



**HAL**  
open science

# Résistance au feu des murs de maçonnerie en pierre naturelle

Élodie Donval

► **To cite this version:**

Élodie Donval. Résistance au feu des murs de maçonnerie en pierre naturelle. Matériaux. École des Ponts ParisTech, 2023. Français. NNT : 2023ENPC0026 . tel-04470045

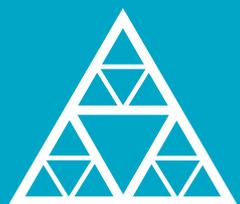
**HAL Id: tel-04470045**

**<https://pastel.hal.science/tel-04470045v1>**

Submitted on 21 Feb 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École des Ponts  
ParisTech

THÈSE DE DOCTORAT  
de l'École des Ponts ParisTech

# Résistance au feu des murs de maçonnerie en pierre naturelle

École doctorale N°531, Sciences, Ingénierie et Environnement (SIE)

Spécialité : Structures et Matériaux

Thèse préparée au sein du Laboratoire Navier, UMR 8205, Équipe Multiéchelle, et du Centre Scientifique et Technique du Bâtiment

Thèse soutenue le 5 octobre 2023, par  
**Élodie Donval**

Composition du jury:

Fekri MEFTAH  
Professeur, INSA Rennes

*Président*

Anne-Sophie COLAS  
Ingénieure divisionnaire des Travaux Publics de l'État,  
Université Gustave Eiffel

*Rapporteuse*

Géry de SAXCÉ  
Professeur, Université de Lille

*Rapporteur*

Patrick de BUHAN  
Professeur, École des Ponts ParisTech

*Examineur*

Ghazi HASSEN  
Chargé de recherche, École des Ponts ParisTech

*Directeur de thèse*

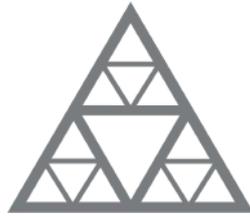
Duc Toan PHAM  
Ingénieur de recherche, CSTB

*Co-directeur de thèse*

Martin VIGROUX  
Docteur, CTMNC

*Invité*





École des Ponts

ParisTech

École doctorale SIE

THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

de l'École des Ponts ParisTech

Spécialité : Structures et Matériaux

par

**Elodie DONVAL**

intitulée

# Résistance au feu des murs de maçonnerie en pierre naturelle

Soutenue le 05/10/2023, devant le jury composé de :

PROF. FEKRI MEFTAH	Président
DR. ANNE-SOPHIE COLAS	Rapportrice
PROF. GÉRY DE SAXCÉ	Rapporteur
PROF. PATRICK DE BUHAN	Examineur
DR. DUC TOAN PHAM	Co-directeur de thèse
DR. GHAZI HASSEN	Directeur de thèse
DR. MARTIN VIGROUX	Invité





# Remerciements

Cette thèse représente pour moi l'aboutissement de trois ans de formation à la recherche par la recherche, qui m'ont permis de découvrir des domaines scientifiques dans lesquels je me suis pleinement épanouie, et j'aimerais remercier les personnes qui m'ont accompagné sur ce long chemin.

Pour commencer, je souhaite remercier M. Fekri Meftah d'avoir présidé mon jury de thèse, et Mme Anne-Sophie Colas et M. Géry de Saxcé d'avoir rapporté ce (long) mémoire. Merci pour l'intérêt que vous avez porté à mon travail, et pour les discussions que nous avons pu avoir pendant la soutenance, qui m'ont permis de mettre en perspective mon travail de thèse.

Je tiens ensuite à exprimer ma gratitude à toute mon équipe encadrante, Ghazi Hassen et Patrick de Buhan à l'Ecole des Ponts, Duc Toan Pham au CSTB et Martin Vigroux au CTMNC, sans qui cette thèse n'aurait pas pu avoir lieu ni se développer comme elle l'a fait.

Merci Ghazi de m'avoir montré concrètement ce qu'était la recherche en laboratoire lors de mon projet de recherche en 3A, et de m'avoir donné envie de poursuivre dans cette voie. Pendant ma thèse, tu m'as fait confiance pour me laisser développer mes idées, tout en étant présent pour en discuter. Je garde d'excellents souvenirs des moments passés face à un tableau, à discuter d'un TD ou à débayer un code et qui m'ont sûrement fait progresser à la fois en mécanique, dans ma manière de réfléchir et dans mes méthodes de travail.

Merci Toan de m'avoir proposé ce sujet de thèse qui convenait si bien à ce que je voulais faire, de m'avoir suivie de près et donné confiance au début, même dans les conditions difficiles des confinements, puis de m'avoir laissé prendre mon autonomie à la fin de ma thèse, tout en laissant ta porte toujours ouverte en cas de besoin. Tu m'as aussi poussée à prendre des responsabilités dans des projets annexes à ma thèse, qui m'ont sûrement permis de grandir scientifiquement et humainement.

Merci Patrick pour ton intérêt pour tous les aspects de ma thèse, qu'ils soient expérimentaux ou de modélisation, et pour la vue d'ensemble que tu as apporté lors de nos réunions. C'était un privilège de pouvoir bénéficier de ton encadrement dans le domaine du Calcul à la rupture.

Merci Martin d'avoir apporté à ma thèse deux aspects qui ne faisaient pas partie de mon domaine initial : tes connaissances en sciences des matériaux, sur la pierre naturelle au feu en particulier, et ton expérience sur les aspects normatifs des maçonneries en pierre naturelle. Merci également pour ton enthousiasme tout au long de ces trois années.

J'aimerais aussi remercier Didier Pallix et Olivier Chèze, au CTMNC, qui ont suivi mon travail avec intérêt. Grâce à votre intervention, j'espère être arrivée à des résultats concrets et utiles pour l'ingénieur.

Je tiens également à remercier les membres du projet ANR POSTFIRE pour toutes les discussions que nous avons pu avoir sur les maçonneries en pierre calcaire et leur comportement au feu. Merci en particulier à Carla Pani, de la société Rocamat, pour toutes les informations apportées sur la pierre naturelle et ses spécificités.

J'ai eu la chance de faire cette thèse entre deux entités très différentes mais néanmoins complémentaires, tant par leurs compétences que par leurs activités : le CSTB et l'Ecole des Ponts.

Au CSTB, je tiens à remercier les équipes d'essais (divisions EEF et EEM) sans qui les campagnes expérimentales présentées dans les chapitres 2 et 8 n'auraient pas pu avoir lieu. Merci en particulier à Stéphane Charuel, Philippe Rivillon et Pierre-Yves Mertz pour la conception et la programmation des essais, et à Léo Gontier et Léo Lebail qui m'ont accompagnée pendant leur réalisation. J'aimerais également remercier mes collègues de la division RISC, qu'il serait trop long de tous citer, pour toutes les discussions scientifiques et moins scientifiques, parfois philosophiques et parfois plus terre-à-terre, autour d'un repas ou d'un café. Merci en particulier à Nagham, Miora, Fatima, Sabine, Alma, Emma, Hussein et Pierre, doctorants de l'open-space du CSTB, ce petit cocon où se mêlent concentration, soutien, conseils et fous-rire.

A l'Ecole des Ponts et au laboratoire Navier, j'aimerais remercier Patrick, Ghazi ainsi que Luc Dormieux de m'avoir fait confiance en m'intégrant aux équipes pédagogiques de Plasticité et Calcul à la Rupture et de Mécanique des Milieux Continus (expérience exigeante mais extrêmement enrichissante), ainsi que les collègues de ces deux équipes, pour leurs précieux conseils. Merci également à Julien de m'avoir suivie dans l'encadrement d'élèves de 1A, et aux autres chercheurs du couloir P0 pour la bonne ambiance qui y règne. Enfin, merci à Yassine, Nihal, Insaf, Jonas, Matteo, Antoine, Bilal, Dalmer et Arthur pour toutes les pauses partagées, les conseils et le soutien en période de rédaction, et à Katy et Franck qui sont venus animer un peu le bureau P016 pendant ma dernière année de thèse.

Cette thèse ne se serait pas aussi bien déroulée sans le soutien de mes proches. Merci aux copains de tir à l'arc du club de Neuilly-sur-Marne de m'avoir changé les idées à l'entraînement, et pour ces week-ends de compèt mémorables à l'autre bout de la France ! Merci également à ceux qui sont restés depuis Joliot et le master, et en particulier à Albin (avec nos conférences si bien accordées), Cécilia (pour nos réflexions philosophiques sur le sens de la vie et de la thèse) et Katia (Qui aurait cru que les pauses chocolats survivraient à la prépa ?). Merci Thomas pour ta présence, ton soutien et ta patience pendant les trois dernières années et les précédentes. Enfin, je tiens à remercier du fond du cœur mes parents. Vous m'avez toujours encouragée et suivie dans ce que je voulais faire, et je n'en serais pas là sans vous.

# Résumé

La pierre naturelle, matériau bas carbone, est de plus en plus employée dans la construction neuve. Cependant, il n'existe pas de recommandations pour le calcul au feu des bâtiments en pierre naturelle dans les textes normatifs comme l'Eurocode 6, ce qui représente un obstacle à l'utilisation de ce type de matériau dans la construction. Dans ce manuscrit, on propose une méthode de dimensionnement au feu de telles structures, à visée applicative pour l'ingénieur.

Cette méthode s'intéresse, de manière découplée, aux deux principaux effets du feu sur le mur : la dégradation des matériaux due à l'élévation de température et l'apparition d'une courbure thermique causée par le développement d'un gradient thermique dans l'épaisseur du mur. La courbure thermique, qui crée des moments additionnels dus à l'excentrement des charges verticales initialement présentes, est évaluée par une méthode d'homogénéisation en thermoélasticité. En parallèle, l'effet de la dégradation de la résistance des matériaux est évalué à l'échelle de l'assemblage bloc-mortier, en se basant sur une méthode d'homogénéisation en calcul à la rupture. Différentes approches, semi-analytique et numériques, sont proposées afin de prendre en compte à la fois les hétérogénéités initiales de l'assemblage, ainsi que celles dues à la perte de résistance de la pierre et du mortier à haute température. Il devient alors possible d'évaluer par le Calcul à la rupture la résistance au feu du mur, modélisé par une plaque, dans sa configuration déformée par le feu. Le caractère direct de l'approche Calcul à la rupture et l'homogénéisation périodique permettent un calcul rapide et adapté à l'ingénieur.

En complément des modélisations proposées, des validations expérimentales sont réalisées à deux échelles. Une étude expérimentale à température ambiante permet tout d'abord de caractériser le comportement d'un trumeau vis-à-vis de sollicitations de compression centrée et excentrée par rapport à son plan, et de vérifier l'applicabilité de la démarche pour la détermination du critère de résistance à température ambiante. Un essai au feu sur un mur à l'échelle 1 fournit ensuite une première validation expérimentale de l'ensemble de la méthode.

**Mots-clés :** Maçonnerie, Pierre naturelle, Résistance au feu, Homogénéisation périodique, Calcul à la rupture.



# Abstract

Natural stone is increasingly used in new buildings because of its low environmental impact. However, there are no recommendations for the fire design of natural stone buildings in normative texts such as Eurocode 6, which represents an obstacle to the use of this type of construction material. In the present work, we propose an engineer-oriented fire design method for such structures.

This method addresses, in a decoupled manner, the two main effects of fire on the wall : the degradation of materials due to the rise in temperature on the one hand, and the development of a thermal curvature caused by the existence of a thermal gradient in the thickness of the wall, on the other hand. The thermal curvature, which creates additional bending moments due to the eccentricity of the initial vertical loads, is assessed by a thermoelastic homogenisation method. At the same time, the effect of the loss of strength of the materials is assessed at the block-mortar assembly level through a yield design homogenisation method. Different approaches, semi-analytical and numerical, are proposed in order to take into account both the initial heterogeneities of the assembly and those due to the loss of strength of the stone and mortar at high temperature. Finally, it becomes possible to assess the fire resistance of the wall, modelled as a shell structure in its fire deformed configuration, using a yield design approach. The direct nature of the yield design approach and the periodic homogenisation lead to quick calculations which are tailored to the engineer's needs.

In addition to the proposed models, experimental validations are carried out on two scales. Firstly, an experimental study at ambient temperature is used to characterise the strength of masonry wallettes with respect to compression loads centred or not with respect to their mid-plane, and to assess whether yield design is a reliable approach for determining the strength criterion of the assembly at ambient temperature. Then, a fire test on a full-scale wall provides a first experimental validation of the entire method.

**Keywords :** Masonry, Natural stone, Fire resistance, Periodic homogenisation, Yield design theory.



# Table des matières

Table des figures	xvii
Liste des tableaux	xxvii
<b>1 Introduction générale</b>	<b>1</b>
1 Contexte et motivation de la thèse . . . . .	3
1.1 La pierre naturelle, un matériau d’hier et d’aujourd’hui . . . . .	3
1.2 La pierre naturelle et le feu . . . . .	4
1.3 Objectifs de la thèse . . . . .	5
2 Observations expérimentales sur la résistance au feu des murs de maçonnerie	6
2.1 Essais à l’échelle du matériau . . . . .	6
2.2 Essais à l’échelle réduite . . . . .	10
2.3 Essais en grandeur réelle . . . . .	11
3 Méthodes de dimensionnement existantes pour les maçonneries . . . . .	14
3.1 Méthodes normalisées en France : l’Eurocode 6 [1] et le DTU 20.1 [2]	14
3.2 Méthodes de modélisation et de calcul avancées à température ambiante	17
3.3 Méthodes de modélisation avancées à haute température . . . . .	23
4 Proposition d’une méthode d’évaluation de la résistance au feu d’un mur en pierre . . . . .	25
4.1 Justification d’une approche par homogénéisation thermo-élastique et en Calcul à la rupture . . . . .	25
4.2 Approche proposée . . . . .	26
5 Plan du manuscrit . . . . .	27
5.1 Partie 1 : Observations expérimentales et détermination du gradient thermique . . . . .	27
5.2 Partie 2 : Détermination de la courbure thermique . . . . .	27
5.3 Partie 3 : Détermination de la résistance de la maçonnerie à l’échelle de l’assemblage . . . . .	27
5.4 Partie 4 : Analyse de la stabilité au feu du mur . . . . .	28
<b>2 Observations expérimentales</b>	<b>31</b>
1 Introduction . . . . .	33
2 Matériaux constitutifs : présentation et essais de caractérisation . . . . .	34

2.1	Choix des matériaux . . . . .	34
2.2	Essais de caractérisation . . . . .	35
3	Comportement thermomécanique de la maçonnerie : présentation d'un essai de résistance au feu à l'échelle 1 . . . . .	36
3.1	Protocole expérimental . . . . .	36
3.2	Résultats . . . . .	40
4	Complément sur les aspects thermiques . . . . .	52
4.1	Essais thermiques complémentaires . . . . .	52
4.2	Comparaison à d'autres essais . . . . .	57
4.3	Une première modélisation thermique . . . . .	59
4.4	Remarques finales sur les aspects thermiques . . . . .	63
5	Discussion - Aspects thermomécaniques . . . . .	63
5.1	Détermination du taux de chargement des murs . . . . .	64
5.2	Déformée et chargement . . . . .	65
5.3	Charge de rupture et mode de ruine du mur . . . . .	69
6	Remarques finales . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Détermination de la déformée thermomécanique d'un mur de maçonnerie</b>	<b>73</b>
1	Introduction . . . . .	75
2	Détermination de la loi de comportement macroscopique du mur de maçonnerie	76
2.1	Position du problème auxiliaire . . . . .	76
2.2	Résultat des simulations numériques . . . . .	80
3	Modélisation du mur par une plaque homogène . . . . .	85
3.1	Position du problème . . . . .	85
3.2	Exemple applicatif . . . . .	89
3.3	Influence des conditions aux limites sur la déformée thermique . . . . .	95
3.4	Note sur l'effet $P - \delta$ (ou effet du second ordre) . . . . .	100
4	Comparaison aux résultats expérimentaux . . . . .	100
4.1	Résultats de l'essai non-chargé de Pham et al. [3] . . . . .	100
4.2	Résultats de l'essai chargé réalisé dans le cadre de cette thèse (Chapitre 2) . . . . .	102
4.3	Quel champ de température choisir ? . . . . .	106
4.4	Remarques finales . . . . .	107
5	Conclusion . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Évaluation numérique du critère de résistance d'un mur de maçonnerie - Approche simplifiée bidimensionnelle</b>	<b>109</b>
1	Introduction . . . . .	111
2	Problématique d'homogénéisation périodique en Calcul à la rupture . . . . .	112
2.1	Présentation de la théorie du Calcul à la rupture . . . . .	112
2.2	Principe de la démarche d'homogénéisation en Calcul à la rupture . . . . .	116
2.3	Quelques travaux antérieurs . . . . .	117

3	Position du problème auxiliaire de Calcul à la rupture . . . . .	120
3.1	Géométrie et matériaux . . . . .	120
3.2	Mode de chargement de la cellule de base . . . . .	121
3.3	Critère de résistance macroscopique : définitions statique et cinématique . . . . .	122
3.4	Influence du feu . . . . .	123
4	Implémentation numérique par la méthode des éléments finis en Calcul à la rupture . . . . .	124
4.1	Formulation éléments finis de l'approche statique à température ambiante . . . . .	125
4.2	Formulation éléments finis de l'approche cinématique à température ambiante . . . . .	126
4.3	Influence du feu . . . . .	127
5	Exemple applicatif . . . . .	129
5.1	Présentation de l'exemple . . . . .	129
5.2	Propriétés de résistance des matériaux à température ambiante . . . . .	129
5.3	Propriétés de résistance des matériaux à température élevée . . . . .	131
5.4	Maillage adopté et problème numérique correspondant . . . . .	131
5.5	Résultats . . . . .	133
6	Vers une définition plus fine du critère de résistance . . . . .	135
6.1	Quelques constats expérimentaux . . . . .	135
6.2	Critères de Mohr-Coulomb tronqués en traction et en compression isotropes . . . . .	135
6.3	Exemple applicatif . . . . .	137
6.4	Remarques finales . . . . .	140
7	Conclusion . . . . .	141
<b>5</b>	<b>Formulation semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie de blocs pleins</b> . . . . .	<b>143</b>
1	Introduction . . . . .	145
2	Position du problème de Calcul à la rupture . . . . .	146
2.1	Cellule de base . . . . .	146
2.2	Mode de chargement . . . . .	146
2.3	Critère de résistance des matériaux constitutifs . . . . .	147
2.4	Définitions statique et cinématique du domaine de résistance . . . . .	148
3	Approche analytique du domaine de résistance pour des sollicitations planes . . . . .	149
3.1	Une première approche cinématique : mécanisme de déformation homogène . . . . .	149
3.2	Une seconde approche cinématique : mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après de Buhan et de Felice [4]) . . . . .	156
3.3	Définition de l'approche cinématique analytique du domaine de résistance plan . . . . .	159

3.4	Remarques sur l'approche analytique proposée . . . . .	160
4	Approche semi-analytique pour des sollicitations hors-plan . . . . .	161
4.1	Mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après Sab [5]) . . . . .	161
4.2	Mécanisme avec des taux de déformation homogènes dans des plans parallèles au plan du mur . . . . .	165
4.3	Approche semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie sous sollicitations membranaires et de flexion . . . . .	169
5	Prise en compte de la dégradation de la cohésion due au feu . . . . .	172
5.1	Formulation de la fonction d'appui . . . . .	172
5.2	Exemple applicatif . . . . .	173
6	Conclusion . . . . .	176
<b>6</b>	<b>Évaluation numérique du critère de résistance d'un mur de maçonnerie</b>	<b>179</b>
1	Introduction . . . . .	181
2	Formulation numérique du problème auxiliaire de Calcul à la rupture . . .	182
2.1	Approche cinématique . . . . .	183
2.2	Approche statique . . . . .	188
3	Application au domaine de résistance d'un mur de maçonnerie . . . . .	192
3.1	Données du problème . . . . .	192
3.2	Domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations dans le plan du mur	193
3.3	Domaine de résistance hors-plan . . . . .	201
3.4	Conclusion . . . . .	213
4	Étude paramétrique . . . . .	214
4.1	Présentation de l'étude . . . . .	214
4.2	Conclusions principales . . . . .	215
5	Remarques finales . . . . .	216
<b>7</b>	<b>Quelques perspectives sur la détermination du critère de résistance macroscopique</b>	<b>219</b>
1	Introduction . . . . .	220
2	Approche numérique . . . . .	220
2.1	Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction . . . . .	220
2.2	Approche cinématique . . . . .	221
2.3	Remarques finales . . . . .	224
3	Approches semi-analytiques pour des chargements dans le plan du mur . .	225
3.1	Adaptation de l'approche analytique du chapitre 5 pour des charge- ments dans le plan du mur . . . . .	225
3.2	Mécanisme par taux de déformation homogènes par zone . . . . .	229
4	Quelques pistes pour des chargements hors du plan du mur . . . . .	233
4.1	Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction : un point de blocage	233
4.2	Une première solution : l'utilisation d'un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire . . . . .	234
5	Conclusion . . . . .	235

<b>8</b>	<b>Première validation expérimentale du critère de résistance</b>	<b>237</b>
1	Introduction . . . . .	238
2	Protocole expérimental . . . . .	238
2.1	Géométrie et matériaux constitutifs . . . . .	238
2.2	Essais de caractérisation de la pierre et du mortier . . . . .	239
2.3	Mode de chargement des trumeaux et dispositif expérimental correspondant . . . . .	242
2.4	Instrumentation . . . . .	244
2.5	Protocole d'installation et de chargement . . . . .	245
3	Résultats . . . . .	246
3.1	Phase dite "élastique" . . . . .	246
3.2	Résultats globaux : charges de ruine . . . . .	247
3.3	Résultats détaillés : essais centrés . . . . .	248
3.4	Résultats détaillés : essais avec excentrement . . . . .	253
3.5	Remarques finales . . . . .	260
4	Comparaison des essais avec des modèles de calcul . . . . .	260
4.1	Comparaison avec les règles de calcul de l'Eurocode 6 [1] . . . . .	260
4.2	Modélisation par le Calcul à la rupture . . . . .	261
5	Conclusion . . . . .	264
<b>9</b>	<b>Évaluation de la stabilité au feu du mur</b>	<b>267</b>
1	Introduction . . . . .	269
2	Position du problème . . . . .	269
2.1	Domaine des chargements potentiellement supportables : approche statique . . . . .	270
2.2	Domaine des chargements potentiellement supportables : approche cinématique . . . . .	271
2.3	Choix de la fonction d'appui homogénéisée . . . . .	273
3	Formulation numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture . . . . .	275
3.1	Discrétisation du problème et contraintes cinématiques . . . . .	275
3.2	Formulation numérique de l'approche cinématique . . . . .	278
4	Exemple d'application . . . . .	280
4.1	Présentation de l'exemple . . . . .	280
4.2	Mise en œuvre pratique du calcul . . . . .	281
4.3	Premiers résultats et comparaison expérimentale . . . . .	282
4.4	Étude paramétrique . . . . .	285
5	Perspectives de l'approche proposée pour l'évaluation de la stabilité des ouvrages en maçonnerie . . . . .	291
6	Conclusion . . . . .	293

<b>10 Conclusions et perspectives</b>	<b>295</b>
1 Conclusions . . . . .	295
2 Perspectives . . . . .	298
2.1 Sur l'approche de modélisation proposée dans cette thèse . . . . .	298
2.2 Sur la comparaison entre la modélisation et les essais . . . . .	299
2.3 Sur le comportement au feu des maçonneries . . . . .	299
<b>A Essais de caractérisation des matériaux mis en œuvre dans les essais du chapitre 2</b>	<b>301</b>
1 Masse volumique . . . . .	301
2 Vitesse des ondes . . . . .	302
3 Résistance à la traction et à la compression . . . . .	302
3.1 Pierre . . . . .	302
3.2 Mortier . . . . .	303
4 Teneur en eau . . . . .	304
<b>B Nomenclature des différentes approches par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique introduites dans les chapitres 5 et 7</b>	<b>307</b>
1 Généralités . . . . .	307
2 Approches cinématiques pour des sollicitations dans le plan du mur . . . . .	308
3 Approches cinématiques pour des sollicitations quelconques . . . . .	308
4 Sollicitations quelconques avec prise en compte de la dégradation due au feu	309
5 Approches cinématiques pour des sollicitations dans le plan du mur, critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction . . . . .	309
6 Critère de Mohr-Coulomb bilinéaire . . . . .	310
<b>C Fonctions d'appui des différents critères macroscopiques utilisés dans cette thèse</b>	<b>313</b>
1 Fonction d'appui associée au mécanisme de blocs proposé par Sab . . . . .	313
1.1 Détermination de la vitesse des quatre blocs de la cellule de base . . . . .	314
1.2 Discontinuité de vitesse . . . . .	317
1.3 Condition de pertinence . . . . .	318
1.4 Fonction d'appui du critère de Sab - matériau de Mohr-Coulomb . . . . .	321
2 Mécanisme de de Buhan et de Felice - matériaux de Mohr-Coulomb tronqué en traction . . . . .	322
3 Mécanisme homogène - matériaux de Mohr-Coulomb tronqués en traction . . . . .	324
<b>D Comparaison des approches cinématiques semi-analytique et numérique proposées dans les chapitres 5 et 6 : étude paramétrique</b>	<b>327</b>
1 Présentation de l'étude paramétrique . . . . .	327
1.1 Cas étudiés . . . . .	327
1.2 Quelques rappels de notations . . . . .	328

2	Influence du contraste entre les résistances en compression des blocs et du mortier . . . . .	329
2.1	Sollicitations planes . . . . .	329
2.2	Sollicitations hors-plan . . . . .	331
3	Influence de la fraction volumique de mortier . . . . .	333
3.1	Sollicitations planes . . . . .	333
3.2	Sollicitations hors-plan . . . . .	335
4	Influence de l'élançement transversal des joints . . . . .	337
4.1	Sollicitations planes . . . . .	337
4.2	Sollicitations hors-plan . . . . .	339
5	Conclusion . . . . .	340

<b>Bibliographie</b>	<b>343</b>
----------------------	------------



# Table des figures

1.1	(a) Maquette du Panthéon de Rome par George Chedanne <sup>1</sup> ; (b) Opéra Garnier <sup>2</sup> . . . . .	3
1.2	Matériaux des murs des bâtiments recensés dans la Base de Donnée Nationale du Bâtiment [6] . . . . .	4
1.3	(a) Évolution relative de la conductivité thermique des pierres en fonction de la température (extrait de Sciarretta et al. [7]); (b) Déformation thermique de différents calcaires en fonction de la température (extrait de Vigroux et al. [8]) . . . . .	7
1.4	Évolution du module de Young de différentes pierres et mortiers en fonction de la température . . . . .	8
1.5	Courbes contrainte-déformation en traction (a) et en compression (b) de mortiers de chaux aérienne et hydraulique (Costigan et Pavia [9]); Courbes contrainte-déformation pour le calcaire de Saint-Maximin (Parent [10]) . . .	9
1.6	Évolution de la résistance à la compression (a) et à la traction (b) d'un ensemble de pierres calcaires et d'un béton de granulats calcaire en fonction de la température . . . . .	9
1.7	Évolution de la résistance à la compression (a) et à la traction (b) d'un ensemble de plusieurs mortiers et d'un béton de granulats calcaire en fonction de la température . . . . .	10
1.8	(a) Essais de Bosnjak et al. [11]; (b) Essais de Russo et Sciarretta [12] . . .	11
1.9	Déformée thermique pour différentes conditions aux limites (extrait de Cooke [13]) . . . . .	12
1.10	(a) Mur en briques alvéolées testé par Nguyen et Meftah [14]; (b) Essais de Oliveira et al. [15] . . . . .	13
1.11	(a) Fissuration vue par corrélation d'images sur les essais de Pham et al. [3] sur un mur en calcaire de Saint Vaast; (b) Champ de température mesuré par une caméra thermique sur la face non-exposée d'un mur en pierre calcaire (Pimienta et al. [16]) . . . . .	13
1.12	(a) Définition de la zone inefficace pour la méthode de calcul simplifiée de l'Eurocode 6 [17]; (b) Valeur de $\theta_2$ et épaisseur de la zone inefficace pour une maçonnerie de blocs silico-calcaire . . . . .	16
1.13	(a) Analyse du dôme de la Cathédrale Saint Pierre de Rome par Poleni (extrait de Block et al. [18]); (b) Exemple de Thrust Network Analysis (Avelino et al. [19]) . . . . .	18
1.14	Modélisation DEM (Distinct Elements Method) d'une maquette de mur (Bui et al. [20]) . . . . .	19

1.15 (a) Critère de Lourenço-Rots [21]; (b) Application à un mur en cisaillement avec ouverture [21] . . . . .	20
1.16 Modèles proposés par Nadjai [22] et Nguyen et Meftah [23] . . . . .	24
1.17 Méthode proposée pour l'évaluation de la résistance au feu d'un mur de maçonnerie . . . . .	26
1.18 Plan du manuscrit . . . . .	29
2.1 Mur testé . . . . .	36
2.2 Dispositif de chargement . . . . .	37
2.3 Instrumentation de l'essai . . . . .	38
2.4 Programme de chargement . . . . .	39
2.5 Evolution de la température dans le four en comparaison avec la courbe ISO 834 . . . . .	40
2.6 Résultats de la corrélation d'image lors du chargement mécanique : (a) position initiale hors-plan des blocs; (b) déformation verticale et (c) déplacements hors-plan engendrés par le chargement mécanique à partir de la position initiale préchargée . . . . .	41
2.7 Températures mesurées par les différents thermocouples à travers l'épaisseur des blocs . . . . .	42
2.8 Profils de température moyens en fonction du temps d'exposition au feu . . . . .	42
2.9 Mesure de la dilatation verticale par les capteurs à fils . . . . .	43
2.10 Déplacements hors-plan mesurés par les capteurs LVDT . . . . .	44
2.11 Rotations autour des axes $x_1$ et $x_3$ mesurées par les inclinomètres . . . . .	44
2.12 Déplacements hors-plan mesurés par corrélation d'images pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	45
2.13 Déplacements hors-plan mesurés par corrélation d'images et capteurs LVDT . . . . .	45
2.14 Fissures verticales observée par corrélation d'images . . . . .	47
2.15 Déplacement dans la direction $x_1$ mesuré par corrélation d'images . . . . .	48
2.16 Face (a) exposée et (b) non-exposée après la rupture . . . . .	48
2.17 Déplacements enregistrés au moment de la rupture . . . . .	49
2.18 Déplacement hors-plan mesuré par corrélation d'images au moment de la rupture . . . . .	50
2.19 (a) Fissuration à l'instant précédant la rupture; déplacements (b) horizontaux selon $x_1$ et (c) verticaux selon $x_2$ juste après la rupture . . . . .	51
2.20 Schéma simplifié du mécanisme de rupture observé . . . . .	51
2.21 Profil de couleur de la pierre après 3 h d'exposition au feu, avec indication de la température maximale mesurée par les thermocouples . . . . .	52
2.22 Maquettes pour les essais thermiques : (a) côtes et (b) maquette construite . . . . .	53
2.23 Emplacement des thermocouples dans la pierre . . . . .	54
2.24 Emplacement des thermocouples dans le mortier . . . . .	54
2.25 Profils de température mesurés dans la pierre et dans le mortier pour l'essai B . . . . .	55
2.26 Profils de température mesurés dans la pierre pour les essais A et B . . . . .	56

2.27	Profils de température mesurés dans le mortier pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	57
2.28	Profils de température mesurés dans la pierre et dans le mortier pour l'essai B	57
2.29	Evolution de la température en fonction du temps pour les quatre essais considérés . . . . .	58
2.30	Facteurs d'évolution adimensionnels des différentes propriétés en fonction de la température . . . . .	61
2.31	Comparaison des températures calculées et des températures mesurées sur les différents essais . . . . .	62
2.32	Températures calculées après 180 min d'exposition au feu pour différentes teneurs en eau . . . . .	63
2.33	Flèche mesurée par le capteur LVDT au centre du mur pour les trois essais considérés . . . . .	66
2.34	Schématisation du décalage de l'axe neutre dû à la dégradation des matériaux en fonction de la température . . . . .	67
2.35	Distribution de flèche obtenue en fin d'essai pour les trois essais considérés	67
2.36	Profils de déformée obtenus par corrélation d'images sur une ligne verticale située à mi-largeur du mur après 15 min d'exposition au feu pour les trois essais considérés . . . . .	68
2.37	Schématisation des conditions aux limites expérimentales pour différents niveaux de chargements . . . . .	68
3.1	Résumé de la procédure d'homogénéisation thermoélastique proposée dans ce chapitre . . . . .	76
3.2	Mur en maçonnerie arrangée de manière périodique et cellule de base correspondante . . . . .	76
3.3	Evolution du module de Young (a) et du coefficient de dilatation thermique sécant (b) de la pierre et du mortier en fonction de la température . . . . .	81
3.4	Distributions de températures mesurées par Pham et al. [3] pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	82
3.5	Maillage des blocs (a) et des joints (b) . . . . .	82
3.6	(a) Distribution de température prescrite pour 120 min d'exposition au feu ; (b) Module de Young correspondant . . . . .	83
3.7	Modes de chargement plans de la cellule de base : (a) $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ , (b) $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$ et (c) $\underline{\underline{\epsilon}} = (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)/2$ (vert et jaune : configuration initiale ; bleu : configuration déformée) . . . . .	83
3.8	Définition des déplacements et des rotations . . . . .	85
3.9	Conditions aux limites du modèle de plaque . . . . .	87
3.10	Conditions aux limites pour le premier exemple applicatif . . . . .	90
3.11	Déplacements plans (a) horizontaux et (b) verticaux . . . . .	92
3.12	Flèche $u_3$ après 120 min d'exposition au feu . . . . .	93
3.13	Comparaison des résultats obtenus par homogénéisation à la flèche d'un mur homogène composé soit de pierre, soit de mortier . . . . .	93
3.14	Maillage utilisé pour le calcul direct : représentation de la moitié du mur (a) et zoom sur un joint (b) . . . . .	94

3.15	Comparaison des flèches $u_3$ obtenues par homogénéisation et par le calcul direct sur Cast3M . . . . .	95
3.16	Différentes conditions aux limites considérées . . . . .	96
3.17	Déformée 3D pour différentes conditions aux limites . . . . .	96
3.18	Flèche sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes conditions aux limites considérées . . . . .	97
3.19	Modification des conditions aux limites pour prendre en compte des efforts répartis sur les bords . . . . .	98
3.20	Flèche après 120 min d'exposition au feu sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes valeurs de chargement vertical considérées, pour un mur en appui simple sur ses bords horizontaux (a) et pour un mur en appui simple en tête et encastré en pied (b) . . . . .	98
3.21	Flèche après 120 min d'exposition au feu sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes valeurs d'excentrement initial de la charge considérées, pour un mur en appui simple sur ses bords horizontaux (a) et pour un mur en appui simple en tête et encastré en pied (b) . . . . .	99
3.22	Évolution de la flèche en fonction du temps d'exposition au feu - Essai non-chargé de Pham et al. [3] . . . . .	101
3.23	Comparaison des résultats numériques et de l'essai non-chargé de Pham et al. [3] . . . . .	101
3.24	Comparaison des déplacements plans obtenus numériquement à ceux de l'essai présenté dans le chapitre 2 . . . . .	103
3.25	Comparaison du déplacement vertical obtenu numériquement à celui de l'essai présenté dans le chapitre 2 (Augmentation du chargement mécanique entre 150 et 180 min) . . . . .	103
3.26	Flèche sur une ligne verticale à mi-largeur pour différentes valeurs d'excentrement de la charge verticale, avant exposition au feu . . . . .	104
3.27	Comparaison des profils de flèche obtenus numériquement et mesurés lors de l'essai chargé présenté dans le chapitre 2 . . . . .	105
3.28	Comparaison de la flèche au centre du mur obtenue par modélisation à la flèche mesurée lors de l'essai chargé présenté dans le chapitre 2 . . . . .	105
3.29	Évolution de la flèche en fonction du temps d'exposition au feu pour différents profils de température . . . . .	107
4.1	Présentation graphique d'un problème de Calcul à la rupture . . . . .	112
4.2	Approche statique : enveloppe convexe de chargements potentiellement supportables $Q^i$ constituant $K^s$ (a) et principe de l'approche par trajets de chargements radiaux (b) . . . . .	114
4.3	Approche cinématique : trajets de chargements radiaux (a) et intersection des demi-espaces constituant $K^{cine}$ . . . . .	116
4.4	Définition de la cellule de base et du modèle mécanique associé selon la géométrie du milieu initial . . . . .	118
4.5	Mur en déformations planes dans le plan $(e_2, e_3)$ , et cellule de base extraite	120
4.6	(a) Critère de Mohr-Coulomb à température ambiante et à température élevée ; (b) Schématisation du profil de cohésion en fonction du profil de température dans l'épaisseur du mur . . . . .	124

4.7	Interpolation linéaire du champ de contrainte pour l'approche statique . . .	125
4.8	Interpolation linéaire du champ de vitesse pour l'approche cinématique . . .	126
4.9	Essais triaxiaux pour (a) le calcaire de Saint Maximin (Abdallah et al. [24]); (b) un mortier de chaux et ciment (Khoo [25]) . . . . .	130
4.10	(a) Facteurs de réduction de la cohésion; (b) Profils de température pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	131
4.11	(a) Maillage utilisé pour les calculs présentés dans ce chapitre; (b) Étude de convergence sur le maillage . . . . .	132
4.12	(a) Diagrammes d'interaction à température ambiante pour la maçonnerie, la pierre et le mortier; (b) Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus par les approches statique et cinématique pour la maçonnerie . . .	133
4.13	Évolution du diagramme d'interaction pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	134
4.14	Courbes intrinsèques des critères de Mohr-Coulomb (a), Rankine (b), Mohr- Coulomb tronqué en traction isotrope (c) et Mohr-Coulomb tronqué en traction et en compression isotropes (d) . . . . .	136
4.15	Coefficient de réduction de la résistance en traction en fonction de la température . . . . .	137
4.16	Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus pour des matériaux de Mohr-Coulomb et de Mohr-Coulomb tronqué en traction, (a) à température ambiante et (b) après 180 min d'exposition au feu . . . . .	138
4.17	Résistance en compression de l'assemblage en fonction de la valeur de la troncature en traction (a) de la pierre et (b) du mortier . . . . .	139
4.18	Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus pour des matériaux de Mohr-Coulomb tronqués en traction et de Mohr-Coulomb tronqués en traction et compression à température ambiante . . . . .	139
4.19	Résistance en compression de l'assemblage en fonction de la valeur de la troncature en compression (a) de la pierre et (b) du mortier . . . . .	140
5.1	Cellule de base considérée . . . . .	146
5.2	Domaine de résistance macroscopique obtenu par l'approche par taux de déformation homogène . . . . .	152
5.3	Approche par l'extérieur $G^{def,p}$ , obtenue par un mécanisme homogène, du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie sollicité dans son plan . . .	155
5.4	(a) Division de la cellule de base en blocs rigides et (b) vitesses dans le mécanisme de rupture proposé par de Buhan et de Felice [4] . . . . .	157
5.5	Approche par l'extérieur $G^{blocs,p}$ , par le mécanisme de de Buhan et de Felice, du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie . . . . .	158
5.6	Coupes des domaines obtenus par les approches par l'extérieur par le mécanisme homogène (domaine $G^{def,p}$ ), par le mécanisme de blocs (domaine $G^{blocs,p}$ ), ainsi que de leur intersection $G^{an,p}$ . . . . .	160
5.7	Coupes du domaine $G^{blocs}$ obtenu par une approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes de blocs . . . . .	164
5.8	Intégration numérique de la fonction $\pi^{def,p}$ . . . . .	167

5.9	Coupes du domaine $G^{def}$ obtenu par une approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes avec des taux de déformation homogènes par plans	168
5.10	Écart relatif moyen pour des sollicitations $(N_{11}, M_{11})$ et $(N_{12}, M_{12})$	169
5.11	Coupes du domaine $G^{S.An.}$ obtenu par l'intersection des domaines $G^{blocs}$ et $G^{def}$	171
5.12	Cohésion des matériaux en fonction de la coordonnée dans l'épaisseur $\xi_3$ pour différentes durées d'exposition au feu	174
5.13	Domaines de résistance obtenus par les approches cinématiques mettant en œuvre des mécanismes de blocs, des mécanismes homogènes, et par leur intersection, pour 0 et 180 min d'exposition au feu	175
5.14	Coupes du domaine de résistance pour différents temps d'exposition au feu	176
6.1	Structure considérée et définition de la cellule de base	182
6.2	Élément tétraédrique à 10 nœuds de type simplexe : (a) vitesses exprimées aux nœuds par élément et (b) discontinuités de vitesse	183
6.3	Éléments tétraédriques linéaires utilisés pour la statique	189
6.4	Etude de convergence : (a) écart relatif en fonction du nombre d'éléments pour l'approche cinématique, (b) écart relatif en fonction du nombre d'éléments pour l'approche statique, (c) temps de résolution en fonction du nombre d'éléments et (d) maillages utilisés pour l'étude de convergence	194
6.5	Maillages utilisés pour la détermination numérique du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes par l'approche cinématique (a) et par l'approche statique (b)	195
6.6	Coupes du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes	196
6.7	Coupes du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes	197
6.8	(a) Différence relative entre les approches analytique et numérique en fonction du trajet de chargement ; (b) Valeur des composantes du trajet de chargement en fonction de $\beta$ et $\gamma$	198
6.9	Mécanismes de rupture optimaux pour quelques sollicitations dans le plan (Les couleurs représentent les isovaleurs de la norme de la vitesse)	199
6.10	Valeur locale de $\pi(\underline{d})$ pour quelques sollicitations dans le plan	200
6.11	Valeurs locales de $\sigma_{22}$ et $\sigma_{33}$ obtenues par l'approche statique pour une sollicitation équivalente à $D_{22} = -1$	201
6.12	Définition de l'angle $\alpha$ pour le paramétrage des trajets de chargement radiaux	202
6.13	Coupe $(N_{11}, M_{11})$ du domaine de résistance pour une cellule de base homogène (a) et maillages correspondants (b)	202
6.14	Coupes du domaine de résistance pour des blocs de résistance infinie et des joints infiniment minces	203
6.15	Comparaison des domaines de résistance obtenus pour les cas 1 (blocs infiniment résistants), 2 (cellule de base homogène) et 3 (maçonnerie avec des joints infiniment minces)	204
6.16	Coupes du domaine de résistance pour des blocs de résistance finie et des joints infiniment minces	205
6.17	Mécanismes optimaux pour quelques sollicitations particulières	206

6.18	Coupes du domaine de résistance pour des blocs infiniment résistants et des joints d'épaisseur non-nulle ((a)-(c)); mécanisme correspondant à une sollicitation dans la direction $M_{12}$ (d) . . . . .	207
6.19	Étude de convergence vis-à-vis de chargements hors-plan : (a) écart relatif en fonction du nombre d'éléments et (b) temps de calcul en fonction du nombre d'éléments . . . . .	208
6.20	Coupes des domaines de résistance obtenus par la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique pour des blocs de résistance finie et des joints d'épaisseur $t = 10$ mm . . . . .	210
6.21	Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches cinématiques semi-analytique et numérique pour des blocs de résistance finie et des joints d'épaisseur $t = 10$ mm . . . . .	211
6.22	Coupes des domaines de résistance en flexion-flexion (a et b) et en flexion-torsion pour différentes précontraintes verticales $N_{22}^0$ . . . . .	212
6.23	Écart relatif en fonction du trajet de chargement pour différentes valeurs de précontrainte de compression verticale . . . . .	213
7.1	Coupes du domaine de résistance par des plans parallèles à $(N_{11}, N_{22})$ (a) et par le plan $(N_{22}, M_{22})$ (b) . . . . .	223
7.2	Projections du domaine de résistance par le plan $(N_{11}, N_{22})$ pour différentes valeurs de troncature en traction (a) du mortier $f_t^m$ et (b) de la pierre $f_t^b$ . . . . .	224
7.3	Coupe par le plan $(N_{11}, N_{22})$ du domaine de résistance de la maçonnerie pour des matériaux suivant un critère de Mohr-Coulomb partiellement (a) ou totalement (b) tronqué en traction . . . . .	228
7.4	Mécanisme obtenu pour une sollicitation $\underline{D} = -e_2 \otimes e_2$ (compression verticale) . . . . .	228
7.5	Définition des zones pour le mécanisme par taux de déformation homogène par zone . . . . .	229
7.6	Exemples de mécanismes considérés pour des sollicitations particulières . . . . .	230
7.7	Projections des domaines de résistance obtenus pour différentes valeurs de $f_t^b$ ( $f_t^m = 0,1$ MPa pour tous les domaines) sur les plans $(N_{11}, N_{22})$ (a) et $(N_{11}, N_{12})$ (b) . . . . .	232
7.8	(a) Représentation schématique du critère de Mohr-Coulomb bilinéaire dans le plan de Mohr et (b) coupe $(N_{22}, M_{11})$ du domaine obtenu par un mécanisme de blocs pour un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire . . . . .	235
8.1	(a) Géométrie des trumeaux et (b) quelques trumeaux en chambre climatique . . . . .	239
8.2	Courbe force-déplacement du vérin obtenue lors des essais de résistance en compression de la pierre . . . . .	240
8.3	Courbe force-déplacement du vérin pour les essais de caractérisation (a) en flexion trois points et (b) en compression du mortier . . . . .	241
8.4	(a) Schéma du dispositif expérimental permettant d'appliquer un chargement de compression centrée ou excentrée au trumeau et (b) modèle CAO (Conception Assistée par Ordinateur) du dispositif expérimental . . . . .	242
8.5	Modèle CAO du dispositif expérimental dans son ensemble . . . . .	243
8.6	Dispositif expérimental dans son ensemble . . . . .	243

8.7	Positionnement des capteurs de déplacement LVDT : (a) schéma et (b) photo des capteurs installés sur la face "tendue" . . . . .	244
8.8	Positionnement des deux dispositifs de corrélation d'images . . . . .	245
8.9	Programme de chargement . . . . .	246
8.10	Force $F$ en fonction du déplacement $\delta$ mesuré par les capteurs LVDT pour le trumeau A4 (a) à partir du début de la phase élastique et (b) à partir du deuxième cycle de charge-décharge . . . . .	246
8.11	Force $F$ en fonction du déplacement $\delta$ mesuré par les capteurs LVDT 1 à 4 à partir du deuxième cycle de charge-décharge . . . . .	247
8.12	Charges de ruine dans le plan $(N, M)$ (a) et courbes force $F$ - déplacement du vérin $\delta$ pour l'ensemble des essais (b) . . . . .	248
8.13	Déplacements "macroscopiques" $\delta$ mesurés par les capteurs LVDT 1 à 4 . . . . .	249
8.14	Comparaison entre les mesures de corrélation d'images et celles des LVDT sur la face "comprimée" . . . . .	249
8.15	Déplacement relatif du haut du trumeau par rapport au bas du trumeau, mesuré par corrélation d'images sur la tranche des trumeaux . . . . .	250
8.16	Déplacements $\delta$ mesurés par les capteurs LVDT de la face "tendue" . . . . .	251
8.17	Comparaison des déplacements macroscopiques obtenus par les capteurs LVDT 1 à 4 et les déformations obtenues par les capteurs LVDT positionnés sur les joints ou par corrélation d'images . . . . .	251
8.18	Déformations verticales $\varepsilon_{22}$ pour différents niveaux de chargement, dans la pierre (ligne L0) et dans le mortier (lignes L1 et L2) . . . . .	252
8.19	Mécanismes de ruine observés pour les trumeaux chargés de manière centrée (Les flèches blanches représentent le déplacement horizontal des blocs) . . . . .	253
8.20	Rupture du bord des joints de mortier . . . . .	253
8.21	Déplacement macroscopique $\delta$ mesuré par les capteurs LVDT 1 à 4 pour différentes valeurs d'excentrement . . . . .	254
8.22	Déplacement de l'axe médian du trumeau (représenté sur la figure 8.15 (a)), visualisé par corrélation d'images sur la tranche . . . . .	254
8.23	Déplacements $\delta$ mesurés par les capteurs LVDT positionnés sur la face "tendue" pour les essais excentrés . . . . .	255
8.24	Déformations verticales $\varepsilon_{22}$ pour différents niveaux de chargement et différents excentrements, dans la pierre (ligne L0) et dans le mortier (lignes L1 et L2) . . . . .	257
8.25	Rupture en compression/délamination de la pierre . . . . .	258
8.26	Fissuration verticale globale . . . . .	259
8.27	Rupture avec une fissuration verticale locale sur la tranche . . . . .	259
8.28	(a) Rupture de l'interface pierre mortier ; (b) Rupture du mortier en traction . . . . .	259
8.29	Rupture par fissuration de la pierre . . . . .	259
8.30	Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats de l'approche proposée dans l'Eurocode 6 [1] . . . . .	261
8.31	Géométrie (a), conditions aux limites (a) et maillage du problème de Calcul à la rupture considéré . . . . .	262

8.32	Charges de ruine dans le plan $(N, M)$ obtenues par l'approche cinématique du Calcul à la rupture . . . . .	263
8.33	Mécanismes de rupture optimaux par le Calcul à la rupture (Les couleurs représentent les isovaleurs de la norme du champ de vitesse virtuelle optimal) . . . . .	263
8.34	Charges de ruine dans le plan $(N, M)$ avec une résistance en compression corrigée . . . . .	264
9.1	Modélisation du mur dans sa configuration déformée par le feu par une coque . . . . .	270
9.2	Définition des vitesses et vitesses de rotation . . . . .	272
9.3	Définition du repère local d'une facette (a) et du repère local pour une arête entre deux facettes non-coplanaires (b) . . . . .	275
9.4	Interpolation adoptée . . . . .	277
9.5	(a) Conditions aux limites considérées pour le mur et (b) maillage utilisé . . . . .	281
9.6	Approche itérative de détermination de la charge extrême pour un temps d'exposition au feu donné . . . . .	282
9.7	Charge extrême en fonction du temps d'exposition au feu . . . . .	283
9.8	(a) Mécanisme de rupture optimal (couleurs correspondant aux isovaleurs de la norme de la vitesse virtuelle) et schématisation du mécanisme vu de côté, et (b) plan $P_e(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}})$ tangent au domaine de résistance (tracé pour une cohésion $c^b$ pour les blocs) . . . . .	284
9.9	(a) Charge extrême en fonction de l'excentrement de la charge verticale pour différents temps d'exposition au feu et (b) pourcentage de réduction de la charge extrême en fonction de l'excentrement pour différents temps d'exposition au feu . . . . .	286
9.10	Effet d'un chargement excentré selon le positionnement du feu (a) du côté de l'excentrement et (b) à l'opposé de l'excentrement . . . . .	287
9.11	Comparaison de deux types de conditions aux limites concernant les rotations et déplacements hors-plan : (a) encastrement en bas du mur et appui simple en haut, et (b) appui simple en haut et en bas du mur . . . . .	287
9.12	Flèche (a), charge extrême (b) et perte relative de capacité portante (c) pour différentes conditions aux limites; (d) mécanisme de rupture pour un mur en appui simple sur ses deux bords horizontaux (les couleurs correspondent aux isovaleurs de la norme de la vitesse) . . . . .	288
9.13	Flèche maximale (a) et charge extrême (b) en fonction du temps d'exposition au feu pour des murs de différentes hauteurs . . . . .	290
9.14	(a) Conditions aux limites du problème considéré et (b) maillage utilisé, constitué de 3033 nœuds et 5864 éléments . . . . .	291
9.15	Mécanisme optimal (a); Puissance dissipée dans les mécanismes de déformation homogène (b), de blocs (c) et dans le mécanisme semi-analytique (d) . . . . .	293
A.1	Mesure de la vitesse des ondes $P$ . . . . .	302
A.2	Essai de résistance à la traction par flexion de la pierre . . . . .	303
A.3	Essai de résistance en flexion puis compression du mortier selon la norme NF EN 1015-11 . . . . .	304

C.1	Division des blocs pour le mécanisme proposé par Sab [5] . . . . .	314
D.1	Domaines de résistance analytique et numérique pour différents contrastes entre les résistances en compression de la pierre et du mortier . . . . .	329
D.2	Écart relatif $\varepsilon_i$ entre $\Pi^{num}(\underline{D})$ et $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$ (D.1) en fonction du trajet de chargement pour (a) le plus petit et (b) le plus grand contraste $R_c^b/R_c^m$ considéré; (c) écart relatif moyen $\varepsilon$ en fonction du contraste. . . . .	330
D.3	Coupes des domaines de résistance semi-analytique et numérique pour différentes valeurs de contraste entre la résistance en compression de la pierre et celle du mortier . . . . .	331
D.4	Écart relatif $\varepsilon_i$ (D.1) entre les fonctions d'appui macroscopiques obtenues pour les différents trajets de chargement paramétrés par un angle $\alpha$ représentés sur la figure D.3 . . . . .	332
D.5	(a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue pour une sollicitation donnée sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différentes valeurs de contraste <sup>3</sup> ; (b) écart relatif $\varepsilon_i$ (D.1) entre ces valeurs selon qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique	332
D.6	Domaines de résistance vis-à-vis de sollicitations planes obtenus par les approches analytique et numérique pour différentes valeurs de la fraction volumique du mortier . . . . .	334
D.7	Écart relatif $\varepsilon_i$ entre $\Pi^{num}(\underline{D})$ et $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$ défini par (D.1) en fonction du trajet de chargement (défini par l'équation (6.18)) pour (a) la plus petite et (b) la plus grande fraction volumique $\eta$ considérée; (c) écart relatif moyen $\varepsilon$ (D.2) en fonction de la fraction volumique . . . . .	335
D.8	Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique pour différentes valeurs de fraction volumique de mortier . . . . .	335
D.9	Écart relatif $\varepsilon_i$ (D.1) pour les différents trajets de chargement paramétrés par un angle $\alpha$ représentés sur la figure D.8 . . . . .	336
D.10	(a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différentes fractions volumiques de mortier <sup>4</sup> ; (b) écart relatif $\varepsilon_i$ (D.1) entre ces valeurs suivant qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique . . . . .	336
D.11	Domaines de résistance vis-à-vis de sollicitations planes obtenus par les approches analytique et numérique pour différentes valeurs d'éclatement transversal des joints . . . . .	337
D.12	Mécanismes optimaux obtenus numériquement pour un éclatement $\lambda = 0,05$ (a) et $\lambda = 0,5$ (b) . . . . .	338
D.13	Écart relatif $\varepsilon_i$ défini par (D.1) entre $\Pi^{num}(\underline{D})$ et $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$ en fonction du trajet de chargement pour (a) le plus petit et (b) le plus grand éclatement $\lambda$ considéré; (c) écart relatif moyen $\varepsilon$ défini par (D.2) en fonction de l'éclatement	339
D.14	Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique pour différentes valeurs d'éclatement transversal $\lambda$ des joints . . . . .	339
D.15	(a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différents éclacements <sup>5</sup> ; (b) écart relatif $\varepsilon_i$ défini par (D.1) entre ces valeurs suivant qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique . . . . .	340

# Liste des tableaux

2.1	Composition du mortier . . . . .	35
2.2	Résultats des essais de caractérisation de la pierre et du mortier . . . . .	35
2.3	Valeurs des propriétés physiques employées pour le calcul thermique . . . . .	60
2.4	Taux de chargement des murs pour différentes hypothèses sur la résistance de la pierre et du mortier . . . . .	65
2.5	Résistance au feu des différents murs testés selon la norme NF EN 1363-1 . . . . .	69
3.1	Composantes des tenseurs de raideur, des efforts thermiques et des moments fléchissants thermiques . . . . .	84
3.2	Flèches obtenues par la solution analytique, par homogénéisation et par un calcul direct 3D par éléments finis . . . . .	91
4.1	Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb à température ambiante retenus pour la pierre et le mortier . . . . .	131
4.2	Quelques grandeurs sur les problèmes numériques . . . . .	132
4.3	Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb tronqué en traction (et éventuellement en compression) à température ambiante pour la pierre et le mortier . . . . .	137
5.1	Caractéristiques géométriques de la cellule de base considérée . . . . .	154
5.2	Propriétés mécaniques des matériaux considérés . . . . .	154
6.1	Caractéristiques géométriques de la cellule de base considérée . . . . .	192
6.2	Propriétés mécaniques des matériaux considérés . . . . .	192
6.3	Variables des problèmes d'optimisation correspondant à l'approche statique et à l'approche cinématique pour le maillage de 17 853 éléments . . . . .	196
7.1	Propriétés des matériaux considérées pour les calculs . . . . .	223
7.2	Valeur des composantes du tenseur des taux de déformation et de l'aire $S^i$ de chaque zone $i$ définie sur la figure 7.5 . . . . .	230
8.1	Résultats des essais de caractérisation du mortier . . . . .	241
8.2	Valeurs des charges de ruine atteintes pour les différentes séries . . . . .	248
8.3	Propriétés des matériaux considérées pour la modélisation par l'approche cinématique du Calcul à la rupture . . . . .	262
8.4	Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux de la modélisation par l'approche cinématique du Calcul à la rupture . . . . .	263

---

9.1	Informations sur le problème de Calcul à la rupture numérique . . . . .	282
9.2	Comparaison des charges extrêmes obtenues avec les résultats de la littérature	292
C.1	Valeurs des translations et rotations des quatre blocs du mécanisme . . . . .	316
D.1	Taille de bloc pour les différentes fractions volumiques considérées . . . . .	333
D.2	Épaisseur du mur pour les différentes valeurs d'élançement transversales considérées . . . . .	337

# Chapitre 1

## Introduction générale

**Résumé :** *Cette introduction générale présente tout d'abord le contexte et les motivations de la présente thèse. Les phénomènes physiques guidant le comportement au feu des maçonneries sont ensuite mis en évidence au travers d'une revue de littérature concernant les aspects expérimentaux au niveau du matériau et au niveau de la structure. Les méthodes de dimensionnement normatives actuelles sont également présentées, puis on s'intéresse aux méthodes de modélisation existantes à température ambiante et à température élevée. Enfin, en se basant sur cette brève revue de littérature, la méthode de dimensionnement basée sur l'homogénéisation thermoélastique et en Calcul à la rupture proposée dans cette thèse est introduite.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Contexte et motivation de la thèse . . . . .</b>	<b>3</b>
1.1	La pierre naturelle, un matériau d'hier et d'aujourd'hui . . . . .	3
1.2	La pierre naturelle et le feu . . . . .	4
1.3	Objectifs de la thèse . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Observations expérimentales sur la résistance au feu des murs de maçonnerie . . . . .</b>	<b>6</b>
2.1	Essais à l'échelle du matériau . . . . .	6
2.2	Essais à l'échelle réduite . . . . .	10
2.3	Essais en grandeur réelle . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Méthodes de dimensionnement existantes pour les maçonneries</b>	<b>14</b>
3.1	Méthodes normalisées en France : l'Eurocode 6 [1] et le DTU 20.1 [2] . . . . .	14
3.2	Méthodes de modélisation et de calcul avancées à température ambiante . . . . .	17
3.3	Méthodes de modélisation avancées à haute température . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Proposition d'une méthode d'évaluation de la résistance au feu d'un mur en pierre . . . . .</b>	<b>25</b>
4.1	Justification d'une approche par homogénéisation thermo-élastique et en Calcul à la rupture . . . . .	25

4.2	Approche proposée . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Plan du manuscrit . . . . .</b>	<b>27</b>
5.1	Partie 1 : Observations expérimentales et détermination du gradient thermique . . . . .	27
5.2	Partie 2 : Détermination de la courbure thermique . . . . .	27
5.3	Partie 3 : Détermination de la résistance de la maçonnerie à l'échelle de l'assemblage . . . . .	27
5.4	Partie 4 : Analyse de la stabilité au feu du mur . . . . .	28

---

# 1 Contexte et motivation de la thèse

## 1.1 La pierre naturelle, un matériau d’hier et d’aujourd’hui

La pierre naturelle fait partie des premiers matériaux de construction. Les premières constructions en pierre étaient souvent réalisées en pierre sèche. La découverte du ciment par les romains, et l’amélioration des techniques de taille de la pierre, ont peu à peu permis d’utiliser ce matériau dans des édifices monumentaux.

Certains édifices, comme le Panthéon de Rome (figure 1.1 (a)), ont traversé les millénaires. D’autres sont plus récents : la rénovation de Paris par le Baron Haussmann au XIXe siècle a fait apparaître un grand nombre de bâtiments en pierre de taille calcaire, qu’ils soient monumentaux (Opéra Garnier - figure 1.1 (b), Hôtel Dieu, église Saint-Augustin par exemple) ou des immeubles d’habitation.



FIGURE 1.1 – (a) Maquette du Panthéon de Rome par George Chedanne<sup>1</sup>; (b) Opéra Garnier<sup>2</sup>

L’avènement du ciment, dans le courant du XIXe siècle, puis du béton armé au début du XXe siècle, ainsi que les importants besoins de reconstruction après la Seconde Guerre Mondiale ont contribué à favoriser l’utilisation du béton, plus simple à mettre en œuvre. Cependant, la prise de conscience autour des questions environnementales dans les années 1980 a peu à peu posé la question de l’impact énergétique et environnemental du secteur du bâtiment. En France, en 2022, ce secteur représente 43 % de la consommation énergétique annuelle et 23 % des émissions de gaz à effet de serre [26]. Pour faire baisser cette part et tendre vers la neutralité carbone, deux pistes principales sont mises en œuvre : la réhabilitation de l’existant, notamment pour le rendre moins énergivore, et l’utilisation de matériaux de construction moins carbonés. Dans ce contexte, des matériaux et techniques

---

1. Source de l’image : Alexander Hoernigk / CC BY-SA 4.0 (via Wikimedia Commons). Disponible à : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paris\\_Palais\\_Garnier\\_2010-04-06\\_16.55.07.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paris_Palais_Garnier_2010-04-06_16.55.07.jpg)

2. Source de l’image : [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georges\\_Chedanne,\\_plastico\\_in\\_spaccato\\_del\\_Pantheon\\_di\\_Roma,\\_1892-93\\_ca.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Georges_Chedanne,_plastico_in_spaccato_del_Pantheon_di_Roma,_1892-93_ca.jpg)

"oubliés", comme la terre crue, la construction en pisé ou encore la pierre naturelle, refont surface.

Ces matériaux sont particulièrement bien adaptés aux nouvelles réglementations comme la RE2020 [27][28]. Cependant, pour démocratiser leur utilisation dans la construction neuve, il est nécessaire de disposer de textes de référence concernant le dimensionnement des structures qu'ils composent. Pour les maçonneries, les textes de référence sont l'Eurocode 6 [1], à l'échelle européenne, et le DTU 20.1 [2] à l'échelle nationale. Ces textes incluent les types de maçonneries les plus communs (brique, différents types de blocs en béton) ainsi que la pierre naturelle. Cependant, compte-tenu de l'utilisation un peu moins courante de ce dernier matériau, et de son industrialisation plus faible que la brique ou le béton, les méthodes de calcul proposées sont plus sommaires.

Par ailleurs, le bâti existant est composé d'une part non-négligeable de pierre (voir figure 1.2), qu'il conviendrait également d'être capable de modéliser pour mieux rénover. Ces deux aspects, dimensionnement du neuf et rénovation de l'existant, montrent bien la nécessité de recherches pour mieux comprendre le comportement des structures en pierre naturelle.

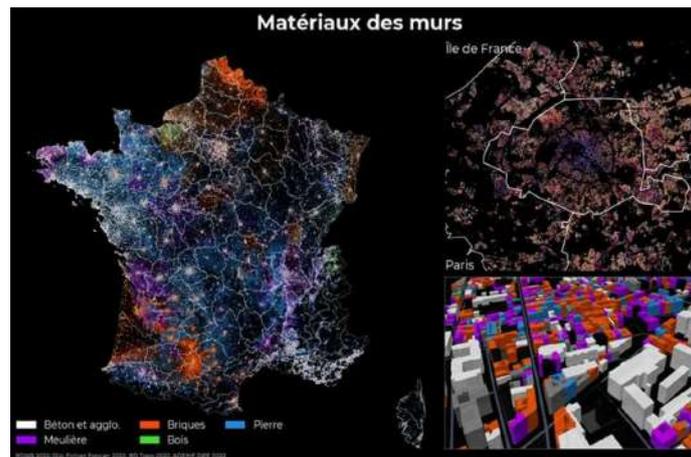


FIGURE 1.2 – Matériaux des murs des bâtiments recensés dans la Base de Donnée Nationale du Bâtiment [6]

## 1.2 La pierre naturelle et le feu

Au delà des sollicitations courantes auxquelles sont soumis les bâtiments (charges d'exploitation, vent par exemple), il est nécessaire de prévoir leur dimensionnement vis-à-vis de sollicitations accidentelles comme les incendies. Des méthodes de dimensionnement vis-à-vis de ces sollicitations peuvent être proposées dans les textes de référence.

Dans ce contexte, la **résistance au feu**, aussi appelée "capacité portante", est définie comme "l'aptitude de l'élément de construction à supporter l'exposition au feu sous des actions mécaniques définies, sur une ou plusieurs faces, pendant un temps donné sans perte

de stabilité structurale" (NF EN 13501-2 [29]). Ce critère est particulièrement important pour la sécurité des personnes, qu'il s'agisse des occupants, des usagers du bâtiment ou encore des services de secours.

L'Eurocode 6 partie 1-2 [17] est le texte de référence concernant la résistance au feu des maçonneries. Il fournit des méthodes de dimensionnement au feu des maçonneries les plus courantes (briques, béton, blocs silico-calcaires), mais exclut les maçonneries en pierre naturelle. En l'absence de données, les valeurs très sécuritaires souvent adoptées pour ces structures ont tendance à rendre l'usage de la pierre naturelle plus difficile, et à ne pas l'utiliser selon sa pleine capacité de résistance au feu.

Au-delà du seul contexte de la construction neuve de bâtiments en pierre naturelle, les récents incendies de la cathédrale Notre-Dame de Paris (2019), de la cathédrale de Nantes (2020), ou d'immeubles haussmanniens (2021 et 2022) ont mis en évidence le manque de connaissances concernant le comportement au feu des bâtiments et structures en pierre naturelle et la nécessité d'études complémentaires sur ce sujet.

### 1.3 Objectifs de la thèse

Dans le contexte précédemment évoqué, les deux objectifs de cette thèse sont :

- D'une part, de **progresser dans la compréhension des mécanismes physiques** (notamment hygriques, thermiques et mécaniques) **à l'œuvre lorsqu'un mur en pierre naturelle massive est exposé au feu**. Une bonne compréhension de ces mécanismes à température élevée se base sur leur compréhension à température ambiante, c'est pourquoi des essais à température ambiante et au feu sont proposés.
- D'autre part, de **proposer une méthode de modélisation du comportement au feu des murs de maçonnerie en pierre massive, à visée applicative pour l'ingénieur**, et de **valider expérimentalement** cette méthode. La notion d'approche ingénieur est très importante ici, puisqu'elle nécessite de faire un compromis entre une description fidèle des phénomènes physiques en jeu et un modèle abordable pour un ingénieur en bureau d'études, tant au niveau de ses paramètres d'entrée (qui doivent tant que possible se baser sur des essais normalisés) qu'au niveau de sa complexité et du temps de calcul.

## 2 Observations expérimentales sur la résistance au feu des murs de maçonnerie

Dans cette partie, on propose une brève revue de littérature concernant les aspects expérimentaux du comportement des maçonneries et de leurs constituants lorsqu'ils sont exposés au feu. L'objectif n'est pas d'être exhaustif, puisque de tels travaux ont déjà été entrepris récemment par Sciarretta et al. [7] (pour le matériau pierre à haute température) et par Daware et Naser [30] (pour les maçonneries à haute température). Nous visons plutôt à mettre en évidence les principaux phénomènes se produisant lorsqu'un mur de maçonnerie est exposé au feu, tant à l'échelle du matériau qu'à l'échelle de la structure.

### 2.1 Essais à l'échelle du matériau

En France, les pierres utilisées dans la construction sont très souvent des pierres locales, dépendant donc des différents bassins géologiques : calcaire dans le bassin parisien et dans le bordelais, granite en Bretagne par exemple. Le grès et le marbre peuvent également être retrouvés dans les constructions, tandis que le schiste est souvent utilisé en couverture dans les anciennes régions volcaniques. Bien que les méthodes développées dans cette thèse puissent, en théorie, être appliquées à n'importe quel type de maçonnerie de blocs pleins, nous nous intéresserons uniquement aux maçonneries en pierre calcaire du point de vue expérimental. Pour les autres types de pierre, il serait nécessaire de vérifier l'applicabilité des méthodes par des essais additionnels.

#### 2.1.1 Propriétés physiques et thermiques

Les travaux de Pestre [31] concernant la caractérisation des propriétés thermiques des pierres de construction à température ambiante ont montré leur importante diversité, due à leur porosité et à leur composition minéralogique. A titre d'exemple, les valeurs de diffusivité  $D = \lambda/(\rho c_p)$  (où  $\rho$  est la masse volumique,  $\lambda$  la conductivité thermique et  $c_p$  la capacité thermique massique) pour des pierres sèches s'échelonnent entre  $5.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  (pierre de Tuffeau) et  $8.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$  (pierre d'Euville). La diffusivité thermique du béton à température ambiante est quant à elle de l'ordre de  $7 - 9.10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ , ce qui implique que la pierre est en général un peu moins conductrice que le béton.

La revue de littérature de Sciarretta et al. [7] a en revanche montré que l'évolution à haute température des propriétés thermiques de différents calcaires était assez similaire. A titre d'exemple, la figure 1.3 (a) donne l'évolution de la conductivité thermique des pierres étudiées relativement à leur conductivité à température ambiante.

Enfin, le coefficient de dilatation thermique des pierres est étroitement lié à leur

composition minéralogique. La figure 1.3 (b), extraite des travaux de Vigroux [8], rassemble les évolutions de la dilatation thermique de différents calcaires en fonction de la température. Ces valeurs sont relativement similaires à celles du béton jusqu'à 700 °C, puis la pierre tend à se contracter alors que, selon l'Eurocode 2 partie 1-2 [32], la déformation thermique du béton reste constante.

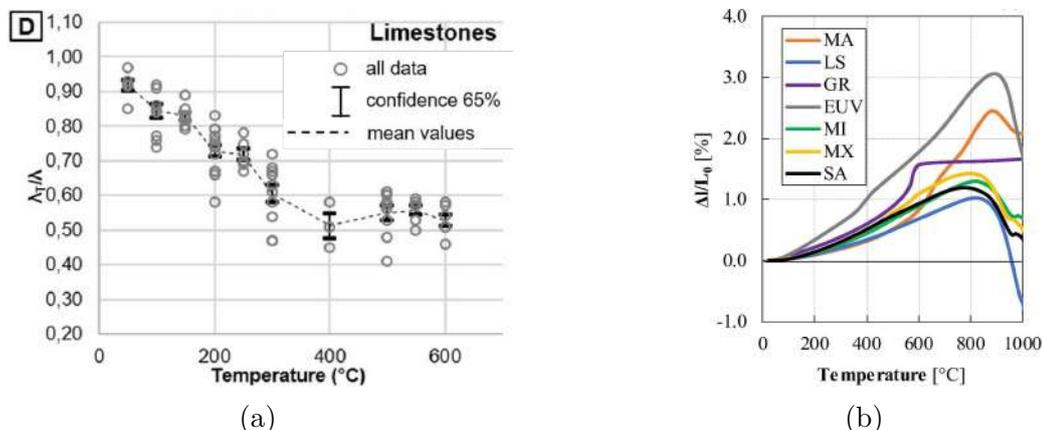


FIGURE 1.3 – (a) Évolution relative de la conductivité thermique des pierres en fonction de la température (extrait de Sciarretta et al. [7]); (b) Déformation thermique de différents calcaires en fonction de la température (extrait de Vigroux et al. [8])

Ces changements de propriétés physiques à haute température proviennent de transformations chimiques, qui peuvent également être remarquées en observant l'évolution de la couleur du matériau, comme proposé notamment par Vigroux et al. [33].

Concernant les mortiers, il n'existe à notre connaissance que très peu d'études sur leurs propriétés thermiques à haute température, et aucune ne concerne les mortiers de chaux hydraulique naturelle (notés "NHL"), qui sont les plus courants pour la construction en pierre.

## 2.1.2 Propriétés thermomécaniques

**2.1.2.1 Propriétés élastiques** La figure 1.4 (a) donne l'évolution du coefficient de dégradation du module de Young des pierres calcaires en fonction de la température, tandis que la figure 1.4 (b) rassemble des données concernant l'évolution du module de Young des mortiers. A titre indicatif, l'évolution du module de Young d'un béton à granulats calcaires a également été rajoutée sur ces deux figures.

Bien moins d'études sont disponibles concernant l'évolution du coefficient de Poisson des matériaux en fonction de la température. Les récents essais de Guenser et al. [37] sur du calcaire de Saint-Maximin, semblent montrer que le coefficient de Poisson diminue linéairement après 200 °C, pour atteindre environ la moitié de sa valeur initiale à 800 °C.

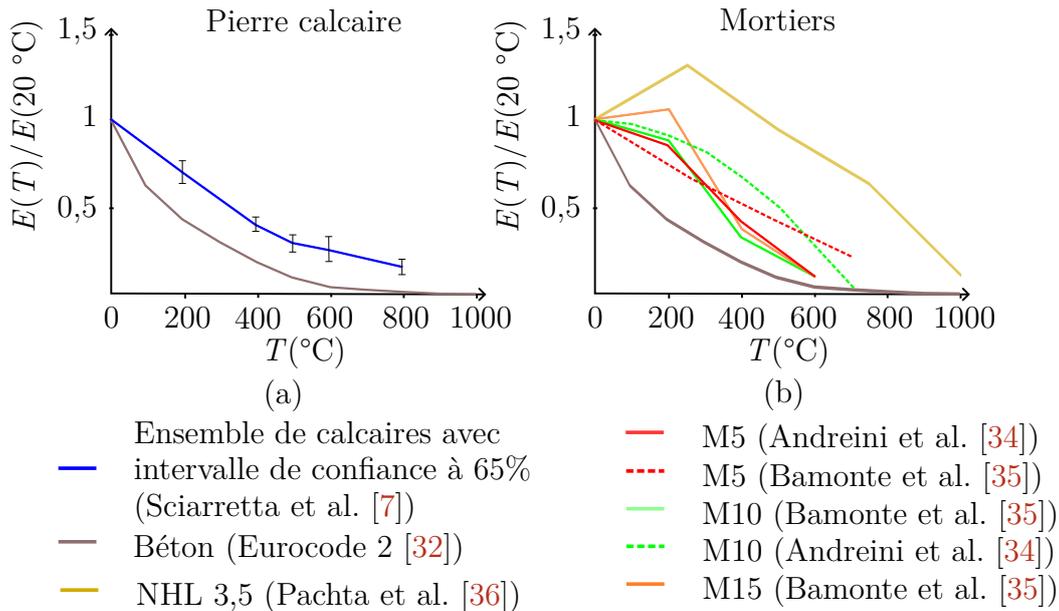


FIGURE 1.4 – Évolution du module de Young de différentes pierres et mortiers en fonction de la température

**2.1.2.2 Propriétés de résistance** A température ambiante, la pierre comme le mortier sont des matériaux fragiles en traction. La figure 1.5 (a), extraite de Costigan et Pavia [9], représente à titre d'exemple des courbes contrainte-déformation obtenues lors d'un essai de flexion trois points pour différents types de mortiers de chaux aérienne (noté "CL90") ou hydraulique (notés "NHL"). En compression en revanche, les mortiers de chaux sont plutôt ductiles (voir figure 1.5 (b), également extraite de Costigan et Pavia [9]) tandis que les pierres calcaires sont moyennement fragiles (voir figure 1.5 (c), concernant un calcaire de Saint-Maximin, extrait de la thèse de Parent [10]).

La figure 1.6 (a) donne l'évolution relative de la résistance à la compression moyenne en fonction de la température obtenue par Sciarretta et al. [7] sur les pierres considérées, tandis que la figure 1.6 (b) donne l'évolution du facteur de réduction de la résistance à la traction en fonction de la température. Il apparaît que, de manière générale, la pierre conserve mieux ses propriétés de résistance que le béton à haute température. On notera toutefois que les résultats présentés proviennent d'essai de compression résiduelle (après refroidissement du matériau), et non pas d'essais de compression à haute température. Bien que les essais de résistance résiduelle soient plus simples à mettre en œuvre, les résultats qu'ils fournissent peuvent être différents de ceux réalisés à température élevée. Houpert et Homand-Etienne [38] ont notamment montré que les roches avaient une résistance plus élevée à haute température qu'après refroidissement.

La variété d'évolution des propriétés mécaniques en fonction de la température est due à plusieurs paramètres, incluant notamment la composition minéralogique des pierres (proportion de quartz ou d'autres minéraux), la taille des grains et leur cimentation, ainsi que la porosité des pierres.

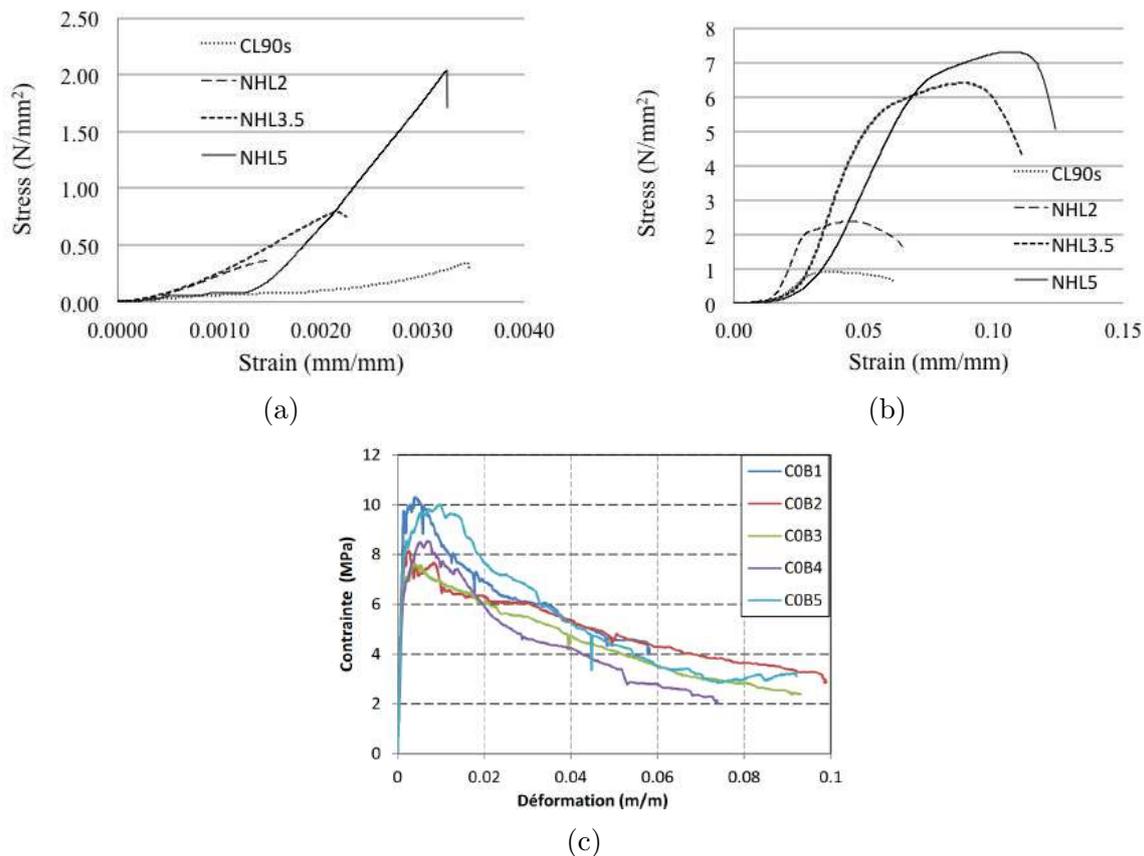


FIGURE 1.5 – Courbes contrainte-déformation en traction (a) et en compression (b) de mortiers de chaux aérienne et hydraulique (Costigan et Pavia [9]) ; Courbes contrainte-déformation pour le calcaire de Saint-Maximin (Parent [10])

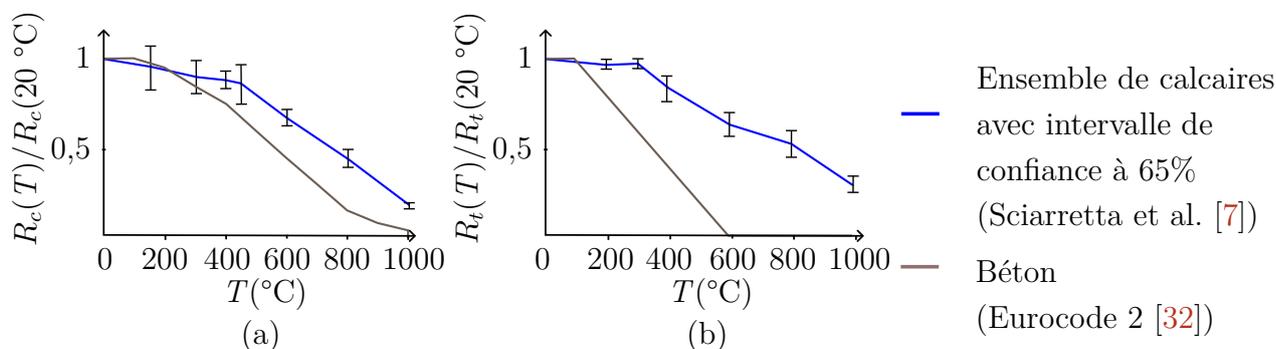


FIGURE 1.6 – Évolution de la résistance à la compression (a) et à la traction (b) d'un ensemble de pierres calcaires et d'un béton de granulats calcaires en fonction de la température

Peu de résultats expérimentaux sont disponibles concernant le comportement résiduel des mortiers après exposition à haute température. On en donne quelques-uns sur la figure 1.7. Sur cette figure, il apparaît que la résistance résiduelle des mortiers de ciment après exposition à haute température évolue de manière assez similaire à celle du béton. À notre connaissance, il n'existe aucun résultat similaire pour des essais réalisés à haute température, qui sont plus complexes à réaliser.

L'incendie de Notre-Dame de Paris a mis en lumière le besoin de mieux connaître les

pierres calcaires françaises, et différentes études sur leurs propriétés thermo-mécaniques, ainsi que sur les propriétés des mortiers utilisés dans les constructions patrimoniales, sont en cours, notamment dans le cadre des projets ANR POSTFIRE [39] et DEMMEFI [40].

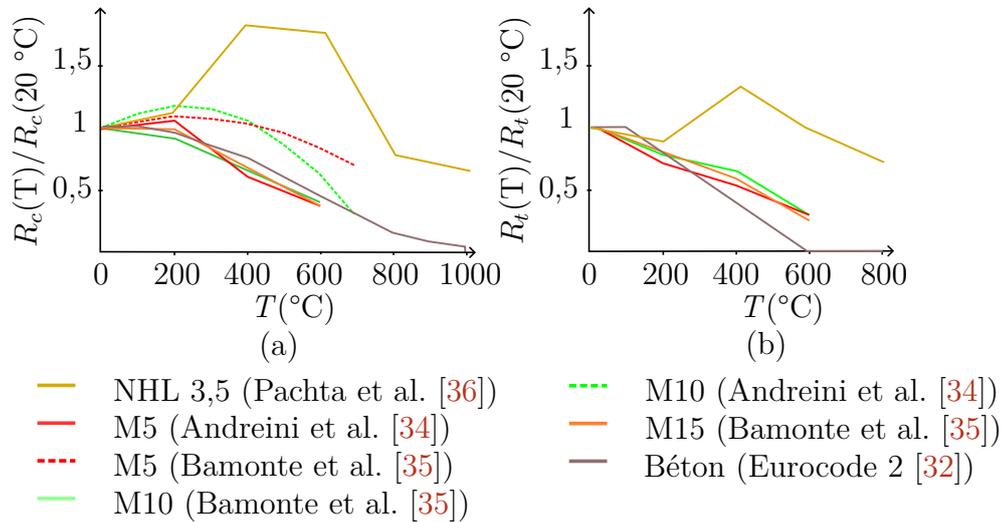


FIGURE 1.7 – Évolution de la résistance à la compression (a) et à la traction (b) d'un ensemble de plusieurs mortiers et d'un béton de granulats calcaires en fonction de la température

En conclusion sur ces essais à l'échelle du matériau, il apparaît que les propriétés des pierres sont relativement bien connues, même s'il existe une certaine variabilité due à leur composition minéralogique. En revanche, les propriétés mécaniques des mortiers sont quant à elles assez variables, et leurs propriétés thermiques sont pour l'instant mal connues.

## 2.2 Essais à l'échelle réduite

Si la connaissance des propriétés à température ambiante et à température élevée des matériaux constitutifs de la maçonnerie est nécessaire pour alimenter les modélisations, elle n'est pas suffisante pour vérifier que tous les phénomènes physiques et mécaniques dus au feu sont bien pris en compte. Il est alors nécessaire de réaliser des essais à l'échelle de l'assemblage ou de la structure.

Les essais à échelle réduite présentent l'avantage de nécessiter des équipements moins complexes et lourds que les essais à l'échelle 1, et donc d'être moins coûteux et plus faciles à répliquer. Ils permettent d'accéder à des informations sur l'interaction entre les blocs et le mortier à haute température, mais aussi, selon le protocole de chauffage, de voir l'effet d'un gradient thermique sur l'assemblage.

Les essais de Bosnjak et al. [11] (figure 1.8 (a)), sur des assemblages de trois briques

en terre cuite ou silico-calcaires, ont montré que la résistance des assemblages était à peu près constante jusqu'à 700 °C, tandis que leur raideur diminuait rapidement avec la température. Les essais de Ruvalcaba Ayala [41], menés sur des assemblages de trois rangées de blocs silico-calcaires avec des joints verticaux, montrent quant à eux que la chute de résistance se situe plutôt aux environs de 600 °C. Ils ont également montré que le mode de rupture dépendait de la température, et que les blocs silico-calcaires étaient susceptibles de présenter de l'écaillage pour des températures élevées.

