entre les solutions des modèles EF ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$). Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.



(a) Modèle EF. $N = 13708$ $N_\lambda = 101$ (b) Modèle HHR non symétrique. $\bar{\ell} = 88$
 $N_\lambda^C = 53$.

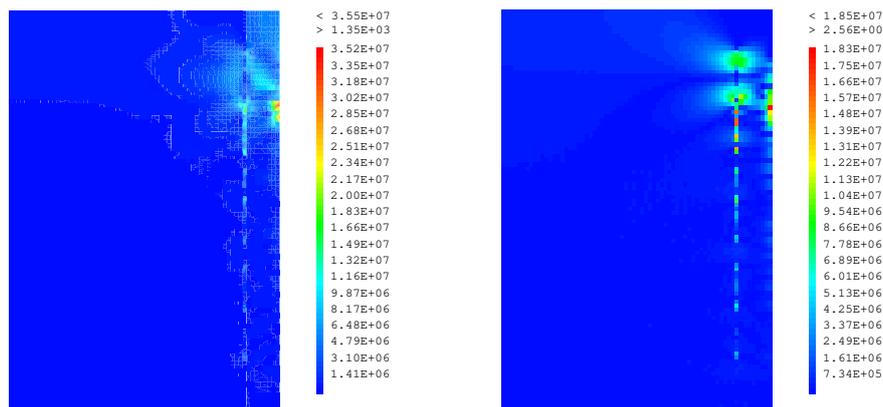
FIGURE 5.8 – Comparaison des contraintes de Von Mises des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

deux endroits : la surface de contact où on peut observer localement des erreurs plus grandes localement, et la gaine au delà de la hauteur h_1 d'application de la pression P_1 où on observe des erreurs absolues beaucoup plus grandes. On observe les mêmes phénomènes sur l'erreur absolue entre les contraintes σ_{rr} (cf. figure 5.10b). Les erreurs absolues vont d'un maximum de 35.5MPa à un minimum de 0.001MPa pour les contraintes de Von Mises, et d'un maximum de 18.5MPa à un minimum de 2.56Pa pour les contraintes σ_{rr} . Pour référence les contraintes de Von Mises EF sont dans l'intervalle $[150; 0.9]\text{MPa}$ et celle σ_{rr} sont dans l'intervalle $[-218; 22]\text{MPa}$.



(a) Modèle EF. $N = 13708$ $N_\lambda = 101$ (b) Modèle HHR non symétrique. $\bar{\ell} = 88$
 $N_\lambda^C = 53$.

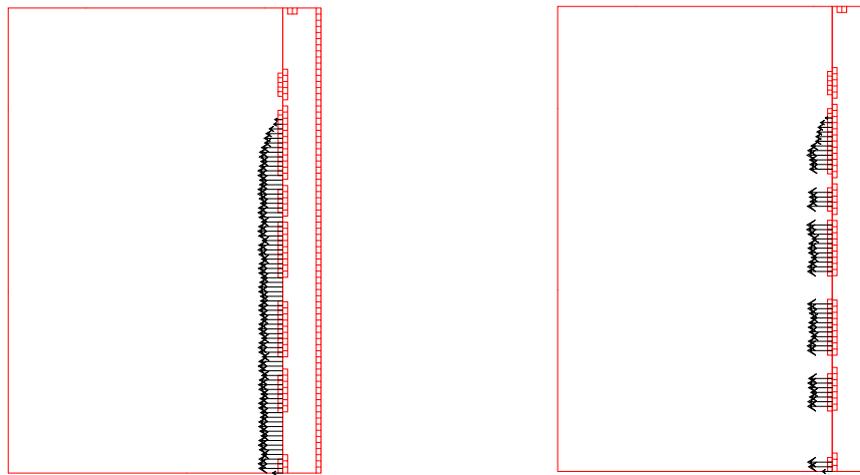
FIGURE 5.9 – Comparaison des contraintes σ_{rr} des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.



(a) Erreurs absolues des contraintes de Von Mises. (b) Erreurs absolues des contraintes σ_{rr} .

FIGURE 5.10 – Erreurs absolues sur les contraintes entre les solutions des modèles EF ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$). Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

Nous voulons maintenant regarder les solutions duales, qui nous intéressent particulièrement, toujours pour le point $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$. La figure 5.11 présente les solutions duales des modèles EF et HHR non symétrique. Les solutions sont uniquement d'un seul côté du fait de la formulation maître-esclave. Nous remarquons tout d'abord que les points de contact actifs des deux modèles concordent parfaitement. La solution du modèle réduit est très cohérente avec celle EF même si on observe quelques imprécisions. Pour obtenir une comparaison plus facile nous superposons les deux solutions sur la figure 5.12, avec les solutions duales EF en noir et HHR en bleu. Les solutions sur les multiplicateurs de Lagrange sont très proches une fois superposées mais un zoom permet de remarquer quelques différences locales au niveau de la zone de changement de statut de contact (actif/inactif). En dehors de cette zone de changement de statut, les solutions duales réduites sont très satisfaisantes (cf. second zoom de la figure 5.12). Les erreurs relatives duales sont de 3.9%.



(a) Solution duale EF. $N = 13708$ $N_\lambda = 101$ (b) Solution duale du modèle HHR non symétrique. $\ell = 35$ $N_\lambda^C = 53$. Enrichissement EF maximal : $\bar{\ell} = 88$.

FIGURE 5.11 – Comparaison des solutions duales des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

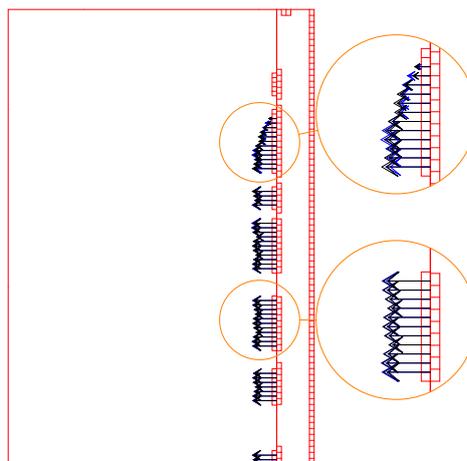


FIGURE 5.12 – Solution duale EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) en noir et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$) en bleu. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

Nous présentons dans la tableau 5.1 les résultats en temps et erreurs relatives pour le point considéré ($P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$). Les erreurs relatives (calculées en norme 2) sont très satisfaisantes, en particulier l'erreur relative duale qui est de 3.9% démontrant la capacité

du modèle HHR non symétrique à traiter de façon précise un problème de contact en configuration non symétrique. En observant les temps de résolutions reportés dans la table 5.1 nous remarquons que le temps du modèle HHR est plus petit que pour le modèle EF "PLEIADES", présentant une accélération autour de 4. L'accélération du modèle HHR a encore une grande marge de progression possible, notamment en considérant un solveur HHR dédié (adapté aux matrices pleines).

TABLEAU 5.1 – Temps et erreurs relatives des modèles EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique avec enrichissement EF maximal ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$) sur le point de l'espace paramétrique $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$.

	Tps EF Cast3M "PLEIADES"	Tps HHR Cast3M	Erreur relative (norme 2)			
			Primale	Duale	Von Mises	σ_{rr}
$P_1 = 190\text{MPa}$ $h_1 = 5.2\text{mm}$	1836ms	508 ms	2.1%	3.9%	0.76%	0.78%

Enfin, nous présentons sur la figure 5.13 la carte des erreurs relatives duales sur l'espace paramétrique (pour une évaluation sur 3100 points) du modèle HHR non symétrique avec enrichissement EF maximal, i.e. $\ell = 35$, $N_\lambda^C = 53$ et $\bar{\ell} = 88$. Les résultats obtenus sont très similaires à ceux obtenus en appariement nœud-à-nœud présentés au chapitre 3. Cette carte nous indique donc qu'en appariement nœud-à-surface, des stratégies de clustering seront également nécessaires pour traiter des espaces paramétriques avec de grandes variations de la pression et de la surface de contact.

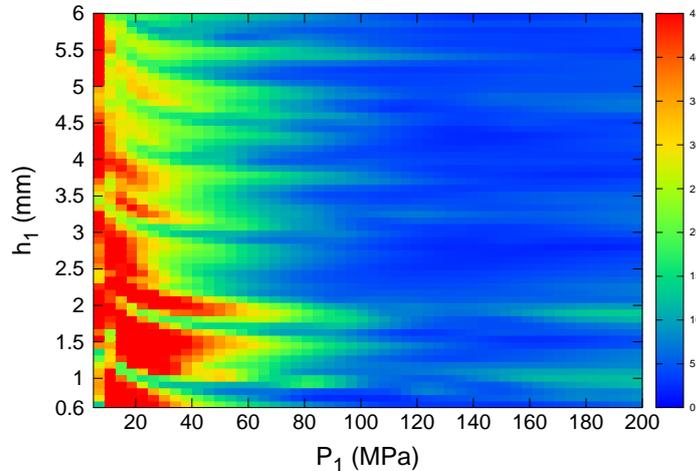


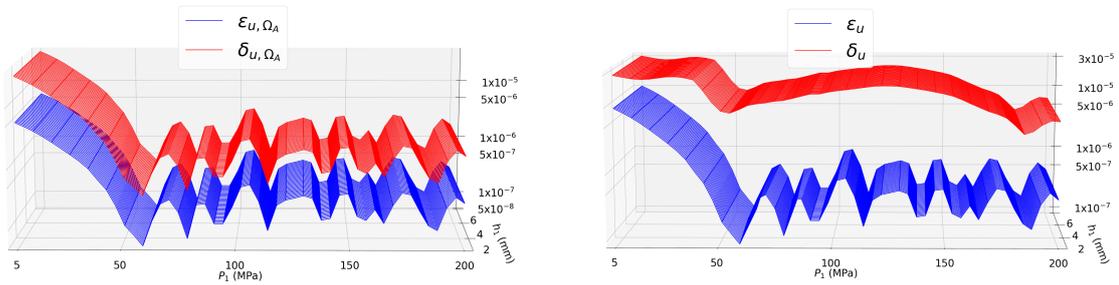
FIGURE 5.13 – Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR non symétrique avec $\ell = 35$, $N_\lambda^C = 53$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Enrichissement EF max. $\bar{\ell} = 88$.

5.3.3 Vérification des bornes d'erreurs du modèle HHR en appariement nœud-à-surface

Nous voulons ici illustrer numériquement la vérification des bornes d'erreurs sur le RID introduites dans le chapitre 2 dans le cadre du modèle HHR non symétrique. Nous utilisons la même méthodologie que dans la vérification numérique du chapitre 2 (cf. section 2.6). Nous avons tout d'abord vérifié que la borne sur l'erreur duale du théorème 3 était respectée. Des résultats similaires à la figure 2.8 ont été obtenus, avec un indice d'efficacité grand dû aux

constantes associées au problème. La figure 5.14 démontre que la borne d'erreur primale *a priori* sur le RID (2.80) et celle sur le maillage complet (2.87) sont toutes les deux vérifiées dans la configuration non symétrique. De plus, comme en nœud-à-nœud, l'indice d'efficacité reste constant sur l'espace paramétrique pour l'erreur sur le RID.

Nous nous intéressons maintenant à la borne d'erreur primale *a posteriori* (2.116). Tout d'abord il est important de noter que l'hypothèse sur laquelle repose le théorème 8 établissant la borne d'erreur n'est pas vérifiée dans le contexte des conditions de contact nœud-à-surface (cf. (2.101)). Néanmoins, nous pouvons observer sur la figure 5.15 que la borne *a posteriori* est respectée numériquement, et que comme en nœud-à-nœud elle suit le comportement de l'erreur sur l'espace paramétrique. Il semble que le fait que l'hypothèse soit vérifiée presque partout (faible nombre de nœuds du RID pour lesquels l'hypothèse n'est pas respectée, environ 3% des nœuds primaux du RID) suffit pour respecter la borne. Il s'agit ici probablement d'une spécificité des problèmes de contact où la contrainte et l'application associée $b(\cdot, \cdot)$ sont très localisées (i.e. sur la surface de contact).



(a) Erreur ϵ_{u, Ω_A} et la borne δ_{u, Ω_A} du modèle HHR non symétrique telles que définies en (2.149) et (2.150).

(b) Erreur ϵ_u et la borne δ_u du modèle HHR non symétrique comme définies en (2.147) et (2.148).

FIGURE 5.14 – Erreurs et bornes primales du modèle HHR non symétrique, sur le RID ou sur le maillage complet et sur l'espace paramétrique \mathcal{P} . ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$, $\ell = 35$, $N_\lambda^C = 53$, $\bar{\ell} = 88$)

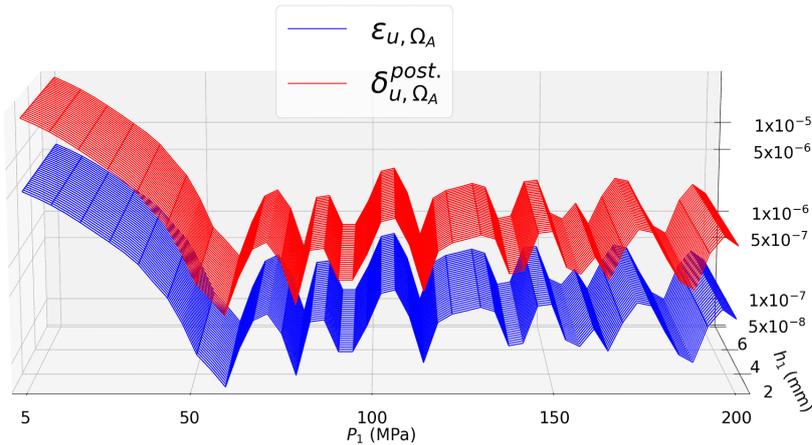


FIGURE 5.15 – Erreur primale ϵ_{u, Ω_A} et borne *a posteriori* $\delta_{u, \Omega_A}^{post.}$ pour le modèle HHR non symétrique sur l'espace paramétrique \mathcal{P} telles que définies en (2.149) et (2.151).