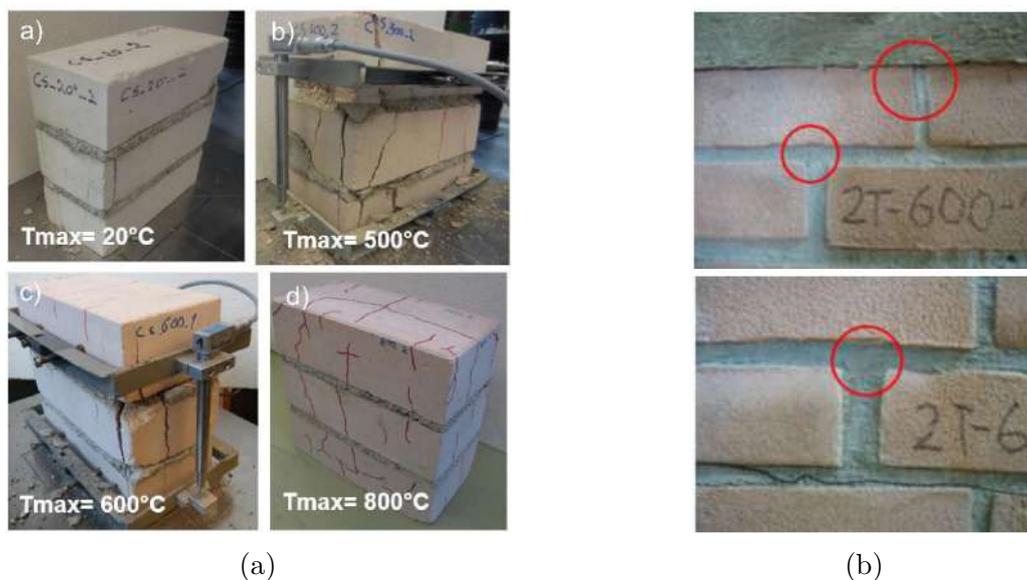


FIGURE 1.8 – (a) Essais de Bosnjak et al. [11]; (b) Essais de Russo et Sciarretta [12]

Les essais de Russo et Sciarretta [12] présentent quant à eux l'avantage de porter sur des assemblages composés de plusieurs dizaines de briques, de sorte qu'ils représentent des mini-structures et que les phénomènes d'interaction entre les composants de la maçonnerie soient bien visibles. Ces assemblages ont tout d'abord été chauffés à 300 °C ou 600 °C, puis ont été testés en compression ou en cisaillement après refroidissement. Ces essais ont notamment mis en évidence l'apparition de fissures dues au chargement thermique seul (voir figure 1.8 (b)), l'apparition de fissures verticales traversant la brique sous un chargement de compression (quelle que soit la température à laquelle avait été exposé l'assemblage) ainsi que la forte perte de résistance en cisaillement des assemblages après exposition à une température élevée.

### 2.3 Essais en grandeur réelle

Bien que les essais à l'échelle 1 soient difficiles et coûteux à mettre en œuvre, ils sont les plus riches en informations concernant le comportement des matériaux constitutifs, de l'assemblage et de la structure en conditions réelles. Parmi les premiers essais au feu à l'échelle 1 reportés dans la littérature, on peut citer ceux de Ingberg [42], dans les années 1950 sur des murs en brique. D'autres essais ont été réalisés à la même période par Foster

et al. [43], [44], sur des parpaings et des blocs silico-calcaires. Ces essais ont notamment montré que, quels que soient les matériaux constitutifs, les dilatations différentielles entre la face chauffée et la face non-chauffée créent une courbure thermique. Si le mur est retenu vis-à-vis de déplacements hors-plan sur ses bords inférieur et supérieur, cette courbure thermique va le faire se courber vers le feu. En revanche, s'il n'est retenu que par un encastrement en pied, il se déplace dans la direction opposée au feu. La figure 1.9, extraite des travaux de Cooke [13], illustre cette déformation thermique.

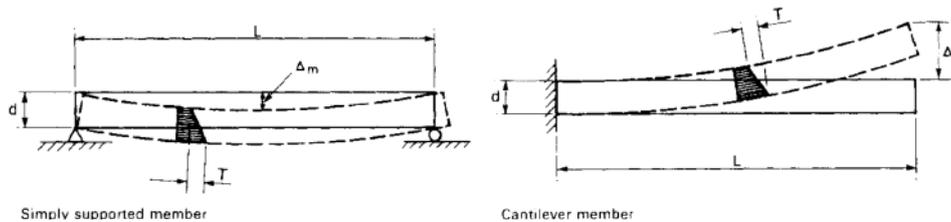


FIGURE 1.9 – Déformée thermique pour différentes conditions aux limites (extrait de Cooke [13])

La campagne expérimentale de Byrne [45] a permis de préciser l'effet de certains paramètres sur la résistance au feu du mur. Elle a notamment montré l'influence néfaste de l'élanement du mur sur sa résistance au feu. Elle a également montré qu'un chargement vertical, pour un mur porteur, tendait à faire diminuer la flèche. Par conséquent, pour un certain niveau de chargement (proche de 50 % de la résistance en compression à température ambiante selon la norme Australienne de l'époque), le mur résiste au feu pendant moins longtemps que pour une charge mécanique de 25 % de la charge de ruine à température ambiante, ce qui paraît sensé compte-tenu de la dégradation des propriétés de résistance des matériaux. Cependant, il résiste également moins longtemps qu'un mur chargé à 75 % de sa résistance calculée à température ambiante car sa courbure thermique plus forte engendre davantage de moments fléchissants parasites. Ainsi, il semble exister une charge "critique" concernant la résistance au feu du mur.

Par la suite, des campagnes expérimentales de plus faible envergure ont été conduites sur d'autres types de blocs : des briques alvéolés (Al Nahhas et al. [46], Nguyen et Meftah [14]), des blocs alvéolés en béton (Oliveira et al. [15], Pope [47]) ou encore des maçonneries réfractaires assemblées sans joints (Oliveira et al. [48]). Ces campagnes expérimentales ont permis d'affiner la compréhension des mécanismes affectant les maçonneries exposées au feu concernant la fissuration, les phénomènes locaux tels que l'écaillage ou le flambement local des parois des briques alvéolées, ainsi que la description des transferts thermiques dans les blocs creux.

Bien que plus complexes à réaliser que des essais sur les murs, quelques essais sur des arches exposées au feu peuvent également être retrouvés dans la littérature. On peut notamment citer les récents essais de Fantilli et Burello [49] sur deux arches en briques.

Peu de travaux concernant la résistance au feu des maçonneries en pierre naturelle

## 2. Observations expérimentales sur la résistance au feu des murs de maçonnerie

massive existent à ce jour dans la littérature. A notre connaissance, les seuls essais existants avant le début de cette thèse sont ceux de Pham et al. [3], réalisés au CSTB en 2019 (voir figure 1.11 (a)). L'incendie de Notre-Dame de Paris en 2019 a cependant mis en lumière la nécessité de disposer de données expérimentales à l'échelle de la structure. D'autres essais à l'échelle 1 ont été réalisés depuis. On peut notamment citer les six essais réalisés au CSTB en 2022 dans le cadre du projet ANR POSTFIRE (Pimienta et al. [16]) sur six murs composés de trois pierres calcaires différentes (voir figure 1.11 (b)).

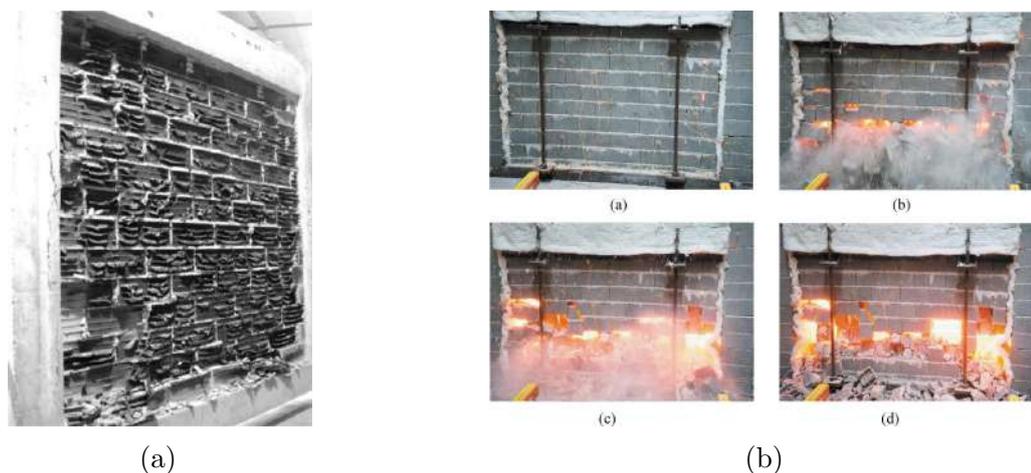


FIGURE 1.10 – (a) Mur en briques alvéolées testé par Nguyen et Meftah [14]; (b) Essais de Oliveira et al. [15]

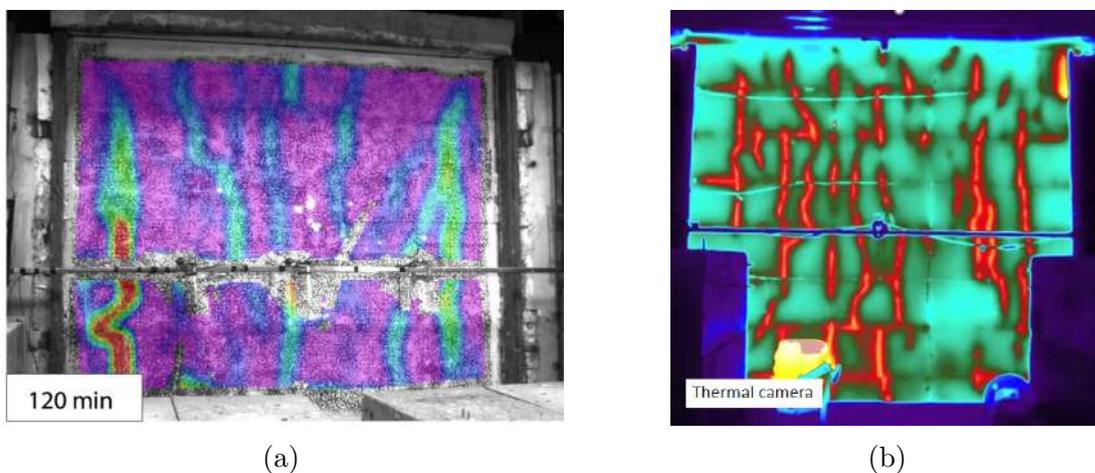


FIGURE 1.11 – (a) Fissuration vue par corrélation d'images sur les essais de Pham et al. [3] sur un mur en calcaire de Saint Vaast; (b) Champ de température mesuré par une caméra thermique sur la face non-exposée d'un mur en pierre calcaire (Pimienta et al. [16])

## 3 Méthodes de dimensionnement existantes pour les maçonneries

### 3.1 Méthodes normalisées en France : l’Eurocode 6 [1] et le DTU 20.1 [2]

En France, le dimensionnement des bâtiments en maçonnerie se base principalement sur l’Eurocode 6 [1] et sur le DTU 20.1 [2] (dont la version actuelle, datant de 2020, se base largement sur les principes proposés dans l’Eurocode 6 [1]).

#### 3.1.1 A température ambiante

L’Eurocode 6 [1] est le texte de référence à l’échelle européenne concernant les maçonneries composées de briques de terre cuite, d’éléments en silico-calcaire, d’éléments en béton de granulats courants et légers, d’éléments en béton cellulaire autoclavé, d’éléments en pierre reconstituée et en pierre naturelle. Il prend en compte les maçonneries non-armées, armées et confinées.

**3.1.1.1 Détermination de la résistance caractéristique en compression de l’assemblage** Quels que soient le type de blocs et le type de mortier utilisés, la résistance en compression simple de l’assemblage peut être déterminée par la formule empirique suivante :

$$f_k = K f_b^\alpha f_m^\beta \quad (1.1)$$

où  $f_k$  est la résistance caractéristique de l’assemblage,  $f_b$  et  $f_m$  sont respectivement la résistance caractéristique de la pierre et celle du mortier, et  $K$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont des coefficients qui dépendent du type de bloc et du type de mortier. L’Eurocode 6 [1] et le DTU 20.1 [2] donnent les valeurs  $K = 0,45$ ,  $\alpha = 0,7$  et  $\beta = 0,3$  pour la pierre naturelle montée avec un mortier courant. Cependant, le caractère très empirique de cette formule fait qu’elle est régulièrement remise en cause, et que de nombreux autres calages ont été proposés pour les paramètres  $K$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ . A titre d’exemple, le Código Técnico de la Edificación [50] (équivalent espagnol du DTU 20.1 [2]), considère les valeurs suivantes :  $K = 0,6$ ,  $\alpha = 0,65$ ,  $\beta = 0,25$ . Costigan et al. [51] ont rassemblé sept modèles de ce type, puis comparé ces modèles à leurs essais et proposé quatre formulations supplémentaires. Ils concluent néanmoins que, malgré le caractère empirique de la formule de l’Eurocode 6 [1], celle-ci est plutôt adaptée aux assemblages de pierre et de mortier de chaux hydraulique naturelle qu’ils ont testés.

**3.1.1.2 Détermination de la résistance caractéristique du mur** Lorsque les murs sont principalement soumis à des charges verticales, l'Eurocode 6 [1] propose une méthode de détermination prenant en compte :

- La valeur de la charge verticale ;
- Son excentrement par rapport à l'axe neutre du mur ;
- Un excentrement initial dû aux imperfections géométriques ;
- Un excentrement dû à un éventuel chargement transversal.

Ces trois valeurs d'excentrement entrent dans le calcul d'un coefficient de réduction, qui inclut également les effets du flambement. Un exemple de calcul sera proposé dans le chapitre 2.

**3.1.1.3 Détermination de la résistance en flexion du mur** L'Eurocode 6 [1] prend en compte des situations de chargement assez variées et permet, par exemple, de calculer la résistance de murs de maçonnerie vis-à-vis de chargements hors-plan, pour des chargements verticaux très faibles. Dans ce cas, on peut noter que la résistance à la flexion de la maçonnerie est donnée pour chaque type de maçonnerie, en faisant seulement la distinction entre l'utilisation ou non d'un mortier de résistance en compression supérieure à 5 MPa. Si cette approche présente une utilité dans des cas très simples, elle est en revanche insuffisante dès que le chargement ou la géométrie se complexifient, et la prise en compte des propriétés réelles des blocs et du mortier, ainsi que de l'adhérence entre ces deux composants, n'est pas possible.

Pour conclure, les méthodes de calcul vis-à-vis de chargements mécaniques proposées par l'Eurocode 6 [1] sont très empiriques et ne recouvrent pas nécessairement la diversité des assemblages maçonnés ou des chargements.

### 3.1.2 Dimensionnement au feu

L'Eurocode 6 (Partie 1-2) [17] propose des méthodes de dimensionnement au feu pour certains types de maçonneries. Ces méthodes sont de trois types :

- **Valeurs tabulées pour l'épaisseur du mur en fonction du matériau et de la résistance au feu requise** : Pour les maçonneries en terre cuite, en silico-calcaire, en béton de granulats courants et légers, en béton cellulaire autoclavé et en pierre artificielle, l'annexe nationale de l'Eurocode 6 partie 1-2 propose des épaisseurs minimales selon la résistance requise, et les critères d'isolation et d'étanchéité si le mur n'est pas porteur.
- **Méthode de calcul simplifiée** (voir figure 1.12) : Pour certaines classes d'éléments en terre cuite, silico-calcaires, de béton de granulats légers, de granulats courants ou de béton cellulaire autoclavé, une méthode similaire à la méthode de l'isotherme

à 500 °C pour le béton (Eurocode 2 partie 1-2 [32]) est proposée. Elle consiste à diviser le mur en trois zones dans sa direction transversale : une zone saine, où la température n'a pas excédé une certaine température  $\theta_1$ , une zone moyennement endommagée, où la température est comprise entre  $\theta_1$  et  $\theta_2$ , et une zone inefficace, ne possédant pas de résistance résiduelle et où la température a dépassé  $\theta_2$ . La résistance en compression est alors calculée en sommant la résistance de la première zone et celle de la deuxième zone, à laquelle un facteur de dégradation dépendant du matériau est appliqué. Les températures  $\theta_1$  et  $\theta_2$  dépendent également du matériau. Un excentrement  $e_{\Delta\theta}$  est également calculé pour prendre en compte la courbure thermique. Cet excentrement se base sur une formule simplifiée de Cooke [13] et suppose un gradient thermique linéaire dans l'épaisseur.

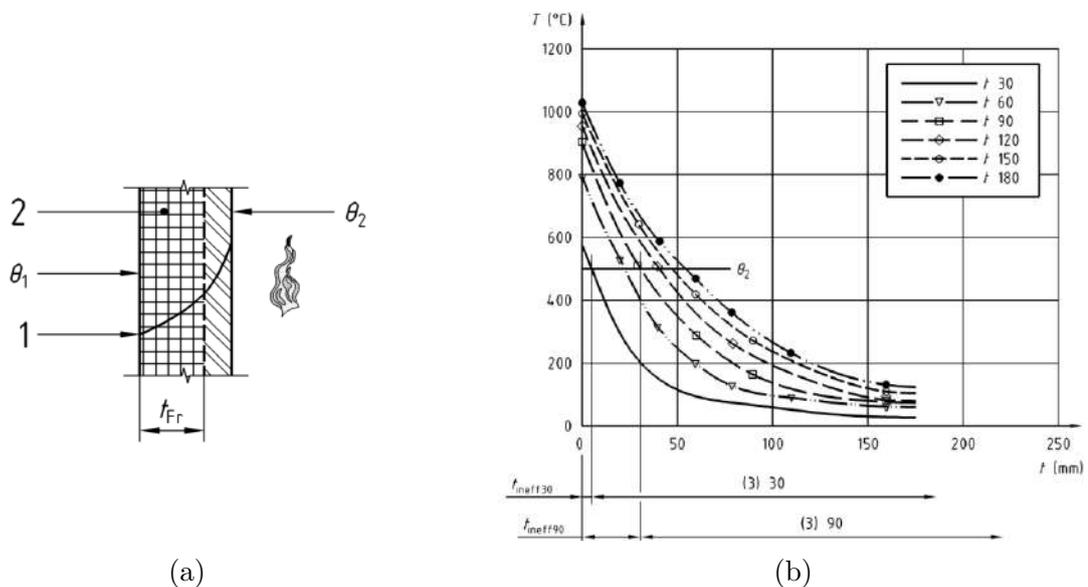


FIGURE 1.12 – (a) Définition de la zone inefficace pour la méthode de calcul simplifiée de l'Eurocode 6 [17]; (b) Valeur de  $\theta_2$  et épaisseur de la zone inefficace pour une maçonnerie de blocs silico-calcaire

- **Méthode de calcul dite "complexe"** : L'Eurocode 6 admet également l'utilisation de calculs couplés thermo-mécaniques. L'évolution de certaines propriétés physiques, thermiques et mécaniques (masse volumique, conductivité thermique, capacité thermique massique, coefficient de dilatation thermique et résistance en compression) en fonction de la température est donnée pour les éléments en terre cuite, les éléments silico-calcaires, les éléments en béton de granulats légers, et les éléments en béton autoclavé. Des données provenant de publications de référence peuvent également être utilisées. Des courbes issues des essais de Andreini et Sassu [52] sur les mortiers de ciment sont d'ailleurs intégrées au projet de révision de l'EN 1996-1-2 de 2022 [53]. Selon l'Eurocode 6 Partie 1-2 [17], de tels calculs doivent prendre en compte l'évolution des propriétés thermiques et mécaniques en fonction de la température, l'effet des dilatations thermiques moyennes et différentielles ainsi que les éventuels effets de second ordre. Cette méthode de calcul peut également être utilisée pour

toute courbe de montée en température, et pas uniquement pour la courbe de feu normalisé ISO 834-1 [54].

Bien que ces méthodes puissent donner des pistes d'études pour le calcul au feu des murs en pierre massive, il est important de noter que l'Eurocode 6 Partie 1-2 [17] exclut la pierre naturelle, et que le projet de révision de 2022 continue de l'exclure. Il apparaît donc nécessaire de fournir des méthodes de dimensionnement au feu des maçonneries en pierre naturelle massive à visée applicative pour l'ingénieur.

## 3.2 Méthodes de modélisation et de calcul avancées à température ambiante

Au-delà des méthodes simplifiées proposées par l'Eurocode 6 [1], de nombreuses méthodes de modélisation avancées ont été développées pour répondre à différents besoins.

D'Altri et al. [55] ont récemment proposé une revue de littérature des différentes méthodes de modélisation des maçonneries, en les classant en quatre grandes familles :

- Les méthodes de modélisation bloc-à-bloc, par la méthode des éléments discrets ou des éléments finis ;
- Les méthodes géométriques, se basant sur les travaux de Heyman [56] sur les lignes de poussée ;
- Les méthodes de modélisation continues, permettant d'accéder au comportement et/ou à la résistance de la structure en maçonnerie modélisée par un milieu continu équivalent ;
- Les approches par macro-éléments, visant à modéliser un bâtiment en maçonnerie par un ensemble de poutres ou de ressorts. Ces approches sont principalement dédiées à la modélisation sismique, et nous ne les évoquerons pas par la suite.

On peut également souligner qu'avec le développement des méthodes d'intelligence artificielle, des modélisations par réseaux de neurones commencent également à se développer (Plevris et Asteris [57], Friaa et al. [58] par exemple). Ces méthodes nécessitent cependant une phase d'entraînement sur un grand nombre d'essais ou de résultats de calculs, dont nous ne disposons pas pour l'instant.

### 3.2.1 Approches géométriques

Les approches géométriques sont les plus anciennes, puisqu'elles trouvent leur source dans les travaux de Hooke (1670) (Block et al. [18], voir figure 1.13 (a)). Dès lors, ces approches géométriques, basées sur la statique graphique, ont été très utilisées pour évaluer la stabilité d'arches, de voutes et de dômes.

En 1966, Heyman [56] a relié ces approches géométriques, basées sur les lignes de pressions, à l'application de l'approche statique de l'analyse limite sous les trois hypothèses suivantes :

- La résistance à la traction des maçonneries est nulle ;
- Les charges supportées sont très faibles au regard de la résistance à la compression des blocs, de sorte à ce que celle-ci puisse être considérée comme infinie ;
- Les blocs ne peuvent pas glisser les uns par rapport aux autres.

Bien que reposant sur des hypothèses simplificatrices, cette approche peut s'avérer très utile pour une première estimation de la stabilité d'un édifice, ou pour repérer les causes de certaines fissures.

De nombreux développements se sont ensuite basés sur les travaux de Heyman. On peut notamment citer les méthodes de type "Thrust Network Analysis", développées par Block et Ochsendorf [59] (figure 1.13 (b)), qui généralisent les lignes de poussées de la statique graphique à des réseaux de poussée. Au-delà de leurs seules applications à l'analyse de stabilité des structures maçonnées, ces approches se rapprochent également des questions d'optimisation des structures et de "Form Finding". Concernant la résistance des voûtes et des dômes, on peut également citer les méthodes de "Thrust Surface Analysis" (Frassosio et al. [60]), qui consistent à vérifier que les efforts s'équilibrent sur une surface restant à l'intérieur de la géométrie de la voûte, tout comme la ligne de poussée restait à l'intérieur de la géométrie de l'arche.

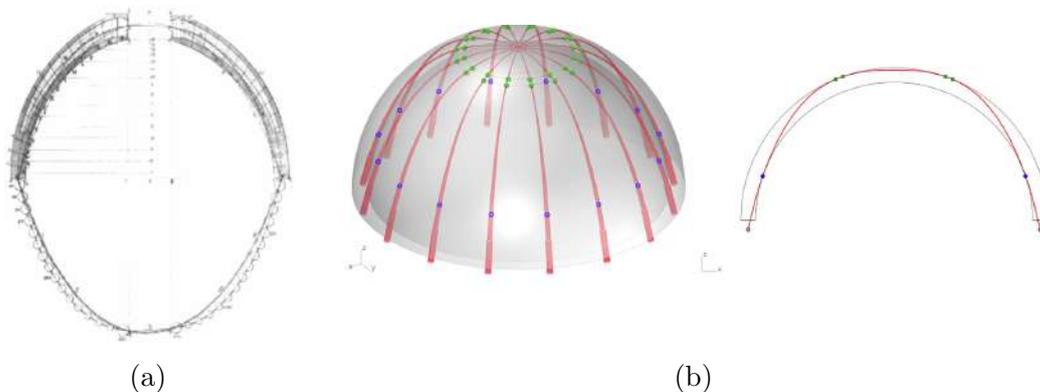


FIGURE 1.13 – (a) Analyse du dôme de la Cathédrale Saint Pierre de Rome par Poleni (extrait de Block et al. [18]) ; (b) Exemple de Thrust Network Analysis (Avelino et al. [19])

Une autre classe d'approches géométriques se base sur l'approche cinématique de l'analyse limite, toujours pour des matériaux infiniment résistants à la compression et à l'effort tranchant, et sans résistance à la traction. Les travaux de Como [61] se sont notamment intéressés à la stabilité de dômes par cette approche, tandis que les travaux de Chiozzi et al. [62] s'intéressent aux mécanismes de rupture de bâtiments soumis à des sollicitations sismiques.

Il convient de noter que l'approche géométrique a été retenue par Fantilli et Burello

[49] pour analyser la résistance au feu d'une arche, en négligeant, dans la géométrie, la partie de l'arche qui avait perdu ses propriétés de résistance mécanique.

Pour conclure sur ces approches géométriques, elles peuvent représenter un outil intéressant pour les structures courbes peu chargées. Cependant, les chargements de compression supportés par les murs porteurs en pierre naturelle massive auxquels nous nous intéresseront dans cette thèse ne peuvent pas être considérés comme négligeables par rapport à la résistance de l'assemblage (surtout si celle-ci est diminuée par l'action du feu), ce qui exclut l'utilisation de méthodes géométriques.

#### 3.2.2 Modélisation bloc-à-bloc

Les maçonneries sont des assemblages de blocs, souvent très résistants par rapport aux joints qui les reliait. De ce constat sont nées les modélisations dites "bloc à bloc". Nous allons ici les regrouper en deux sous-familles : les modèles basés sur la méthode des éléments discrets, et les approches par éléments finis où les blocs et les joints sont représentés.

**3.2.2.1 Méthode des éléments distincts (ou discrets)** Les méthodes de modélisation par éléments distincts permettent de connaître l'évolution de la position des blocs au fil du temps, lorsque la structure en maçonnerie est soumise à un certain chargement. Ces méthodes sont particulièrement utiles en dynamique, par exemple pour prévoir la réponse d'une structure à des sollicitations sismiques (Bui et al. [20] - voir figure 1.14, Merrigi et al. [63]) ou vis-à-vis d'une explosion (Masi et al. [64]). Elles peuvent également apporter une meilleure compréhension de certains phénomènes cycliques (Venzal et al [65]).

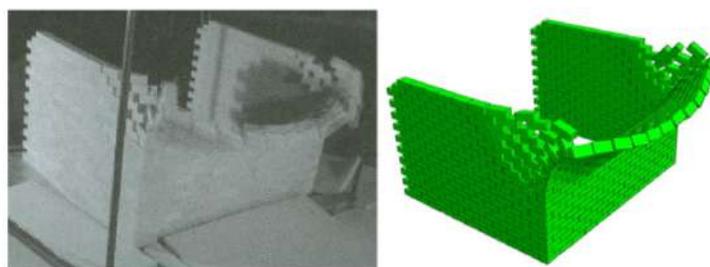


FIGURE 1.14 – Modélisation DEM (Distinct Elements Method) d'une maquette de mur (Bui et al. [20])

Elles présentent cependant un certain nombre d'inconvénients :

- Les méthodes de calcul par éléments discrets nécessitent des temps de calcul très longs. Si ces calculs sont justifiables lorsqu'on s'intéresse à la préservation d'un ouvrage architectural majeur tel que la cathédrale Notre-Dame de Paris, ils sont difficilement utilisables lors de la phase de dimensionnement d'un bâtiment standard.

- Avant même d'évoquer le temps de calcul, le seul temps de création de la géométrie du modèle est très élevé pour une approche à visée applicative pour l'ingénieur. En effet, la géométrie de chaque bloc doit être décrite, et tout changement nécessite la reconstruction entière du modèle. Avec l'avènement des modèles paramétriques, cet inconvénient devrait cependant être rapidement éliminé.
- Traditionnellement, les méthodes bloc-à-bloc considèrent des blocs infiniment résistants. Une telle hypothèse est fortement remise en cause pour un mur exposé au feu. De plus, il a été mis en évidence expérimentalement que la fissuration, lorsqu'un mur est exposé au feu, se fait de manière presque continue entre les blocs et les joints.
- Des méthodes couplant la méthode des éléments discrets (pour le déplacement des blocs les uns par rapport aux autres) et la méthode des éléments finis (pour les déformations - élastiques ou non - des blocs) sont en cours de développement (Ferrante et al. [66] par exemple). Cependant, elles gardent l'inconvénient en termes de temps de calcul des méthodes par éléments discrets, et paraissent donc difficiles à utiliser par pour l'ingénieur.

**3.2.2.2 Méthodes des éléments finis** Compte-tenu du temps de calcul des approches par éléments distincts, et de la complexité numérique associée, les premières modélisations "bloc-à-bloc" de la maçonnerie ont été des modélisations par éléments finis. Dans ces modèles, la géométrie de chaque bloc est décrite, et les blocs sont reliés entre eux par des lois d'interface. Dans ce domaine, les travaux de Lourenço et Rots [21] font référence (voir figure 1.15). Les blocs sont considérés comme infiniment résistants, tandis que les joints, réduits à des interfaces, suivent une loi de comportement élastoplastique-endommageable. Ces travaux ont notamment été étendus à des sollicitations 3D par Macorini et Izzudin [67]. Ils présentent cependant l'inconvénient de considérer des blocs infiniment résistants, et de concentrer toute la rupture dans l'écrasement en compression au niveau des joints, ce qui ne reproduit pas fidèlement le mécanisme de rupture réel. Par ailleurs, ces modélisations nécessitent de discrétiser l'ensemble des blocs de la structure, ce qui peut être trop contraignant pour une approche ingénieur.

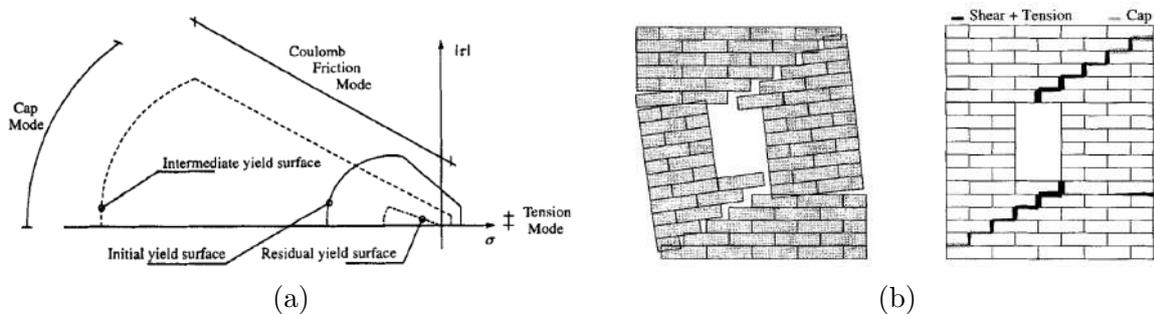


FIGURE 1.15 – (a) Critère de Lourenço-Rots [21]; (b) Application à un mur en cisaillement avec ouverture [21]

#### 3.2.3 Modélisations continues

Les modélisations continues constituent une approche intermédiaire entre les approches géométriques, très simples, et les approches bloc-à-bloc, beaucoup plus détaillées. Elles se basent sur la description de la structure comme un milieu continu homogène équivalent. Ces approches sont souvent utilisées lorsque les approches géométriques ne suffisent plus, mais que le problème n'inclut pas de phénomènes (dynamiques souvent) nécessitant l'utilisation d'éléments discrets.

**3.2.3.1 Approches directes** Les approches de type éléments finis dans lesquelles les blocs sont discrétisés ont déjà été décrites dans la partie précédente. Bien que ces approches permettent une description précise de la géométrie et des propriétés des matériaux, elles ne sont pas adaptées à la modélisation de grands ouvrages constitués de plusieurs milliers de blocs.

L'idée des approches directes est de se baser sur la détermination empirique des propriétés élastiques, de la loi de comportement et du domaine de résistance de l'assemblage maçonné. Par exemple, le critère de résistance proposé par Dhanasekar et al. [68] se base sur les différentes campagnes expérimentales menées par Page [69] [70] [71] au début des années 1980. Les premiers modèles se sont inspirés des approches pour le béton (modèle de plasticité-endommagement du béton par exemple), puis ont progressivement été adaptées pour prendre en compte l'anisotropie de la maçonnerie (Lourenço et al. [72]).

De telles approches directes sont principalement utilisées pour modéliser des bâtiments ou des ouvrages entiers (voir Milani et Valente [73] à titre d'exemple), mais ne permettent pas d'accéder à des informations locales sur ces ouvrages. Par ailleurs, la caractérisation de la loi de comportement de l'assemblage à haute température, permettant la calibration du modèle, semble difficilement envisageable pour une approche ingénieur.

**3.2.3.2 Approches par homogénéisation** La plupart des maçonneries récentes peuvent être considérées comme des assemblages périodiques, et se prêtent par conséquent plutôt bien aux méthodes d'homogénéisation périodique. Ces approches présentent l'avantage d'être plus rapides qu'un calcul complet sur un mur, et de ne nécessiter que la connaissance de la géométrie du mur et des propriétés mécaniques de ses composants. Elle est donc plutôt bien adaptée à un calcul "ingénieur".

Les fondements des approches périodiques pour les maçonneries ont été posés par Pande et al. [74], qui proposent une modélisation en deux étapes de la maçonnerie : d'abord en homogénéisant les joints horizontaux, puis en homogénéisant les joints verticaux. Cette approche en deux étapes présente néanmoins un inconvénient majeur : l'ordre dans lequel sont considérés les joints horizontaux et verticaux a une influence non-négligeable sur le

résultat.

Depuis, de nombreux auteurs ont travaillé sur les méthodes d'homogénéisation appliquées à la maçonnerie, et ce dans des cadres mécaniques très différents :

- **En élasticité** : Pour des niveaux de chargement faibles, le cadre de l'élasticité peut être suffisant. On peut alors citer les travaux de Cecchi et Sab [75] qui permettent de prendre en compte des blocs élastiques et des joints, réduits à des interfaces, élastiques, les travaux de Mistler et al. [76] qui mettent en œuvre une approche d'homogénéisation numérique, ou encore les travaux récents de Zhou et al. [77] qui se basent sur la solution d'Eshelby pour analyser différents types d'assemblages. Si ces approches sont intéressantes pour évaluer la déformée d'un mur de maçonnerie chargé, elles ne permettent pas, à elles-seules, de vérifier sa capacité portante.
- **En élasto-plasticité et endommagement** : Au delà d'un certain niveau de chargement, les maçonneries exhibent des comportements anélastiques qui peuvent être modélisés par des lois de comportement faisant appel à de l'élasto-plasticité et/ou de l'endommagement. Ces modélisations permettent une description plus précise de certains phénomènes, notamment cycliques, ainsi qu'une meilleure évaluation des déplacements que par une approche élastique. Dans le cadre de l'homogénéisation, on peut notamment citer les travaux de Massart et al. [78] [79] qui considèrent la pierre et le mortier comme des matériaux quasi-fragiles, ou l'application d'une méthode d'analyse par champ moyen (Transformation Field Analysis) par Addessi et al. [80]. Cependant, ces méthodes nécessitent souvent un temps de calcul long. Par ailleurs, elles nécessitent la connaissance de la loi de comportement des matériaux constitutifs à haute température. Si cela semble possible pour un béton courant, il paraît inimaginable de déterminer, à toute température, la loi de comportement de l'immense variété de pierres utilisées dans le patrimoine bâti.
- **En Analyse limite et Calcul à la rupture** : lorsque seule l'évaluation de la charge limite de la structure est requise, il est commode et plus rapide de faire appel à des méthodes directes comme l'Analyse limite et le Calcul à la rupture, ne nécessitant alors que la connaissance des capacités de résistance des matériaux. De telles approches ont notamment été développées pour des maçonneries constituées de blocs supposés infiniment résistants et de joints réduits à des interfaces par de Buhan et de Felice [4] pour des chargements plans, puis par Sab [5] pour des chargements hors-plan. Milani et ses coauteurs [81] ont ensuite proposé diverses approches statiques (par l'intérieur) et cinématiques (par l'extérieur) du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie, en prenant en compte la résistance des blocs, la possibilité de rupture en compression des joints (modélisés par des interfaces) et/ou (selon les modèles) l'épaisseur des joints, pour des chargements dans le plan ou hors du plan du mur. Ces modèles sont toutefois basés sur des hypothèses peu réalistes de contraintes planes au niveau des blocs (et des joints lorsqu'ils ne sont pas réduits à des interfaces). Stefanou et al. [82] ont proposé un modèle permettant de prendre en compte la résistance en compression des blocs sans cette hypothèse de contraintes

planes, mais toujours en réduisant les joints à des interfaces d'épaisseur nulle.

Si la plupart des méthodes d'homogénéisation pour les maçonneries se basent sur une modélisation des matériaux comme des milieux de Cauchy, il existe également quelques modélisations se basant sur des milieux micropolaires, aussi dits "de Cosserat". Au prix d'une complexité supérieure du modèle mécanique, elles permettent de mieux prendre en compte les rotations des blocs les uns par rapport aux autres. A titre d'exemple, on peut citer les travaux de Sulem et Mühlhaus [83] ou de Godio et al. [84]. L'homogénéisation des maçonneries par des milieux de Cosserat semble toutefois, pour l'instant, limitée à des blocs rigides.

Pour conclure cette partie sur les méthodes de modélisation avancées à température ambiante, il convient de souligner leur grande diversité, et l'absence d'une solution qui conviendrait à l'ensemble des problèmes. Concernant les problèmes de dimensionnement de structures en maçonnerie, les méthodes d'homogénéisation en Analyse limite ou en Calcul à la rupture semblent les plus adaptées de par leur caractère direct.

### 3.3 Méthodes de modélisation avancées à haute température

Les méthodes de modélisation des murs de maçonnerie exposés au feu sont bien plus rares que celles à température ambiante.

Les premiers modèles (par exemple, Cooke [13]), permettant de déterminer la courbure thermique, modélisaient le mur de manière très simple, comme une plaque thermo-élastique linéaire, en déformations ou en contraintes planes. Les travaux de Nadjai et al. ([22], [85], [86] - figure 1.16 (a)), au travers du code de modélisation par éléments finis MasSET, ont permis une description plus fine des phénomènes thermomécaniques à l'œuvre lors de l'exposition au feu d'un mur en brique pleine : courbure thermique et déplacements du second-ordre éventuels, endommagement des matériaux, prise en compte de conditions aux limites réalistes. Les joints sont alors modélisés comme des interfaces. Toujours sur les maçonneries en brique pleine, Prakash et al. [87] ont proposé une modélisation 2D en contraintes planes du mur, prenant en compte les non-linéarités géométriques, un comportement adoucissant du matériau, le fluage thermique transitoire ainsi que l'évolution des propriétés mécaniques en fonction de la température. Ce modèle permet de bien rendre compte de la fissuration due à la différence de propriétés thermo-mécaniques entre la pierre et le mortier. Cependant, ces modèles restent limités à une description bidimensionnelle des murs, alors que les phénomènes observés expérimentalement sont tridimensionnels.

Concernant les maçonneries en brique alvéolée, les travaux de Al Nahhas et al. [46], en plus de leur aspect expérimental, se sont tout d'abord concentrés sur la modélisation thermique des maçonneries creuses. Ils ont été complétés par les travaux de Nguyen et al. [88] concernant la modélisation hygro-thermique des briques en situation d'incendie, puis par les travaux de Nguyen et Meftah [23] sur la modélisation tridimensionnelle de

tels murs, en incluant les problématiques d'écaillage et de flambement local des parois des alvéoles (voir figure 1.16 (b)). Ce type de calcul est cependant long, et peu adapté à une approche ingénieur. Une première voie d'amélioration a été proposée dans la thèse de Sridi [89], où un modèle de type "Arlequin" permet de relier des zones de modélisation 3D à des zones de modélisation de type plaque.

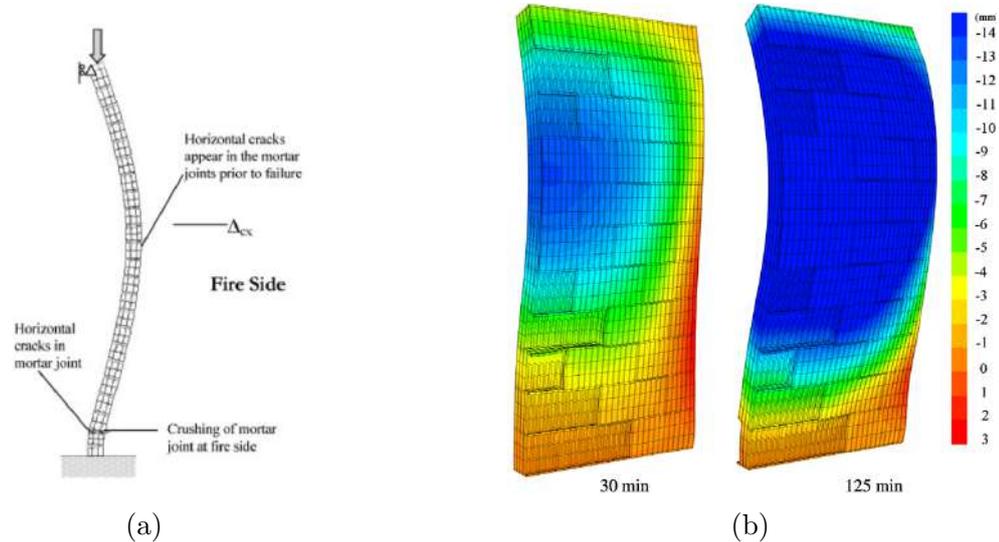


FIGURE 1.16 – Modèles proposés par Nadjai [22] et Nguyen et Meftah [23]

D'autres modélisations tridimensionnelles, reposant sur des modèles élastoplastiques endommageables originellement développés pour le béton, ont récemment été proposées par Oliveira et al. [15] [48], respectivement pour un mur en parpaing et pour un mur en maçonnerie réfractaire. Ces modèles permettent bien de prévoir la double courbure (horizontale et verticale) du mur, mais restent très coûteux en termes de temps et de ressources de calcul.

En conclusion, les méthodes de modélisation des maçonneries exposées au feu restent pour l'instant relativement peu développées, et, en particulier, il n'existe pas de modélisation à visée applicative pour l'ingénieur qui permette de prendre en compte la géométrie tridimensionnelle d'un mur, voire d'un bâtiment. De plus, aucune des méthodes proposées n'a été appliquée aux murs en pierre massive, ni validée expérimentalement pour ce type de structures.

## 4 Proposition d'une méthode d'évaluation de la résistance au feu d'un mur de maçonnerie en pierre massive

### 4.1 Justification d'une approche par homogénéisation thermo-élastique et en Calcul à la rupture

Comme évoqué dans les parties 1.2 et 1.3, l'objectif de ce travail est de déterminer la résistance au feu d'un mur porteur en pierre naturelle massive. Du point de vue normatif, nous souhaitons donc connaître le temps pendant lequel le mur peut supporter un chargement mécanique fixé. Ce travail de dimensionnement porte principalement sur la résistance du mur, et ne nécessite de connaître son comportement que dans l'optique d'évaluer sa courbure thermique.

Dans la partie 3.2, concernant la modélisation des maçonneries à température ambiante, nous avons souligné la bonne adéquation des approches continues par homogénéisation au travail de l'ingénieur. En effet, elles ne nécessitent que la connaissance de la géométrie du mur et des propriétés de ses composants. Elles sont également bien plus rapides, en termes de temps de calcul, que les approches directes par micro-modélisation qui nécessitent de discrétiser l'ensemble des blocs de la structure.

Nous avons également vu que les approches d'homogénéisation en Analyse limite et en Calcul à la rupture étaient particulièrement bien adaptées à la détermination du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie. Ces approches reposent sur la compatibilité entre l'équilibre de la structure et le respect d'un critère de résistance en tout point. Elles offrent un cadre mécanique rigoureux, permettant d'obtenir un encadrement de la charge limite ou extrême de la structure. Leur caractère direct, ne nécessitant pas de connaître la loi de comportement du matériau, apparaît très intéressant lorsqu'on considère un matériau comme la pierre, dont la loi de comportement à haute température n'est pas bien connue.

Dans la partie 2.3, l'effet déstabilisateur de la courbure thermique a été mis en évidence. Il paraît donc nécessaire de la prendre en compte dans la méthode de dimensionnement. Une telle approche, proposant l'application du Calcul à la rupture sur un mur déformé par une courbure thermique due au feu, a été initiée dans la thèse de Pham [90] pour des murs en béton armé de grande hauteur, puis poursuivie dans la thèse de Yang [91] pour des géométries de mur plus complexes, prenant notamment en compte la présence de joints entre les panneaux. Dans cette thèse, nous proposons d'étendre cette approche et de l'adapter au cas des maçonneries en pierre massive, et plus généralement, au cas des maçonneries de blocs pleins.

## 4.2 Approche proposée

Le feu crée un gradient thermique dans l'épaisseur du mur. Une **première étape** de l'approche proposée consiste donc à évaluer ce gradient thermique en fonction du temps d'exposition au feu, expérimentalement ou par calcul.

Ce gradient thermique a deux conséquences principales, que nous avons choisi d'évaluer de manière séparée :

- D'une part, il entraîne des dilatations thermiques différentielles entre la face chaude et la face froide du mur. Ces dilatations différentielles vont alors pousser le mur à se courber vers le feu. Ce phénomène est couramment appelé "Effet bilame". Dans une **deuxième étape**, la courbure thermique peut alors être évaluée par une procédure d'homogénéisation thermoélastique, qui prend en compte les dilatations thermiques ainsi que l'évolution des propriétés thermoélastiques de la pierre et du mortier en fonction de la température.
- D'autre part, comme évoqué dans la partie 2.1.2, la pierre perd progressivement ses capacités de résistance à partir de 400 °C, tandis que le mortier, selon sa composition, peut les perdre à partir de 200 à 600 °C. Dans une **troisième étape**, le domaine de résistance macroscopique, à l'échelle de l'assemblage, peut être évalué par les approches statique et cinématique de l'homogénéisation en Calcul à la rupture.

Enfin, dans une **quatrième étape**, une approche cinématique numérique du Calcul à la rupture est proposée pour déterminer le facteur de stabilité du mur, dans sa configuration déformée par le feu évaluée dans la deuxième étape, et dont le critère local correspond au critère de l'assemblage dégradé par le feu évalué dans la troisième étape.

L'approche proposée est résumée sur la figure 1.17.

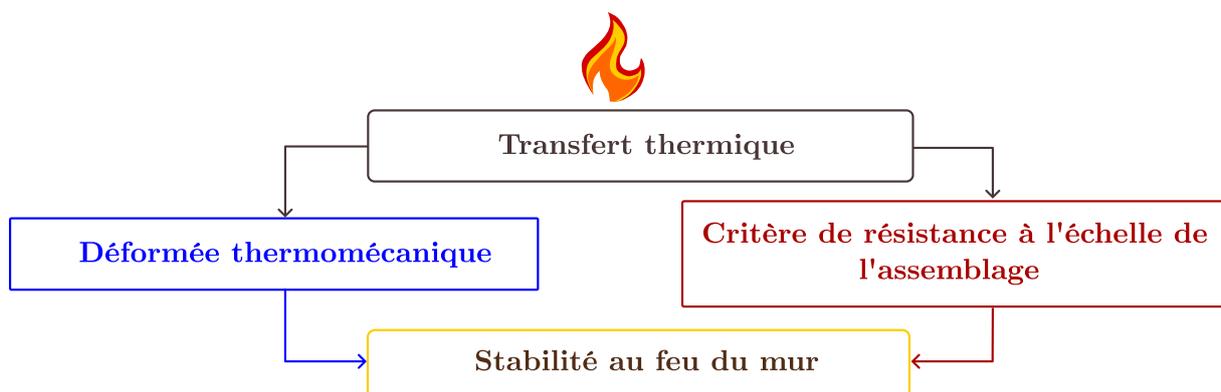


FIGURE 1.17 – Méthode proposée pour l'évaluation de la résistance au feu d'un mur de maçonnerie

## 5 Plan du manuscrit

Le plan du présent manuscrit suit les quatre étapes de l'approche proposée dans la partie précédente.

### 5.1 Partie 1 : Observations expérimentales et détermination du gradient thermique

Dans le chapitre 2, un essai de résistance au feu à l'échelle 1, sur un mur en pierre massive, est présenté. Cet essai permet d'illustrer les différents phénomènes thermo-hygro-mécaniques à l'œuvre lorsqu'un mur en pierre est exposé au feu. Les températures mesurées dans le mur lors de cet essai sont ensuite comparées à d'autres essais à échelle réduite dans le plan, sur des murets de même épaisseur que le mur ainsi qu'à une modélisation thermique. Enfin, les différents phénomènes thermomécaniques observés sont comparés aux essais de Pham et al. [3], réalisés sur des murs similaires. On s'intéressera en particulier à l'effet du chargement mécanique sur la déformée et sur la résistance au feu du mur.

### 5.2 Partie 2 : Détermination de la courbure thermique

Dans le chapitre 3, une approche d'homogénéisation thermoélastique est proposée pour déterminer la déformée thermomécanique d'un mur en pierre massive. Cette approche, rapide, est particulièrement adaptée à la réalisation d'études paramétriques portant sur les conditions aux limites du mur, dont on verra qu'elles sont difficiles à définir expérimentalement. Les résultats de cette approche seront comparés aux résultats expérimentaux du chapitre 2 ainsi qu'aux résultats obtenus par Pham et al. [3].

### 5.3 Partie 3 : Détermination de la résistance de la maçonnerie à l'échelle de l'assemblage

Les chapitres 4 à 8 portent quant à eux sur la résistance de l'assemblage pierre-mortier. La problématique d'homogénéisation en Calcul à la rupture est tout d'abord introduite dans le chapitre 4. Dans ce chapitre, on présente également l'approche proposée pour prendre en compte la dégradation de la résistance de la pierre et du mortier dans la définition du critère de résistance, ainsi que la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Un premier exemple applicatif est proposé sur une géométrie bidimensionnelle, où le mur est modélisé en déformations planes dans un plan vertical transversal, ne permettant alors de ne prendre en compte dans la modélisation que les joints horizontaux.

Le chapitre 5 étend cette approche à une géométrie de cellule de base tridimensionnelle. On y propose une nouvelle approche cinématique, semi-analytique, permettant de prendre en compte à la fois l'orthotropie de résistance due à la présence des joints, la résistance en compression finie des blocs, et l'éventuelle hétérogénéité de résistance due à l'exposition du mur à un gradient de température.

Le chapitre 6 propose une mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture sur une géométrie de cellule de base tridimensionnelle. Ce chapitre permet notamment d'évaluer la pertinence de l'approche cinématique semi-analytique présentée dans le chapitre 5, et de présenter les apports, mais aussi les limites, des approches numériques en homogénéisation en Calcul à la rupture. Quelques perspectives concernant la prise en compte de des critères de résistance s'approchant davantage de la réalité expérimentale dans les approches proposées dans les chapitres 5 et 6 sont proposées dans le chapitre 7. Ce chapitre présente notamment quelques développements permettant d'évaluer l'effet de la variation de la résistance à la traction des matériaux sur la résistance en flexion et en compression de l'assemblage.

Pour conclure cette partie sur la résistance de l'assemblage, le chapitre 8 décrit une campagne expérimentale menée sur 15 trumeaux de maçonnerie. L'objectif de ces essais est de valider la pertinence de l'approche de modélisation par le Calcul à la rupture sur des géométries et des chargements plus simples, et donc plus facilement maîtrisables et répétables, que l'essai au feu présenté dans le chapitre 2.

## 5.4 Partie 4 : Analyse de la stabilité au feu du mur

Enfin, le chapitre 9 présente l'analyse de stabilité d'un mur de maçonnerie par une approche de Calcul à la rupture numérique, dans sa configuration déformée par le feu telle que déterminée dans le chapitre 3, et en prenant en compte le critère de résistance macroscopique altéré par le feu tel que présenté dans le chapitre 5. Les résultats obtenus sont comparés aux résultats expérimentaux décrits dans le chapitre 2. Ce chapitre permet également de présenter d'autres perspectives d'applications de l'approche développée, que ce soit pour l'analyse des murs et voûtes chargés dans leur plan ou hors-plan à température ambiante, ou pour l'analyse d'arches et de voûtes exposées au feu.

Ce plan est résumé visuellement sur la figure 1.18.

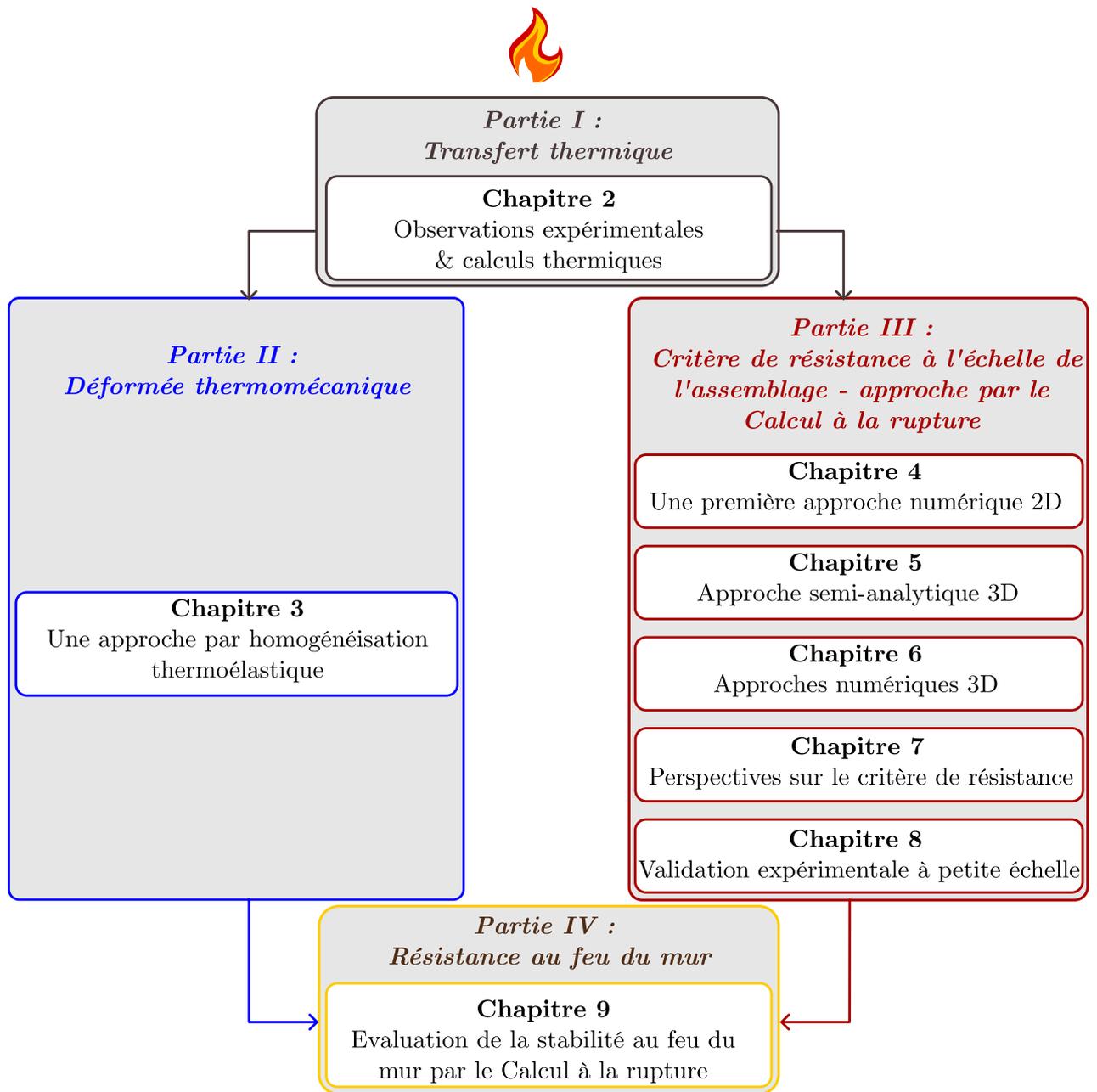


FIGURE 1.18 – Plan du manuscrit

\*   \*  
\*  
\*



# Chapitre 2

## Observations expérimentales

**Résumé :** *Ce chapitre décrit les résultats d'un essai de résistance au feu mené sur un mur de maçonnerie en pierre naturelle massive exposé au feu. Il vise à montrer la diversité des phénomènes thermiques, mécaniques et chimiques observés dans de telles conditions. La première partie du chapitre est dédiée à la détermination des propriétés thermomécaniques des matériaux constitutifs du mur, qui serviront de base pour les applications numériques présentées dans la suite du mémoire. La deuxième partie présente les résultats de l'essai considéré concernant les températures mesurées, les déplacements dans le plan du mur et hors-plan, les fissures observées ainsi que le mécanisme de rupture. Dans une troisième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux aspects thermiques du problème. Les résultats expérimentaux présentés dans la partie précédente sont alors comparés à d'autres essais ainsi qu'à une modélisation thermique. Enfin, dans une quatrième partie, les observations portant sur la déformée et sur la résistance du mur sont comparées à deux essais de résistance au feu portant sur des murs en calcaire de Saint-Vaast présentés par Pham et al. [3], ainsi qu'à d'autres essais décrits dans la littérature.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>33</b>
<b>2</b>	<b>Matériaux constitutifs : présentation et essais de caractérisation</b>	<b>34</b>
2.1	Choix des matériaux	34
2.2	Essais de caractérisation	35
<b>3</b>	<b>Comportement thermomécanique de la maçonnerie : présentation d'un essai de résistance au feu à l'échelle 1</b>	<b>36</b>
3.1	Protocole expérimental	36
3.2	Résultats	40
<b>4</b>	<b>Complément sur les aspects thermiques</b>	<b>52</b>
4.1	Essais thermiques complémentaires	52
4.2	Comparaison à d'autres essais	57
4.3	Une première modélisation thermique	59
4.4	Remarques finales sur les aspects thermiques	63
<b>5</b>	<b>Discussion - Aspects thermomécaniques</b>	<b>63</b>

5.1	Détermination du taux de chargement des murs . . . . .	64
5.2	Déformée et chargement . . . . .	65
5.3	Charge de rupture et mode de ruine du mur . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Remarques finales . . . . .</b>	<b>70</b>

---

# 1 Introduction

Comme exposé dans le chapitre introductif, lorsqu'un mur est exposé au feu, le développement d'un gradient thermique dans son épaisseur peut menacer sa stabilité, à la fois par la présence d'efforts additionnels engendrés par l'excentrement de la charge dû la courbure thermique, et par la dégradation des matériaux à haute température.

Ces phénomènes sont couramment observés pour des murs de béton armé de hauteur courante (Miah et al. [92]) ou de grande hauteur (Pham et al. [93]), ou pour des murs de maçonnerie en brique creuse (Al Nahhas et al. [46], Nguyen et Meftah [14]). Pour la pierre naturelle, cependant, les données expérimentales restent très rares et de tels phénomènes n'ont été mis en évidence que par Pham et al. [3]. Dans le cadre de cette thèse, nous avons donc souhaité compléter la base de données expérimentales disponibles pour les murs en pierre naturelle massive exposés au feu. L'objet de ce chapitre est donc de présenter l'essai de résistance au feu d'un tel mur. Au travers de cette présentation, en début de mémoire, nous souhaitons également proposer une illustration des phénomènes physiques observés lorsqu'un mur est exposé au feu.

La méthode de modélisation développée dans cette thèse se base essentiellement sur l'analyse des phénomènes physiques observés lors de tels essais, et les différents résultats obtenus seront comparés aux résultats expérimentaux. Dans une première partie (complétée par l'annexe A), les essais de caractérisation menés sur les matériaux constitutifs du mur sont donc décrits, et les propriétés physiques et thermomécaniques correspondantes, qui serviront de données d'entrée aux modélisations présentées par la suite, sont résumées.

Dans un second temps, les résultats de l'essai de résistance au feu mené lors de cette thèse, portant sur un mur en pierre naturelle massive, sont présentés. Cet essai vient compléter la campagne expérimentale réalisée par Pham et al. [3], en s'intéressant à un mur similaire du point de vue de la géométrie et des matériaux qui le composent (pierre calcaire de Saint-Vaast et mortier à la chaux hydraulique naturelle NHL 3,5), soumis au même chargement thermique mais à une intensité de chargement mécanique différente. On s'intéresse alors à quatre points majeurs observés lors de l'essai : les aspects thermiques, la déformée due au feu, l'évolution de la fissuration, ainsi que le mécanisme de rupture. Ce dernier fait l'objet d'une attention particulière, puisqu'on montrera que le mur peut se rompre dans la direction opposée au feu, ce qui présente un danger pour les interventions de secours et les avoisinants.

Puisque la modélisation proposée dans ce mémoire se base sur la connaissance du gradient thermique dans l'épaisseur du mur, il nous a paru important d'approfondir cet aspect. Deux essais thermiques, sur des murets de dimensions réduites dans le plan et d'épaisseur identique au mur précédemment testé, ont donc été menés en complément de l'essai thermomécanique. Les résultats de ces essais sont présentés dans la troisième partie de ce chapitre. Les températures sont comparées aux températures mesurées lors de

l'essai thermomécanique, à celles mesurées sur les essais de Pham et al. [3], ainsi qu'à une première modélisation thermique.

Enfin, dans une quatrième partie, on propose une discussion plus approfondie sur les aspects de déformée thermique et de mécanisme de rupture, en mettant en perspective l'essai présenté dans ce mémoire ainsi que les essais de Pham et al. [3].

## 2 Matériaux constitutifs : présentation et essais de caractérisation

### 2.1 Choix des matériaux

Tous les essais réalisés dans le cadre de cette thèse ont porté sur des assemblages constitués de deux matériaux : la pierre calcaire de Saint-Vaast et le mortier de chaux hydraulique naturelle NHL 3,5.

La pierre de Saint-Vaast Fine est une pierre calcaire du Bassin Parisien, formée lors de l'âge géologique du Lutécien. Elle est extraite à Saint-Vaast-lès-Mello, dans l'Oise. De cette carrière sont également extraits les calcaires de Saint-Leu et de Sébastopol, très utilisés dans la construction de grands monuments parisiens (Chateau de Versailles, Eglise Saint-Eustache) ainsi que dans toute l'architecture Haussmannienne. Il s'agit d'une pierre tendre (résistance à la compression simple de l'ordre de 5 MPa, porosité de 43 % selon la base de données Lithoscope [94] du CTMNC), qui se prête bien à la construction en pierre massive.

Nous avons choisi de nous intéresser à cette pierre pour plusieurs raisons : sa possible utilisation dans le cadre de la construction neuve en pierre massive, son utilisation (ou l'utilisation de pierre similaires) dans le patrimoine bâti parisien, ainsi que son utilisation lors de recherches expérimentales préliminaires sur le sujet, menées par le CSTB et le CTMNC en 2019 et présentées par Pham et al. [3].

Pour une pierre tendre comme le calcaire de Saint-Vaast, deux types de mortiers peuvent être utilisés : un mortier bâtard, composé de ciment et de chaux aérienne, ou un mortier de chaux hydraulique naturelle. Le DTU 20.1 [2], norme française portant sur la construction de ouvrages en maçonnerie de petits éléments, propose une composition pour ces mortiers et précise que leur résistance en compression à 28 jours doit être, pour des pierres tendres, supérieure à 2,5 MPa. Nous avons choisi d'utiliser un mortier de chaux hydraulique naturelle NHL 3,5, plus utilisé que le mortier bâtard pour la rénovation d'édifices historiques, et qui correspond au mortier utilisé par Pham et al [3].

La composition de ce mortier est donnée dans le tableau 2.1 pour un sac de chaux de

35 kg dont la densité vaut 0,70.

TABLEAU 2.1 – Composition du mortier

Composant	Volume
Chaux hydraulique naturelle NHL 3,5	50 L
Sable 0/4 mm	150 L
Eau	40 L

Cette composition est bien conforme au DTU 20.1 [2].

### 2.2 Essais de caractérisation

Les essais de caractérisation réalisés sur la pierre et le mortier sont détaillés dans l'annexe A. Le tableau 2.2 résume les résultats obtenus.

TABLEAU 2.2 – Résultats des essais de caractérisation de la pierre et du mortier

	Pierre	Mortier
Masse volumique (kg/m <sup>3</sup> )	1550	1640
Module de Young dynamique (GPa)	5	Non mesuré
Résistance en compression (MPa)	5,3	0,5
Résistance à la traction (MPa)	1,1	0,1
Teneur en eau le jour de l'essai (%)	0,3	Non mesurée

Ces essais de caractérisation confirment que la pierre choisie est une pierre tendre. Ils montrent également la faible résistance du mortier après 28 jours de cure, probablement due à l'ajout d'eau pour obtenir une maniabilité suffisante.

### 3 Comportement thermomécanique de la maçonnerie : présentation d'un essai de résistance au feu à l'échelle 1

#### 3.1 Protocole expérimental

##### 3.1.1 Caractéristiques géométriques du mur testé

Le mur testé, représenté sur la figure 2.1, mesure 2,92 m de large, 2,97 m de haut et 0,2 m d'épaisseur, ce qui correspond à un élancement (rapport entre la hauteur et l'épaisseur) d'environ 15, vérifiant ainsi les recommandations dimensionnelles de l'Eurocode 6 [1] et du DTU 20.1 [2]. Les blocs mesurent 720 mm de long, 360 mm de haut et 200 mm d'épaisseur. Ils sont assemblés en panneresse, par des joints d'épaisseur courante, de 10 mm tant pour les joints horizontaux que pour les joints verticaux.

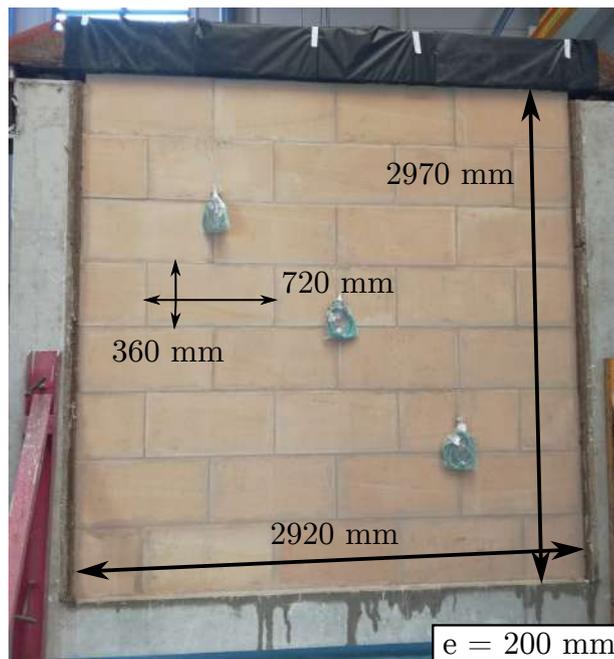


FIGURE 2.1 – Mur testé

##### 3.1.2 Dispositif expérimental

Le mur est bâti dans un cadre en béton armé de 3,6 m de large, 3,6 m de haut et 30 cm d'épaisseur. Le premier rang du mur est bâti sur une couche de mortier de 20 mm d'épaisseur et lie le mur au cadre d'essai. Les deux bords latéraux du mur sont séparés du cadre par un espace de 60 mm de chaque côté, de sorte à ce qu'ils puissent être considérés comme libres de contraintes. Cet espace est ensuite comblé par de la laine minérale afin

d'assurer l'isolation thermique entre le four et la face non-exposée du mur. Enfin, une poutre en acier est positionnée en haut du mur et permet d'appliquer un chargement mécanique. Le mur est environ 5 cm plus haut que le cadre de chargement, ce qui permet de laisser un jeu entre les montants verticaux du cadre et la poutre de chargement, et ainsi d'autoriser un déplacement relatif négatif entre le cadre et la poutre de chargement.

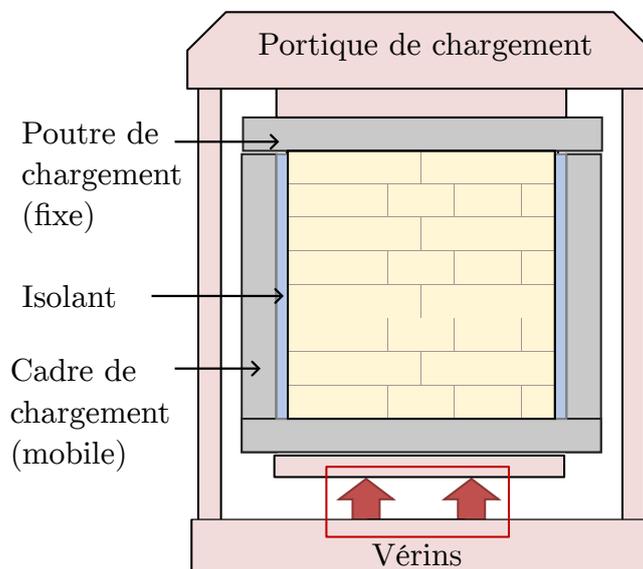


FIGURE 2.2 – Dispositif de chargement

On notera que les conditions aux limites sont différentes en haut et en bas du mur. En effet, tandis que le bas du mur est lié au cadre de chargement par un lit de mortier, le haut du mur est recouvert d'un lit de mortier de 50 mm et séparé de la poutre de chargement par une trame d'assise en polymère (sorte de film plastique) qui empêche une quelconque adhérence entre le mur et le système de chargement. Bien que cette différence puisse sembler faible, elle a un impact notable sur la déformée du mur, comme cela sera montré dans la partie 5.2.

Le cadre de chargement est ensuite positionné dans le système de chargement décrit sur la figure 2.2. Ce système est composé d'une partie fixe, en haut, à laquelle est reliée la poutre de chargement, et d'une poutre mobile, en bas, sur laquelle viennent agir les vérins assurant le chargement mécanique, et qui transmet cette charge au bas du cadre de chargement. Il faut ici noter la spécificité concernant le positionnement des vérins, en bas du mur et non pas en haut. Le haut du mur est fixe, tandis que le bas du mur est mobile. En cas de dilatation thermique, ce sera donc le bas du mur qui se déplacera vers le bas, et non pas le haut du mur qui se déplacera vers le haut (ce qui peut paraître plus intuitif).

#### 3.1.3 Instrumentation

L'essai a été instrumenté par des capteurs de température (thermocouples), par différents types de capteurs de déplacement et de rotation ainsi que par un système de

corrélation d'images. La figure 2.3 représente le positionnement des différents capteurs.

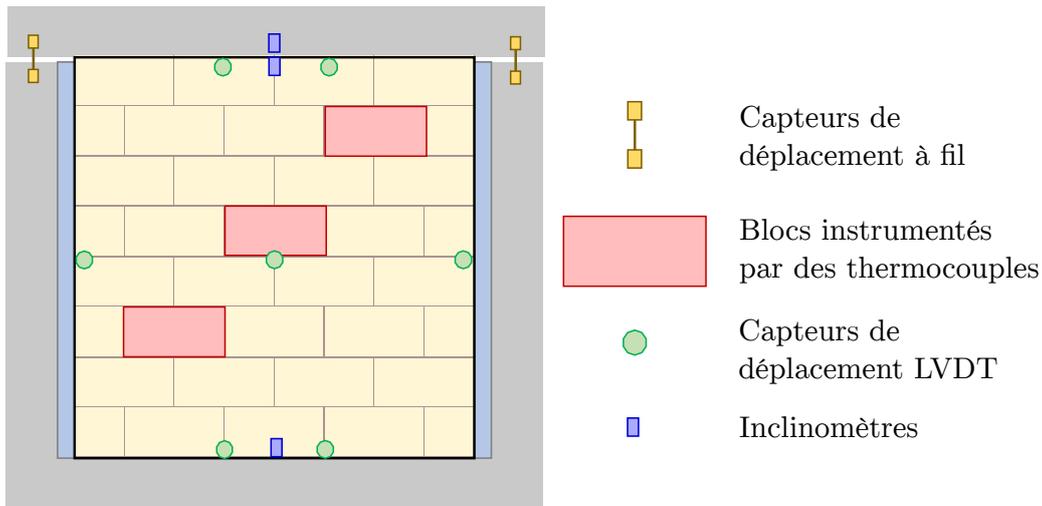


FIGURE 2.3 – Instrumentation de l'essai

**3.1.3.1 Mesures de température** Lors de l'essai, les températures ont été mesurées dans le four, dans le mur ainsi que sur la face non-exposée.

Trois blocs de pierre, distribués dans le mur et représentés par des blocs rouges sur la figure 2.3, sont instrumentés pour déterminer le profil thermique dans l'épaisseur du mur. Dans chaque bloc, cinq thermocouples sont positionnés à 20, 50, 80, 120 et 170 mm de la surface exposée. Ces thermocouples sont placés dans des trous de 4 mm de diamètre et de 20 mm de profondeur, ce qui permet de réduire l'incertitude liée à leur positionnement. Les trous sont ensuite remplis d'un mortier fluide pour assurer la continuité de la matière et des mesures précises. On notera ici que les thermocouples mesuraient la température de la pierre et pas celle du mortier. Cependant, n'étant distant des joints que de 20 mm, la mesure peut être un peu affectée par des transferts hydriques provenant des joints.

**3.1.3.2 Déplacements et rotations** Les déplacements et les rotations sont mesurés par quatre systèmes différents : des capteurs de déplacement à fil pour les déplacements verticaux dans le plan du mur, des capteurs de déplacement LVDT pour les déplacements horizontaux hors-plan, des inclinomètres pour les rotations, ainsi qu'un système de corrélation d'images numérique (Digital Image Correlation - DIC en anglais). Tandis que la corrélation d'image permet de déterminer les déplacements dans les trois directions de l'espace sur une grande partie de la surface du mur, les LVDT et les inclinomètres sont utilisés pour mesurer le déplacement ou la rotation en des points précis (en particulier sur les bords du mur, où le système de corrélation d'images est imprécis). Les deux systèmes sont donc tout à fait complémentaires.

Le système de corrélation d'images est composé de deux caméras disposées à 5 m du mur avec un angle de  $30^\circ$  entre les deux caméras. Ce positionnement permet une vision

stéréoscopique des objets, nécessaire pour déterminer à la fois les déplacements plans et hors-plan du mur. Ce dernier est peint avec un mouchetis, qui permet au système de corrélation d'image de différencier chaque zone du mur, et de calculer son déplacement.

Les images sont ensuite traitées avec le logiciel de corrélation d'images VIC 3D [95].

#### 3.1.4 Programme de chargement

Le mur est exposé à un chargement thermomécanique. Le chargement mécanique consiste en une résultante verticale, répartie sur le bord supérieur du mur par une poutre métallique et centrée par rapport au plan médian du mur, tandis que le chargement thermique consiste en l'application d'un feu ISO 834 [54] sur une face du mur, l'autre face restant en contact avec l'air à température ambiante. La séquence de chargement est schématisée sur la figure 2.4.

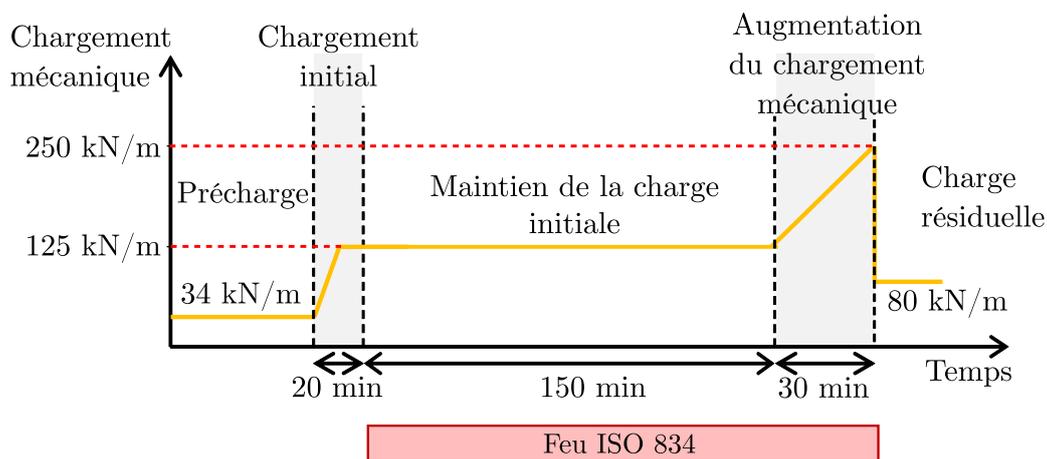


FIGURE 2.4 – Programme de chargement

Dans un premier temps, un chargement de 125 kN/m est appliqué sur le mur. On notera que les vérins utilisés pour ce chargement n'étaient pas asservis. Cette charge correspond à 45 % de la charge limite à température ambiante selon l'Eurocode 6 [1]. Le détail de ce calcul sera présenté dans la partie 5.1. Une fois ce chargement appliqué, nous avons attendu 15 min pour vérifier que la charge était bien stable avant de commencer l'essai au feu. Cette charge a ensuite été maintenue pendant les 150 premières minutes de l'essai au feu, pendant lesquelles la température dans la chambre à feu suivait la courbe ISO 834-1. Cette courbe est représentée en rouge sur la figure 2.5. Sur cette même figure, les tracés en tirets correspondent aux températures mesurées dans le four, tandis que la zone grisée correspond à la tolérance de la norme NF EN 1316-1 [96].

Au bout de 150 min, le mur ne montrant aucun signe annonciateur de rupture, nous avons choisi d'augmenter progressivement la charge à un rythme de 250 kN/h, tout en maintenant le chargement thermique selon la courbe ISO 834-1.

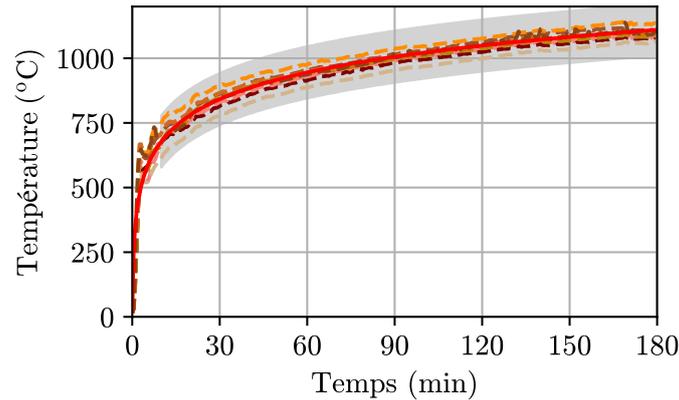


FIGURE 2.5 – Evolution de la température dans le four en comparaison avec la courbe ISO 834

Après la rupture du mur à 179 min et 45 s, indiquant la fin de l'essai, la charge est retombée à 80 kN/m et a été maintenue à cette valeur pendant 10 min pour une raison de sécurité.

## 3.2 Résultats

### 3.2.1 Chargement mécanique

Une précharge de 34 kN/m, représentant 27 % du chargement mécanique appliqué pendant les 150 premières minutes de l'essai au feu, a été appliquée lors de la mise en place du mur dans le portique de chargement pour des raisons de sécurité. Tous les déplacements sont enregistrés à partir de la fin de l'application de cette précharge.

La figure 2.6 (a) représente le positionnement hors-plan initial des blocs. On peut noter que le mur n'est pas parfaitement plan, et que le défaut de planéité est de l'ordre de 7 mm (+3 mm ; -4 mm). Ce défaut de planéité est plus faible que le défaut minimal considéré dans le calcul de résistance en compression du mur selon l'Eurocode 6, qui s'élève à 10 % de l'épaisseur du mur (20 mm ici).

La figure 2.6 (b) représente le champ de déformation verticale observée à la fin du chargement mécanique. On note que la déformation verticale est bien plus grande au niveau des joints horizontaux (environ  $1.10^{-3}$ ) qu'au niveau des blocs ( $1 - 2.10^{-4}$ ). Elle est également plus élevée sur la gauche du mur que sur sa droite. Cette observation est cohérente avec les mesures des deux capteurs à fils, qui donnent le déplacement relatif entre le cadre et la poutre de chargement. Le capteur de droite enregistre une contraction de 0,3 mm lors de la phase de chargement, tandis que le capteur de gauche enregistre une contraction de 0,9 mm.

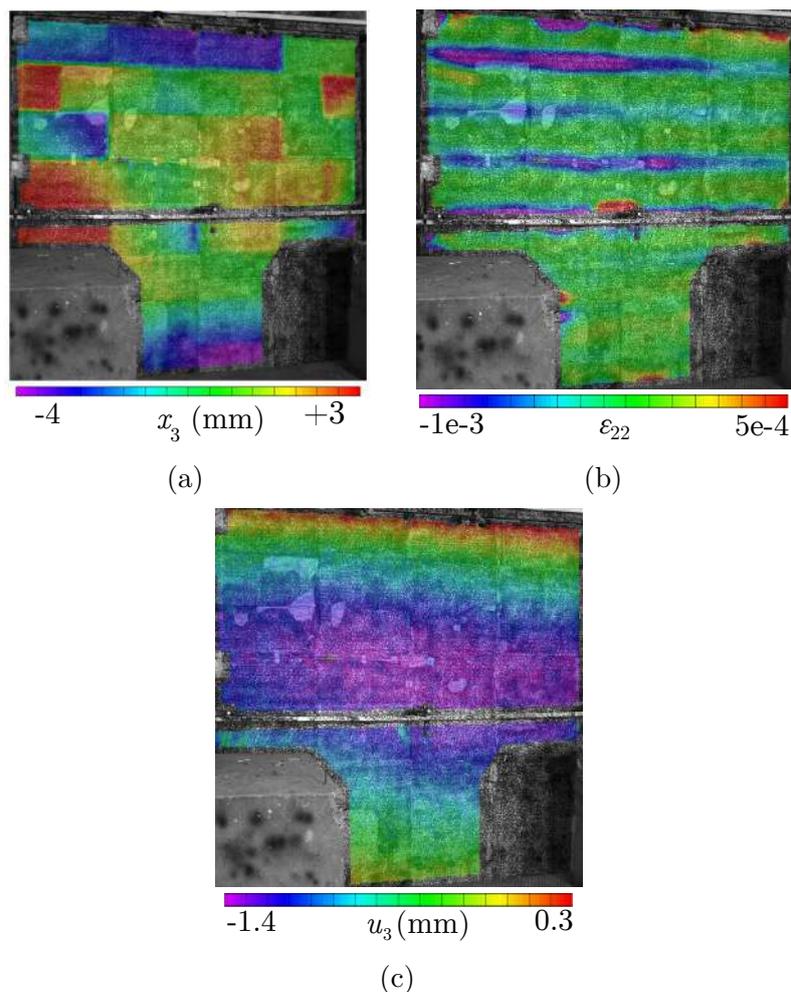


FIGURE 2.6 – Résultats de la corrélation d'image lors du chargement mécanique : (a) position initiale hors-plan des blocs ; (b) déformation verticale et (c) déplacements hors-plan engendrés par le chargement mécanique à partir de la position initiale préchargée

Le déplacement hors-plan mesuré par corrélation d'images à la fin de la phase de chargement mécanique est représenté sur la figure 2.6 (c). On note que, bien que le chargement soit censé être centré par rapport au plan médian du mur, ce dernier se courbe hors de son plan. Ce déplacement hors-plan est certes très faible (1,4 mm) par rapport à l'épaisseur du mur et aux imperfections initiales, mais il représente tout de même presque 20 % du déplacement thermique hors-plan à la fin de l'essai (voir paragraphe 3.2.3.2).

Les déplacements observés dans le plan et hors-plan peuvent résulter d'imperfections géométriques du système de chargement ou du mur lui-même. Une observation minutieuse du système de chargement nous a permis de voir que la charge n'était pas réellement appliquée de manière centrée vis-à-vis du plan médian du mur, et qu'il pouvait y avoir une incertitude de positionnement de l'ordre de 2 cm. Par ailleurs, lors du montage du mur, il est difficile d'appliquer le mortier en lits parfaitement homogènes de 10 mm d'épaisseur, et d'avoir une compaction homogène du mortier, ce qui explique à la fois les déplacements différentiels plans et la courbure hors-plan observés.

Les résultats de cette phase de chargement mécanique montrent bien la complexité du matériau "maçonnerie" et ses imperfections, même lorsqu'il est confectionné soigneusement, par des professionnels expérimentés et dans des conditions de laboratoire. Ils nous donnent également des pistes sur les sources d'incertitude à explorer dans la phase de modélisation.

### 3.2.2 Températures mesurées

Comme indiqué plus haut, les températures ont été mesurées dans trois blocs différents, à cinq distances de la face exposée du mur. La figure 2.7 représente l'évolution de la température mesurée par chaque capteur en fonction du temps, tandis que la figure 2.8 représente les profils thermiques dans l'épaisseur du mur pour différents temps d'exposition au feu.

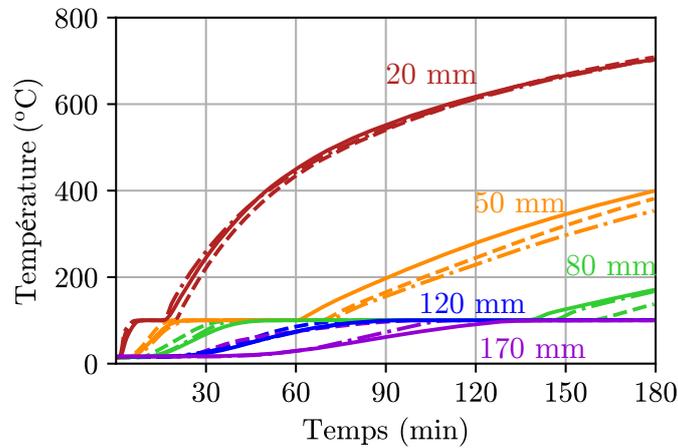


FIGURE 2.7 – Températures mesurées par les différents thermocouples à travers l'épaisseur des blocs

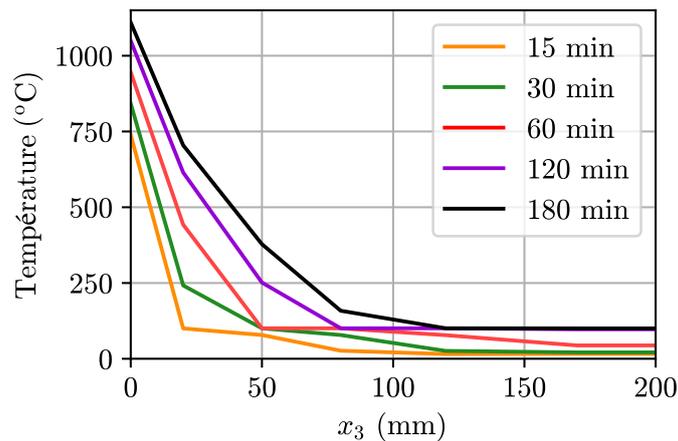


FIGURE 2.8 – Profils de température moyens en fonction du temps d'exposition au feu

Au premier abord, on peut noter l'homogénéité des températures sur l'ensemble du mur, surtout pour les thermocouples situés à 20 mm de la face exposée. Les thermocouples situés à 50 mm de la face exposée, enregistrent des températures un peu plus dispersées (75 °C au maximum entre la plus basse et la plus haute température).

On peut également noter que l'évolution des températures présente un palier important à 100 °C, dû à la vaporisation de l'eau et à une teneur en eau élevée. Ce processus de vaporisation, qui sera discuté de manière plus approfondie dans la partie 4, était d'ailleurs visible lors de l'essai, puisque de l'eau suintait des fissures, et qu'un nuage de vapeur recouvrait la face non-exposée à partir d'environ 45 min d'essai.

#### 3.2.3 Mesure des déplacements et rotations

**Note préliminaire :** les temps, déplacements et rotations sont réinitialisés à la fin de la phase de chargement mécanique initial, de sorte qu'ils représentent uniquement l'essai de résistance au feu.

**3.2.3.1 Déplacements dans le plan du mur** La figure 2.9 représente le déplacement vertical mesuré par les capteurs à fils. Un déplacement positif indique que la poutre de chargement s'éloigne du cadre de chargement, ce qui implique que le mur se dilate. Ce graphe présente deux phases : une phase de dilatation allant du début du feu à 2h30 d'essai, puis une phase de contraction allant de 2h30 à la fin de l'essai. La phase de dilatation est due à la dilatation thermique, tandis que la contraction peut être interprétée comme la somme de la dilatation thermique et d'une contraction mécanique due à l'augmentation progressive du chargement mécanique.

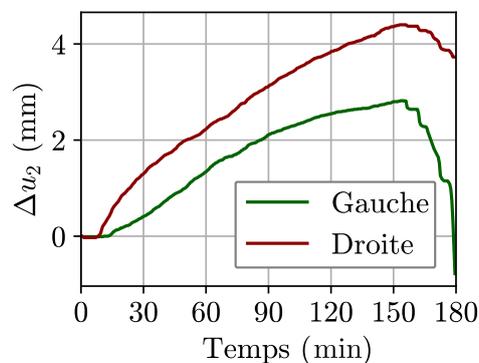


FIGURE 2.9 – Mesure de la dilatation verticale par les capteurs à fils

**3.2.3.2 Déplacement hors-plan** Le déplacement (horizontal) hors-plan  $u_3$  peut avoir un effet dévastateur sur la stabilité du mur exposé au feu car il induit un excentrement des chargements mécaniques verticaux initialement présents (poids propre du mur dans tous les cas, et charge additionnelle appliquée dans le cas d'un mur porteur) par rapport au plan médian du mur. Cet excentrement, créant des moments fléchissants additionnels, peut conduire à la rupture du mur. C'est pour cette raison que ce paramètre est suivi attentivement pendant l'essai.

La figure 2.10 représente l'évolution des déplacements mesurés par les capteurs LVDT en fonction du temps, tandis que la figure 2.11 représente l'évolution des rotations mesurées par les inclinomètres.

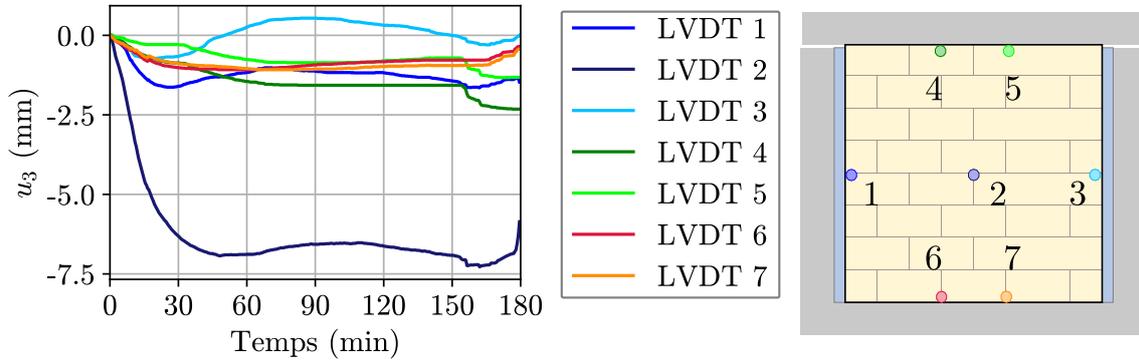


FIGURE 2.10 – Déplacements hors-plan mesurés par les capteurs LVDT

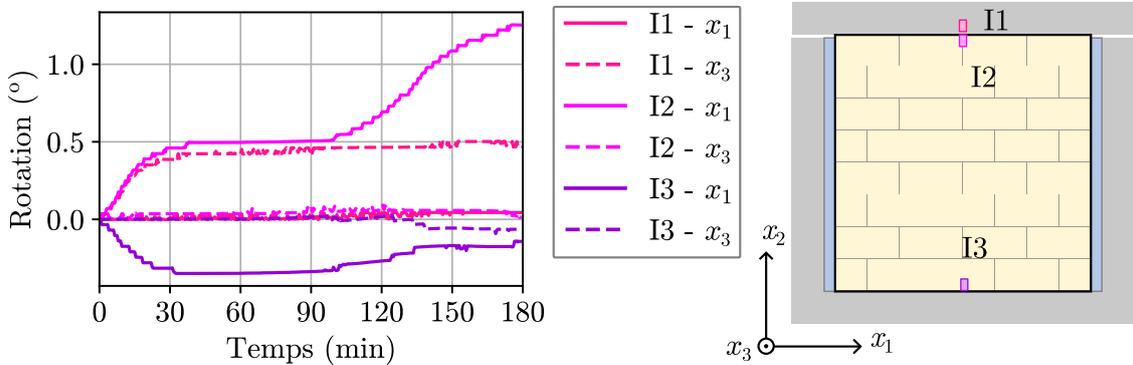


FIGURE 2.11 – Rotations autour des axes  $x_1$  et  $x_3$  mesurées par les inclinomètres

Il est intéressant de noter que seul le LVDT 2, au centre du mur, mesure un déplacement significatif, d'environ 7 mm au maximum, et dans la direction du feu. Ce déplacement augmente rapidement pendant les 30 premières minutes, puis plus lentement jusqu'à 50 min d'essai, et enfin se stabilise et oscille entre 6,5 et 7,3 mm.

Les LVDTs 4 à 7 mesurent des déplacements allant jusqu'à 1,5 mm. Compte tenu de leur position (à 50 mm du haut ou du bas du mur), et des rotations mesurées par les inclinomètres, cela tendrait à indiquer un léger glissement, de l'ordre de 0,5 mm, entre le mur et son cadre ou sa poutre de chargement. Néanmoins, il faut garder à l'esprit que les LVDT mesurent le déplacement de la face non-chauffée, et non pas du plan médian du mur.

Le faible déplacement enregistré par les capteurs LVDT 1 et 3 est plus surprenant. En effet, contrairement aux bords horizontaux du mur, qui sont liés au cadre de chargement (en bas du mur) ou à la poutre de chargement (en haut du mur), les bords verticaux sont libres du point de vue mécanique, et la laine minérale qui comble le vide entre le mur et le cadre de chargement est très souple. On proposera dans le chapitre 3 une modélisation qui corrobore cette observation.

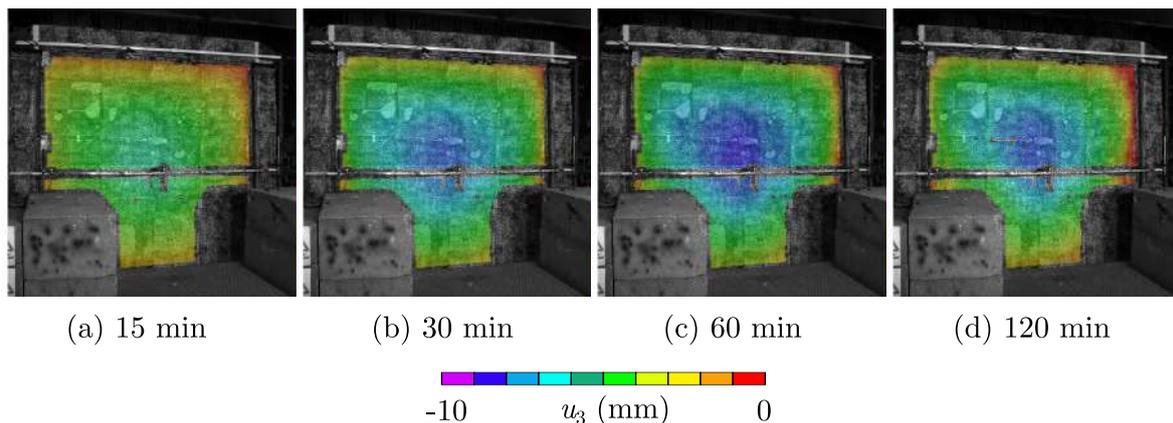


FIGURE 2.12 – Déplacements hors-plan mesurés par corrélation d'images pour différents temps d'exposition au feu

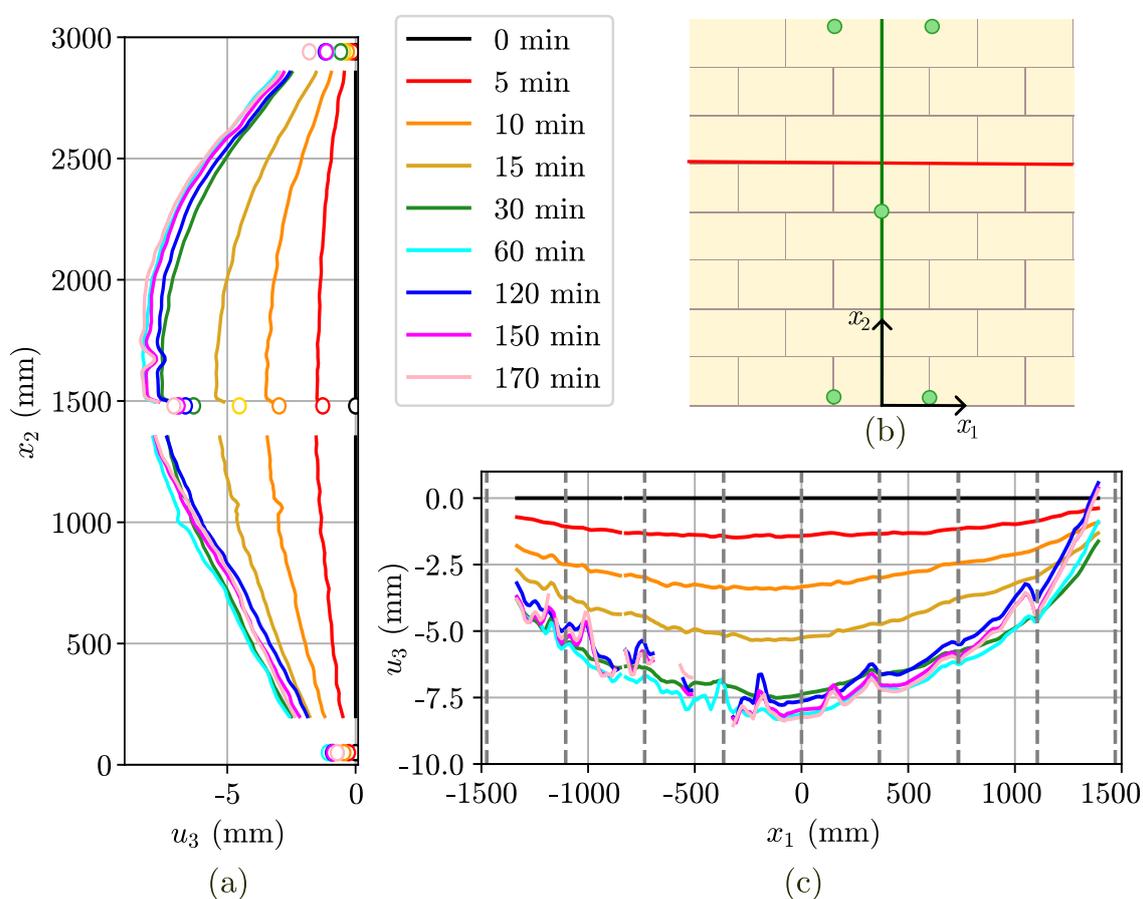


FIGURE 2.13 – Déplacements hors-plan mesurés par corrélation d'images et capteurs LVDT

La corrélation d'image représente un complément intéressant aux capteurs, dans la mesure où elle permet, entre autres, d'avoir une mesure du déplacement hors-plan sur presque toute la surface du mur. La figure 2.12 représente une vue globale du déplacement hors-plan pour différents temps d'exposition au feu, tandis que la figure 2.13 (a) représente ce même déplacement le long d'une droite verticale à mi-largeur du mur (droite en vert sur la figure 2.13 (b)), et la figure 2.13 (c) le représente le long d'une droite horizontale

à  $5/8^e$  de la hauteur du mur (droite en rouge sur la figure 2.13 (b)). Les déplacements mesurés par les capteurs LVDT représentés en vert sur la figure 2.13 (b) sont également représentés.

Ces figures représentent bien la double courbure, horizontale et verticale, due au feu. Autre détail intéressant, la déformée est presque symétrique (sauf à proximité des bords) par rapport à un plan vertical à mi-largeur du mur ( $O, x_1, x_3$ ), mais la flèche maximale est observée à  $5/8^e$  de la hauteur. Cela évoque une différence de conditions aux limites entre le haut et le bas du mur.

Les mesures des inclinomètres nous permettent de préciser les conditions aux limites à appliquer lors de la modélisation. En effet, Al Nahhas et al. [46] (sur le portique de chargement du CSTB) et Nguyen et Meftah [14] (sur un portique de chargement différent) ont supposé que la poutre supérieure du mur pouvait tourner autour de l'axe  $e_1$  (horizontal dans le plan du mur), ce qui expliquait que le déplacement du mur ne soit pas symétrique par rapport à un plan horizontal à mi-hauteur du mur. Les mesures des inclinomètres montrent bien que la poutre supérieure est fixe par rapport à cet axe. Elle semble en revanche pouvoir tourner autour de l'axe  $e_3$ , transversal au plan du mur.

### 3.2.4 Fissuration au cours de l'essai

**3.2.4.1 Analyse des déformations** Comme mentionné précédemment, le chargement purement mécanique n'a pas créé de fissures visibles à l'œil nu ou à la corrélation d'image sur la face visible (face non-exposée) du mur. La figure 2.14 montre les fissures observées via le système de corrélation d'images pour différents temps d'exposition au feu. Il apparaît que ces fissures sont principalement verticales, et que la plupart d'entre elles apparaissent pendant les 20 premières minutes d'exposition au feu.

Il est intéressant d'observer que toutes les fissures s'initient dans les joints verticaux, probablement par décohesion entre le bloc et le mortier. En pratique, lors de l'assemblage du mur, aucune précompression n'est appliquée entre les blocs et les joints verticaux, tandis que les joints horizontaux sont précomprimés par le poids du bloc au dessus d'eux. L'adhérence est donc moins bonne au niveau des joints verticaux qu'au niveau des joints horizontaux. Les fissures formées dans les joints verticaux se propagent ensuite verticalement au travers de la pierre, sans suivre les joints horizontaux. Selon Dhanasekar et al. [97], ce type de motif de fissure est typique de la maçonnerie en compression et résulte en partie du fait que la pierre et le mortier ont des coefficients de Poisson différents. Dans le cas présent, ces fissures pourraient également provenir de la différence entre les coefficients thermiques de la pierre et du mortier. Cependant, il n'existe pas à ce jour de données sur le coefficient de dilatation thermique du mortier de chaux hydraulique naturelle qui permette de confirmer cette hypothèse.

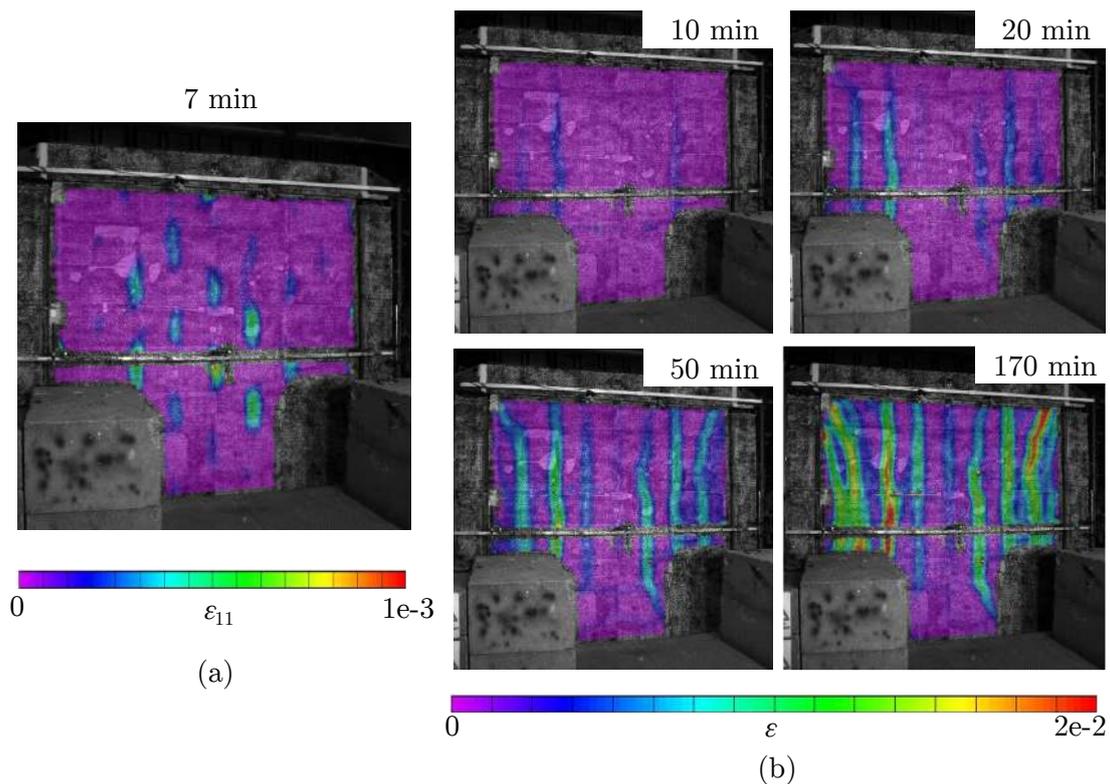
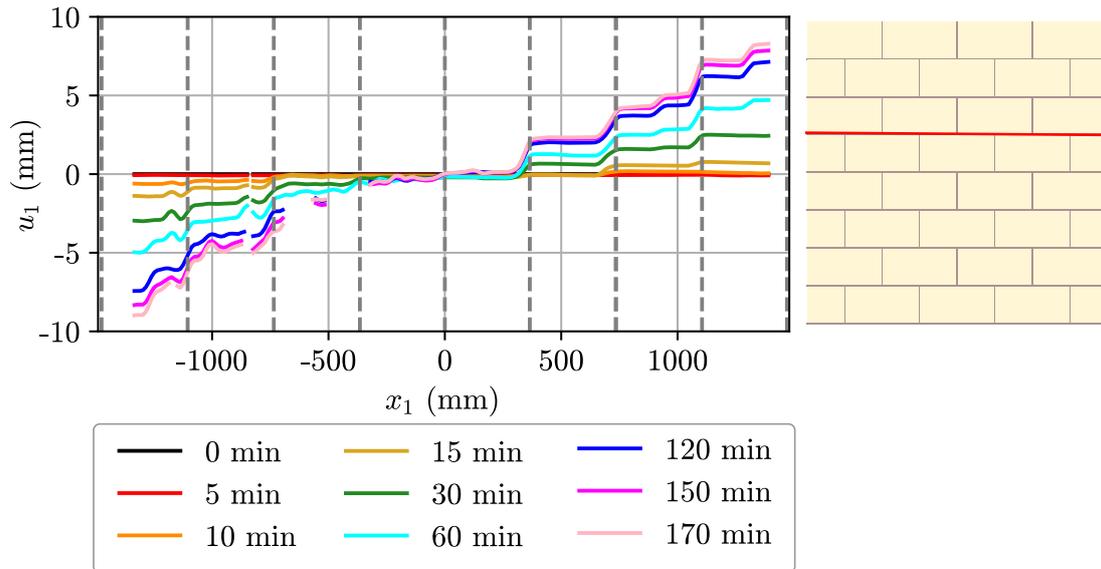


FIGURE 2.14 – Fissures verticales observée par corrélation d'images

A partir de 20 minutes d'exposition au feu, quelques fissures obliques, dites "en onglet", se développent au niveau des quatre coins du mur. Ces fissures, communes lors des essais de résistance au feu de murs porteurs, sont souvent annonciatrices de la rupture. Ici, cependant, elles se sont développées pendant tout l'essai mais sans que leur apparition ne déclenche une rupture immédiate.

**3.2.4.2 Analyse des déplacements horizontaux dans le plan** La figure 2.15 représente les déplacements horizontaux dans le plan, c'est-à-dire les déplacements dans la direction  $e_1$ , sur une ligne horizontale aux  $5/8^e$  de la hauteur du mur. Il apparaît que ce déplacement horizontal plan augmente sans stabilisation pendant l'ensemble de l'essai. On note également que ce déplacement se fait "en escalier", particulièrement sur la partie droite du mur. La position de ces "sauts" de déplacement correspond à la position des fissures verticales, et leur amplitude à l'ouverture de ces fissures. Le déplacement horizontal total correspond donc à la somme de la dilatation thermique et de l'ouverture des fissures, la contribution de cette dernière étant majoritaire.

On notera également qu'au maximum, le déplacement horizontal est de l'ordre de 8 mm de chaque côté du mur. Aucun risque donc que le mur vienne en contact avec les montants verticaux du cadre de chargement, et que les conditions aux limites mécaniques soient perturbées en cours d'essai.

FIGURE 2.15 – Déplacement dans la direction  $x_1$  mesuré par corrélation d'images

### 3.2.5 Rupture du mur

**3.2.5.1 Critère de rupture** Le critère de rupture est donné par la norme NF EN 1363-1 [96]. La rupture, ou perte de capacité portante, est définie soit par une contraction verticale excessive, soit par une vitesse de contraction verticale excessive. Ce dernier critère est atteint après 2 h 59 min 45 s d'exposition au feu. Après la perte de capacité portante du mur, on note que celui-ci supporte toujours une charge de 80 kN/m, ce qui représente 64 % de la charge initiale, et 32 % de la charge de rupture.

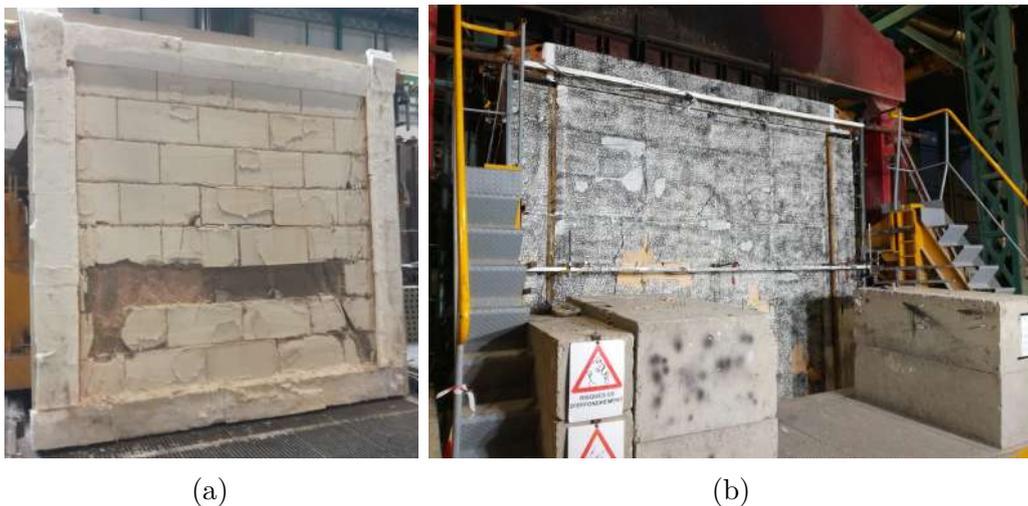


FIGURE 2.16 – Face (a) exposée et (b) non-exposée après la rupture

Au moment de la perte de charge, des chutes de blocs ont également été observées sur les faces exposée et non-exposée du mur. Du côté exposé, la caméra endoscopique montre que la rupture commence par l'écrasement du joint horizontal sous la troisième rangée de blocs, puis par l'écrasement du joint juste au-dessus de cette rangée. Ensuite, les blocs

de cette rangée se fendent selon un plan parallèle au plan du mur, à 6-7 cm de la face exposée. La figure 2.16 (a) montre la face exposée après rupture. De telles ruptures ont également été observées lors des essais de résistance à température ambiante qui seront présentés dans le chapitre 8. Sur la face non-exposée, les morceaux de blocs tombés sont plus petits, plus minces (2 - 3 cm d'épaisseur) et plus disséminés sur le mur, bien qu'ils proviennent tous de la partie inférieure du mur (voir figure 2.16 (b)).

**3.2.5.2 Mécanisme de rupture** L'observation la plus remarquable au moment de la rupture est certainement le mécanisme de rupture du mur. La figure 2.17 représente le déplacement hors-plan dans les quatre secondes précédant la rupture. Sur la figure 2.17 (a), la courbure thermique qui se développe vers le feu pendant l'essai est encore bien visible. Elle diminue sur la figure 2.17 (b), avec l'amorçage de la rupture. Enfin, les figures 2.17 (c) et 2.17 (d) montrent le mécanisme de rupture dans la direction opposée au feu.

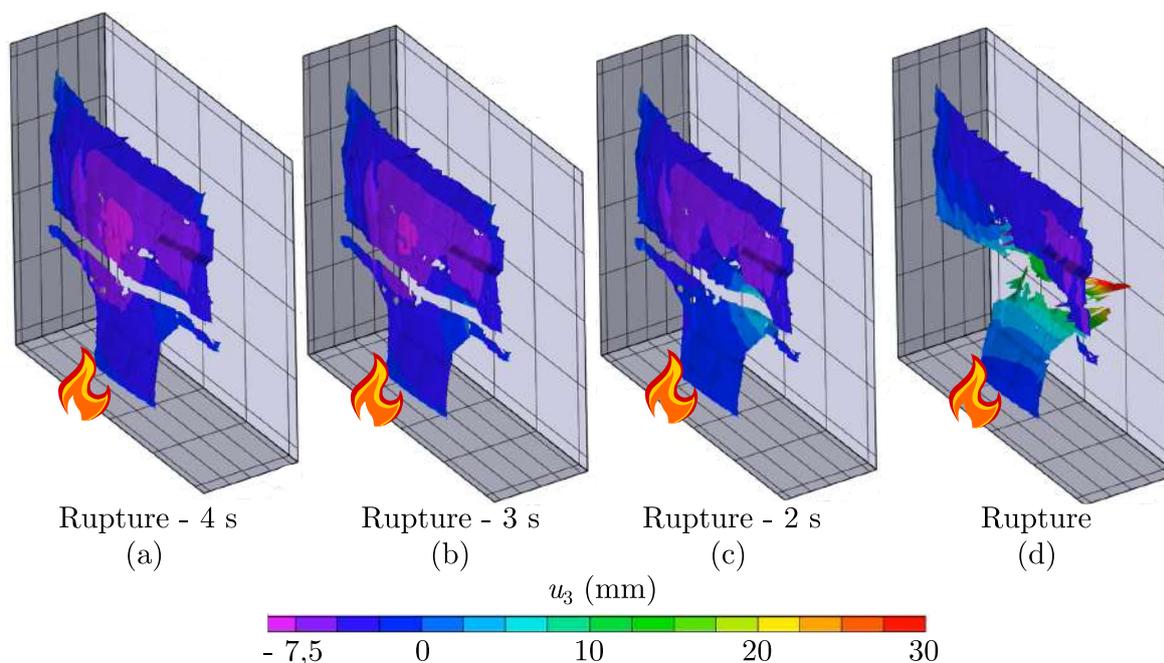


FIGURE 2.17 – Déplacements enregistrés au moment de la rupture

L'amplitude de cette flèche vers l'opposé du feu, qu'on nomme "Reverse bowing" (Cooke [13]), est de l'ordre de 20 mm, comme le montre la figure 2.18. D'après cette dernière, on voit clairement que la partie inférieure du mur tourne vers l'opposé du feu, tandis que sa partie supérieure reste à sa position initiale.

La figure 2.19 (a) représente la fissuration à l'instant précédant la rupture. Les zones non-fissurées apparaissent en violet, tandis que les zones fissurées apparaissent en bleu, voire en cyan ou vert pour les plus grosses fissures. D'après cette figure, il apparaît que deux fissures inclinées se développent à partir des coins inférieurs du mur et se rejoignent à la moitié de sa largeur et au deux tiers de sa hauteur au moment de la rupture. La position du point où elles se rejoignent est à noter, car il s'agit du point où la flèche est la

plus grande avant la rupture.

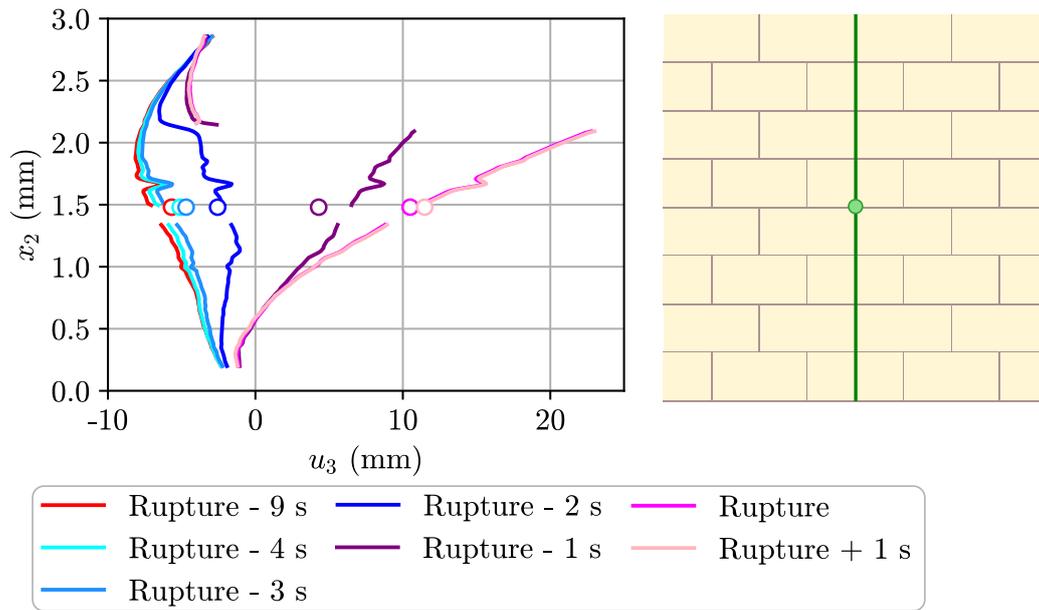


FIGURE 2.18 – Déplacement hors-plan mesuré par corrélation d'images au moment de la rupture

Les figures 2.19 (b) et (c) représentent respectivement les déplacements plans horizontaux et verticaux juste après la rupture. On note que les bords latéraux du mur se déplacent vers l'extérieur, tandis que le bas du mur translate vers le haut, avec une discontinuité de vitesse au niveau des fissures diagonales évoquées précédemment.

A partir des déplacements verticaux, horizontaux dans le plan et hors-plan ainsi que des fissures, on peut intuitivement imaginer un mécanisme de rupture simple, représenté sur la figure 2.20. Dans ce mécanisme, le mur est divisé en quatre blocs. Le bloc supérieur reste fixe, tandis que les deux blocs latéraux sont en translation horizontale vers l'extérieur. Le bloc du bas, quant à lui, est en translation verticale vers le haut et pivote autour du bord inférieur dans la direction opposée au feu. Ce mécanisme paraît assez contre-intuitif : le mur fléchit en direction du feu pendant tout l'essai, mais rompt dans la direction opposée. Un tel mécanisme de rupture peut conduire à des problèmes de sécurité, tant pour les équipes d'intervention lors de l'incendie que pour les bâtiments avoisinants. Pour cette raison, il est de la plus grande importance de bien le comprendre.

Le mécanisme ainsi obtenu pourra être comparé aux mécanismes de rupture optimaux déduits de la modélisation par le calcul à la rupture. On rappelle cependant que le mécanisme de rupture n'est observé qu'en partie : la corrélation d'images ne permet d'obtenir que les déplacements sur la partie visible du mur.

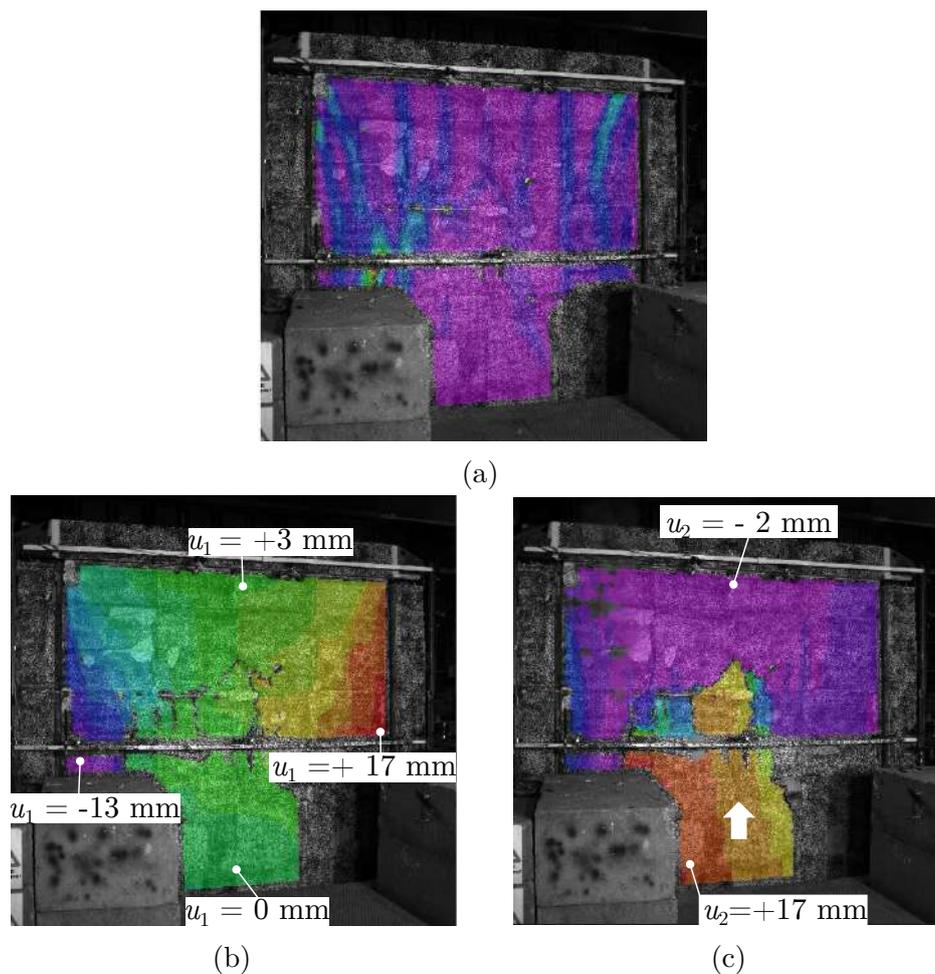


FIGURE 2.19 – (a) Fissuration à l'instant précédant la rupture ; déplacements (b) horizontaux selon  $x_1$  et (c) verticaux selon  $x_2$  juste après la rupture

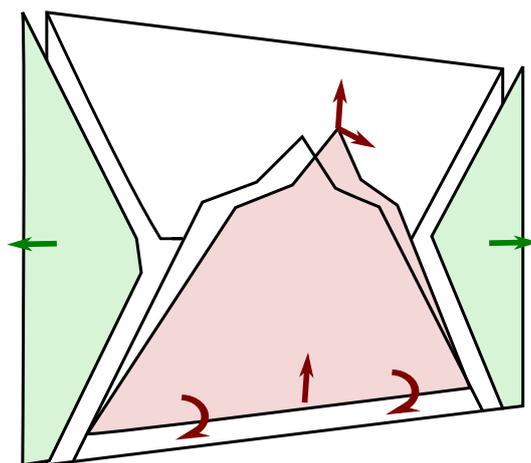


FIGURE 2.20 – Schéma simplifié du mécanisme de rupture observé

### 3.2.6 Aspect post-feu des matériaux

On note une coloration de la pierre qui varie dans l'épaisseur du mur. En partant du côté exposé au feu, sur une épaisseur d'environ 1 cm, la pierre est devenue blanche et

extrêmement friable. Il s'agit de la partie du mur dont la température a dépassé les 1000 °C lors de l'essai. Au contact de l'air, cette pellicule se détache progressivement du mur. Elle laisse apparaître une autre couche blanche d'environ 5 mm, suivie d'une couche grisâtre d'environ 5 cm puis d'une couche rougeâtre d'environ 2 cm (voir figure 2.21). Le reste de la pierre a gardé sa couleur originelle. Cette coloration témoigne des transformations chimiques qui se produisent lorsque la pierre est exposée à des températures élevées, et correspond bien aux observations proposées par Vigroux et al. [33] sur le calcaire de Saint-Maximin : on observe une rubéfaction légère (coloration en rouge) de la pierre pour des températures allant de 200-250 °C à 400 °C, puis la pierre prend une forte teinte grise jusqu'à des températures de 800-900 °C, et enfin devient blanche au delà de 900 °C.

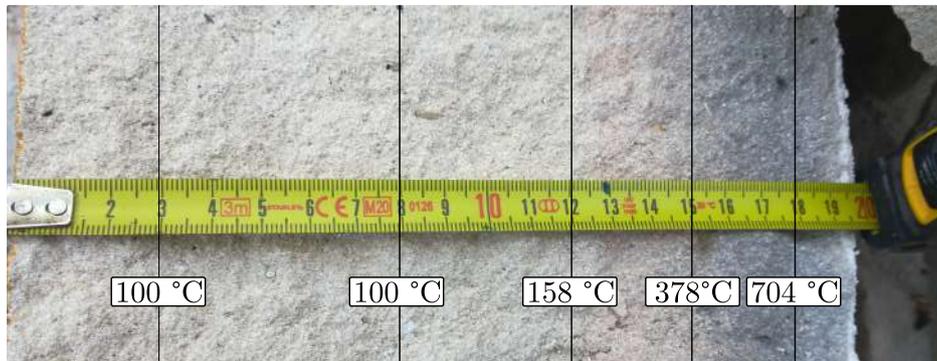


FIGURE 2.21 – Profil de couleur de la pierre après 3 h d'exposition au feu, avec indication de la température maximale mesurée par les thermocouples

A la démolition du mur, on a également pu noter que l'interface entre le mortier et les blocs était considérablement affaiblie par le chauffage, pour les joints verticaux (pour lesquels on a vu des fissures se produire pendant l'essai) comme pour les joints horizontaux.

## 4 Complément sur les aspects thermiques

La méthode de modélisation proposée dans cette thèse, tant pour la détermination de la courbure thermique que pour la détermination de la résistance du mur, nécessite une connaissance précise du profil de température dans le mur. Pour cette raison, il nous a paru important de poursuivre les investigations expérimentales sur la partie thermique.

### 4.1 Essais thermiques complémentaires

En complément de l'essai présenté dans la partie précédente, nous avons également réalisé deux essais thermiques (notés A et B par la suite), sur un four à maquettes. Ces essais présentent l'avantage d'être plus petits et plus simples à mettre en place, et donc de pouvoir être répétés. En s'affranchissant du chargement mécanique, on peut également

mettre en place une instrumentation un peu plus développée au niveau thermique. En effet, l'installation des thermocouples pourrait créer des points faibles dans la pierre et le mortier, et fausser la charge de rupture sur un essai thermomécanique comme celui présenté dans la partie précédente. Les essais thermiques présentés ici nous ont donc permis d'obtenir des profils de température plus précis dans la pierre, mais également de connaître le profil de température dans le mortier.

### 4.1.1 Protocole expérimental

**4.1.1.1 Caractéristiques géométriques des murets testés** Les murets testés au four à maquettes sont composés de blocs et de demi-blocs aux dimensions identiques à celles de l'essai présenté dans la partie précédente. Les blocs font 720 mm de long, 360 mm de haut et 200 mm d'épaisseur, tandis que les joints horizontaux et verticaux font 10 mm d'épaisseur. La figure 2.22 (a) donne les côtes du murets, tandis que la figure 2.22 (b) représente un des deux murets.

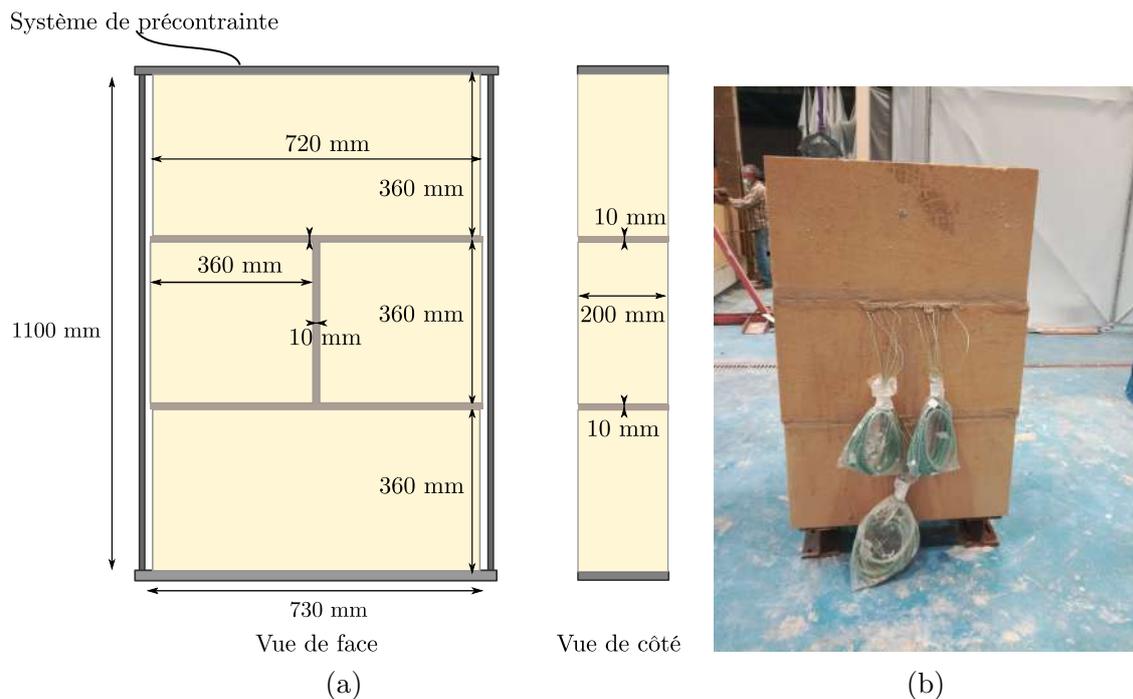


FIGURE 2.22 – Maquettes pour les essais thermiques : (a) côtes et (b) maquette construite

**4.1.1.2 Instrumentation** Seuls des capteurs de température (thermocouples) constituent ici l'instrumentation. Le bloc inférieur et le joint horizontal supérieur sont chacun instrumentés par 13 thermocouples à boule. Six thermocouples à disque ont également été installés en face non-exposée : un au centre de chaque bloc ou demi-bloc, et un à chaque intersection du joint vertical avec un joint horizontal.

Pour les blocs, des perçages de 2 cm de profondeur et de 4 mm de diamètre ont été réalisés dans le bloc inférieur. Il est important de noter que ces perçages n'ont ni endommagé la pierre, ni créé de fissures. Ces perçages ont ensuite été rebouchés avec un mortier-colle pour assurer la continuité de la matière entre le capteur et la pierre. La figure 2.23 donne l'implantation des thermocouples dans le bloc en précisant la distance entre chaque thermocouple et la face exposée au feu.

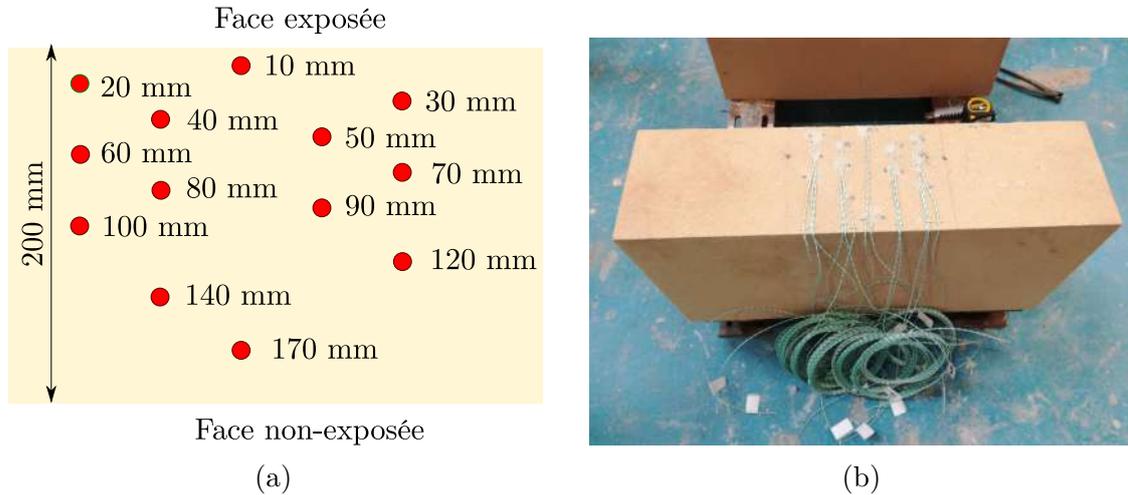


FIGURE 2.23 – Emplacement des thermocouples dans la pierre

La figure 2.24 (a) donne l'implantation des thermocouples dans le joint horizontal supérieur. Leur implantation a été réalisée de manière à ce que les thermocouples soient bien enrobés de mortier, pour ne pas être en contact d'un côté avec la pierre et de l'autre avec le mortier. Par ailleurs, les thermocouples ont été agrafés sur les blocs pour garantir leur positionnement dans la direction transversale au mur.

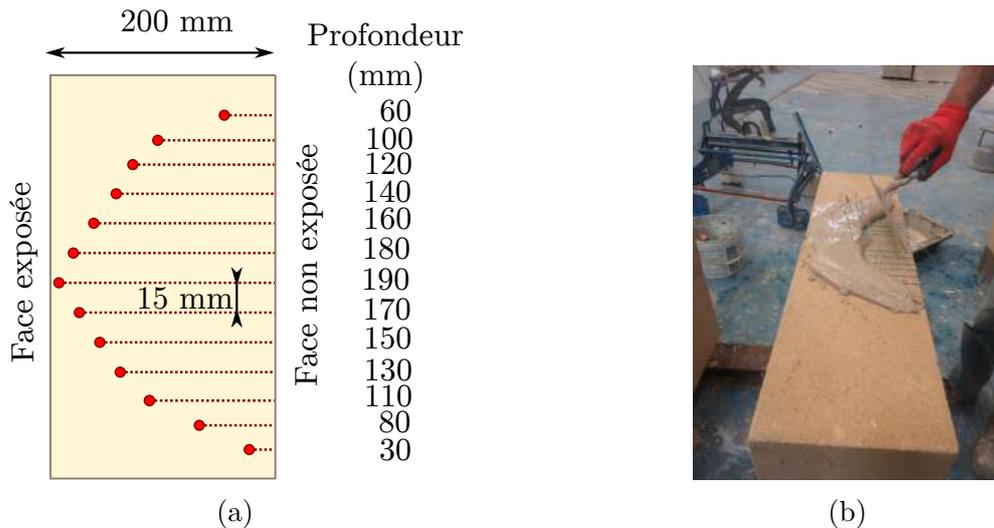


FIGURE 2.24 – Emplacement des thermocouples dans le mortier

Le montage des maquettes et la mise en place des thermocouples sont représentés sur la figure 2.24 (b).

## 4.1.2 Résultats

La figure 2.25 représente l'évolution de la température dans la pierre, en traits continus, et dans le mortier, en tirets, sur le deuxième essai. Cette figure met en évidence les paliers de vaporisation à 100 °C, extrêmement longs, traduisant un effet important des transferts hydriques.

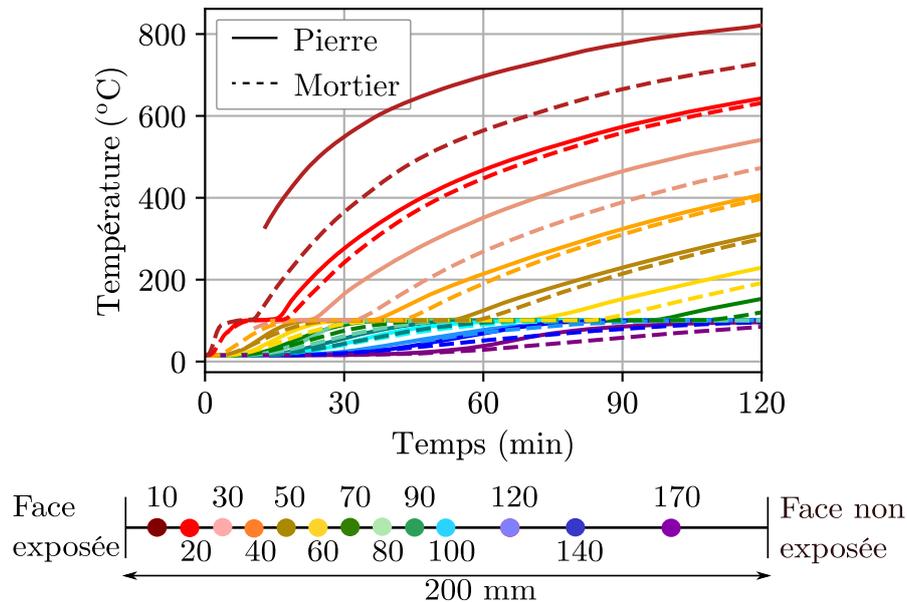


FIGURE 2.25 – Profils de température mesurés dans la pierre et dans le mortier pour l'essai B

On note également que plus le thermocouple est éloigné de la face exposée, plus le plateau de vaporisation est long, ce qui est typique d'un transfert d'humidité. Ce phénomène nous a d'abord surpris puisque la teneur en eau de la pierre était de 0,3 % le jour de l'essai. Les trois hypothèses que nous avons formulées sont les suivantes :

- Le mortier colle utilisé pour remplir les perçages et assurer la continuité de matière entre la pierre et le thermocouple contenait un peu d'eau, et pourrait avoir perturbé le champ de température autour du thermocouple
- La teneur en eau du mortier (libre et/ou liée) peut être assez élevée. Puisque les thermocouples sont situés à 20 mm seulement des joints horizontaux, il pourrait y avoir un transfert d'eau dans le plan du mur, et non pas uniquement transversalement à celui-ci.
- La teneur en eau mesurée sur les blocs témoins n'est pas la teneur en eau réelle des blocs du mur. En observant le montage d'autres murets, après les essais décrits dans ce chapitre, nous nous sommes rendus compte que compte-tenu de la porosité de la pierre, les maçons mettaient beaucoup d'eau pour saturer l'interface en eau et assurer une bonne adhérence pierre-mortier. Pour un demi-bloc de 40 kg, environ 8 litres d'eau doivent être ajoutés. Par conséquent, il est possible que la teneur en eau de la pierre le jour de l'essai ait été bien supérieure à 0,3 %, expliquant ainsi les

paliers de vaporisation observés, ainsi que l'eau coulant du mur et le nuage de vapeur d'eau au niveau des fissures qui ont été observés sur l'essai présenté dans la partie 3. Pour des essais ultérieurs sur des murs en pierre massive, il paraît donc nécessaire de mesurer la teneur en eau sur un assemblage plus réaliste qu'un seul bloc témoin.

La figure 2.26 compare les profils thermiques obtenus dans la pierre pour les deux essais A et B, pour différents temps d'exposition au feu. On remarque que ces profils sont très proches, ce qui permet de conclure à la répétabilité des mesures.

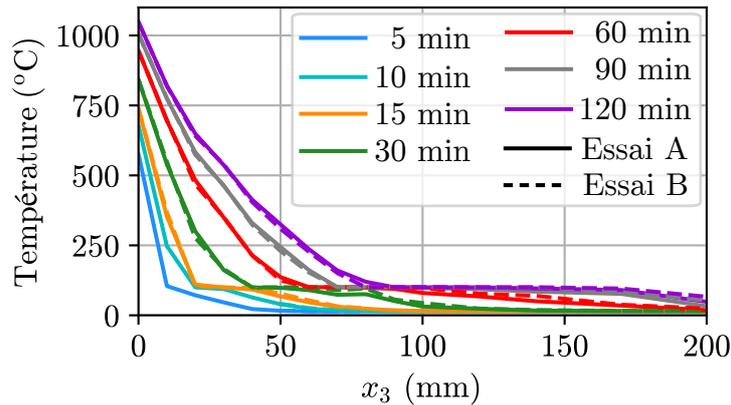


FIGURE 2.26 – Profils de température mesurés dans la pierre pour les essais A et B

La figure 2.27 présente les profils thermiques obtenus dans le mortier pour différents temps d'exposition au feu. Ici, on observe plus de différences : à 60 min, par exemple, il y a une différence de 120 °C entre la température mesurée à 30 mm de profondeur dans l'essai A, et à la même profondeur dans l'essai B. Cette différence peut être imputée à deux facteurs :

- L'incertitude de positionnement des thermocouples. Comme suggéré dans le paragraphe 4.1.1.2, la mise en place des thermocouples dans le mortier était plutôt complexe, et les thermocouples ont été positionnés plus précisément pour l'essai B (pour lequel ils ont été agrafés à la pierre) que pour l'essai A.
- Lors de la mise en place de la maquette de l'essai A, nous avons noté une fissure à l'interface pierre-mortier au niveau du joint instrumenté. Cette fissure, bien que très fine et non-traversante, a probablement perturbé le champ de température dans le joint.

Par la suite, nous retiendrons uniquement les températures mesurées lors de l'essai B, dont la maquette a été réalisée avec plus de soin que l'essai A, pour le mortier.

La figure 2.28 représente les profils thermiques dans la pierre et dans le mortier pour l'essai B. On note que la température est systématiquement plus faible dans le mortier que dans la pierre.

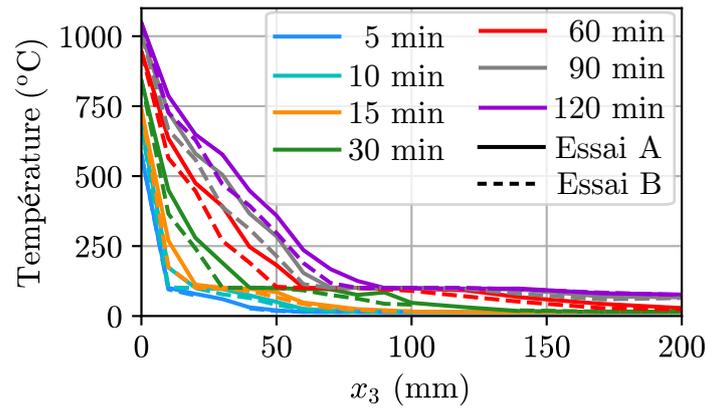


FIGURE 2.27 – Profils de température mesurés dans le mortier pour différents temps d'exposition au feu

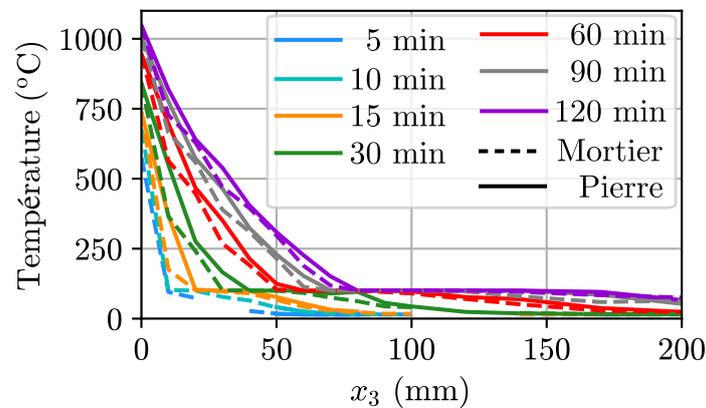


FIGURE 2.28 – Profils de température mesurés dans la pierre et dans le mortier pour l'essai B

## 4.2 Comparaison à d'autres essais

La figure 2.29 représente l'évolution des températures mesurées par les thermocouples situés à 20, 50, 80 et 120 mm de la face exposée en fonction du temps d'exposition au feu pour les essais thermiques réalisés au four à maquettes, l'essai thermomécanique présenté dans la partie 3 réalisé sur le four vertical et l'essai non-chargé de Pham et al. [3], également réalisé sur le four vertical. Pour une meilleure lisibilité, les mesures des thermocouples situés à 20 et 80 mm de la face exposée sont reportées sur la sous-figure (a), tandis que la sous-figure (b) représente les températures mesurées par les thermocouples situés à 50 et 120 mm de la face exposée. Concernant les essais sur le four à maquettes, la courbe "pierre" correspond à la moyenne des mesures sur les deux essais, tandis que la courbe "mortier" ne correspond qu'aux mesures de l'essai B du fait des incertitudes sur l'essai A évoquées plus haut.

On note que les températures dans la pierre et dans le mortier pour les essais réalisés dans cette thèse présentent le même type d'évolution : une augmentation rapide de la température jusqu'à 100 °C, puis un palier de vaporisation très marqué, avant que la

température ne recommence à augmenter. Le palier de vaporisation est beaucoup moins présent dans les essais de Pham et al. [3], ce qui traduit une présence d'eau plus faible.

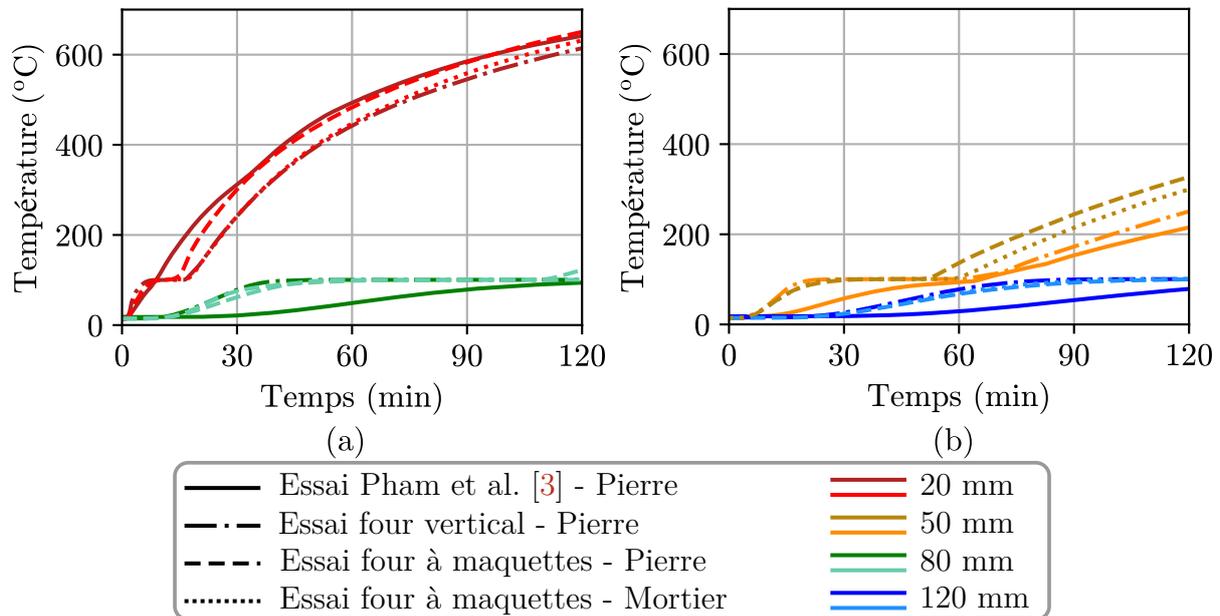


FIGURE 2.29 – Evolution de la température en fonction du temps pour les quatre essais considérés

La différence de teneur en eau pour ces deux murs, qui ont été testés après un temps de cure similaire (25 jours pour celui de Pham et al [3]., entre 30 et 34 pour les murs et murets que nous avons testés) vient probablement de la technique de montage et du poseur opérateur. L'interface pierre-mortier était humidifiée à l'éponge et strillée dans le premier cas, et copieusement arrosée dans le second. Il est probable qu'après un temps de séchage plus long, des profils thermiques plus proches auraient été observés dans les deux murs. D'autres facteurs, comme le temps entre la découpe des blocs et leur mise en œuvre, ou tout simplement la variabilité de la pierre dans le banc de la carrière, peuvent également expliquer de telles différences.

La figure 2.29 montre également que les températures observées ne sont pas tout à fait les mêmes sur le four vertical et sur le four à maquettes, pour lequel la maquette est placée en position horizontale. Cette différence pourrait venir de la variabilité de la pierre, ou, plus probablement, de la différence de direction d'exposition au feu. En effet, les gaz chauds remontant, le transfert convectif est donc plus important pour la maquette exposée en position horizontale que pour celle exposée en position verticale. En ce qui concerne les températures, réaliser des essais à petite échelle sur le four à maquettes conduirait donc à des résultats plus sévères en termes d'augmentation de température qu'un essai à l'échelle 1 sur le four vertical.

Pour conclure sur cette comparaison thermique, on peut noter que la méthode de montage des murs influence leur teneur en eau pour des essais proches de 28 jours de

séchage. Une teneur en eau plus importante entraîne une phase d'évaporation plus longue, ce qui freine la cinétique d'évolution de la température et conduit alors à des températures plus faibles dans l'épaisseur du mur. Pour avoir un comportement hygrothermique plus proche d'un mur "sec" en situation réelle, et potentiellement plus défavorable, il pourrait être intéressant de tester les murs après un temps de séchage plus long. Cette modification, certes défavorable au niveau des températures, serait en revanche favorable du point de vue mécanique puisque le mortier continue à gagner en résistance pendant les six premiers mois de cure.

### 4.3 Une première modélisation thermique

Dans la pratique de l'ingénieur, la distribution de température due au feu est souvent déterminée par un calcul thermique plutôt que par un essai, plus coûteux et complexe à réaliser. Dans le cas de murs en béton armé, de maçonnerie en parpaing ou en brique, l'évolution des propriétés physiques (masse volumique) et thermiques (conductivité thermique, chaleur spécifique) en fonction de la température sont connues. Ce n'est pas le cas pour la pierre naturelle, dont les propriétés peuvent être très variables selon le type de pierre (Sciarretta et al. [7]).

On peut alors se demander s'il est pertinent, dans le cas de la pierre naturelle, de baser la détermination de la température sur un simple calcul thermique. Une première étape de notre démarche a donc consisté à réaliser ce calcul numérique pour déterminer le profil thermique dans un bloc de calcaire de 200 mm d'épaisseur. Ce calcul a été réalisé avec le logiciel SAFIR [98].

#### 4.3.1 Position du problème

Pour ce premier calcul, nous supposons que les propriétés thermiques du mortier sont proches de celles de la pierre, et donc, que le mur est homogène. Le transfert thermique est alors unidirectionnel, dans l'épaisseur du mur. Ce choix est guidé par le manque de données concernant les propriétés thermiques du mortier, encore plus rares dans la littérature que celles de la pierre, et par les observations présentées dans la sous-partie précédente (4.2), qui montrent que du point de vue de la distribution de température, il est conservatif, c'est-à-dire allant dans le sens de la sécurité, de négliger la présence des joints.

Le mur est soumis à un chargement thermique défini par l'Eurocode 1 [99]. Ce chargement thermique se traduit par un flux  $q_n$  composé d'une part convective et d'une part radiative, défini par l'équation 2.1.

$$q_n = h(T_g - T_s) + \sigma\varepsilon^*(T_g^4 - T_s^4) \quad (2.1)$$

où  $T_g$  est la température du gaz (donnée du problème),  $T_s$  celle de la surface (faisant partie des inconnues du problème),  $h$  est le coefficient d'échange,  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann et  $\varepsilon^*$  le coefficient d'émissivité. Du côté exposé, la température du gaz  $T_g$  suit la courbe ISO 834 déjà présentée sur la figure 2.5, tandis que du côté non-exposé, elle vaut  $T_g = 20^\circ\text{C}$ .

A l'intérieur du mur, seuls les transferts thermiques par conduction sont considérés. La température vérifie alors l'équation suivante :

$$\operatorname{div} [\lambda(T)\underline{\operatorname{grad}}(T)] = \rho(T)c_p(T)\frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

où la conductivité thermique  $\lambda(T)$ , la capacité thermique massique  $c_p(T)$  et la masse volumique  $\rho(T)$  dépendent de la température.

### 4.3.2 Données

Une des difficultés majeures de ce calcul réside en l'absence dans la littérature de données expérimentales à température élevée pour le calcaire de Saint-Vaast. Sa conductivité thermique, sa capacité thermique massique et sa masse volumique à température ambiante ont été caractérisées par Pestre [31]. Pour ce qui est des propriétés à température élevée, plusieurs calcaires du bassin parisien ont été caractérisés par Vigroux [100]. Nous avons choisi d'affecter les propriétés à température ambiante du calcaire de Saint-Vaast du facteur multiplicatif d'évolution de ces propriétés en fonction de la température correspondant au calcaire de Saint-Maximin. Parmi les calcaires testés par Vigroux, il s'agit de celui qui, géographiquement, se rapproche le plus du calcaire de Saint-Vaast.

Les propriétés utilisées pour le calcul thermique, ainsi que leur source, sont données dans le tableau 2.3.

TABLEAU 2.3 – Valeurs des propriétés physiques employées pour le calcul thermique

Propriété		Valeur	Source
Conductivité thermique	$\lambda$	0,58 W/m/K	[31]
Capacité thermique massique	$c_p$	740 J/kg/K	[31]
Masse volumique	$\rho$	1520 kg/m <sup>3</sup>	[31]
Coefficient de transfert thermique (face exposée)	$h$	25 W/m <sup>2</sup> /K	[99]
Coefficient de transfert thermique (face non-exposée)	$h$	4 W/m <sup>2</sup> /K	[99]
Emissivité	$\varepsilon^*$	0,8	[99]

Les facteurs multiplicatifs adimensionnels d'évolution de la conductivité thermique, de la capacité thermique massique et de la masse volumique sont données sur la figure 2.30. Les traits continus relient les points de mesure, tandis que les lignes pointillées correspondent aux extrapolations réalisées pour le calcul.

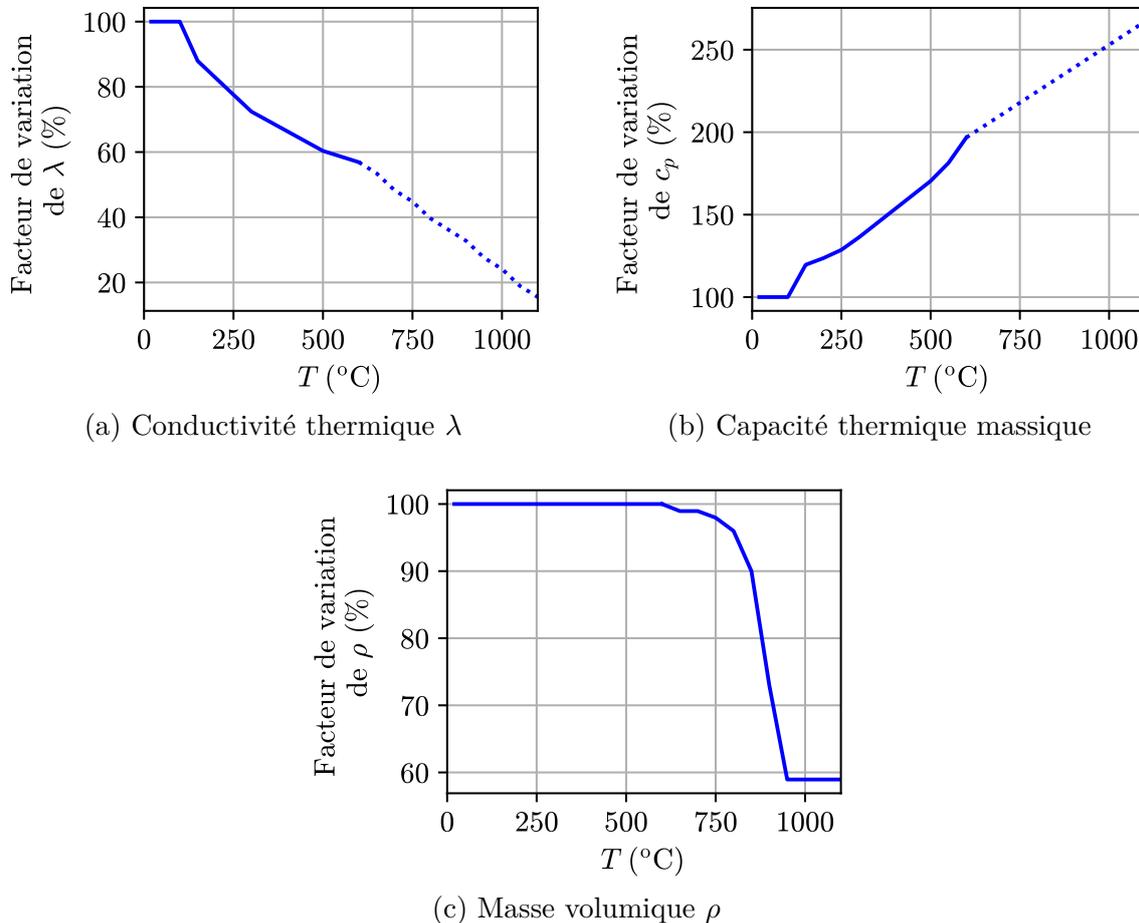


FIGURE 2.30 – Facteurs d'évolution adimensionnels des différentes propriétés en fonction de la température

On considère que les autres propriétés (coefficients de transfert thermique et émissivité) ne varient pas avec la température.

### 4.3.3 Résultats et comparaison expérimentale

La figure 2.31 représente les profils thermiques obtenus pour (a) 30, (b) 60, (c) 120 et (d) 180 min d'exposition au feu, ainsi que leur comparaison aux résultats expérimentaux de cette thèse et de Pham et al. [3].

On note que les températures calculées sont généralement supérieures aux températures mesurées, avec une différence maximale de l'ordre de 100 °C qui est obtenue à une distance comprise entre 50 et 80 mm de la face exposée. Elle peut être due à deux facteurs : les

propriétés considérées ne sont pas celles du calcaire de Saint-Vaast, pour lequel il n'existe pas de données dans la littérature pour l'instant, mais seulement celles d'un calcaire proche, et la teneur en eau des blocs n'est pas prise en compte dans ce calcul, purement thermique. Concernant ce dernier point, on pourrait envisager de prendre en compte la vaporisation de l'eau à 100 °C par une augmentation artificielle de la capacité thermique massique  $c_p$  pour cette température, comme proposé dans l'Eurocode 2 [101] pour le béton, ou dans l'Eurocode 6 [17] pour la brique.

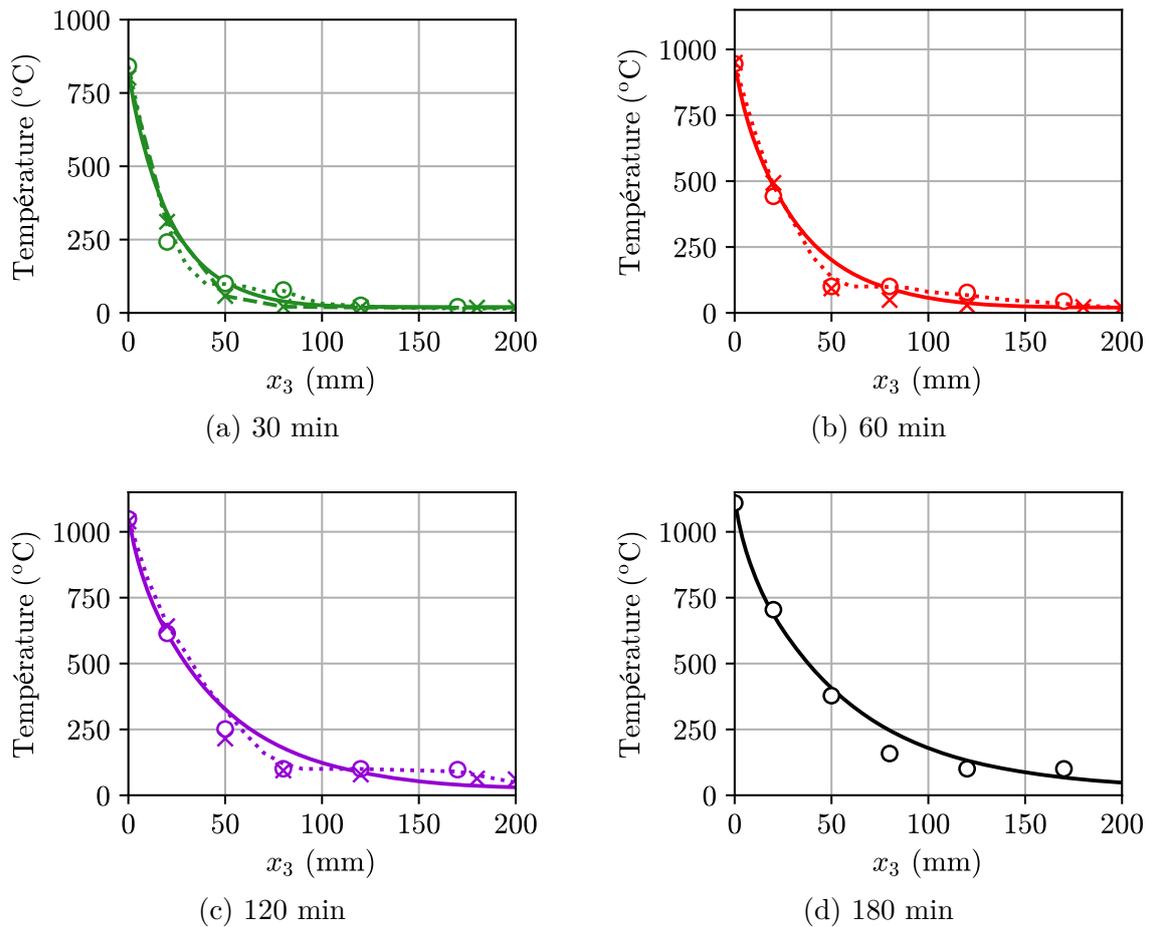


FIGURE 2.31 – Comparaison des températures calculées et des températures mesurées sur les différents essais

La figure 2.32 reprend cette comparaison pour 180 min d'exposition au feu, avec différentes valeurs de teneur en eau allant de 0 à 20 %. Dans ce calcul, l'énergie de vaporisation de l'eau est prise en compte, mais les transferts d'humidité ne le sont pas. Sur cette figure, on voit que la courbe des températures se rapproche le plus des courbes obtenues pour une teneur en eau de 5 à 10 %.

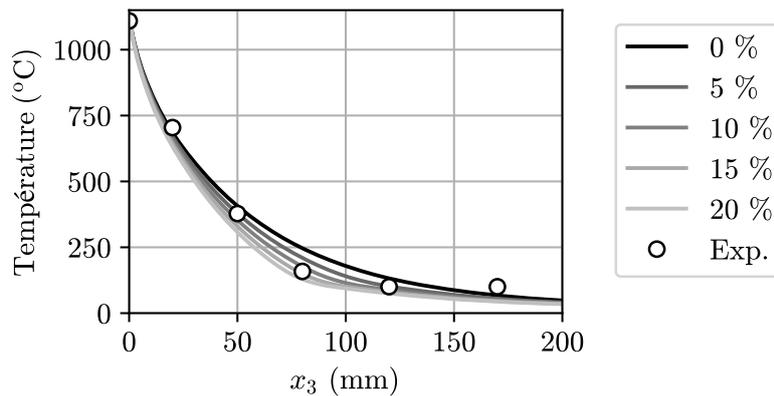


FIGURE 2.32 – Températures calculées après 180 min d’exposition au feu pour différentes teneurs en eau

#### 4.4 Remarques finales sur les aspects thermiques

Le calcul thermique présenté dans cette partie montre que la détermination par le calcul du champ de température dans la pierre est loin d’être triviale, principalement à cause du manque de données et de la teneur en eau des blocs, qui est mal connue. Dans la suite du manuscrit, nous avons donc choisi de baser nos calculs thermomécaniques sur les champs de température mesurés, et non pas sur les champs de température calculés.

Mentionnons tout de même un point important : nos modèles ont donné des températures toujours supérieures aux températures mesurées. Un calcul de stabilité au feu utilisant des températures déterminées numériquement serait donc a priori conservatif, par rapport à un calcul basé sur les températures mesurées.

Enfin, nous avons montré expérimentalement que la température était plus faible dans le mortier que dans la pierre. Il est donc également conservatif de considérer que la température est identique dans les deux matériaux. Pour faciliter les modélisations ultérieures, nous supposerons donc que le transfert thermique est unidirectionnel.

## 5 Discussion - Aspects thermomécaniques

Bien que les résultats d’essai de résistance au feu sur des murs de maçonnerie en pierre naturelle soient peu nombreux dans la littérature, nous pouvons comparer les résultats de l’essai présenté dans ce chapitre à ceux des essais de Pham et al. [3], qui concernent également des murs en calcaire de Saint-Vaast, avec un mortier de chaux hydraulique naturelle NHL 3,5. Les dimensions de ces murs et des blocs les composant, ainsi que le protocole et le dispositif expérimental, sont identiques à ceux utilisés dans notre essai. Seul le chargement mécanique appliqué en tête de mur est différent. Nous pourrions donc tenter de quantifier l’impact du chargement mécanique sur la déformée hors-plan et sur le

mécanisme de rupture.

## 5.1 Détermination du taux de chargement des murs

Bien que les trois murs aient été construits en calcaire de Saint-Vaast, la résistance en compression des blocs utilisés dans la campagne expérimentale de Pham et al. [3] est légèrement supérieure à celle des blocs utilisés pour notre campagne expérimentale. Elle vaut  $R_c^b = 7,4$  MPa, avec un coefficient de variation de 5 %. La variabilité de la pierre reste donc plutôt faible.

Afin de pouvoir comparer les résultats des essais menés sur les trois murs, nous avons choisi de calculer leur taux de chargement à température ambiante selon l'Eurocode 6 [1]. Ce taux de chargement est défini comme le rapport entre le chargement mécanique appliqué, noté  $N$ , et la charge limite à température ambiante selon l'Eurocode 6, notée  $N_R$  et évaluée en trois sections : en bas, au milieu et en haut du mur. Cette charge limite est donnée par l'équation (2.3).

$$N_R = \phi_i \times t \times f \quad (2.3)$$

où :

- $\phi_i$  est un facteur de réduction qui prend en compte les imperfections géométriques, le risque de flambement et les charges transversales lorsqu'il y en a. Pour les murs considérés, le facteur de réduction est plus faible au milieu du mur ( $\phi_i = 0,74$ ) qu'en haut et en bas ( $\phi_i = 0,9$ ) ;
- $t = 0,2$  m est l'épaisseur du mur ;
- $f$  est la résistance de l'assemblage, déterminée empiriquement par :

$$f = K \times f_b^{0,7} \times f_m^{0,3} \quad (2.4)$$

où :

- $K = 0,45$  pour la pierre naturelle ;
- $f_b$  est la résistance en compression de la pierre
- $f_m$  est la résistance en compression du mortier

Dans la pratique de l'ingénieur, la résistance en compression de la pierre est mesurée selon la norme NF EN 772-1 [102]. En revanche, la résistance en compression du mortier est rarement mesurée. Pour une pierre tendre telle que le calcaire de Saint-Vaast, le DTU 20.1 requiert l'utilisation d'un mortier de classe M2,5, soit de résistance en compression  $R_c^m \geq 2,5$  MPa. La valeur  $f_m = 2,5$  MPa est alors retenue pour le calcul.

Les essais de caractérisation réalisés dans cette thèse (tant pour l'essai de résistance au feu que pour les essais de résistance à température ambiante) ont montré que, en

respectant les dosages en sable et chaux hydraulique naturelle présentés dans le DTU 20.1 [2], il n'est pas possible d'atteindre une telle résistance au bout de 28 jours de cure. Cette incohérence nous pousse alors à présenter deux résultats pour la résistance locale de l'assemblage  $f$  : une valeur considérant une résistance en compression théorique du mortier  $f_b = 2,5$  MPa, et une valeur considérant la résistance en compression mesurée du mortier. Le tableau 2.4 donne les résistances en compression de l'assemblage  $f$ , du mur  $N_R$  et le taux de chargement pour les différentes hypothèses considérées. Pour ces calculs, les coefficients partiels de sécurité ne sont pas pris en compte.

TABLEAU 2.4 – Taux de chargement des murs pour différentes hypothèses sur la résistance de la pierre et du mortier

	Mur chargé Pham et al. [3] $f_m = 2,5$ MPa	Mur chargé Pham et al. [3] $f_m$ vraie	Mur chargé (Cette thèse) $f_m = 2,5$ MPa	Mur chargé (Cette thèse) $f_m$ vraie
$f_b$ (MPa)	7,4	7,4	5,3	5,3
$f_m$ (MPa)	2,5	0,5	2,5	0,5
$f$ (MPa)	2,4	1,5	1,9	1,2
$N_R$ (kN/m)	350	215	276	169
Taux de chargement (125 kN/m)	N.A.	N.A.	45 %	74 %
Taux de chargement (250 kN/m)	70 %	116 %	91 %	148 %

Les essais ayant été dimensionnés en prenant en compte une résistance en compression du mortier  $f_m = 2,5$  MPa, nous garderons les taux de chargement correspondants par la suite, c'est-à-dire un taux de chargement de 70 % pour l'essai de Pham et al. [3], et un taux de chargement de 45 % pour l'essai présenté dans cette thèse.

On peut tout de même noter que, pour les deux essais, le chargement de 250 kN/m est bien au-delà de la résistance en compression à température ambiante. Cette détermination empirique de la résistance en compression pourrait donc conduire à surdimensionner les murs de maçonnerie en pierre naturelle.

## 5.2 Déformée et chargement

La figure 2.33 représente l'évolution de la flèche mesurée par le capteur LVDT au centre du mur pour les trois essais considérés. Il apparaît que la flèche mesurée lors de l'essai non-chargé (Pham et al. [3]) après 25 min d'exposition au feu vaut 34 mm, et est donc 4,9

fois plus élevée que celle de l'essai présenté dans la partie 3, chargé à 45 % de la charge limite selon l'Eurocode 6, et 6,8 fois plus élevée que celle de l'essai chargé à 70 % de la charge limite selon l'Eurocode 6 (de Pham et al. [3]).

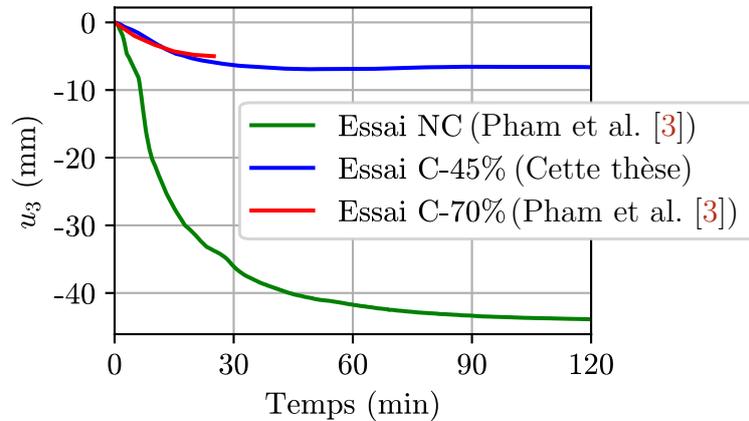


FIGURE 2.33 – Flèche mesurée par le capteur LVDT au centre du mur pour les trois essais considérés

On peut également noter que, pour les deux essais qui ont duré 120 min ou plus, la courbure thermique se développe principalement pendant les 30 premières minutes. Pour l'essai non-chargé, la flèche vaut 36 mm à 30 min, ce qui correspond à 82 % de la flèche après 120 min d'exposition (44 mm). Pour l'essai chargé à 45 %, elle vaut 6,3 mm à 30 min, ce qui correspond à 91 % de la flèche à 150 min (juste avant que le chargement vertical ne soit modifié). Sur un mur chargé, on semble donc atteindre la flèche maximale plus rapidement, mais elle est bien plus faible que sur un mur non-chargé.

Ce phénomène pourrait être expliqué par le décalage du "plan neutre" du mur, tel que schématisé sur la figure 2.34. En effet, à l'état initial, les propriétés mécaniques du mur sont symétriques par rapport à son plan médian dans l'épaisseur. Le gradient thermique dû au feu entraîne une dégradation hétérogène des propriétés des matériaux, et donc un décalage de l'axe neutre par rapport au plan médian du mur. Un chargement vertical initialement centré par rapport à ce plan médian n'est donc plus un chargement de compression pure, ce qui peut avoir une influence sur la déformée du mur. La courbure entraînée par ce phénomène est alors inversée par rapport à la courbure thermique (voir figure 2.34). L'influence du chargement vertical, toutes conditions aux limites identiques par ailleurs, sera étudiée dans le chapitre 3 portant sur la détermination de la déformée.

Les figures 2.35 et 2.36 présentent quelques profils de déformée obtenus par corrélation d'images pour ces trois essais. Il est intéressant de noter que pour l'essai non-chargé, la flèche maximale est obtenue au centre du mur, alors que pour les essais chargés, elle est obtenue un peu plus haut que le centre du mur. Pour l'essai chargé de Pham et al. [3], elle est également excentrée par rapport à une ligne verticale à mi-largeur, probablement à cause du développement de fissures verticales.

Cette différence de profil de déformée suggère une différence de conditions aux limites

pour le mur entre les essais chargés et non-chargé. Pour rappel, le bas du mur est relié au cadre par un lit de mortier de 20 mm d'épaisseur. Pour l'essai non-chargé, le haut du mur est relié à la poutre supérieure par un lit de mortier de 67 mm, tandis que pour les essais chargés, le lit de mortier supérieur a une épaisseur de 55 mm et est recouvert d'une trame d'assise en polymère. Cette dernière ne permet pas d'avoir la même adhérence entre la poutre supérieure et le mur qu'entre le mur et le bas du cadre de chargement.