5.4 Conclusion

Nous avons étendu le modèle HHR afin de pouvoir considérer des maillages de contact non concordants. Nous avons choisi de nous focaliser sur un appariement nœud-à-surface de type maître-esclave de la matrice de rigidité de contact. Ainsi le modèle HHR obtenu est de type point-selle généralisé, non symétrique par bloc, et il se doit de vérifier deux conditions inf-sup/LBB pour assurer sa solvabilité. La construction du RID doit permettre au problème HHR non symétrique d'être mathématiquement bien posé (tel un problème de décomposition de domaine). Notamment, la bordure du domaine d'intégration réduit doit être correctement fermée par des conditions aux bords. Les performances du modèle HHR non symétrique pour des matériaux linéaires élastiques sont très satisfaisantes. Nous avons également illustré que le modèle HHR non symétrique vérifie numériquement les bornes d'erreur duales et primales (*a priori* et *a posteriori*) introduites dans le chapitre 2.

Chapitre 6

Application du modèle HHR aux non-linéarités matérielles

Nous proposons ici l'application de notre modèle d'ordre réduit à des problèmes de mécanique du contact entre matériaux non-linéaires. Nous introduisons la méthode de résolution basée sur un algorithme de type Newton, traditionnellement utilisé dans les solveurs éléments finis traitant de la mécanique des solides. Puis nous présentons des résultats numériques pour un cas test d'interaction pastille-gaine 2D avec comportement élasto-plastique pour le combustible et visco-plastique pour la gaine.

Sommaire

6.1	Hyper-réduction hybride d'un problème de contact en appariement nœud-à-surface pour des matériaux non-linéaires.	123
6.1.1	Problème mécanique avec matériau non-linéaire	123
6.1.2	Formulation variationnelle	123
6.1.3	Résolution par un processus itératif	124
6.1.4	Problème de mécanique du contact entre matériaux non-linéaires	125
6.1.5	Hyper-réduction hybride d'un problème de contact entre matériaux non-linéaires avec appariement nœud-à-surface	126
6.2	Résultats numériques pour un cas test de contact 2D avec non-linéarités matérielles	128
6.2.1	Comportement non-linéaire élasto-plastique isotrope du combustible	128
6.2.2	Comportement non-linéaire visco-plastique isotrope de la gaine	129
6.2.3	Construction du modèle HHR	129
6.3	Conclusion	135

6.1 Hyper-réduction hybride d'un problème de contact en appariement nœud-à-surface pour des matériaux non-linéaires.

Nous considérons dans ce chapitre des problèmes de contact entre matériaux suivant des lois de comportement non-linéaires. Afin d'être le plus générique possible, le contact sera considéré discrétisé par des formulations de type nœud-à-surface (cf. chapitre 5). Le cas de l'appariement en nœud-à-nœud a déjà été étudié dans la thèse de Jules Fauque [Fauque de Maistre, 2018].

Nous commençons par introduire la résolution par une méthode de type Newton d'un problème mécanique quasi-statique sans contact pour un matériau non-linéaire. Puis nous présenterons l'extension de cet algorithme au cas du contact ainsi que sa discrétisation par EF. Nous appliquerons ensuite le modèle HHR à ce cas.

6.1.1 Problème mécanique avec matériau non-linéaire

D'un point de vue purement formel, le problème de mécanique quasi-statique avec matériau non-linéaire change uniquement vis-à-vis du cas avec matériau linéaire (cf. problème introduit au chapitre 1) par sa définition du tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$. Ce tenseur est défini par la loi de comportement et dépend non linéairement du tenseur des déformations mais potentiellement aussi de variables internes, de la vitesse de déformation, ou d'autres caractéristiques du problème, ce qui rend le problème non-linéaire en déplacement. Nous écrivons formellement dans la suite l'équation constitutive sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}) \quad (6.1)$$

avec \mathcal{F} un opérateur non linéaire générique (généralement dérivé d'un potentiel).

En utilisant les mêmes notations que celles introduites dans le chapitre 1, la formulation forte, quasi-statique, sous hypothèse des petites déformations du problème sans contact avec matériau non-linéaire s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{f}} & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\sigma}} = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \underline{\underline{u}} + (\operatorname{grad} \underline{\underline{u}})^T) & \text{dans } \Omega, \\ \underline{\underline{u}} = \underline{\underline{u}}_0 & \text{sur } \Gamma^D, \\ \underline{\underline{\sigma}} \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{\sigma}}_0 & \text{sur } \Gamma^N, \end{array} \right. \quad (6.2)$$

6.1.2 Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème fort (6.2) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{\underline{u}} \in \mathcal{V} \text{ tel que :} \\ \mathcal{R}(\underline{\underline{u}}, \underline{\underline{v}}) = 0, \quad \forall \underline{\underline{v}} \in \mathcal{V}^0 \end{array} \right. \quad (6.3)$$

avec \mathcal{V}^0 un espace de champs cinématiquement admissibles à 0 avec la régularité suffisante (dépendant de \mathcal{F}), et \mathcal{V} l'espace de champs cinématiquement admissibles :

$$\mathcal{V} = \{ \underline{\underline{v}} = \underline{\underline{r}}(\underline{\underline{u}}_0) + \underline{\underline{w}}, \quad \underline{\underline{w}} \in \mathcal{V}^0 \} \quad (6.4)$$

Le résidu \mathcal{R} est défini par :

$$\mathcal{R}(\underline{u}, \underline{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f}^{\mathbf{T}} \underline{v} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \underline{\sigma}_0^{\mathbf{T}} \underline{v} d\Gamma \quad (6.5)$$

Par la loi de comportement non linéaire, le problème (6.3) est non linéaire en déformations et par conséquent en déplacements. La résolution de ce type de problème passe généralement par une méthode itérative linéarisant le problème. Dans ce travail nous utilisons un algorithme itératif de type Newton.

6.1.3 Résolution par un processus itératif

Par une démarche similaire à celle de la méthode de Newton, nous cherchons à annuler le résidu à l'itération k :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^k, \underline{v}) = \int_{\Omega} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)) : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \underline{f}^{\mathbf{T}}(\underline{v}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \underline{\sigma}_0^{\mathbf{T}}(\underline{v}) d\Gamma \quad (6.6)$$

Nous utilisons alors un développement de Taylor à l'ordre 1 de la loi de comportement du matériau :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)) &\approx \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) + \underline{\underline{H}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : (\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k) - \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) \\ &\approx \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})) + \underline{\underline{H}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) \end{aligned} \quad (6.7)$$

où $\underline{\underline{H}}$ est la matrice jacobienne du comportement (matrice tangente du comportement) définie par :

$$\underline{\underline{H}} = \frac{\partial \underline{\underline{\sigma}}}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \quad (6.8)$$

En injectant (6.7) dans (6.6) nous obtenons :

$$\mathcal{R}(\underline{u}^k, \underline{v}) \approx \mathcal{R}(\underline{u}^{k-1}, \underline{v}) + \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) d\Omega \quad (6.9)$$

Le problème linéaire à résoudre à l'itération k est donc :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \delta \underline{u}^k \in \mathcal{V}^0 \text{ tel que :} \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) d\Omega = -\mathcal{R}(\underline{u}^{k-1}, \underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}^0 \end{cases} \quad (6.10)$$

Le tenseur des contraintes à l'itération k est alors actualisé via l'intégration de la loi de comportement :

$$\underline{\underline{\sigma}}^k = \mathcal{F}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^k)). \quad (6.11)$$

La matrice jacobienne $\underline{\underline{H}}$ constitue un opérateur de recherche, il existe d'autres choix possibles d'opérateur de recherche moins coûteux (matrice élastique, module sécant), mais qui généralement perdent l'ordre quadratique de la méthode de Newton [Ramière et Helfer, 2015]. La résolution pratique du problème (6.10) implique souvent une discrétisation en temps que nous ne décrivons pas ici. Pour plus d'informations sur l'intégration temporelle le lecteur peut se référer à [Besson *et al.*, 2009]. Il est important de noter que l'intégration de la loi de comportement peut être très coûteuse en temps de calcul.

6.1.4 Problème de mécanique du contact entre matériaux non-linéaires

Dans cette section nous introduisons le problème de contact entre matériaux non-linéaires. Pour cela nous ajoutons les conditions de contact traitées par multiplicateurs de Lagrange à la résolution itérative du problème mécanique (6.10). Le problème quasi-statique linéaire de mécanique du contact entre matériaux non-linéaires s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta \underline{u}^k, \lambda) \in \mathcal{V}^0 \times \mathcal{W}^+ \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}^k) d\Omega + b(\underline{v}, \lambda) = -\mathcal{R}(\underline{u}^{k-1}, \underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}^0 \\ b(\delta \underline{u}^k, q - \lambda) \leq g(q - \lambda) - b(\underline{u}^{k-1}, q - \lambda), \quad \forall q \in \mathcal{W}^+ \end{array} \right. \quad (6.12)$$

avec \mathcal{W}^+ , $b(\cdot, \cdot)$ et $g(\cdot)$ définis comme dans le chapitre 1.

En considérant une discrétisation EF de Lagrange classique comme celle introduite dans la section 1.2.3 du chapitre 1, avec un ordre primal de N et dual de N_λ , nous pouvons définir le modèle EF approximant la solution de (6.12) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta \underline{u}_h^k, \lambda_h) \in \mathcal{V}_h^0 \times \mathcal{W}_h^+ \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{v}_h) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}_h^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{u}_h^k) d\Omega + b(\underline{v}_h, \lambda_h) = -\mathcal{R}(\underline{u}_h^{k-1}, \underline{v}_h), \quad \forall \underline{v}_h \in \mathcal{V}_h^0 \\ b(\delta \underline{u}_h^k, q_h - \lambda_h) \leq g(q_h - \lambda_h) - b(\underline{u}_h^{k-1}, q_h - \lambda_h), \quad \forall q_h \in \mathcal{W}_h^+ \end{array} \right. \quad (6.13)$$

avec \mathcal{V}_h^0 , \mathcal{W}_h , $b(\cdot, \cdot)$ et $g(\cdot)$ définis comme dans le chapitre 1.

En introduisant la matrice de rigidité $\underline{\underline{K}}^{k-1}$ et le vecteur du résidu $\underline{\underline{R}}^{k-1}$ tels que :

$$(\underline{\underline{K}}^{k-1})_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_i) : \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{\varepsilon}}(\sum_{p=1}^N \underline{\varphi}_p u_p^{k-1}, \underline{\varphi}_i)} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{\varphi}_j) d\Omega \quad \forall i, j \in \llbracket 1, N \rrbracket^2 \quad (6.14)$$

$$(\underline{\underline{R}}^{k-1})_i = \mathcal{R}\left(\sum_{j=1}^N \underline{\varphi}_j u_j^{k-1}, \underline{\varphi}_i\right), \quad \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket \quad (6.15)$$

nous pouvons écrire la formulation matricielle qui définit les inconnues nodales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta \underline{U}_h^k, \underline{\Delta}_h) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}_+^{N_\lambda} \text{ tel que} \\ \underline{\underline{K}}^{k-1} \delta \underline{U}_h^k + \underline{\underline{B}}^T \underline{\Delta}_h = -\underline{\underline{R}}^{k-1} \\ \underline{\underline{B}} \delta \underline{U}_h^k \leq \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{B}} \underline{U}_h^{k-1} \\ \underline{\Delta}_h^T (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{B}} \delta \underline{U}_h^k) = \underline{\Delta}_h^T \underline{\underline{B}} \underline{U}_h^{k-1} \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Le modèle EF résout donc un problème de type point-selle à chaque itération jusqu'à convergence. Le calcul des contraintes par intégration de la loi de comportement et la résolution du contact sont traités de manière séparée l'un vis-à-vis de l'autre. L'algorithme 6.1 permet de résoudre le problème EF. Pour la première étape de l'algorithme, la résolution du problème linéaire de contact (6.16), on se retrouve avec la même formulation de contact qu'entre solides élastiques (cf. chapitre 1) et donc le même type d'algorithme de résolution (cf. méthode des statuts section 1.2.3) et de solveur.