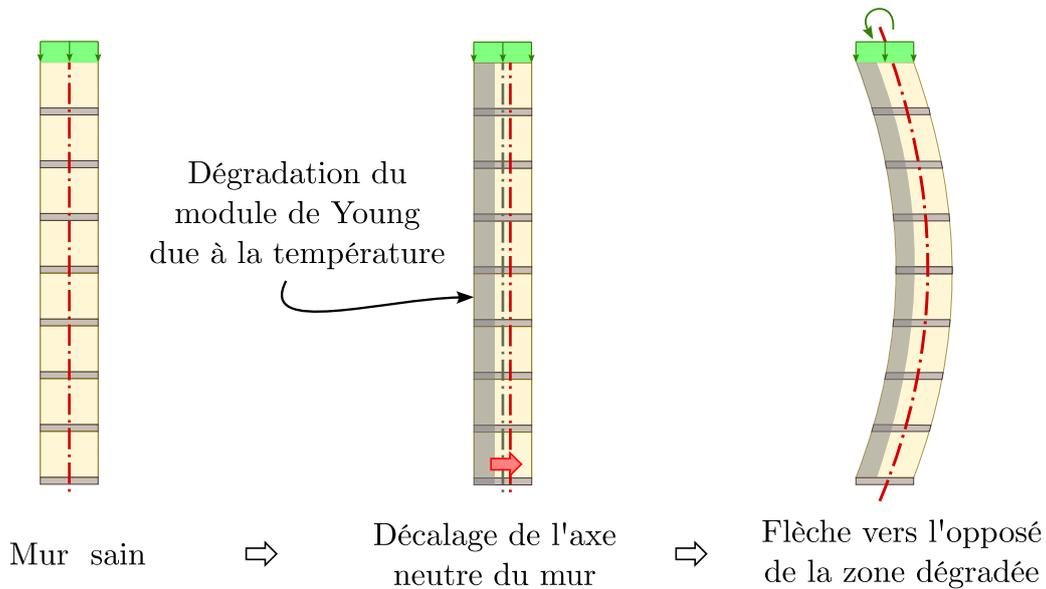


FIGURE 2.34 – Schématisation du décalage de l'axe neutre dû à la dégradation des matériaux en fonction de la température

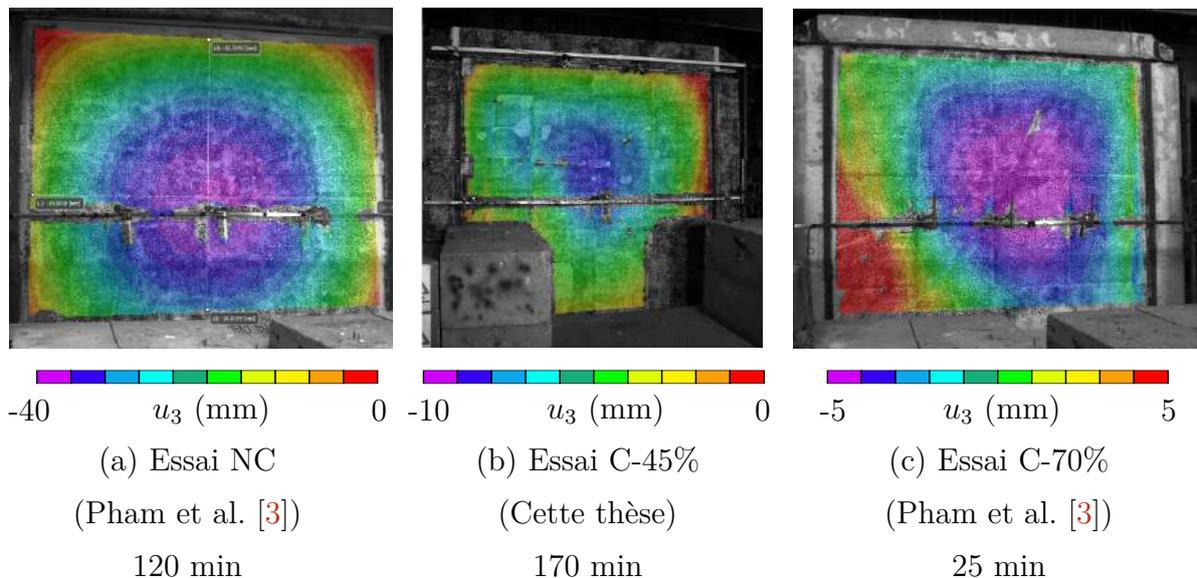


FIGURE 2.35 – Distribution de flèche obtenue en fin d'essai pour les trois essais considérés

Lors de l'essai non-chargé, une fissure a été observée le long du lit de mortier reliant le cadre de chargement au mur. Ce type de fissure n'a pas été observé pour les deux

essais chargés. La rupture de l'interface mur-cadre de chargement semble donc dépendre du chargement vertical appliqué, et pourrait se traduire dans la modélisation par des conditions aux limites différentes pour ces deux types d'essais. La figure 2.37 représente schématiquement ce phénomène.

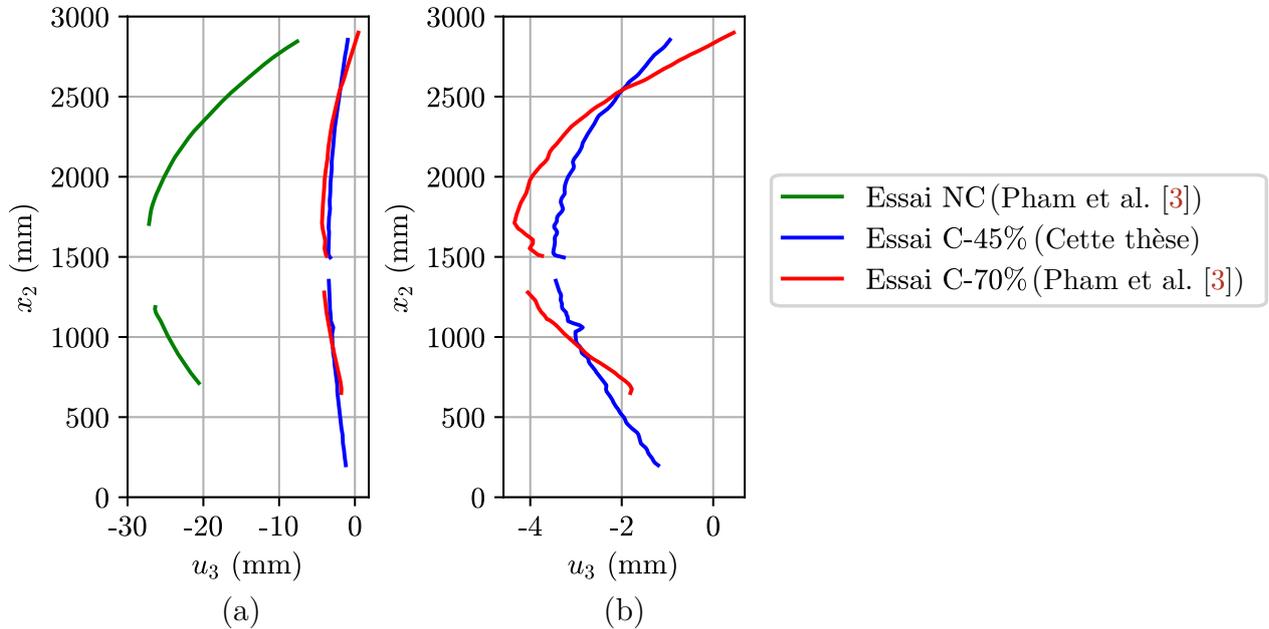


FIGURE 2.36 – Profils de déformée obtenus par corrélation d’images sur une ligne verticale située à mi-largeur du mur après 15 min d’exposition au feu pour les trois essais considérés

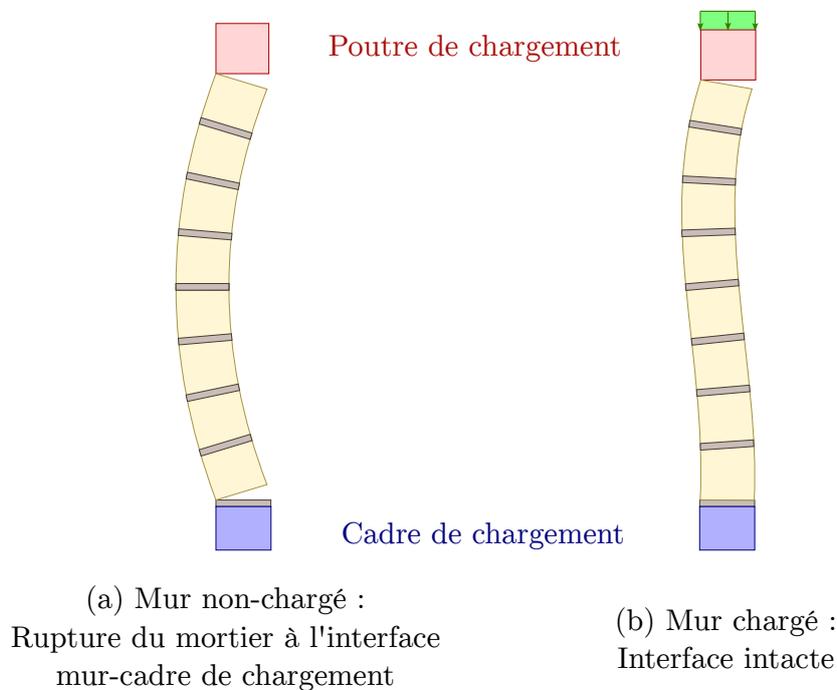


FIGURE 2.37 – Schématisation des conditions aux limites expérimentales pour différents niveaux de chargements

### 5.3 Charge de rupture et mode de ruine du mur

La résistance au feu est définie comme le temps durant lequel un élément de construction conserve ses propriétés physiques et mécaniques lors d'un incendie. Dans le cas présent, nous nous intéressons uniquement au critère de capacité portante du mur, tel qu'il est défini par la norme NF EN 1363-1 [96], et qui correspond donc au temps pendant lequel le mur peut soutenir une charge mécanique donnée.

Le tableau 2.5 récapitule la résistance au feu obtenue pour les trois essais considérés. On notera que, pour l'essai présenté dans ce chapitre, la résistance au feu n'est que de 150 min. En effet, celle-ci est définie pour un chargement constant, et ayant modifié le chargement mécanique après 150 min d'essai, nous sortons du champ d'application de la norme. De plus, la résistance au feu pour un essai non-chargé est supérieure, et non égale, à 120 min. Il s'agit d'une durée standard pour un essai sur un tel matériau. Il n'est donc pas possible de savoir quelle aurait été la résistance au feu pour un mur non-chargé, ni de la comparer à celle d'un mur chargé à 45 % de la charge limite à température ambiante.

TABLEAU 2.5 – Résistance au feu des différents murs testés selon la norme NF EN 1363-1

Essai	Résistance au feu
Pham et al. [3] (chargé - 70 %)	27 min
Pham et al. [3] (non-chargé)	> 120 min
Cette thèse (chargé - 45 %)	> 150 min

En revanche, la chute de résistance au feu entre le mur chargé à 45 % et celui chargé à 70 % de la charge limite à température ambiante selon l'Eurocode 6 est tout à fait notable puisque cette dernière passe de plus de 150 min à seulement 27 min. De plus, les deux murs ont rompu pour un chargement mécanique identique (250 kN/m), mais pour des temps d'exposition au feu très différents. C'est d'autant plus surprenant que les pierres utilisées dans le mur présenté dans ce chapitre avaient une résistance à la compression 28 % plus faible que celles utilisées dans l'essai de Pham et al. [3]. Plusieurs hypothèses peuvent être formulées pour tenter d'expliquer ce résultat :

- Le gradient thermique est plus important après 30 min d'exposition au feu qu'après 180 min. En effet, la pierre est un matériau très isolant, et la chaleur se diffuse lentement. Ce gradient thermique entraîne une dilatation différentielle des matériaux dans l'épaisseur du mur, qui elle-même induit des contraintes thermiques. Le gradient thermique étant plus important après 30 min d'exposition au feu qu'après 180 min, les efforts thermiques le sont peut-être également, et la combinaison des efforts thermiques et mécaniques pourrait être plus critique après 30 min d'exposition au feu qu'après 180 min. L'historique de chargement pourrait donc impacter le temps

de résistance au feu.

- La teneur en eau du mur testé dans cette thèse était plus élevée que celle du mur testé par Pham et al. [3], ce qui a ralenti la cinétique de montée en température dans le mur, et qui a pu, en quelque sorte, "protéger" le mur.
- La pierre et le mortier sont des matériaux naturels qui peuvent présenter une certaine variabilité dans leurs propriétés mécaniques ou des défauts.
- La construction manuelle du mur induit également une source d'incertitude sur le positionnement des blocs les uns par rapport aux autres (évaluée à 7 mm dans la direction hors-plan pour notre essai), et sur la verticalité de l'ensemble.
- Le dispositif expérimental en lui-même peut également être une source d'imprécisions. En particulier, il existe une incertitude de positionnement du système de chargement vertical de l'ordre de 1 à 2 cm dans la direction transversale du mur.

Bien que les deux murs considérés aient rompu pour des temps d'exposition au feu très différents, leurs mécanismes de rupture présentent des similitudes. Localement, les blocs des rangs inférieurs sont fendus dans leur épaisseur dans le plan du mur pour les deux essais, et des pertes de matière sont observées tant du côté exposé que du côté non-exposé. Enfin, on retrouve aussi une fissure diagonale, qui débute dans le coin supérieur droit sur l'essai de Pham et al. [3].

Pour conclure sur cette comparaison, on note que la résistance au feu semble diminuer avec le chargement mécanique. Cette conclusion, bien qu'apparaissant assez évidente, est en contradiction avec les observations de Byrne [45] qui montrait que le chargement le plus critique était de l'ordre de 50 % de la charge limite à froid. Plusieurs différences peuvent expliquer cela : le type de blocs utilisés (creux pour Byrne, pleins ici), l'élanement (entre 17,5 et 25 pour Bryne, 15 ici), et enfin la référence prise pour le calcul de la charge limite à froid (Australian Standard AS 1640-1974 pour Bryne, Eurocode 6 ici). Il paraît cependant nécessaire de réaliser des calculs et/ou des essais supplémentaires pour conclure sur l'effet du chargement mécanique sur la résistance au feu des murs en pierre naturelle massive.

## 6 Remarques finales

Ce chapitre a présenté, du point de vue expérimental et au travers d'un essai sur un mur à l'échelle 1, les principaux phénomènes se produisant lorsqu'un mur est exposé au feu. Cet essai a montré que la flèche thermique était relativement faible par rapport à l'épaisseur du mur. Les déplacements sont affectés par la présence de fissures, qui apparaissent dans les joints et se développent verticalement au travers de la pierre. Enfin, la corrélation d'images nous a permis d'avoir une idée du mécanisme de rupture du mur. D'un point de vue "sécurité", on note que la rupture peut se produire en direction opposée au feu. Ce type de rupture peut présenter un danger pour des personnes stationnées à l'extérieur du bâtiment après son évacuation, voire pour les bâtiments avoisinants.

En se concentrant sur les phénomènes thermiques, on a pu voir que la température dans le mortier était en général plus faible que la température dans la pierre, mais qu'elle pouvait être affectée par la présence de fissures à l'interface entre les deux constituants. On a également montré que les températures mesurées dépendaient assez fortement de la teneur en eau de la pierre, et qu'il était par conséquent difficile de les reproduire par un calcul purement thermique. Compte-tenu de cette observation, ainsi que du manque de données dans la littérature sur la pierre et le mortier étudiés, nous nous baserons sur les températures mesurées, plutôt que sur les températures calculées, pour les modélisations proposées.

La comparaison avec les essais de Pham et al. [3] a principalement montré qu'un chargement mécanique de compression, appliqué en tête de mur, fait diminuer la flèche thermique. Il semble également, en comparant l'essai chargé de Pham et al. [3] à l'essai chargé présenté dans ce chapitre, qu'augmenter le chargement mécanique au-delà d'une certaine valeur diminue drastiquement la résistance au feu.

On notera cependant que les essais à l'échelle 1 décrits dans ce chapitre présentent une limite, commune à tous les essais de grande envergure : compte-tenu de la lourdeur de mise en œuvre de ces essais, il n'est pas toujours possible d'effectuer des essais de répétabilité. Dans le cas de matériaux fragiles, comme la pierre ici, la dispersion des résultats peut être importante et rendre plus difficile l'interprétation des essais. Pour cette raison, il peut être intéressant de proposer des essais à plus petite échelle, donc plus facilement répétables, qui permettent de valider partiellement les modélisations proposées. Il peut alors s'agir d'essais thermiques uniquement, qui permettent d'avoir une meilleure connaissance du gradient thermique, ou d'essais de résistance mécanique à température ambiante, comme cela sera proposé dans le chapitre 8.

\*        \*  
\*  
\*  
\*



# Chapitre 3

## Détermination de la déformée thermomécanique d'un mur de maçonnerie

**Résumé :** *Comme mentionné dans l'introduction ainsi que dans le chapitre 2, lorsqu'un mur est exposé au feu sur une de ses faces, il tend à se courber en direction de ce dernier. Le développement de cette courbure thermique a alors pour effet d'excentrer les charges verticales initialement appliqués en tête de mur, provenant des étages supérieurs, par rapport à son plan médian. Un tel excentrement génère alors des efforts additionnels de type moments fléchissants, qui peuvent menacer la stabilité du mur. Dans ce chapitre, on propose une méthode d'homogénéisation thermoélastique permettant de déterminer la déformée thermomécanique du mur. Les déformées thermomécaniques obtenues sont ensuite comparées aux résultats expérimentaux du chapitre 2 ainsi qu'aux résultats de l'essai non-chargé de Pham et al. [3]*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>75</b>
<b>2</b>	<b>Détermination de la loi de comportement macroscopique du mur de maçonnerie</b> . . . . .	<b>76</b>
2.1	Position du problème auxiliaire . . . . .	76
2.2	Résultat des simulations numériques . . . . .	80
<b>3</b>	<b>Modélisation du mur par une plaque homogène</b> . . . . .	<b>85</b>
3.1	Position du problème . . . . .	85
3.2	Exemple applicatif . . . . .	89
3.3	Influence des conditions aux limites sur la déformée thermique . . . . .	95
3.4	Note sur l'effet $P - \delta$ (ou effet du second ordre) . . . . .	100
<b>4</b>	<b>Comparaison aux résultats expérimentaux</b> . . . . .	<b>100</b>
4.1	Résultats de l'essai non-chargé de Pham et al. [3] . . . . .	100

4.2	Résultats de l'essai chargé réalisé dans le cadre de cette thèse (Chapitre 2) . . . . .	102
4.3	Quel champ de température choisir? . . . . .	106
4.4	Remarques finales . . . . .	107
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>107</b>

---

**Note :** Les travaux présentés dans ce chapitre ont été présentés dans les deux publications suivantes :

E. Donval, D.T. Pham, G. Hassen, P. de Buhan, D. Pallix. Determination of the deformed shape of a natural stone masonry wall by a homogenization method. In *IOP Conference Series : Material Sciences and Engineering* 2021.

E. Donval, D.T. Pham, G. Hassen, P. de Buhan, D. Pallix. A numerical homogenization method for the determination of the thermal bowing of a masonry wall exposed to fire : Application to natural stone masonry. *Engineering Structures* 2022.

Ce chapitre reprend le cadre théorique présenté dans ces deux papiers, mais les données d'entrée des modèles ont été adaptés pour inclure des résultats expérimentaux postérieurs à ces deux publications.

# 1 Introduction

Dans le chapitre 2, nous avons mis en évidence expérimentalement la présence d'une courbure thermique du mur lorsqu'il est exposé au feu. Comme montré dans le chapitre introductif, ce phénomène est bien connu, tant pour les murs en béton que pour les murs de maçonnerie, et plusieurs modèles ont été proposés pour tenter de le simuler par le calcul. On peut alors distinguer deux types de méthodes : des méthodes analytiques, modélisant le mur par une poutre ou une plaque homogène, et des calculs plus avancés, considérant le mur en 2D sous des hypothèses de contraintes ou de déformations planes, ou en 3D. Si les méthodes analytiques sont adaptées au travail de l'ingénieur de par les résultats immédiats qu'elles proposent, elles ne permettent pas la prise en compte du caractère hétérogène de la maçonnerie. Les approches plus avancées, quant à elles, présentent soit l'inconvénient de modéliser le mur en 2D et de ne pas capturer sa courbure horizontale, soit, pour les méthodes tridimensionnelles, de nécessiter un temps de calcul très long. Par ailleurs, les paramètres d'entrée de ces modèles sont difficile à évaluer, et leur détermination ne repose pas sur des essais de caractérisation des matériaux, comme il conviendrait de faire pour une modélisation à visée applicative pour l'ingénieur.

Dans ce chapitre, une procédure d'homogénéisation en trois étapes, visant à déterminer la courbure thermomécanique d'un mur exposé au feu, est proposée. Au travers de cette procédure, on prend en compte à la fois le caractère initialement hétérogène de la maçonnerie, dû à la présence de joints, et l'hétérogénéité dans la direction transversale du mur provenant de la dégradation des propriétés thermoélastiques des matériaux en fonction de la température.

La procédure d'homogénéisation suit les trois étapes suivantes :

- **Étape 1 :** La pierre et le mortier étant incombustibles et n'ayant pas présenté expérimentalement d'écaillage, on suppose que l'effet du feu se réduit à l'augmentation de la température dans l'épaisseur du mur. La détermination de la distribution de température peut se baser sur des mesures expérimentales ou sur un calcul thermique numérique.
- **Étape 2 :** Une fois que la distribution de température est connue, une procédure de changement d'échelle permet de déterminer les caractéristiques thermoélastiques d'une plaque homogène équivalente. Cette procédure d'homogénéisation, présentée dans la partie 2, consiste à résoudre un problème thermoélastique dit "auxiliaire", dans lequel le chargement thermique correspond à la distribution de température précédemment déterminée, tandis que le chargement mécanique sera défini plus tard dans ce chapitre.
- **Étape 3 :** A partir des propriétés thermoélastiques homogénéisées ainsi déterminées, il devient possible de déterminer le comportement, et plus particulièrement la déformée thermique, du mur modélisé par une plaque homogène. La mise en œuvre numérique de ce problème sera présentée dans la partie 3.

Ces étapes sont résumées sur la figure 3.1.

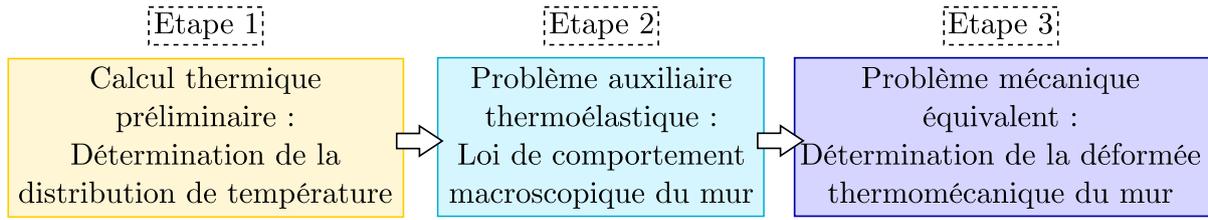


FIGURE 3.1 – Résumé de la procédure d'homogénéisation thermoélastique proposée dans ce chapitre

Les résultats de cette procédure d'homogénéisation seront comparés à ceux d'une approche thermoélastique numérique directe, puis aux résultats expérimentaux de Pham et al. [3] ainsi qu'aux résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 2.

## 2 Détermination de la loi de comportement macroscopique du mur de maçonnerie

### 2.1 Position du problème auxiliaire

#### 2.1.1 Définition de la cellule de base

Le mur en pierre massive, représenté sur la figure 3.2, est composé d'un arrangement périodique de blocs de longueur  $L$ , de hauteur  $H$  et d'épaisseur  $h$ . Ces blocs sont assemblés par des joints de mortier d'épaisseur  $t$ . De cet arrangement périodique, on peut extraire une cellule de base, représentative de l'assemblage en termes de géométrie et de matériaux. En d'autres termes, le mur peut être reconstruit par l'assemblage de cellules de base obtenues en translatant simplement la cellule de base initiale dans le plan  $(Ox_1x_2)$ . La figure 3.2 représente la cellule de base choisie.

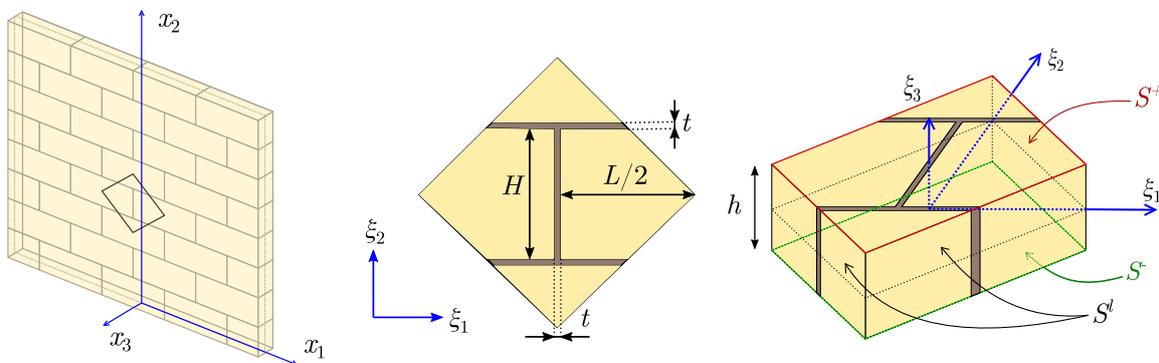


FIGURE 3.2 – Mur en maçonnerie arrangée de manière périodique et cellule de base correspondante

En soumettant cette cellule de base à un chargement thermomécanique bien choisi, décrit dans la suite de cette partie, la résolution d'un *problème auxiliaire thermoélastique* permet d'obtenir les propriétés thermomécaniques d'une plaque homogène équivalente.

### 2.1.2 Mode de chargement

La cellule de base est exposée à la fois à un chargement thermique et à un chargement mécanique.

Le chargement thermique, qui a pour effet d'induire des déformations thermiques est appliqué par la donnée d'une distribution de température dans l'épaisseur du mur, qui peut être soit déterminée par un calcul thermique préliminaire, soit mesurée expérimentalement. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'en raison de la présence d'eau dans la pierre et dans le mortier, le calcul purement thermique tendait à surestimer légèrement les températures comparativement aux essais. Pour cette raison, nous nous baserons sur les températures expérimentales par la suite. Par ailleurs, nous avons vu que les températures étaient légèrement différentes entre la pierre et le mortier. Bien que le calcul proposé permette de tenir compte de cette hétérogénéité, nous avons choisi de supposer que la température dans le mur était homogène dans des plans parallèles au plan du mur et égale à celle mesurée dans la pierre. En effet, nous ne disposons des températures dans le mortier que pour des essais de 120 min. Les températures dans le mortier étant légèrement plus faibles que celles dans la pierre, cette approximation devrait être sécuritaire.

En plus du chargement thermique, la cellule de base est soumise au chargement mécanique suivant, similaire à celui proposé par Mistler et al. [76] à température ambiante :

- (a) Les forces de volume sont supposées nulles ;
- (b) Les faces de normale  $\pm e_3$  sont libres de contraintes ;
- (c) Le vecteur contrainte est antipériodique sur les faces latérales de la cellule de base ;
- (d) Le déplacement sur ces mêmes faces latérales est prescrit de la forme (Bourgeois [103]) :

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\chi} \cdot \underline{\xi} + \frac{1}{2} (\underline{\xi} \cdot \underline{\chi} \cdot \underline{\xi}) e_3 + \underline{u}^{per}(\underline{\xi}) \quad (3.1)$$

où  $\underline{u}^{per}(\underline{\xi})$  désigne la fluctuation périodique du champ de déplacement,  $\underline{F}$  et  $\underline{\chi}$  sont des tenseurs plans d'ordre 2 (i.e.  $F_{i3} = F_{3i} = 0$  ;  $\chi_{i3} = 0$ ), et  $\underline{\chi}$  est un tenseur symétrique.

Le tenseur des déformations linéarisées s'écrit, en tout point :

$$\underline{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\underline{\text{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u}) = \underline{\varepsilon} - \xi_3 \underline{\chi} + \underline{\varepsilon}^{per} \quad (3.2)$$

où on a introduit le tenseur des déformations planes macroscopiques  $\underline{\varepsilon} = (\underline{F} + {}^t \underline{F})/2$ , ainsi que le tenseur des déformations  $\underline{\varepsilon}^{per}$  associées à la fluctuation périodique du déplacement  $\underline{u}^{per}$ .

Le principe des travaux virtuels montre alors que pour tout champ de contrainte  $\underline{\underline{\sigma}}$  statiquement admissible (i.e. vérifiant l'équilibre sans forces de volume (a) ainsi que les conditions aux limites (b) et (c)), et pour tout champ de déplacement cinématiquement admissible (i.e. vérifiant la condition (d) et l'équation (3.1)), le travail des efforts intérieurs peut s'écrire (Bourgeois [103]) :

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\varepsilon}} d\Omega = |S|(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\chi}}) \quad (3.3)$$

ce qui montre que la cellule de base est soumise à un mode de chargement à six paramètres.

En notant  $\Omega$  le volume de la cellule de base, et  $|S| = (L + t)(H + t)$  l'aire de sa section dans le plan du mur, les paramètres de chargement sont les composantes du tenseur des efforts membranaires  $\underline{\underline{N}}$  et du tenseur des moments fléchissants  $\underline{\underline{M}}$ , définis par :

$$\underline{\underline{N}} = \frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \quad \text{et} \quad \underline{\underline{M}} = -\frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \xi_3 \underline{\underline{\sigma}} d\Omega \quad (3.4)$$

Ces paramètres sont en dualité avec les composantes du tenseur des déformations membranaires  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  et du tenseur des courbures  $\underline{\underline{\chi}}$ .

### 2.1.3 Loi de comportement thermoélastique de la pierre et du mortier

En supposant que la pierre et le mortier sont tous les deux des matériaux thermoélastiques linéaires, la loi de comportement s'écrit, en tout point de la cellule de base :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\xi) = \lambda(\xi) \text{tr}(\underline{\underline{\varepsilon}}(\xi) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\xi)) \underline{\underline{1}} + 2\mu(\xi) (\underline{\underline{\varepsilon}}(\xi) - \underline{\underline{\varepsilon}}^{th}(\xi)) \quad (3.5)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les deux coefficients de Lamé, et peuvent être reliés au module de Young  $E$  et au coefficient de Poisson  $\nu$  par les relations classiques suivantes :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \text{et} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.6)$$

Dans l'équation (3.5), la dilatation thermique  $\underline{\underline{\varepsilon}}^{th}$  est la déformation thermique, définie par :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{th} = \alpha(T(\xi_3), \xi_3)(T(\xi_3) - T_0) \underline{\underline{1}} \quad (3.7)$$

où  $T(\xi_3)$  désigne la température à la côte  $\xi_3$ ,  $\alpha(T(\xi_3), \xi_3)$  est le coefficient de dilatation thermique sécant, qui dépend de la température et du matériau considéré, et  $T_0 = 20^\circ\text{C}$  est la température de référence pour la mesure du coefficient de dilatation thermique. Le coefficient de dilatation thermique sécant (isotrope) est alors défini pour chaque matériau par :

$$\alpha(T) = \frac{\Delta L(T)}{L} \frac{1}{T - T_0} \quad (3.8)$$

où  $\Delta L(T)/L$  correspond à la dilatation thermique relative  $\Delta L$  d'une éprouvette de longueur  $L$  chauffée de manière uniforme à une certaine température  $T$ .

A partir du mode de chargement défini plus haut, on peut alors montrer que la loi de comportement d'une plaque homogénéisée s'écrit (Cecchi et Sab [104]) :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{N}} &= \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{N}}^\theta \\ \underline{\underline{M}} &= -\underline{\underline{B}} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{M}}^\theta\end{aligned}\quad (3.9)$$

avec :

$$\underline{\underline{N}}^\theta = \frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}}^\theta d\Omega \quad \text{et} \quad \underline{\underline{M}}^\theta = -\frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \xi_3 \underline{\underline{\sigma}}^\theta d\Omega \quad (3.10)$$

Dans l'expression précédente,  $\underline{\underline{\sigma}}^\theta$  est le champ de contrainte dû au chargement thermique lorsque les déformations membranaires et de flexion sont fixées égales à zéro. Dans l'équation (3.9),  $\underline{\underline{A}}$  est le tenseur des raideurs membranaires et  $\underline{\underline{D}}$  est le tenseur de raideur flexionnelle. Le tenseur  $\underline{\underline{B}}$  est un tenseur de couplage qui relie les efforts plans aux courbures, et les moments fléchissants aux déformations dans le plan. Ce terme est nul lorsque le mur est symétrique par rapport à son plan médian, cas dans lequel des efforts plans n'engendreront que des déformations dans le plan, et des moments fléchissants n'engendreront que des courbures. Ici, la dégradation des propriétés mécaniques dues au gradient thermique dans l'épaisseur du mur conduit à une perte de symétrie par rapport au plan médian, et donc à une augmentation de la valeur des composantes du tenseur de couplage.

Les matériaux constitutifs de la cellule de base étant isotropes, la loi de comportement homogénéisée se réécrit :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{1111} & A_{1122} & 0 \\ A_{1122} & A_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & A_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & 0 \\ B_{1122} & B_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{11}^\theta \\ N_{22}^\theta \\ N_{12}^\theta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} B_{1111} & B_{1122} & 0 \\ B_{1122} & B_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & B_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{1111} & D_{1122} & 0 \\ D_{1122} & D_{2222} & 0 \\ 0 & 0 & D_{1212} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{11}^\theta \\ M_{22}^\theta \\ M_{12}^\theta \end{pmatrix}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Dans le cas particulier où la plaque est initialement homogène (ce qui revient à avoir des propriétés identiques pour les deux matériaux), la loi de comportement se simplifie de la manière suivante (Yang [91]) :

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \left( A \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} - B \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} \right) + N^\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{pmatrix} \left( -B \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{pmatrix} + D \begin{pmatrix} \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{pmatrix} \right) + M^\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} E(\xi_3) d\xi_3 \quad ; \quad B = \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3 E(\xi_3) d\xi_3 \quad ; \\
 D &= \frac{1}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3^2 E(\xi_3) d\xi_3 \quad ; \\
 N^\theta &= -\frac{1}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} E(\xi_3) \alpha(\xi_3) T(\xi_3) d\xi_3 \quad ; \quad M^\theta = \frac{1}{1 - \nu} \int_{-h/2}^{h/2} \xi_3 E(\xi_3) \alpha(\xi_3) T(\xi_3) d\xi_3
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

## 2.2 Résultat des simulations numériques

A titre d'exemple, l'approche décrite dans la sous-partie 2.1 est utilisée pour déterminer les raideurs et efforts thermiques macroscopiques du mur présenté dans le chapitre 2. Les blocs mesurent 720 mm de long, 360 mm de haut, 200 mm d'épaisseur, et sont assemblés par des joints de 10 mm d'épaisseur.

### 2.2.1 Propriétés thermomécaniques des matériaux constitutifs

Les blocs sont constitués de calcaire de Saint-Vaast. Comme présenté dans le chapitre précédent, nous avons mesuré un module de Young d'environ  $E^b = 5$  GPa pour ces blocs à température ambiante. L'évolution relative du module de Young et du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température n'étant pas connue, nous considérerons qu'ils évoluent comme ceux du calcaire de Saint-Maximin, mesurés par Vigroux et al. [8] et présentés sur la figure 3.3. On supposera également que le coefficient de Poisson du calcaire de Saint-Vaast est identique à celui du calcaire de Saint-Maximin ( $\nu^b = 0,28$ ), et qu'il n'évolue pas avec la température.

Concernant le mortier, il existe très peu de données expérimentales décrivant son comportement à haute température, et celles-ci sont très variables du fait de la variabilité des mortiers. En particulier, il n'existe malheureusement à ce jour aucune donnée concernant le coefficient de dilatation thermique des mortiers de chaux hydraulique naturelle. Pour la suite de cette modélisation, nous avons choisi de reprendre le coefficient de dilatation thermique proposé par Gnanakrishnan [105] et repris par Nadjai et al. [86] pour un mortier

de ciment. L'évolution du coefficient de dilatation thermique sécant correspondant à ces données en fonction de la température est représentée sur la figure 3.3 (b).

Concernant l'évolution du module de Young en fonction de la température, on peut citer les travaux de Patcha et al. [36] sur différents mortiers de chaux. L'évolution du module de Young par rapport à sa valeur initiale est donnée sur la figure 3.3 (a).

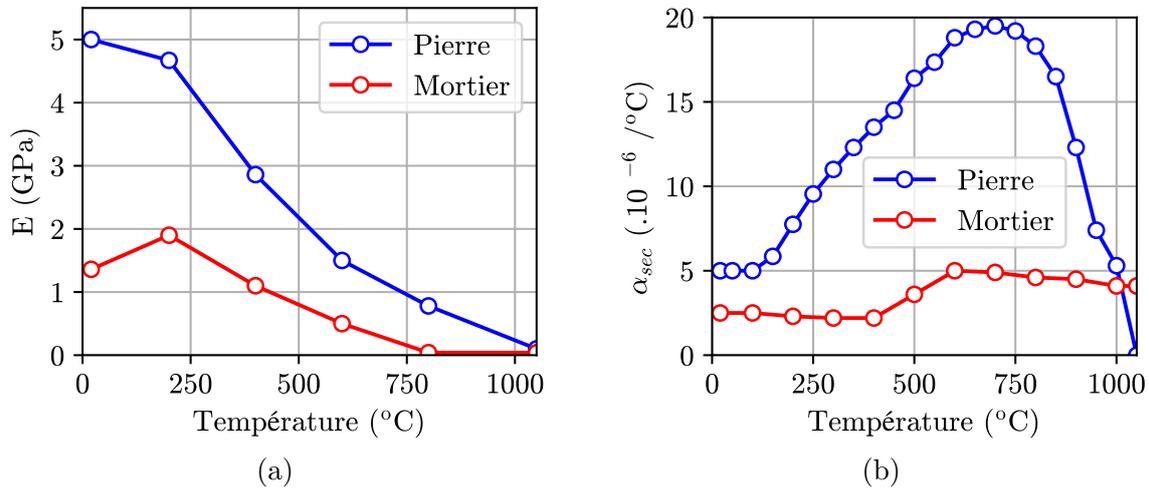


FIGURE 3.3 – Evolution du module de Young (a) et du coefficient de dilatation thermique sécant (b) de la pierre et du mortier en fonction de la température

### 2.2.2 Détermination de la distribution de température dans l'épaisseur du mur

Dans le chapitre 2, nous avons mesuré la distribution de température dans le mur, puis nous l'avons comparée à un calcul thermique, prenant en compte ou non la teneur en eau des matériaux. Il est alors apparu que la modélisation numérique correspondait plutôt bien aux mesures. Cependant, étant donné le nombre d'hypothèses faites pour le calcul numérique, il nous apparaît plus fiable de nous baser directement sur la distribution de température mesurée. La figure 3.4 représente les distributions de température prises en compte pour les calculs. Elles correspondent aux températures mesurées par Pham et al. [3]. L'influence des données d'entrée en termes de température sera étudiée dans la partie 4.3, et une comparaison avec les résultats obtenus dans le chapitre 2, à partir des températures déterminées dans ce même chapitre, sera présentée dans la partie 4.2.

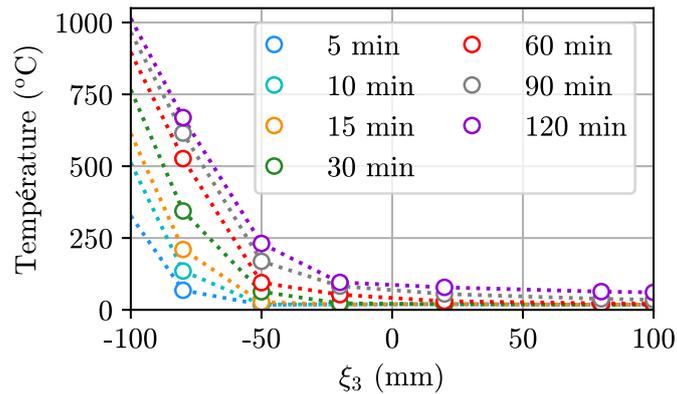


FIGURE 3.4 – Distributions de températures mesurées par Pham et al. [3] pour différents temps d'exposition au feu

### 2.2.3 Modèle de calcul par éléments finis

Le problème thermoélastique présenté dans cette partie est résolu en utilisant le logiciel de calcul par éléments finis Cast3M [106]. La détermination complète de la loi de comportement macroscopique requiert la réalisation de sept calculs thermoélastiques : un pour chaque composante du tenseur des déformations membranaires et du tenseur des courbures, et un pour les efforts thermiques induits.

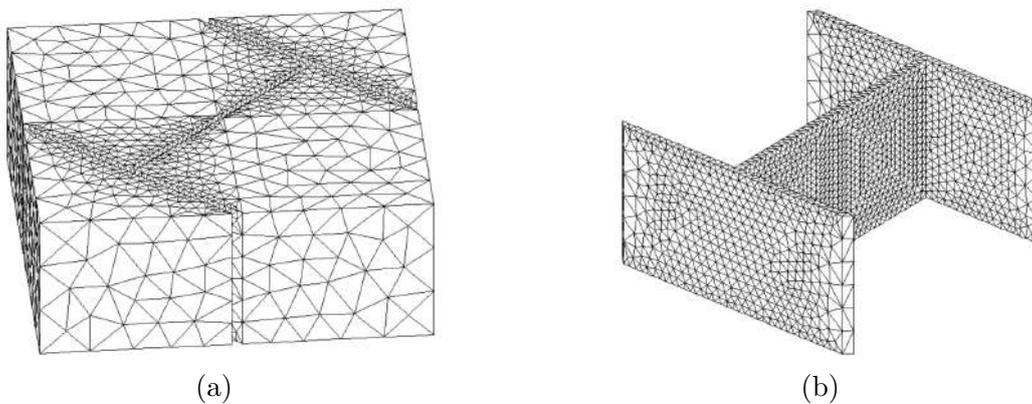


FIGURE 3.5 – Maillage des blocs (a) et des joints (b)

La figure 3.5 représente le maillage utilisé pour ces calculs. Il est composé de 67 602 nœuds et de 47 967 éléments tétraédriques quadratiques à 10 nœuds. Chacun des sept calculs dure environ 2 min sur un PC portable équipé d'un processeur Intel Core i5 10th gen. et de 8 Go de RAM.

### 2.2.4 Détermination numérique des raideurs et efforts thermiques

La figure 3.6 et la figure 3.7 représentent quelques chargements appliqués à la cellule de base. La figure 3.6 (a) représente la distribution de température appliquée à la cellule

de base pour 120 min d'exposition au feu, la distribution correspondante de module de Young (dégradé par la température) étant représentée sur la figure 3.6 (b).

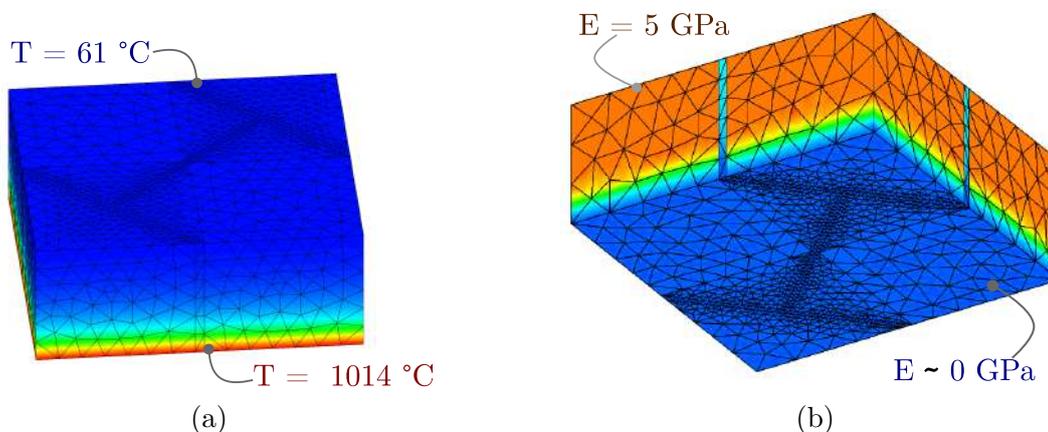


FIGURE 3.6 – (a) Distribution de température prescrite pour 120 min d'exposition au feu ; (b) Module de Young correspondant

La figure 3.7 représente les déformées de la cellule de base lorsqu'elle est soumise à des chargements d'extension uniaxiale et de cisaillement permettant d'obtenir les composantes du tenseur des raideurs membranaires  $\underline{\underline{A}}$  et du tenseur de couplage  $\underline{\underline{B}}$ .

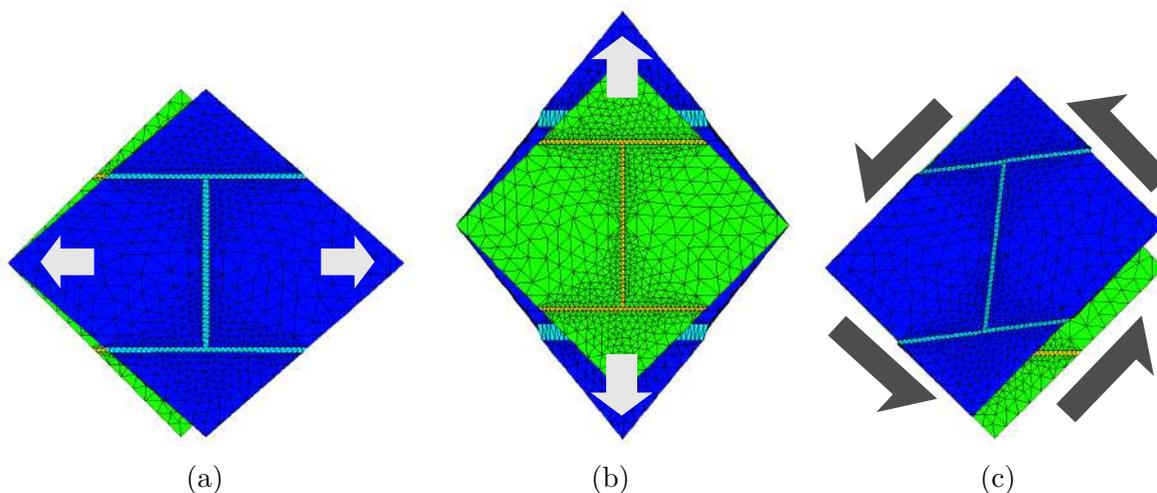


FIGURE 3.7 – Modes de chargement plans de la cellule de base : (a)  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$ , (b)  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$  et (c)  $\underline{\underline{\epsilon}} = (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)/2$  (vert et jaune : configuration initiale ; bleu : configuration déformée)

Les composantes des tenseurs de raideur ainsi que des tenseurs des efforts thermiques membranaires et des moments thermiques sont données dans le tableau 3.1.

On peut noter que :

- La différence entre les valeurs de  $A_{1111}$  et  $A_{2222}$ , ou  $N_{11}^\theta$  et  $N_{22}^\theta$  par exemple, met en évidence le caractère anisotrope du matériau homogénéisé. Cette différence reste toutefois relativement faible ;

- Comme on pouvait s'y attendre de par la présence de joints plus souples que les blocs, les raideurs homogénéisées sont plus faibles que celles d'un mur homogène composé de pierre uniquement, l'écart relatif étant de l'ordre de 5 à 12 % ;
- Les efforts thermiques généralisés sont entre 10 et 15 % plus faibles dans le cas hétérogène que dans le cas homogène. Cette différence peut avoir un impact significatif sur les efforts dans le mur, notamment lorsque les déplacements et rotations sont prescrits égaux à zéro aux bords du mur.
- Les efforts membranaires thermiques, qui correspondent aux efforts macroscopiques lorsque le déplacement de la cellule de base est bloqué, correspondent à des contraintes de l'ordre de 5,5 MPa, ce qui est légèrement supérieur à la résistance en compression de la pierre. Si le déplacement du mur était totalement restreint lors d'un incendie, il risquerait donc de rompre en compression à cause de ces efforts thermiques.

TABLEAU 3.1 – Composantes des tenseurs de raideur, des efforts thermiques et des moments fléchissants thermiques

Composante	Mur avec joints	Mur homogène	Ecart relatif (%)
$A_{1111}$ (N/m)	$8,55 \cdot 10^8$	$8,99 \cdot 10^8$	5,1
$A_{1122}$ (N/m)	$2,29 \cdot 10^8$	$2,51 \cdot 10^8$	9,6
$A_{2222}$ (N/m)	$8,40 \cdot 10^8$	$8,99 \cdot 10^8$	7,0
$A_{1212}$ (N/m)	$6,02 \cdot 10^8$	$6,47 \cdot 10^8$	7,5
$B_{1111}$ (N)	$1,26 \cdot 10^7$	$1,35 \cdot 10^7$	7,1
$B_{1122}$ (N)	$3,36 \cdot 10^6$	$3,77 \cdot 10^6$	12,2
$B_{2222}$ (N)	$1,24 \cdot 10^7$	$1,35 \cdot 10^7$	8,9
$B_{1212}$ (N)	$8,86 \cdot 10^6$	$9,69 \cdot 10^6$	9,4
$D_{1111}$ (Nm)	$2,33 \cdot 10^6$	$2,46 \cdot 10^6$	5,6
$D_{1122}$ (Nm)	$6,22 \cdot 10^5$	$6,90 \cdot 10^5$	10,9
$D_{2222}$ (Nm)	$2,29 \cdot 10^6$	$2,46 \cdot 10^6$	7,4
$D_{1212}$ (Nm)	$1,65 \cdot 10^6$	$1,77 \cdot 10^6$	7,2
$N_{11}^\theta$ (N/m)	$-1,14 \cdot 10^6$	$-1,29 \cdot 10^6$	13,2
$N_{22}^\theta$ (N/m)	$-1,12 \cdot 10^6$	$-1,29 \cdot 10^6$	15,2
$M_{11}^\theta$ (N)	$-5,47 \cdot 10^4$	$-6,00 \cdot 10^4$	9,7
$M_{22}^\theta$ (N)	$-5,35 \cdot 10^4$	$-6,00 \cdot 10^4$	12,1

Pour conclure, la résolution numérique du problème auxiliaire nous a permis, pour un temps de calcul très raisonnable (environ 15 min pour l'ensemble des 7 calculs sur un PC portable classique) de déterminer la loi de comportement macroscopique d'une plaque équivalente au mur de maçonnerie considéré.

### 3 Modélisation du mur par une plaque homogène

Une fois la loi de comportement macroscopique du mur déterminée, il devient alors possible de le modéliser par une plaque homogénéisée thermoélastique. Dans cette partie, le cadre théorique du modèle proposé est tout d'abord rappelé, puis un exemple applicatif, utilisant la loi de comportement macroscopique déterminée dans la partie 2, est proposé.

#### 3.1 Position du problème

##### 3.1.1 Cinématique de la plaque

Dans sa position initiale, le mur, modélisé par une plaque bidimensionnelle, est décrit par une surface plane occupant un domaine  $S$  dans le plan  $Ox_1x_2$ . Les déplacements et rotations, représentés sur la figure 3.8, sont alors décrits comme suit :

- Les déplacements membranaires, dans les directions 1 et 2, sont :  $\underline{u} = u_1\underline{e}_1 + u_2\underline{e}_2$  ;
- Le déplacement hors-plan, dans la direction 3, est noté :  $\underline{u}_3 = u_3\underline{e}_3$  ;
- Les rotations autour des axes  $Ox_1$  et  $Ox_2$  sont notées :  $\underline{\theta} = \theta_1\underline{e}_1 + \theta_2\underline{e}_2$ .

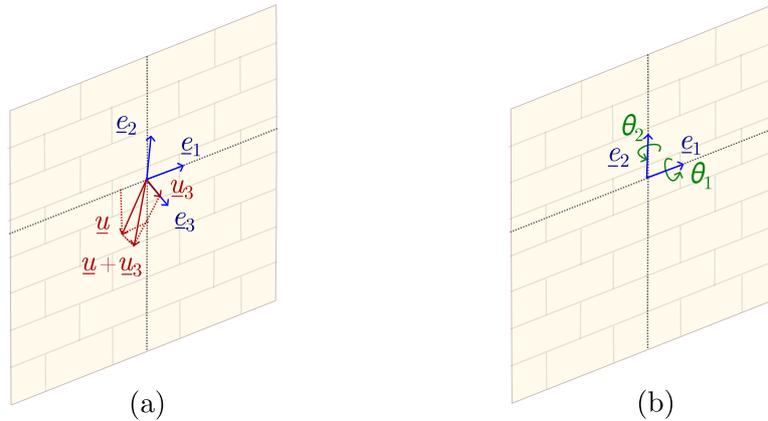


FIGURE 3.8 – Définition des déplacements et des rotations

A partir de ces déplacements, on peut définir les grandeurs suivantes :

- Le tenseur des déformations membranaires est noté  $\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{u}) = {}^s \underline{\underline{\nabla}} \underline{u}$  ;
- Le tenseur des courbures est noté  $\underline{\underline{\chi}}(\underline{\theta}) = {}^s \underline{\underline{\nabla}} \underline{\theta}$  ;
- Le vecteur des déformations de cisaillement est noté  $\gamma(u_3, \underline{\beta}) = \underline{\nabla} u_3 - \underline{\beta}$  où  $\underline{\beta} = \underline{e}_3 \wedge \underline{\theta}$

Cette cinématique correspond à une plaque de Reissner-Mindlin. Nous ajouterons par la suite l'hypothèse de Kirchhoff : les sections normales au feuillet moyen dans la configuration initiale y restent normales dans la configuration déformée. Les déformations de cisaillement sont alors nulles :

$$\gamma(u_3, \underline{\beta}) = \underline{\nabla} u_3 - \underline{\beta} = 0 \quad (3.14)$$

Dans l'implémentation numérique, qui sera décrite dans le paragraphe 3.1.4, nous avons choisi de conserver une cinématique de Reissner-Mindlin et d'imposer la condition de Kirchhoff par pénalisation des déformations de cisaillement, en considérant une raideur en cisaillement très élevée.

### 3.1.2 Efforts généralisés et équations d'équilibre

Les efforts généralisés sont décrits, en tout point de la plaque, par :

— Le tenseur des efforts membranaires  $\underline{\underline{N}}$  :

$$\underline{\underline{N}} = N_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.15)$$

— Le tenseur des moments fléchissants  $\underline{\underline{M}}$  :

$$\underline{\underline{M}} = M_{\alpha\beta}(x_1, x_2)\underline{e}_\alpha \otimes \underline{e}_\beta \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.16)$$

— Le vecteur des efforts de cisaillement  $\underline{V}$  :

$$\underline{V} = V_\alpha(x_1, x_2)\underline{e}_3 \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.17)$$

Les champs d'efforts généralisés vérifient les équations d'équilibre suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\underline{N}} + \underline{p}^0 = 0 & (a) \\ \operatorname{div}\underline{V} + p_3 = 0 & (b) \\ \operatorname{div}\underline{\underline{M}} - \underline{V} = 0 & (c) \end{cases} \quad (3.18)$$

Dans cette expression,  $\underline{p} = \underline{p}^0 + p_3\underline{e}_3$  est la densité surfacique d'efforts extérieurs appliquée à la plaque. Le terme  $\underline{p}^0$  correspond aux chargements plans tel que le poids propre pour une plaque verticale, tandis que  $p_3$  correspond aux chargements hors-plan, comme l'action du vent par exemple.

Dans le modèle de Kirchhoff-Love, la connaissance des efforts de cisaillement n'étant pas nécessaire, on peut se ramener aux deux seules équations suivantes :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\underline{\underline{N}} + \underline{p}^0 = 0 & (a) \\ \operatorname{div}(\operatorname{div}\underline{\underline{M}}) + p_3 = 0 & (b) \end{cases} \quad (3.19)$$

Ces équations sont complétées par des conditions aux limites en efforts généralisés. Pour

le modèle de Reissner-Mindlin, ces conditions s'écrivent :

$$\begin{cases} \underline{N} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \\ V_n = T_3^d \\ M_{nn} = H^d \end{cases} \quad (3.20)$$

où  $\underline{n}$  est la normale extérieure à la frontière de la plaque, et  $\underline{t}$  la tangente unitaire, telle que  $\underline{e}_3 = \underline{n} \wedge \underline{t}$ .  $\underline{T}^d$  représente la densité linéaire d'efforts plans appliquée sur la portion  $\partial S_{\underline{T}^d}$  de la frontière,  $T_3^d$  représente la densité d'efforts transversaux au plan appliquée sur la portion  $\partial S_{T_3^d}$  de la frontière, et  $H^d$  représente la densité linéaire de moments appliquée sur la portion  $\partial S_{H^d}$  de la frontière (voir figure 3.9).

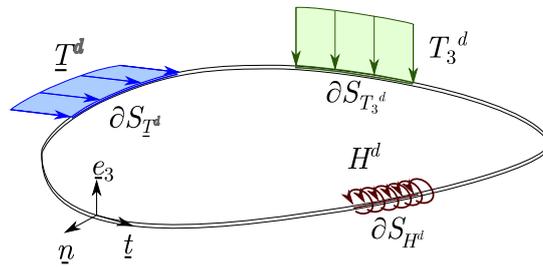


FIGURE 3.9 – Conditions aux limites du modèle de plaque

Pour le modèle de Kirchhoff-Love, ces conditions aux limites deviennent :

$$\begin{cases} \underline{N} \cdot \underline{n} = \underline{T}^d \\ Q_n = Q^d \\ M_{nn} = H^d \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $Q_n = V_n - \partial M_{nt} / \partial t$  est l'effort de cisaillement effectif (voir Timoshenko et Woinowsky-Krieger [107] par exemple).

### 3.1.3 Loi de comportement thermoélastique linéaire macroscopique exprimée en variables généralisées

Comme rappelé dans la partie 2, la loi de comportement thermoélastique linéaire d'une plaque de Kirchhoff-Love s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{N} &= \underline{A} : \underline{\underline{\epsilon}} - \underline{B} : \underline{\underline{\theta}} + \underline{N}^\theta \\ \underline{M} &= -\underline{B} : \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{D} : \underline{\underline{\theta}} + \underline{M}^\theta \end{aligned} \quad (3.22)$$

où les différentes raideurs, les efforts membranaires et moments fléchissants thermiques ont été déterminés précédemment par la résolution du problème auxiliaire décrit dans la partie 2.

Comme évoqué précédemment, la condition de Kirchhoff est imposée par pénalité. Pour une plaque de Reissner-Mindlin, la loi de comportement en cisaillement s'écrit :

$$\underline{V} = K\underline{\gamma} \quad (3.23)$$

Dans le cas isotrope, la pénalisation des déformations de cisaillement  $\underline{\gamma}$  reviendrait à imposer une raideur en cisaillement  $K \gg 5/6h\mu$  où  $\mu$  serait la raideur en cisaillement du matériau constitutif et  $h$  l'épaisseur de la plaque. En pratique, dans le modèle numérique présenté ici, nous avons imposé  $K \gg hA_{1212}$

### 3.1.4 Implémentation numérique

Le problème présenté dans les paragraphes 3.1.1 à 3.1.3 a été implémenté numériquement dans FEniCS (Logg et al. [108], Alnaes et al. [109]). Les équations rappelées dans ces deux paragraphes sont transformées en un problème variationnel décrit par l'équation (3.24).

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\underline{u}, u_3, \underline{\theta}) \text{ C.A.,} \\ & \quad \forall (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) \text{ C.A.,} \\ & a \left( (\underline{u}, u_3, \underline{\theta}), (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) \right) = b \left( \hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (3.24)$$

où C.A. désigne un champ de vitesse cinématiquement admissible.

Dans l'équation (3.24), la forme bilinéaire  $a$  s'écrit :

$$a = \left( (\underline{u}, u_3, \underline{\theta}), (\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) \right) = \int_S \left( \underline{\tilde{N}}(\underline{u}, \underline{\theta}) : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\hat{\underline{u}}) + \underline{\tilde{M}}(\underline{u}, \underline{\theta}) : \underline{\underline{\underline{\chi}}}(\hat{\underline{\theta}}) + \underline{V}(\underline{u}, \underline{\beta}) \cdot (\nabla \hat{u}_3 - \hat{\underline{\beta}}) \right) dS \quad (3.25)$$

où :

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{N}} &= \underline{\underline{\underline{A}}} : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{u}) - \underline{\underline{\underline{B}}} : \underline{\underline{\underline{\chi}}}(\underline{\theta}) \\ \underline{\tilde{M}} &= -\underline{\underline{\underline{B}}} : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{u}) + \underline{\underline{\underline{D}}} : \underline{\underline{\underline{\chi}}}(\underline{\theta}) \\ \underline{V} &= K(\nabla u_3 - \underline{\beta}) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Dans l'équation (3.25),  $\underline{\underline{\underline{A}}}$ ,  $\underline{\underline{\underline{B}}}$  et  $\underline{\underline{\underline{D}}}$  sont les tenseurs de raideur homogénéisée qui apparaissent dans l'équation (3.22), tandis que  $K$  est la raideur en cisaillement définie dans l'équation (3.23).

La forme linéaire  $b$  s'écrit quant à elle :

$$\begin{aligned} b(\hat{\underline{u}}, \hat{u}_3, \hat{\underline{\theta}}) &= \int_S \left( -\underline{\underline{\underline{N}}}^\theta : \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}(\hat{\underline{u}}) - \underline{\underline{\underline{M}}}^\theta : \underline{\underline{\underline{\chi}}}(\hat{\underline{\theta}}) \right) dS + \int_S (p \cdot \hat{\underline{u}} + p_3 \hat{u}_3) dS \\ &+ \int_{\partial S_{T^d}} \underline{T}^d \cdot \hat{\underline{u}} dl + \int_{\partial S_{T_3}} T_3^d \hat{u}_3 dl + \int_{\partial S_{H^d}} \underline{H}^d \cdot \hat{\underline{\beta}} dl \end{aligned} \quad (3.27)$$

Dans cette équation,  $\underline{N}^\theta$  et  $\underline{M}^\theta$  représentent les tenseurs des efforts membranaires et moments fléchissants thermiques.  $\underline{p}$  et  $p_3$  sont les efforts répartis, tandis que  $\underline{T}^d$ ,  $T_3^d$  et  $H^d$  sont les efforts et moments donnés sur la frontière  $\partial S$ .

Du point de vue numérique, nous avons choisi une variation quadratique des déplacements  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . Le choix de l'interpolation pour les rotations est plus délicat. En effet, les modèles numériques de plaque rencontrent souvent des problèmes de verrouillage en cisaillement pour des plaques très minces. Plusieurs solutions existent pour passer outre : entre autres, on retrouve des approches de type Galerkin discontinues, des éléments mixtes de Duran-Liberman (Hale et al. [110]), ou l'utilisation d'éléments de Crouzeix-Raviart (Bleyer [111]). Ici, nous avons choisi d'utiliser des éléments de Crouzeix Raviart pour l'interpolation des rotations  $\theta_1$  et  $\theta_2$ . Pour ces éléments triangulaires linéaires, les nœuds sont situés au milieu des arêtes (et non pas aux sommets des éléments comme pour des éléments de Lagrange), et la continuité du champ entre deux éléments n'est assurée qu'au niveau des nœuds. Les discontinuités ainsi créées permettent d'éviter de verrouillage en cisaillement. Le choix des éléments de Crouzeix-Raviart a été guidé par deux raisons : leur implémentation dans FEniCS était particulièrement simple, et le modèle développé pourra être étendu aux plaques épaisses de Reissner-Mindlin sans aucune modification. Cela est particulièrement intéressant pour les murs de maçonnerie dont l'élancement, limité à 26 selon l'Eurocode 6 [1], est souvent à la limite entre le domaine de validité du modèle de Reissner-Mindlin et de celui de Kirchhoff-Love.

## 3.2 Exemple applicatif

A titre d'illustration, on propose de reprendre l'exemple traité dans la partie 2 de ce chapitre, pour un mur simplement appuyé sur ses bords horizontaux, et dont les bords verticaux sont libres. L'intérêt de telles conditions aux limites, plutôt simples, réside en l'existence de solutions analytiques pour des plaques thermoélastiques homogènes, auxquelles les résultats de la modélisation proposée pourront donc être comparés. Par ailleurs, ces conditions aux limites se rapprochent de celles de l'essai non-chargé mécaniquement décrit par Pham et al. [3], fournissant ainsi une deuxième possibilité de comparaison. Une comparaison plus détaillée entre les résultats numériques et les résultats expérimentaux de cette thèse sera proposée dans la partie 4 de ce chapitre.

### 3.2.1 Conditions aux limites

Les conditions aux limites sont résumées sur la figure 3.10. Le demi-espace  $x_3 < 0$  est supposé être à la température du feu, tandis que le demi-espace  $x_3 > 0$  est à température ambiante. Les bords latéraux du mur sont libres de contraintes, tandis que le déplacement hors-plan  $u_3$  est nul sur les bords inférieur et supérieur du mur, qui restent cependant

libres de tourner. Sur ces deux bords, le déplacement horizontal dans le plan (dans la direction  $\underline{e}_1$ ) est également libre. Si le déplacement vertical (direction  $\underline{e}_2$ ) est bloqué sur le bord inférieur, il est libre sur le bord supérieur, ce qui laisse la possibilité au mur de se dilater. Enfin, le poids propre du mur est négligé, puisque nous avons montré dans Donval et al. [112] que pour les conditions aux limites et l'élanement du mur considéré, il avait une influence très faible sur la déformée.

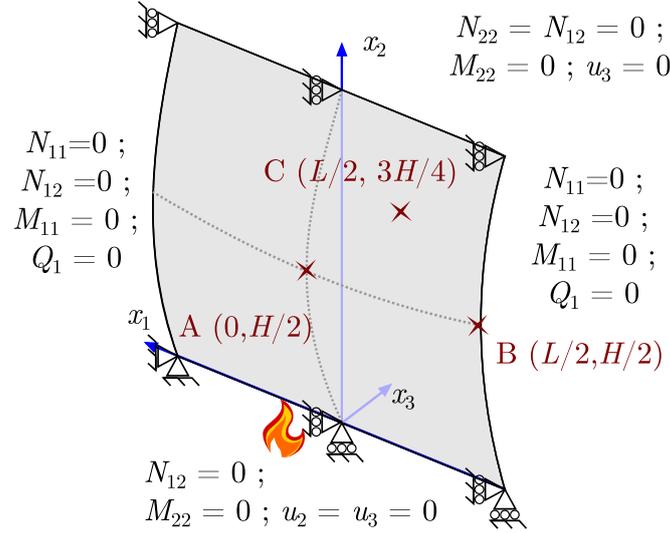


FIGURE 3.10 – Conditions aux limites pour le premier exemple applicatif

### 3.2.2 Solution analytique pour une plaque homogène

Des solutions analytiques ont été développées pour prévoir la déformée thermoélastique de plaques de Kirchhoff-Love exposées à un gradient thermique dans leur épaisseur, tout d'abord en considérant des propriétés mécaniques constantes en fonction de la température (Boley et Weiner [113]), puis en prenant en compte l'évolution du module de Young et du coefficient de dilatation thermique en fonction de la température (Yang [91]). La solution proposée par Yang est rappelée ci-dessous pour les conditions aux limites décrites sur la figure 3.10.

La solution du problème de plaque est recherchée en termes de flèche (déplacement  $u_3$ ). Dans ce cas, les conditions aux limites de la figure 3.10 se ramènent à :

$$\begin{aligned}
 x_2 = 0 : & \quad u_2 = 0 ; N_{12} = 0 ; u_3 = 0 ; M_{22} = 0 \\
 x_2 = H : & \quad N_{12} = N_{22} = 0 ; u_3 = 0 ; M_{22} = 0 \\
 x_1 = \pm L/2 : & \quad N_{11} = N_{12} = 0 ; M_{11} = 0 \\
 & \quad Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x_2} = 0
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3. Modélisation du mur par une plaque homogène

Après calculs, on peut montrer que la solution peut s'écrire sous la forme :

$$u_3(x_1, x_2) = u_3^*(x_2) + \tilde{u}_3(x_1, x_2) \quad (3.29)$$

avec, d'une part, le terme parabolique  $u_3^*$  :

$$u_3^*(x_2) = \frac{(1 + \nu)\chi^\theta}{2}(x_2^2 - Hx_2) \quad (3.30)$$

où  $\chi^\theta = -(AM^\theta + BN^\theta)/(AD - B^2)$  est la courbure thermique, et d'autre part :

$$\tilde{u}_3(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{3,5,\dots} [A_m \operatorname{ch}(\alpha_m x_1) + D_m \operatorname{sh}(\alpha_m x_1)] \sin(\alpha_m x_1) \frac{4H^2(1 + \nu)\chi^\theta}{(m\pi)^3} \quad (3.31)$$

où :

$$A_m = \frac{(1 + \nu)\operatorname{sh}\alpha + (\nu - 1)\alpha\operatorname{ch}\alpha}{(\nu + 3)\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha + (\nu - 1)\alpha}, \quad D_m = \frac{(1 - \nu)\operatorname{sh}\alpha}{(\nu + 3)\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\alpha + (\nu - 1)\alpha} \quad (3.32)$$

avec :  $\alpha_m = \frac{m\pi}{H}$

et :  $\alpha = \alpha_m \frac{L}{2}, (m = 1, 3, 5, \dots)$

Ce second terme correspond à l'effet des bords latéraux libres.

La solution numérique obtenue par la méthode d'homogénéisation proposée dans ce chapitre, appliquée à une cellule de base homogène et associée à un calcul par éléments finis de plaques, peut alors être comparée à cette solution analytique ainsi qu'à une solution numérique obtenue par un calcul 3D direct par éléments finis, réalisés sur le logiciel Cast3M [106]. Le tableau 3.2 compare la flèche  $u_3$  obtenue par ces trois méthodes en trois points  $A$ ,  $B$  et  $C$  représentés sur la figure 3.10.

TABLEAU 3.2 – Flèches obtenues par la solution analytique, par homogénéisation et par un calcul direct 3D par éléments finis

	Solution analytique	Homogénéisation	Eléments finis 3D
Flèche au point A (mm)	38,01	38,03	37,81
Écart à la solution analytique	/	~ 0 %	0,6 %
Flèche au point B (mm)	24,97	24,97	23,19
Écart à la solution analytique	/	0 %	7,1 %
Flèche au point C	26,71	26,79	26,21
Écart à la solution analytique	/	0,3 %	2,1 %

Il apparaît que les approches analytique et par homogénéisation donnent des résultats quasi-identiques, tandis que les résultats du calcul direct par éléments finis diffèrent légèrement, surtout au niveau des bords de la plaque (point  $B$ ) où la différence entre les deux approches vaut 7 %. Cette différence peut venir du calcul par éléments finis, pour lequel la discrétisation (10 éléments dans l'épaisseur du mur) est limitée par les capacités de calcul de l'ordinateur utilisé, mais peut également provenir de l'élanement (ici défini comme le rapport entre la hauteur  $H$  et l'épaisseur  $h$ ) de la plaque. En effet, nous considérons ici une plaque d'élanement 15, qui correspond à la limite du domaine d'application du modèle de Reissner-Mindlin pour les plaques épaisses, et du modèle de Kirchhoff-Love pour les plaques minces. La différence entre les deux calculs pourrait également provenir d'un effet de bord.

### 3.2.3 Simulation numérique pour un mur de maçonnerie hétérogène

Contrairement aux solutions analytiques proposées dans le paragraphe 3.2.2, le modèle numérique présenté dans cette partie permet la détermination des déplacements dans le plan du mur  $u_1$  et  $u_2$ . La figure 3.11 montre les déplacements horizontaux (sous-figure (a)) et verticaux (sous-figure (b)) du mur après 120 min d'exposition au feu. L'information sur les déplacements horizontaux est particulièrement intéressante. En effet, nous avons vu dans la partie 2.2.4 (tableau 3.1) que lorsque le déplacement dans la direction 1 ou dans la direction 2 était restreint, les efforts membranaires correspondants étaient de l'ordre de -1,1 MN/m, soit une contrainte moyenne de compression égale à 5,5 MPa, ce qui est légèrement supérieur à la résistance en compression de la pierre considérée ici. Du point de vue du dimensionnement, il est donc intéressant de laisser au mur la possibilité de se dilater de 4 mm horizontalement (2 mm à gauche, 2 mm à droite - voir figure 3.11 (a)) afin d'éviter une rupture par compression lors de l'incendie.

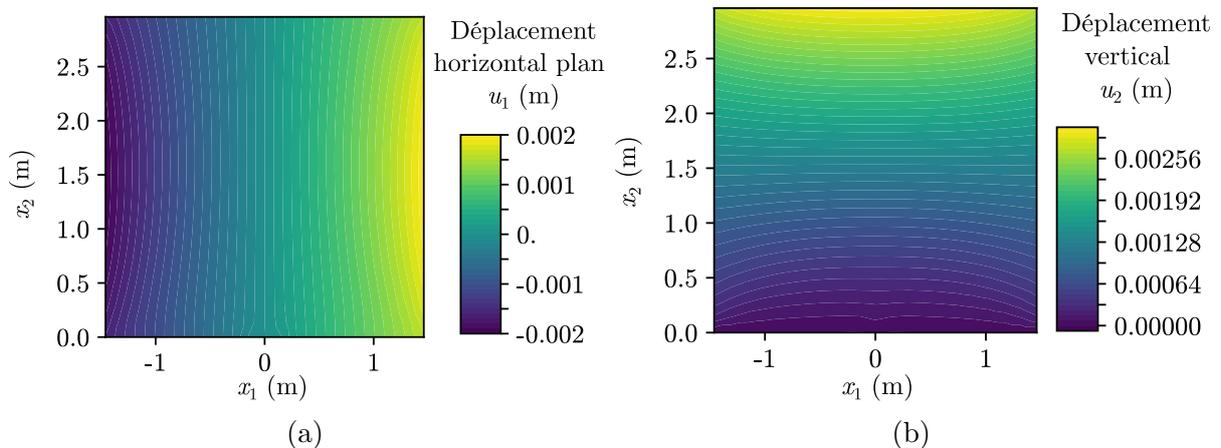


FIGURE 3.11 – Déplacements plans (a) horizontaux et (b) verticaux

La figure 3.12 représente la flèche du mur après 120 min d'exposition au feu. On note bien la présence d'une double courbure, horizontale et verticale, qui justifie la nécessité

d'une modélisation du mur par une plaque, et non pas simplement par une poutre.

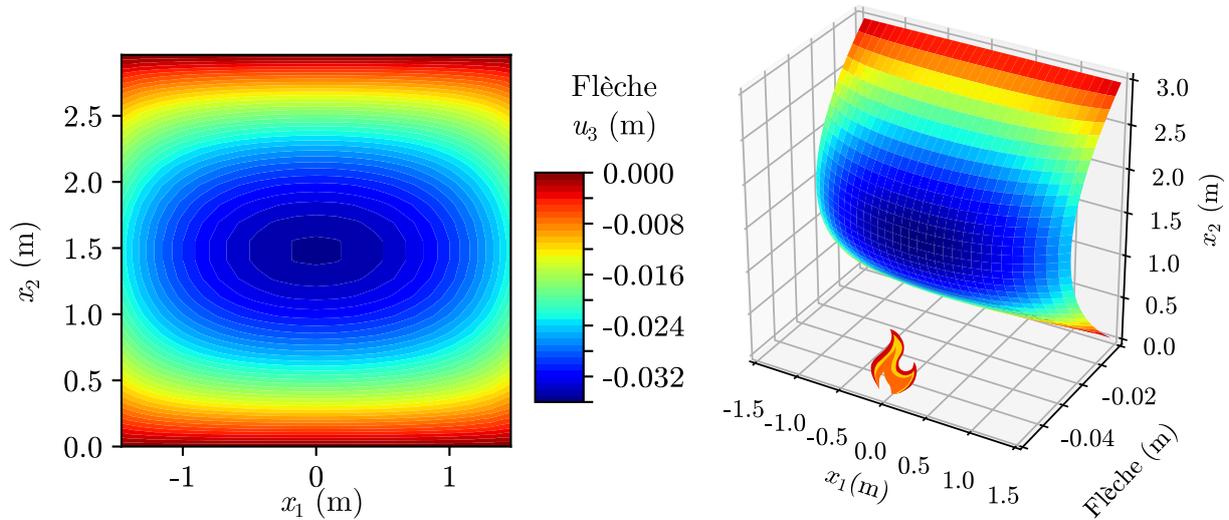


FIGURE 3.12 – Flèche  $u_3$  après 120 min d'exposition au feu

La figure 3.13 compare les déformées obtenues pour un mur homogène composé uniquement du matériau "pierre", pour un mur homogène composé uniquement du matériau "mortier" et pour le mur hétérogène, après 120 min d'exposition au feu. Il apparait que la déformée du mur hétérogène est légèrement plus faible que celle du mur composé de pierre uniquement. Si, à première vue, ce résultat peut sembler contre-intuitif, on peut l'attribuer au faible coefficient de dilatation thermique du mortier comparativement à celui de la pierre. A titre de comparaison, la flèche maximale d'une plaque homogène composée uniquement de mortier est 5,4 fois plus faible que celle d'une plaque homogène composée de pierre uniquement.

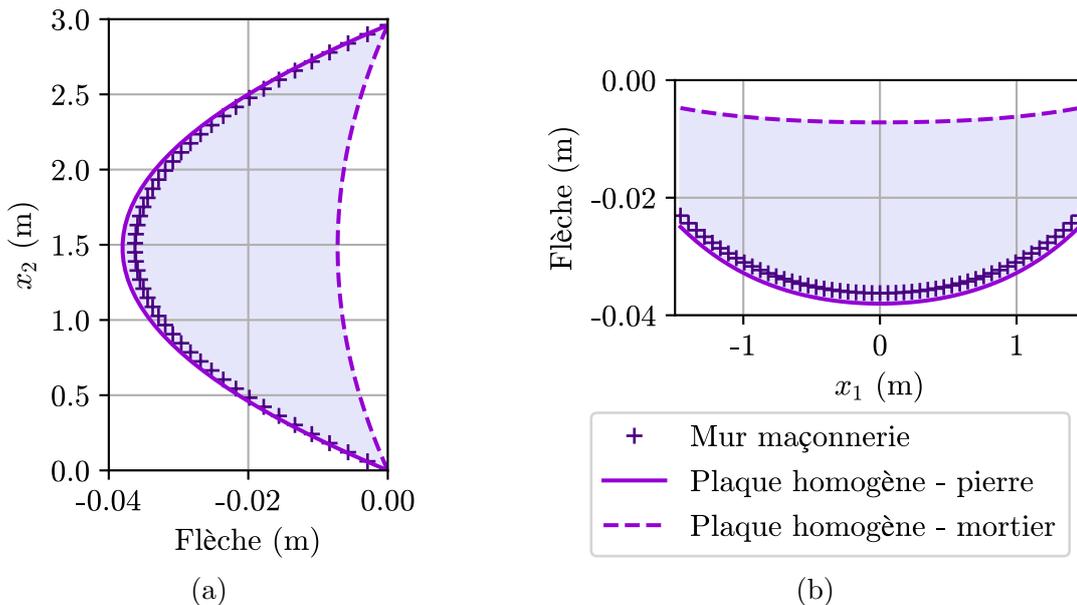


FIGURE 3.13 – Comparaison des résultats obtenus par homogénéisation à la flèche d'un mur homogène composé soit de pierre, soit de mortier

### 3.2.4 Comparaison à un modèle numérique 3D

Les résultats obtenus par la méthode d'homogénéisation proposée dans ce chapitre peuvent être comparés avec un calcul 3D direct, par éléments finis. Pour ce faire, nous avons encore une fois utilisé le logiciel Cast3M. La figure 3.14 représente le maillage utilisé pour ce calcul. Il est composé de 214 144 éléments parallélépipédiques quadratiques (CU20), et de 890 001 nœuds. Les éléments constituant les blocs sont représentés en bleu ciel, tandis que les éléments constituant le mortier sont représentés en bleu marine. Pour ce maillage, les éléments ont une taille cible de 0,02 m, et seule la moitié du mur est modélisée afin de réduire la taille du problème. Ce calcul prend environ 30 min sur un serveur de calcul dédié, et nécessite plus de 32 Go de RAM.

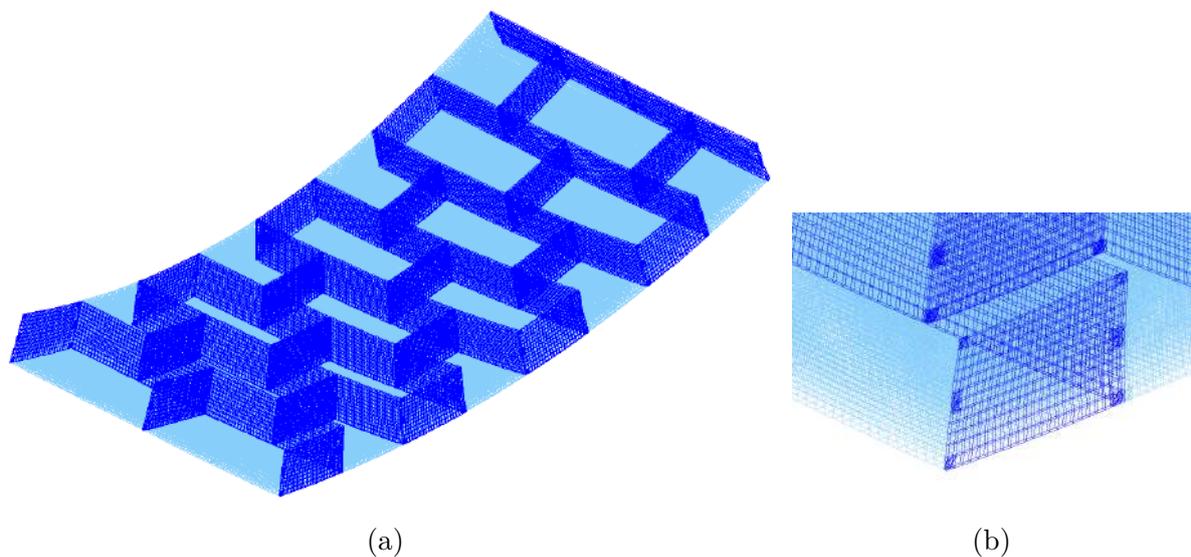


FIGURE 3.14 – Maillage utilisé pour le calcul direct : représentation de la moitié du mur (a) et zoom sur un joint (b)

La figure 3.15 représente les déformées du plan médian du mur obtenues par homogénéisation et par calcul direct, sur la droite verticale d'équation  $x_1 = 0$  (sous-figure (a)) et sur la droite horizontale d'équation  $x_2 = 1,48$  m (sous-figure (b)), après 120 min d'exposition au feu.

La différence relative entre la flèche maximale obtenue par ces deux méthodes est de 4 %, alors que pour un mur homogène, elle était de 0,6 %. Au-delà des raisons déjà mentionnées dans le paragraphe 3.2.2 pour justifier la différence entre le modèle de plaque et l'approche directe 3D, on peut noter que le mur considéré n'est composé que d'un faible nombre de cellules de base. Le cadre de l'homogénéisation périodique ne s'applique que lorsque la taille de la cellule de base devient suffisamment petite devant la taille de la structure, ce qui n'est pas exactement le cas ici puisque le mur n'est composé que de quatre cellules de base dans chaque direction.

Malgré cette légère différence, on peut noter que les deux modèles montrent bien la

même tendance : la flèche maximale est légèrement plus faible pour le mur avec joints que pour le mur sans joints.

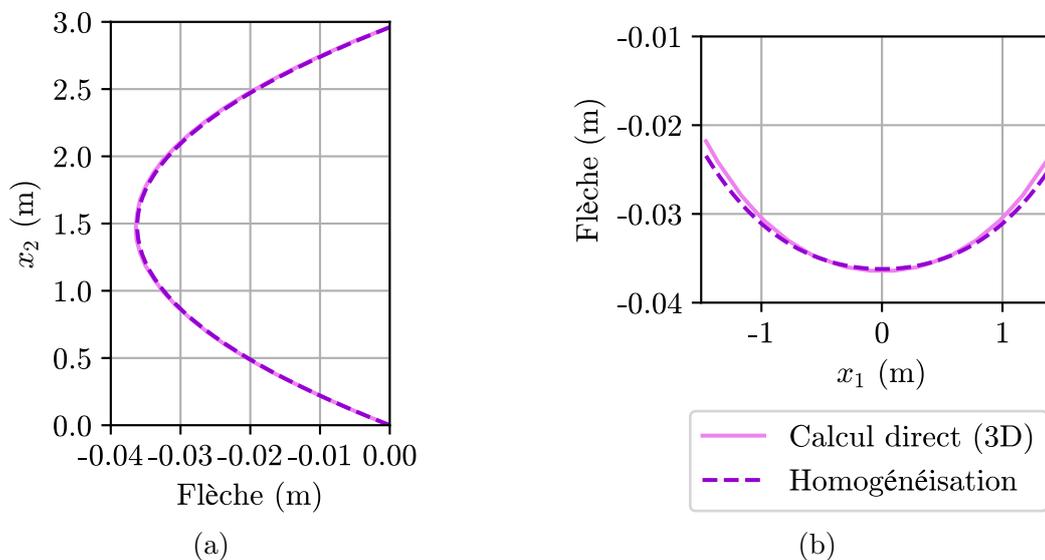


FIGURE 3.15 – Comparaison des flèches  $u_3$  obtenues par homogénéisation et par le calcul direct sur Cast3M

### 3.3 Influence des conditions aux limites sur la déformée thermique

Comme souligné par Nadjai et al. [86] ou par Nguyen et Meftah [23], les conditions aux limites ont une influence directe sur la déformée thermique du mur de maçonnerie, et la description de ces conditions aux limites n'est pas toujours aussi simple qu'un appui simple ou qu'un encastrement.

Un des avantages majeurs de l'approche par homogénéisation ici proposée est qu'une fois les calculs sur la cellule de base réalisés pour différents temps d'exposition au feu, les calculs de structure sont très rapides. Cette méthode est donc particulièrement adaptée à la réalisation d'études paramétriques pour essayer de déterminer quelles sont les configurations les plus défavorables en termes de déformée thermoélastique. Dans cette sous-partie, nous proposons de nous intéresser tout d'abord aux conditions aux limites en déplacement imposé, puis de regarder l'effet d'une charge verticale ou d'un moment imposé en tête de mur.

#### 3.3.1 Déplacements imposés

La figure 3.17 représente la déformée après 120 min d'exposition au feu pour trois types de conditions aux limites, représentées sur la figure 3.16 : quatre coins simplement

appuyés (a), quatre bords simplement appuyés (b) et deux bords verticaux libres, le bord horizontal inférieur encastré et le bord horizontal supérieur en appui simple (c).

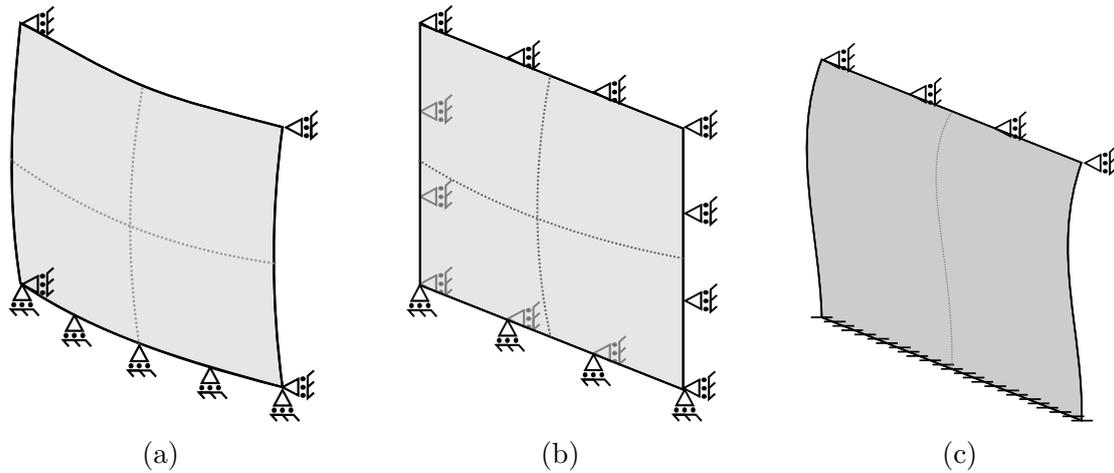


FIGURE 3.16 – Différentes conditions aux limites considérées

Dans ces trois cas, le déplacement vertical du bord inférieur est nul (i.e. le mur repose sur son bord inférieur) tandis que tous les autres déplacements plans sont libres. Du point de vue physique, les conditions (a) correspondent au cas où l'interface entre le mur et son environnement (dalle, plancher, murs de refend) a rompu, par exemple à cause des efforts thermiques. Les conditions (b) correspondent au cas où les mouvements hors-plan des bords du mur sont empêchés par des éléments structuraux, mais où ces éléments structuraux n'empêchent pas leurs rotations. Les conditions (c) correspondent au cas où les deux bords latéraux sont libres, et où la liaison en pied de mur est beaucoup plus raide que la liaison en tête de mur. Cela pourrait par exemple correspondre à un mur relié à une dalle en pied, et sur lequel repose un plancher souple, en bois par exemple. Pour ce dernier jeu de conditions aux limites, la perte de symétrie des conditions aux limites par rapport au plan horizontal à mi-hauteur se reflète dans la perte de symétrie de la distribution de flèche  $u_3$  par rapport à ce même plan. La flèche maximale se retrouve alors aux  $2/3$  de la hauteur du mur, et non pas à mi-hauteur comme pour les autres cas étudiés.

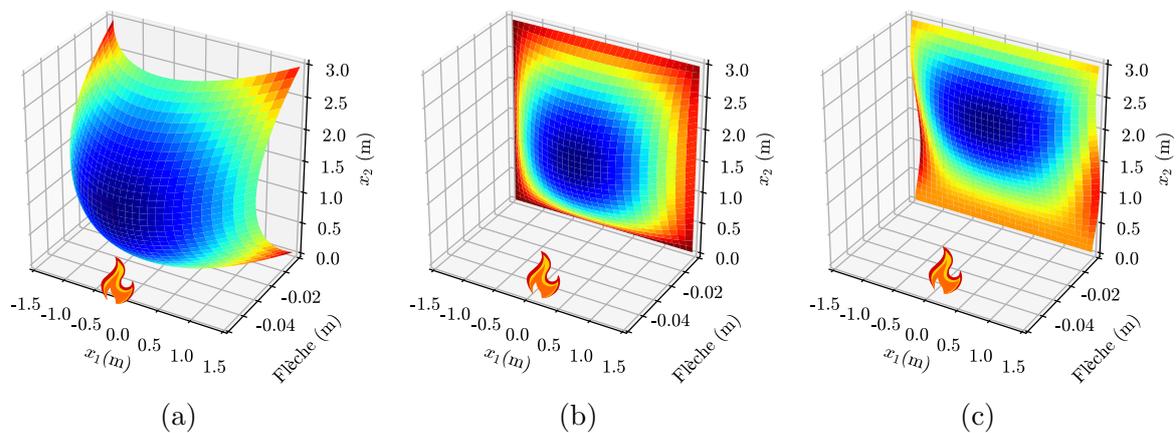


FIGURE 3.17 – Déformée 3D pour différentes conditions aux limites

La figure 3.18 donne le déplacement hors-plan sur une ligne verticale à mi-largeur du mur pour les conditions aux limites (a) à (c). Les conditions aux limites (d) correspondent aux conditions décrites sur la figure 3.10, c'est-à-dire à des bords verticaux libres de contraintes, et des bords horizontaux rotulés. Cette étude paramétrique illustre bien l'importance de la compréhension des conditions aux limites réelles. En effet, selon les conditions aux limites choisies, la flèche maximale varie entre 13 mm (conditions aux limites (c)) et 57 mm (conditions aux limites (a)).

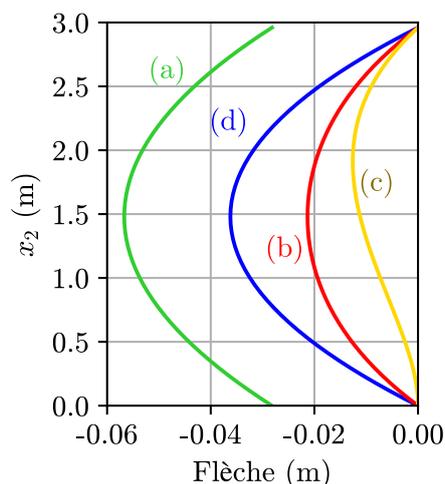


FIGURE 3.18 – Flèche sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes conditions aux limites considérées

Par la suite, nous conserverons uniquement les conditions aux limites (c) et (d), qui semblent être les plus proches de celles réellement appliquées sur le mur testé dans le chapitre 2.

#### 3.3.2 Efforts imposés

Dans le paragraphe précédent, nous avons exploré l'effet des blocages cinématiques sur la déformée thermomécanique du mur. Cependant, dans le cas des murs chargés verticalement, il paraît également nécessaire d'évaluer l'effet de ce chargement sur la déformée. Les murs porteurs subissent un chargement vertical, mais celui-ci peut être excentré par rapport au plan médian du mur. C'est pourquoi nous avons considéré un chargement composé d'un effort vertical vers le bas  $N_{22} = -Pe_2$  et d'un moment fléchissant  $M_{22} = \mu = Pe$  où  $e$  correspond à l'excentrement du chargement  $P$  par rapport au plan médian du mur.

La figure 3.19 résume la modification de conditions aux limites considérée. Comme précédemment, nous considérerons des murs dont les bords verticaux sont libres, et dont le bord inférieur est soit en appui simple (figure 3.19 (a)), soit encastré (figure 3.19 (b)).

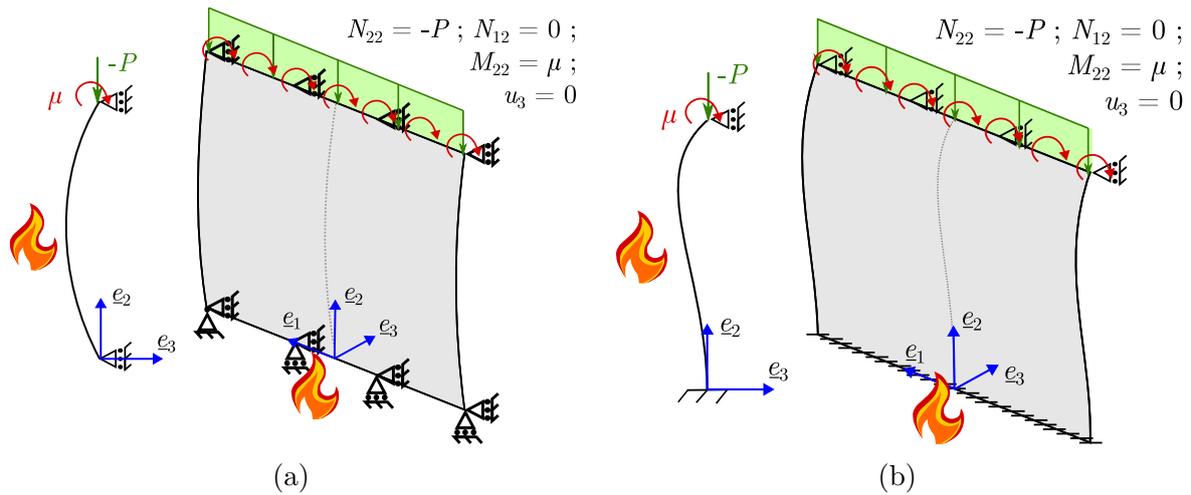


FIGURE 3.19 – Modification des conditions aux limites pour prendre en compte des efforts répartis sur les bords

### 3.3.2.1 Effort normal seul : Cas d'un excentrement nul ( $\mu = 0$ )

La figure 3.20 donne la déformée après 120 min d'exposition au feu pour différents chargements verticaux  $N_{22}$ . On peut noter que l'augmentation du chargement mécanique conduit à une diminution de la flèche  $u_3$ . Ce phénomène rend bien compte de l'influence du terme de couplage  $\underline{\underline{B}}$ , et risque, pour ces chargements élevés, de conduire au phénomène de "Reverse bowing" déjà décrit dans le chapitre 2. Une manière plus simple de représenter ce terme de couplage a déjà été présentée dans ce même chapitre 2 (figure 2.34) : il s'agit d'une sorte de décalage du plan neutre du mur.

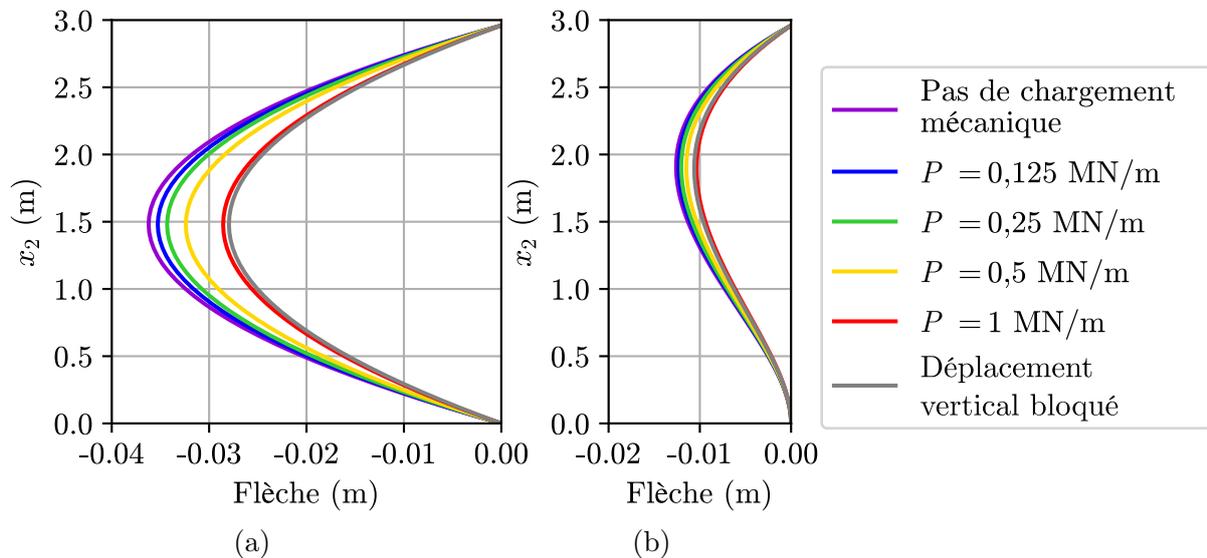


FIGURE 3.20 – Flèche après 120 min d'exposition au feu sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes valeurs de chargement vertical considérées, pour un mur en appui simple sur ses bords horizontaux (a) et pour un mur en appui simple en tête et encastré en pied (b)

On peut également noter que la charge à appliquer pour empêcher totalement la

dilatation verticale correspond à  $N_{22}^{\theta}$ . Pour le calcaire de Saint-Vaast, cette charge, qui vaut environ 5,5 MPa, est supérieure à la résistance en compression de la pierre (5,1 - 5,3 MPa), ce qui veut dire qu'une dilatation thermique totalement empêchée conduirait à la rupture du matériau, tel que déjà évoqué dans la partie 2.2.4.

#### 3.3.2.2 Moment fléchissant et effort normal : Cas d'un excentrement non-nul en tête de mur ( $\mu = eP$ )

Nous avons étudié des murs qui étaient, par hypothèse, uniquement soumis à des charges verticales et à un chargement thermique. Cependant, les résultats expérimentaux présentés dans le chapitre précédent ont montré que même lors du chargement mécanique sans chargement thermique, le mur exhibait une déformée hors plan. Nous nous sommes donc interrogés sur l'existence d'un excentrement initial du chargement mécanique. La figure 3.21 donne la déformée après 120 min d'exposition au feu pour différentes valeurs d'excentrement et pour un chargement vertical de  $P = 125$  kN/m (correspondant à l'essai présenté dans le chapitre 2).

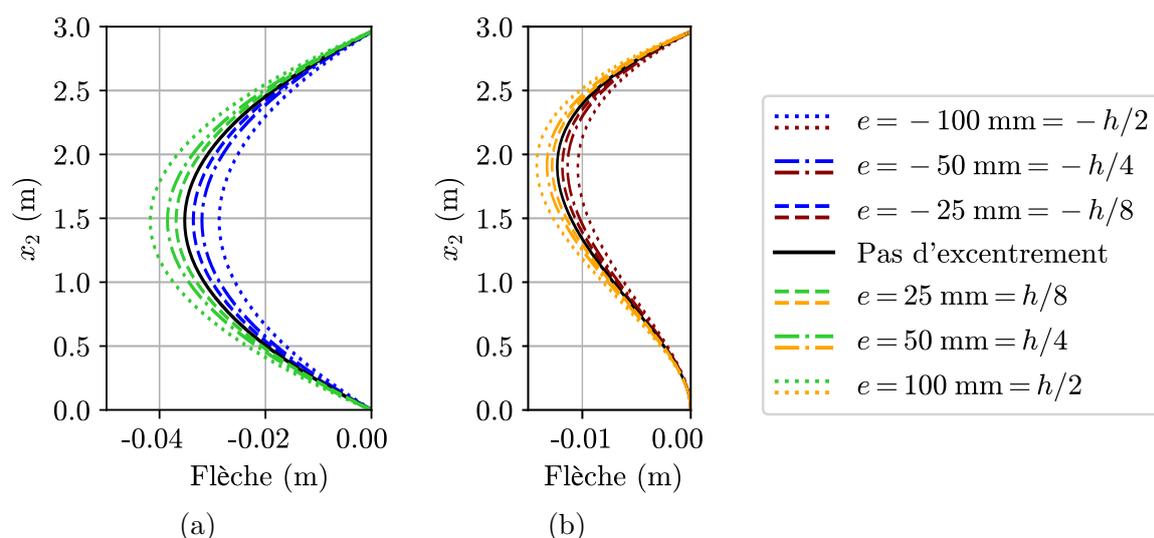


FIGURE 3.21 – Flèche après 120 min d'exposition au feu sur une droite verticale à mi-largeur pour les différentes valeurs d'excentrement initial de la charge considérées, pour un mur en appui simple sur ses bords horizontaux (a) et pour un mur en appui simple en tête et encasté en pied (b)

Il est tout particulièrement intéressant de noter que les moments fléchissants engendrés par cet excentrement entraînent des flèches bien plus faibles que la flèche thermique. Par rapport au chargement centré, le chargement excentré de  $e = h/2$  entraîne une variation de la flèche de l'ordre de 6,5 mm dans le cas où les deux bords horizontaux du mur sont en appui simple (resp. 1,9 mm dans le cas où le bas du mur est encasté), soit 18 % (resp. 15 %) de la flèche sans excentrement.

### 3.4 Note sur l'effet $P - \delta$ (ou effet du second ordre)

Comme nous l'avons vu dans cette partie, le gradient thermique dû au feu entraîne une courbure thermomécanique du mur. Les efforts verticaux dus au poids propre ou au chargement en tête de mur se trouvent alors excentrés par rapport à l'axe du mur et engendrent alors des moments fléchissants additionnels. La courbure due à ces moments fléchissants engendre alors des déplacements, dits de second ordre, qui viennent s'ajouter aux déplacements transversaux dus à la déformée thermomécanique initiale. Un tel phénomène, notamment décrit dans Bazant et Cedolin [114], est nommé "effet  $P - \delta$ ". Dans certains cas, notamment pour les panneaux en béton armé de grande hauteur, l'excentrement dû à la courbure thermique peut atteindre plus de deux fois l'épaisseur du panneau (Pham et al. [93]). La modélisation choisie doit alors prendre en compte les effets de second-ordre. Pour les plaques, on peut notamment recourir au modèle de Von-Karman (Yang [91]).

Nous avons vu expérimentalement dans le chapitre 2 que les déplacements hors-plan dus au chargement thermique ne dépassaient pas un cinquième de l'épaisseur du mur pour un essai non-chargé mécaniquement, et pouvaient même être inférieurs au vingtième de l'épaisseur pour des essais chargés mécaniquement. Dans ce cas, la prise en compte des effets de second ordre ne devrait pas être nécessaire.

Nous avons néanmoins présenté dans Donval et al. [112] une telle vérification par le calcul sur un modèle simplifié de poutre. Nous avons notamment montré que pour les conditions aux limites et les chargements thermomécaniques considérés, dans le cadre d'une modélisation thermoélastique, l'effet  $P - \delta$  était négligeable pour un mur d'élancement (rapport entre la hauteur et l'épaisseur du mur) 15, et commençait à avoir un impact pour des murs d'élancement 27. Un tel élancement représente la limite proposée par l'Eurocode 6 [1]. Le modèle de Kirchhoff-Love présenté dans cette partie est donc tout à fait suffisant.

## 4 Comparaison aux résultats expérimentaux

### 4.1 Résultats de l'essai non-chargé de Pham et al. [3]

On compare, dans cette partie, les résultats expérimentaux de l'essai non-chargé présenté par Pham et al. [3] aux résultats des calculs réalisés pour les conditions aux limites représentées sur la figure 3.10. La figure 3.22 décrit l'évolution de la flèche  $u_3$  au centre du mur, obtenue par le calcul d'homogénéisation et mesurée expérimentalement soit par des capteurs LVDT, soit par corrélation d'images, en fonction du temps d'exposition au feu.

Il apparaît que, pendant les 30 premières minutes, la flèche évolue plus rapidement que prévu par le modèle. En revanche, elle se stabilise après cette durée, alors que la flèche

#### 4. Comparaison aux résultats expérimentaux

obtenue numériquement continue de croître. Après 30 min d'exposition au feu, le modèle sous-estime de 38 % la flèche mesurée, puis cet écart se réduit jusqu'à 14 % pour 120 min d'exposition au feu. De telles différences peuvent s'expliquer par la présence de fissures, et probablement d'autres phénomènes d'endommagement moins visibles, qui ne sont pas pris en compte dans le modèle proposé, celui-ci présupposant que le comportement des matériaux reste élastique, avec néanmoins des modules décroissants en fonction de la température.

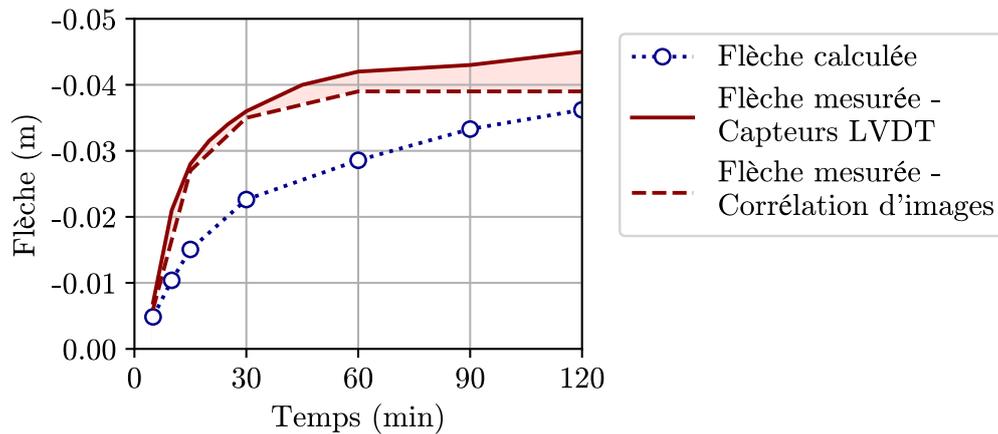


FIGURE 3.22 – Évolution de la flèche en fonction du temps d'exposition au feu - Essai non-chargé de Pham et al. [3]

La figure 3.23 représente les profils de déformée sur une droite verticale à mi-largeur (sous-figure (a)) et sur une droite horizontale à mi-hauteur (sous-figure (b)), pour 30 min et 120 min d'exposition au feu.

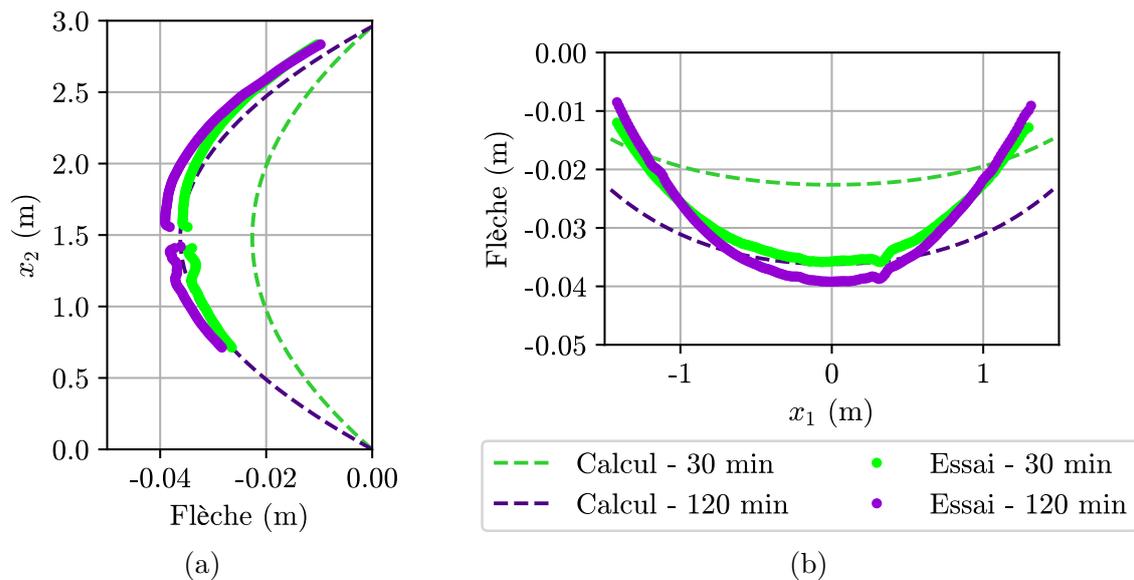


FIGURE 3.23 – Comparaison des résultats numériques et de l'essai non-chargé de Pham et al. [3]

Il apparait que le modèle est bien capable de reproduire la double courbure observée expérimentalement. En revanche, la courbure horizontale calculée est moins prononcée que la courbure horizontale expérimentale.

## 4.2 Résultats de l'essai chargé réalisé dans le cadre de cette thèse (Chapitre 2)

Pour les résultats de cette partie, les conditions aux limites considérées correspondent à celles présentées sur la figure 3.16 (c). Le bas du mur est encastré, i.e. le déplacement est nul dans les trois directions de l'espace, et la rotation autour de l'axe  $x_1 = 0$  est nulle. Le déplacement  $u_3$  est nul en haut du mur. Les deux bords verticaux sont totalement libres.

### 4.2.1 Déplacements dans le plan du mur

On peut tout d'abord s'intéresser au déplacement vertical causé par un chargement mécanique uniquement. Pour ce faire, un effort réparti  $P = 125$  kN/m est appliqué sur le bord supérieur du mur. Le déplacement correspondant au niveau du bord supérieur est uniforme et vaut 0,4 mm. Ce résultat peut être comparé aux déplacements plans lors de la phase de chargement mécanique, qui ont été mesurés par les capteurs à fils. Le capteur à gauche du mur mesure un tassement de 0,85 mm, tandis que celui à droite du mur mesure un tassement de 0,3 mm. Cet écart important montre l'hétérogénéité des propriétés du mur testé, bien que ce dernier ait été monté en conditions de laboratoire. Pour comparer les valeurs mesurées aux résultats obtenus par le modèle numérique, nous retiendrons la moyenne des tassements mesurés à gauche et à droite, c'est-à-dire 0,58 mm. A température ambiante, le modèle rend donc compte d'un mur un peu (30 %) plus raide qu'en réalité. Cela pourrait notamment être dû à un comportement élastoplastique du mortier, puisqu'on verra dans le chapitre 8 que celui-ci a une faible limite d'élasticité en compression et qu'il est plutôt ductile.

La figure 3.24 donne les déplacements plans horizontaux (a) et verticaux (b) après 120 min d'exposition au feu.

Il est intéressant de noter que le déplacement horizontal calculé (4,8 mm, correspondant au déplacement relatif du bord droit du mur par rapport au bord gauche) est bien inférieur au déplacement mesuré (14 mm). En effet nous avons vu dans le chapitre 2 que le déplacement horizontal était principalement dû à l'ouverture des fissures verticales, bien plus qu'à la dilatation thermique de la pierre.

La figure 3.25 donne l'évolution du déplacement vertical en haut du mur, comparé aux valeurs mesurées lors de l'essai présenté dans le chapitre 2. Il apparait que les calculs surestiment légèrement la dilatation thermique. On note également que l'augmentation de

#### 4. Comparaison aux résultats expérimentaux

la charge, entre 150 et 180 min d'exposition au feu, n'est pas perçue de la même manière par le modèle que par le mur testé expérimentalement. En effet, expérimentalement, les déformations mécaniques dues à l'augmentation du chargement sont supérieures aux dilatations thermiques dues à l'augmentation de la température. Pour le modèle, c'est l'inverse. Cela tend à montrer que le modèle voit le mur plus raide que dans la réalité, probablement parce qu'il ne prend pas les comportements anélastiques (plasticité et/ou endommagement) des matériaux, et notamment du mortier dont la limite d'élasticité est plus faible que le chargement appliqués.

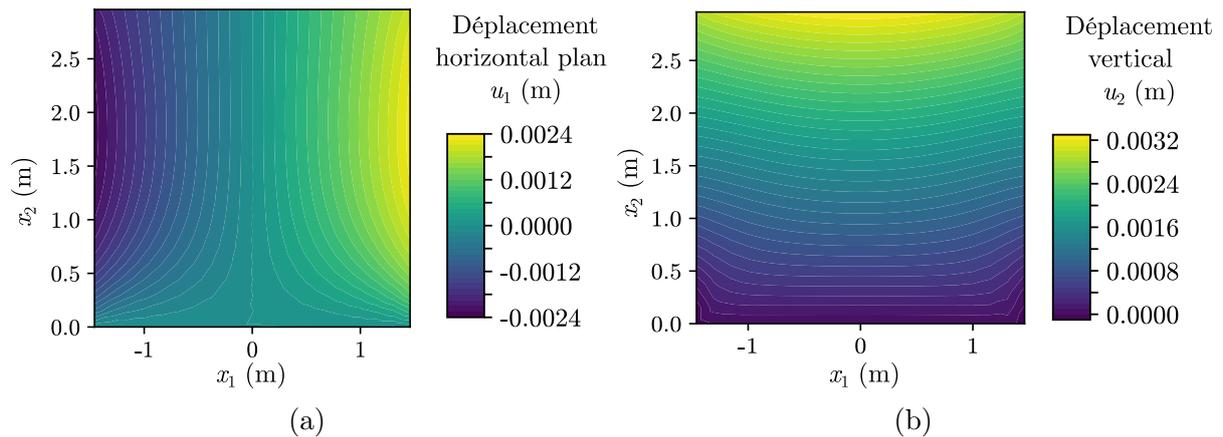


FIGURE 3.24 – Comparaison des déplacements plans obtenus numériquement à ceux de l'essai présenté dans le chapitre 2

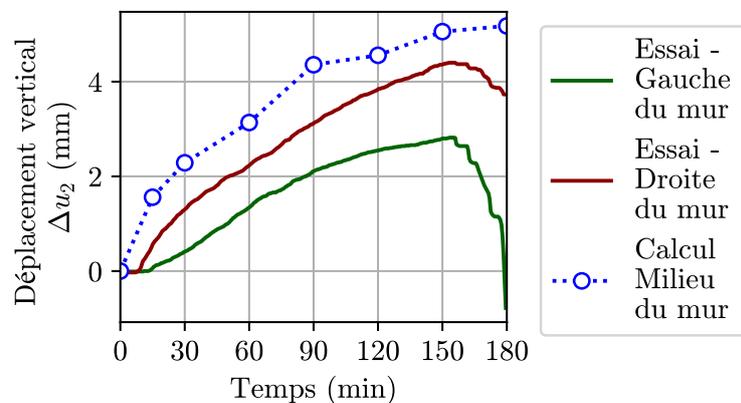


FIGURE 3.25 – Comparaison du déplacement vertical obtenu numériquement à celui de l'essai présenté dans le chapitre 2 (Augmentation du chargement mécanique entre 150 et 180 min)

Enfin, les conditions aux limites de l'essai sont probablement un peu différentes de celles appliquées au modèle. En effet, le déplacement vertical obtenu par calcul n'est pas uniforme sur tout le bord supérieur du mur. Expérimentalement, une poutre est posée sur le mur et devrait donc imposer un déplacement uniforme. Cependant, en l'absence d'adhérence entre le haut du mur et la poutre, il est difficile de connaître précisément les conditions aux limites, et il est probable que le milieu du mur subisse une charge plus grande que ses bords.

### 4.2.2 Le chargement était-il vraiment centré ?

Lors du chargement mécanique, nous avons observé un déplacement de 1,4 mm vers le four. Ce déplacement laisse penser que le chargement mécanique n'était pas parfaitement centré par rapport au mur. A l'aide d'une modélisation telle que celle proposée dans le paragraphe 3.3.2.2, on peut tenter de retrouver à quel excentrement  $e$  de la charge verticale correspondrait un tel déplacement hors-plan. La figure 3.26 représente le profil de déplacement hors-plan sur une droite verticale à mi-largeur du mur, pour différents excentrement et avant exposition au feu du mur.

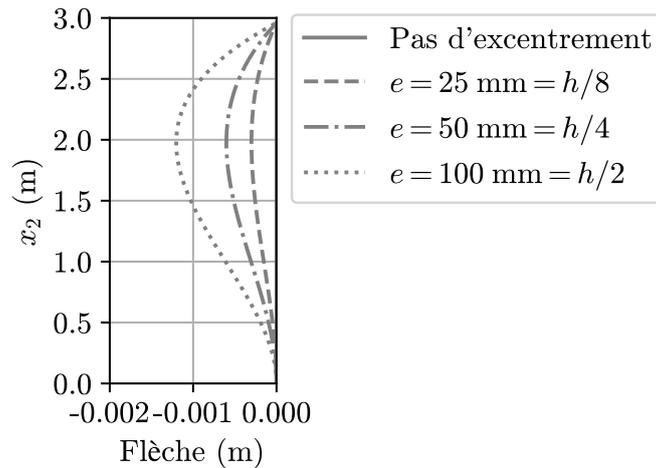


FIGURE 3.26 – Flèche sur une ligne verticale à mi-largeur pour différentes valeurs d'excentrement de la charge verticale, avant exposition au feu

Sous un chargement vertical de  $P = 125$  kN/m, un déplacement de 1,4 mm correspondrait à un excentrement de la charge de 115 mm, soit plus de la moitié de l'épaisseur du mur, ce qui paraît être bien au delà de l'incertitude de positionnement du dispositif expérimental (de l'ordre de 1 à 2 cm). Comme dans le paragraphe précédent, on peut supposer que la raideur du mur, tant à l'effort normal qu'en flexion, était plus faible que prévu par le modèle. Pour un chargement donné, le modèle sous-estime donc le déplacement correspondant.

L'évolution de la déformée en fonction du temps pour un mur soumis à un moment fléchissant engendré par un tel excentrement sera donné dans le paragraphe suivant.

### 4.2.3 Déplacements hors du plan du mur

Les figures 3.27 (a) et (b) donnent les déplacements sur une droite verticale à mi-largeur et sur une droite horizontale à  $5/8^e$  de la hauteur pour 30 min (en vert) et 120 min (en violet) d'exposition au feu.

Pour 30 min d'exposition au feu, le modèle reproduit plutôt bien la déformée observée. Pour 120 min d'exposition, en revanche, la déformée thermique est assez largement

#### 4. Comparaison aux résultats expérimentaux

surestimée. On peut attribuer cette surestimation à la présence de fissures horizontales qui jouent, en quelque sorte, le rôle de "joints" permettant une discontinuité de la rotation due aux efforts thermiques. En effet, pour des panneaux de grande hauteur (10 m) en béton armé, Yang [91] a montré que la présence de joints pouvait faire diminuer la déformée hors plan de près de 40 %.

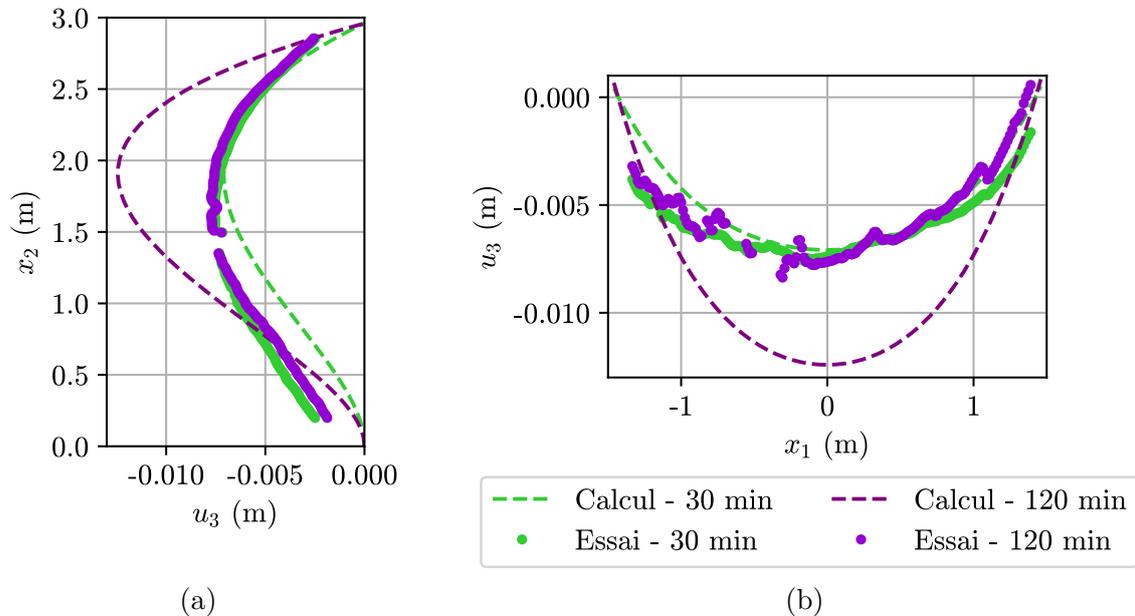


FIGURE 3.27 – Comparaison des profils de flèche obtenus numériquement et mesurés lors de l'essai chargé présenté dans le chapitre 2

La figure 3.28 compare l'évolution de la flèche calculée et de la flèche mesurée au centre du mur. Deux valeurs sont données pour le modèle : la flèche sans prise en compte de l'excentrement initial par rapport au plan médian du mur, et la flèche avec un excentrement initial de 115 mm tel que déterminé dans le paragraphe précédent.

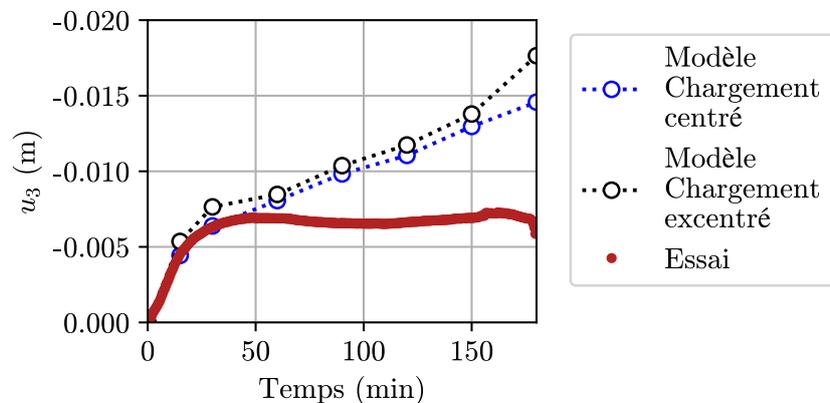


FIGURE 3.28 – Comparaison de la flèche au centre du mur obtenue par modélisation à la flèche mesurée lors de l'essai chargé présenté dans le chapitre 2

Dans ce dernier cas, la flèche représentée correspond à la flèche calculée à laquelle on

a retranché la valeur de la flèche après le chargement mécanique, mais avant exposition au feu. En effet, lors de l'essai, nous avons remis à zéro les déplacements entre la fin du chargement mécanique et le début de l'exposition au feu.

Dans les 30 premières minutes, c'est-à-dire tant que les fissures sont peu développées, le modèle approxime plutôt bien la flèche mesurée. Au delà de 30 minutes, en revanche, le modèle surestime la flèche. On note également que le modèle avec chargement excentré donne une flèche légèrement plus élevée que le modèle avec chargement centré, et que cet écart devient plus important lorsque le chargement mécanique augmente entre 150 et 180 min d'essai.

A titre de perspectives, il pourrait être intéressant d'inclure les fissures dans la cellule de base. En effet, celles-ci se développent verticalement au droit des joints verticaux, et sont presque périodiques.

### 4.3 Quel champ de température choisir ?

Dans le chapitre 2, nous avons remarqué qu'un calcul thermique avait tendance à surestimer les températures calculées dans l'épaisseur du mur par rapport aux températures mesurées. Pour cette raison, nous avons choisi de baser nos calculs de déformée sur les températures mesurées, et non pas sur les températures calculées. Cependant, dans une perspective de modélisation en ingénierie, réaliser un essai pour connaître la distribution de température paraît très coûteux, voire impossible à réaliser en pratique, et on peut supposer que les distributions de températures seront calculées. On propose donc de comparer la flèche au centre du panneau pour la distribution de température mesurée à celle obtenue pour la distribution de température calculée.

La figure 3.29 représente l'évolution de cette grandeur en fonction du temps d'exposition au feu. A titre de comparaison, les résultats basés sur la distribution de température mesurée par Pham et al. [3] ainsi que la flèche mesurée sur l'essai présenté dans le chapitre 2 sont également représentés.

On note que les déformées obtenues par le calcul en considérant la distribution de température du chapitre 2 et celle obtenue par Pham et al. [3] sont très similaires, les températures étant assez proches (une trentaine de degrés d'écart au plus). En revanche, la différence entre les températures calculées et mesurées dans la partie 4 du chapitre 2 pouvait atteindre 100 °C. Cette différence se répercute sur la flèche, et il y a jusqu'à 38 % d'écart entre la flèche maximale calculée en se basant sur la distribution de température calculée, et la flèche maximale calculée en se basant sur la distribution de température mesurée. On note donc que la flèche est plutôt sensible au profil thermique donné en entrée.

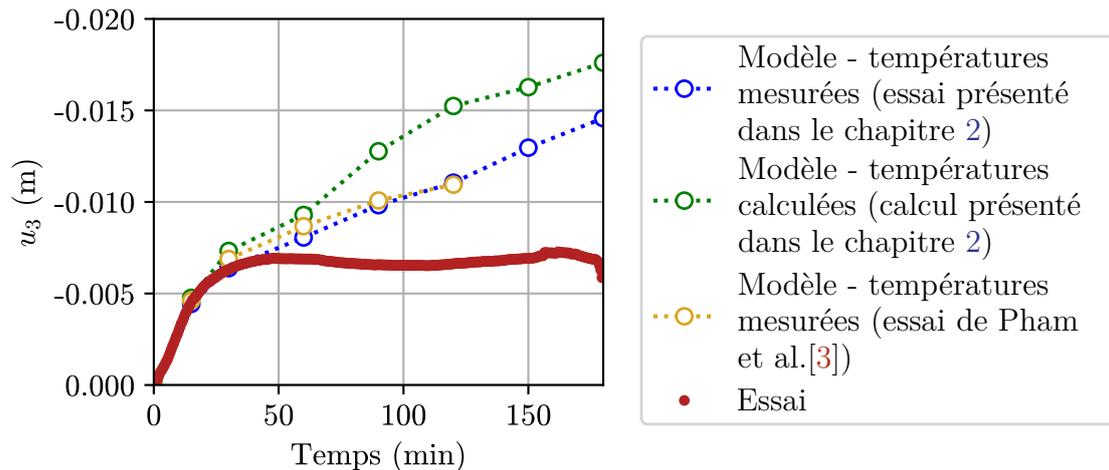


FIGURE 3.29 – Évolution de la flèche en fonction du temps d'exposition au feu pour différents profils de température

#### 4.4 Remarques finales

Dans cette partie, nous avons proposé une comparaison entre résultats numériques et résultats expérimentaux basés sur l'essai non-chargé de Pham et al. [3] puis sur l'essai chargé présenté dans le chapitre 2. Ces comparaisons ont permis de montrer que l'ordre de grandeur des déformations obtenues par la modélisation était correct, et que les principaux phénomènes observés, tels que la double-courbure du mur, étaient bien reproduits.

Cependant, nous avons aussi mis en évidence quelques limites : le modèle semble rendre compte d'un mur plus raide qu'il n'est en réalité, et ne rend pas compte de la stabilisation de la déformée thermique après 30 à 60 minutes d'exposition au feu. Cela peut être dû à la non-prise en compte d'un comportement non-élastique des matériaux, à des conditions aux limites expérimentales qui ont été simplifiées pour le calcul, mais aussi à un manque de connaissance du comportement des matériaux constitutifs de la maçonnerie sous des sollicitations thermomécaniques. Par exemple, il n'existe pas à ce jour de travaux sur le fluage thermique transitoire, dont l'effet est bien connu pour le béton, concernant les pierres ou les mortiers.

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche par homogénéisation thermo-élastique de la détermination de la déformée thermique d'un mur de maçonnerie en pierre massive porteuse.

La comparaison de l'approche proposée à une modélisation par éléments finis 3D a permis de montrer que l'approche par homogénéisation donnait des résultats aussi précis que le calcul complet, pour un temps de résolution et des ressources numériques

bien moindres. Nous avons également montré que la déformée thermique obtenue par homogénéisation était proche de celle obtenue par la méthode semi-analytique proposée par Yang [91], pour un mur homogène constitué uniquement de pierre. La présence de joints a donc peu d'effet sur la déformée thermomécanique lorsqu'on adopte une modélisation thermoélastique et que l'épaisseur des joints reste faible. L'atout majeur de l'approche par éléments finis de plaques par rapport à une approche semi-analytique réside dans la grande variété des conditions aux limites qu'il est possible de traiter. Ainsi, on peut espérer se rapprocher davantage des conditions aux limites réelles.

Nous avons pu voir, en comparant la flèche calculée à la flèche mesurée sur l'essai présenté dans le chapitre 2 et sur l'essai non-chargé présenté par Pham et al. [3], que les tendances observées étaient plutôt bien reproduites de façon qualitative, mais que, d'un point de vue quantitatif, la flèche pouvait être sous-estimée ou surestimée. L'écart est probablement dû à l'absence de prise en compte des phénomènes de plasticité, d'endommagement, ainsi que de la fissuration dans le modèle. Cependant, compte-tenu de la sensibilité des modèles à la distribution de température et aux conditions aux limites appliquées, et de la difficulté à les déterminer, on peut se demander si un modèle proposant une description plus précise du comportement mécanique donnerait réellement de meilleurs résultats prédictifs.

\*       \*  
\*  
\*

# Chapitre 4

## Évaluation numérique du critère de résistance d'un mur de maçonnerie - Approche simplifiée bidimensionnelle

**Résumé :** Dans ce chapitre, on introduit tout d'abord la théorie du Calcul à la rupture et son application dans le cadre de l'homogénéisation périodique, qui permettront, au fil de la troisième partie de ce mémoire (chapitres 4 à 8), d'approcher par l'intérieur et par l'extérieur le domaine de résistance d'un mur de maçonnerie, à température ambiante tout d'abord, puis au feu. Ce chapitre se concentre ensuite sur le cas simplifié d'une cellule de base bidimensionnelle, dans laquelle l'effet des joints verticaux est négligé. Après avoir présenté la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture, un premier exemple est proposé, reprenant la géométrie et les matériaux du mur testé dans le chapitre 2. Enfin, une description plus fine, correspondant davantage aux observations expérimentales, du critère de résistance de la pierre et du mortier est proposée et le domaine de résistance correspondant est déterminé.

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>111</b>
<b>2</b>	<b>Problématique d'homogénéisation périodique en Calcul à la rupture</b>	<b>112</b>
2.1	Présentation de la théorie du Calcul à la rupture	112
2.2	Principe de la démarche d'homogénéisation en Calcul à la rupture	116
2.3	Quelques travaux antérieurs	117
<b>3</b>	<b>Position du problème auxiliaire de Calcul à la rupture</b>	<b>120</b>
3.1	Géométrie et matériaux	120
3.2	Mode de chargement de la cellule de base	121
3.3	Critère de résistance macroscopique : définitions statique et cinématique	122
3.4	Influence du feu	123

<b>4</b>	<b>Implémentation numérique par la méthode des éléments finis en Calcul à la rupture . . . . .</b>	<b>124</b>
4.1	Formulation éléments finis de l'approche statique à température ambiante . . . . .	125
4.2	Formulation éléments finis de l'approche cinématique à température ambiante . . . . .	126
4.3	Influence du feu . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Exemple applicatif . . . . .</b>	<b>129</b>
5.1	Présentation de l'exemple . . . . .	129
5.2	Propriétés de résistance des matériaux à température ambiante	129
5.3	Propriétés de résistance des matériaux à température élevée . .	131
5.4	Maillage adopté et problème numérique correspondant . . . . .	131
5.5	Résultats . . . . .	133
<b>6</b>	<b>Vers une définition plus fine du critère de résistance . . . . .</b>	<b>135</b>
6.1	Quelques constats expérimentaux . . . . .	135
6.2	Critères de Mohr-Coulomb tronqués en traction et en compression isotropes . . . . .	135
6.3	Exemple applicatif . . . . .	137
6.4	Remarques finales . . . . .	140
<b>7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>141</b>

---

**Note :** Les travaux présentés dans ce chapitre ont été en partie présentés dans le papier de conférence suivant :

E. Donval, D.T. Pham, G. Hassen, P. de Buhan et D. Pallix. Détermination numérique du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie exposé au feu par une approche d'homogénéisation en Calcul à la Rupture. Présenté au 25e Congrès Français de Mécanique, Nantes, Septembre 2022.

# 1 Introduction

Dans les deux premières parties de ce mémoire, nous avons vu que le gradient thermique dû au feu avait deux impacts principaux : la création d'une courbure thermique, pour laquelle une méthode d'évaluation a été proposée dans le chapitre 3, ainsi que la dégradation de la résistance des matériaux constitutifs. L'objectif de la troisième partie de ce mémoire est de traiter ce dernier point en proposant des approches permettant d'évaluer la résistance de l'assemblage composé de blocs et de mortier lorsqu'il est exposé au feu.

Pour ce faire, nous avons choisi de nous baser sur la théorie du Calcul à la rupture, qui permet d'évaluer la charge de ruine d'une structure de manière directe, en assurant la compatibilité entre l'équilibre et le respect d'un critère de résistance en tout point de la structure. En effet, le caractère direct, ne nécessitant pas la connaissance de la loi de comportement du matériau, de cette approche la rend particulièrement adaptée au travail de l'ingénieur. Dans cette troisième partie du mémoire, plusieurs approches par l'intérieur et par l'extérieur du domaine de résistance, de complexité progressive, sont proposées, puis validées expérimentalement. Le présent chapitre propose une première application sur une géométrie simplifiée, considérant le mur en déformations planes. Les chapitres 5 et 6 proposent respectivement des approches semi-analytique et numériques du domaine de résistance du mur de maçonnerie sur une géométrie tridimensionnelle. Le chapitre 7 constitue un prolongement de ces deux chapitres pour la prise en compte d'un critère de résistance plus précis. Enfin, dans le chapitre 8, la validité de la modélisation par le Calcul à la rupture est évaluée par comparaison à une campagne expérimentale réalisée sur des trumeaux de maçonnerie à température ambiante.

Dans ce chapitre, on commence par rappeler brièvement les fondements du Calcul à la rupture, de son application dans le cadre de la méthode d'homogénéisation périodique, et de sa mise en œuvre numérique. Le problème auxiliaire de Calcul à la rupture est ensuite décrit dans un cadre bidimensionnel, puis on présente la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique. Ces approches sont appliquées à la détermination du domaine de résistance du mur testé dans le chapitre 2. Enfin, une dernière partie du chapitre propose quelques pistes d'amélioration pour la prise en compte de critères de résistance plus réalistes à l'échelle du matériau.

## 2 Problématique d'homogénéisation périodique en Calcul à la rupture

### 2.1 Présentation de la théorie du Calcul à la rupture

La théorie du Calcul à la rupture, développée par Salençon [115], est une approche rigoureuse visant à déterminer la charge extrême d'une structure. Elle se base sur un raisonnement de compatibilité entre l'équilibre de la structure vis-à-vis du chargement auquel elle est soumise, et le respect, en tout point de la structure, d'un critère de résistance des matériaux.

Un problème de Calcul à la rupture est donc défini par trois types de données (voir figure 4.1) :

- La géométrie du système, que l'on désignera génériquement par le volume  $\Omega$ , de frontière  $\partial\Omega$ . On se place dans l'hypothèse des petites perturbations, le changement de géométrie dû au chargement est donc négligeable ;
- Le chargement, pouvant être composé de plusieurs paramètres, que l'on désignera génériquement par le vecteur chargement  $\underline{Q}$ , et qui peut être constitué d'efforts volumiques (notés  $\rho\underline{F}$  sur la figure 4.1), surfaciques (notés  $\underline{T}$  sur la figure 4.1), linéiques ou éventuellement ponctuels ;
- Le critère de résistance des matériaux, donné en tout point par une fonction  $f$ . Ce critère de résistance est défini par un domaine de résistance  $G(\underline{x})$  dans l'espace des efforts intérieurs du problème (composantes du tenseur des contraintes de Cauchy  $\underline{\sigma}$  pour une modélisation de type milieu continu 3D, couple de tenseur des efforts membranaires et des moments fléchissants  $(\underline{N}, \underline{M})$  pour une plaque de Kirchhoff-Love par exemple). Un champ d'efforts intérieurs vérifie le critère de résistance s'il appartient au domaine de résistance, ce qui correspond à une valeur  $f \leq 0$  pour le critère. Le domaine de résistance est généralement un domaine convexe, contenant le chargement nul.

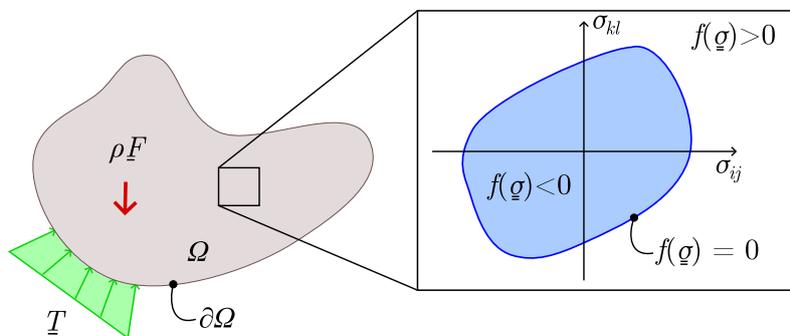


FIGURE 4.1 – Présentation graphique d'un problème de Calcul à la rupture

### 2.1.1 Domaine des chargements potentiellement supportables

Pour simplifier la présentation, on se placera par la suite dans le cadre d'un milieu continu tridimensionnel, qui sera adopté à l'échelle microscopique dans toute la partie 3 de ce mémoire (chapitre 4 à 8). Le cadre mécanique des plaques et des coques sera abordé dans la partie 4 (chapitre 9).

La théorie du Calcul à la rupture nous permet de définir le domaine  $K$  des chargements  $\underline{Q}$  potentiellement supportables par la structure considérée.  $K$  est alors par définition l'ensemble des chargements  $\underline{Q}$  pouvant être équilibrés par un champ d'efforts intérieurs  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  statiquement admissible avec les données en effort du problème et vérifiant, en tout point du domaine  $\Omega$ , le critère de résistance :

$$\underline{Q} \in K \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \underline{\sigma}(\underline{x}) \text{ statiquement admissible avec } \underline{Q} & \text{(Condition d'équilibre)} \\ \underline{\sigma}(\underline{x}) \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega & \text{(Condition de résistance)} \end{cases} \quad (4.1)$$

L'adverbe "potentiellement" signifie ici que, si le matériau n'est pas élastique parfaitement plastique standard (i.e. vérifiant la normalité de la règle d'écoulement plastique), rien n'assure qu'un chargement potentiellement supportable puisse effectivement être supporté. Il est en revanche certain que les chargements situés à l'extérieur de  $K$  ne seront pas supportés. Dans le cas particulier où le matériau est élastique parfaitement plastique standard, la théorie du Calcul à la rupture rejoint celle de l'Analyse limite, en générale mieux connue. Il est alors possible de déterminer de manière certaine (et non plus potentielle) le domaine des chargements dits "limites". Les résultats obtenus par la théorie du Calcul à la rupture sont donc d'autant plus fiables que la loi de comportement du matériau se rapproche de l'élasto-plasticité parfaite.

Il existe plusieurs manières de déterminer le domaine des chargements potentiellement supportables :

- L'approche statique, visant à appliquer directement le raisonnement de compatibilité entre l'équilibre vis-à-vis du chargement et la résistance en tout point de la structure ;
- L'approche cinématique, par laquelle ces deux conditions sont exprimées sous forme duale par le biais de champs de vitesse virtuels.

### 2.1.2 Approche statique

L'approche statique consiste, pour un chargement  $\underline{Q}$  donné, à appliquer directement la définition donnée par l'équation (4.1). Si l'on peut exhiber un champ d'efforts intérieurs  $\underline{\sigma}(\underline{x})$  statiquement admissible avec  $\underline{Q}$  et vérifiant en tout point de  $\Omega$  le critère de résistance, alors  $\underline{Q} \in K$ . Une approche statique du domaine de résistance, notée  $K^s$  par la suite, est obtenue en prenant l'enveloppe convexe d'un ensemble de chargements  $\underline{Q}^i$  vérifiant la

définition (4.1) (voir figure 4.2 (a)).

Le domaine de résistance peut notamment être exploré par des trajets de chargement radiaux. Pour un chargement  $\tilde{Q}$  donné (que l'on pourra par exemple choisir unitaire), le chargement extrême correspond à  $\lambda^+ \tilde{Q}$  tel que :

$$\lambda^+ = \sup \{ \lambda | \lambda \tilde{Q} \in K \} \quad (4.2)$$

Soit un champ de contrainte quelconque  $\tilde{\underline{\sigma}}$  équilibrant  $\tilde{Q}$ . Une approche statique sur ce trajet de chargement revient alors à déterminer le multiplicateur  $\lambda^s$  tel que :

$$\lambda^s = \sup \{ \lambda | \lambda \tilde{\underline{\sigma}} \in G(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \Omega \} \leq \lambda^+ \quad (4.3)$$

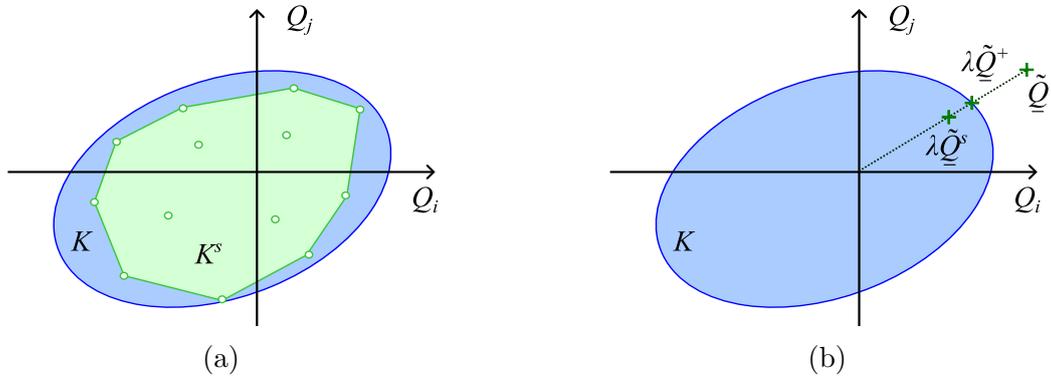


FIGURE 4.2 – Approche statique : enveloppe convexe de chargements potentiellement supportables  $\underline{Q}^i$  constituant  $K^s$  (a) et principe de l'approche par trajets de chargements radiaux (b)

### 2.1.3 Approche cinématique

L'approche cinématique consiste à dualiser la définition du domaine de résistance donnée par l'équation (4.1). Soit  $\underline{u}$  un champ de vitesse virtuelle. Ce champ n'est astreint à aucune limitation, et peut notamment exhiber des discontinuités que l'on notera  $\underline{v} = \llbracket \underline{u} \rrbracket$ .

On introduit alors la puissance des efforts extérieurs :

$$P_e(\underline{u}) = \underline{Q} \cdot \dot{\underline{q}} \quad (4.4)$$

où  $\dot{\underline{q}}$  représente le vecteur des paramètres cinématiques en dualité avec les paramètres de chargement, ainsi que la puissance de déformation :

$$P_{def}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV + \int_{\Sigma} (\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} dS \quad (4.5)$$

où  $\underline{\underline{d}} = (\underline{\text{grad}} \underline{u} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{u})/2$  est le taux de déformation virtuelle associé au champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$ , et  $\Sigma$  désigne l'ensemble des surfaces de discontinuité du champ de vitesse

virtuelle, de normale unitaire  $\underline{n}$ .

La dualisation des équations d'équilibre aboutit alors à la condition suivante :

$$P_e(\underline{u}) = P_{def}(\underline{u}) \quad \forall \underline{u} \quad (4.6)$$

La dualisation du critère de résistance local se base sur l'utilisation de la fonction d'appui  $\pi$  du domaine  $G(\underline{x})$ , définie pour tout taux de déformation virtuelle  $\underline{d}$  (resp. pour toute discontinuité de vitesse virtuelle  $\underline{v}$ ) par :

$$\pi(\underline{d}) = \sup_{\underline{\sigma} \in G(\underline{x})} \underline{\sigma} : \underline{d} \quad \text{et} \quad \pi(\underline{v}, \underline{n}) = \sup_{\underline{\sigma} \in G(\underline{x})} (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{v} \quad (4.7)$$

La puissance résistante maximale s'écrit alors :

$$P_{rm}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}) dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{v}, \underline{n}) dS \quad (4.8)$$

et une condition nécessaire de stabilité vis-à-vis du chargement  $\underline{Q}$  s'écrit alors :

$$P_e(\underline{u}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{u}) \leq P_{rm}(\underline{u}) \quad \forall \underline{u} \quad (4.9)$$

Comme pour l'approche statique, le domaine de résistance peut être exploré par trajets de chargement radiaux. Pour un trajet de chargement  $\tilde{\underline{Q}}$  donné, et un chargement  $\underline{Q} = \lambda^c \tilde{\underline{Q}}$ , et en supposant que  $\tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{u}) > 0$ , la condition nécessaire de stabilité se réécrit :

$$\lambda^c \leq \frac{P_{rm}(\underline{u})}{\tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{u})} \quad (4.10)$$

L'approche cinématique consiste alors à chercher le champ de vitesse virtuelle  $\underline{u}$  minimisant le membre de droite de l'équation (4.10).

Pour ce chargement, l'équation  $P_e(\underline{u}) = P_{rm}(\underline{u})$  définit, pour  $\underline{\dot{q}}$  fixé, un hyperplan divisant l'espace des chargements en deux demi-espaces (voir figure 4.3 (a)). Une approche par l'extérieur du domaine des chargements potentiellement supportables, notée  $K^{cine}$  est finalement définie comme l'intersection de tous les demi-espaces tels que  $P_e(\underline{u}) \leq P_{rm}(\underline{u})$  correspondant à tous les chargements  $\underline{Q}$  explorés (voir figure 4.3 (b)).

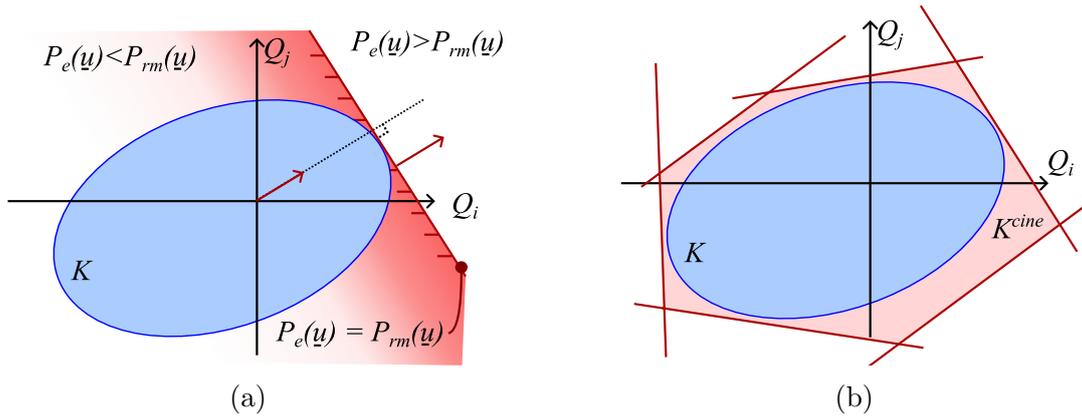


FIGURE 4.3 – Approche cinématique : trajets de chargements radiaux (a) et intersection des demi-espaces constituant  $K^{cine}$

## 2.2 Principe de la démarche d’homogénéisation en Calcul à la rupture

Lorsque la structure est composée d’un assemblage qui se répète périodiquement, il peut être commode de remplacer cet assemblage par un matériau homogène équivalent dans l’étude. L’objectif de l’homogénéisation en Calcul à la rupture (Suquet [116], de Buhan [117]) est de déterminer, de façon rigoureuse, le critère de résistance macroscopique de ce matériau homogène équivalent.

Un tel critère peut être déterminé par la résolution d’un problème de Calcul à la rupture dit auxiliaire, tout comme dans le cas élastique présenté dans le chapitre 3. Pour ce faire, on commence par extraire une cellule de base du milieu périodique initial. Cette cellule de base est ensuite soumise à un chargement bien choisi, qui sera précisé par la suite. Tout comme pour une structure, on peut appliquer les approches statique et cinématique du Calcul à la rupture pour déterminer le domaine de résistance macroscopique.

Ce critère, s’il s’exprime sous forme analytique ou semi-analytique, peut ensuite être utilisé directement à l’échelle de la structure homogénéisée. S’il est obtenu par voie numérique, il pourra en revanche être nécessaire de l’approximer pour pouvoir l’appliquer à la structure considérée.

On notera enfin que le cadre de l’homogénéisation en Calcul à la rupture n’est valable que lorsque la taille des hétérogénéités est faible par rapport à celle de la structure.

## 2.3 Quelques travaux antérieurs

### 2.3.1 Homogénéisation en Calcul à la rupture pour les milieux continus 2D ou 3D

Dans certains cas simples, il est possible de déterminer analytiquement le critère de résistance macroscopique d’une structure hétérogène : un milieu poreux (Maghous [118]), un matériaux multicouche (de Buhan [117]), un composite à fibres (de Buhan et Taliercio [119]) par exemple.

Quelques cas plus appliqués (terre armée (de Buhan et al. [120]), renforcement du sol par des colonnes ballastées (Jellali et al. [121])) peuvent également être traités par des approches analytiques et ainsi fournir des outils de calcul intéressants pour des applications de dimensionnement.

Lorsque le critère est plus complexe, ou afin d’obtenir une meilleure évaluation de celui-ci, il est également possible de recourir à des approches numériques. On peut notamment citer les travaux de Guéguin et al. [122] sur les sols renforcés par colonnes. Dans ce cas, la cellule de base est discrétisée en éléments finis, puis soumise à un chargement périodique qu’on précisera plus tard.

Dans le cas des composites à renforts linéaires fibrés, il est également intéressant de mentionner les approches multiphasiques, qui permettent de tenir compte d’une éventuelle perte d’adhérence entre les différentes phases composant le matériau, ou encore de prendre en compte les résistances en flexion et cisaillement des inclusions de renforcement (Thai Son et al. [123] pour une approche analytique concernant les sols renforcés, Vincent et al. [124] sur du béton armé et Hassen et al. [125] sur des sols renforcés pour une approche numérique).

### 2.3.2 Homogénéisation en Analyse limite et en Calcul à la rupture pour les plaques

La problématique de l’homogénéisation des plaques en Analyse limite a été largement développée dans la thèse de Bourgeois [103].

Soit une plaque périodique dont on note  $\eta$  la dimension caractéristique de la période dans son plan, et  $e$  l’épaisseur. Une telle structure peut être modélisée comme une plaque bidimensionnelle si son épaisseur  $e$  est suffisamment petite par rapport aux deux autres dimensions de la structure. La définition de la cellule de base et du modèle mécanique associé dépendent du ratio entre  $\eta$  et  $e$ . Trois cas peuvent être distingués :

- **Épaisseur très petite par rapport à la taille de la période** ( $\eta \gg e$  - voir figure 4.4 (a)) : la cellule de base peut alors être elle-même considérée comme une

plaque de Kirchhoff-Love ou de Reissner-Mindlin selon le modèle considéré. Une tôle perforée fait par exemple partie de cette catégorie. Des résultats ont notamment été obtenus de manière numérique par Bleyer et de Buhan ([126]).

- **Période très petite par rapport à l'épaisseur** ( $\eta \ll e$  - voir figure 4.4 (b)) : on peut alors résoudre un problème d'homogénéisation bidimensionnelle dans chaque couche, puis obtenir un critère à l'échelle de la plaque en se basant sur la théorie des stratifiés. Les plaques multicouches, homogènes dans leur plan, constituent un exemple limite de ce cas, et on peut par exemple citer l'approche analytique du domaine de résistance d'un mur en béton exposé au feu proposée par Yang [91]. Pour simplifier cette modélisation, les champs de contraintes peuvent également être considérés plans dans chaque couche. Concernant la maçonnerie, certaines approches se basent sur de telles hypothèses pour simplifier le problème (Milani et al. [127] par exemple). On peut cependant s'interroger sur la pertinence des hypothèses de contrainte plane et de période petite par rapport à l'épaisseur dans le cas des murs en maçonnerie.
- **Épaisseur et période du même ordre de grandeur** ( $\eta \approx e$  - voir figure 4.4 (c)) : dans ce cas, il est nécessaire de considérer une cellule de base tridimensionnelle. Pour faciliter la résolution, on peut notamment, comme proposé par Lewinski [128], imposer à cette cellule de base de suivre une cinématique de plaque. En choisissant une cinématique de Kirchhoff-Love, on peut alors déterminer le domaine de résistance dans l'espace des efforts membranaires et des moments fléchissants. De la même manière, en appliquant une cinématique de Reissner-Mindlin à la cellule de base, on peut obtenir le domaine de résistance équivalent dans l'espace des efforts membranaires, de cisaillement et des moments fléchissants. Du point de vue analytique, de telles approches ont notamment été développées par Dallot et Sab [129] pour des plaques stratifiées. Elles ont également été appliquées au cas des murs en maçonnerie par Sab [5], Cecchi et Sab [130] et par Stefanou et al. [82]. Concernant l'approche numérique, une telle méthode a été mise en œuvre par Bleyer et al. [131] sur une cellule de base correspondant à une poutre en béton armé, et nous proposerons, dans le chapitre 6, une mise en œuvre numérique appliquée à la maçonnerie.

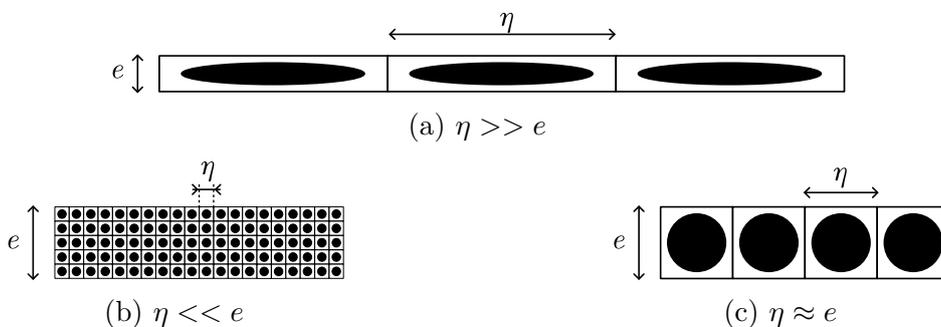


FIGURE 4.4 – Définition de la cellule de base et du modèle mécanique associé selon la géométrie du milieu initial

### 2.3.3 Enjeux et intérêts d’une mise en œuvre numérique

Comme évoqué dans le paragraphe précédent, plusieurs auteurs ont proposé des approches cinématiques analytiques ou semi-analytiques du domaine de résistance d’un mur de maçonnerie. Cependant, en l’absence d’approche statique, beaucoup plus difficile à mettre en œuvre analytiquement sur une cellule de base 3D pour le problème considéré, il est impossible d’évaluer la qualité des majorants obtenus par les approches cinématiques. De plus, la dégradation des matériaux provoquée par le feu apporte une hétérogénéité supplémentaire au problème. Les approches numériques du Calcul à la rupture présentent alors un intérêt majeur pour pouvoir accéder à des minorants ou à des majorants plus précis.

Nous avons vu dans la partie 2.1 que les approches statique et cinématique du Calcul à la rupture pouvaient s’exprimer respectivement sous forme d’un problème de maximisation du multiplicateur  $\lambda$  ou d’un problème de minimisation de  $P_{rm}(\underline{u})/P_e(\underline{u})$ . Les variables d’optimisation sont alors les composantes du tenseur des contraintes  $\underline{\sigma}$  pour l’approche statique, et du champ de vitesse  $\underline{u}$  pour l’approche cinématique. Ces problèmes d’optimisation peuvent donc être résolus assez naturellement une approche de type éléments finis, qui permet d’engendrer de tels champs de vitesse virtuelle.

Les premières méthodes développées dans le cadre de l’Analyse limite (Lysmer [132], Anderheggen et Knöpfel [133]) reposaient sur des solveurs d’optimisation linéaire. Il était alors nécessaire de linéariser le critère ou sa fonction d’appui, et la qualité des minorants et des majorants obtenus dépendait entre autres de cette approximation.

Le développement des méthodes d’optimisation, et notamment de l’algorithme de point intérieur par Nesterov et Nemirovskii [134] en 1984, a dans un premier temps permis l’amélioration des approches par linéarisation. Dans un second temps, l’extension de l’algorithme de point intérieur aux problèmes d’optimisation conique quadratique a permis la formulation directe, sans approximation, des critères de Tresca et de Mohr-Coulomb pour des problèmes bidimensionnels, ainsi que des critères de Von-Mises et de Drucker-Prager dans le cas 3D. On peut notamment citer les travaux de Makrodopoulos et Martin [135], ainsi que ceux de Krabbenhøft et al. [136]. Il faut cependant noter que l’utilisation de la programmation conique quadratique pour résoudre des problèmes d’Analyse limite ou de Calcul à la rupture repose sur l’existence de solveurs performants, comme Mosek [137] par exemple.

Pour des structures tridimensionnelles composées de matériaux de Tresca ou de Mohr-Coulomb, le problème ne peut plus s’écrire comme un problème d’optimisation conique de second ordre, et doit être mis sous la forme d’un problème d’optimisation semi-définie positive (SDP) (Martin et Makrodopoulos [138], Krabbenhøft et al. [139]). La taille bien plus importante du problème 3D par rapport à un problème 2D en déformations planes, combiné aux moins bonnes performances des algorithmes de résolution des problèmes SDP,

nous ont conduit à privilégier dans un premier temps une implémentation bidimensionnelle du problème, qui sera présentée dans la suite de ce chapitre.

Enfin, on notera que les solveurs d'optimisation commerciaux sont souvent généralistes, et, par conséquent, ne sont pas particulièrement bien adaptés à la résolution de problèmes modélisés par des éléments finis en Calcul à la rupture. Un axe de recherche consiste donc à développer des solveurs spécialement adaptés (Podlich et al. [140])

### 3 Position du problème auxiliaire de Calcul à la rupture

#### 3.1 Géométrie et matériaux

Comme indiqué dans l'introduction, on considère dans ce chapitre une géométrie simplifiée du mur, représenté sur la figure 4.5. Le mur est alors en conditions de déformations planes dans le plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , et seuls les joints horizontaux sont alors pris en compte. Le mur est modélisé comme un milieu continu, hétérogène, périodique dans la direction verticale  $\underline{e}_2$ , constitué de blocs de hauteur  $H$ , d'épaisseur  $h$ , reliés par des joints d'épaisseur  $t$ .

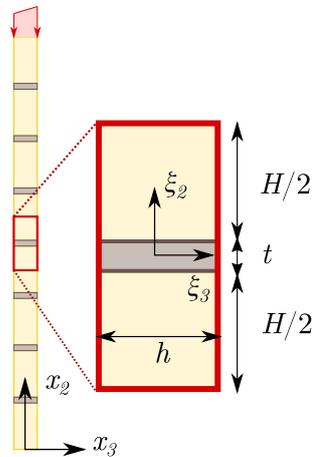


FIGURE 4.5 – Mur en déformations planes dans le plan  $(\underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , et cellule de base extraite

On peut extraire de ce milieu périodique une cellule de base composée de deux demi-blocs et d'un joint horizontal, également représentée sur la figure 4.5.

Dans un premier temps, la résistance des blocs et du mortier est décrite par un critère de Mohr-Coulomb de cohésion  $c^b$  et d'angle de frottement interne  $\varphi^b$  pour les blocs (resp.  $c^m$  et  $\varphi^m$  pour le mortier) :

$$f(\underline{\sigma}) = (1 + \sin \varphi^k) \sigma_I - (1 - \sin \varphi^k) \sigma_{III} - 2c^k \cos \varphi^k \leq 0 \quad (k = b, m) \quad (4.11)$$

où  $\sigma_I$  et  $\sigma_{III}$  sont respectivement les contraintes principales majeure et mineure (comptées positivement en traction).

### 3.2 Mode de chargement de la cellule de base

Le mode de chargement de la cellule de base est le suivant :

- Les forces de volume sont nulles ;
- Les faces latérales de la cellule de base sont libres de contraintes ;
- Le vecteur contrainte est antipériodique sur les faces inférieure et supérieure de la cellule de base ;
- La vitesse sur les faces inférieure et supérieure de la cellule de base est de la forme (Bourgeois [103]) :

$$\underline{u}_{D,\dot{\chi}} - \underline{u}^{per}(\underline{\xi}) = (D - \xi_3 \dot{\chi}) \xi_2 \underline{e}_2 + \frac{1}{2} \dot{\chi} \xi_2^2 \underline{e}_3 \quad (4.12)$$

où  $D$  est le taux de déformation macroscopique dans la direction 2 (direction verticale),  $\dot{\chi}$  est le taux de courbure et  $\underline{u}^{per}$  est la fluctuation périodique du champ de vitesse.

On définit alors l'espace des champs de contraintes statiquement admissibles avec les données en efforts du problème. Ces champs de contraintes  $\underline{\sigma}$  doivent vérifier :

- L'équilibre local en l'absence de forces de volume ;
- L'équation de saut à la traversée d'éventuelles surfaces de discontinuité du champ de contraintes ;
- La condition de périodicité sur les faces inférieure et supérieure de la cellule de base.

On définit également l'espace des champs de vitesse virtuelle cinématiquement admissibles, qui correspondent aux champs vérifiant l'équation (4.12).

Pour de tels champs de vitesse, le champ de taux de déformation  $\underline{d}$  s'écrit :

$$\underline{d} - \underline{d}^{per} = (D - \xi_3 \dot{\chi}) \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 \quad (4.13)$$

où  $\underline{d}^{per}$  est le taux de déformation correspondant à la fluctuation périodique de vitesse  $\underline{u}^{per}$ .

On peut montrer que pour tout champ de contrainte statiquement admissible et tout champ de déplacement cinématiquement admissible avec le chargement défini par les paramètres cinématiques  $(D, \dot{\chi})$ , le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$\int_V \underline{\sigma} : \underline{d} dV = |S|(ND + M\dot{\chi}) \quad (4.14)$$

où  $V = (H + t) \times e \times 1$  est le volume de la cellule de base par unité de longueur dans la

direction 1, et  $|S| = (H + t) \times 1$  sa surface projetée sur le plan  $(O\underline{e}_1\underline{e}_2)$ , également par unité de longueur dans la direction 1.

Les paramètres de chargement sont alors l'effort normal et le moment fléchissant, définis par unité de longueur dans la direction  $\underline{e}_1$  :

$$N = \frac{1}{|S|} \int_V \sigma_{22} dV \quad \text{et} \quad M = -\frac{1}{|S|} \int_V \xi_3 \sigma_{22} dV \quad (4.15)$$

### 3.3 Critère de résistance macroscopique : définitions statique et cinématique

Dans le cadre de la théorie du Calcul à la rupture, le domaine de résistance macroscopique  $G^M$ , et le critère macroscopique associé  $F$  sont définis de la manière suivante :

$$(N, M) \in G^M \Leftrightarrow F(N, M) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \underline{\sigma} \text{ statiquement admissible avec } (N, M), \\ \forall \underline{\xi} \in S^k, f^k(\underline{\sigma}(\underline{\xi})) \leq 0, k = b, m \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $S^k$  est le domaine de la cellule occupé par le composant  $k$  ( $b$  pour le bloc et  $m$  pour le mortier).

Un champ de contrainte est statiquement admissible avec  $(N, M)$  si et seulement s'il vérifie l'équilibre en tout point, l'équation de saut et la condition d'antipériodicité du vecteur contrainte tels que présentés dans la sous-partie 3.2, et qu'il équilibre l'effort normal  $N$  et le moment fléchissant  $M$ , tels qu'ils ont été définis dans cette même sous-partie.

La dualisation des équations d'équilibre par le théorème des puissances virtuelles, en prenant en compte les conditions de résistance des deux matériaux constitutifs, conduit à la définition suivante du domaine de résistance macroscopique :

$$G^M = \bigcap_{(D, \dot{\chi}) \in \mathbb{R}^2} \left\{ (N, M) \mid ND + M\dot{\chi} \leq \Pi^M(D, \dot{\chi}) \right\} \quad (4.17)$$

où  $\Pi^M(D, \dot{\chi})$  est la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique, définie comme :

$$\Pi^M(D, \dot{\chi}) = \sup \left\{ ND + M\dot{\chi} \mid (N, M) \in G^M \right\} \quad (4.18)$$

En supposant les approches statique et cinématique équivalentes, on aboutit à l'expression suivante de la fonction d'appui macroscopique :

$$\Pi^M(D, \dot{\chi}) = \min_{\underline{u} \in C.A.(D, \dot{\chi})} \left\{ \frac{1}{|S|} P_{rm}(\underline{u}) \right\} \quad (4.19)$$

Dans cette expression, la puissance résistante maximale développée dans la cellule de base s'exprime de la manière suivante :

$$P_{rm}(\underline{u}) = \int_{S^b} \pi^b(\underline{d})dV + \int_{\Sigma^b} \pi^b(\underline{v}, \underline{n})dS + \int_{S^m} \pi^m(\underline{d})dV + \int_{\Sigma^m} \pi^m(\underline{v}, \underline{n})dS \quad (4.20)$$

Dans cette expression,  $S^k$  représente le volume occupé par le matériau  $k$  par unité de longueur dans la direction 1, et  $\Sigma^k$  les surfaces de discontinuité dans le matériau  $k$ , également par unité de longueur dans la direction 1.

Dans le cas où on se place en déformations planes dans le plan  $(e_2, e_3)$ , les fonctions d'appui  $\pi^k(\underline{d})$  correspondant aux déformations  $\underline{d}$  dans le composant  $k$  sont données par :

$$\begin{cases} \pi^k(\underline{d}) = \frac{c^k}{\tan \varphi^k} \text{tr} \underline{d} & \text{si} \quad \text{tr} \underline{d} \geq (|d_I| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ \pi^k(\underline{d}) = +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.21)$$

où  $d_I$  et  $d_{III}$  désignent les valeurs principales du tenseur des taux de déformation, tandis que les fonctions d'appui  $\pi^k(\underline{v}, \underline{n})$  correspondant aux discontinuités de vitesse  $\underline{v}$  au travers de surfaces de discontinuités  $\Sigma$  de normale  $\underline{n}$  sont données par :

$$\begin{cases} \pi^k(\underline{v}, \underline{n}) = \frac{c^k}{\tan \varphi^k} \underline{v} \cdot \underline{n} & \text{si} \quad \underline{v} \cdot \underline{n} \geq |\underline{v}| \sin \varphi^k \\ \pi^k(\underline{v}, \underline{n}) = +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.22)$$

### 3.4 Influence du feu

Comme mentionné dans l'introduction de ce mémoire ainsi que dans l'analyse des résultats expérimentaux du chapitre 2, l'exposition au feu a de multiples effets sur un mur de maçonnerie. Au niveau de la structure, une courbure thermique ainsi que des fissures ont pu être observées. A haute température, les matériaux vont également perdre progressivement leur résistance et leur raideur.

Dans le cadre de l'Analyse limite ou du Calcul à la rupture, les contraintes thermomécaniques dues au gradient thermique dans l'épaisseur du mur, qui sont des chargements auto-équilibrés (i.e. à l'équilibre avec un chargement mécanique nul), n'impactent pas la charge extrême de la structure. Par conséquent, au niveau mésoscopique de l'assemblage pierre-mortier, seule la dégradation des matériaux en fonction de la température impacte la charge extrême (voir Pham [90] par exemple).

En supposant le transfert thermique unidirectionnel dans la direction transversale du mur, la température dans le mur pour un temps d'exposition au feu donné ne dépend que de la coordonnée dans l'épaisseur du mur  $\xi_3$ . Pour un temps d'exposition au feu donné, le profil de résistance à la traction et à la compression des deux matériaux est une fonction

de la température, et donc de la coordonnée  $\xi_3$ .

Dans le cas d'un critère de Mohr-Coulomb, la résistance à la traction et à la compression dépendent de la cohésion et de l'angle de frottement interne du matériau. Puisqu'il n'existe dans la littérature aucune donnée sur l'évolution de l'angle de frottement interne d'un calcaire exposé à des températures élevées, nous avons choisi de le considérer comme demeurant constant en fonction de la température, ce qui permet également de simplifier les modèles présentés dans ce chapitre ainsi que dans les chapitres 5 à 7. On considère donc que seule la cohésion est affectée par le feu (voir figure 4.6 (a)).

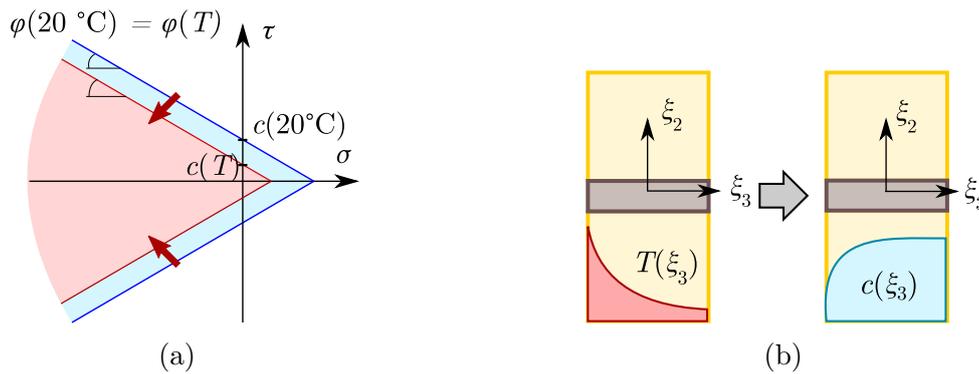


FIGURE 4.6 – (a) Critère de Mohr-Coulomb à température ambiante et à température élevée; (b) Schématisation du profil de cohésion en fonction du profil de température dans l'épaisseur du mur

Finalement, déterminer le domaine de résistance d'un mur après un temps d'exposition au feu donné revient simplement à déterminer la résistance d'un mur dont la cohésion varie dans la direction 3 (voir figure 4.6 (b)), et dont l'angle de frottement interne et la cohésion sont constants par morceaux dans la direction 2.

## 4 Implémentation numérique par la méthode des éléments finis en Calcul à la rupture

Compte-tenu des fortes hétérogénéités du problème considéré, une approche numérique nous a, dans un premier temps, parue plus adaptée qu'une approche analytique.

Pour l'approche statique comme pour l'approche cinématique, un maillage triangulaire constitué d'éléments linéaires (T3) est utilisé pour discrétiser la cellule de base. Un exemple de maillage sera proposé dans la partie 5.