Algorithme 6.1 : Algorithme de résolution EF pour problème de contact quasi-statique non linéaire

pour $k = 1$ jusqu'à convergence **faire**

 Résoudre le problème linéarisé avec contact (6.16) ;

 En chaque point de l'intégration :

 Appeler la relation constitutive pour obtenir les contraintes ;

 Mettre à jour le résidu et la matrice de rigidité ;

 Tester la convergence ;

6.1.5 Hyper-réduction hybride d'un problème de contact entre matériaux non-linéaires avec appariement nœud-à-surface

Dans cette section nous appliquons le modèle HHR de la section 5.2 à des problèmes de contact entre matériaux non-linéaires. Nous utilisons la même stratégie à partir du problème EF linéarisé en itérations (6.16) que celle introduite sur un problème avec matériaux suivant des lois de comportement élastiques. Le problème HHR non symétrique s'écrit ainsi directement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\delta\underline{\gamma}^k, \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]) \in \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}_+^{N_C^C} \text{ tel que} \\ \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{K}^{k-1}[\mathcal{A}, \mathcal{A} \cup \mathcal{I}] \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \delta\underline{\gamma}^k \\ \quad + \underline{V}^T[\mathcal{A}_c, :] \underline{B}^T[\mathcal{A}_\lambda, \mathcal{A}_c] \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda] = \underline{V}^T[\mathcal{A}, :] \underline{\mathcal{R}}^{k-1}[\mathcal{A}] \\ \quad \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \delta\underline{\gamma}^k \leq \underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \underline{\gamma}^{k-1} \\ \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^T (\underline{D}[\mathcal{A}_\lambda] - \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \delta\underline{\gamma}^k) = \underline{\Delta}_{HR}[\mathcal{A}_\lambda]^T \underline{B}[\mathcal{A}_\lambda, \tilde{\mathcal{A}}_c] \underline{V}[\tilde{\mathcal{A}}_c, :] \underline{\gamma}^{k-1} \end{array} \right. \quad (6.17)$$

avec les notations reprises de la formulation HHR générique pour maillages non-concordants (5.23) et $\delta\underline{\gamma}^k = \underline{\gamma}^k - \underline{\gamma}^{k-1}$. Le problème (6.17) est ainsi toujours un problème de point-selle non symétrique par bloc dans le cas général de conditions de contact de type nœud-à-surface. Les mêmes outils que ceux développés dans les chapitres précédents, notamment le chapitre 5, sont utilisés pour résoudre ce problème. Concernant l'algorithme de résolution non-linéaire complet, il s'écrit comme dans l'algorithme 6.2.

Algorithme 6.2 : Algorithme de résolution HHR entre matériaux non-linéaires.

Entrées : Une initialisation $\underline{\gamma}^0$, un RID et l'ensemble \mathcal{A} associé, une BR primale \underline{V} , un critère de convergence

Sorties : La solution HHR (primale,duale)

Calcul de $\underline{\mathcal{R}}^0[\mathcal{A}]$, projeter \underline{B} sur $\underline{V}[\mathcal{A}, :]$;

$k = 0$;

tant que critère de convergence non atteint **faire**

$k = k + 1$;

 Projeter \underline{K}^{k-1} et $\underline{\mathcal{R}}^{k-1}$ sur $\underline{V}[\mathcal{A}, :]$;

 Résoudre le problème HHR (6.17) ;

 Actualiser la solution $\underline{\gamma}^k = \delta\underline{\gamma}^k + \underline{\gamma}^{k-1}$;

 Reconstruire la solution primale dans le RID : $\underline{U}^k[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}] = \underline{V}[\mathcal{A} \cup \mathcal{I}, :] \underline{\gamma}^k$;

 Intégrer la loi de comportement sur le RID : calcul de $\underline{\mathcal{R}}^k[\mathcal{A}]$;

 Tester la convergence ;

Remarque : L'hyper-réduction permet de n'avoir à évaluer qu'un nombre réduit de termes de \underline{K}^{k-1} et $\underline{\mathcal{R}}^{k-1}$ pour la projection à chaque itération de l'algorithme 6.2. La mise à jour de la contrainte (cf. (6.11)) est elle aussi accélérée en intégrant la loi de comportement uniquement

sur le RID.

Concernant le critère de convergence, nous allons utiliser un critère issu de [Michel *et al.*, 2018]. Ce critère de convergence portant directement sur le résidu en contrainte, a plus de sens physiquement et est directement exploitable pour l'hyper-réduction hybride. Il est issu de l'analogie entre la résolution d'un problème de mécanique non linéaire et un algorithme de type prédicteur-correcteur. Il s'appuie sur l'erreur entre la contrainte prédite pour la linéarisation du problème (cf. (6.7)) et la contrainte calculée via l'intégration de la loi de comportement pour la mise à jour du résidu (cf. éq. (6.11)) :

$$\underline{\underline{R}}_{\sigma}^k = \underline{\underline{\sigma}}^k - \left(\underline{\underline{\sigma}}^{k-1} + \underline{\underline{H}}|_{\underline{\underline{u}}(\underline{\underline{u}}^{k-1})} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}^k) \right) \quad (6.18)$$

Le critère de convergence est alors :

$$\max_{\text{points de Gauss}} \left(\underline{\underline{R}}_{\sigma}^k - \epsilon_r \underline{\underline{\sigma}}^k \right) < \epsilon_a \quad (6.19)$$

où ϵ_r et ϵ_a sont respectivement les seuils associés à l'erreur relative et à l'erreur absolue. Le résidu en force « classique » des algorithmes de type Newton correspond à la forme faible du résidu en contraintes ci-dessus. Ce critère a l'avantage d'être efficace même en cas de stationnarité de la contrainte anélastique et de basculer automatiquement d'une erreur relative vers une erreur absolue quand les valeurs de contraintes deviennent petites. Pour l'implémentation de l'hyper-réduction hybride, nous avons simplement à restreindre ce critère au RID :

$$\max_{i \in \mathcal{A}} \left(\underline{\underline{R}}_{\sigma}^k[\mathcal{A}] - \epsilon_r \underline{\underline{\sigma}}^k[\mathcal{A}] \right) < \epsilon_a \quad (6.20)$$

Remarque : Le critère de convergence sur le résidu en force « classique » des algorithmes de Newton utilisé pour le modèle EF étant un critère en moyenne, il mène généralement à des convergences plus rapides (avec moins d'itérations) mais également à des solutions moins précises qu'avec le critère en contraintes.

6.1.5.a Opérateur de recherche élastique

Dans le logiciel éléments finis Cast3M [Cast3M] l'opérateur de recherche de l'équation (6.7) est le tenseur d'élasticité d'ordre 4 :

$$\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{C}}. \quad (6.21)$$

L'algorithme de résolution est alors de type quasi-Newton avec un convergence linéaire. Des algorithmes d'accélération de convergence sont généralement utilisés afin de réduire les temps de calcul. Ce type d'approche s'avère concurrentielle aux approches de Newton classiques d'ordre 2 [Ramière et Helfer, 2015], et bien moins coûteux en temps de calcul.

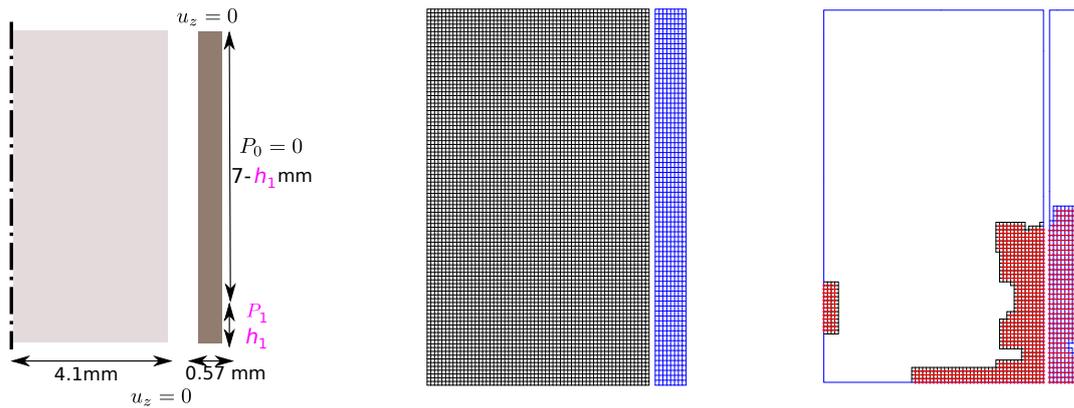
Du point de vue de la réduction d'ordre de modèle, ce choix d'opérateur de recherche permet de n'avoir à projeter qu'une seule fois par pas de temps (voire par calcul) la matrice de rigidité élastique $\underline{\underline{K}}$.

Dans ce cas de figure le résidu de convergence devient :

$$\underline{\underline{R}}_{\sigma}^k = \underline{\underline{\sigma}}^k - \left(\underline{\underline{\sigma}}^{k-1} + \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(\delta \underline{\underline{u}}^k) \right) \quad (6.22)$$

6.2 Résultats numériques pour un cas test de contact 2D avec non-linéarités matérielles

Dans cette section, nous présentons l'application du modèle HHR à un cas test avec des non linéarités matérielles. Nous considérons toujours un cas d'interaction pastille-gaine 2D axisymétrique. La géométrie, présentée sur la figure 6.1, est similaire à celle du cas test IPG avec comportement linéaire, cependant, les conditions aux limites sont différentes avec dans ce cas un déplacement selon u_z nul en bas de la gaine et de la pastille et en haut de la gaine. Le problème est ici temporel avec un chargement défini par l'application sur une hauteur h_1 d'une pression P_1 qui va croître au cours du temps. La pression initiale est de 0MPa et la pression finale est de 450MPa, la croissance de la pression est linéaire au cours du temps pour $t \in [0, 1]$ s. Nous utilisons 40 pas de temps. La hauteur d'application de la pression est dans ce cas test fixe : $h_1 = 0.9$ mm. Le combustible suit une loi de comportement non-linéaire élasto-plastique isotrope décrite dans la section 6.2.1. La gaine suit une loi de comportement élasto-visco-plastique isotrope décrite dans la section 6.2.2. Le modèle EF est construit sur le maillage non concordant sur la surface potentielle de contact présenté sur la figure 6.1b, avec un ordre primal de $N = 13708$ et dual de $N_\lambda = 101$. Le contact est traité par appariement nœud-à-surface de type maître-esclave où la pastille est définie comme esclave (elle porte donc les nœuds duaux). L'espace paramétrique est défini par le jeu initial entre les objets, d , qui est dans l'intervalle $d \in [5, 15]\mu\text{m}$.



(a) Schéma de la géométrie du cas test. (b) Maillage EF. ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) (c) RID. (croix rouges : \mathcal{A}) ($\ell = 37$, $N_\lambda^C = 42$)

FIGURE 6.1 – Configuration du cas test 2D axisymétrique IPG avec lois de comportement non-linéaires de la gaine et du combustible.

Le seuil de convergence d'erreur relative est fixé à $\epsilon_r = 10^{-5}$ et celui pour l'erreur absolue est fixé à $\epsilon_a = 1$ MPa (cf. (6.20)).

6.2.1 Comportement non-linéaire élasto-plastique isotrope du combustible

La pastille de combustible a un comportement élasto-plastique isotrope linéaire de limite d'élasticité $\sigma_0 = 80$ MPa. Son module de Young est de $E = 190$ GPa et son coefficient de Poisson est de $\nu = 0.3$. La pastille suit une loi d'écrouissage isotrope linéaire avec un module de $H = 1$ GPa selon un critère d'écoulement de Von Mises. Le domaine d'élasticité est défini tel que $f \leq 0$ avec f qui caractérise la surface d'écoulement et qui s'écrit :

$$f(\underline{\sigma}, p) = \sigma_{eq} - \sigma_s(p) \quad (6.23)$$

où σ_{eq} désigne la contrainte équivalente, $\sigma_s(p)$ le seuil de plasticité, et p la déformation plastique cumulée. Nous utilisons la contrainte de Von Mises comme contrainte équivalente, i.e. :

$$\sigma_{eq} = \left(\frac{3}{2} \underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (6.24)$$

avec $\underline{\underline{s}}$ le déviateur des contraintes défini par :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{I}} \quad (6.25)$$

L'écroissance linéaire isotrope est défini tel que :

$$\sigma_s(p) = \sigma_0 + Hp \quad (6.26)$$

6.2.2 Comportement non-linéaire visco-plastique isotrope de la gaine

La gaine a un module de Young de $E = 78\text{GPa}$ et un coefficient de Poisson de $\nu = 0.34$. Elle suit une loi de Norton de paramètre $K = 1000 \text{MPa.s}^{\frac{1}{n-1}}$ pour la consistance visco-plastique et de $n = 5$ pour le coefficient de sensibilité à la vitesse de déformation. Il s'agit d'une loi sans écroissance. La relation définissant la matrice des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{C}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) \quad (6.27)$$

où $\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}$ est la matrice des déformations visco-plastiques. La vitesse de déformation visco-plastique suit la loi en puissance suivante :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{3}{2\sigma_{eq}} \left(\frac{\sigma_{eq}}{K} \right)^{n-1} \underline{\underline{s}} \quad (6.28)$$

La contrainte équivalente σ_{eq} est définie de la même façon que pour le combustible par la relation (6.24), de même pour le déviateur des contraintes $\underline{\underline{s}}$ qui est défini par la relation (6.25).

6.2.3 Construction du modèle HHR

Les snapshots sont pris aux deux extrémités de l'espace paramétrique, c'est à dire $d = 5\mu\text{m}$ et $d = 15\mu\text{m}$. Nous sauvegardons les solutions à chaque pas de temps (i.e. 40 pas de temps) pour construire la matrice des snapshots qui contient ainsi 80 colonnes. La base réduite primale est construite avec un seuil d'erreur POD de $\epsilon = 10^{-9}$, résultant en une BR de dimension $\ell = 37$. Le RID est construit en appliquant l'algorithme DEIM sur la BR primale POD. Des contributions de bases réduites POD duale, en contraintes et sur les déformations plastiques sont également ajoutées pour la construction du RID [Ryckelynck, 2009], avec respectivement des seuils POD de 10^{-8} , 10^{-9} et 10^{-6} . Une zone d'intérêt sur l'extérieur de la gaine sur la hauteur h_1 est également ajoutée. Pour finir, trois couches d'éléments sont ajoutées pour élargir le RID afin d'obtenir une solution suffisamment précise. Cet élargissement est nécessaire dans ce cas pour prendre en compte efficacement les lois de comportements non-linéaires. La taille de cet élargissement peut être déterminée dans la partie offline sur une base de validation, cependant cela reste une détermination empirique. Le RID contient $N_\lambda^C = 42$ points de contact potentiels et est représenté sur la figure 6.1c. Il contient 901 éléments, 620 sur la pastille, 281 pour la gaine, et 1062 nœuds, 732 pour la pastille et 330 pour la gaine. Nous utilisons un enrichissement EF maximal conduisant à une BR de dimension totale $\bar{\ell} = 79$.

Nous présentons dans le tableau 6.1 les erreurs relatives au dernier pas de temps de l'historique ainsi que les temps de calcul EF et HHR en deux points de l'espace paramétrique ($d = 10\mu\text{m}$ et $d = 12.5\mu\text{m}$). Tout d'abord, nous constatons que les erreurs relatives sont satisfaisantes, toutes inférieures à 7%. La méthode HHR permet d'obtenir des solutions primales très satisfaisantes avec moins de 3% d'erreur relative. Les solutions duales et en contraintes restent plus difficile à approcher via la réduction d'ordre de modèles mais ici la méthode HHR fournit des erreurs inférieures à 7% pour les forces de contact, inférieures à 5% pour les contraintes et moins de 2.5% pour la déformation plastique cumulée, ce qui est très satisfaisant, surtout en considérant aussi peu de point dans l'espace d'entraînement.

Pour $d = 10\mu\text{m}$, l'erreur relative duale de 6.7%, l'erreur relative des contraintes σ_{rr} de 4.6%

TABLEAU 6.1 – Cas test non-linéaire. Temps de résolution et erreurs relatives entre le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique avec enrichissement EF maximal ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$) au dernier pas de temps et sur deux points de l'espace paramétrique.

jeu initial (μm)	Erreur relative (%)				Temps (ms)	
	prim.	duale	σ_{rr}	Déf. plast. cumulées	EF "PLEIADES"	HHR
10	0.89	6.7	4.6	2.2	705071	299064
12.5	2.8	2.5	2.5	0.61	775091	304436

et l'erreur relative sur les déformations plastique cumulées de 2.2% restent acceptables. Pour $d = 12.5\mu\text{m}$, les erreurs sont très satisfaisantes (cf. tableau 6.1). Nous présentons sur ce point la comparaison des solutions EF et HHR au dernier pas de temps sur la figure 6.2 pour les déplacements, la figure 6.3 pour les contraintes σ_{rr} , la figure 6.6 pour les déformations plastiques cumulées et la figure 6.5 pour les solutions duales. Les solutions présentées sont très proches des solutions EF. Pour les solutions duales, on observe sur les figures 6.4 et 6.5 une bonne précision dans l'ensemble, il y a néanmoins une légère imprécision sur la dernière force de contact active. La zone de changement de statut du contact reste encore difficile à traiter. Concernant les temps de calcul, on peut constater dans le tableau 6.1 que l'accélération du modèle d'ordre réduit vis-à-vis du modèle EF "PLEIADES" (cf. section 3.5.2) est de l'ordre de 2.5. Cette accélération est peu satisfaisante puisqu'il suffit d'utiliser une approche HPC avec deux cœurs pour atteindre le même ordre d'accélération. Il faut néanmoins tempérer cette observation puisque le code implémentant la méthode HHR est loin d'être optimisé. Par exemple, comme indiqué en section 6.1.5.a, la projection de la matrice \underline{K} du problème peut être réalisée une seule fois par pas de temps. Or, dans notre cas nous avons implémenté une projection à chaque itération de la résolution, ce qui correspond à une implémentation générique compatible avec d'autres opérateurs de recherche. Les résultats en temps de calcul présentés ici ont donc potentiellement une très grande marge de progression.

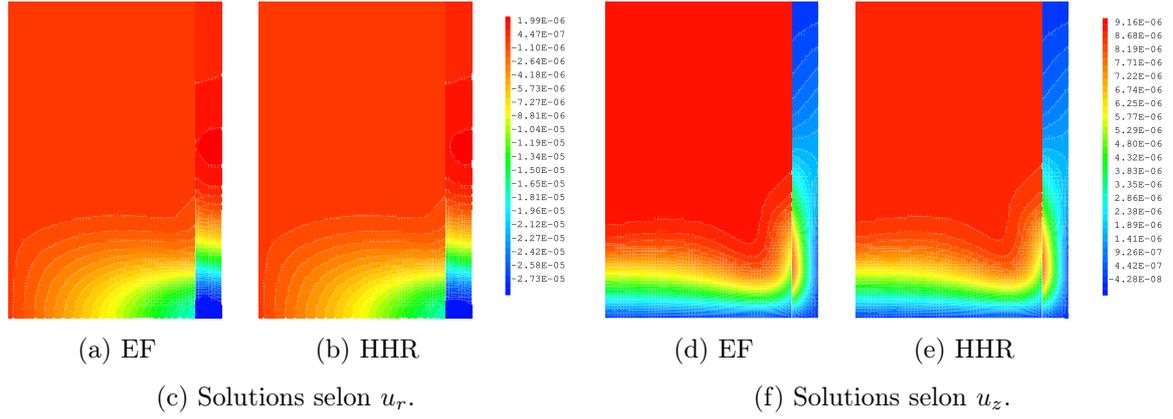


FIGURE 6.2 – Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions en déplacements au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$.

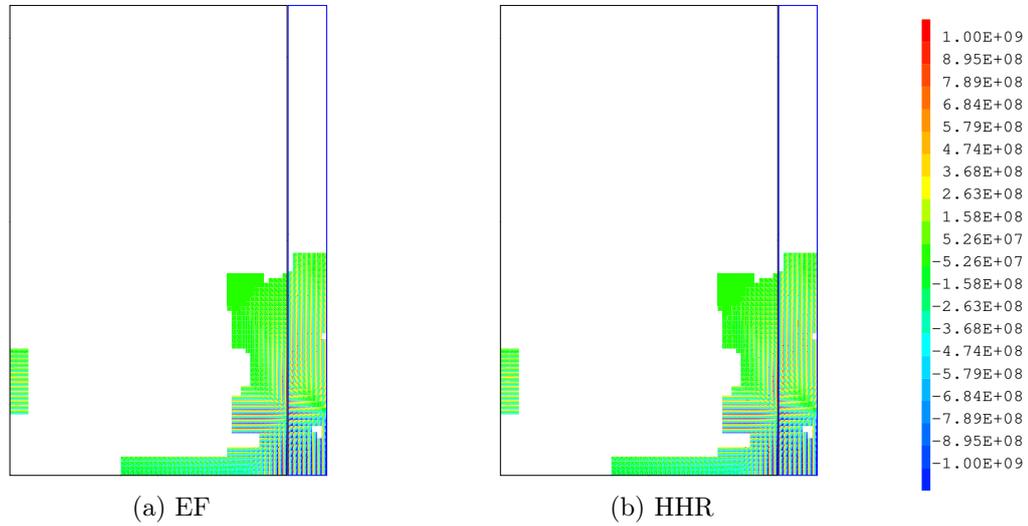


FIGURE 6.3 – Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions selon σ_{rr} au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$.

Pour finir, sur la figure 6.6c nous présentons la reconstruction sur tout le maillage de la solution en déformation plastique cumulée du modèle HHR. Cette reconstruction est obtenue à l'aide d'une projection de la solution HHR sur une base réduite POD associée aux déformations plastiques cumulées (construite avec un seuil POD de 10^{-6}) suivant la méthodologie introduite dans [Ryckelynck *et al.*, 2015]. L'erreur relative entre la déformation plastique cumulée calculée par la méthode EF ou HHR est de 0.54%, cohérente avec celle obtenue sur le RID (0.61%).

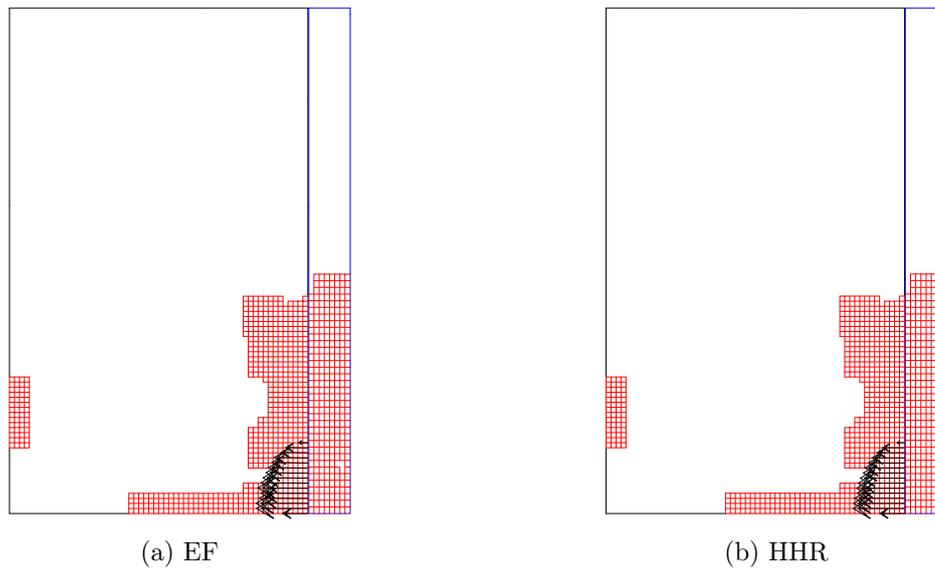


FIGURE 6.4 – Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions duales ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$, $\ell = 37$, $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$.

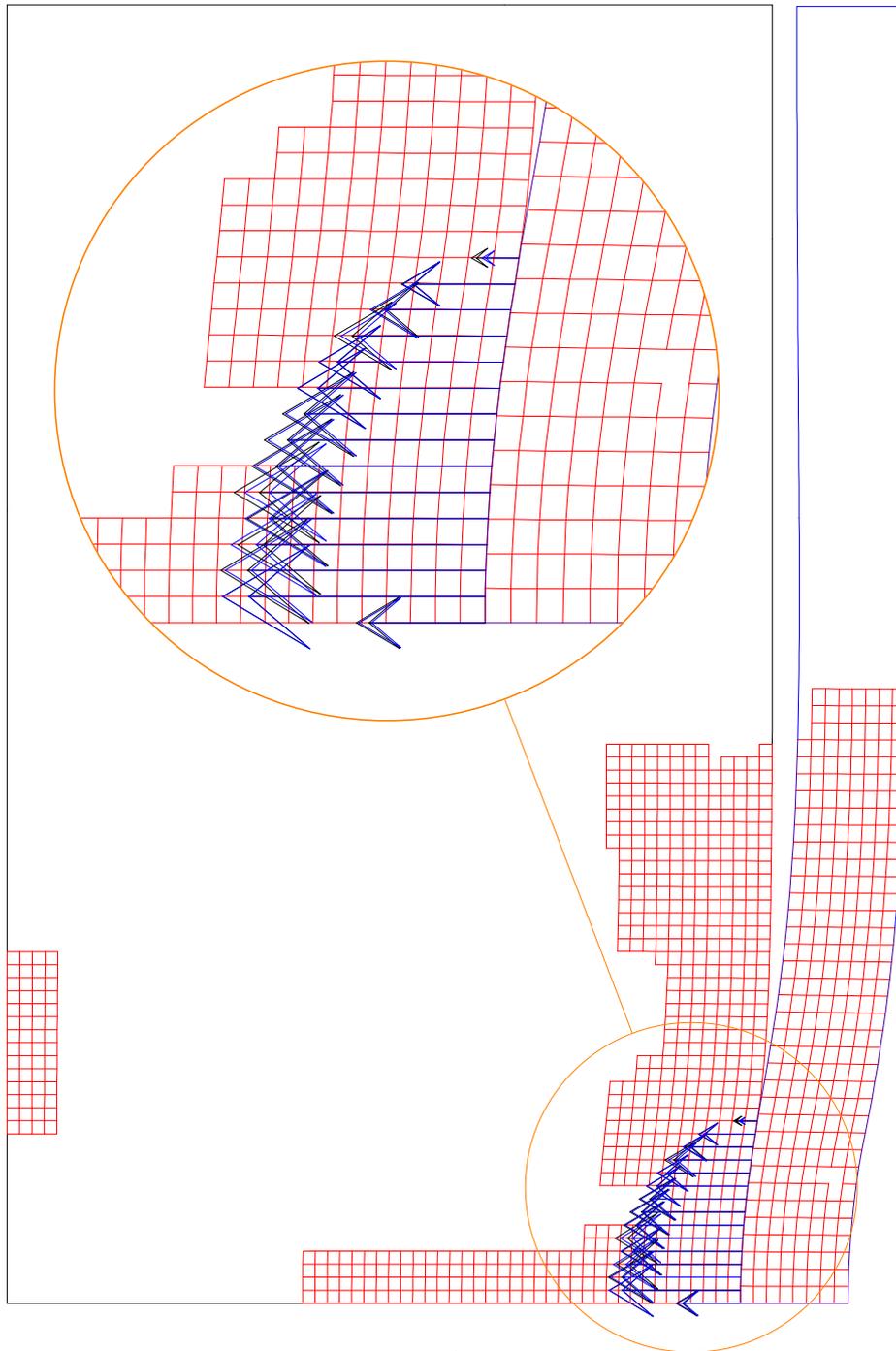


FIGURE 6.5 – Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions duales entre EF (bleu) ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR (noir) ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$) sur la déformation. Point : $d = 12.5\mu\text{m}$.