## 4.1 Formulation éléments finis de l'approche statique à température ambiante

Dans le cadre de l'approche statique, les inconnues du problème d'optimisation sont les composantes du champ de contrainte, qui sont exprimées aux nœuds de chaque élément, autorisant ainsi les discontinuités du champ de contraintes entre deux éléments adjacents (voir figure 4.7). Le champ de contrainte au point  $\underline{\xi}$  d'un élément  $j$  s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}}^j(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^3 N_i(\underline{\xi}) \underline{\underline{\sigma}}_i^j \quad (4.23)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_i^j$  désigne le tenseur des contraintes au nœud  $i$  de l'élément  $j$ , et  $N_i$  désigne la fonction de forme linéaire correspondant à ce même nœud. L'expression des fonctions de forme est classique et peut être retrouvée dans Dhatt et Touzot [141] par exemple. Le caractère linéaire des fonctions de forme, combiné avec la convexité du critère, permet de s'assurer que la vérification du critère aux trois nœuds de l'élément implique bien qu'il soit respecté partout sur l'élément.

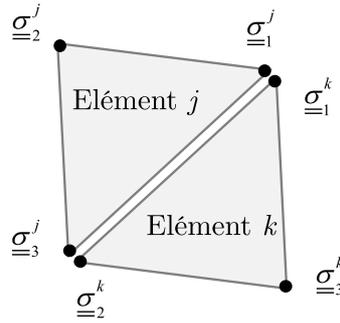


FIGURE 4.7 – Interpolation linéaire du champ de contrainte pour l'approche statique

Pour un trajet de chargement  $(N, M) = (\lambda \cos \alpha, \lambda \sin \alpha)$  donné, l'approche statique revient à maximiser la valeur du multiplicateur de charge sous les six contraintes suivantes :

### Contraintes 1 à 5 (Admissibilité statique)

- En tout élément, le champ de contrainte est à l'équilibre avec des forces à distance nulles ;
- La condition de saut  $[[\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n}]] = 0$  est vérifiée au niveau de toutes les surfaces de discontinuité du tenseur des contraintes ;
- Sur les surfaces  $\xi_3 = \pm h/2$ , le vecteur contrainte est nul ;
- Sur les surfaces  $\xi_2 = \pm(H + t)/2$ , le vecteur contrainte est antipériodique ;
- Le champ de contrainte solution doit également équilibrer le chargement  $(N, M)$ , défini par l'équation (4.15).

Ces conditions d'admissibilité statique sont des contraintes linéaires portant sur les valeurs nodales du tenseur des contraintes, et qui sont reliées, pour la dernière condition, au chargement macroscopique et à la géométrie de l'élément.

### Contrainte 6 (Critère de résistance)

Enfin, le champ de contrainte doit vérifier le critère de résistance en tout point de la cellule de base. Pour une modélisation bidimensionnelle en déformations planes, le critère de résistance de Mohr-Coulomb peut s'exprimer sous forme de conditions coniques de second ordre.

Ce problème d'optimisation, sous sa forme discrétisée, peut ensuite être résolu par un solveur d'optimisation conique. Dans cette étude, l'API<sup>1</sup> Python de Mosek (version 9.3) a été utilisée.

## 4.2 Formulation éléments finis de l'approche cinématique à température ambiante

Pour l'approche cinématique, les variables principales du problème d'optimisation sont les vitesses, exprimées aux nœuds de chaque élément (tel que représenté sur la figure 4.8) afin d'autoriser les discontinuités de vitesse entre éléments.

Le champ de vitesse dans un élément  $j$  peut alors s'écrire :

$$\underline{u}^j(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^3 N_i^j(\underline{\xi}) \underline{U}_i^j \quad (4.24)$$

où  $\underline{U}_i^j$  est la vitesse au nœud  $i$  de l'élément  $j$ , et  $N_i^j$  désigne la fonction de forme linéaire du même nœud.

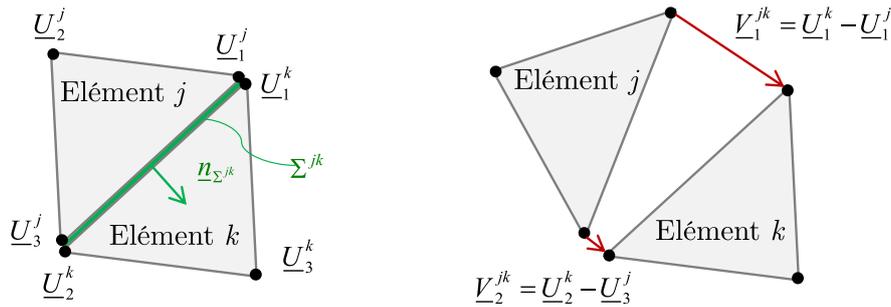


FIGURE 4.8 – Interpolation linéaire du champ de vitesse pour l'approche cinématique

La linéarité du champ de vitesse virtuelle en fonction des coordonnées d'espace rend les taux de déformation  $\underline{d}^j$  correspondants constants par élément, et permet d'assurer que la vérification de la condition de pertinence en n'importe quel point de l'élément (et en particulier en son barycentre) implique son respect en tout point de l'élément. De la même manière, la linéarité des discontinuités de vitesse  $\underline{v}^{jk}$  assure que la vérification de la

1. Une API (application programming interface) est une interface logicielle permettant de connecter deux logiciels, ici le langage de programmation Python et le solveur d'optimisation Mosek.

condition de pertinence aux extrémités d'une discontinuité  $\Sigma^{jk}$  entre deux éléments  $j$  et  $k$  assure son respect sur toute l'arête. La puissance résistante maximale s'écrit alors :

$$P_{rm}(\underline{u}) = \sum_{j=1}^{N_{elem}} \pi^k(\underline{d}^j) S_j + \sum_{l=1}^{N_{\Sigma}} \pi^k(\underline{v}^l) l^l \quad (4.25)$$

où  $N_{elem}$  est le nombre d'éléments,  $S_j$  la surface de l'élément  $j$ ,  $N_{\Sigma}$  le nombre d'arêtes de discontinuité, et  $l^l$  la longueur de la discontinuité  $l$ .

L'approche cinématique peut être pilotée soit en imposant les déformations macroscopiques  $(D, \dot{\chi})$ , soit en imposant les efforts généralisés  $(N, M)$ . Dans ces deux cas, elle revient à minimiser la valeur de la puissance résistante maximale sous les trois conditions suivantes :

- Les vitesses (variables d'optimisation principales du problème) sont reliées aux taux de déformations et aux discontinuités de vitesse (variables d'optimisation secondaires du problème) par des conditions linéaires ;
- Le champ de vitesse doit vérifier des conditions aux limites périodiques, données par l'équation (4.12), ce qui constitue également un ensemble de conditions linéaires ;
- La condition de pertinence du critère de Mohr-Coulomb est vérifiée au barycentre des éléments pour les déformations et aux nœuds des arêtes pour les discontinuités, constituant ainsi un ensemble de conditions coniques du second ordre.

Dans le cas où l'approche cinématique est pilotée en prescrivant les efforts généralisés, on impose également que la puissance des efforts extérieurs soit unitaire :

$$P_e(\underline{U}) = ND + M\dot{\chi} = 1 \quad (4.26)$$

**Note :** Le choix d'éléments linéaires T3, plutôt que d'éléments quadratiques T6, généralement plus adaptés (surtout en présence de moments de flexion car ils permettent de rendre compte d'une variation linéaire du taux de déformation), est discutable. Il se justifie par le contexte dans lequel a été réalisé ce développement, qui doit être considéré comme une "preuve de concept" avant son implémentation 3D. La comparaison entre les approches statique et cinématique, qui sera présentée dans la partie 5, a montré que les résultats proposés par ces deux approches donnaient un encadrement suffisamment précis de la charge extrême, d'où le choix de conserver des éléments linéaires pour cet exemple.

### 4.3 Influence du feu

Dans la sous-partie 3.4, nous avons présenté deux hypothèses majeures pour la prise en compte de l'influence du feu :

- Le transfert thermique est unidirectionnel et ne dépend que de la coordonnée dans l'épaisseur du mur ;

- L'angle de frottement interne du matériau reste constant, seule sa cohésion est affectée par le feu.

L'expression du critère et celle de la fonction d'appui correspondante sont données par les équations (4.27) et (4.28).

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k(\xi_3) \cos \varphi^k \leq 0 \quad (4.27)$$

$$\pi^k(\underline{\underline{d}}) = \begin{cases} \frac{c^k(\xi_3)}{\tan \varphi^k} \text{tr} \underline{\underline{d}} & \text{si } \text{tr} \underline{\underline{d}} \geq (|d_I| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.28)$$

D'un point de vue numérique, la cohésion en chaque nœud pour l'approche statique, et la fonction d'appui au barycentre de l'élément pour l'approche cinématique, ont donc été affectées d'un coefficient multiplicatif de dégradation correspondant à la température à leur côte  $\xi_3$ .

Un des atouts majeurs du Calcul à la rupture, par rapport à une approche du type élastoplastique par exemple, est de fournir des approches par l'intérieur (par la statique) et par l'extérieur (par la cinématique) rigoureuses du domaine de résistance macroscopique de la structure. Dans le cas général, les approches proposées restent rigoureuses en considérant :

- Pour l'approche statique, la valeur minimale de la cohésion sur l'élément dans le critère de résistance ;
- Pour l'approche cinématique, la valeur maximale de la cohésion dans le calcul de la fonction d'appui.

Dans le cas particulier où la fonction  $c^k(\xi_3)$  est concave (voir figure 4.6 (b)), les approches statique et cinématique peuvent être améliorées en considérant la valeur de la cohésion à chaque nœud (pour la statique) et au barycentre (pour la cinématique). En effet, pour l'approche cinématique, la concavité de  $c^k$  implique que :

$$S_{elem} c_{barycentre}^k \geq \int_{S_{elem}} c^k(\xi_3) dS \quad (4.29)$$

où  $c_{barycentre}^k$  est la cohésion au niveau du barycentre de l'élément. L'intégrale de la puissance résistante maximale sur l'élément peut donc être majorée par sa valeur au niveau du barycentre multipliée par la surface de l'élément.

## 5 Exemple applicatif

### 5.1 Présentation de l'exemple

Pour ce premier exemple, on considère un mur composé de blocs de hauteur  $H = 360$  mm, d'épaisseur  $h = 200$  mm et de longueur infinie dans la direction 1. Ces blocs sont assemblés par des joints d'épaisseur  $t = 10$  mm.

Les blocs sont composés de calcaire de Saint-Vaast, de résistance à la compression  $R_c = 5,3$  MPa, et les joints sont composés de mortier de chaux hydraulique naturelle, de résistance  $R_c = 0,5$  MPa. Ces propriétés de résistance correspondent aux mesures réalisées sur la pierre et le mortier testés dans le chapitre 2. La connaissance de la résistance en compression des matériaux n'est toutefois pas suffisante pour en déduire leur cohésion et leur angle de frottement interne.

### 5.2 Propriétés de résistance des matériaux à température ambiante

La résistance des matériaux constitutifs des blocs et du mortier est décrite par un critère de Mohr-Coulomb.

Concernant les maçonneries en pierre massive, il n'existe à notre connaissance que très peu de travaux proposant de déterminer l'angle de frottement interne de la pierre. En effet, dans le bâti ancien en pierre, les blocs sont souvent bien plus résistants que le mortier, et peuvent, du point de vue de la modélisation, être considérés en première approximation comme infiniment résistants. Dans la thèse de Parent [10], on retrouve la valeur  $\varphi = 28^\circ$  pour le calcaire de Saint-Maximin, et des valeurs de  $30^\circ$  à  $45^\circ$  sont fréquemment retrouvées dans la littérature concernant l'angle de frottement interne des blocs de maçonnerie en brique ou en silico-calcaire. En revanche, en considérant la pierre comme une roche, de nombreux travaux se sont intéressés à ses propriétés de résistance. On peut notamment citer les travaux de Bemer et al. [142], de Baud et al. [143] ou de Abdallah et al. [24]. Dans les travaux de Baud et al. [143] et de Abdallah et al. [24], l'angle de frottement interne du calcaire de Saint-Maximin est bien plus faible, et ne vaut que  $17^\circ$ . La figure 4.9 (a) donne quelques résultats d'essais triaxiaux extraits de Abdallah et al. [24] avec quelques calages d'angles de frottement interne. Elle montre que la résistance du matériau, dont la courbe intrinsèque est non-linéaire, ne peut pas être décrite par un critère de Mohr-Coulomb sans faire des approximations importantes.

Il apparait alors que considérer un angle de frottement interne de  $17^\circ$  surestime largement la résistance à la traction du matériau. Un angle de frottement interne de  $55^\circ$ , quant à lui, surestimerait largement la résistance en cas de faible confinement. Finalement,

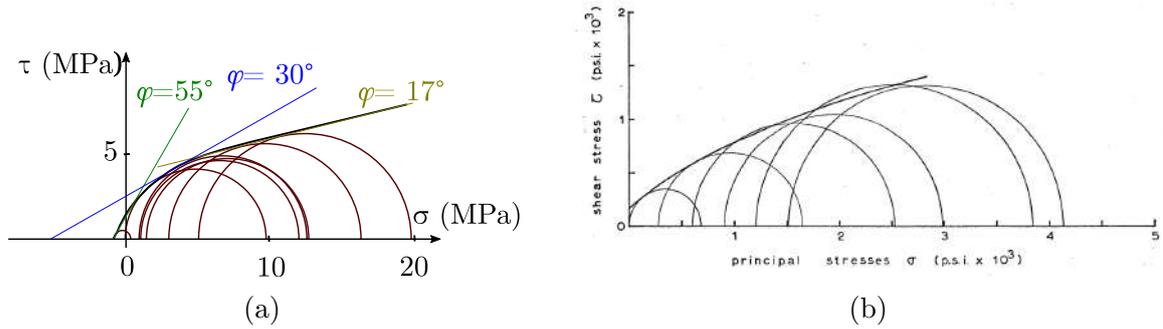


FIGURE 4.9 – Essais triaxiaux pour (a) le calcaire de Saint Maximin (Abdallah et al. [24]); (b) un mortier de chaux et ciment (Khoo [25])

on voit bien que le critère de Mohr-Coulomb classique n'est qu'une sorte de linéarisation de la courbe intrinsèque réelle de la pierre. Nous avons donc choisi de sélectionner un angle de frottement intermédiaire,  $\varphi^b = 30^\circ$ , pour la pierre.

Concernant l'angle de frottement interne du mortier, il est fréquemment déterminé par un essai de type "triplet" (voir par exemple Venzal et al. [65]). Ce type de test évalue le coefficient de frottement global du joint, c'est-à-dire qu'il ne permet pas de distinguer la résistance de l'interface pierre-mortier de la résistance du mortier en lui-même. Si une telle information est intéressante lorsque les joints sont réduits à des interfaces dans la modélisation, elle est insuffisante dans la modélisation proposée ici, où l'épaisseur réelle du joint doit être prise en compte. Il faut alors recourir à des essais triaxiaux, ou éventuellement à des essais de type Double Punch Test (Pela et al. [144]) qui, par analyse inverse, permettent de retrouver l'angle de frottement du matériau. Dans la littérature, les angles de frottement interne sont compris entre  $24^\circ$  (Khoo [25]) et  $32^\circ$  (Ghimire et al [145]) pour des mortiers bâtards chaux hydraulique-ciment, et entre  $26^\circ$  et  $35^\circ$  pour des mortiers de chaux aérienne selon la méthode de mesure (Pelà et al [144]). La figure 4.9 (b) représente quelques résultats d'essais de Khoo [25] sur un mortier bâtard de résistance en compression uniaxiale égale à  $R_c = 5$  MPa. Il apparaît donc que, comme pour le calcaire, la description du mortier par le critère de Mohr-Coulomb n'est qu'une approximation, et que la pression de confinement utilisée pour les essais triaxiaux impacte l'angle de frottement interne déterminé. Par la suite, on retiendra un angle de frottement de  $\varphi^m = 25^\circ$  pour le mortier.

La cohésion des matériaux peut alors être obtenue par la relation classique suivante :

$$R_c^k = \frac{2c^k \cos \varphi^k}{1 - \sin \varphi^k} \quad (4.30)$$

Le tableau 4.1 résume les paramètres du modèle de Mohr-Coulomb qui seront utilisés par la suite.

Ces paramètres seront repris dans les chapitres 5 et 6.

## 5. Exemple applicatif

TABLEAU 4.1 – Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb à température ambiante retenus pour la pierre et le mortier

	Cohésion à 20 °C (MPa)	Angle de frottement interne (°)	Résistance en compression uniaxiale (MPa)	Résistance en traction uniaxiale (MPa)
Pierre	1,53	30	5,3	1,7
Mortier	0,16	25	0,5	0,2

### 5.3 Propriétés de résistance des matériaux à température élevée

La figure 4.10 (a) donne le coefficient de réduction de la résistance en compression de la pierre et du mortier en fonction de la température. Pour rappel, ce coefficient sera appliqué à la cohésion du matériau, l'angle de frottement interne étant considéré constant.

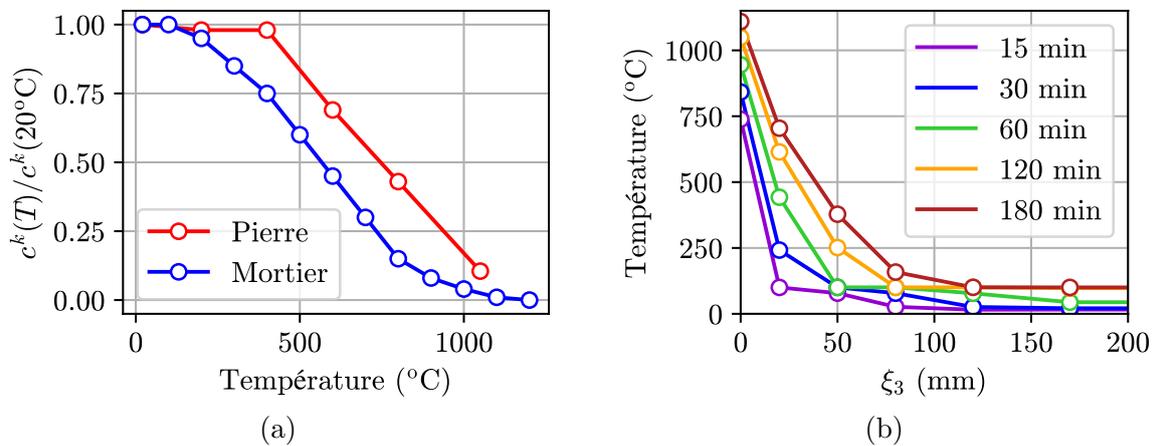


FIGURE 4.10 – (a) Facteurs de réduction de la cohésion ; (b) Profils de température pour différents temps d'exposition au feu

Pour la pierre, ce coefficient de réduction provient des données de Vigroux [8] sur le calcaire de Saint-Maximin. Pour le mortier, nous avons choisi le coefficient de réduction associé au béton de granulat calcaire dans l'Eurocode 2 (Partie 1-2) [101] en raison du peu de données sur la résistance au feu des mortiers de chaux hydraulique naturelle (NHL). Ce coefficient de réduction est néanmoins très proche de ceux trouvés expérimentalement par Bamonte et al. [35] pour des mortiers de ciment.

La figure 4.10 (b) donne les profils thermiques utilisés pour cette application numérique. Il s'agit des profils mesurés lors de l'essai présenté dans le chapitre 2.

### 5.4 Maillage adopté et problème numérique correspondant

La figure 4.11 (a) représente le maillage de la cellule de base. Ce maillage, comportant 2135 nœuds et 4268 éléments, est particulièrement raffiné au niveau des joints de manière

à pouvoir percevoir d'éventuels phénomènes locaux. Le tableau 4.2 donne quelques informations sur les problèmes d'optimisation numérique correspondant aux approches statique et cinématique mises en œuvre sur ce maillage.

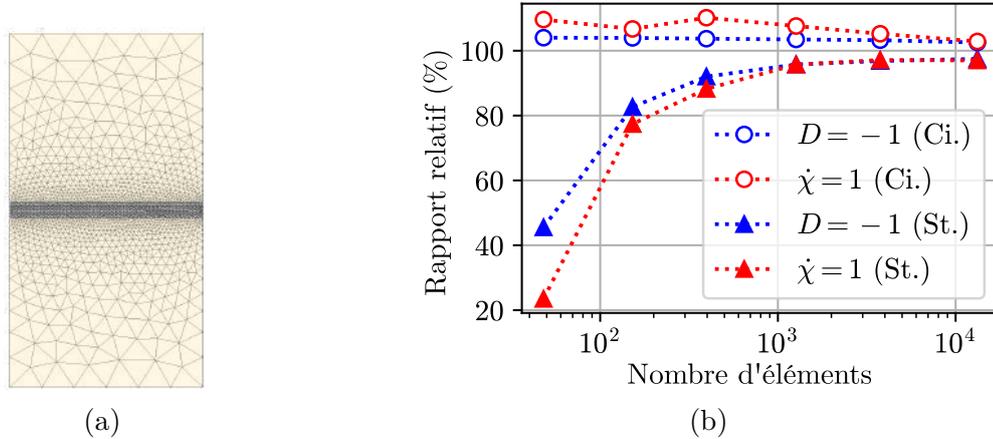


FIGURE 4.11 – (a) Maillage utilisé pour les calculs présentés dans ce chapitre ; (b) Étude de convergence sur le maillage

On note qu'à maillage fixé, l'approche statique nécessite un peu plus de contraintes, mais beaucoup moins de variables que l'approche cinématique, et qu'elle est donc résolue plus rapidement. Les temps de calculs sont donnés pour des calculs réalisés avec Mosek 9.3 sur un PC portable équipé d'un processeur Intel i7 11th gen. et de 16 Go de RAM.

La figure 4.11 (b) présente une étude de convergence sur le maillage considéré pour les deux approches, pour deux sollicitations particulières : ( $D = -1, \dot{\chi} = 0$ ) et ( $D = 0, \dot{\chi} = 1$ ). Sur cette figure, le rapport relatif est défini par  $N^k/N^{moy}$  (resp.  $M^k/M^{moy}$ ) pour une sollicitation  $D = -1$  (resp.  $\dot{\chi} = 1$ ) où  $N^k$  (resp.  $M^k$ ) désigne la valeur de l'effort normal  $N$  (resp. du moment fléchissant  $M$ ) obtenue par l'approche statique ou l'approche cinématique pour un certain maillage, et  $N^{moy} = (\min N^{k,c} + \max N^{k,s})/2$  (resp.  $M^{moy} = (\min M^{k,c} + \max M^{k,s})/2$ ). Dans cette dernière expression, les sollicitations indicées par un  $c$  se réfèrent à l'approche cinématique tandis que les sollicitations indicées par un  $s$  se réfèrent à l'approche statique.

TABLEAU 4.2 – Quelques grandeurs sur les problèmes numériques

	Variables scalaires	Variables coniques	Contraintes	Temps de résolution par trajet de chargement
Approche statique	75 000	12 500	71 000	6 s
Approche cinématique	115 000	29 000	67 000	9 s

Cette étude paramétrique permet de voir que même pour un maillage assez grossier, l'approche cinématique fournit un majorant proche de la charge extrême, surtout pour un chargement de compression. L'approche statique, en revanche, nécessite un maillage relativement fin pour donner un minorant suffisamment proche de la charge extrême. Si,

pour l'approche bidimensionnelle présentée dans ce chapitre, les calculs restent rapides (temps de calcul inférieur à une minute) même pour des maillages très fins, de tels maillages feraient augmenter de manière exponentielle la taille des problèmes en 3D. Il semble donc que, dans le cas où on ne pourrait pas mailler finement la cellule de base, il soit plus intéressant de mettre en œuvre une approche cinématique qu'une approche statique.

## 5.5 Résultats

### 5.5.1 A température ambiante

La figure 4.12 (a) représente le diagramme d'interaction obtenu par une approche cinématique pour une cellule de base composée de pierre et de mortier, à température ambiante (i.e. avant exposition au feu).

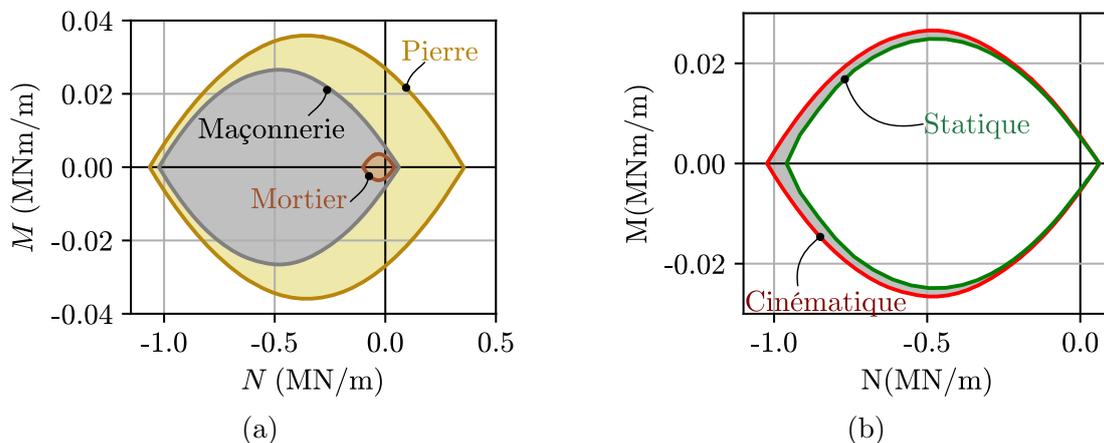


FIGURE 4.12 – (a) Diagrammes d'interaction à température ambiante pour la maçonnerie, la pierre et le mortier ; (b) Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus par les approches statique et cinématique pour la maçonnerie

Sur cette figure, on a également représenté le diagramme d'interaction pour une cellule de base homogène composée de pierre uniquement, et pour une cellule de base composée de mortier uniquement. La résistance en compression du mortier est environ 10 fois plus faible que celle de la pierre (voir tableau 4.1), et cela se traduit par un diagramme d'interaction beaucoup plus réduit pour le mortier que pour la pierre.

On note que la résistance en compression de l'assemblage est proche de celle de la pierre. En flexion simple et en traction, en revanche, la résistance de l'assemblage est davantage influencée par celle du mortier.

La figure 4.12 (b) représente les domaines obtenus par l'approche statique et par l'approche cinématique pour le maillage représenté sur la figure 4.11 (a). On note le très bon encadrement proposé par ces deux approches, ce qui montre qu'un maillage fin composé d'éléments linéaires apporte un degré de précision suffisant pour la cinématique.

L'écart maximal entre la statique et la cinématique est d'environ 5 %, pour une sollicitation de compression simple.

### 5.5.2 Sous exposition au feu

La figure 4.13 (a) montre l'évolution du diagramme d'interaction obtenu par l'approche cinématique en fonction du temps d'exposition au feu. Il apparaît que la dégradation des propriétés de résistance mécanique dans l'épaisseur induit une "rotation" du diagramme d'interaction. La résistance à un moment négatif, qui met les fibres côté feu en compression, devient plus faible que la résistance à un moment positif, qui met les fibres du côté non-exposé en compression, du fait de la dégradation de la résistance en compression par le feu.

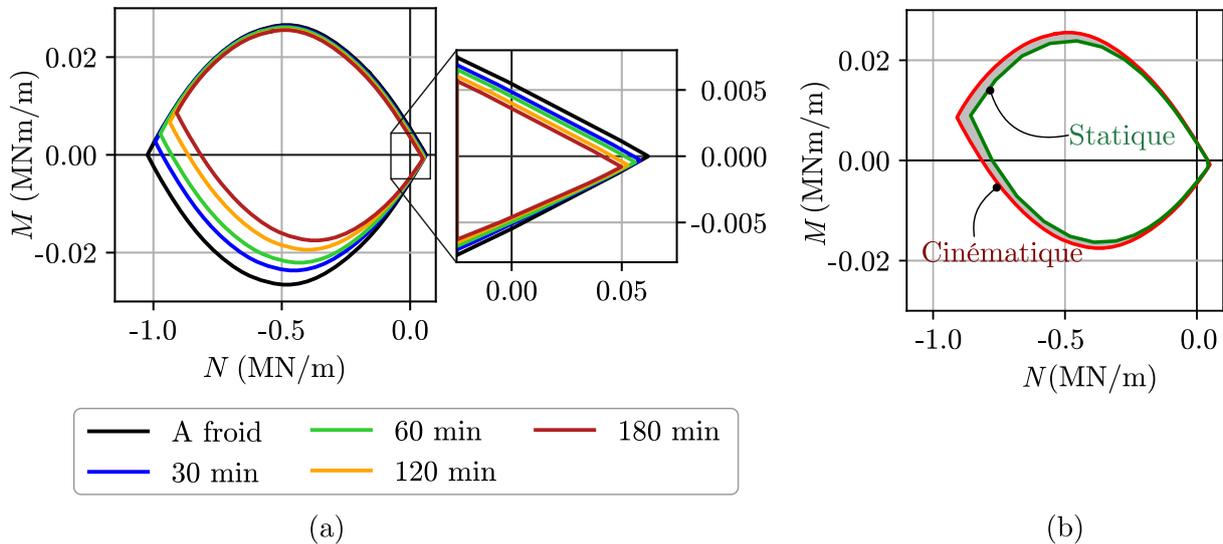


FIGURE 4.13 – Évolution du diagramme d'interaction pour différents temps d'exposition au feu

La résistance en compression simple du mur diminue finalement assez peu, puisqu'elle passe de 1,03 MN/m à température ambiante à 0,82 MN/m après 180 min d'exposition au feu. La figure 4.13 (b) compare les diagrammes d'interaction obtenus par les approches statique et cinématique pour 180 min d'exposition au feu. On note une fois encore que ces deux approches permettent un très bon encadrement du domaine de résistance macroscopique.

## 6 Vers une définition plus fine du critère de résistance

### 6.1 Quelques constats expérimentaux

Comme évoqué dans la partie 5.2, le choix d'un critère de résistance de Mohr-Coulomb pour la pierre et le mortier est une première approche permettant de décrire le comportement cohésif-frictionnel de ces deux matériaux. Elle a cependant tendance à surestimer leur résistance à la traction, et donc la résistance à la traction de l'assemblage, c'est pourquoi de nombreux modèles dans la littérature (Lourenço et Rots [21], Milani [146], Stefanou et al. [82] pour ne citer qu'eux) préfèrent l'emploi des modèles de Mohr-Coulomb tronqué en traction, ou de Mohr-Coulomb bilinéaire.

Par ailleurs, des roches poreuses comme le calcaire de Saint-Maximin ou le calcaire de Saint-Vaast peuvent rompre de manière ductile lorsque leur pression d'effondrement poreux (i.e. leur contrainte isotrope de compression) est atteinte. Abdallah et al. [24] ont évalué cette pression d'effondrement poreux à environ 14,5 MPa, pour un calcaire de Saint Maximin de résistance à la compression simple 9,8 MPa, soit environ 1,5 fois la résistance en compression simple. Cette faible pression d'effondrement poreux est due à la porosité importante (environ 40 %) du calcaire de Saint Maximin. De telles observations ont également été rapportées par Hayen et al. [147] sur un mortier de chaux hydraulique naturelle NHL 3,5. La pression d'effondrement poreux est alors environ trois fois supérieure à la résistance en compression simple du mortier. Une telle rupture ne peut pas être modélisée par un critère de Mohr-Coulomb simple, dont la pression d'effondrement poreux est infinie.

Dans cette partie, nous proposons donc d'implémenter numériquement un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, ainsi qu'un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction et en compression isotropes pour voir quels sont les effets de telles modifications sur la résistance de l'assemblage.

### 6.2 Critères de Mohr-Coulomb tronqués en traction et en compression isotropes

Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction isotrope<sup>2</sup> est défini de la manière suivante :

$$f(\underline{\sigma}) = \sup \left\{ \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k \cos \varphi^k; \sigma_i - f_t^k \right\} \leq 0$$

$$k = b, m \quad (4.31)$$

---

2. ou tout simplement "tronqué en traction"

où  $f_t^k$  est la valeur de la troncature en traction isotrope. Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction et en compression isotropes est quant à lui défini de la manière suivante :

$$f(\underline{\sigma}) = \sup \left\{ \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k \cos \varphi^k; \sigma_i - f_t^k; -f_c^k - \sigma_i \right\} \leq 0 \quad k = b, m \quad (4.32)$$

Les courbes intrinsèques de ces deux critères, ainsi que celles du critère de Mohr-Coulomb classique et du critère de Rankine, sont données sur la figure 4.14.

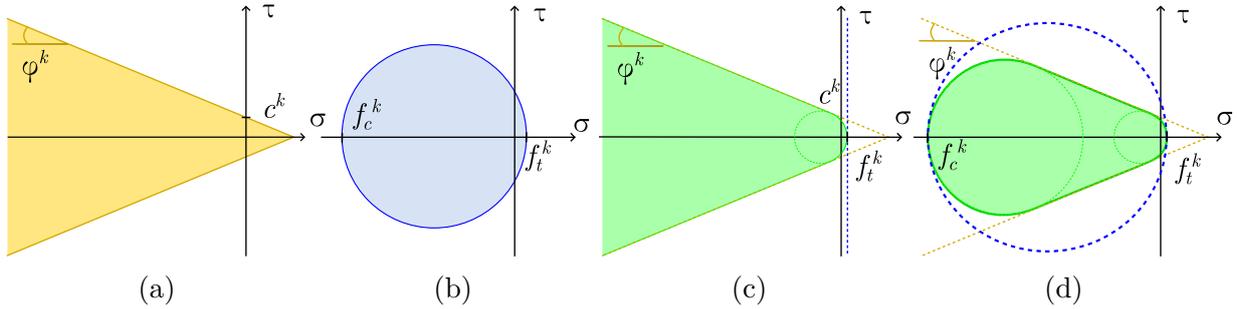


FIGURE 4.14 – Courbes intrinsèques des critères de Mohr-Coulomb (a), Rankine (b), Mohr-Coulomb tronqué en traction isotrope (c) et Mohr-Coulomb tronqué en traction et en compression isotropes (d)

Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction et en compression isotropes (resp. en traction) peut être vu comme l'intersection du critère de Mohr-Coulomb classique, et d'un critère de Rankine de résistance en traction  $f_t^k$  et de résistance en compression  $f_c^k$  (resp. de résistance en traction  $f_t^k$  et de résistance en compression infinie). Son implémentation numérique se base donc sur cette considération :

- Pour l'approche statique, le champ de contrainte doit vérifier à la fois le critère de Mohr-Coulomb (noté MC), et le critère de Rankine (noté R). Pour un problème 2D en déformations planes tel que celui considéré ici, ce dernier critère peut également s'exprimer comme un ensemble de conditions coniques et linéaires.
- Pour l'approche cinématique, la fonction d'appui  $\pi^{MC \cap R}(\underline{d})$  de l'intersection de deux domaines  $G^{MC}$  et  $G^R$ , de fonctions d'appui respectives  $\pi^{MC}(\underline{d})$  et  $\pi^R(\underline{d})$ , s'écrit de la manière suivante :

$$\pi^{MC \cap R}(\underline{d}) = \inf_{\underline{d}_1} \left\{ \pi^{MC}(\underline{d} - \underline{d}_1) + \pi^R(\underline{d}_1) \right\} \quad (4.33)$$

où :

$$\pi^R(\underline{d}) = \sum_{i=1}^3 \sup \left\{ -f_c^k d_i; f_t^k d_i \right\} \quad (4.34)$$

est la fonction d'appui du critère de Rankine. Pour un problème 2D en déformations planes, elle peut également se mettre sous forme conique quadratique, de sorte que

le problème de minimisation de la puissance résistante maximale reste donc un problème conique quadratique.

### 6.3 Exemple applicatif

#### 6.3.1 Définition des propriétés de résistance des matériaux

A température ambiante, les propriétés considérées sont données dans le tableau 4.3.

TABLEAU 4.3 – Paramètres du modèle de Mohr-Coulomb tronqué en traction (et éventuellement en compression) à température ambiante pour la pierre et le mortier

	Cohésion $c^k$ (MPa)	Angle de frottement interne $\varphi^k$ (°)	Troncature en compression $f_c^k$ (MPa) (si appliquée)	Troncature en traction $f_t^k$ (MPa) (si appliquée)
Pierre	1,53	30	7,9	1,1
Mortier	0,16	25	1,5	0,1

On note que les valeurs de la troncature en compression sont supérieures à la valeur de la résistance en compression uniaxiale, si bien que la troncature n'agit que lorsque le matériau est soumis à des sollicitations triaxiales de compression.

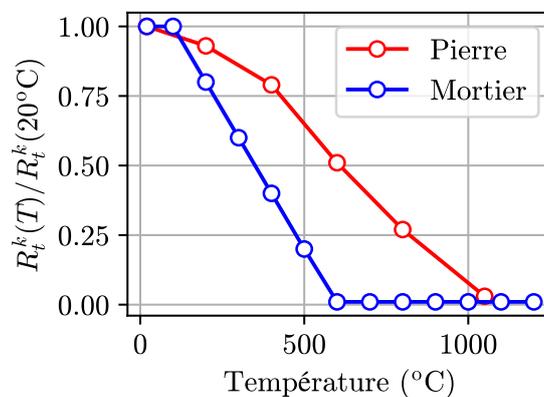


FIGURE 4.15 – Coefficient de réduction de la résistance en traction en fonction de la température

La figure 4.15 donne l'évolution du coefficient de réduction de la résistance en traction uniaxiale de la pierre et du mortier en fonction de la température. Pour la pierre, ce coefficient provient des travaux de Vigroux [8] sur le calcaire de Saint-Maximin, tandis que pour le mortier, elle correspond à la dégradation de la résistance en traction du béton selon l'Eurocode 2 [101].

La cohésion est toujours affectée du coefficient de réduction donné par la figure 4.10. On suppose que la troncature en compression est également affectée par ce même coefficient

de réduction.

### 6.3.2 Résultats

#### 6.3.2.1 Critères de résistance tronqués en traction

La figure 4.16 compare le diagramme d'interaction obtenu pour un critère de Mohr-Coulomb et pour un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Il apparaît que la troncature en traction joue principalement sur la résistance à la traction et à la flexion pure, et dans le cas considéré, influe peu sur la résistance à la compression. Ces mêmes observations peuvent être formulées après exposition au feu.

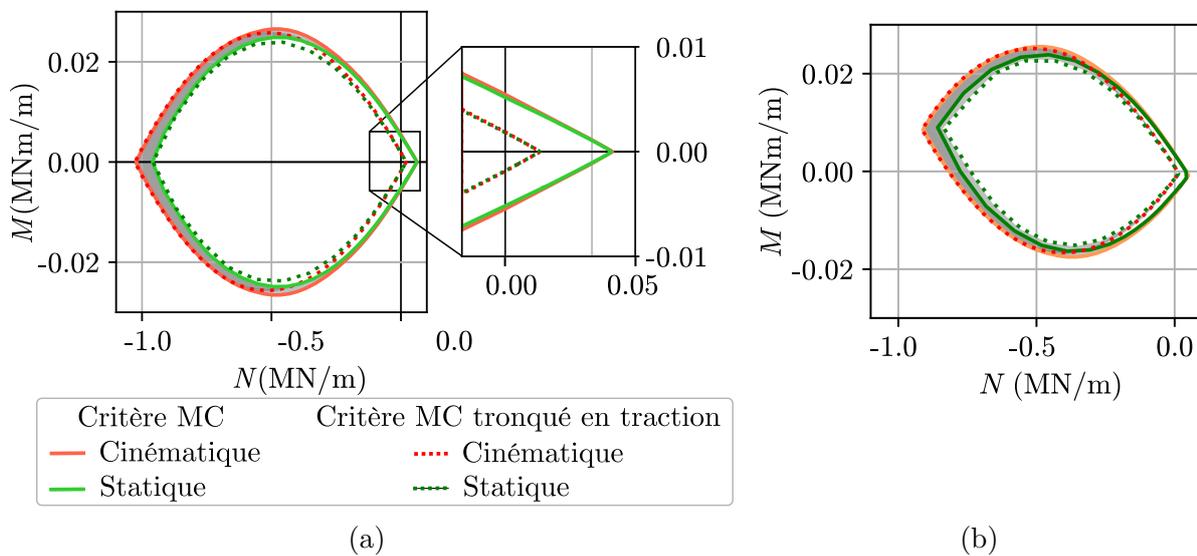


FIGURE 4.16 – Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus pour des matériaux de Mohr-Coulomb et de Mohr-Coulomb tronqué en traction, (a) à température ambiante et (b) après 180 min d'exposition au feu

La pierre, et dans une moindre mesure le mortier, étant tous deux des matériaux fragiles en traction (voir chapitre 8), il pourrait être tentant pour l'ingénieur, dans une approche simplifiée de dimensionnement, de supposer que cette résistance à la traction est nulle. C'est d'ailleurs ce qui est fait pour le béton armé (voir, par exemple, Nielsen et Hoang [148]).

La figure 4.17 (a) donne l'évolution de la résistance à la compression de l'assemblage en fonction de la résistance à la traction de la pierre, tandis que la résistance à la traction du mortier est constante ( $f_t^m = 0,1$  MPa). La figure 4.17 (b) donne la résistance à la compression de l'assemblage en fonction de la résistance à la traction du mortier, tandis que celle de la pierre est constante ( $f_t^b = 1,1$  MPa). Si la résistance à la traction du mortier n'a pas d'influence sur la résistance en compression de l'assemblage, celle de la pierre joue en revanche un rôle fondamental lorsqu'elle est plus faible qu'une certaine valeur (0,125

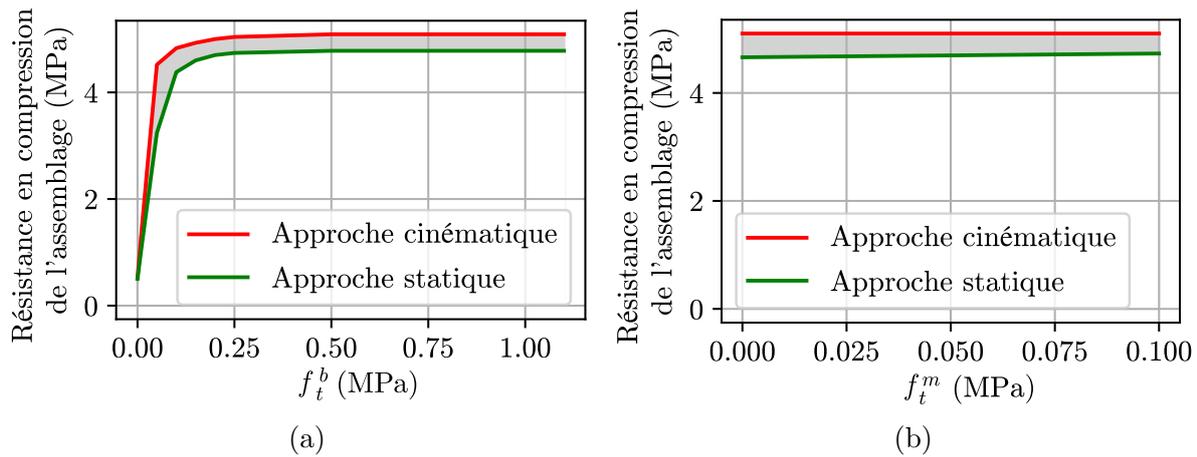


FIGURE 4.17 – Résistance en compression de l'assemblage en fonction de la valeur de la troncature en traction (a) de la pierre et (b) du mortier

MPa ici - voir figure 4.17 (a)). On propose, dans le chapitre 7, une approche cinématique analytique sur la cellule de base 3D qui confirme bien cette approche numérique.

### 6.3.2.2 Critères de résistance tronqués en traction et compression isotropes

La figure 4.18 donne les diagrammes d'interaction obtenus par l'approche statique et par l'approche cinématique, pour les valeurs de troncature en traction et en compression données dans le tableau 4.3. Ces diagrammes d'interaction sont comparés à ceux obtenus pour des matériaux tronqués en traction seulement. Il apparaît que le diagramme d'interaction est bien plus réduit lorsqu'on considère des matériaux tronqués à la fois en traction et en compression.

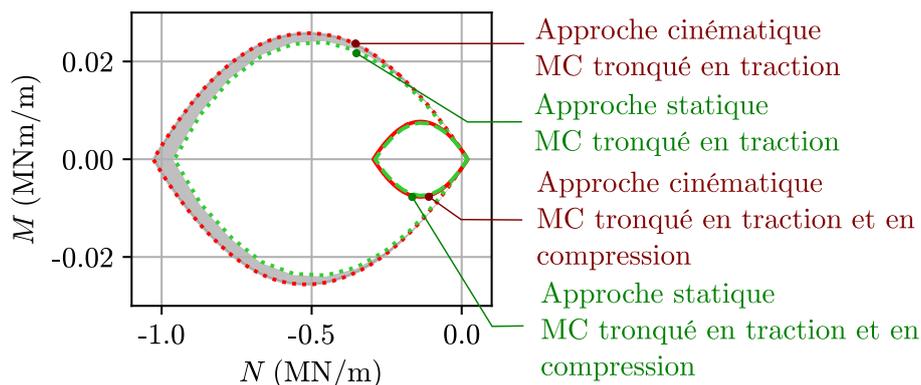


FIGURE 4.18 – Comparaison des diagrammes d'interaction obtenus pour des matériaux de Mohr-Coulomb tronqués en traction et de Mohr-Coulomb tronqués en traction et en compression à température ambiante

La figure 4.19 (a) donne la résistance en compression de l'assemblage en fonction de la valeur de la troncature en compression de la pierre (pour  $f_m^c = +\infty$ ), tandis que la figure 4.19 (b) donne la résistance en compression de l'assemblage en fonction de la troncature

en traction du mortier (pour  $f_b^c = +\infty$ ). Les valeurs de  $f_c^k$  sont prises supérieures à la résistance en compression uniaxiale du matériau.

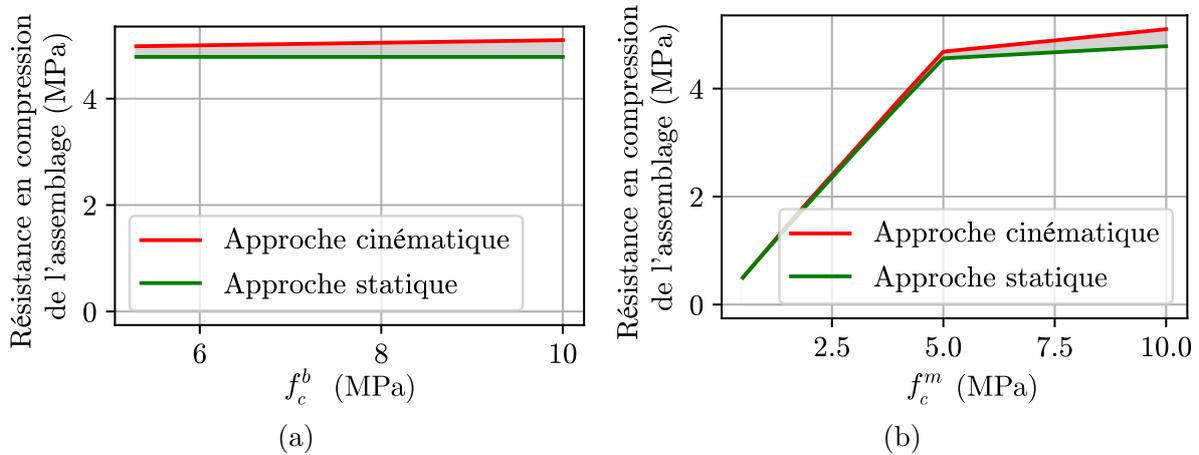


FIGURE 4.19 – Résistance en compression de l'assemblage en fonction de la valeur de la troncature en compression (a) de la pierre et (b) du mortier

Il apparaît que la troncature en compression de la pierre n'a pas d'impact sur la résistance en compression de l'assemblage. En revanche, celle du mortier l'impacte fortement. En effet, le mortier est confiné entre deux blocs de pierre, et donc dans un état de compression triaxiale, qui lui permet de supporter des sollicitations verticales plus élevées que sa résistance en compression simple. La pierre, quant à elle, est macroscopiquement en contraintes planes, ce qui explique que sa pression d'effondrement poreux ne soit jamais atteinte. On peut cependant se demander si de faibles valeurs de troncature en compression isotrope sont physiquement réalistes étant donné que la porosité du mortier est bien plus faible que celle de la pierre.

## 6.4 Remarques finales

A travers cette partie, nous avons mis en évidence le fait qu'au delà des paramètres classiques du modèle de Mohr-Coulomb, la valeur de la résistance à la traction de la pierre et de la résistance en compression hydrostatique du mortier avaient une importance fondamentale pour la résistance en compression de l'assemblage. Ces deux paramètres sont toutefois plus complexes et délicats à déterminer expérimentalement pour l'ingénieur.

La forte dépendance du modèle à la résistance à la traction de la pierre constitue un point particulièrement intéressant et délicat. En effet, la pierre est un matériau fragile en traction, et pour une telle sollicitation, les résultats du Calcul à la rupture doivent être interprétés avec beaucoup de précautions.

## 7 Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire la problématique de l'homogénéisation en Calcul à la rupture, et de montrer en particulier comment cette approche permet de déterminer le domaine de résistance d'un mur de maçonnerie, le tout sur un exemple simplifié. L'approche proposée est rapide, le domaine de résistance complet étant obtenu en quelques minutes, et par conséquent parfaitement adaptée à une approche à visée applicative pour l'ingénieur.

L'utilisation d'un critère simple, tel que le critère de Mohr-Coulomb, permet également d'avoir peu de paramètres d'entrée. Ce critère peut être amélioré de manière simple, en prenant en compte une troncature en traction et/ou en compression isotrope. Au-delà de la résistance à la compression simple des deux matériaux constitutifs, la résistance à la traction de la pierre ainsi que la résistance en compression hydrostatique du mortier deviennent alors des paramètres fondamentaux pour la détermination de la résistance à la compression de l'assemblage. Il se pose alors la question de leur détermination expérimentale.

Cette première approche ne permet cependant ni de prendre en compte des géométries tridimensionnelles, ni des mécanismes de rupture tridimensionnels. Par conséquent, elle pourrait surestimer la charge extrême de la structure. Il apparaît donc nécessaire d'étendre cette approche au cas tridimensionnel, plus représentatif des configurations réelles.

\*        \*  
\*  
\*  
\*



# Chapitre 5

## Formulation semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie de blocs pleins

**Résumé :** *Dans ce chapitre, une approche cinématique semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie est proposée. Dans un premier temps, la démarche est présentée pour le cas particulier des sollicitations planes, puis elle est étendue à des sollicitations quelconques. Enfin, on propose une adaptation du critère de résistance obtenu permettant la prise en compte de la dégradation des propriétés de résistance des matériaux constitutifs avec la température.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>145</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème de Calcul à la rupture</b>	<b>146</b>
2.1	Cellule de base	146
2.2	Mode de chargement	146
2.3	Critère de résistance des matériaux constitutifs	147
2.4	Définitions statique et cinématique du domaine de résistance	148
<b>3</b>	<b>Approche analytique du domaine de résistance pour des sollicitations planes</b>	<b>149</b>
3.1	Une première approche cinématique : mécanisme de déformation homogène	149
3.2	Une seconde approche cinématique : mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après de Buhan et de Felice [4])	156
3.3	Définition de l'approche cinématique analytique du domaine de résistance plan	159
3.4	Remarques sur l'approche analytique proposée	160
<b>4</b>	<b>Approche semi-analytique pour des sollicitations hors-plan</b>	<b>161</b>
4.1	Mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après Sab [5])	161

4.2	Mécanisme avec des taux de déformation homogènes dans des plans parallèles au plan du mur . . . . .	165
4.3	Approche semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie sous sollicitations membranaires et de flexion . . . . .	169
<b>5</b>	<b>Prise en compte de la dégradation de la cohésion due au feu</b>	<b>172</b>
5.1	Formulation de la fonction d'appui . . . . .	172
5.2	Exemple applicatif . . . . .	173
<b>6</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>176</b>

---

**Note :** Les travaux présentés dans ce chapitre ont été présentés dans la publication suivante :

E. Donval, D.T. Pham, G. Hassen, P. de Buhan, M. Vigroux. 3D analytical and numerical approaches to the in-plane strength domain of a masonry wall. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 2023; 1-30, <https://doi.org/10.1002/nag.3537>

Cette publication présente également les aspects numériques de la résolution du problème de Calcul à la rupture, qui seront évoqués dans le chapitre 6.

# 1 Introduction

L'approche numérique proposée dans le chapitre précédent permet de déterminer le domaine de résistance d'un mur en maçonnerie infiniment long, en omettant l'effet de la présence des joints verticaux sur la résistance de l'ensemble. Cette première approche permet certes d'avoir une première évaluation de la stabilité au feu du mur, mais elle ne permet pas de prendre en compte les effets tridimensionnels observés expérimentalement. Pour cette raison, nous avons choisi d'étendre l'approche proposée au cas d'une cellule de base 3D.

De nombreux travaux présentés dans la littérature proposent d'approcher le domaine de résistance de la maçonnerie par des approches statiques ou cinématiques de l'Analyse limite ou du Calcul à la rupture. On peut notamment citer les travaux de Biolzi [149] ainsi que ceux de Milani (et éventuels coauteurs) ([146], [150], [151], [152], [153]). Tous ces travaux se basent cependant sur des hypothèses simplificatrices concernant l'état de contrainte des blocs ou des joints, qui sont considérés en contraintes planes. Or, il est bien connu depuis les travaux de Hilsdorf [154] que les blocs et le mortier subissent un état de contrainte triaxial, et, comme montré par Anthoine [155], les hypothèses de contraintes ou de déformations planes conduisent à des résultats qui peuvent être éloignés de la réalité.

Un autre point sensible concerne la prise en compte de l'épaisseur des joints. Comme montré par Sahlaoui et al. [156], des joints épais ont tendance à faire diminuer la résistance de la maçonnerie. Or, les quelques approches existantes ne faisant pas d'hypothèse de contraintes planes (Stefanou et al. [82] notamment) modélisent les joints comme des interfaces infiniment minces. Ce type de modélisation a tendance à surestimer la résistance en compression de l'assemblage, ce qui n'est pas satisfaisant dans notre cas car il s'agit d'un paramètre crucial pour l'évaluation de la résistance au feu d'un mur porteur en maçonnerie.

Dans ce chapitre, on propose donc une approche semi-analytique qui tente de saisir à la fois l'effet de l'épaisseur non-nulle des joints et la résistance finie des blocs, sans faire d'hypothèse simplificatrice sur l'état de contrainte dans les blocs ou le mortier. Tout d'abord, on présente le problème auxiliaire de Calcul à la rupture, dont la résolution permet de déterminer le domaine de résistance. Une approche analytique, combinant deux types de mécanismes de rupture virtuels, est ensuite présentée. Cette approche analytique est ensuite étendue au cas de sollicitations quelconques, planes ou hors du plan du mur. Enfin, l'approche cinématique semi-analytique proposée est adaptée pour prendre en compte la dégradation des propriétés de résistance des matériaux avec la température. A titre d'application, on propose de déterminer le domaine de résistance du mur testé dans le chapitre 2.

## 2 Position du problème de Calcul à la rupture

### 2.1 Cellule de base

Comme dans le chapitre 3, on considère ici le mur en maçonnerie comme un milieu périodique dans les directions  $x_1$  et  $x_2$ , composé de blocs de hauteur  $H$ , de longueur  $L$  et d'épaisseur  $h$ . Ces blocs sont reliés par des joints de mortier d'épaisseur  $t$  (épaisseur identique pour les joints horizontaux et les joints verticaux). La cellule de base considérée est représentée sur la figure 5.1.

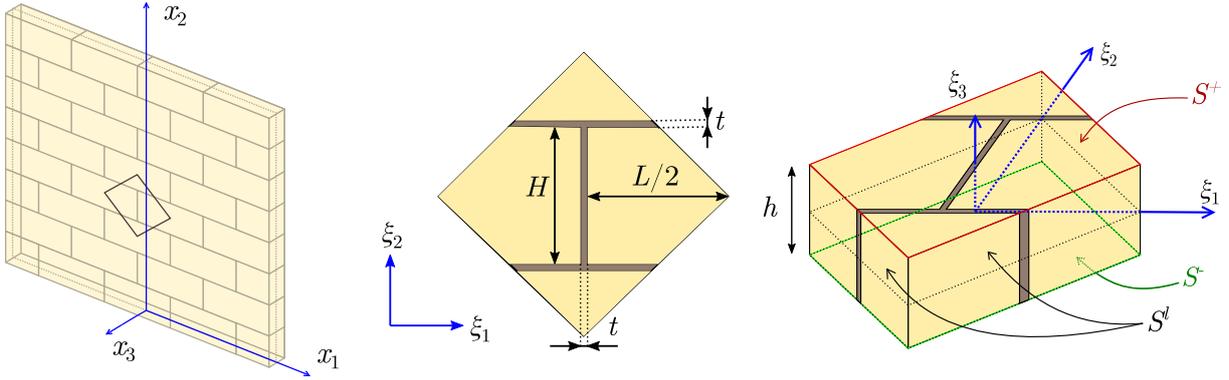


FIGURE 5.1 – Cellule de base considérée

Cette cellule de base occupe un volume  $\Omega$ , qui correspond à la somme du volume occupé par les blocs  $\Omega_b$  et du volume occupé par le mortier  $\Omega_m$ . On définit la fraction volumique de mortier  $\eta = \Omega_m / (\Omega_m + \Omega_b)$ .

### 2.2 Mode de chargement

La cellule de base est soumise au mode de chargement suivant :

- Les forces de volume sont supposées nulles ;
- Les faces inférieure (de normale  $-\underline{e}_3$ ) et supérieure (de normale  $\underline{e}_3$ ) de la cellule de base sont libres de contraintes ;
- Le vecteur contrainte est antipériodique sur les faces latérales de la cellule de base ;
- La vitesse virtuelle sur les faces latérales de la cellule de base est prescrite de la forme :

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi} + \frac{1}{2} (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 + \underline{u}^{per}(\underline{\xi}) \quad (5.1)$$

où  $\underline{u}^{per}(\underline{\xi})$  est périodique sur les faces latérales,  $\underline{F}$  et  $\underline{\dot{\chi}}$  sont des tenseurs plan d'ordre 2, et  $\underline{\dot{\chi}}$  est un tenseur symétrique.

Le tenseur des taux de déformation s'écrit alors :

$$\underline{d} = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} + \underline{d}^{per} \quad (5.2)$$

où  $\underline{D} = 1/2(\underline{F} + {}^t\underline{F})$  est le tenseur macroscopique des taux de déformation dans le plan du mur,  $\underline{\dot{\chi}}$  est le tenseur des taux de courbure, et  $\underline{d}^{per}$  est le taux de déformation correspondant à la fluctuation périodique de vitesse  $\underline{u}^{per}$ .

Pour tout champ de contrainte statiquement admissible et tout champ de vitesse cinématiquement admissible avec le chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , le principe des puissances virtuelles, combiné avec l'équation (5.1), permet d'écrire la condition de type Hill-Mandel suivante (Bourgeois [103]) :

$$P_e(\underline{u}) = \int_{\Omega} \underline{\sigma} : \underline{d} \, d\Omega = |S|(\underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}}) \quad (5.3)$$

où on a noté  $P_e$  la puissance des efforts extérieurs, et  $|S|$  la surface de la cellule de base projetée sur son plan médian  $(Ox_1x_2)$ . D'après l'égalité (5.3), les paramètres de chargement sont les composantes du tenseur des efforts membranaires  $\underline{N}$  et les composantes du tenseur des moments fléchissants  $\underline{M}$ , qui sont définis par :

$$\underline{N} = \frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \underline{\sigma} \, d\Omega \quad \text{et} \quad \underline{M} = \frac{1}{|S|} \int_{\Omega} -\xi_3 \underline{\sigma} \, d\Omega \quad (5.4)$$

Ces paramètres de chargement sont en dualité avec les composantes du tenseur des taux de déformation macroscopiques plans  $\underline{D}$  et du tenseur des taux de courbure  $\underline{\dot{\chi}}$ .

### 2.3 Critère de résistance des matériaux constitutifs

Tout comme dans le chapitre 4, nous avons choisi de décrire la résistance des blocs et du mortier par un critère de Mohr-Coulomb. Un des avantages principaux de ce critère de rupture est sa simplicité, puisqu'il ne dépend que de la cohésion et de l'angle de frottement interne des matériaux.

Pour les blocs (respectivement pour le mortier), la cohésion est notée  $c^b$  (resp.  $c^m$ ) et l'angle de frottement interne est noté  $\varphi^b$  (resp.  $\varphi^m$ ). Le critère de Mohr-Coulomb s'écrit :

$$f^k(\underline{\sigma}) = \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k \cos \varphi^k \leq 0 \quad (k = b, m) \quad (5.5)$$

et la fonction d'appui correspondante est :

$$\pi^k(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{c^k}{\tan \varphi^k} \text{tr} \underline{d} & \text{si } \text{tr}(\underline{d}) \geq (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (k = b, m) \quad (5.6)$$

pour un taux de déformation virtuel  $\underline{d}$ , et :

$$\pi^k(\underline{V}, \underline{n}) = \begin{cases} \frac{c^k}{\tan \varphi^k} \underline{V} \cdot \underline{n} & \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (k = b, m) \quad (5.7)$$

pour une discontinuité de vitesse  $\underline{V}$  à travers une surface de normale  $\underline{n}$ .

## 2.4 Définitions statique et cinématique du domaine de résistance

Le domaine de résistance macroscopique du mur en maçonnerie  $G^M$  est le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^6$  comprenant l'ensemble des couples  $(\underline{N}, \underline{M})$  tels qu'il soit possible de mettre en évidence un champ de contraintes "microscopique"  $\underline{\sigma}$ , défini en tout point de la cellule de base, qui soit statiquement admissible (S.A.) avec le couple  $(\underline{N}, \underline{M})$  et vérifie le critère de résistance local  $G(\underline{\xi})$  en tout point de la cellule de base :

$$G^M = \left\{ (\underline{N}; \underline{M}) ; \begin{array}{l} \exists \underline{\sigma} \text{ S.A. } (\underline{N}, \underline{M}) \\ \forall \underline{\xi} \in \Omega, \underline{\sigma}(\underline{\xi}) \in G(\underline{\xi}) \end{array} \right\} \quad (5.8)$$

L'approche statique du Calcul à la rupture consiste à appliquer directement cette définition, tandis que l'approche cinématique consiste à la dualiser en introduisant la puissance résistante maximale  $P_{rm}$  d'un champ de vitesse virtuel  $\underline{u}$  cinématiquement admissible (C.A.) avec le chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  :

$$\forall \underline{u} \text{ C.A. } (\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) : P_{rm}(\underline{u}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{d}, \underline{\xi}) \, dV + \int_{\Sigma} \pi(\underline{V}, \underline{n}, \underline{\xi}) \, dS \quad (5.9)$$

où  $\underline{V}$  est une discontinuité de vitesse au travers d'une surface  $\Sigma$  de normale  $\underline{n}$ . La valeur de la fonction d'appui dépend du matériau (bloc ou mortier), et pourra également dépendre de la coordonnée dans l'épaisseur du mur lorsque la dégradation des propriétés de résistance du matériau sera prise en compte. Elle dépend donc de la position  $\underline{\xi}$  dans la cellule de base.

La définition duale du domaine de résistance macroscopique, reposant sur l'approche cinématique, est :

$$G^M = \bigcap_{(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) \in \mathbb{R}^6} \left\{ (\underline{N}, \underline{M}) \mid \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} \leq \Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) \right\} \quad (5.10)$$

où  $\Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  est la fonction d'appui du domaine  $G^M$  :

$$\Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \sup \left\{ \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} \mid (\underline{N}, \underline{M}) \in G^M \right\} \quad (5.11)$$

En supposant les approches statique et cinématique équivalentes, l'expression de la fonction d'appui  $\Pi^M$  du domaine de résistance macroscopique  $G^M$  est la suivante :

$$\Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \inf_{\underline{d} \in \mathbb{R}^6} \left\{ \frac{1}{|S|} P_{rm}(\underline{u}) ; \underline{u} \text{ C.A. avec } (\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) \right\} \quad (5.12)$$

L'objectif de l'approche analytique (pour des vitesses virtuelles dans le plan du mur) et de l'approche semi-analytique (pour des vitesses virtuelles quelconques) consiste, pour un trajet de chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  fixé, à déterminer un majorant de la fonction d'appui macroscopique. En parcourant un sous-ensemble  $E \subset \mathbb{R}^6$ , correspondant à un nombre fini de trajets de chargement, on obtient alors une approche par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique du mur en maçonnerie.

*Une nomenclature des principaux domaines obtenus dans ce chapitre est proposée dans l'annexe B.*

### 3 Approche analytique du domaine de résistance pour des sollicitations dans le plan du mur

Dans un premier temps, pour introduire l'approche proposée, on se limite à des chargements plans  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}} = 0)$ , et au cas où l'hétérogénéité provient uniquement de l'assemblage des blocs et du mortier (pas d'hétérogénéité due à la dégradation des matériaux en fonction de la température).

#### 3.1 Une première approche cinématique : mécanisme de déformation homogène

##### 3.1.1 Calcul de la fonction d'appui macroscopique

En première approche, nous pouvons considérer un mécanisme virtuel décrit par le taux de déformation suivant, qui est uniforme dans la cellule de base :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

On peut facilement vérifier que ce taux de déformation dérive d'un champ de vitesse cinématiquement admissible avec un taux de déformation  $\underline{D}$ . Ce dernier fixe les valeurs

des composantes  $d_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ), tandis que  $d_{33} = \delta$  est une variable d'optimisation dont la valeur est déterminée de manière à minimiser la puissance résistante maximale et à obtenir ainsi une majoration optimale.

La condition de pertinence associée au critère de Mohr-Coulomb stipule que :

$$d_I + d_{II} + d_{III} \geq (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \quad (k = b, m) \quad (5.14)$$

ou encore, dans notre cas :

$$\delta - |\delta| \sin \varphi^k \geq (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \quad (k = b, m) \quad (5.15)$$

où  $d_I$ ,  $d_{II}$  et  $d_{III}$  sont les composantes principales du tenseur des taux de déformation, et  $D_I$  et  $D_{II}$  sont définies par :

$$\begin{aligned} D_I &= \frac{D_{11} + D_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{D_{11} - D_{22}}{2}\right)^2 + D_{12}^2} \\ D_{II} &= \frac{D_{11} + D_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{D_{11} - D_{22}}{2}\right)^2 + D_{12}^2} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Étant donné que les valeurs de  $D_I$  et de  $D_{II}$  sont définies par le chargement fixé, et que la fonction d'appui locale du critère de Mohr-Coulomb s'écrit :

$$\pi^k(\underline{d}) = \frac{c^k}{\tan \varphi^k} (d_I + d_{II} + d_{III}) \quad (k = b, m) \quad (5.17)$$

on en déduit que minimiser la fonction d'appui revient à minimiser  $d_{33} = d_{III} = \delta$ .

A partir de l'équation (5.15), on peut montrer que si  $(|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \geq 0$  dans au moins un constituant (bloc ou mortier), alors  $\delta \geq 0$ . Dans ce cas, la condition de pertinence (5.14) se réécrit :

$$\delta \geq \frac{1}{1 - \sin \varphi^k} \left( (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \right) \quad (k = b, m) \quad (5.18)$$

La valeur optimale de  $\delta$  est alors :

$$\delta = \sup_{k=b,m} \frac{1}{1 - \sin \varphi^k} \left( (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \right) \quad (5.19)$$

Par conséquent, dans le constituant  $k$ , la fonction d'appui est :

$$\pi^k(\underline{d}) = \frac{2c^k}{\tan \varphi^k} \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 - \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|D_I| - D_I}{2} + \frac{|D_{II}| - D_{II}}{2} \right) \quad (k = b, m) \quad (5.20)$$

Cette fonction d'appui dépend donc de la partie négative des composantes principales du tenseur des taux de déformation imposé.

Dans le cas contraire, i.e.  $(|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} < 0$  pour les blocs et le mortier,  $\delta$  peut être négatif, et sa valeur optimale sera la valeur la plus basse autorisée par les conditions de pertinence des deux matériaux. On peut donc en déduire qu'il sera nécessairement négatif. La condition de pertinence peut alors être réécrite comme suit :

$$\delta \geq \frac{1}{1 + \sin \varphi^k} \left( (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \right) \quad (k = b, m) \quad (5.21)$$

Finalement, la fonction d'appui dans le constituant  $k$  vaut :

$$\pi^k(\underline{d}) = \frac{2c^k}{\tan \varphi^k} \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 + \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|D_I| + D_I}{2} + \frac{|D_{II}| + D_{II}}{2} \right) \quad (k = b, m) \quad (5.22)$$

Elle dépend de la partie positive des composantes principales du tenseur des taux de déformation imposé.

Finalement, au niveau de la cellule de base, la fonction d'appui macroscopique, définie comme :

$$\Pi^{def,p}(\underline{D}) = \frac{1}{|S|} \left( \int_{\Omega_b} \pi^b(\underline{D}) dV + \int_{\Omega_m} \pi^m(\underline{D}) dV \right) \quad (5.23)$$

s'écrit :

$$\Pi^{def,p}(\underline{D}) = h \left( \eta \frac{2c^b}{\tan \varphi^b} + (1 - \eta) \frac{2c^m}{\tan \varphi^m} \right) \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 - \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|D_I| - D_I}{2} + \frac{|D_{II}| - D_{II}}{2} \right)$$

si  $(|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \geq 0 \quad (k = b, m)$

$$\Pi^{def,p}(\underline{D}) = h \left( \eta \frac{2c^b}{\tan \varphi^b} + (1 - \eta) \frac{2c^m}{\tan \varphi^m} \right) \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 + \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|D_I| + D_I}{2} + \frac{|D_{II}| + D_{II}}{2} \right)$$

sinon

(5.24)

où on rappelle que  $\eta$  est la fraction volumique de mortier.

En posant  $H^k = c^k / \tan \varphi^k$ , et en notant  $\langle H \rangle = (1 - \eta)H^b + \eta H^m$ , on peut réécrire

cette fonction d'appui de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \Pi^{def,p}(\underline{D}) &= hR_t^{hom} \left( \frac{|D_I| + D_I}{2} + \frac{|D_{II}| + D_{II}}{2} \right) \\ &\quad \text{si } (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \geq 0 \quad (k = b, m) \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\Pi^{def,p}(\underline{D}) = hR_c^{hom} \left( \frac{|D_I| - D_I}{2} + \frac{|D_{II}| - D_{II}}{2} \right) \quad \text{sinon}$$

avec :

$$R_t^{hom} = \langle H \rangle \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 + \sin \varphi^i} \right) \quad \text{et} \quad R_c^{hom} = \langle H \rangle \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 - \sin \varphi^i} \right) \quad (5.26)$$

Le domaine de résistance correspondant, qui constitue une approche par l'extérieur du domaine de résistance exact de l'assemblage, est noté  $G^{def,p}$  et est défini par :

$$G^{def,p} = \bigcap_{\underline{D} \in \mathbb{R}^3} \left\{ \underline{N} \mid \underline{N} : \underline{D} \leq \Pi^{def,p}(\underline{D}) \right\} \quad (5.27)$$

La figure 5.2 représente la projection du domaine de résistance obtenu par l'approche par taux de déformation homogène sur le plan  $(N_I, N_{II})$  des valeurs principales du tenseur des efforts membranaires.

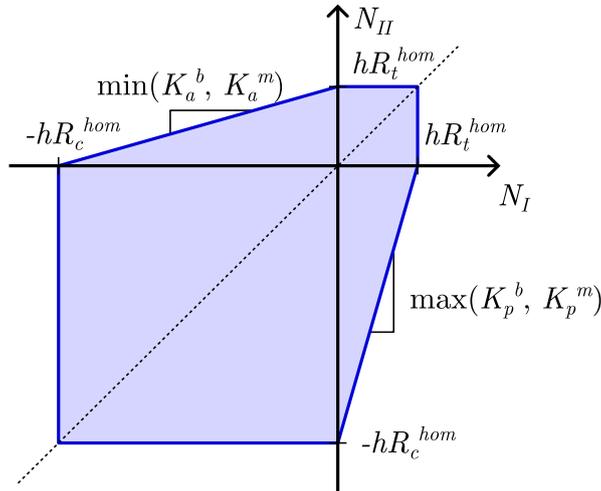


FIGURE 5.2 – Domaine de résistance macroscopique obtenu par l'approche par taux de déformation homogène

### 3.1.2 Quelques remarques sur la fonction d'appui macroscopique

- Cette fonction d'appui, et donc le domaine de résistance correspondant, est isotrope : elle ne dépend en effet que des valeurs principales du tenseur des taux de déformation  $\underline{D}$ ;
- Il n'y a pas de condition de pertinence sur la puissance résistante maximale. Par conséquent, le domaine de résistance est borné.
- Si la cellule de base est homogène, i.e. que  $c^b = c^m$  et que  $\varphi^b = \varphi^m$ , la fonction d'appui devient :

$$\begin{aligned} \Pi^{def,p}(\underline{D}) &= hR_t \left( \frac{|D_I| + D_I}{2} + \frac{|D_{II}| + D_{II}}{2} \right) \\ &\quad \text{si } D_{II} \geq \max \{-K_a D_I; -K_p D_I\} \\ \Pi^{def,p}(\underline{D}) &= hR_c \left( \frac{|D_I| - D_I}{2} + \frac{|D_{II}| - D_{II}}{2} \right) \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.28)$$

où  $R_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi}$  et  $R_t = \frac{2c \cos \varphi}{1 + \sin \varphi}$  sont respectivement la résistance en compression et en traction uniaxiale, tandis que  $K_a = \frac{1 - \sin \varphi}{1 + \sin \varphi}$  et  $K_p = K_a^{-1}$  sont les coefficients de poussée et de butée du matériau. Cette expression correspond à la fonction d'appui du domaine de résistance de Mohr-Coulomb en contraintes planes.

- Dans le cas spécifique où  $\varphi^b = \varphi^m$ , la fonction d'appui devient :

$$\begin{aligned} \Pi^{def,p}(\underline{D}) &= h(\eta R_t^m + (1 - \eta) R_t^b) \left( \frac{|D_I| + D_I}{2} + \frac{|D_{II}| + D_{II}}{2} \right) \\ &\quad \text{si } D_{II} \geq \max \{-K_a D_I; -K_p D_I\} \\ \Pi^{def,p}(\underline{D}) &= h(\eta R_c^m + (1 - \eta) R_c^b) \left( \frac{|D_I| - D_I}{2} + \frac{|D_{II}| - D_{II}}{2} \right) \quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Ainsi,  $G^{def,p}$  est homothétique à  $G^b$  et  $G^m$  dans le seul cas où les deux constituants ont le même angle de frottement interne.

### 3.1.3 Un premier exemple

Pour ce premier exemple, nous considérerons les caractéristiques géométriques données dans le tableau 5.1. Ces caractéristiques géométriques correspondent au mur testé dans le chapitre 2.

TABLEAU 5.1 – Caractéristiques géométriques de la cellule de base considérée

Longueur des blocs $L$ (m)	Hauteur des blocs $H$ (m)	Épaisseur des blocs $h$ (m)	Épaisseur des joints $t$ (m)
0,72	0,36	0,2	0,01

Les propriétés des matériaux (résistance en compression simple et angle de frottement interne, ainsi que la cohésion et la résistance à la traction simple correspondantes) sont données dans le tableau 5.2. Elles sont identiques à celles retenues dans le chapitre 4

TABLEAU 5.2 – Propriétés mécaniques des matériaux considérés

	$c$ (MPa)	$\varphi$ (MPa)	$R_c$ (MPa)	$R_t$ (MPa)
Pierre	1,53	30 °	5,3	1,77
Mortier	0,16	25 °	0,5	0,2

Pour la suite de ce paragraphe, on introduit les notations suivantes :

$$N_U = N_{11} + N_{22} ; N_V = N_{11} - N_{22} ; N_W = 2N_{12} \quad (5.30)$$

$N_U$  correspond à la partie sphérique du tenseur des efforts membranaires, tandis que  $N_V$  et  $N_W$  sont les deux composantes dans le plan déviatorique.

Pour les représentations suivantes, les efforts membranaires sont normalisés par l'effort membranaire extrême en compression uniaxiale d'un mur homogène composé de pierre uniquement, qui correspond simplement à la résistance en compression uniaxiale de la pierre multipliée par l'épaisseur du mur.

$$N_c^b = hR_c^b \quad (5.31)$$

La figure 5.3 représente le domaine de résistance plan obtenu par l'approche cinématique présentée dans cette sous-partie, mettant en œuvre un taux de déformation homogène. Ce domaine de résistance est comparé au domaine de résistance obtenu pour une cellule de base homogène composée uniquement du matériau "pierre", ainsi que pour une cellule de base homogène composée uniquement du matériau "mortier". Sur la figure 5.3 (a), ces domaines sont tracés dans l'espace des composantes du tenseur des efforts membranaires  $N_{\alpha\beta}$ . Les domaines de résistance de la maçonnerie et de la pierre seule, représentés en gris, sont presque confondus tandis que le domaine de résistance du mortier seul, représenté en bleu, est bien plus réduit. Pour mieux visualiser ce domaine de résistance, des coupes par

### 3. Approche analytique du domaine de résistance pour des sollicitations planes

des plans  $N_W = \text{constante}$ , représentées en vert sur la sous-figure 5.3 (a), sont représentées sur la sous-figure 5.3 (b). Le domaine de résistance de la maçonnerie est légèrement plus petit que celui de la pierre. A titre de comparaison, la résistance en compression uniaxiale de la pierre vaut 5,3 MPa, tandis que celle de la maçonnerie vaut 5,1 MPa, soit 4 % d'écart. Le domaine de résistance du mortier seul, représenté en bleu, est environ dix fois plus petit : sa résistance en compression uniaxiale vaut 0,5 MPa.

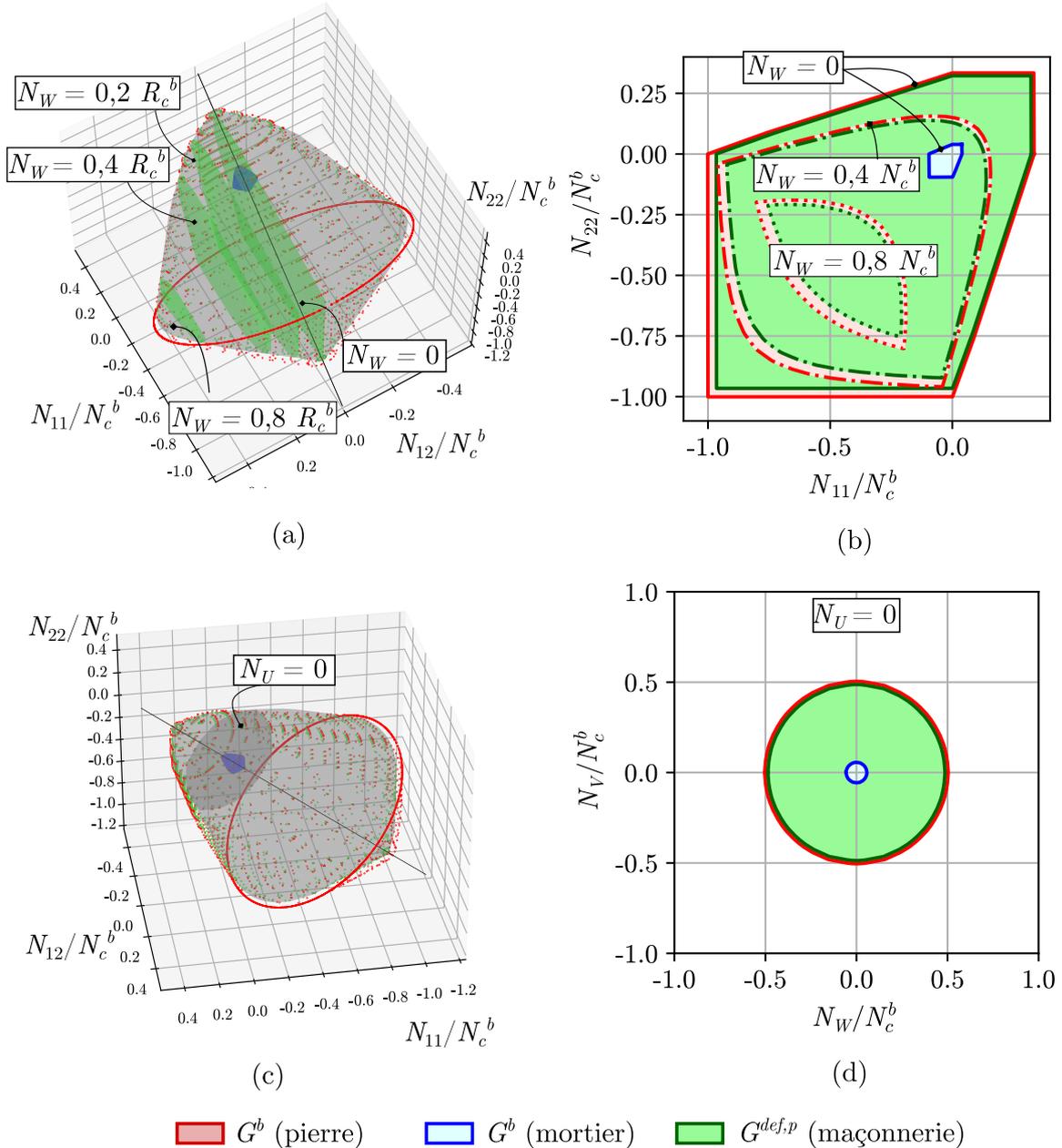


FIGURE 5.3 – Approche par l'extérieur  $G^{def,p}$ , obtenue par un mécanisme homogène, du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie sollicité dans son plan

La figure 5.3 (c) représente les mêmes domaines de résistance que la figure 5.3 (a), sous un angle différent. Le disque gris correspond à l'ensemble des chargements vérifiant le critère de résistance et tels que  $N_U = 0$ . La coupe des domaines de résistance par ce plan  $N_U = 0$  est donnée sur la figure 5.3 (d). Encore une fois, on note que les domaines de

résistance correspondant à la pierre seule et à la maçonnerie sont très proches, tandis que celui correspondant au mortier est bien plus petit.

La proximité des domaines  $G^{def,p}$  pour la maçonnerie et  $G^b$  pour la pierre s'explique par la très faible fraction volumique de mortier (4 %). Enfin, à partir de ces figures, il est clair que la fonction d'appui déterminée par cette première approche cinématique est isotrope.

En conclusion, l'approche proposée ici, contrairement à la plupart des approches proposées dans la littérature, permet de prendre en compte la fraction volumique de mortier sans aucune hypothèse restrictive sur l'état de contrainte ou de déformation, et ce en utilisant des mécanismes de rupture 3D. Cependant, contrairement aux observations expérimentales, le domaine obtenu est isotrope. Par conséquent, une approche complémentaire est nécessaire pour traduire le caractère anisotrope de la maçonnerie.

## 3.2 Une seconde approche cinématique: mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après de Buhan et de Felice [4])

Dans le cas des maçonneries, les joints sont souvent considérés comme des zones de faiblesse au niveau desquelles la rupture risque de se produire. Pour cette raison, plusieurs auteurs (de Buhan et de Felice [4], Sab [5] par exemple), ont proposé des mécanismes dans lesquels la cellule de base est divisée en plusieurs blocs infiniment résistants et donc, dans une approche cinématique, animés de mouvements de solides rigides. Les discontinuités de vitesse entre ces blocs ont lieu au niveau des joints, qui sont considérés comme des interfaces infiniment minces. Bien que ces approches aient initialement été développées en considérant des blocs infiniment résistants et des joints infiniment minces, on montre ici comment elles peuvent être adaptées à des blocs de résistance finie et à des joints d'épaisseur non-nulle.

### 3.2.1 Calcul de la fonction d'appui

Considérons un mécanisme de blocs rigides tel que celui considéré par de Buhan et de Felice [4]. La figure 5.4 (a) montre comment les blocs sont divisés afin de prendre en compte l'épaisseur des joints, avec une interface située au milieu des joints. La figure 5.4 (b) introduit les vitesses des blocs.

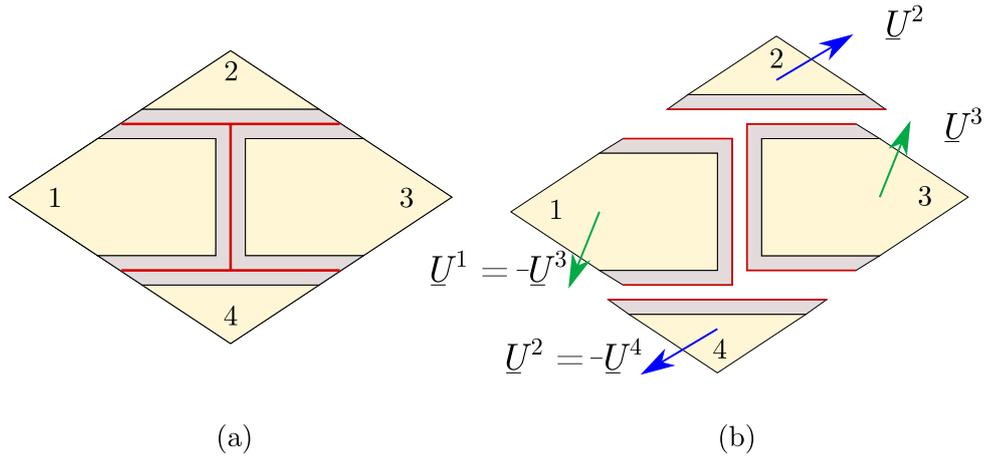


FIGURE 5.4 – (a) Division de la cellule de base en blocs rigides et (b) vitesses dans le mécanisme de rupture proposé par de Buhan et de Felice [4]

En posant  $f = \tan \varphi^m$  et  $m = 2(H + t)/(L + t)$ , la fonction d'appui du domaine  $G^{blocs,p}$  défini par de Buhan et de Felice devient, pour  $m \leq 1/f$  :

$$\Pi^{blocs,p}(\underline{D}) = \begin{cases} \frac{hc^m}{\tan \varphi^m} & \text{si } \begin{cases} D_{11} \geq 0 \\ fD_{11} - mD_{22} \leq 0 \\ -fD_{11} + 2D_{12} - D_{22}/f \leq 0 \\ -fD_{11} - 2D_{12} - D_{22}/f \leq 0 \end{cases} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (5.32)$$

On notera que la définition de la fonction d'appui employée ici est légèrement différente de celle proposée par de Buhan et de Felice, qui n'intègre pas l'épaisseur du mur. En l'absence d'hétérogénéité dans l'épaisseur du mur, elles sont équivalentes.

La définition de la fonction d'appui prend uniquement en compte les propriétés mécaniques du mortier constituant les joints, ce qui est tout à fait en accord avec le fait que cette approche cinématique mette uniquement en œuvre des discontinuités dans les joints.