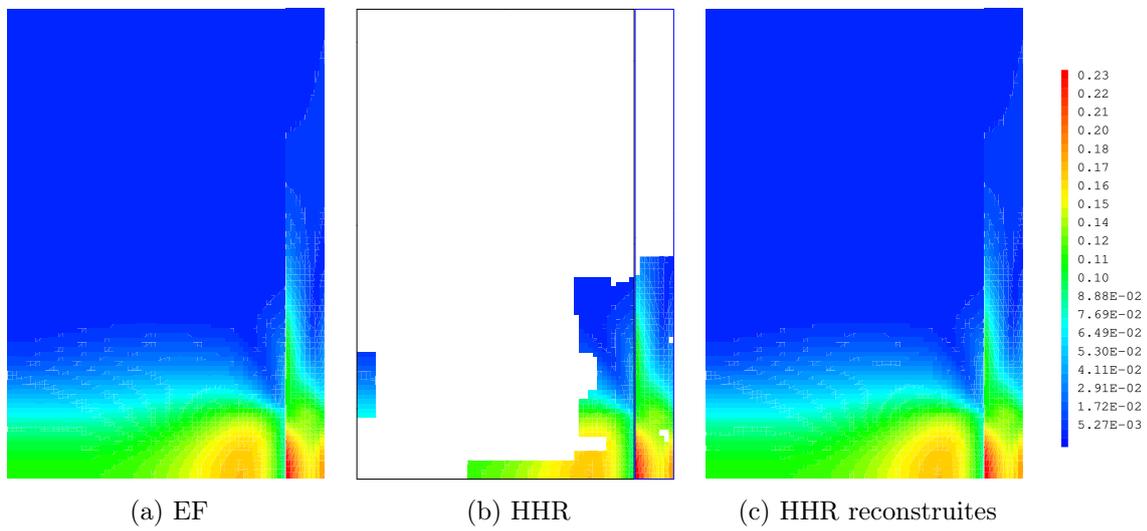


FIGURE 6.6 – Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions en déformations plastiques cumulées au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$.

6.3 Conclusion

Le modèle hyper-réduit hybride a été appliqué sur un problème de contact entre matériaux non-linéaires. Le modèle d'ordre réduit hérite des capacités de l'hyper-réduction à traiter efficacement ce type de problèmes, notamment en réduisant le nombre de termes à évaluer lors de la projection des matrices, de l'intégration des lois de comportement et du calcul du critère de convergence. Par conséquent, la mise en œuvre de la méthode HHR pour des matériaux non-linéaires est assez naturelle et permet de traiter des problèmes de contact sur maillages potentiellement non concordants avec matériaux non-linéaires. Considérant des lois de comportement élasto-plastique et visco-plastique, le modèle d'ordre réduit démontre des performances très satisfaisantes en terme de précision sur un cas test industriel d'intérêt. La réduction des temps de calcul via le modèle HHR reste limitée et ouvre la voie à des améliorations. Notamment, l'optimisation du nombre de projections réalisées pendant la résolution du modèle permettrait un gain considérable en temps de calcul. De plus, un solveur adapté aux matrices pleines devrait être adopté afin d'obtenir une résolution du modèle HHR moins coûteuse en temps CPU. Pour finir, il faudrait utiliser les stratégies d'enrichissement introduites dans ce manuscrit pour obtenir un rapport optimal entre l'ordre du modèle HHR et les précisions obtenues.

Conclusions et perspectives

Ce travail de thèse a permis l'étude théorique et numérique du modèle hyper-réduit hybride appliqué aux problèmes de mécanique du contact traités par la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Dans un premier temps, des bornes d'erreurs *a priori* et *a posteriori* ont été démontrées pour le modèle hyper-réduit hybride (HHR) dans un contexte général d'inégalité variationnelle traitée par multiplicateur de Lagrange. Le modèle hybride en multiplicateurs de Lagrange sur la base élément finis (EF) permet de dégager des estimations de type Céa, à la place de celles de type Brezzi généralement obtenues pour les problèmes de point-selle. Ainsi, l'erreur primale ne dépend pas de l'approximation duale. L'erreur duale quant à elle ne dépend que de l'erreur primale et de la constante inf-sup/LBB du modèle. Des estimateurs *a posteriori* ont également été démontrés, permettant d'introduire un nouvel indicateur d'erreur efficace.

En s'appuyant sur l'analyse d'erreur, ce travail s'est ensuite attaché à améliorer, de manière automatique, la précision duale des solutions HHR. Tout d'abord nous avons introduits proposant deux stratégies d'enrichissement de la base réduite (BR) primale permettant de garantir la solvabilité (condition inf-sup/LBB) du problème tout en améliorant significativement la précision des solutions duales obtenues. Ces stratégies reposent sur une minimisation du conditionnement de la matrice de rigidité de contact réduite, relié à la constante de la borne sur l'erreur duale. Afin de limiter l'enrichissement de la BR primale tout en améliorant encore la précision sur les solutions duales, des méthodes de clustering sur l'espace paramétrique ont été développées. Elles consistent à traiter la variété non-linéaire des solutions primales de manière linéaire par morceaux en construisant des modèles d'ordres réduits locaux. Ainsi, en améliorant l'approximation primale, nous diminuons également l'erreur duale en minimisant sa borne.

Par la suite, nous avons proposé une extension du modèle HHR au cas des maillages de contact non concordants. Par construction, le modèle HHR est une projection de type Petrov-Galerkin du problème de point-selle obtenu par EF. Cette projection conduit à un problème de point-selle généralisé (non symétrique par bloc) lors du traitement du contact en appariement nœud-à-surface. Le problème HHR généralisé, sous conditions de solvabilité associées, est alors résolu avec un solveur dédié. Les résultats obtenus sont très satisfaisants et démontrent la validité du modèle HHR étendu.

Enfin, nous avons appliqué le modèle HHR à la simulation de la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange pour des matériaux non-linéaires. En utilisant une résolution par un algorithme de type Newton, le problème linéarisé à résoudre à chaque itération est similaire à celui obtenu avec des matériaux élastiques. Ainsi, le modèle HHR généralisé peut

directement être appliqué pour ce type de problème. De plus, étant un modèle hyper-réduit, le modèle HHR bénéficie également des avantages des approches d'hyper-réduction pour la mécanique non-linéaire (réduction du nombre de termes à évaluer). Les résultats obtenus sur un cas d'intérêt industriel sont très prometteurs et démontrent la faisabilité de la réduction de problèmes de contact avec matériaux non-linéaires.

La conclusion générale que nous pouvons dégager de ce travail de thèse est que le modèle hyper-réduit hybride démontre un fort potentiel à réduire efficacement des problèmes de contact traités par multiplicateurs de Lagrange, que ce soit sur des maillages concordants ou non, sur des géométries plus ou moins complexes, sur des cas d'intérêt académique ou industriel et sur des matériaux élastiques ou non-linéaires (en considérant des lois de comportement élasto-plastique et visco-plastique)

A la suite de ces travaux, nous pouvons envisager des perspectives dans plusieurs domaines. Tout d'abord, pour la mécanique du contact, un premier axe de recherche consisterait à traiter du contact avec frottement. Dans ce cas, la méthode des multiplicateurs de Lagrange représente la force de contact tangentielle par un multiplicateur vectoriel qui n'est pas soumis à une contrainte de non-négativité. Ainsi, la méthode HHR pourrait être appliquée en construisant une base réduite POD (Proper Orthogonal Decomposition) pour cette composante. Un second axe de recherche serait de considérer du contact en grande déformations. Dans cette situation, le glissement sur la surface peut être conséquent. L'application du modèle HHR dans ce cas est un vrai défi puisque le glissement peut potentiellement décaler les surfaces de contact jusqu'à ne plus en avoir en vis-à-vis dans le RID.

Ensuite, pour la méthode HHR, nous pouvons proposer des perspectives d'amélioration pour la reconstruction des solutions duales en dehors du RID et pour les temps de calcul. Concernant la reconstruction des solutions duales en dehors du RID, il est possible d'envisager des méthodes plus fines, notamment en considérant des approches par apprentissage automatique. En sélectionnant les snapshots les plus adaptés par apprentissage automatique, il serait alors possible d'obtenir une reconstruction plus efficace. Enfin, concernant les temps de calcul, il faut implémenter la méthode HHR avec un solveur dédié aux matrices pleines de type HHR dans le but d'accélérer la résolution. De plus, pour les algorithmes de résolution de type Newton, il est nécessaire d'optimiser le nombre de projection réalisées pendant la résolution pour obtenir des gains de temps de calcul optimaux.

Pour finir, d'un point de vue de la réduction de modèle, il est impossible d'ignorer la très forte tendance des métamodèles. En particulier, les réseaux de neurones et les réseaux de neurones informés par la physique. Ces approches nécessitent de très grandes bases de données pour l'entraînement des modèles, ce qui n'est pas le cas pour les modèles par projection. Néanmoins, à l'aide de stratégies de clustering conduisant à des modèles d'ordres réduits locaux, il est possible de faire profit de ces grandes bases de données pour les méthodes par projection. Il serait donc intéressant, pour une base de donnée équivalente, de faire une comparaison des performances entre les réseaux de neurones informés par la physique et un ensemble de modèles d'ordres réduits locaux.

Liste des figures

1.1	Schéma d'un réacteur nucléaire [cea.fr].	9
1.2	Schéma du comportement d'un combustible nucléaire au cours de l'irradiation. Gauche : avant irradiation. Milieu : après première montée en puissance. Droite : après plusieurs cycles d'irradiation. [Guillet <i>et al.</i> , 2008]	10
1.3	Exemples de fissuration de la pastille de combustible et de la gaine. Coupe horizontale du crayon combustible.	10
1.4	Schéma générique du couplage PLEIADES pour les géométries de type crayon/aiguille [Michel <i>et al.</i> , 2021].	11
1.5	Schéma générique d'un problème de contact sur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$	12
1.6	Schéma générique 2D de condition de contact nœud-à-nœud et obstacle	18
1.7	Exemple d'un échantillonnage de maillage dans le cadre d'une méthode d'hyper-réduction [Fritzen <i>et al.</i> , 2018].	21
1.8	Schéma d'une méthode de clustering sur l'espace paramétrique.	22
1.9	Erreur relative entre les matrices de snapshots (primaux et duaux) et une approximation avec une BR de rang k [Fauque <i>et al.</i> , 2018].	23
1.10	Comparaison des solutions FOM (HDM) et ROM pour une approche avec BR duale construite par NNMF [Balajewicz <i>et al.</i> , 2016].	25
1.11	Erreur relative primale (norme H^1) pour une approche avec BR duale construite par CPG dans et en dehors de l'espace d'entraînement [Kollepara <i>et al.</i> , 2023]. Gauche : BR duale de rang plein. Droite : BR duale avec troncature.	26
1.12	Comparaison des solutions duales FOM et ROM pour les approches HHR et NNMF. figure issue de [Fauque <i>et al.</i> , 2018].	27
1.13	Schéma générique d'un domaine d'intégration réduit pour des problèmes de contact issu de [Fauque de Maistre, 2018].	28
1.14	Configuration EF du cas test des deux demi-disques de Hertz. $N = 1356$ $N_\lambda = 55$	36
1.15	Configuration du cas test d'interaction pastille gaine (IPG).	37
2.1	Schéma d'un domaine Ω_A pour des problèmes de contact issu de [Fauque de Maistre, 2018].	43
2.2	Cas test académique. Domaine d'intégration réduit du modèle HHR ($\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$).	62
2.3	Erreur duale $\epsilon_{\lambda, \Omega_A}$ et borne $\delta_{\lambda, \Omega_A}$ comme définies en (2.145) et (2.146) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	63
2.4	Erreur et borne primales, avec ou sans hypothèse (H), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	64
2.5	Erreur primale ϵ_u et la borne δ_u sur tout Ω comme définies en (2.147) et (2.148) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}	64
2.6	Erreur primale ϵ_{u, Ω_A} et borne <i>a posteriori</i> $\delta_{u, \Omega_A}^{post.}$ comme définies en (2.149) et (2.151) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}	65
2.7	Cas test industriel. Domaine d'intégration réduit (RID) du modèle HHR. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$, $\bar{\ell} = 70$).	66
2.8	Erreur duale $\epsilon_{\lambda, \Omega_A}$ et la borne $\delta_{\lambda, \Omega_A}$ comme définies en (2.145) et (2.146) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	66

2.9	Erreur et borne primales, avec ou sans hypothèse (H), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	67
2.10	Erreur primale ϵ_u et la borne δ_u sur tout Ω comme définies en (2.147) et (2.148) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	67
2.11	Erreur primale ϵ_{u,Ω_A} et borne <i>a posteriori</i> $\delta_{u,\Omega_A}^{post.}$ comme définies en (2.149) et (2.151) (respectivement), sur l'espace paramétrique \mathcal{P}_{valid}	68
2.12	Comparaison des capacités des indicateurs η et η_2	69
2.13	Erreur primale \mathcal{E}_u^Ω et bornes en fonction de la distance chordale (2.130).	70
3.1	Rôle du conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour les erreurs relatives primales et duales.	74
3.2	Demi-disques de Hertz. Modèle HHR : RID et multiplicateurs de Lagrange $\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$	77
3.3	Demi-disques de Hertz. Erreurs HHR évaluées sur 101 points. $\ell = 9$, $N_\lambda^C = 8$	78
3.4	IPG axisymétrique. Domaine d'intégration réduit.	79
3.5	IPG axisymétrique. Etude des deux stratégies d'enrichissement : par modes EF uniquement ('1') et par POD+EF ('1+9', 9 modes POD ajoutés), avec $\ell = 36$ et $N_\lambda^C = 34$. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$	80
3.6	IPG axisymétrique. Comparaison des solutions en u_r pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$	81
3.7	IPG axisymétrique. Comparaison des solutions en contraintes de Von Mises (déduites des déplacements) pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$	81
3.8	IPG axisymétrique. Comparaison des solutions duales pour le FOM et le modèle HHR avec les deux stratégies d'enrichissement pour $\kappa_{max} = 10$. Erreur relative en norme 2. Point : $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$	82
3.9	IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$	83
3.10	IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives sur les solutions duales reconstruites (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$	84
3.11	IPG axisymétrique. Solutions duales HHR (rouges), HHR reconstruites (bleues) et EF (noires) pour deux points de l'espace paramétrique. Modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 34$ et $\bar{\ell} = 55$ (Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$.)	84
3.12	IPG axisymétrique. Domaine d'intégration réduit étendu. ($\ell = 36$, $N_\lambda^C = 60$)	85
3.13	IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 36$, $N_\lambda^C = 60$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Méthodes d'enrichissement appliquées avec $\kappa_{max} = 10$	86
3.14	IPG axisymétrique. Forces de contact pour $P_1 = 170\text{MPa}$ et $h_1 = 3.2\text{mm}$. Modèle HHR avec enrichissement EF (flèches rouges) et modèle FOM (flèches noires). (Forces superposées du côté droit).	87
4.1	Schéma explicatif de la partie offline de la stratégie de clustering de l'espace paramétrique.	92
4.2	IPG axisymétrique. Partition et clustering de l'espace paramétrique à partir de snapshots réguliers.	94
4.3	IPG axisymétrique. Erreur d'approximation sur les matrices de snapshots locales pour le cas test avec (K=3) clusters et sans clustering.	95
4.4	IPG axisymétrique. RID locaux.	95

4.5	IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Espace test de 3100 points. Méthode d'enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR avec $\ell = \{31, 39, 36\}$, $N_\lambda^C = \{36, 40, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{54, 67, 57\}$	96
4.6	IPG axisymétrique. Carte des erreurs relatives duales reconstruites (en %) pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Espace test de 3100 points. Méthode d'enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR avec $\ell = \{31, 39, 36\}$, $N_\lambda^C = \{36, 40, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{54, 67, 57\}$	98
4.7	IPG axisymétrique. Espace d'entraînement avec snapshots irréguliers. Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR avec $\ell = 33$, $N_\lambda^C = 57$ sur un espace test de 3100 points. Stratégies d'enrichissement appliquée avec conditionnement max. de $\kappa_{max} = 10$	99
4.8	IPG axisymétrique. Stratégie de clustering pour des snapshots irréguliers. $K = 3$ clusters	100
4.9	IPG axisymétrique. Snapshots irréguliers. RIDs associés aux modèles réduits locaux.	100
4.10	IPG axisymétrique. Snapshots irréguliers. Carte des erreurs relatives duales (en %) sur l'espace paramétrique pour la stratégie de clustering avec $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. Modèles HHR models avec $\ell = \{27, 35, 23\}$, $N_\lambda^C = \{36, 56, 35\}$ et $\bar{\ell} = \{52, 77, 48\}$	101
5.1	Schéma générique d'une condition de contact nœud-à-surface.	105
5.2	Schéma des conditions de contact sur le RID.	109
5.3	Schéma de la discrétisation du contact et de la fermeture du RID pour différents appariements nœud-à-surface.	111
5.4	Configuration du cas test d'interaction pastille gaine (IPG) en appariement nœud-à-surface (maître : gaine, esclave : pastille).	113
5.5	Comparaison des solutions selon u_r des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	114
5.6	Comparaison des solutions selon u_z des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	114
5.7	Erreurs absolues sur les déplacements entre les solutions des modèles EF ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$). Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	115
5.8	Comparaison des contraintes de Von Mises des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	115
5.9	Comparaison des contraintes σ_{rr} des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	116
5.10	Erreurs absolues sur les contraintes entre les solutions des modèles EF ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$). Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	116
5.11	Comparaison des solutions duales des modèles EF et HHR non symétrique. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	117
5.12	Solution duale EF ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$) en noir et HHR non symétrique ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$) en bleu. Point : $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	117
5.13	Carte des erreurs relatives duales (en %) pour le modèle HHR non symétrique avec $\ell = 35$, $N_\lambda^C = 53$ sur 3100 points de l'espace paramétrique. Enrichissement EF max. $\bar{\ell} = 88$	118
5.14	Erreurs et bornes primales du modèle HHR non symétrique, sur le RID ou sur le maillage complet et sur l'espace paramétrique \mathcal{P} . ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$, $\ell = 35$, $N_\lambda^C = 53$, $\bar{\ell} = 88$)	119
5.15	Erreur primale ϵ_{u,Ω_A} et borne <i>a posteriori</i> $\delta_{u,\Omega_A}^{post.}$ pour le modèle HHR non symétrique sur l'espace paramétrique \mathcal{P} telles que définies en (2.149) et (2.151).	119

6.1	Configuration du cas test 2D axisymétrique IPG avec lois de comportement non-linéaires de la gaine et du combustible.	128
6.2	Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions en déplacements au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$	131
6.3	Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions selon σ_{rr} au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$	131
6.4	Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions duales ($N = 13708$, $N_\lambda = 101$, $\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$	132
6.5	Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions duales entre EF (bleu) ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR (noir) ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$) sur la déformation. Point : $d = 12.5\mu\text{m}$	133
6.6	Cas test non-linéaire. Comparaison des solutions en déformations plastiques cumulées au dernier pas de temps pour le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$). Point : $d = 12.5\mu\text{m}$	134

Liste des tableaux

3.1	IPG axisymétrique. Etude des stratégies d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF ($l = 36$ et $N_\lambda^C = 34$). $\kappa_{max} = 1$	80
3.2	IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d'enrichissement par fonctions de formes EF et/ou modes POD appliquées avec $\kappa_{max} = 10$. ($l = 36$ et $N_\lambda^C = 34$). 3100 points de tests. . .	83
3.3	IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF appliquées avec $\kappa_{max} = 10$ pour le RID élargi. ($l = 36$ et $N_\lambda^C = 60$). 3100 points de tests.	86
4.1	IPG axisymétrique. Etude de la stratégie de clustering avec enrichissement EF maximal.	96
4.2	IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec la stratégie de clustering sur grille régulière pour $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. 3100 points de tests.	97
4.3	IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec les stratégies d'enrichissement par modes POD et fonctions de formes EF appliquées avec $\kappa_{max} = 10$ pour la grille de snapshots irrégulière. ($l = 33$ et $N_\lambda^C = 57$). 3100 points de tests.	99
4.4	IPG axisymétrique. Temps moyen CPU et accélération des modèles EF et HHR avec la stratégie de clustering sur grille irrégulière pour $K = 3$ clusters. Enrichissement EF avec $\kappa_{max} = 10$. 3100 points de tests.	101
5.1	Temps et erreurs relatives des modèles EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique avec enrichissement EF maximal ($\bar{\ell} = 88$, $N_\lambda^C = 53$) sur le point de l'espace paramétrique $P_1 = 190\text{MPa}$ et $h_1 = 5.2\text{mm}$	118

6.1	Cas test non-linéaire. Temps de résolution et erreurs relatives entre le modèle EF ($N = 13708$ $N_\lambda = 101$) et HHR non symétrique avec enrichissement EF maximal ($\ell = 37$ $N_\lambda^C = 42$, $\bar{\ell} = 79$) au dernier pas de temps et sur deux points de l'espace paramétrique.	130
-----	---	-----

Liste des algorithmes

1.1	Algorithme des statuts pour la résolution du contact traité par multiplicateurs de Lagrange.	17
1.2	Algorithme DEIM	31
1.3	Algorithme glouton pour la sélection des snapshots	34
3.1	Algorithme glouton basé sur le conditionnement de la matrice de rigidité de contact projetée pour l'enrichissement de la BR primale par fonctions de forme EF.	75
6.1	Algorithme de résolution EF pour problème de contact quasi-statique non linéaire	126
6.2	Algorithme de résolution HHR entre matériaux non-linéaires.	126

Références bibliographiques

- [Abide *et al.*, 2016] ABIDE, S., BARBOTEU, M. et DANAN, D. (2016). Analysis of two active set type methods to solve unilateral contact problems. *Applied Mathematics and Computation*, 284:286–307. Cité à la page [17](#).
- [Amsallem *et al.*, 2010] AMSALLEM, D., CORTIAL, J. et FARHAT, C. (2010). Towards real-time computational-fluid-dynamics-based aeroelastic computations using a database of reduced-order information. *AIAA Journal*, 48(9):2029–2037. Cité à la page [22](#).
- [Amsallem *et al.*, 2012] AMSALLEM, D., ZAHR, M. J. et FARHAT, C. (2012). Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 92(10):891–916. Cité à la page [22](#).
- [Babuška, 1973] BABUŠKA, I. (1973). The finite element method with lagrangian multipliers. *Numerische Mathematik*, 20:179–192. Cité à la page [42](#).
- [Bader *et al.*, 2016] BADER, E., ZHANG, Z. et VEROY, K. (2016). An empirical interpolation approach to reduced basis approximations for variational inequalities. *Mathematical and Computer Modelling of Dynamical Systems*, 22(4):345–361. Cité à la page [23](#).
- [Bai, 2002] BAI, Z. (2002). Krylov subspace techniques for reduced-order modeling of large-scale dynamical systems. *Applied Numerical Mathematics*, 43(1):9–44. 19th Dundee Biennial Conference on Numerical Analysis. Cité à la page [24](#).
- [Balajewicz *et al.*, 2016] BALAJEWICZ, M., AMSALLEM, D. et FARHAT, C. (2016). Projection-based model reduction for contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 106(8):644–663. Cité aux pages [25](#), [139](#).
- [Balajewicz et Toivanen, 2017] BALAJEWICZ, M. et TOIVANEN, J. (2017). Reduced order models for pricing european and american options under stochastic volatility and jump-diffusion models. *Journal of Computational Science*, 20:198 – 204. Cité à la page [23](#).
- [Ballani *et al.*, 2018] BALLANI, J., HUYNH, D., KNEZEVIC, D., NGUYEN, L. et PATERA, A. (2018). A component-based hybrid reduced basis/finite element method for solid mechanics with local nonlinearities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 329:498–531. Cité à la page [23](#).
- [Barnett *et al.*, 2023] BARNETT, J., FARHAT, C. et MADAY, Y. (2023). Neural-network-augmented projection-based model order reduction for mitigating the kolmogorov barrier to reducibility. *Journal of Computational Physics*, 492:112420. Cité à la page [22](#).
- [Barrault *et al.*, 2004] BARRAULT, M., MADAY, Y., NGUYEN, N. C. et PATERA, A. T. (2004). An ‘empirical interpolation’ method : application to efficient reduced-basis discretization of partial differential equations. *Comptes Rendus Mathématique*, 339(9):667–672. Cité à la page [20](#).
- [Benaceur *et al.*, 2020] BENACEUR, A., ERN, A. et EHRLACHER, V. (2020). A reduced basis method for parametrized variational inequalities applied to contact mechanics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(6):1170–1197. Cité aux pages [25](#), [35](#), [76](#) et [77](#).