### 3.2.2 Exemple applicatif

Pour cet exemple applicatif, les caractéristiques géométriques ainsi que les propriétés des matériaux sont prises identiques à celles proposées dans les tableaux 5.1 et 5.2, et déjà utilisées dans la partie précédente.

La figure 5.5 (a) représente le domaine  $G^{blocs,p}$  en jaune, ainsi que quelques intersections par des plans  $N_W = \text{cste}$  (correspondant à une contrainte de cisaillement fixée) représentées en marron clair. Ces intersections sont représentées sur la figure 5.5 (b) dans le plan

$(N_{11}, N_{22})$ . La figure 5.5 (c) représente encore une fois le domaine  $G^{bloqs,p}$  en jaune, sous une autre orientation, avec des intersections par des plans  $N_U = cste$  (correspondant à une contrainte sphérique fixée) représentées en marron clair. Ces sections sont représentées sur la figure 5.5 (d) dans le plan déviatorique  $(N_V, N_W)$ .

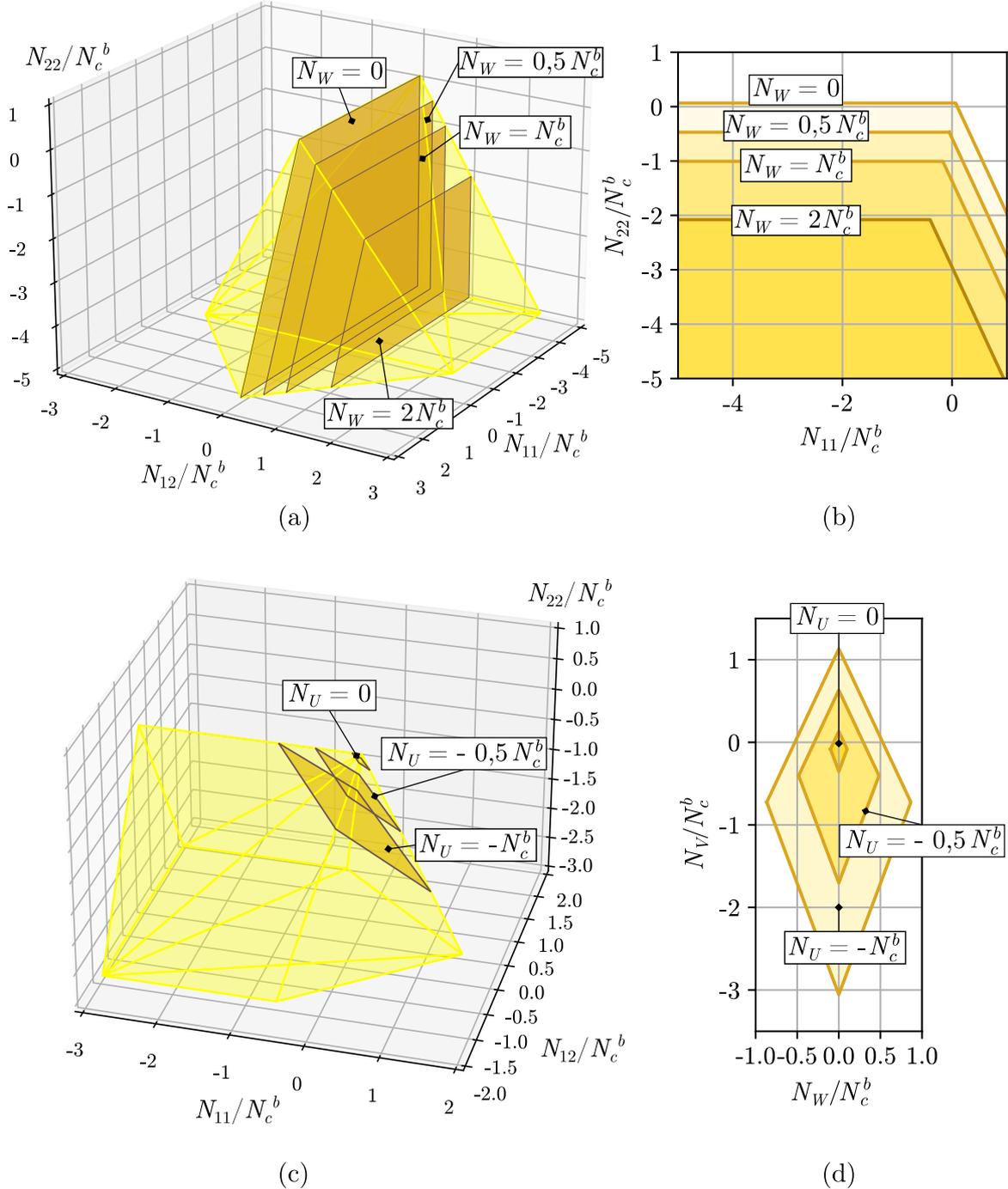


FIGURE 5.5 – Approche par l’extérieur  $G^{bloqs,p}$ , par le mécanisme de de Buhan et de Felice, du domaine de résistance d’un mur en maçonnerie

D’après la figure 5.5, et contrairement au domaine déterminé dans le paragraphe précédent, il apparaît clairement que ce domaine est anisotrope. Comme le montre la

présence de la condition de pertinence dans l'équation (5.32), le domaine n'est pas borné dans toutes les directions. En particulier, un matériau homogénéisé obéissant à ce critère est infiniment résistant en compression dans les directions 1 (horizontale) et 2 (verticale). Un tel domaine peut être suffisant pour des maçonneries dont les blocs sont beaucoup plus résistants que le mortier. En revanche, lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite, une combinaison du domaine présenté dans ce paragraphe et du domaine déterminé dans le paragraphe précédent peut donner une estimation plus précise du domaine de résistance global de la maçonnerie.

### 3.3 Définition de l'approche cinématique analytique du domaine de résistance plan

#### 3.3.1 Combinaison des deux approches précédentes

Les deux approches cinématiques proposées dans les sous-sections 3.1 et 3.2 sont des approches par l'extérieur. En tant que telles, leur intersection est également une approche par l'extérieur du domaine de résistance exact de la maçonnerie. Définissons leur intersection  $G^{an,p}$  par :

$$G^{an,p} = G^{def,p} \cap G^{blocs,p} \supseteq G^M \quad (5.33)$$

La fonction d'appui correspondante s'écrit :

$$\Pi^{an,p}(\underline{D}) = \inf_{\underline{D}_1 \in \mathbb{R}^3} \left\{ \Pi^{def,p}(\underline{D}_1) + \Pi^{blocs,p}(\underline{D} - \underline{D}_1) \right\} \quad (5.34)$$

#### 3.3.2 Exemple applicatif

Les résultats obtenus dans les sous-sections 3.1 et 3.2 peuvent être combinés pour obtenir une approche analytique, par l'extérieur, du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie. Les caractéristiques géométriques et propriétés mécaniques retenues sont encore une fois celle des tableaux 5.1 et 5.2.

La figure 5.6 représente plusieurs intersections des domaines  $G^{def,p}$  (en bleu),  $G^{blocs,p}$  (en jaune) et  $G^{an,p}$  (en vert) par des plans  $N_W = cste$  (sous-figures a à c) et  $N_U = cste$  (sous-figures d à g).

D'après ces figures, il apparaît que le mécanisme de bloc proposé par de Buhan et de Felice donne un meilleur majorant pour les sollicitations de traction dans la direction 2 et pour les sollicitations de cisaillement, tandis que le mécanisme homogène est plus adapté pour des sollicitations de compression. Ces figures montrent bien à quel point les deux mécanismes sont complémentaires.

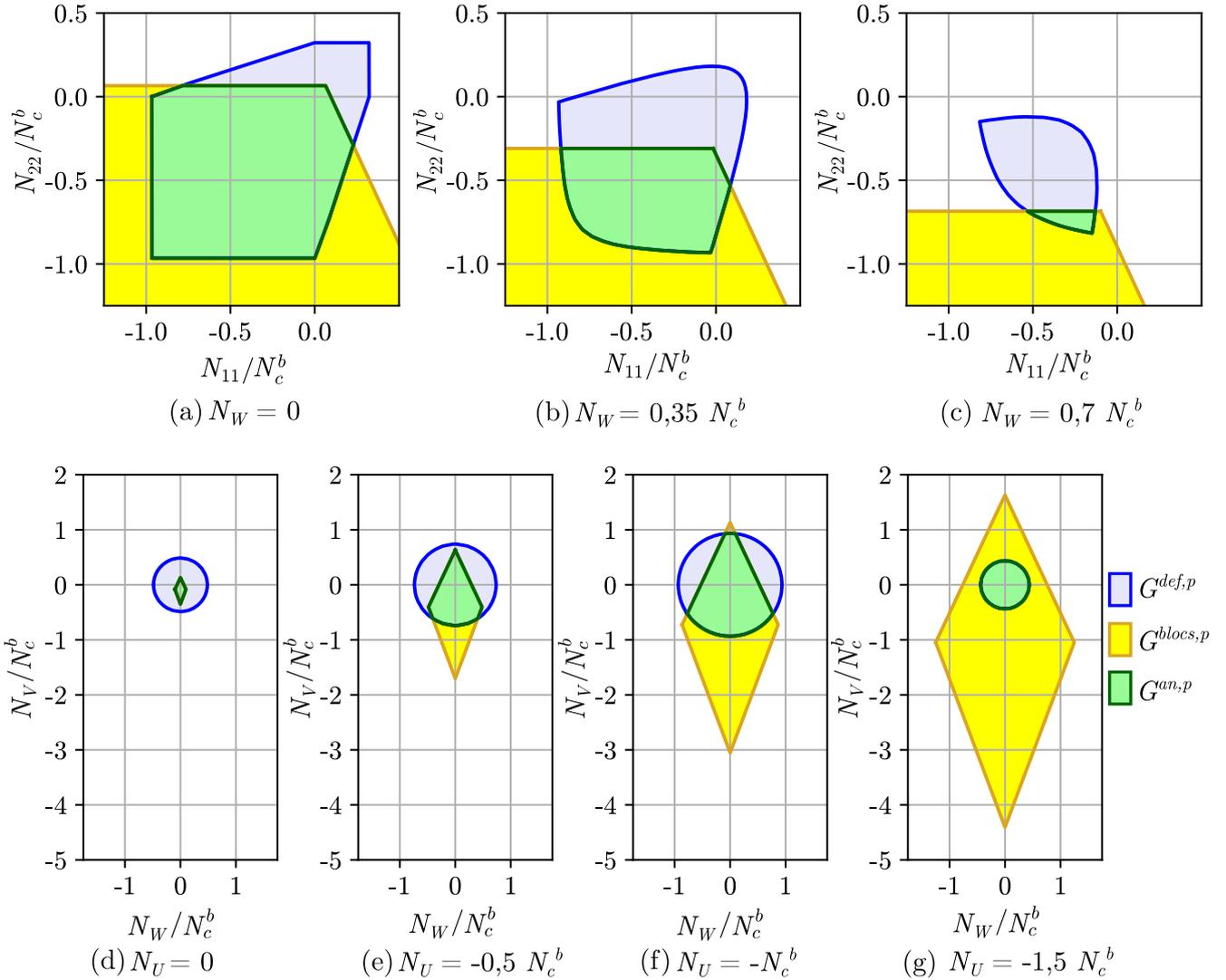


FIGURE 5.6 – Coupes des domaines obtenus par les approches par l'extérieur par le mécanisme homogène (domaine  $G^{def,p}$ ), par le mécanisme de blocs (domaine  $G^{blocs,p}$ ), ainsi que de leur intersection  $G^{an,p}$

### 3.4 Remarques sur l'approche analytique proposée

Bien que l'approche analytique proposée ici ait uniquement été présentée pour un assemblage en panneresse ("running-bond"), elle pourrait tout à fait être étendue à d'autres types d'assemblages. Le principe développé ici consiste à intersecter le domaine obtenu par un mécanisme de bloc rigide, qui permet de rendre compte de la résistance anisotrope de la maçonnerie, et le domaine obtenu par un mécanisme avec un taux de déformation homogène, qui agit comme une "borne de Voigt", et permet de prendre en compte la fraction volumique de mortier. L'extension à d'autres types d'assemblages nécessiterait de calculer la fonction d'appui du mécanisme de blocs rigides correspondant. Un tel calcul a été proposé par Sab [157] pour le cas d'une maçonnerie quasi-périodique, et par Le et al. [158] pour une généralisation 3D du mécanisme de de Buhan et de Felice.

Cette approche n'est néanmoins pas suffisante dans le cas des murs exposés au feu, pour lesquels la dégradation des propriétés de résistance des matériaux ainsi que la possibilité d'avoir des mécanismes de rupture hors du plan du mur doivent être pris en compte. L'extension de l'approche proposée aux mécanismes hors-plan fait l'objet de la partie suivante.

## 4 Approche semi-analytique pour des sollicitations hors-plan

L'objectif de cette partie est de généraliser au cas de chargements hors-plan l'approche proposée dans la partie précédente. Dans un premier temps, la méthode de détermination de la fonction d'appui pour un mécanisme de blocs infiniment résistants, telle que proposée par Sab [5] et étendant l'approche de de Buhan et de Felice utilisée dans la sous-partie 3.2, est brièvement rappelée. Dans un deuxième temps, l'approche par taux de déformation homogènes proposée dans la sous-partie 3.1 est généralisée au cas de chargements hors-plan. Enfin, dans un troisième temps, on s'intéresse à l'intersection des domaines de résistance obtenus par ces deux approches, qui constitue notre approche semi-analytique du domaine de résistance de la maçonnerie sous chargements plans et hors-plan.

### 4.1 Mécanisme de blocs infiniment résistants (d'après Sab [5])

L'approche proposée par de Buhan et de Felice ne permet de déterminer que le domaine de résistance vis-à-vis de mécanismes de rupture plans, ce qui paraît insuffisant au vu des observations expérimentales décrites dans le chapitre 2. Cette approche a été étendue par Sab [5] au cas de mécanismes hors-plan. Dans cette sous-partie, nous proposons de rappeler brièvement les grandes étapes de la détermination de la fonction d'appui correspondante pour des matériaux homogènes dans l'épaisseur du mur. Son domaine d'application sera ensuite étendu dans la partie 5 pour prendre en compte une hétérogénéité transversale due à la dégradation de la résistance des matériaux avec l'élévation de la température.

#### 4.1.1 Calcul de la fonction d'appui

Les quatre blocs composant la cellule de base, tels que représentés sur la figure 5.4 sont animés d'un mouvement de corps rigide tel que la vitesse de chaque bloc  $i$  puisse s'écrire :

$$\underline{u}^i = \underline{t}^i + \underline{\Omega}^i \wedge (\underline{\xi} - \underline{\xi}^i) \quad (5.35)$$

où  $\underline{u}^i$  est la vitesse au point de coordonnées  $\underline{\xi}$  du bloc,  $\underline{t}^i$  est la vitesse de translation du bloc,  $\underline{\Omega}^i$  est sa vitesse de rotation et  $\underline{\xi}^i$  est le vecteur coordonnées du centre géométrique du bloc.

Dans un premier temps, l'objectif est de déterminer les valeurs des translations et des rotations des quatre blocs de façon à ce que la différence de vitesse entre deux points de vecteurs coordonnées respectifs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\xi}'$  situés sur les bords de la cellule de base et reliés par périodicité vaille :

$$\Delta \underline{u} = \underline{D} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') + \frac{1}{2} \left( (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) - (\underline{\xi}' \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}') \right) \underline{e}_3 \quad (5.36)$$

Ces calculs sont détaillés dans l'annexe C. On peut finalement déterminer, à un mouvement d'ensemble de corps rigide près, la vitesse de chaque bloc. A partir de ces vitesses, on obtient la valeur des discontinuités de vitesse aux interfaces.

Chaque interface obéit au critère de Mohr-Coulomb. Il est alors possible de déterminer, pour chaque interface, la valeur de la puissance résistante maximale en fonction du chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , des propriétés mécaniques  $(c^m, \varphi^m)$ , des caractéristiques géométriques  $(a = H + t, b = L + t)$  ainsi que des composantes des vecteurs de translation  $\underline{t}$  et de rotation  $\underline{\Omega}$  qui composent le mouvement de corps rigide, et qui constitueront des variables d'optimisation de la puissance résistante maximale totale.

En supposant, dans un premier temps, que la cohésion et l'angle de frottement interne du joint ne varient pas dans l'épaisseur du mur, la fonction d'appui du critère homogénéisé est définie par l'équation (5.37).

$$\begin{aligned} \Pi^{blocs}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) &= \frac{c^m}{\tan \varphi^m} h \operatorname{tr} \underline{D} \\ \text{s.c. :} \\ D_{11}^\varepsilon &\geq \sqrt{(D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 + \left(\frac{a}{2} \dot{\chi}_{12}\right)^2} \tan \varphi^m \\ m D_{22}^{\varepsilon'} &\geq -\varepsilon'' (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) + \tan \varphi^m \sqrt{(\varepsilon'' D_{11}^{\varepsilon'} + m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + \left((\varepsilon'' \dot{\chi}_{11} + m \dot{\chi}_{12}) \frac{b}{4}\right)^2} \\ &(\varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon' = \pm 1 \text{ et } \varepsilon'' = \pm 1) \\ D_{\alpha\beta}^\delta &= D_{\alpha\beta} - \delta \frac{h}{2} \dot{\chi}_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2 ; \delta = \varepsilon, \varepsilon') \end{aligned} \quad (5.37)$$

Dans cette expression, on a noté  $m = 2a/b$ .

### 4.1.2 Exemple

A titre d'exemple, on reprend les caractéristiques géométriques définies dans le tableau 5.1 et les propriétés mécaniques définies dans le tableau 5.2.

Le problème de minimisation (5.37) est tout d'abord formulé sous forme d'un problème d'optimisation conique quadratique, puis résolu numériquement par le solveur d'optimisation Mosek [137]. Cette formulation sous forme conique quadratique nous permettra ensuite, dans le chapitre 9, de réutiliser directement l'approche semi-analytique proposée dans ce chapitre comme critère macroscopique local du mur modélisé par une coque.

A titre de validation numérique, les résultats obtenus pour des sollicitations planes ont été comparés aux résultats de de Buhan et de Felice [4].

**Remarque préalable :** par la suite, les résultats sont présentés sous forme de coupes du domaine de résistance par des plans  $(N_{\alpha\beta}, N_{\gamma\delta})$ ,  $(N_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta})$  ou  $(M_{\alpha\beta}, M_{\gamma\delta})$  ( $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$ ). Si rien n'est précisé, tous les autres efforts sont nuls.

La figure 5.7 (a) représente des coupes du critère par des plans  $(N_{11}, M_{11})$  pour différentes valeurs de  $N_{22}$ , tandis que la figure 5.7 (b) représente des coupes de ce même critère par des plans  $(N_{22}, M_{22})$  pour différentes valeurs de  $N_{11}$ . Il apparait qu'une sollicitation de traction ou de compression verticale a une influence sur le domaine de résistance en flexion composée dans le plan horizontal, tandis qu'une sollicitation de traction ou de compression horizontale n'a pas d'influence sur le domaine de résistance en flexion composée dans le plan vertical. Cet anisotropie de résistance s'explique par la géométrie du mur : les joints horizontaux sont continus, alors que les joints verticaux sont discontinus.

La figure 5.7 (c) représente des coupes du critère par des plans  $(N_{12}, M_{12})$ . Il est intéressant de noter que, si la structure est infiniment résistante à la compression dans les directions horizontale (1) et verticale (2), elle présente en revanche une résistance finie au cisaillement.

Les figures 5.7 (d) à (f) représentent les "diagrammes d'interaction" entre les moments dans les différentes directions, pour des efforts normaux imposés. Cette représentation présente l'intérêt de donner la résistance à la flexion de la structure précontrainte. Elle montre également l'anisotropie du critère : pour une même précontrainte, le matériau homogénéisé est un peu plus résistant dans la direction 1 que dans la direction 2. Enfin, on peut observer qu'une précontrainte de compression augmente la résistance à la flexion dans n'importe quelle direction, à l'exception de la direction 2 pour laquelle une précontrainte en compression dans la direction 1 n'a pas d'effet.

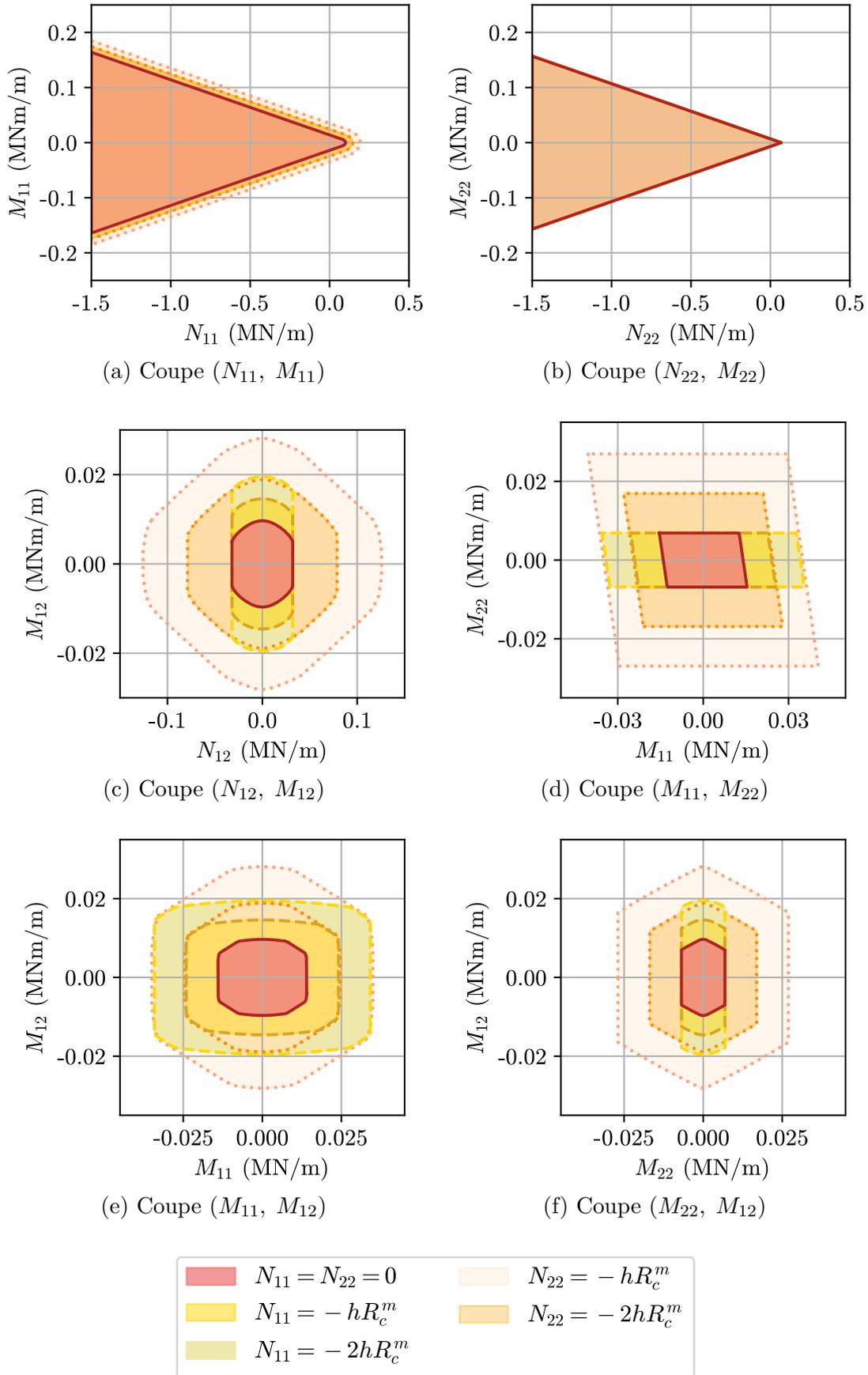


FIGURE 5.7 – Coupes du domaine  $G^{blocs}$  obtenu par une approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes de blocs

## 4.2 Mécanisme avec des taux de déformation homogènes dans des plans parallèles au plan du mur

Tout comme dans l'approche plane, on propose, en complément du mécanisme de blocs précédent, un mécanisme tel que le taux de déformation est défini de manière homogène dans les plans parallèles au plan du mur et donc identique dans le joint et dans le bloc. Il s'agit de l'extension de l'approche proposée dans le paragraphe 3.1.

### 4.2.1 Calcul de la fonction d'appui

Pour cette approche, nous considèrerons un champ de vitesse virtuelle de la forme :

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \underline{D} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi} + \frac{1}{2} (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 + \Delta(\xi_3) \underline{e}_3 \quad (5.38)$$

Ce champ est bien de la forme (5.1), et est donc cinématiquement admissible avec un chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ . Le taux de déformation correspondant est :

$$\underline{d}(\xi_3) = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} + \delta(\xi_3) \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \quad (5.39)$$

où on a posé  $\delta(\xi_3) = \frac{d\Delta}{d\xi_3}$

Ce taux de déformation est homogène dans les plans parallèles au plan du mur, et variable en fonction de l'épaisseur uniquement. De plus, dans chacun de ces plans, il est de la forme :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{12} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

Les valeurs  $d_{\alpha\beta}(\xi_3) = D_{\alpha\beta} - \xi_3 \dot{\chi}_{\alpha\beta}$  sont fixées par le chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  et la coordonnée  $\xi_3$ , tandis que  $\delta(\xi_3)$  est une variable d'optimisation. On peut alors montrer que la puissance résistante maximale développée sur la cellule de base s'écrit :

$$P_{rm}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \int_{\Omega} \pi(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}, \xi_3) d\Omega = |S| \int_{-h/2}^{h/2} \pi^{def,p}(\underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}) d\xi_3 \quad (5.41)$$

où  $|S|$  est la surface de la cellule de base, et  $\pi^{def,p}(\underline{d} = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}})$  est définie par :

$$\begin{aligned} \pi^{def,p}(\underline{d}) &= \left( \eta \frac{2c^m}{\tan \varphi^m} + (1 - \eta) \frac{2c^b}{\tan \varphi^b} \right) \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 + \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|d_I| + d_I}{2} + \frac{|d_{II}| + d_{II}}{2} \right) \\ &\quad \text{si } (|d_I| + |d_{II}|) \sin \varphi^k - d_I - d_{II} \leq 0 \quad (k = b, m) \\ \pi^{def,p}(\underline{d}) &= \left( \eta \frac{2c^m}{\tan \varphi^m} + (1 - \eta) \frac{2c^b}{\tan \varphi^b} \right) \left( \sup_{i=b,m} \frac{\sin \varphi^i}{1 - \sin \varphi^i} \right) \left( \frac{|d_I| - d_I}{2} + \frac{|d_{II}| - d_{II}}{2} \right) \\ &\quad \text{sinon} \end{aligned} \quad (5.42)$$

où  $d_I$  et  $d_{II}$  sont les valeurs principales du tenseur des taux de déformation  $\underline{d}$  dans le plan du mur.

Le domaine de résistance correspondant, noté  $G^{def}$  et approchant par l'extérieur le domaine exact est défini par :

$$G^{def} = \bigcap_{(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})} \left\{ (\underline{N}, \underline{M}) \mid \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} \leq \Pi^{def}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) \right\} \quad (5.43)$$

où :

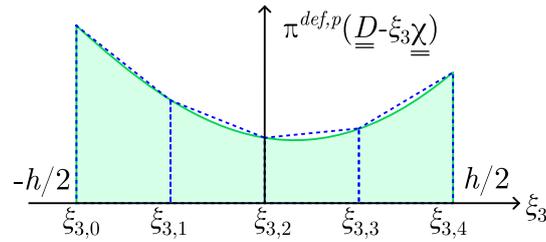
$$\Pi^{def}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \int_{-h/2}^{h/2} \pi^{def,p}(\underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}) d\xi_3 \quad (5.44)$$

#### 4.2.2 Intégration numérique

Il n'est pas possible de proposer une expression analytique simple de la fonction d'appui  $\Pi^{def}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ . L'intégration de la fonction  $\pi^{def,p}$  dans l'épaisseur du mur peut en revanche être réalisée de manière numérique.  $\pi^{def,p}$  étant une fonction convexe de  $\underline{d}$ , qui est elle-même une fonction affine de  $\xi_3$ ,  $\pi^{def,p}$  est donc une fonction convexe de  $\xi_3$  et son intégrale peut être évaluée par excès par une quadrature trapézoïdale :

$$\Pi^{def}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \int_{-h/2}^{h/2} \pi^{def,p}(\underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}) d\xi_3 \leq \sum_{k=1}^n \omega_k \pi^{def,p}(\underline{D} - \xi_{3,k} \underline{\dot{\chi}}) \quad (5.45)$$

où les  $\xi_k$  sont les points de quadrature, et les  $\omega_k$  les poids de la quadrature. En choisissant de diviser l'épaisseur du mur en  $N$  couches, les coordonnées dans l'épaisseur des  $N+1$  points de quadrature sont  $\xi_{3,k} = -h/2 + kh/N$  ( $0 \leq k \leq N$ ), et les poids de la quadrature valent  $\omega_0 = \omega_N = h/(2N)$  et  $\omega_k = h/N$  pour  $1 \leq k \leq N-1$ . La figure 5.8 schématise cette intégration numérique pour quatre couches, la valeur exacte de l'intégrale étant représentée en vert et l'intégrale par quadrature de Gauss en bleu.


 FIGURE 5.8 – Intégration numérique de la fonction  $\pi^{def,p}$ 

### 4.2.3 Exemple

Dans ce paragraphe, on propose un exemple de détermination du domaine de résistance de la maçonnerie par le mécanisme homogène par plans. Les caractéristiques géométriques du mur et les propriétés mécaniques de ses constituants sont identiques à celles utilisées dans la partie 3, données dans les tableaux 5.1 (pour les caractéristiques géométriques) et 5.2 (pour les propriétés mécaniques).

L'approximation de l'intégrale par quadrature trapézoïdale nécessite de choisir une discrétisation dans l'épaisseur. Les calculs sont donc conduits pour plusieurs discrétisations différentes.

La figure 5.9 représente différentes coupes du domaine de résistance pour une discrétisation dans l'épaisseur allant de 2 à 21 couches. On remarque qu'à partir de 10 couches, les coupes sont confondues pour toutes les sollicitations considérées. En pratique, ces coupes ont également été tracées pour des discrétisations allant de 21 à 201 couches, mais les domaines correspondants étaient indifférentiables à l'œil.

Ces coupes montrent également que pour certaines sollicitations ( $M_{11} = 1$ , autres sollicitations nulles), un nombre de couches pair, même faible, est plus adapté qu'un nombre impair. Cela n'est pas généralisable à toutes les sollicitations, et il convient donc d'éviter de faire une étude paramétrique sur quelques sollicitations bien choisies au risque de tirer des conclusions fausses.

Afin de quantifier l'écart au calcul exact pour une discrétisation dans l'épaisseur donnée, on introduit le paramètre sans dimension  $\varepsilon$ , défini comme l'écart relatif moyen entre la fonction d'appui pour  $k$  couches dans l'épaisseur et la fonction d'appui exacte sur un nombre  $N$  de trajets de chargements :

$$\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\Pi^{def-k} - \Pi^{def-exact}|}{\Pi^{def-exact}} \quad (5.46)$$

La fonction d'appui exacte n'étant pas connue, elle est approximée par la fonction d'appui pour une discrétisation de 200 couches dans l'épaisseur.

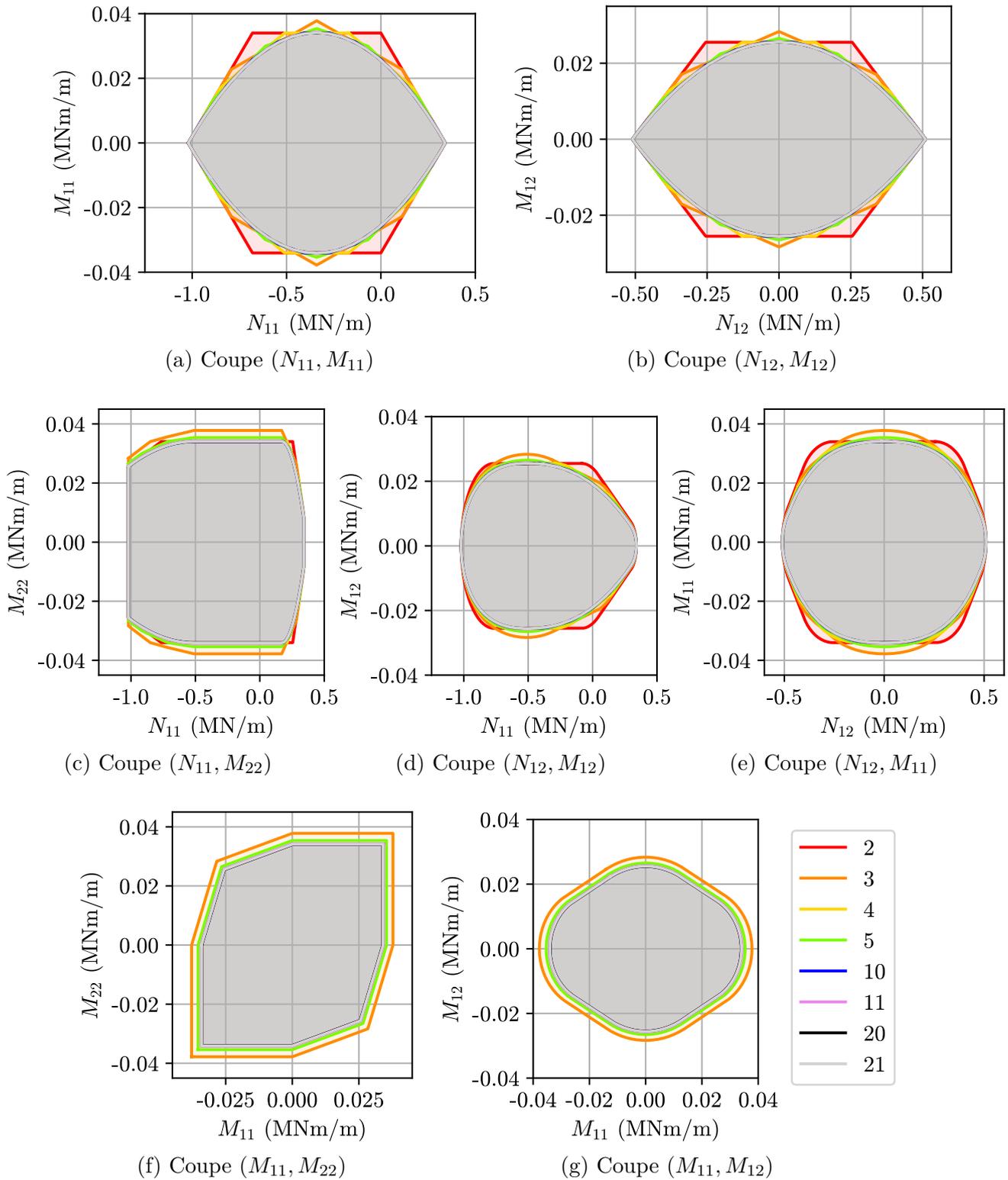


FIGURE 5.9 – Coupes du domaine  $G^{def}$  obtenu par une approche cinématique mettant en œuvre des mécanismes avec des taux de déformation homogènes par plans

La figure 5.10 montre l'évolution de l'écart relatif moyen pour les sollicitations  $(N_{11}, M_{11})$  et  $(N_{12}, M_{12})$ .

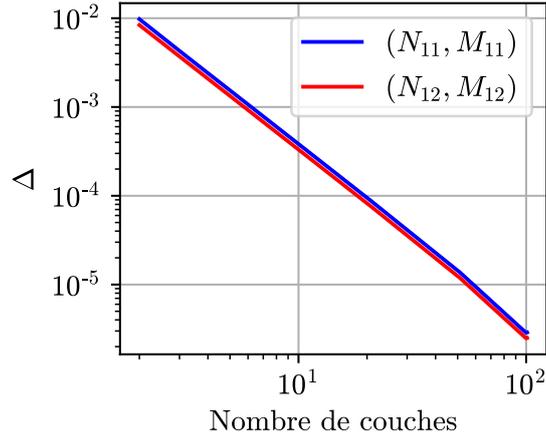


FIGURE 5.10 – Écart relatif moyen pour des sollicitations  $(N_{11}, M_{11})$  et  $(N_{12}, M_{12})$

On note que cet écart est très faible (de l'ordre de 1 % pour deux couches) et diminue rapidement. Il est de l'ordre de 0,03 % pour 10 couches, et de 0,01 % pour 20 couches. A température ambiante, on pourrait donc se permettre de discrétiser l'épaisseur en une dizaine de couches, tout en gardant une précision remarquable. Par la suite, nous avons choisi de conserver 20 couches afin de garder une cohérence entre les calculs à température ambiante et les calculs au feu. Pour ces derniers, une discrétisation un peu plus fine est en effet nécessaire pour bien rendre compte de la dégradation de la résistance des matériaux due à la température.

### 4.3 Approche semi-analytique du critère de résistance d'un mur en maçonnerie sous sollicitations membranaires et de flexion

#### 4.3.1 Définition du domaine de résistance

Les approches cinématiques développées dans les deux sous-parties précédentes sont des approches par l'extérieur du domaine de résistance de la maçonnerie. Leur intersection, notée  $G^{S.An.}$  (pour "Semi-analytique") constitue donc également une approche par l'extérieur du domaine de résistance exact  $G^M$  :

$$G^{S.An.} = G^{def} \cap G^{blocs} \supseteq G^M \quad (5.47)$$

La fonction d'appui du domaine  $G^{S.An.}$  s'écrit alors :

$$\Pi^{S.An.}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \inf_{(\underline{D}^1, \underline{\dot{\chi}}^1) \in \mathbb{R}^6} \left\{ \Pi^{blocs}(\underline{D}^1, \underline{\dot{\chi}}^1) + \Pi^{def}(\underline{D} - \underline{D}^1, \underline{\dot{\chi}} - \underline{\dot{\chi}}^1) \right\} \quad (5.48)$$

### 4.3.2 Exemple

Pour cet exemple, les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques sont identiques à celles du paragraphe précédent, données dans les tableaux 5.1 (pour les caractéristiques géométriques) et 5.2 (pour les propriétés mécaniques).

Le critère semi-analytique déterminé dans cette première partie étant une extension du critère présenté dans la partie 3, on ne s'intéressera pas aux coupes par des sollicitations planes uniquement, déjà présentées à la figure 5.6. La figure 5.11 représente donc des coupes du domaine de résistance par des sollicitations combinant une composante dans le plan du mur (de type  $N_{\alpha\beta}$ ) et une composante hors-plan (de type  $M_{\alpha\beta}$ ), ou deux composantes hors-plan.

Les sous-figures (a) à (c) représentent respectivement des coupes par les plans  $(N_{11}, M_{11})$ ,  $(N_{22}, M_{22})$  et  $(N_{12}, M_{12})$ . Il apparaît que, pour des sollicitations de traction ou de faible compression, combinées à un moment fléchissant, c'est le mécanisme de blocs qui génère la plus faible résistance. En revanche, pour des sollicitations avec une part de compression plus élevée, c'est le mécanisme de taux de déformation qui devient le plus adapté. Cette conclusion est proche des résultats obtenus pour des sollicitations planes.

Lorsqu'on s'intéresse à l'interaction entre les efforts de cisaillement dans le plan  $N_{12}$  et un moment de torsion  $M_{12}$ , tous autres efforts nuls par ailleurs, c'est le mécanisme de blocs qui donne la meilleure approche par l'extérieur du critère macroscopique.

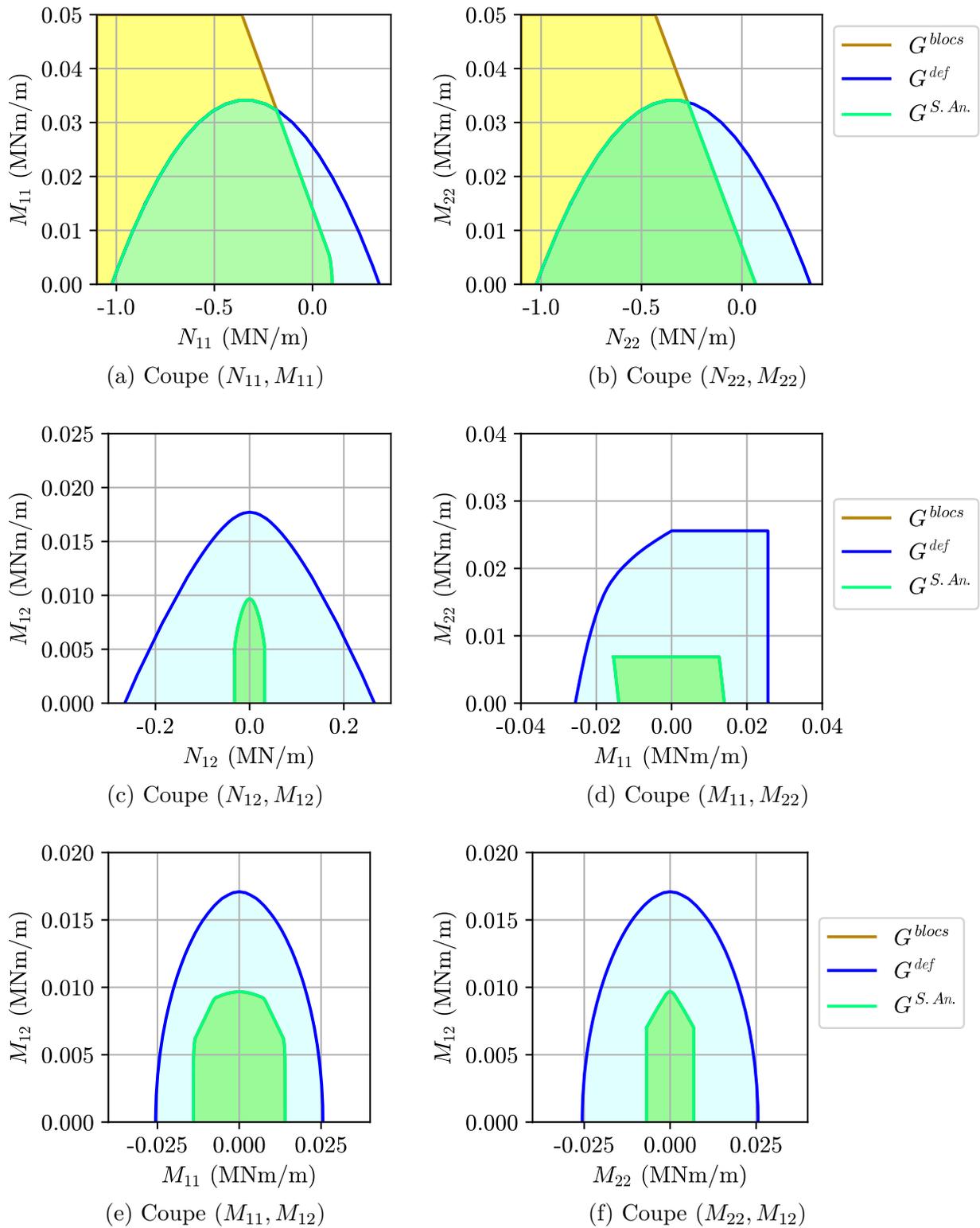


FIGURE 5.11 – Coupes du domaine  $G^{S.An.}$  obtenu par l'intersection des domaines  $G^{blocs}$  et  $G^{def}$

## 5 Prise en compte de la dégradation de la cohésion due au feu

Comme suggéré précédemment, l'objectif final de la détermination de ce critère de résistance est de pouvoir l'utiliser pour décrire la résistance d'un mur en maçonnerie exposé au feu, et dont les propriétés mécaniques ont été altérées par l'augmentation de la température. Cette partie présente la formulation du critère intégrant la dégradation des matériaux par le feu ainsi qu'un premier exemple applicatif.

### 5.1 Formulation de la fonction d'appui

Tout comme dans la partie 4, le critère de résistance macroscopique du mur de maçonnerie exposé au feu  $G^{M,\theta}$  peut être approché par l'extérieur par l'intersection des domaines  $G^{def,\theta}$  et  $G^{blocs,\theta}$ , définie comme suit :

$$G^{S.An.,\theta} = G^{def,\theta} \cap G^{blocs,\theta} \supseteq G^{M,\theta} \quad (5.49)$$

Dans l'équation (5.49), les exposants  $\theta$  désignent les critères de résistance macroscopiques prenant en compte la dégradation des propriétés de résistance des matériaux lors de leur exposition au feu.

La détermination de la fonction d'appui du domaine  $G^{blocs,\theta}$  est proposée dans l'annexe C, et est rappelée ci-dessous.

$$\Pi^{blocs,\theta}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{\langle c^m \rangle}{\tan \varphi^m} h \operatorname{tr} \underline{D} - \frac{\langle c^m \cdot \xi_3 \rangle}{\tan \varphi^m} h \operatorname{tr} \underline{\dot{\chi}}$$

s.c. :

$$\begin{aligned} D_{11}^\varepsilon &\geq \sqrt{(D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 + \left(\frac{a}{2} \dot{\chi}_{12}\right)^2} \tan \varphi^m \\ m D_{22}^{\varepsilon'} &\geq -\varepsilon'' (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) + \tan \varphi^m \sqrt{(\varepsilon'' D_{11}^{\varepsilon'} + m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + \left((\varepsilon'' \dot{\chi}_{11} + m \dot{\chi}_{12}) \frac{b}{4}\right)^2} \\ &(\varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon' = \pm 1 \text{ et } \varepsilon'' = \pm 1) \end{aligned} \quad (5.50)$$

Dans l'équation (5.50),  $\langle \bullet \rangle$  désigne l'opérateur de moyenne dans l'épaisseur :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bullet \, d\xi_3 \quad (5.51)$$

Par rapport à son homologue à température ambiante, donnée par l'équation (5.37),

on note la présence du terme  $\frac{\langle c^m \cdot \xi_3 \rangle}{\tan \varphi^m} h \operatorname{tr} \underline{\underline{\dot{\chi}}}$  qui traduit une perte de symétrie au niveau de la résistance de la section. On note en revanche que les conditions de pertinence ne sont pas modifiées. En effet, elles ne dépendent que de l'angle de frottement interne du mortier, que nous avons supposé constant en fonction de la température.

La prise en compte de la dégradation des matériaux dans la fonction d'appui du domaine  $G^{def,\theta}$ , est quant à elle assez simple. A température ambiante, pour une résistance constante dans l'épaisseur du mur, la fonction d'appui de ce domaine est approximée par excès par une quadrature trapézoïdale. Il suffit, pour prendre en compte l'évolution de la cohésion en fonction de la coordonnée transversale, de considérer que la résistance varie entre les différentes tranches. Afin de préserver le statut de majorant du domaine obtenu, on considérera que la cohésion est constante par tranche, et on prendra en compte la résistance maximale sur chaque tranche. Ce choix peut avoir un impact assez important pour les tranches les plus proches du feu, et dans lesquelles la température varie rapidement. Pour cette raison, on propose de discrétiser le mur, d'épaisseur 20 cm, en au moins 20 tranches.

## 5.2 Exemple applicatif

A partir de l'approche proposée dans le paragraphe précédent, on peut déterminer le domaine de résistance d'un mur en maçonnerie en pierre naturelle tel que celui présenté dans le chapitre 2.

### 5.2.1 Données

Les dimensions du mur, des blocs et des joints correspondent à celles de l'essai présenté dans le chapitre 2, et ont également été reprises pour le premier exemple de ce chapitre (tableau 5.1). Les propriétés mécaniques à température ambiante correspondent à celles présentées dans le tableau 5.2. Les profils de température utilisés, provenant de mesures expérimentales sur cet essai, sont identiques à ceux présentés dans le chapitre précédent, tout comme l'évolution des propriétés de résistance mécanique des matériaux en fonction de la température. Pour la pierre, elle correspond à la dégradation de la résistance en compression mesurée par Vigroux et al. [8] sur le calcaire de Saint-Maximin, tandis que pour le mortier, nous avons choisi de retenir la courbe de dégradation de la résistance en compression du béton selon l'Eurocode 2 [101].

Les figures 5.12 (a) et (b) rappellent l'évolution de la cohésion en fonction de la coordonnée dans l'épaisseur pour différents temps d'exposition au feu pour la pierre et le mortier.

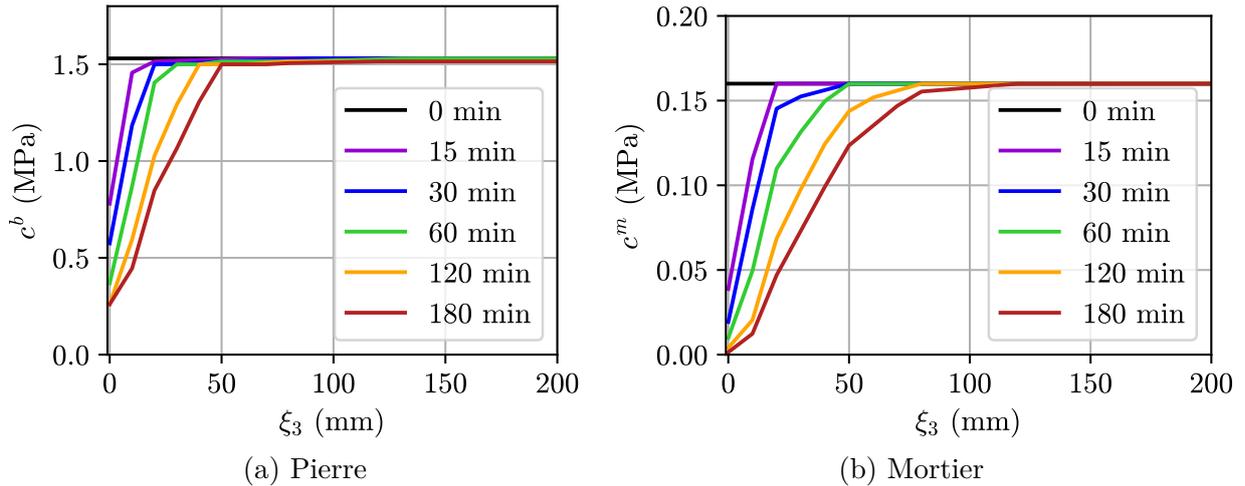


FIGURE 5.12 – Cohésion des matériaux en fonction de la coordonnée dans l'épaisseur  $\xi_3$  pour différentes durées d'exposition au feu

### 5.2.2 Critère complet

La figure 5.13 présente différentes coupes du domaines de résistance du mur avant exposition au feu et pour un temps d'exposition au feu fixé (180 min). Sur ces figures, on représente les domaines obtenus par les trois approches ( $G^{blocs}$ ,  $G^{def}$  et  $G^{S.An.}$ ) afin de distinguer la contribution du mécanisme de blocs et celle du mécanisme par taux de déformation homogènes dans le plan.

Sur ces figures, on note que le domaine obtenu par le mécanisme de blocs  $G^{blocs,\theta}$  est assez peu impacté par la dégradation des matériaux. Comme suggéré dans la sous-partie 5.1, un mécanisme qui n'était pas pertinent avant exposition au feu ne le devient pas après exposition au feu. On note en revanche une légère réduction de la résistance à la traction et à la flexion dans les directions où les fibres tendues sont du côté exposé au feu.

Concernant le domaine obtenu par le mécanisme homogène par tranche  $G^{def,\theta}$ , la résistance à la compression et à la traction uniaxiales diminuent d'environ 30 % après 180 min d'exposition au feu. Les sous-figures 5.13 (c) et (d) montrent également que le diagramme d'interaction subit une "rotation", déjà remarquée par Pham et al. [159] ou Yang et al. [160]. Cette rotation traduit principalement la perte de résistance en compression du côté exposé au feu, et se traduit du point de vue macroscopique par une diminution de la résistance en compression et en flexion du mur, ainsi que par une perte de symétrie de la résistance en flexion vis-à-vis du sens de cette flexion (fibres comprimées du côté exposé au feu ou non).

Finalement, l'intersection de ces deux domaines présente une diminution de la résistance en traction et au cisaillement relativement faible en valeur absolue (la résistance initiale étant déjà faible), une diminution plus importante (23 %) de la résistance en compression simple (horizontale et verticale), qui passe de 1020 kN/m à 780 kN/m ainsi qu'une

diminution de la résistance en flexion composée pour les sollicitations comprimant les fibres exposées au feu.

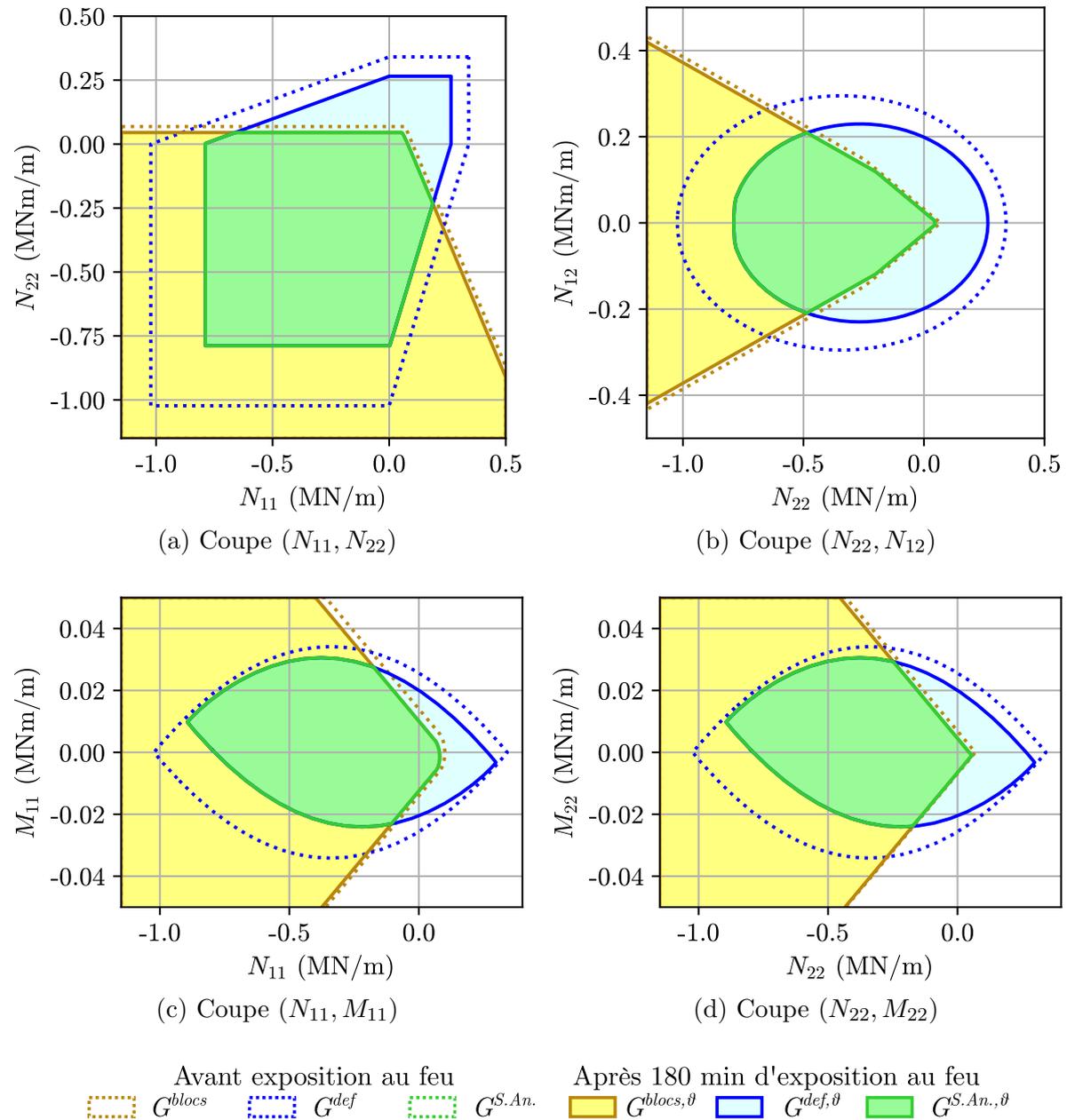


FIGURE 5.13 – Domaines de résistance obtenus par les approches cinématiques mettant en œuvre des mécanismes de blocs, des mécanismes homogènes, et par leur intersection, pour 0 et 180 min d'exposition au feu

La figure 5.14 représente l'évolution de différentes coupes du domaine de résistance en fonction du temps d'exposition au feu pour différentes sollicitations. Les remarques concernant ces figures sont identiques à celles formulées pour les figures 5.13 : l'exposition au feu joue principalement sur la résistance en compression et à la flexion de l'assemblage.

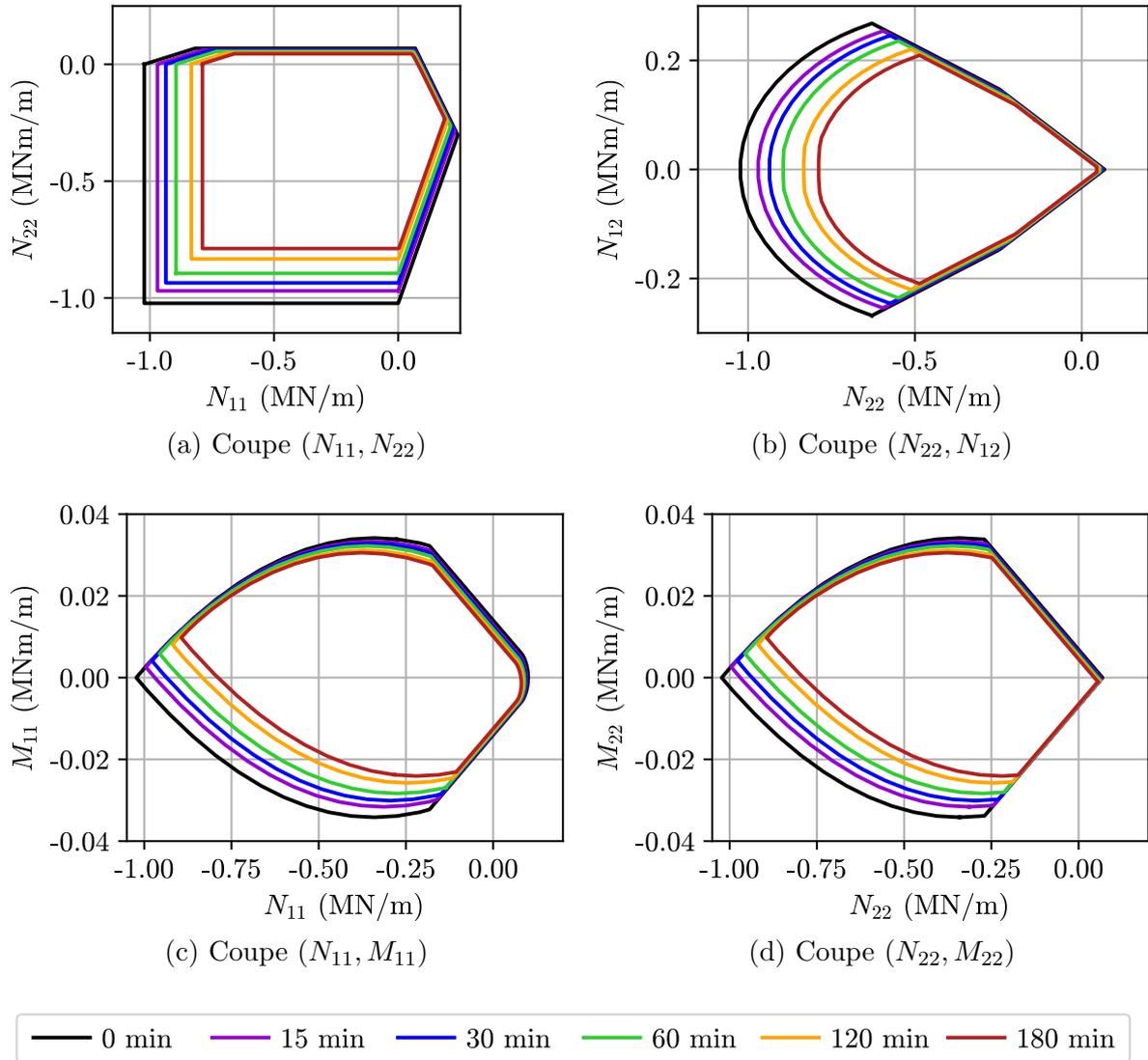


FIGURE 5.14 – Coupes du domaine de résistance pour différents temps d'exposition au feu

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une approche cinématique du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie. Cette approche étend celles, proposées par de Buhan et de Felice [4] et par Sab [5], basées sur des mécanismes de blocs. Elle permet, au moyen d'un mécanisme mettant en œuvre un taux de déformation homogène par plan, de prendre en compte des blocs de résistance en compression finie ainsi que des joints d'épaisseur non-nulle.

Les résultats obtenus ont notamment montré que, pour ce type d'approche, la résistance en compression de l'assemblage est principalement influencée par celle des blocs, surtout pour une faible fraction volumique de mortier, comme c'est le cas pour la construction neuve en pierre naturelle massive. Pour des sollicitations de traction, de flexion pure ou de cisaillement, en revanche, c'est la résistance du mortier qui va limiter la résistance de

l'assemblage.

L'approche proposée a ensuite été étendue de manière à prendre en compte la dégradation de la résistance (et notamment de la cohésion) des matériaux dans la direction transversale. Il apparaît que cette dégradation fait principalement diminuer la résistance en compression de l'assemblage, ainsi que sa résistance à la flexion dans les directions où les fibres comprimées sont du côté exposé au feu. La perte de résistance du mur en fonction de la température demeure relativement faible, puisqu'après 3 h d'exposition au feu, le mur n'a perdu que 23 % de sa résistance en compression.

Il faut cependant mentionner que cette approche analytique n'est qu'une approche par l'extérieur du domaine de résistance. Il paraît donc nécessaire de la comparer à d'autres approches, statiques (par l'intérieur) ou cinématiques (par l'extérieur), du Calcul à la rupture.

\*      \*

\*



# Chapitre 6

## Évaluation numérique du critère de résistance d'un mur de maçonnerie

**Résumé :** *Dans ce chapitre, on propose de poursuivre l'évaluation du domaine de résistance débutée par voies analytique et semi-analytique au chapitre précédent en mettant en œuvre numériquement les approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Après avoir décrit de façon générale leur implémentation, ces approches sont utilisées pour déterminer le domaine de résistance à température ambiante du mur décrit dans le chapitre 2. Le domaine de résistance ainsi obtenu est comparé au domaine de résistance obtenu par l'approche semi-analytique présentée dans le chapitre 5.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>181</b>
<b>2</b>	<b>Formulation numérique du problème auxiliaire de Calcul à la rupture</b>	<b>182</b>
2.1	Approche cinématique	183
2.2	Approche statique	188
<b>3</b>	<b>Application au domaine de résistance d'un mur de maçonnerie</b>	<b>192</b>
3.1	Données du problème	192
3.2	Domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations dans le plan du mur	193
3.3	Domaine de résistance hors-plan	201
3.4	Conclusion	213
<b>4</b>	<b>Étude paramétrique</b>	<b>214</b>
4.1	Présentation de l'étude	214
4.2	Conclusions principales	215
<b>5</b>	<b>Remarques finales</b>	<b>216</b>

---

**Note :** Les travaux présentés dans ce chapitre ont été présentés dans la publication suivante :

E. Donval, D.T. Pham, G. Hassen, P. de Buhan, M. Vigroux. 3D analytical and numerical upper-bound homogenization approaches to the in-plane strength domain of a running-bond masonry wall. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*. 2023.

# 1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une approche cinématique semi-analytique du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie en pierre massive porteuse, qui nous permet d'obtenir une évaluation par l'extérieur de ce domaine. Cette approche a permis d'étendre à une géométrie et des mécanismes tridimensionnels les approches numériques proposées dans le chapitre 4, qui s'intéressaient uniquement à une géométrie et à des mécanismes 2D. Son caractère semi-analytique lui confère l'avantage de donner des résultats quasi-immédiats, et, comme on le verra dans le chapitre 9, son expression lui permet d'être directement implémentée dans un code de Calcul à la rupture par éléments finis de coques. Cependant, elle ne fournit qu'une approche par l'extérieur du domaine de résistance, se basant sur des mécanismes relativement simples, et dont il paraît nécessaire d'évaluer la précision.

Dans ce chapitre, on propose donc de comparer l'approche semi-analytique ainsi proposée aux résultats obtenus par la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. L'approche cinématique numérique est certes une approche par l'extérieur, mais elle peut permettre d'explorer un ensemble plus vaste de champs de vitesse cinématiquement admissibles, et donc de s'intéresser à des mécanismes inaccessibles à l'approche semi-analytique développée dans le chapitre précédent, comme par exemple des mécanismes de déformation locaux. L'approche statique, quant à elle, permet d'obtenir un minorant de la charge limite. Sa mise en œuvre numérique est cependant plus difficile que celle de l'approche cinématique.

Tout d'abord, on rappelle la formulation numérique des deux approches utilisées. Ces approches sont ensuite appliquées à la résolution du problème auxiliaire pour des caractéristiques géométriques et des propriétés mécaniques correspondant au mur testé dans le chapitre 2. Les résultats obtenus sont alors comparés aux résultats obtenus par l'approche semi-analytique présentée dans le chapitre précédent. Enfin, les résultats d'une étude paramétrique proposée dans l'annexe D, portant sur les caractéristiques géométriques et les propriétés mécaniques de la cellule de base, sont résumés afin de comparer les résultats obtenus par les deux approches cinématiques. Cette étude paramétrique permet de déterminer dans quels cas l'approche cinématique numérique apporte une amélioration significative par rapport aux résultats de l'approche semi-analytique, et donc dans quels cas cette dernière conduit à des évaluations suffisamment précises.

## 2 Formulation numérique du problème auxiliaire de Calcul à la rupture

Les méthodes numériques portant sur le Calcul à la rupture (ou l'Analyse limite) pour des structures tridimensionnelles composées de matériaux de Mohr-Coulomb ont connu un développement un peu plus tardif que leurs homologues bi-dimensionnelles telles que celles présentées dans le chapitre 4. En effet, si dans le cas bidimensionnel, les approches statique et cinématique peuvent se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation conique quadratique (SOCP), dans le cas tridimensionnel, il s'agit d'un problème d'optimisation semi-définie (SDP), comme montré par Krabbenhoft et al. [139] ou Martin et Makrodimopoulos [138]. Les algorithmes pour la résolution de tels problèmes restent, encore aujourd'hui, moins performants que ceux qui permettent de résoudre des problèmes d'optimisation linéaire ou conique quadratique. De plus, l'extension de la méthode à une géométrie tridimensionnelle génère une forte augmentation de la taille du problème numérique, et donc de son temps de résolution. De telles approches ont néanmoins été mises en œuvre par Guéguin et al. [161] pour la détermination du domaine de résistance de sols renforcés, ou encore par Vincent et al. [124] pour des ouvrages en béton armé.

Dans cette partie, on rappelle la formulation numérique des approches cinématique puis statique du Calcul à la rupture appliquées à la résolution d'un problème d'un problème auxiliaire permettant de déterminer le domaine de résistance d'une structure périodique, telle que le mur représenté sur la figure 6.1 (a). La cellule de base, représentée sur les figures 6.1 (b) et 6.1 (c) est alors identique à celle considérée dans les chapitres 3 et 5.

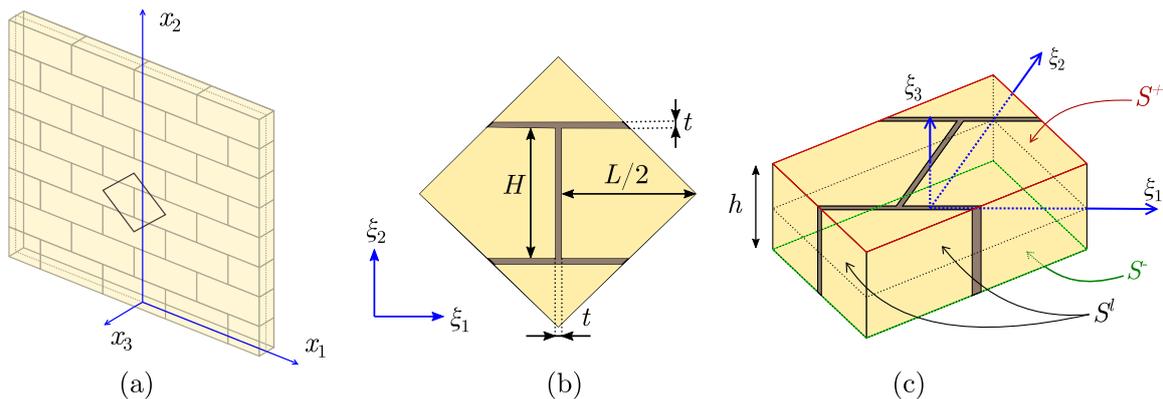


FIGURE 6.1 – Structure considérée et définition de la cellule de base

## 2.1 Approche cinématique

### 2.1.1 Discrétisation de la cellule de base et contraintes cinématiques

Le domaine tridimensionnel  $\Omega$  correspondant à la cellule de base est tout d'abord discrétisé en  $N_e$  éléments quadratiques à 10 nœuds. Les éléments choisis sont du type "simplexe", c'est-à-dire qu'ils doivent avoir des côtés droits et des faces planes (voir Martin et Makrodimopolos [138]). De tels éléments sont représentés sur la figure 6.2. Pour cette approche par l'extérieur, les inconnues principales du problème d'optimisation sont les vitesses, exprimées aux dix nœuds de chaque élément, comme représenté sur la figure 6.2 (a).

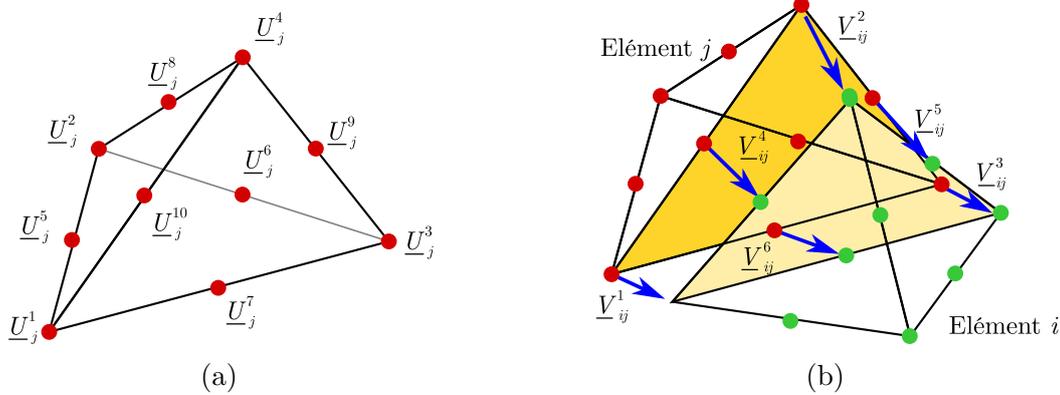


FIGURE 6.2 – Élément tétraédrique à 10 nœuds de type simplexe : (a) vitesses exprimées aux nœuds par élément et (b) discontinuités de vitesse

Les vitesses virtuelles sont des fonctions quadratiques de la position  $\underline{\xi}$  dans l'élément, et s'expriment de la manière suivante :

$$\forall \underline{\xi} \in \Omega_i, \underline{u}(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^{10} \underline{U}_i^k N_i^k(\underline{\xi}) \quad (6.1)$$

où  $\underline{U}_i^k$  représente la vitesse au nœud  $k$  de l'élément  $i$  occupant le volume  $\Omega_i$ , et  $N_i^k(\underline{\xi})$  est la fonction de forme pour le même nœud. L'expression des fonctions de forme est commune et peut être retrouvée dans Dhatt et Touzot [141] par exemple. Pour chaque élément  $i$ , les vitesses peuvent être collectées dans un vecteur  $\mathbf{u}^i$ , défini par ses trente composantes :

$$\mathbf{u}^i = {}^t \left\{ U_{1,i}^1 \quad U_{2,i}^1 \quad U_{3,i}^1 \quad U_{1,i}^2 \quad \dots \quad U_{3,i}^9 \quad U_{1,i}^{10} \quad U_{2,i}^{10} \quad U_{3,i}^{10} \right\} \quad (6.2)$$

où  $U_{j,i}^k$  désigne la valeur de la  $j$ -ième composante de la vitesse du  $k$ -ième nœud de l'élément  $i$ .

Ces champs de vitesse étant quadratiques, le taux de déformation résultant est linéaire. Il peut être exprimé aux quatre sommets de l'élément  $i$ , à partir de la valeur de la vitesse

$\underline{U}_i^k$  à chacun de ses dix nœuds  $k$ , de la manière suivante :

$$\underline{d}_i(\underline{\xi}) = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{2} \left( \underline{U}_i^k \otimes \underline{\nabla} N_i^k(\underline{\xi}) + \underline{\nabla} N_i^k(\underline{\xi}) \otimes \underline{U}_i^k \right) \quad (6.3)$$

Dans l'équation (6.3),  $N_i^k$  désigne la fonction de forme du nœud  $k$  de l'élément  $i$ . La relation qui relie les taux de déformation et les vitesses dans chaque élément  $i$  est linéaire et peut donc être exprimée sous la forme d'une relation matricielle, donnée par l'équation (6.4).

$$\mathbf{d}^i = \mathbf{B}^i \mathbf{u}^i \quad (6.4)$$

où  $\mathbf{d}^i$  collecte les six composantes du tenseur des taux de déformation à chacun des quatre sommets de l'élément  $i$  :

$$\mathbf{d}^i = \left\{ d_{11}^{1,i} \quad d_{22}^{1,i} \quad d_{33}^{1,i} \quad d_{23}^{1,i} \quad d_{31}^{1,i} \quad d_{12}^{1,i} \quad \dots \quad d_{23}^{4,i} \quad d_{31}^{4,i} \quad d_{12}^{4,i} \right\} \quad (6.5)$$

et  $\mathbf{B}^i$  est la matrice des dérivées partielles des fonctions de forme de l'élément  $i$ .

La formulation proposée ici inclut aussi des discontinuités de vitesse  $\underline{V}_j$  au travers de surfaces de discontinuités, notées  $\Sigma_j$  et de normale  $\underline{n}_j$ , qui ne sont autres que les faces triangulaires séparant des éléments adjacents. Ces discontinuités de vitesse sont représentées sur la figure 6.2 (b). Pour une surface de discontinuité  $j$  entre deux éléments adjacents notés  $i$  et  $i'$ , l'ensemble des conditions linéaires entre la discontinuité de vitesse aux nœuds et les vitesses nodales peut être exprimé par la relation suivante :

$$\mathbf{v}^j = \Delta^j \mathbf{u}^j \quad (6.6)$$

où le vecteur :

$$\mathbf{v}^j = \left\{ V_1^{1,j} \quad V_2^{1,j} \quad V_3^{1,j} \quad V_1^{2,j} \quad \dots \quad V_3^{5,j} \quad V_1^{6,j} \quad V_2^{6,j} \quad V_3^{6,j} \right\} \quad (6.7)$$

collecte les composantes des discontinuités de vitesses nodales au travers de la surface de discontinuité  $j$ ,  $\Delta^j$  contient l'information concernant la relation linéaire entre les vitesses nodales et les discontinuités de vitesse, et  $\mathbf{u}^j$  représente les vitesses aux nœuds concernés des éléments  $i$  et  $i'$ .

Pour qu'un champ de vitesse soit cinématiquement admissible, il doit vérifier l'équation suivante, déjà présentée dans le chapitre 5 :

$$\underline{u}(\underline{\xi}) = \underline{F} \cdot \underline{\xi} - \xi_3 \dot{\underline{\chi}} \cdot \underline{\xi} + \frac{1}{2} (\underline{\xi} \cdot \dot{\underline{\chi}} \cdot \underline{\xi}) \underline{e}_3 + \underline{u}^{per}(\underline{\xi}) \quad (6.8)$$

où  $\underline{F}$  est relié à  $\underline{D}$  par la relation  $\underline{D} = (\underline{F} + \underline{F})/2$ , et  $\underline{u}^{per}(\underline{\xi})$  est la fluctuation périodique du champ de vitesse.

Pour deux nœuds  $k$  et  $k'$  situés sur la surface latérale  $S^l$  de la cellule de base et reliés par périodicité, de vecteurs position respectifs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\xi}'$ , et appartenant à deux éléments  $i$  et  $i'$ , l'équation (6.8) se réécrit :

$$\underline{U}_i^k - \underline{U}_{i'}^{k'} = \underline{F} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') + \frac{1}{2} \left( (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) - (\underline{\xi}' \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}') \right) \underline{e}_3 \quad (6.9)$$

Considérant tous les nœuds des éléments  $i$  et  $i'$  qui doivent être reliés par périodicité, cette condition peut être réécrite sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{P}^{i,i'} \mathbf{u}^{i,i'} = \Delta \mathbf{u}^{i,i'} \quad (6.10)$$

où la matrice  $\mathbf{P}^{i,i'}$  contient l'information sur les degrés de liberté  $\mathbf{u}^{i,i'}$  reliés par périodicité, et les lie à la vitesse relative imposée entre les nœuds des éléments correspondants, noté  $\Delta \mathbf{u}^{i,i'}$ . Les composantes de  $\Delta \mathbf{u}^{i,i'}$  dépendent du chargement macroscopique  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  et de la géométrie de la cellule de base à travers les vecteurs position  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\xi}'$  des nœuds en vis-à-vis.

### 2.1.2 Formulation SDP du critère de Mohr-Coulomb pour l'approche cinématique

La puissance résistante maximale  $P_{rm}^{num}(\mathbf{u})$  d'un tel champ de vitesse  $\underline{u}$  est composée de deux contributions : la puissance résistante maximale due aux taux de déformation dans les  $N_e$  éléments, et la puissance résistante maximale due aux discontinuités de vitesses sur les  $N_i$  interfaces entre éléments adjacents. La valeur de la fonction d'appui  $\pi$  ne varie pas linéairement sur les éléments ni sur les interfaces de discontinuité. Son intégrale ne peut donc pas être évaluée exactement sur les éléments. Cependant, un majorant de cette quantité peut être obtenu en utilisant une formule de quadrature dans laquelle la valeur de la fonction d'appui est évaluée aux quatre sommets d'un élément (pour les déformations), ou aux trois sommets d'une facette (pour les discontinuités), tel qu'exprimé par l'équation (6.11)

$$P_{rm}^{num}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|\Omega_i|}{4} \sum_{k=1}^4 \pi^i(\mathbf{d}^k) + \sum_{j=1}^{N_i} \frac{|\Sigma_j|}{3} \sum_{l=1}^3 \pi^j(\mathbf{v}^l, \mathbf{n}^j) \quad (6.11)$$

Dans cette expression,  $|\Omega_i|$  est le volume de l'élément  $i$  et  $|\Sigma_j|$  représente l'aire de la surface de discontinuité  $j$ . La formulation de la fonction d'appui  $\pi$  pour des matériaux de Mohr-Coulomb, ainsi que l'expression de la condition de pertinence correspondante, peut être retrouvée dans Martin et Makrodimopoulos [138] par exemple. L'équation (6.12) ci-dessous rappelle l'expression de la fonction d'appui pour un taux de déformation exprimé par la variable matricielle  $\mathbf{d}^k$  exprimé au nœud  $k$  de l'élément  $i$ . Elle intègre deux variables matricielles SDP auxiliaires  $\mathbf{e}_1^k$  et  $\mathbf{e}_2^k$ , reliées entre elles par la condition linéaire (6.12)(b)

et reliées au taux de déformation  $\mathbf{d}^k$  par l'équation (6.12) (a).

$$\pi^i(\mathbf{d}^k) = \inf_{\mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k} \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{d}^k - \mathbf{e}_1^k + \mathbf{e}_2^k = 0 \quad (a) \\ \frac{2c^i}{1 - \sin \varphi^i} \text{tr}(\mathbf{e}_1^k) ; \quad \text{tr}(\mathbf{e}_1^k) - \frac{1 + \sin \varphi^i}{1 - \sin \varphi^i} \text{tr}(\mathbf{e}_2^k) = 0 \quad (b) \\ \mathbf{e}_1^k \succeq 0, \mathbf{e}_2^k \succeq 0 \quad (c) \end{array} \right\} \quad (6.12)$$

L'équation (6.13) donne l'expression de la fonction d'appui pour une discontinuité de vitesse  $\mathbf{v}^l$  exprimée au nœud  $l$  d'une surface de discontinuité  $j$  de normale  $\mathbf{n}^j$ . Cette formulation implique une variable auxiliaire  $t^l$ , linéairement reliée à la discontinuité de vitesse par l'équation (6.13)(b).

$$\pi^j(\mathbf{v}^l, \mathbf{n}^j) = \inf_{t^l} \left\{ \begin{array}{l} \frac{c^j}{\tan \varphi^j} t^l ; \quad t^l \geq \sqrt{(V_1^l)^2 + (V_2^l)^2 + (V_3^l)^2} \sin \varphi^j \quad (a) \\ t^l = V_1^l n_1^j + V_2^l n_2^j + V_3^l n_3^j \quad (b) \end{array} \right\} \quad (6.13)$$

Dans cette équation,  $V_i^j$  (resp.  $n_i^j$ ) correspond à la  $i^{\text{e}}$  composante de la discontinuité de vitesse  $\mathbf{v}^l$  (resp. de la normale  $\mathbf{n}^j$ ).

Les faces des éléments étant planes et le taux de déformation étant linéaire, il est suffisant d'imposer la condition de pertinence aux quatre sommets de l'élément pour qu'elle soit vérifiée partout. Les discontinuités de vitesse, cependant, peuvent être quadratiques. Afin de vérifier la condition de pertinence sur toute la surface de discontinuité par une simple vérification locale en ses trois sommets, on force ces discontinuités de vitesses à être linéaires. En reprenant les notations de la figure 6.2 (b), cette condition, discutée en détails dans Makrodimitopoulos et Martin [162], s'exprime de la manière suivante :

$$\underline{V}_j^4 = (\underline{V}_j^1 + \underline{V}_j^2)/2 ; \quad \underline{V}_j^5 = (\underline{V}_j^2 + \underline{V}_j^3)/2 ; \quad \underline{V}_j^6 = (\underline{V}_j^3 + \underline{V}_j^1)/2 \quad (6.14)$$

et peut également s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{M}^j \mathbf{v}^j = 0 \quad (6.15)$$

### 2.1.3 Formulation globale du problème de minimisation

Finalement, pour chaque trajet de chargement dans l'espace à 6 dimensions  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , l'approche cinématique se traduit par un problème d'optimisation qui consiste à minimiser la valeur de la fonction d'appui macroscopique, notée  $\Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , sous les deux conditions suivantes :

— La condition de pertinence est satisfaite à tous les sommets, à la fois pour les taux de

déformation (équation (6.12)) et pour les discontinuités de vitesse (équation (6.13)), ces dernières étant linéaires sur chaque surface de discontinuité (équation (6.14));

- La vitesse sur la surface latérale  $S^l$  est de la forme (6.8). Une implémentation similaire, mettant en œuvre l’approche cinématique du Calcul à la rupture pour la résolution d’un problème auxiliaire avec des conditions aux limites périodiques, a notamment été décrite par Guéguin et al. [122].

Après une procédure d’assemblage, les contraintes décrites dans les sous-parties 2.1.1 et 2.1.2 peuvent se mettre sous la forme du problème d’optimisation semi-définie suivant :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \Pi^{num}(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}}) = \frac{1}{|S|} P_{rm}^{num}(\mathbf{u}) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{A}^{global} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{global} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{K}^1 \times \dots \times \mathcal{K}^p \\ & \mathbf{e}_1^k \succeq 0, \mathbf{e}_2^k \succeq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4N_e\} \end{aligned} \quad (6.16)$$

où :

- $\mathbf{x}$  est le vecteur global des inconnues et collecte le vecteur assemblé des vitesses nodales  $\mathbf{u}$ , le vecteur assemblé des discontinuités de vitesses  $\mathbf{v}$  et le vecteur assemblé des composantes des taux de déformation  $\mathbf{d}$ ;
- $\mathbf{A}^{global}$  est la matrice regroupant l’ensemble des contraintes linéaires, et rassemble la relation entre les vitesses nodales et les taux de déformation (équation (6.4)), la relation entre les vitesses nodales et les discontinuités de vitesse (équation (6.6)), les conditions de périodicité (équation (6.10)), la condition de linéarité des discontinuités de vitesse (équation (6.14)), et les relations entre les variables auxiliaires scalaires du critère et les taux de déformation (équations (6.12) (a) et (b)) ou les discontinuités de vitesse (équation (6.13) (b)).  $\mathbf{b}^{global}$  représente le second membre (constant) de ces équations.
- Les contraintes coniques utilisées sont regroupées sous la forme  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^1 \times \dots \times \mathcal{K}^p$  où les  $\mathcal{K}^i$  désignent les  $p$  cônes de second ordre introduits;
- $\mathbf{e}_1^k$  et  $\mathbf{e}_2^k$  sont les variables SDP introduites dans l’équation (6.12).

Ce problème d’optimisation peut être résolu par un solveur d’optimisation semi-définie. Par la suite, nous avons utilisé l’API Python de Mosek [137].

Le domaine de résistance obtenu par l’approche numérique est :

$$G^{num} = \bigcap_{(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}}) \in E \subset \mathbb{R}^6} \left\{ \underline{\underline{N}} : \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{M}} : \underline{\underline{\dot{\chi}}} \leq \Pi^{num}(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}}) \right\} \quad (6.17)$$

où  $E$  est le sous-ensemble des trajets de chargement explorés, et  $\Pi^{num}(\underline{\underline{D}}, \underline{\underline{\dot{\chi}}})$  est la fonction d’appui macroscopique correspondant à un trajet de chargement, telle que définie par l’équation (6.16).

En pratique, lorsqu'on s'intéresse uniquement à des chargements plans ( $\underline{\dot{\chi}} = 0$ ), le domaine de résistance peut être exploré par des trajets de chargement radiaux. Le taux de déformation est alors donné de la manière suivante :

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \frac{1}{2} \sin \gamma & 0 \\ \frac{1}{2} \sin \gamma & \sin \beta \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

pour  $\beta \in [-\pi; \pi]$  et  $\gamma \in [-\pi/2; \pi/2]$ .