- [Besson *et al.*, 2009] BESSON, J., CAILLETAUD, G., CHABOCHE, J.-L. et FOREST, S. (2009). *Non-linear mechanics of Materials*. Springer Science & Business Media. Cité à la page 124.
- [Binev *et al.*, 2011] BINEV, P., COHEN, A., DAHMEN, W., DEVORE, R., PETROVA, G. et WOTASZCZYK, P. (2011). Convergence rates for greedy algorithms in reduced basis methods. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 43(3):1457–1472. Cité à la page 21.
- [Boncoraglio et Farhat, 2022] BONCORAGLIO, G. et FARHAT, C. (2022). Piecewise-global nonlinear model order reduction for pde-constrained optimization in high-dimensional parameter spaces. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 44(4):A2176–A2203. Cité à la page 22.
- [Breiman, 2001] BREIMAN, L. (2001). Random forests. *Machine Learning*, 45:5–32. Cité à la page 93.
- [Brezzi, 1974] BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrangian multipliers. *Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Analyse numérique*, 8(R2):129–151. Cité aux pages 15, 41, 42 et 48.
- [Brezzi et Fortin, 1991] BREZZI, F. et FORTIN, M. (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer New York, NY. Cité à la page 46.
- [Brezzi *et al.*, 1978] BREZZI, F., HAGER, W. et RAVIART, P. (1978). Error estimates for the finite element solution of variational inequalities. part ii. mixed methods. *Numerische Mathematik*, 31:1–16. Cité aux pages 42, 44, 48 et 60.
- [Cast3M] CAST3M. <http://www-cast3m.cea.fr/>. Cité aux pages 35, 127.
- [Céa, 1964] CÉA, J. (1964). Approximation variationnelle des problèmes aux limites. *Annales de l'Institut Fourier*, 14(2):345–444. Cité aux pages 51, 52.
- [cea.fr] CEA.FR. <https://www.cea.fr/comprendre/Pages/energies/nucleaire/essentiel-sur-fonctionnement-reacteur-nucleaire-electrogene.aspx>. Cité aux pages 9, 139.
- [Chabrand *et al.*, 1998] CHABRAND, P., DUBOIS, F. et RAOUS, M. (1998). Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction. *Mathematical and Computer Modelling*, 28(4):97–108. Recent Advances in Contact Mechanics. Cité aux pages 15, 16.
- [Chapman, 2019] CHAPMAN, T. (2019). *Nonlinear model order reduction for structural systems with contact*. Theses, Stanford University. Cité à la page 26.
- [Chaturantabut et Sorensen, 2010] CHATURANTABUT, S. et SORENSEN, D. C. (2010). Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 32(5):2737–2764. Cité aux pages 20, 30.
- [Choi *et al.*, 2020] CHOI, Y., BONCORAGLIO, G., ANDERSON, S., AMSALLEM, D. et FARHAT, C. (2020). Gradient-based constrained optimization using a database of linear reduced-order models. *Journal of Computational Physics*, 423:109787. Cité à la page 22.
- [Chouly et Hild, 2013] CHOULY, F. et HILD, P. (2013). A nitsche-based method for unilateral contact problems : Numerical analysis. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 51(2):1295–1307. Cité à la page 23.
- [Ciarlet *et al.*, 2003] CIARLET, P., HUANG, J. et ZOU, J. (2003). Some observations on generalized saddle-point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 25(1):224–236. Cité aux pages 73, 109.
- [Cohen *et al.*, 2023] COHEN, A., FARHAT, C., SOMACAL, A. et MADAY, Y. (2023). Nonlinear compressive reduced basis approximation for PDE's. working paper or preprint. Cité à la page 22.
- [Cottle *et al.*, 2009] COTTLE, R. W., PANG, J.-S. et STONE, R. E. (2009). *The Linear Complementarity Problem*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Cité à la page 17.

- [Craig et Bampton, 1968] CRAIG, R. R. et BAMPTON, M. C. C. (1968). Coupling of substructures for dynamic analyses. *AIAA Journal*, 6(7):1313–1319. Cité à la page 24.
- [Daniel *et al.*, 2022] DANIEL, T., CASENAVE, F., AKKARI, N., KETATA, A. et RYCKELYNCK, D. (2022). Physics-informed cluster analysis and a priori efficiency criterion for the construction of local reduced-order bases. *Journal of Computational Physics*, 458:111120. Cité à la page 22.
- [Daniel *et al.*, 2020] DANIEL, T., CASENAVE, F., AKKARI, N. et RYCKELYNCK, D. (2020). Model order reduction assisted by deep neural networks (rom-net). *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 7(1):16. Cité aux pages 22, 89, 91, 92 et 93.
- [Dautray et Lions, 1988] DAUTRAY, R. et LIONS, J.-L. (1988). *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Volume 2 : Functional And Variational Methods*. Springer. Cité à la page 15.
- [Delhez *et al.*, 2021] DELHEZ, E., NYSSSEN, F., GOLINVAL, J.-C. et BATAILLY, A. (2021). Reduced order modeling of blades with geometric nonlinearities and contact interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 500:116037. Cité à la page 24.
- [Dolean *et al.*, 2015] DOLEAN, V., JOLIVET, P. et NATAF, F. (2015). An Introduction to Domain Decomposition Methods : algorithms, theory and parallel implementation. Lecture. Cité à la page 44.
- [Duvaut et Lions, 1976] DUVAUT, G. et LIONS, J.-L. (1976). *Inequalities in mechanics and physics*. Springer Science & Business Media. Cité aux pages 12, 14 et 41.
- [El-Abbasi et Bathe, 2001] EL-ABBASI, N. et BATHE, K.-J. (2001). Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm. *Computers & Structures*, 79(16):1473–1486. Cité aux pages 16, 106.
- [Farhat *et al.*, 2014] FARHAT, C., AVERY, P., CHAPMAN, T. et CORTIAL, J. (2014). Dimensional reduction of nonlinear finite element dynamic models with finite rotations and energy-based mesh sampling and weighting for computational efficiency. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 98(9):625–662. Cité à la page 26.
- [Farhat *et al.*, 2021] FARHAT, C., GRIMBERG, S., MANZONI, A. et QUARTERONI, A. (2021). *5 Computational bottlenecks for PROMs : precomputation and hyperreduction*, pages 181–244. De Gruyter, Berlin, Boston. Cité à la page 20.
- [Fauque *et al.*, 2018] FAUQUE, J., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2018). Hybrid hyper-reduced modeling for contact mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 115(1):117–139. Cité aux pages 22, 23, 26, 27, 30, 33, 35, 37, 44, 57, 59, 68, 70, 73, 75, 97 et 139.
- [Fauque de Maistre, 2018] FAUQUE DE MAISTRE, J. (2018). *Modèle d'ordre réduit en mécanique du contact. Application à la simulation du comportement des combustibles nucléaires*. Theses, Université Paris sciences et lettres. Cité aux pages 26, 27, 28, 37, 43, 123 et 139.
- [Fritzen *et al.*, 2018] FRITZEN, F., HAASDONK, B., RYCKELYNCK, D. et SCHÖPS, S. (2018). An algorithmic comparison of the hyper-reduction and the discrete empirical interpolation method for a nonlinear thermal problem. *Mathematical and Computational Applications*, 23(1). Cité aux pages 21, 139.
- [Gerner et Veroy, 2012] GERNER, A.-L. et VEROY, K. (2012). Certified reduced basis methods for parametrized saddle point problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 34(5): A2812–A2836. Cité aux pages 50, 54.
- [Giacoma *et al.*, 2016] GIACOMA, A., DUREISSEIX, D. et GRAVOUIL, A. (2016). An efficient quasi-optimal space-time pgd application to frictional contact mechanics. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 3(1):12. Cité à la page 23.
- [Giacoma *et al.*, 2014] GIACOMA, A., DUREISSEIX, D., GRAVOUIL, A. et ROCHETTE, M. (2014). A multiscale large time increment/FAS algorithm with time-space model reduction

- for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 97(3):207–230. Cité à la page 23.
- [Glas, 2018] GLAS, S. (2018). *Noncoercive and parabolic variational inequalities : analysis, applications and model reduction*. Theses, Universität Ulm. Cité à la page 22.
- [Glas et Urban, 2015] GLAS, S. et URBAN, K. (2015). Numerical investigations of an error bound for reduced basis approximations of noncoercive variational inequalities. *IFAC-PapersOnLine*, 48(1):721–726. 8th Vienna International Conference on Mathematical Modelling. Cité à la page 24.
- [Glowinski, 1984] GLOWINSKI, R. (1984). *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*. Springer Berlin, Heidelberg. Cité à la page 41.
- [Goury et al., 2021] GOURY, O., CARREZ, B. et DURIEZ, C. (2021). Real-time simulation for control of soft robots with self-collisions using model order reduction for contact forces. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 6(2):3752–3759. Cité à la page 25.
- [Guillet et al., 2008] GUILLET, J.-L., GUÉRIN, Y. et BONIN, B. (2008). *Les combustibles nucléaires*. E-den, Une monographie de la Direction de l'énergie nucléaire. CEA Saclay et Groupe Moniteur. Cité aux pages 10, 139.
- [Haasdonk et al., 2012] HAASDONK, B., SALOMON, J. et WOHLMUTH, B. (2012). A reduced basis method for parametrized variational inequalities. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 50(5):2656–2676. Cité à la page 24.
- [Heintz et Hansbo, 2006] HEINTZ, P. et HANSBO, P. (2006). Stabilized lagrange multiplier methods for bilateral elastic contact with friction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(33):4323–4333. Cité à la page 23.
- [Helfer et al., 2015] HELFER, T., MICHEL, B., PROIX, J.-M., SALVO, M., SERCOMBE, J. et CASELLA, M. (2015). Introducing the open-source mfront code generator : Application to mechanical behaviours and material knowledge management within the pleiades fuel element modelling platform. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(5):994–1023. Cité à la page 12.
- [Hertz, 1882] HERTZ, H. (1882). Ueber die berührung fester elastischer körper. 1882(92):156–171. Cité à la page 35.
- [Hughes et al., 1976] HUGHES, T. J., TAYLOR, R. L., SACKMAN, J. L., CURNIER, A. et KANONUKULCHAI, W. (1976). A finite element method for a class of contact-impact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 8(3):249–276. Cité à la page 106.
- [Iollo et al., 2023] IOLLO, A., SAMBATARO, G. et TADDEI, T. (2023). A one-shot overlapping schwarz method for component-based model reduction : application to nonlinear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 404:115786. Cité aux pages 44, 49.
- [Ito et Kunisch, 2006] ITO, K. et KUNISCH, K. (2006). Parabolic variational inequalities : The lagrange multiplier approach. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 85(3):415–449. Cité à la page 41.
- [Karush, 1939] KARUSH, W. (1939). Minima of functions of several variables with inequalities as side conditions. *Mémoire de D.E.A.* Cité à la page 13.
- [Ke et Lek-Heng, 2016] KE, Y. et LEK-HENG, L. (2016). Schubert varieties and distances between subspaces of different dimensions. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 37(3):1176–1197. Cité aux pages 57, 58.
- [Kikuchi et Oden, 1987] KIKUCHI, N. et ODEN, J. (1987). Contact problems in elasticity : A study of variational inequalities and finite element methods. Cité aux pages 12, 15, 16 et 41.
- [Kollepara et al., 2023] KOLLEPARA, K. S., NAVARRO-JIMÉNEZ, J. M., LE GUENNEC, Y., SILVA, L. et AGUADO, J. V. (2023). On the limitations of low-rank approximations in

- contact mechanics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 124(1):217–234. Cité aux pages 22, 23, 26, 89 et 139.
- [Kolmogorov, 1936] KOLMOGOROV, A. (1936). Über die beste annäherung von funktionen einer gegebenen funktionenklasse. *Annals of Mathematics*, 37:107. Cité à la page 21.
- [Kuhn et Tucker, 1951] KUHN, H. W. et TUCKER, A. W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symposium*, pages 481–492. Cité à la page 13.
- [Lainet *et al.*, 2019] LAINET, M., MICHEL, B., DUMAS, J.-C., PELLETIER, M. et RAMIÈRE, I. (2019). Germinal, a fuel performance code of the pleiades platform to simulate the in-pile behaviour of mixed oxide fuel pins for sodium-cooled fast reactors. *Journal of Nuclear Materials*, 516:30–53. Cité à la page 11.
- [Le Berre *et al.*, 2022a] LE BERRE, S., RAMIÈRE, I., FAUQUE, J. et RYCKELYNCK, D. (2022a). Condition number and clustering-based efficiency improvement of reduced-order solvers for contact problems using lagrange multipliers. *Mathematics*, 10(9):1495. Cité aux pages 44, 59, 71 et 89.
- [Le Berre *et al.*, 2022b] LE BERRE, S., RAMIÈRE, I., FAUQUE, J. et RYCKELYNCK, D. (2022b). Hyper-réduction d'ordre de modèle pour la mécanique du contact traité par multiplicateurs de Lagrange. In *15e colloque national en calcul des structures*, 83400 Hyères-les-Palmiers, France. Université Polytechnique Hauts-de-France [UPHF]. Cité aux pages 71, 89.
- [Le Berre *et al.*, 2023a] LE BERRE, S., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2023a). Error analysis of the Hybrid Hyper-Reduction method for frictionless contact problems. In *ICCCM 2023 - 7th International conference on computational contact mechanics*, Turin, Italy. ECCOMAS (Thematic conference). Cité à la page 39.
- [Le Berre *et al.*, 2023b] LE BERRE, S., RAMIÈRE, I. et RYCKELYNCK, D. (2023b). Hyper-Reduction of Node-to-Surface contact models between nonlinear materials. In *17th U. S. National Congress on Computational Mechanics*, Albuquerque, New-Mexico, USA. Cité à la page 103.
- [Leturcq, 2022] LETURCQ, B. (2022). *Réduction de modèles thermomécaniques non linéaires d'assemblages combustibles en vue d'un calcul de coeur REP*. Theses, école Polytechnique. Cité à la page 25.
- [Liu *et al.*, 2017] LIU, H., RAMIÈRE, I. et LEBON, F. (2017). On the coupling of local multilevel mesh refinement and zz methods for unilateral frictional contact problems in elastostatics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 323:1–26. Cité aux pages 36, 110.
- [Manvelyan *et al.*, 2021] MANVELYAN, D., SIMEON, B. et WEVER, U. (2021). An efficient model order reduction scheme for dynamic contact in linear elasticity. *Computational Mechanics*, 68(6):1283–1295. Cité à la page 24.
- [Manvelyan *et al.*, 2022] MANVELYAN, D., SIMEON, B. et WEVER, U. (2022). A physics-based model reduction approach for node-to-segment contact problems in linear elasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 123(23):5937–5963. Cité à la page 24.
- [Marelle *et al.*, 2016] MARELLE, V., GOLDBRONN, P., BERNAUD, S., CASTELIER, E., JULIEN, J., NKONGA, K., NOIROT, L. et RAMIÈRE, I. (2016). New developments in alcyone 2.0 fuel performance code. Cité à la page 11.
- [Marelle *et al.*, 2013] MARELLE, V., MICHEL, B., SERCOMBE, J., GOLDBRONN, P., STRUZIK, C. et BOULORE, A. (2013). Advanced simulation of fuel behavior under irradiation in the pleiades software environment. *IAEA TECDOC SERIES, Modelling of Water Cooled Fuel Including Design Basis and Severe Accidents*, IAEA-TECDOC-CD-1775. Cité à la page 11.

- [Michel *et al.*, 2018] MICHEL, B., HELFER, T., RAMIÈRE, I. et ESNOUL, C. (2018). A new numerical methodology for simulation of unstable crack growth in time independent brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 188:126–150. Cité à la page 127.
- [Michel *et al.*, 2021] MICHEL, B., RAMIÈRE, I., VIALARD, I., INTROINI, C., LAINET, M., CHAUVIN, N., MARELLE, V., BOULORE, A., HELFER, T., MASSON, R., SERCOMBE, J., DUMAS, J.-C., NOIROT, L. et BERNAUD, S. (2021). Chapter 9 - two fuel performance codes of the pleiades platform : Alcyone and germinal. In WANG, J., LI, X., ALLISON, C. et HOHORST, J., éditeurs : *Nuclear Power Plant Design and Analysis Codes*, Woodhead Publishing Series in Energy, pages 207–233. Woodhead Publishing. Cité aux pages 11, 139.
- [Niakh, 2022] NIAKH, I. (2022). *Réduction de modèle pour les inéquations variationnelles*. Theses, École des Ponts ParisTech. Cité aux pages 23, 25 et 26.
- [Niakh *et al.*, 2023] NIAKH, I., DROUET, G., EHRLACHER, V. et ERN, A. (2023). Stable model reduction for linear variational inequalities with parameter-dependent constraints. *ESAIM : M2AN*, 57(1):167–189. Cité à la page 25.
- [Nitsche, 1971] NITSCHKE, J. C. C. (1971). Über ein variationsprinzip zur lösung von dirichlet-problemen bei verwendung von teilräumen, die keinen randbedingungen unterworfen sind. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 36:9–15. Cité à la page 23.
- [Ohlberger et Rave, 2016] OHLBERGER, M. et RAVE, S. (2016). Reduced basis methods : Success, limitations and future challenges. *Proceedings of the Conference Algoritmy*, pages 1–12. Cité à la page 21.
- [Park et Jun, 2009] PARK, H. et JUN, C. (2009). A simple and fast algorithm for k-medoids clustering. *Expert Systems with Applications*, 36(2, Part 2):3336–3341. Cité à la page 92.
- [Pedregosa *et al.*, 2011] PEDREGOSA, F., VAROQUAUX, G., GRAMFORT, A., MICHEL, V., THIRION, B., GRISEL, O., BLONDEL, M., PRETTENHOFER, P., WEISS, R., DUBOURG, V., VANDERPLAS, J., PASSOS, A., COURNAPEAU, D., BRUCHER, M., PERROT, M. et DUCHESNAY, E. (2011). Scikit-learn : Machine learning in python. *Journal of Machine Learning Research*, 12(85):2825–2830. Cité à la page 93.
- [Peherstorfer, 2022] PEHERSTORFER, B. (2022). Breaking the kolmogorov barrier with nonlinear model reduction. *Notices of the American Mathematical Society*, 69(5):725–733. Cité aux pages 21, 22 et 89.
- [Quarteroni *et al.*, 2015] QUARTERONI, A., MANZONI, A. et NEGRI, F. (2015). *Reduced basis methods for partial differential equations : an introduction*. Springer. Cité à la page 44.
- [Ramière et Helfer, 2015] RAMIÈRE, I. et HELFER, T. (2015). Iterative residual-based vector methods to accelerate fixed point iterations. *Computers & Mathematics with Applications*, 70(9):2210–2226. Cité aux pages 124, 127.
- [Raous *et al.*, 1988] RAOUS, M., CHABRAND, P. et LEBON, F. (1988). Numerical methods for frictional contact problems and applications. *Journal de mécanique theorique et appliquee*, 7(1):111 – 128. Cité à la page 17.
- [Ryckelynck, 2005] RYCKELYNCK, D. (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366. Cité à la page 21.
- [Ryckelynck, 2009] RYCKELYNCK, D. (2009). Hyper-reduction of mechanical models involving internal variables. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 77(1):75–89. Cité aux pages 21, 27, 28, 30, 31, 44, 46, 112 et 129.
- [Ryckelynck *et al.*, 2015] RYCKELYNCK, D., GALLIMARD, L. et JULES, S. (2015). Estimation of the validity domain of hyper-reduction approximations in generalized standard elastoviscoplasticity. *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences*, 2(1):19 p. Cité à la page 131.

- [Ryckelynck *et al.*, 2020] RYCKELYNCK, D., GOESSEL, T. et NGUYEN, F. (2020). Mechanical dissimilarity of defects in welded joints via Grassmann manifold and machine learning. *Comptes Rendus. Mécanique*, 348(10-11):911–935. Cité aux pages 58, 92.
- [Ryckelynck *et al.*, 2016] RYCKELYNCK, D., LAMPOH, K. et QUILICY, S. (2016). Hyper-reduced predictions for lifetime assessment of elasto-plastic structures. *Meccanica*, 51(2):309–317. Cité aux pages 45, 46 et 110.
- [Scheffold *et al.*, 2018] SCHEFFOLD, D., BACH, C., DUDDECK, F., MÜLLER, G. et BUCHSCHMID, M. (2018). Vibration frequency optimization of jointed structures with contact nonlinearities using hyper-reduction. *IFAC-PapersOnLine*, 51(2):843–848. 9th Vienna International Conference on Mathematical Modelling. Cité à la page 23.
- [Signorini, 1959] SIGNORINI, A. (1959). Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata. *Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni*, 5:95–139. Cité à la page 13.
- [Sirovich, 1987] SIROVICH, L. (1987). Turbulence and the dynamics of coherent structures. parts I–III. *Quarterly of Applied Mathematics*, 45(3):561–590. Cité à la page 19.
- [Strang, 1972] STRANG, G. (1972). Variational crimes in the finite element method. Cité à la page 53.
- [Thouvenin *et al.*, 2006] THOUVENIN, G., RICAUD, J., MICHEL, B., PLANCQ, D. et THEVENIN, P. (2006). ALCYONE : the PLEIADES fuel performance code dedicated to multidimensional PWR studies. *Proceedings of Top Fuel*. Cité à la page 11.
- [Verpeaux *et al.*, 2022] VERPEAUX, P., MILLARD, A. et BERTHINIER, C. (2022). Utilisation de relations non associées en mécanique des structures. In *CSMA2022*, volume 377296. Cité à la page 112.
- [Wohlmuth, 2000] WOHLMUTH, B. I. (2000). A mortar finite element method using dual spaces for the lagrange multiplier. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 38(3):989–1012. Cité à la page 17.
- [Wriggers, 2006] WRIGGERS, P. (2006). *Computational Contact Mechanics*. Springer Science. Cité aux pages 12, 14 et 17.

RÉSUMÉ

Ce manuscrit se focalise sur la réduction d'ordre de modèle de problèmes en mécanique du contact traités par multiplicateurs de Lagrange, qui reste un vrai défi scientifique, du fait notamment de la contrainte de signe sur les multiplicateurs. Ce travail s'appuie sur l'hyper-réduction d'ordre de modèles, méthode efficace pour le traitement des non-linéarités, et considère son extension aux problèmes de contact. Pour cela un modèle hyper-réduit hybride (HHR) est construit, reposant sur un domaine d'intégration réduit, une base réduite (BR) primale obtenue par POD (Proper Orthogonal Decomposition), et une base réduite duale obtenue via la restriction de la base duale éléments finis (EF) au domaine réduit. Le modèle HHR hérite de la nature de type point-selle du problème EF. Nous proposons dans ce travail une analyse théorique et numérique du modèle HHR.

Tout d'abord, des bornes d'erreur du modèle HHR sont théoriquement démontrées. Grâce au choix de construction de la base réduite duale par restriction sur le domaine réduit, des estimateurs a priori de type Céa peuvent être prouvés sur l'erreur primale, contrairement aux estimateurs de type Brezzi habituellement obtenus sur des problèmes mixtes. Ainsi l'erreur primale ne dépend pas de l'approximation duale. L'erreur duale quant à elle ne dépend que de l'erreur primale et de la constante inf-sup/LBB du modèle. Des estimateurs a posteriori sont également démontrés, permettant d'introduire un nouvel indicateur d'erreur efficace.

Ces estimateurs d'erreur ouvrent la voie à des techniques numériques d'amélioration automatique de la précision des solutions duales de la méthode HHR. Nous proposons ainsi deux stratégies d'enrichissement de la BR primale permettant de garantir la solvabilité (condition inf-sup/LBB) du problème tout en contrôlant les erreurs duales. Ces stratégies reposent sur une minimisation du conditionnement de la matrice de rigidité de contact réduite. Afin de limiter l'enrichissement de la BR primale tout en réduisant encore l'erreur sur les solutions duales, des méthodes de clustering sur l'espace paramétrique sont développées. Elles consistent à traiter la variété non-linéaire des solutions du problème de manière linéaire par morceaux en construisant des modèles d'ordres réduits locaux.

Nous nous intéressons ensuite à la généralisation du modèle HHR au cas des maillages de contact non concordants. Par construction, le modèle HHR est une projection de type Petrov-Galerkin du problème de point-selle obtenu par discrétisation EF. Cette projection conduit à un problème de point-selle généralisé (non symétrique par bloc) lors du traitement du contact en configuration nœud-à-surface. Le problème HHR généralisé, sous conditions de solvabilité associées, est alors résolu avec un solveur dédié. Par ailleurs, la méthode HHR hérite des capacités de l'hyper-réduction à traiter efficacement des problèmes de mécanique non-linéaire. Ainsi, des problèmes de contact unilatéral entre matériaux non linéaires déformables peuvent être réduits via la méthode HHR, ce qui dépasse l'état de l'art actuel. La précision des résultats obtenus sur un exemple industriel d'intérêt confirment le fort potentiel de la méthode HHR.

MOTS CLÉS

Hyper-réduction de modèle, Modèles réduits locaux, Mécanique du contact, Multiplicateurs de Lagrange, Maillages non concordants, Estimation d'erreur

ABSTRACT

We are interested in model order reduction of contact mechanics problems treated by Lagrange multipliers, which remains a scientific challenge, in particular due to the non negativity constraint on the multipliers. This thesis relies on Hyper-Reduced order modelling, which is an efficient strategy to deal with nonlinearities. We consider here its extension to contact mechanics. A Hybrid Hyper-Reduced (HHR) model is built, using a reduced integration domain (RID), a POD (Proper Orthogonal Decomposition) primal reduced basis (RB), and a dual reduced basis obtained by restriction of the dual finite element (FE) basis to the RID. The HHR model inherits its saddle-point formulation from the FE problem. We propose in this work a theoretical and numerical analysis of the HHR model.

First, error bounds of the HHR model are theoretically demonstrated. Thanks to the dual reduced basis construction by restriction to the reduced domain, Céa type error estimators are obtained instead of classical Brezzi estimators classically derived for mixed problems. Hence, the primal error is independent from the dual approximation, while the dual error only depends on the primal error and on the inf-sup/LBB constant of the HHR model. A posteriori error estimators are also derived, allowing for the development of a new efficient error indicator.

These error estimations pave the way to automatic numerical strategies improving the dual precision of the HHR method. We propose two primal RB enrichment strategies that ensure the solvability (LBB/inf-sup condition) of the HHR problem while significantly improving the precision of the dual solutions. These enrichment strategies are based on the minimization of the condition number of the reduced contact rigidity matrix. In order to limit the enrichment of the primal RB while still reducing the dual error, clustering methods on the parametric space are introduced. They consist in dealing with the nonlinear solution manifold in a piece-wise low-rank linear manner by building local reduced order models.

We then look at the generalization of the HHR model to non-matching contact meshes. By construction, the HHR model is a Petrov-Galerkin projection of the FE saddle-point problem. This projection leads to a generalized saddle-point problem (non block-symmetric) when node-to-surface contact conditions are considered. The generalized HHR problem, under associated solvability conditions, is then solved using a dedicated solver. Moreover, the HHR method inherits the Hyper-Reduction's ability to efficiently treat nonlinear mechanics problems. Hence, unilateral contact problems between deformable nonlinear materials can be reduced with the HHR method, which goes beyond the current state-of-the-art. Accurate results obtained on a industrial example of interest confirms the high potential of the HHR method.

KEYWORDS

Model Hyper-Reduction, Local reduced order models, Contact Mechanics, Lagrange multipliers, Non-matching meshes, Error estimation