Pour des chargement hors-plan, en revanche, il devient bien plus complexe et plus long de balayer des combinaisons linéaires des six composantes du tenseur des taux de déformations et du tenseur des taux de courbure. Par la suite, nous présenterons uniquement des projections et des coupes du domaine de résistance par des plans  $(D_{\alpha\beta}, D_{\gamma\delta})$ ,  $(D_{\alpha\beta}, \dot{\chi}_{\gamma\delta})$  et  $(\dot{\chi}_{\alpha\beta}, \dot{\chi}_{\gamma\delta})$ . Les coupes du domaine de résistance sont obtenues par un pilotage en efforts généralisés  $(\underline{N}, \underline{M})$ , avec d'éventuels efforts fixes  $(\underline{N}^0, \underline{M}^0)$ . Le problème de minimisation (6.16) se transforme alors en :

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \frac{1}{|S|} P_{rm}(\mathbf{u}) - (\underline{N}^0 : \underline{D} + \underline{M}^0 : \underline{\dot{\chi}}) \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{A}^{global} \mathbf{x} = \mathbf{b}^{global} \\ & \mathbf{x} \in \mathcal{K}^1 \times \dots \times \mathcal{K}^p \\ & \mathbf{e}_1^k \succeq 0, \mathbf{e}_2^k \succeq 0 \quad \forall k \in \{1, \dots, 4N_e\} \\ & \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} = 1 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Au delà de la question du temps de calcul, la détermination du domaine de résistance d'une plaque dans  $\mathbb{R}^6$  pose également la question de la représentation de ce domaine. En effet, si celle-ci est simple dans l'espace tridimensionnel, elle devient presque impossible pour les dimensions supérieures. Plusieurs types de représentations, planes principalement, seront donc proposées dans la suite du chapitre.

## 2.2 Approche statique

Le passage à un modèle tridimensionnel de la cellule de base engendre une double augmentation de la complexité du problème, qui provient à la fois de l'augmentation du nombre de variables et de contraintes, mais aussi du passage d'un problème de type SOCP à un problème de type SDP. Dans le chapitre 4, nous avons vu que la qualité des minorants obtenus par l'approche statique était beaucoup plus sensible à la finesse du maillage que celle des majorants obtenus par l'approche cinématique. Pour un maillage moyennement fin, et donc un temps de calcul relativement limité, l'approche cinématique est donc susceptible de s'approcher davantage de la charge extrême associée au trajet

de chargement considéré que l'approche statique utilisant le même maillage. C'est pour cette raison que nous avons tout d'abord privilégié la mise en œuvre d'une approche cinématique à celle d'une approche statique. L'approche statique permet néanmoins de fournir une approche par l'intérieur du domaine de résistance, ce qui est très intéressant en vue d'évaluer la qualité des approches cinématiques proposées.

### 2.2.1 Discrétisation de la cellule de base et contraintes statiques

Pour l'approche statique, la cellule de base est discrétisée en  $N_e$  éléments tétraédriques linéaires à quatre nœuds, représentés sur la figure 6.3. Ces éléments sont identiques à ceux utilisés par Martin et Mackodimopoulos [138] par exemple.

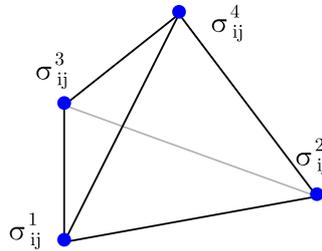


FIGURE 6.3 – Éléments tétraédriques linéaires utilisés pour la statique

Les variables principales d'optimisation sont les composantes du tenseur des contraintes microscopique, qui sont exprimées aux nœuds par éléments. Pour chaque élément  $i$ , elles peuvent être stockées dans un vecteur  $\sigma^i$ , défini par :

$$\sigma^i = {}^t \left\{ \sigma_{11}^{1,i} \quad \sigma_{22}^{1,i} \quad \sigma_{33}^{1,i} \quad \sigma_{23}^{1,i} \quad \sigma_{31}^{1,i} \quad \sigma_{12}^{1,i} \quad \dots \quad \sigma_{23}^{4,i} \quad \sigma_{31}^{4,i} \quad \sigma_{12}^{4,i} \right\} \quad (6.20)$$

Ce champ de contraintes doit être statiquement admissible avec le chargement macroscopique  $(\underline{N}, \underline{M})$ , c'est-à-dire, pour rappel, vérifier :

- L'équilibre en l'absence de forces de volume :  $\text{div} \underline{\sigma} = 0$  ;
- La continuité du vecteur contrainte :  $\llbracket \underline{\sigma} \cdot \underline{n} \rrbracket = 0$  ;
- Les conditions aux limites, qui sont de deux types :
  - Sur les faces de normale  $\pm \underline{e}_3$ , notées  $S^\pm$ , libres de contraintes, le vecteur contrainte doit être nul ;
  - Sur les faces latérales  $S^l$  de la cellule de base, le vecteur contrainte est antipériodique.

Tout comme pour l'approche cinématique, on peut montrer que ces trois premières conditions peuvent se mettre sous la forme d'un ensemble de conditions linéaires portant uniquement sur les contraintes et leurs dérivées par rapport aux trois coordonnées de l'espace, qu'on écrira :

$$\mathbf{C}\sigma = 0 \quad (6.21)$$

Dans cette équation,  $\sigma$  représente l'assemblage des  $\sigma^i$  définis par élément.

La cellule de base est soumise à un chargement périodique. En plus des conditions de périodicité sur ses surfaces latérales, le champ de contrainte local  $\underline{\sigma}$  doit donc vérifier l'équilibre avec le tenseur des efforts membranaires  $\underline{N}$  et avec le tenseur des moments fléchissants  $\underline{M}$ , qui sont, pour rappel, définis par :

$$\underline{N} = \frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \underline{\sigma} d\Omega \quad \underline{M} = -\frac{1}{|S|} \int_{\Omega} \xi_3 \underline{\sigma} d\Omega \quad (6.22)$$

En pratique, ces deux intégrations sont réalisées numériquement :

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{|S|} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|\Omega_i|}{4} \sum_{j=1}^4 \sigma_{\alpha\beta}^{j,i} \quad M_{\alpha\beta} = -\frac{1}{|S|} \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|\Omega_i|}{4} \sum_{j=1}^4 \xi_3^j \sigma_{\alpha\beta}^{j,i} \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (6.23)$$

où  $|\Omega_i|$  est le volume de l'élément  $i$ .

Pour chaque élément  $i$ , ces conditions peuvent alors se mettre sous forme de contraintes linéaires, que l'on peut écrire de manière globale sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{C}^i \sigma^i = \mathbf{d}^i \quad (6.24)$$

où  $\mathbf{C}^i$  contient l'information sur les degrés de liberté concernés ainsi que sur la géométrie de l'élément, et  $\mathbf{d}^i$  dépend des composantes du chargement macroscopique.

### 2.2.2 Formulation SDP du critère de Mohr-Coulomb pour l'approche statique

En plus d'être statiquement admissible avec un chargement  $(\underline{N}, \underline{M})$ , le champ de contraintes doit vérifier le critère de Mohr-Coulomb en tout point de l'élément. Dans le cas où l'interpolation du champ de contraintes est linéaire, de par la convexité du critère, il est suffisant de vérifier le critère au niveau des quatre sommets du tétraèdre pour s'assurer qu'il est bien respecté partout.

Le respect du critère de Mohr-Coulomb ( $f(\underline{\sigma}) \leq 0$ ) est alors équivalent à (Martin et Makrodimopoulos [138]) :

$$f(\underline{\sigma}_j^i) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{X}_j^{\alpha i} = -\underline{\sigma}_j^i (k_i - a_i \zeta_i^j) \underline{\mathbb{I}}_j^i \succcurlyeq 0 \\ \underline{X}_j^{\beta i} = \underline{\sigma}_j^i + \zeta_i^j \underline{\mathbb{I}}_j^i \succcurlyeq 0 \end{cases} \quad (6.25)$$

où  $\underline{X}_j^{\alpha i}$  et  $\underline{X}_j^{\beta i}$  sont des variables tensorielles semi-définies positives,  $a_i$  et  $k_i$  sont des paramètres de résistance de l'élément, et  $\zeta_i^j$  est une variable auxiliaire d'optimisation définie en chaque nœud  $j$  de chaque élément  $i$ .

Ce critère peut donc être réécrit comme deux relations linéaires et deux conditions de

semi-définie positivité portant sur les variables  $\underline{\underline{X}}_j^{\alpha i}$  et  $\underline{\underline{X}}_j^{\beta i}$ .

### 2.2.3 Formulation globale du problème de maximisation

Tout comme pour l'approche cinématique, nous considérerons que le chargement macroscopique est composé d'une part fixe, notée  $(\underline{N}^0, \underline{M}^0)$ , et d'une part variable, notée  $(\lambda \underline{\tilde{N}}, \lambda \underline{\tilde{M}})$  où  $\underline{\tilde{N}}$  et  $\underline{\tilde{M}}$  sont fixés, et  $\lambda$  est le multiplicateur du problème d'optimisation.

Finalement, pour chaque trajet de chargement  $(\underline{N} = \lambda \underline{\tilde{N}} + \underline{N}^0, \underline{M} = \lambda \underline{\tilde{M}} + \underline{M}^0)$ , l'approche statique se ramène à la résolution du problème d'optimisation qui consiste à maximiser la valeur du multiplicateur  $\lambda$  sous les deux conditions suivantes :

- En tout nœud, le champ de contrainte est à l'équilibre avec un chargement périodique  $(\underline{N}, \underline{M})$  et des forces de volume nulles. Ces conditions ont été explicitées dans le paragraphe 2.2.1 ;
- En tout nœud, le champ de contrainte vérifie le critère de résistance de Mohr-Coulomb. Cette condition a été explicitée dans le paragraphe 2.2.2, et plus particulièrement dans l'équation (6.25).

Après assemblage, ces contraintes peuvent se mettre sous la forme du problème d'optimisation semi-définie suivant :

$$\begin{aligned} & \max_{\mathbf{x}} \lambda \\ \text{s.c.} \quad & \mathbf{C}^{global} \mathbf{x} = \mathbf{d}^{global} \\ & \underline{\underline{X}}_j^{\alpha i} \succeq 0, \underline{\underline{X}}_j^{\beta i} \succeq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, N_e\} ; \forall j \in \{1, \dots, 4\} \end{aligned} \quad (6.26)$$

où :

- $\mathbf{x}$  est le vecteur global des inconnues et collecte le vecteur assemblé des contraintes nodales  $\sigma$ , ainsi que le vecteur assemblé des variables auxiliaires du critère de Mohr-Coulomb  $\zeta$  ;
- $\mathbf{C}^{global}$  est la matrice regroupant l'ensemble des contraintes linéaires, et rassemble les relations portant sur l'équilibre local du champ de contraintes, sur la continuité du vecteur contrainte, sur l'antipériodicité du vecteur contrainte sur la surface  $S^l$ , sur les conditions aux limites en contraintes sur les surfaces  $S^\pm$ , ainsi que les relations linéaires entre les variables semi-définies, les contraintes et les variables auxiliaires données par (6.25).  $\mathbf{d}^{global}$  représente le second membre de ces relations.
- $\underline{\underline{X}}_j^{\alpha i}$  et  $\underline{\underline{X}}_j^{\beta i}$  sont les variables SDP introduites par le critère de Mohr-Coulomb (Équation (6.25)).

Ce problème d'optimisation peut être résolu par un solveur d'optimisation semi-définie. L'approche statique étant une adaptation de développements antérieurs à cette thèse, elle se base sur l'API C de Mosek [137] (et non sur l'API Python comme les autres approches proposées jusqu'à maintenant).

Le domaine de résistance obtenu par l'approche statique  $G^{stat,num}$  est alors défini comme l'enveloppe convexe des chargements macroscopiques ( $\underline{N} = \lambda \underline{\tilde{N}} + \underline{N}^0, \underline{M} = \lambda \underline{\tilde{M}} + \underline{M}^0$ ) obtenus l'ensemble des trajets de chargement considérés.

Comme pour l'approche cinématique, il est impossible de balayer et de représenter tout l'ensemble des combinaisons des trois composantes du tenseur des taux de déformation et des trois composantes du tenseur des taux de courbure. Seules des projections ou des coupes du domaine de résistance par un plan de dimension 2 seront donc présentées.

### 3 Application au domaine de résistance d'un mur de maçonnerie

A partir des deux formulations numériques décrites dans la partie précédente, il est possible de déterminer numériquement un encadrement du domaine de résistance d'un milieu périodique tel que le mur en maçonnerie. Dans cette section, on présente une première application des approches statique et cinématique numériques du Calcul à la rupture, pour une cellule de base dont la géométrie ainsi que les propriétés mécaniques correspondent au mur testé dans le chapitre 2.

#### 3.1 Données du problème

Pour ce premier exemple, les caractéristiques géométriques ainsi que les propriétés des matériaux sont considérées identiques à celles utilisées dans le chapitre précédent, de manière à pouvoir comparer l'approche analytique et l'approche numérique. Elles sont rappelées dans les tableaux 6.1 et 6.2.

TABLEAU 6.1 – Caractéristiques géométriques de la cellule de base considérée

Longueur des blocs	Hauteur des blocs	Épaisseur des blocs	Épaisseur des joints
$L$ (m)	$H$ (m)	$h$ (m)	$t$ (m)
0,72	0,36	0,2	0,01

TABLEAU 6.2 – Propriétés mécaniques des matériaux considérés

	$c$ (MPa)	$\varphi$ (MPa)	$R_c$ (MPa)	$R_t$ (MPa)
Pierre	1,53	30 °	5,3	1,77
Mortier	0,16	25 °	0,5	0,2

On introduit également les notations suivantes :

$$N_c^b = hR_c^b = \Pi(D_{22} = 1)/|S| \quad M^b = h^2(R_c^b + R_t^b)/8 = \Pi(\dot{\chi}_{22} = 1)/|S| \quad (6.27)$$

où  $N_c^b$  correspond à la résistance en compression d'une plaque homogène, composée uniquement du matériau constitutif du bloc, qui suit un critère de résistance de Mohr-Coulomb aboutissant à une résistance en compression simple  $R_c^b$ .  $M^b$  correspond à la résistance maximale en flexion d'une plaque homogène, composée uniquement du matériau constitutif du bloc. Il ne s'agit donc pas de résistances en compression simple et en flexion simple, mais de projections du domaine de résistance sur les directions  $N_{22}$  et  $M_{22}$  (qui, pour une plaque homogène, sont respectivement identiques aux projections selon les directions  $N_{11}$  et  $M_{11}$ ).

Enfin, les notations suivantes, introduites dans le chapitre 5, seront également utilisées :

$$N_U = N_{11} + N_{22} ; N_V = N_{11} - N_{22} ; N_W = 2N_{12} \quad (6.28)$$

$N_U$  correspond à la partie sphérique du tenseur des efforts membranaires, tandis que  $N_V$  et  $N_W$  sont deux composantes dans le plan déviatorique.

## 3.2 Domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations dans le plan du mur

### 3.2.1 Optimisation des maillages utilisés dans les approches statique et cinématique

Pour cette partie, tous les calculs ont été réalisés sur un ordinateur de bureau sous Ubuntu 16.04 avec 32 GB de RAM et un processeur Intel Xenon E5-2623. Tout comme dans le chapitre 4, les maillages ont été générés par le logiciel de maillage Gmsh [163].

Le choix des maillages utilisés pour les approches statique et cinématique a été guidé par une étude de convergence dont les résultats sont représentés sur la figure 6.4. Pour l'approche statique comme pour l'approche cinématique, les sollicitations correspondent à des taux de déformation imposés, le taux de courbure étant fixé à zéro. Sur ces figures, l'écart relatif est défini comme :

$$\Delta = \frac{\Pi^i(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}} = 0)}{\Pi^{moy}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}} = 0)} - 1 \quad (6.29)$$

où  $\Pi^i(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  est la valeur de la fonction d'appui du domaine obtenu par l'approche statique ou par l'approche cinématique pour un maillage donné, et  $\Pi^{moy}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = (\Pi^{stat,max}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + \Pi^{ciné,min}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}))/2$  correspond à la moyenne de la valeur de la fonction d'appui obtenue par

l'approche statique  $\Pi^{stat,max}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  pour le maillage de 111 633 éléments et par l'approche cinématique  $\Pi^{ciné,min}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  pour le maillage de 17 853 éléments. Le choix de deux maillages différents se justifie par le fait que le maillage utilisé par l'approche statique conduisait pour l'approche cinématique à un problème trop lourd numériquement pour être traité par le PC utilisé.

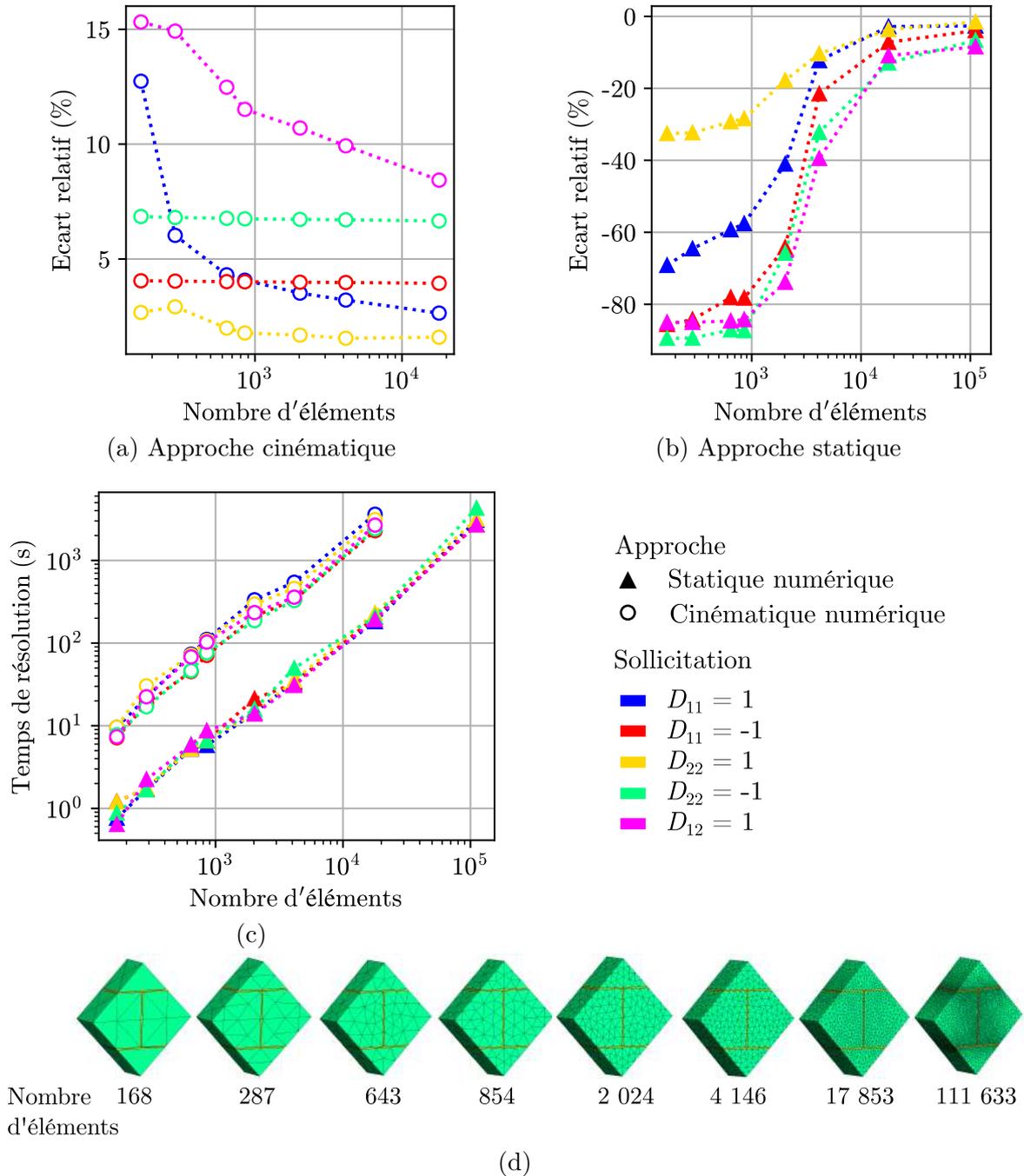


FIGURE 6.4 – Etude de convergence : (a) écart relatif en fonction du nombre d'éléments pour l'approche cinématique, (b) écart relatif en fonction du nombre d'éléments pour l'approche statique, (c) temps de résolution en fonction du nombre d'éléments et (d) maillages utilisés pour l'étude de convergence

Sur la figure 6.4, il apparaît que pour l'approche cinématique, augmenter la qualité,

et donc la taille du maillage ne permet d'améliorer le majorant que de 10 % au plus. En revanche, le temps de résolution augmente très rapidement. Un maillage tel que celui présenté sur la figure 6.5 (a), composé de 525 éléments, peut donc être suffisant tout en permettant des calculs rapides (environ 30 s par trajet de chargement). Ce maillage a donc été retenu pour les approches cinématiques présentées par la suite. Pour l'approche statique, en revanche, un maillage de meilleure qualité permet d'augmenter drastiquement le minorant, d'où le choix du maillage représenté sur la figure 6.5 (b), composé de 111 633 éléments, pour les approches statiques présentées par la suite. Le temps de calcul pour un trajet de chargement sur un tel maillage est compris entre 1 et 2 h. De tels calculs sont alors totalement inadaptés au travail de l'ingénieur, mais présentent un intérêt notable pour évaluer la qualité de l'approche semi-analytique. A l'issue de cette étude de convergence, on note tout de même qu'il subsiste un écart entre les deux approches compris entre 3 % (pour une sollicitation  $D_{22} = 1$ ) et 17 % (pour une sollicitation  $D_{12} = 1$ ). Le choix d'un maillage différent pour les approches statique et cinématique dans la suite de l'étude est guidé par un souci d'efficacité, c'est-à-dire d'obtenir un encadrement correct en un temps de calcul raisonnable.

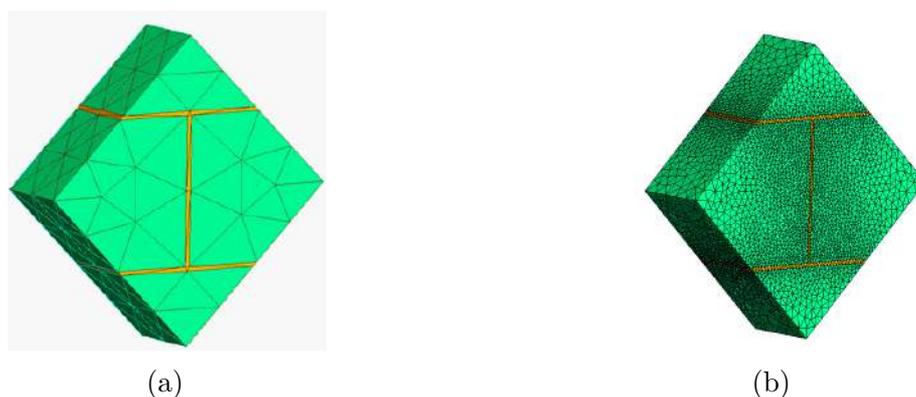


FIGURE 6.5 – Maillages utilisés pour la détermination numérique du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes par l'approche cinématique (a) et par l'approche statique (b)

On donne dans le tableau 6.3 le nombre de variables et de contraintes ainsi que le temps de calcul pour le problème statique et pour le problème cinématique. Ces grandeurs sont obtenues pour un chargement  $D_{22} = -1$  et pour le maillage à 17 853 éléments. Il apparaît que pour un maillage identique, le problème statique comporte moins de variables et de contraintes, et est résolu bien plus rapidement. C'est pour cette raison que, dans l'étude paramétrique, nous avons pu nous intéresser à un maillage encore plus fin (111 633 éléments) en statique, alors que la résolution de l'approche cinématique sur ce même maillage excédait les capacités de calcul de l'ordinateur utilisé.

La figure 6.6 représente quelques coupes des domaines obtenus par l'approche cinématique numérique (en gris), et par l'approche statique numérique (en rouge), pour les maillages de la figure 6.5. Ces coupes montrent que les principales différences entre les deux approches correspondent à des sollicitations de compression. Pour des sollicitations

de traction ou de cisaillement, en revanche, les valeurs obtenues sont assez proches.

TABLEAU 6.3 – Variables des problèmes d’optimisation correspondant à l’approche statique et à l’approche cinématique pour le maillage de 17 853 éléments

	Contraintes	Variables scalaires	Cônes	Variables SDP	Temps de résolution (s)
Approche statique	1 240 012	499 773	0	142 792	230
Approche cinématique	1 936 118	1 960 735	203 592	142 824	3714

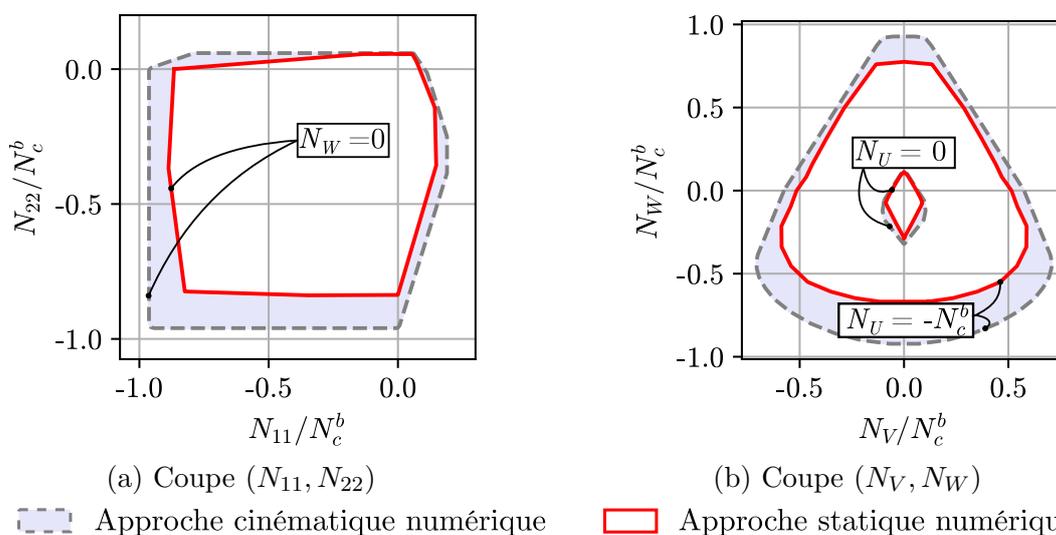


FIGURE 6.6 – Coupes du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes

### 3.2.2 Comparaison des approches cinématique semi-analytique et numérique

La figure 6.7 représente l’approche par l’extérieur du domaine de résistance obtenue par l’approche cinématique numérique (en gris), comparée à l’approche par l’extérieur de ce même domaine obtenue par l’approche analytique présentée dans le chapitre 5 (partie 3), pour un même nombre de trajets de chargement.

Il est particulièrement remarquable de voir à quel point l’approche analytique donne des résultats proches de l’approche cinématique numérique. L’approche numérique améliore légèrement l’approche analytique pour des sollicitations de traction et pour des sollicitations de cisaillement. Cette modeste amélioration se fait à un coût numérique élevé : alors que la détermination analytique du domaine est immédiate, sa détermination numérique prend environ 3 h (environ 25-30 s par trajet de chargement).

Les deux approches cinématiques peuvent être comparées d’un point de vue quantitatif en définissant une différence relative entre les résultats de l’approche numérique et de

l'approche analytique. Cet écart relatif est défini pour tout trajet de chargement  $i$  de la manière suivante :

$$\varepsilon_i = \frac{\Pi^{S.An.}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) - \Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})}{\Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})} \quad (6.30)$$

où  $\Pi^{an..p}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  désigne la fonction d'appui macroscopique obtenue par voie semi-analytique pour un trajet de chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , tandis que  $\Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  désigne la fonction d'appui macroscopique obtenue par l'approche numérique pour ce même trajet de chargement.

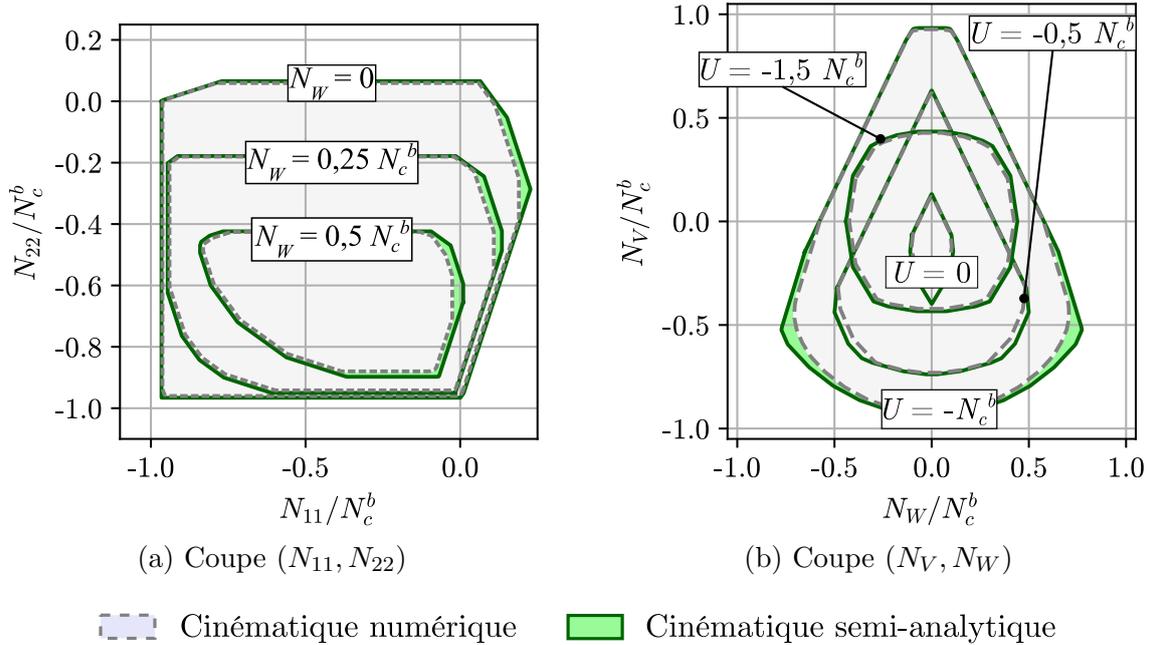


FIGURE 6.7 – Coupes du domaine de résistance vis-à-vis de sollicitations planes

La figure 6.8 (a) représente l'écart relatif  $\varepsilon_i$  en fonction des angles  $\beta$  et  $\gamma$ , qui définissent la direction de  $\underline{D}$ , tandis que la figure 6.8 (b) représente les composantes de  $\underline{D}$  en fonction de  $\beta$  et  $\gamma$ .

L'écart relatif entre l'approche semi-analytique et l'approche cinématique numérique est plus grand dans les zones correspondant à des sollicitations de traction ( $D_{11}, D_{22} \geq 0$  ou  $\beta \in [0 ; \pi/2]$ ) et à des sollicitations de cisaillement ( $\gamma$  proche de  $-\pi/2$  ou de  $\pi/2$ ). Dans ces zones, l'approche numérique permet d'améliorer le majorant obtenu par l'approche analytique de 30 % au maximum. A l'inverse, cet écart relatif reste très faible pour des sollicitations de compression, pour lesquelles  $D_{11} \leq 0$  ou  $D_{22} \leq 0$ .

Bien qu'une approche statique eusse permis de mieux évaluer la précision de l'approche cinématique analytique proposée dans le chapitre précédent, son temps et son coût numérique la rendent difficile d'utilisation pour de telles comparaisons, c'est pourquoi la comparaison proposée dans ce paragraphe n'a pas pu être reproduite pour l'approche statique.

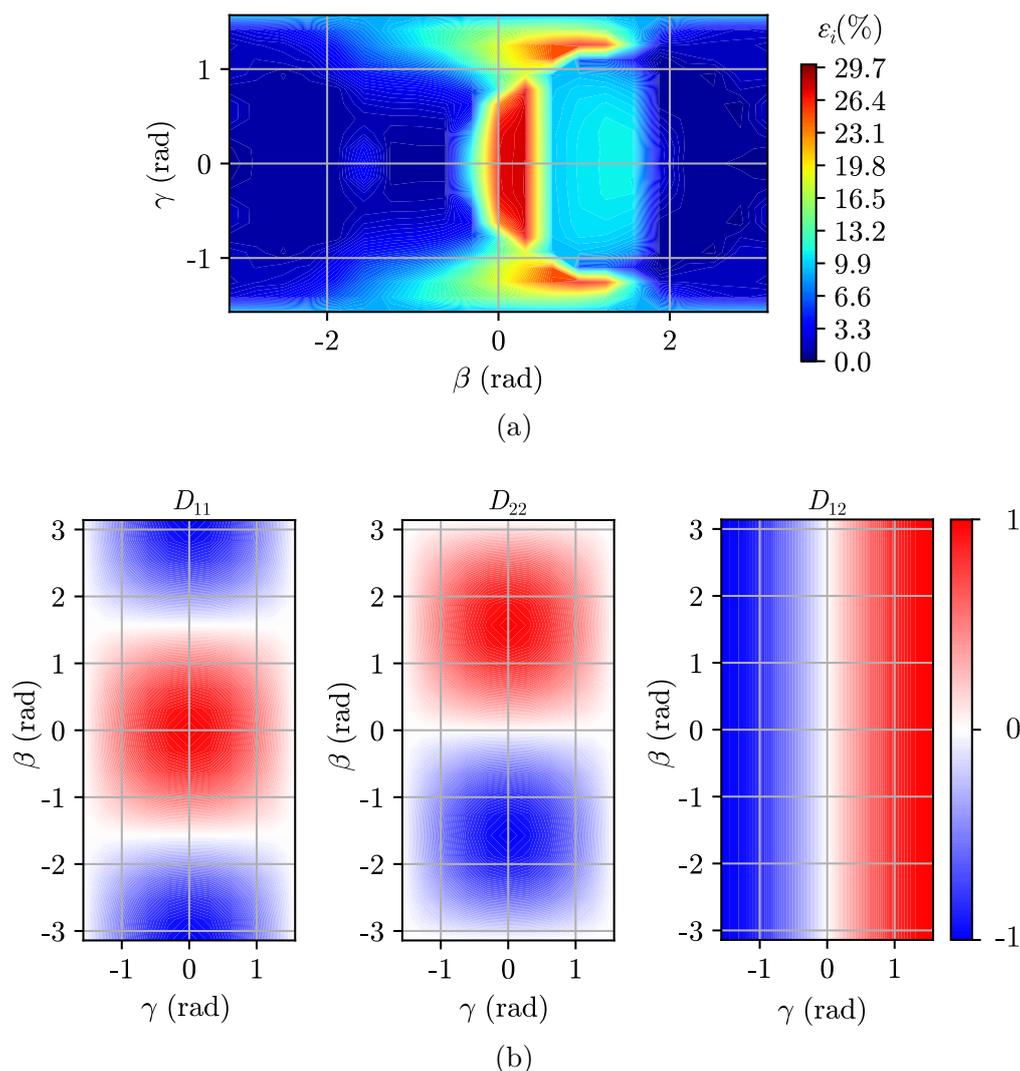


FIGURE 6.8 – (a) Différence relative entre les approches analytique et numérique en fonction du trajet de chargement ; (b) Valeur des composantes du trajet de chargement en fonction de  $\beta$  et  $\gamma$

### 3.2.3 Mécanismes et champs de contrainte optimaux

Un autre résultat intéressant des approches numériques proposées concerne les champs de contraintes ou de vitesse optimaux associés aux différentes sollicitations.

La figure 6.9 représente les différents mécanismes obtenus pour des sollicitations  $D_{11} = 1$  (a),  $D_{11} = -1$  (b),  $D_{22} = 1$  (c),  $D_{22} = -1$  (d) et  $D_{12} = 1$  (e) (les autres  $D_{\alpha\beta}$  étant nuls à chaque fois). On peut observer que les mécanismes (c) et (e) activent bien les discontinuités de vitesses proposées dans le mécanisme analytique de de Buhan et de Felice [4], tandis que les deux mécanismes de compression (b) et (d) sont quasiment des mécanismes homogènes comme celui présenté dans la partie 3 du chapitre 5. Enfin, le mécanisme (a), qui correspond à une traction dans la direction horizontale, est une combinaison de déformations localisées des blocs, et d'une discontinuité de vitesse entre le mortier du joint vertical et la pierre.

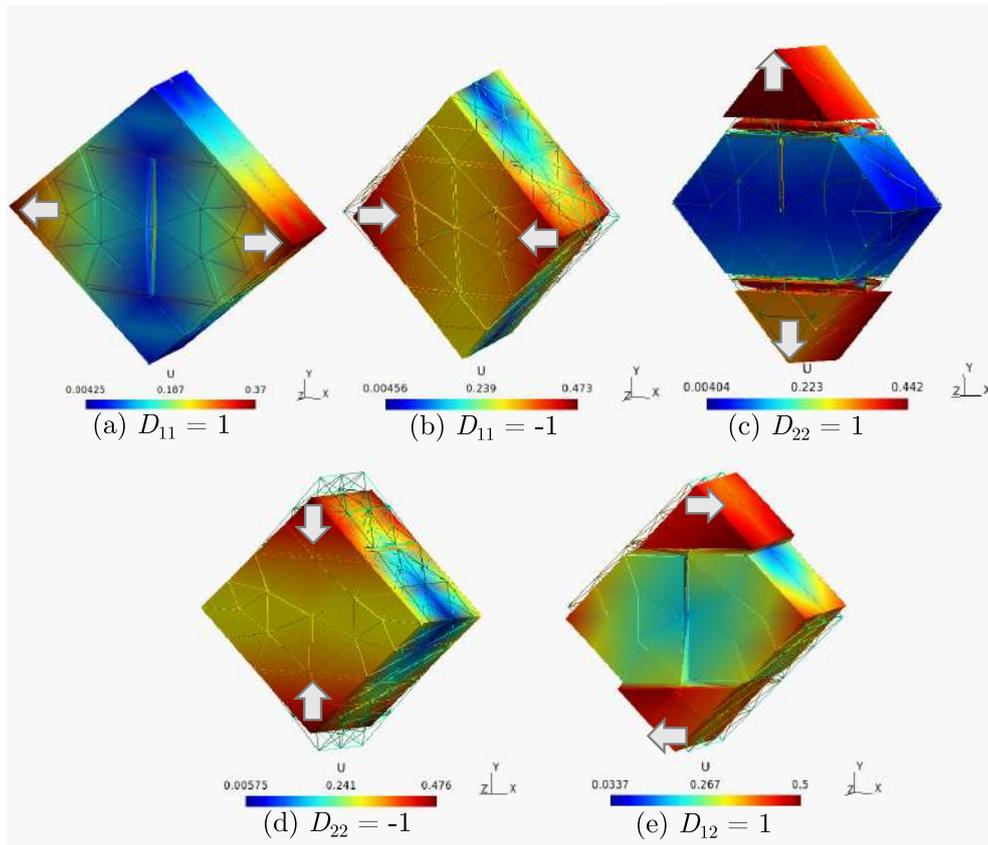
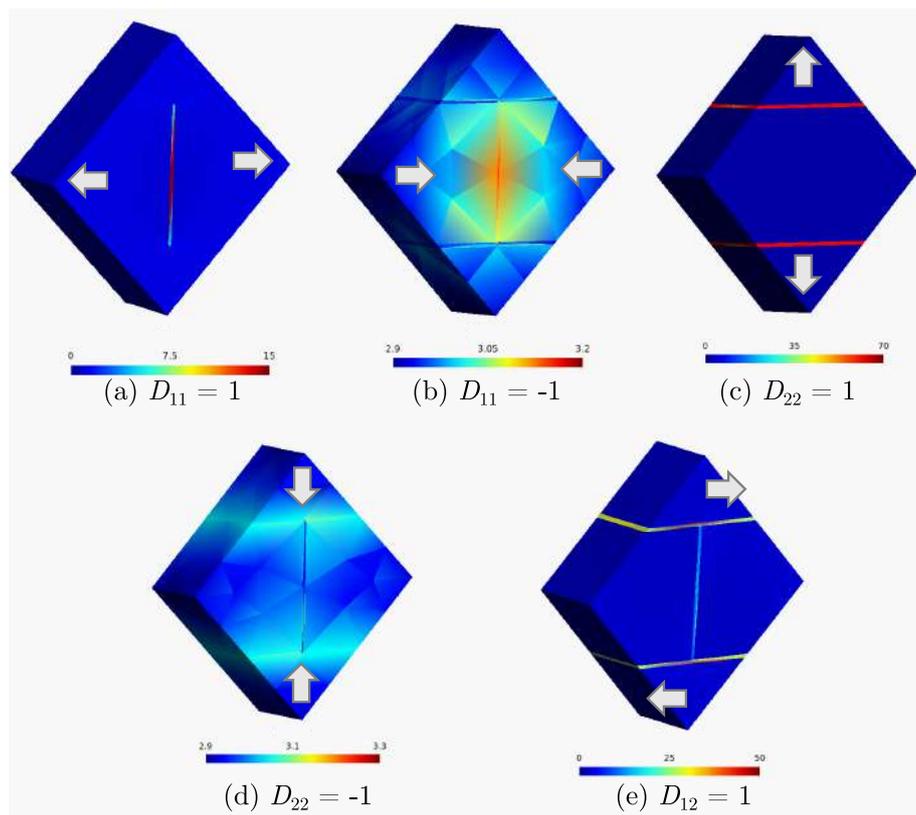


FIGURE 6.9 – Mécanismes de rupture optimaux pour quelques sollicitations dans le plan (Les couleurs représentent les isovaleurs de la norme de la vitesse)

La figure 6.10 représente la valeur locale de la fonction d'appui pour ces mêmes mécanismes de rupture. Dans le cadre de l'analyse limite, cette valeur correspond à la dissipation plastique par unité de volume. Il est intéressant de noter que, pour des sollicitations de traction dans les directions horizontale et verticale, ainsi que pour une sollicitation de cisaillement, la valeur de la fonction d'appui est bien plus élevée dans les joints que dans les blocs, où elle est quasiment nulle. Pour des sollicitations de compression, en revanche, la valeur de la fonction d'appui est seulement 10 % plus élevée dans les joints que dans les blocs. Une répartition aussi homogène de la fonction d'appui permet d'expliquer pourquoi le mécanisme analytique mettant en œuvre un taux de déformation homogène sur la cellule de base donne d'aussi bons résultats comparé au mécanisme, potentiellement plus complexe, obtenu par l'approche numérique.


 FIGURE 6.10 – Valeur locale de  $\pi(\underline{d})$  pour quelques sollicitations dans le plan

La figure 6.11 représente des coupes des composantes  $\sigma_{22}$  (a) et  $\sigma_{33}$  ((b) avec une échelle classique et (c) avec une échelle modifiée pour distinguer les zones  $\sigma_{33} \geq 0$  des zones  $\sigma_{33} \leq 0$ ) du champ de contrainte optimal pour une sollicitation équivalente à  $D_{22} = -1$ .

Tout d'abord, on peut noter la présence d'un "effet de bord" au niveau des joints horizontaux. Au niveau des surfaces  $S^\pm$ , la contrainte verticale  $\sigma_{22}$  y est plus faible que dans la pierre (figure 6.11 (a)). Si on regarde un plan à l'intérieur de la cellule de base, en revanche, il n'y a pas de différence entre la contrainte verticale dans les joints horizontaux et dans la pierre.

Il est également intéressant de noter que le champ de contraintes n'est pas plan. La composante  $\sigma_{33}$ , représentée sur la figure 6.11 (b) est bien nulle par hypothèse sur les surfaces  $S^l$  de la cellule de base, mais elle varie très rapidement au voisinage de ces surfaces. Pour qu'une telle variation soit possible, il faut une discrétisation suffisante dans l'épaisseur du mur, d'où la nécessité d'avoir des maillages fins (entraînant des temps de calcul longs) pour l'approche statique.

Le signe de cette composante est également remarquable : il est négatif au niveau des joints horizontaux, mais positif dans la pierre (voir figure 6.11 (c)). Cette observation est cohérente avec les observations de Hilsdorf [154], qui propose, pour les maçonneries chargées verticalement, un état de contrainte correspondant à une compression triaxiale

dans le mortier, et à une compression verticale/traction horizontale dans la pierre. Un tel état de contrainte est cohérent, du point de vue numérique, avec les mécanismes de rupture en compression qui s'accompagnent d'une expansion de la cellule de base dans la direction transversale au mur. Du point de vue expérimental, un tel état de contraintes est également cohérent avec les ruptures par fendage observées à température élevée (chapitre 2) ou à température ambiante (chapitre 8).

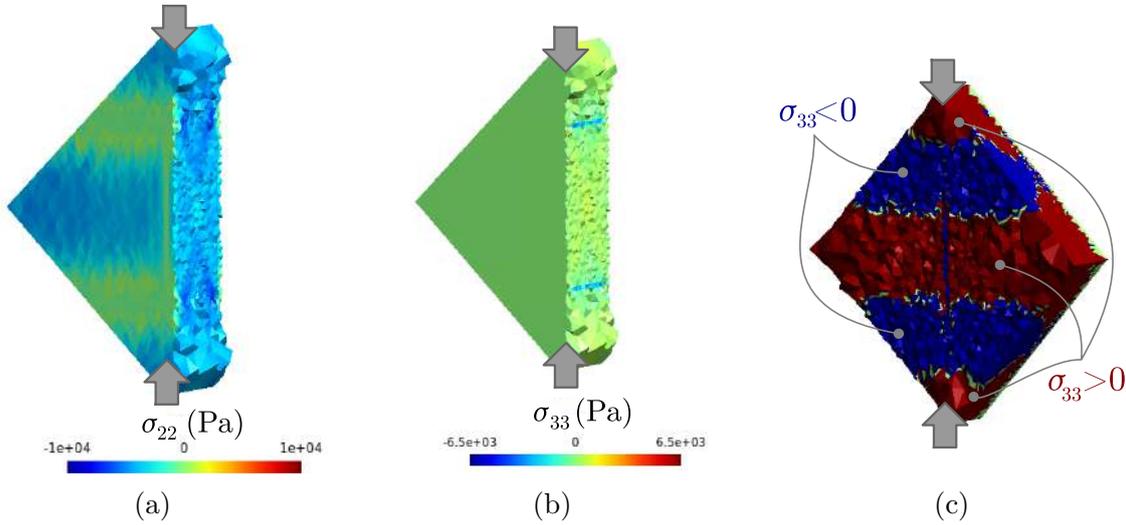


FIGURE 6.11 – Valeurs locales de  $\sigma_{22}$  et  $\sigma_{33}$  obtenues par l'approche statique pour une sollicitation équivalente à  $D_{22} = -1$

### 3.3 Domaine de résistance hors-plan

L'approche cinématique numérique proposée permet d'explorer des mécanismes présentant des taux de déformation affines et des discontinuités de vitesses linéaires. Elle inclut donc les deux familles de mécanismes explorées par l'approche analytique proposée dans le chapitre 5. Ainsi, pour un trajet de chargement ( $\underline{D}, \underline{\dot{\chi}} = \underline{0}$ ) donné, l'approche numérique donnera a priori un majorant inférieur ou égal à celui donné par l'approche analytique.

Pour des chargements hors-plan, en revanche, l'approche semi-analytique met en œuvre des champs de vitesse qui ne sont pas quadratiques. De tels champs ne peuvent donc pas être inclus par l'approche cinématique numérique, qui pourrait donc, sur certains trajets de chargement, être moins performante. Néanmoins, il est apparu lors des premiers calculs comparant les approches semi-analytique et numérique, que cette dernière permettait tout de même d'améliorer significativement certains majorants, même pour des cas "simples", comme par exemple un mur constitué de blocs infiniment résistants. Pour bien visualiser les subtilités apportées par l'approche numérique, nous avons donc choisi de décomposer les différentes sources d'écart relatif potentiel entre les approches semi-analytique et numérique. Pour ce faire, on commence par s'intéresser à la modélisation d'une plaque homogène. On considère ensuite une cellule de base composée de joints infiniment minces, puis on généralise les résultats au cas de joints d'épaisseur non-nulle.

**Note :** Les coupes présentées dans cette sous-partie (à l'exception de celles de la figure 6.22) correspondent à des trajets de chargement radiaux de la forme  $(N_{\beta\gamma}, M_{\beta\gamma}) = (N_c^b \cos \alpha, M^b \sin \alpha)$  ( $\beta, \gamma = 1, 2$ ) où  $\alpha$  est donné sur la figure 6.12.

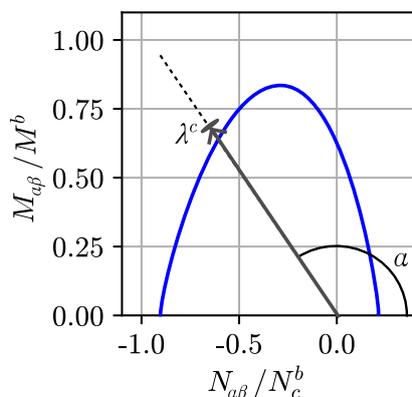


FIGURE 6.12 – Définition de l'angle  $\alpha$  pour le paramétrage des trajets de chargement radiaux

### 3.3.1 Validation de l'approche cinématique : plaque homogène

Dans le chapitre 5, une étude paramétrique a montré que, même pour une cellule de base homogène, il était nécessaire d'avoir une discrétisation suffisante selon la coordonnée  $\xi_3$  (transversale, dans l'épaisseur) afin d'obtenir une approche précise du domaine de résistance de la structure vis-à-vis de sollicitations hors-plan. Cette observation reste valable pour l'approche cinématique numérique. La figure 6.13 (a) représente des coupes du domaine de résistance par le plan  $(N_{11}, M_{11})$ , tous autres efforts nuls, pour différents maillages représentés sur la figure 6.13 (b). Pour ces calculs, nous avons considéré une cellule de base constituée d'un matériau vérifiant le critère de Mohr-Coulomb, de cohésion  $c^b = 1,53$  MPa et d'angle de frottement interne  $\varphi^b = 30^\circ$ .

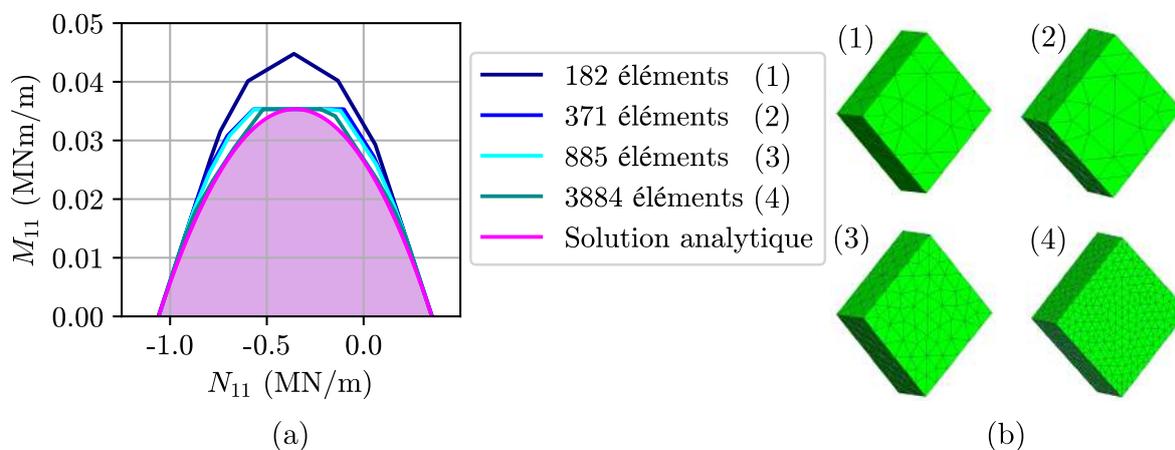


FIGURE 6.13 – Coupe  $(N_{11}, M_{11})$  du domaine de résistance pour une cellule de base homogène (a) et maillages correspondants (b)

Alors que pour des sollicitations planes, raffiner le maillage ne permettait qu'une amélioration très relative des majorants obtenus par l'approche cinématique (de l'ordre de 5 %), on voit que pour des sollicitations de flexion, un maillage trop lâche donne lieu à des écarts bien plus importants. En effet, pour des sollicitations hors-plan, les champs de vitesse de l'approche analytique ne sont ni linéaires, ni quadratiques mais plutôt des racines de sommes de fonction quadratiques. L'approche numérique, qui met en œuvre des champs d'ordre au plus quadratique (avec des discontinuités potentielles) ne peut donc pas les reproduire parfaitement, d'où la nécessité d'une discrétisation suffisante dans l'épaisseur.

### 3.3.2 Cas particulier : joints infiniment minces

On considère dorénavant une cellule de base composée de blocs et de joints infiniment minces. Ce cas particulier a vocation d'une part à valider l'implémentation de l'approche cinématique numérique vis-à-vis de la solution analytique proposée par Sab [5], et d'autre part à évaluer l'approche semi-analytique proposée dans le chapitre précédant pour des blocs de résistance finie ou infinie et des joints infiniment minces. L'approche statique ne sera pas considérée dans ce paragraphe.

Dans le cas particulier traité dans cette section, les blocs ont une longueur  $L = 73$  cm et une hauteur  $H = 37$  cm. Les valeurs des paramètres  $a = H + t$  et  $b = L + t$  intervenant dans les critères proposés par de Buhan et de Felice [4] ou Sab [5] restent ainsi identiques aux cas précédemment traités, et présentés dans le tableau 6.1 par exemple.

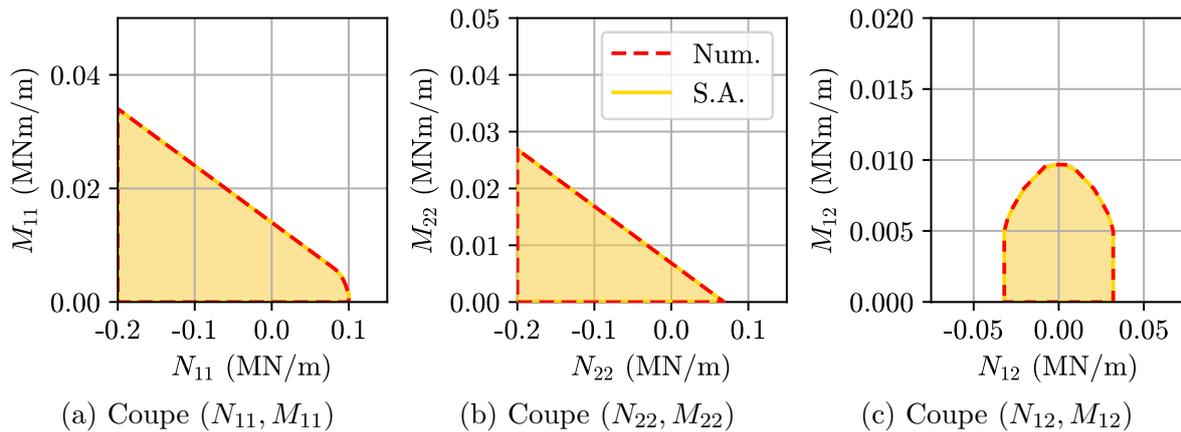


FIGURE 6.14 – Coupes du domaine de résistance pour des blocs de résistance infinie et des joints infiniment minces

**3.3.2.1 Validation : blocs de résistance infinie** Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où les blocs sont infiniment résistants et les joints sont infiniment minces. Les hypothèses du modèle sont alors identiques à celles formulées par Sab [5]. La figure 6.14

donne quelques coupes des domaines obtenus par l'approche cinématique numérique et par l'approche semi-analytique.

Il apparait que les domaines obtenus par les deux approches sont bien identiques, ce qui permet de valider l'approche numérique sur ce point.

**3.3.2.2 Blocs de résistance finie** Considérons maintenant une cellule de base composée de blocs de résistance finie ( $c^b = 1,53$  MPa,  $\varphi^b = 30^\circ$ ), et de joints infiniment minces dont les propriétés de résistance sont différentes de celles des blocs ( $c^m = 0,16$  MPa,  $\varphi^m = 25^\circ$ ). La géométrie est identique à celle considérée dans le paragraphe précédent.

Dans ce cas, par propriété de l'approche cinématique, le domaine de résistance est inclus dans l'intersection du domaine obtenu par un mécanisme homogène, sans discontinuités, pour une plaque constituée d'un matériau de Mohr-Coulomb de propriétés ( $c^b, \varphi^b$ ) (tel que déterminé dans le paragraphe 3.3.1), et du domaine déterminé dans le paragraphe précédent, à l'aide de mécanismes de blocs.

La figure 6.15 représente ces domaines de résistance obtenus par une approche cinématique numérique. Le domaine noté "Cas 3" correspond à la cellule de base avec des joints infiniment minces et des blocs de résistance finie, et est comparée aux deux cas précédemment étudiés : une cellule de base avec des blocs infiniment résistants (Cas 1), et une cellule de base homogène (Cas 2). Il apparait que le domaine obtenu dans le cas 3 est strictement inclus dans l'intersection des domaines obtenus dans le cas 1 et dans le cas 2. Le mécanisme optimal n'est donc pas uniquement la combinaison d'un mécanisme de bloc et d'un mécanisme "homogène".

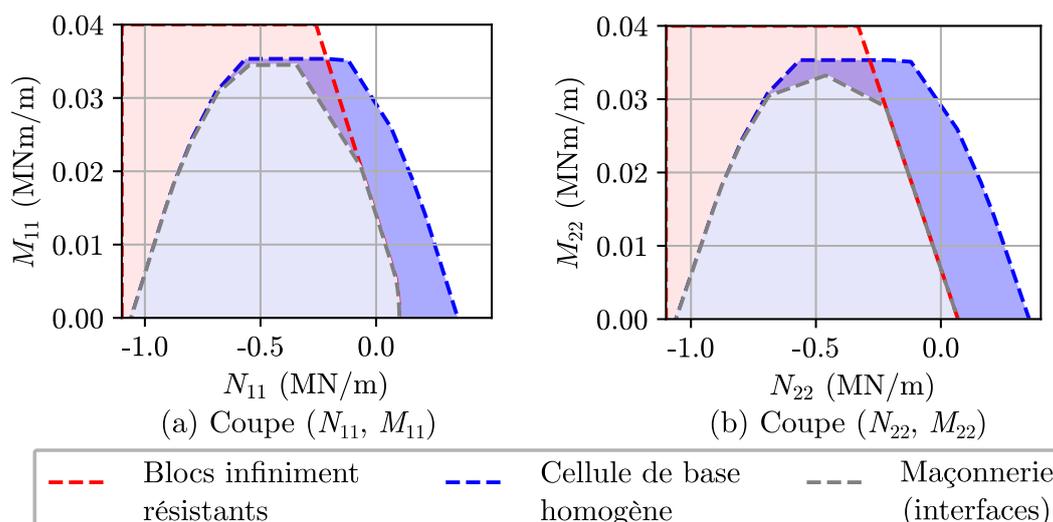


FIGURE 6.15 – Comparaison des domaines de résistance obtenus pour les cas 1 (blocs infiniment résistants), 2 (cellule de base homogène) et 3 (maçonnerie avec des joints infiniment minces)

L'approche semi-analytique proposée dans le chapitre 5 est basée sur cette même

méthode d'intersection des domaines obtenus par un mécanisme de blocs et par un mécanisme par tranches. Elle est comparée à l'approche cinématique numérique sur la figure 6.16. On observe donc sans surprise qu'il existe une zone de transition entre le mécanisme de blocs et le mécanisme homogène, pour laquelle l'approche semi-analytique, en bleu, surestime légèrement l'approche numérique, en gris. Pour des sollicitations de traction, de cisaillement ou de flexion pure, l'approche semi-analytique et l'approche numérique donnent des majorants proches. Enfin, pour des sollicitations avec une forte part de compression, l'approche semi-analytique se révèle meilleure que l'approche numérique car elle permet une discrétisation plus fine dans l'épaisseur de la cellule de base.

On peut s'intéresser aux mécanismes virtuels optimaux correspondant aux sollicitations pour lesquelles l'approche semi-analytique surestime l'approche numérique pour essayer de comprendre d'où provient l'écart observé. La figure 6.17 représente les mécanismes optimaux pour trois trajets de chargement particuliers. Pour la sollicitation  $(N_{11}, M_{11})$ , le trajet de chargement correspond au symbole étoile sur la figure 6.16 (a). Pour la sollicitation  $(N_{22}, M_{22})$ , il s'agit du rond de la figure 6.16 (b). Enfin, on s'intéresse à un trajet de chargement dans la direction  $M_{12}$  (toutes autres sollicitations nulles), représenté par un carré sur la figure 6.16 (c).

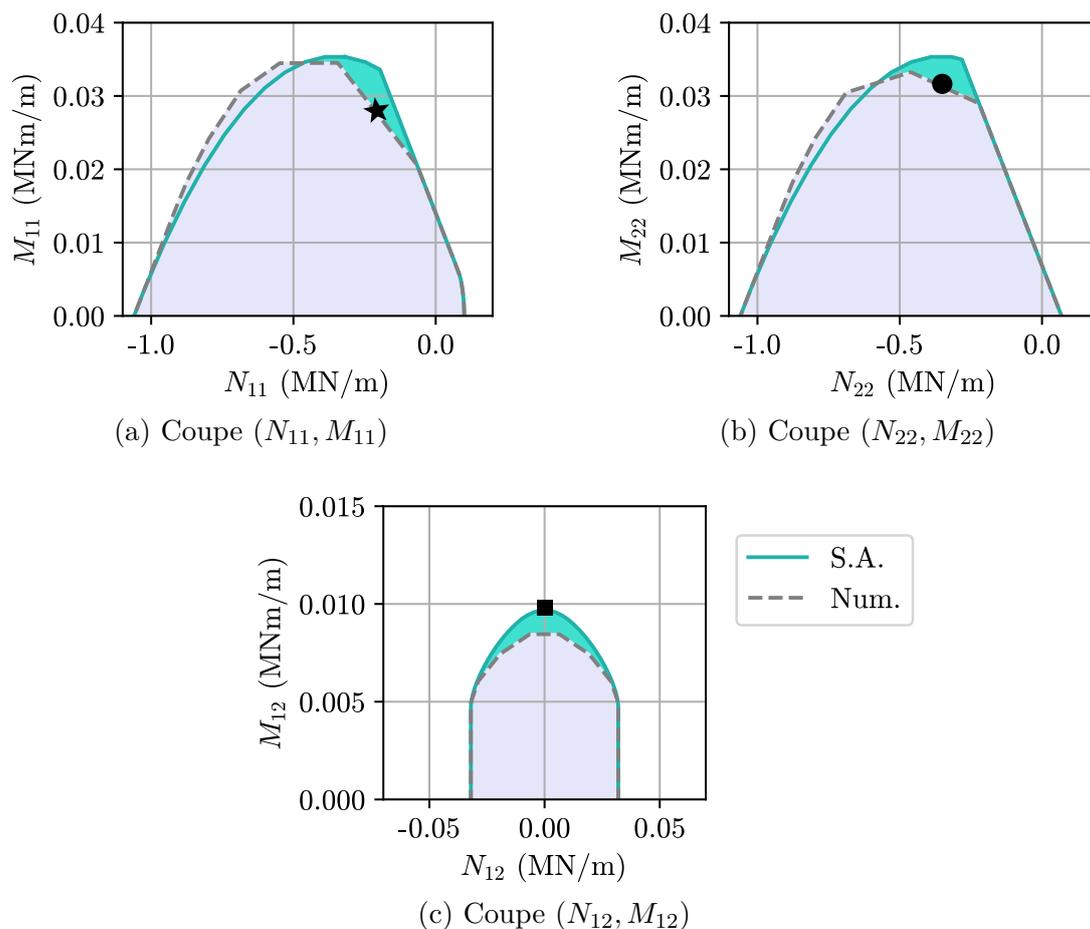


FIGURE 6.16 – Coupes du domaine de résistance pour des blocs de résistance finie et des joints infiniment minces

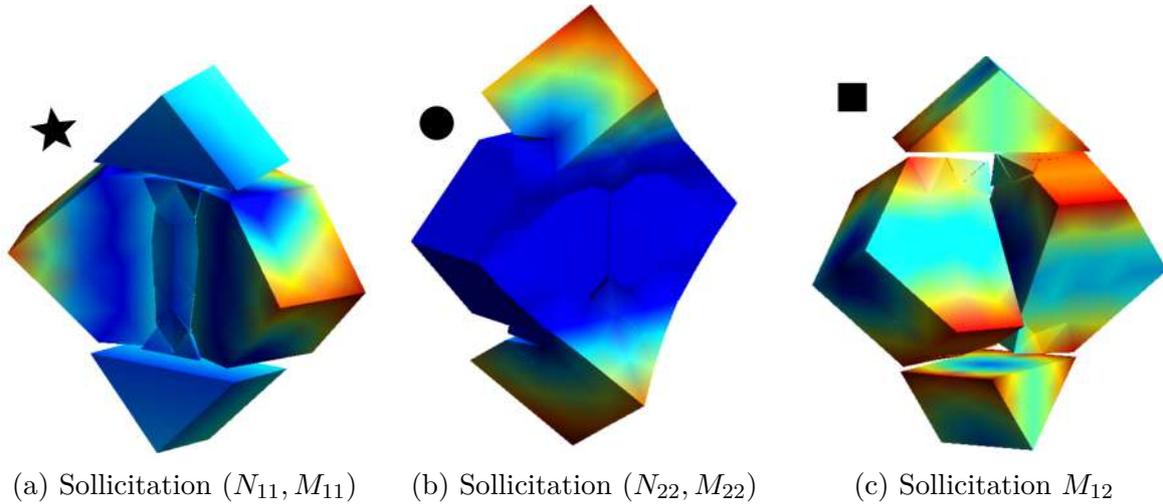


FIGURE 6.17 – Mécanismes optimaux pour quelques sollicitations particulières

Pour le chargement  $(N_{11}, M_{11})$ , on observe une rupture en compression des blocs au niveau des arêtes adjacentes au joint vertical situées sur la face comprimée, en plus de la rupture en traction des joints qui est prévue par le mécanisme de blocs. Pour le chargement  $(N_{22}, M_{22})$ , cette rupture en compression se produit au niveau des arêtes adjacentes aux joints horizontaux. Enfin, pour un chargement dans la direction  $M_{12}$ , le mécanisme optimal met en évidence des ruptures locales au niveau des coins des blocs. Ces ruptures locales en compression ou cisaillement ne sont pas prises en compte dans le mécanisme de blocs qui ne concerne que les joints, ni dans le mécanisme avec un taux de déformation homogène par tranches. Elles permettent donc d'expliquer en partie l'écart entre l'approche semi-analytique et l'approche numérique.

### 3.3.3 Cas général : joints d'épaisseur non-nulle

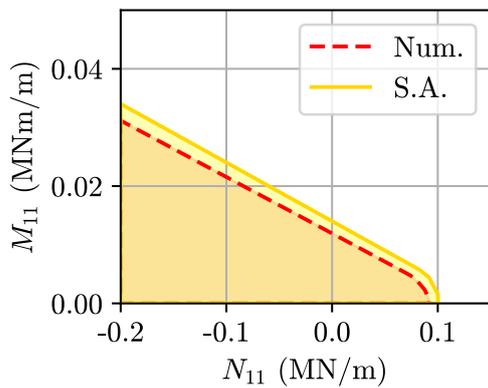
Considérer des joints infiniment minces est une hypothèse courante pour la maçonnerie, qui, géométriquement parlant, paraît sensée lorsque la hauteur des joints représente moins de 5 % de la hauteur des blocs. On peut néanmoins s'interroger sur l'effet de cette hypothèse simplificatrice sur l'évaluation du domaine de résistance.

**3.3.3.1 Blocs infiniment résistants** Intéressons-nous tout d'abord au cas où la résistance des blocs est infinie. Dans ce paragraphe, qui a pour but d'évaluer l'approche semi-analytique proposée par Sab [5] dans le cas où les joints ne sont pas infiniment minces, nous ne considérerons que les deux approches cinématiques (semi-analytique et numérique). Pour ce calcul, nous supposons que la cohésion des blocs vaut  $c^b = 1000$  MPa et que leur angle de frottement interne vaut  $\varphi^b = 5^\circ$ . La cohésion et l'angle de frottement interne du mortier sont respectivement égaux à  $c^m = 0,16$  MPa et  $\varphi^m = 25^\circ$ . Les dimensions de la cellule de base sont identiques à celles du tableau 6.1.

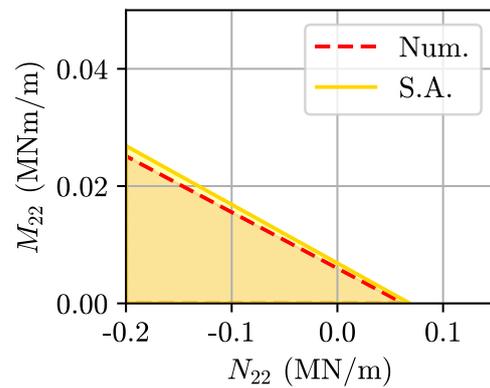
La figure 6.18 compare les domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique, pour des coupes par les plans  $(N_{11}, M_{11})$ ,  $(N_{22}, M_{22})$  et  $(N_{12}, M_{12})$ .

On note que l'approche cinématique semi-analytique donne des majorants légèrement supérieurs à ceux de l'approche cinématique numérique. Cette dernière permet en effet de prendre en compte une plus grande variété de champs de vitesse, et inclut les champs de vitesses avec des discontinuités entre blocs utilisés dans l'approche semi-analytique. Cette différence laisse penser que l'épaisseur des joints joue davantage sur la résistance en flexion de l'assemblage qu'elle ne jouait sur sa résistance vis-à-vis de sollicitations planes. L'effet de l'épaisseur des joints sur la résistance hors-plan de la maçonnerie sera étudié dans l'annexe D.

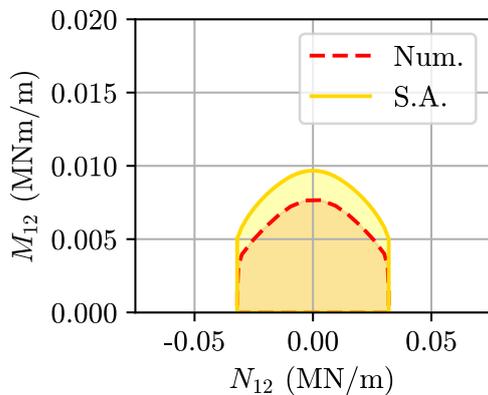
Cette observation témoigne de l'influence de l'épaisseur du mortier sur la résistance vis-à-vis de sollicitations de torsion (dans la direction  $M_{12}$ , toutes autres sollicitations nulles) : un joint de 10 mm d'épaisseur, correspondant à une fraction volumique de mortier de 4,6 %, entraîne une réduction de 28 % de la résistance à la torsion.



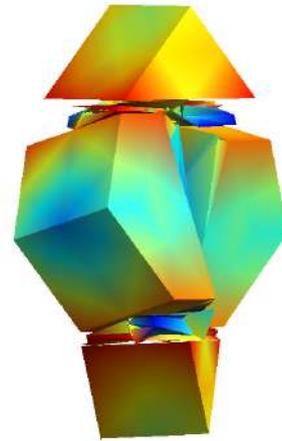
(a) Coupe  $(N_{11}, M_{11})$



(b) Coupe  $(N_{22}, M_{22})$



(c) Coupe  $(N_{12}, M_{12})$



(d) Mécanisme pour une sollicitation dans la direction  $M_{12}$  (couleurs : isovaleurs des vitesses)

FIGURE 6.18 – Coupes du domaine de résistance pour des blocs infiniment résistants et des joints d'épaisseur non-nulle ((a)-(c)); mécanisme correspondant à une sollicitation dans la direction  $M_{12}$  (d)

A titre indicatif, la figure 6.18 (d) représente le mécanisme optimal pour une sollicitation  $M_{12} = 1$ . On note bien la déformation du mortier, qui ne peut pas être prise en compte au moyen de simples discontinuités comme proposé dans l'approche semi-analytique présentée dans le chapitre 5, et qui permet donc d'améliorer le majorant proposé.

Il apparaît donc que réduire les joints à des interfaces sans épaisseur conduise à surestimer la résistance réelle de l'assemblage. Une telle conclusion avait déjà été proposée par Milani et Taliervo ([164], [153]), sous l'hypothèse simplificatrice supposant un état de contrainte plane pour les joints.

**3.3.3.2 Blocs de résistance finie** Dans un second temps, on se place dans un cas plus général : une cellule de base dont les blocs ont une résistance finie ( $c^b = 1,53$  MPa,  $\varphi^b = 30^\circ$ ). Les joints ont toujours une épaisseur non-nulle ( $t = 10$  mm), des propriétés mécaniques identiques à celles considérées dans le paragraphe précédent, et les caractéristiques géométriques de la cellule de base sont celles présentées dans le tableau 6.1.

Dans le paragraphe 3.3.1, nous avons noté que pour des chargements hors-plan traités par l'approche cinématique numérique, la discrétisation de la cellule de base avait une influence beaucoup plus grande sur la qualité du majorant que pour des chargements plans. Concernant l'approche statique, il était déjà apparu dans le paragraphe 3.2.1 qu'une discrétisation fine était nécessaire pour bien décrire les effets de bord dûs à la présence de joints et des surfaces libres  $S^\pm$ . La figure 6.19 propose donc une étude de convergence similaire à celle présentée sur la figure 6.4.

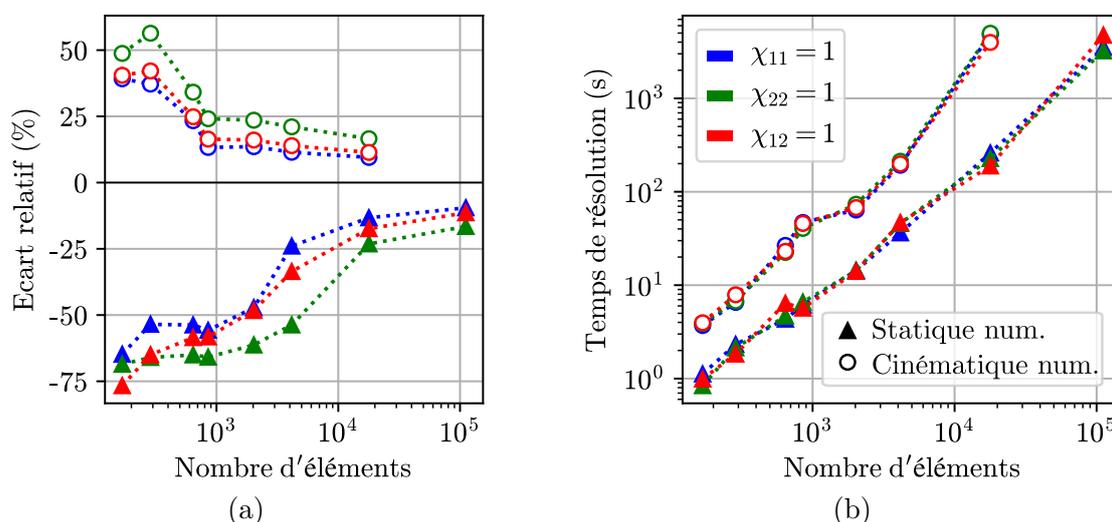


FIGURE 6.19 – Étude de convergence vis-à-vis de chargements hors-plan : (a) écart relatif en fonction du nombre d'éléments et (b) temps de calcul en fonction du nombre d'éléments

Tout comme dans le paragraphe 3.2.1, l'écart relatif est défini comme :

$$\Delta = \frac{\Pi^i(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})}{\Pi^{moy}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})} - 1 \quad (6.31)$$

où  $\Pi^{moy}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = (\Pi^{stat,max}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + \Pi^{ciné,min}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}))/2$  correspond à la moyenne de la valeur de la fonction d'appui des domaines obtenus par l'approche statique  $\Pi^{stat,max}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  pour le maillage de 111 633 éléments et par l'approche cinématique  $\Pi^{ciné,min}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  pour le maillage de 17 853 éléments. Les maillages utilisés sont identiques à ceux proposés sur la figure 6.4 (d).

Comme pour le cas des chargements plans, raffiner le maillage conduit à une augmentation exponentielle du temps de calcul (plus de 1h20 par trajet de chargement pour le maillage le plus fin), et ce pour la statique comme pour la cinématique. En revanche, cela permet d'améliorer significativement l'écart entre les deux approches. Pour rappel, raffiner le maillage ne permettait pas d'améliorer significativement les résultats de l'approche cinématique vis-à-vis de sollicitations planes. On note également que, comme pour le cas des sollicitations planes, les maillages les plus fins considérés ne permettent pas un encadrement très fin de la charge extrême : il subsiste un écart compris entre 19 % (pour  $\dot{\chi}_{11} = 1$ ) et 33 % (pour  $\dot{\chi}_{22} = 1$ ) entre les résultats des deux approches. Par la suite, pour l'approche cinématique, nous avons conservé le maillage à 2024 éléments, qui nous paraissait présenter un bon compromis entre précision et temps de calcul (environ 2 min par trajet de chargement), tandis que pour l'approche statique, nous avons conservé le maillage le plus fin avec 111 633 éléments.

La figure 6.20 compare les domaines de résistance obtenus par les approches statique et cinématique numériques dans les plans  $(N_{11}, M_{11})$ ,  $(N_{22}, M_{22})$  et  $(N_{12}, M_{12})$ .

On note sur ces figures que l'approche statique et l'approche cinématique donnent des résultats proches pour des sollicitations de traction et de cisaillement (6 % d'écart). Pour une sollicitation de torsion, l'écart est en revanche de l'ordre de 30 %. En compression, on retrouve l'écart de 14 à 19 % déjà observé dans le paragraphe 3.2.1. Enfin, c'est en flexion que l'écart est le plus important. Sur les coupes présentant de la flexion composée, les écarts maximaux valent 35 % pour un trajet de chargement  $(N_{11}, M_{11}) = \lambda(N_c^b \cos(2\pi/3), M^b \sin(2\pi/3))$  et 47 % pour une sollicitation  $(N_{22}, M_{22}) = \lambda(N_c^b \cos(7\pi/9), M^b \sin(7\pi/9))$ .

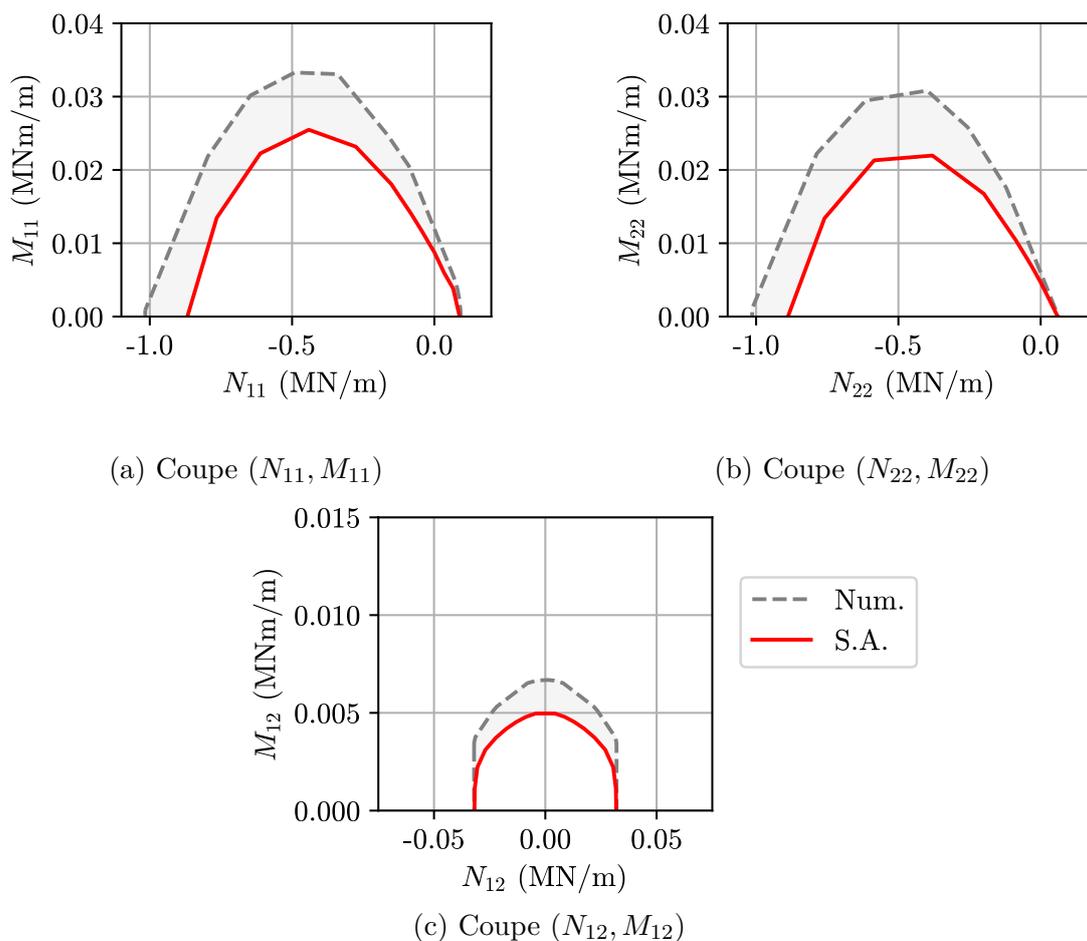


FIGURE 6.20 – Coupes des domaines de résistance obtenus par la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique pour des blocs de résistance finie et des joints d'épaisseur  $t = 10$  mm

### 3.3.4 Cas général - Comparaison des deux approches cinématiques

D'après la figure 6.21, on note encore une fois un relativement bon accord entre les approches cinématiques semi-analytique et numérique, ce qui montre la pertinence de l'approche semi-analytique. Les trois principales sources d'écart sont les suivantes :

- En compression, l'approche semi-analytique permet d'obtenir des majorants plus précis que l'approche numérique grâce à une meilleure prise en compte des mécanismes de type "homogène par couche" ;
- Pour des sollicitations de flexion composée avec de faibles valeurs de compression, il peut exister des mécanismes locaux, mis en évidence dans le paragraphe 3.3.2.2 ;
- Ces mécanismes locaux, non-pris en compte par l'approche semi-analytique, peuvent également se produire dans les joints, comme montré dans le paragraphe 3.3.3.1. L'influence de l'élançement des joints et de la fraction volumique de mortier sera évaluée dans l'annexe D.

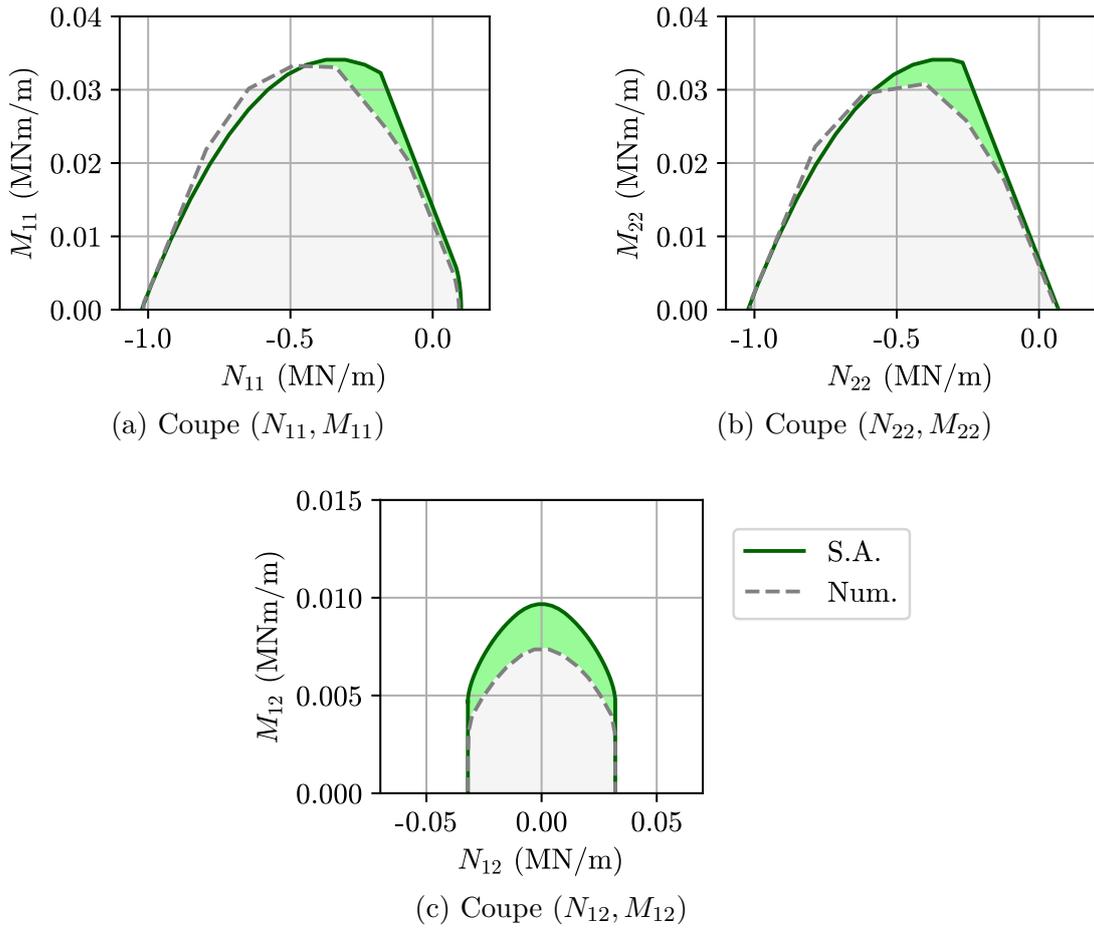


FIGURE 6.21 – Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches cinématiques semi-analytique et numérique pour des blocs de résistance finie et des joints d'épaisseur  $t = 10$  mm

Pour la coupe  $(N_{11}, M_{11})$  comme pour la coupe  $(N_{22}, M_{22})$ , l'approche analytique surestime l'approche cinématique numérique d'environ 10 % en traction, de 40 % au maximum pour un trajet de chargement avec une précontrainte horizontale ou verticale légère, et donne un résultat très proche de l'approche numérique, voire l'améliore, pour les trajets de chargements avec une précontrainte forte ( $N_{11} < -0,5N_c^b$  ou  $N_{22} < -0,5N_c^b$ , où  $N_c^b$  est défini par l'équation (6.27)). On note également que les résistances à la flexion simple dans les directions horizontale et verticale sont différentes, mais que cette anisotropie tend à s'effacer lorsqu'on applique un effort membranaire de compression supérieur à  $0,5N_c^b$ . Enfin, pour la coupe  $(N_{12}, M_{12})$ , l'écart entre les deux approches est nul en cisaillement, et de l'ordre de 30 % en torsion pure. C'est deux fois plus que sous l'hypothèse de joints infiniment minces. L'approche statique suit quant à elle les mêmes tendances que l'approche cinématique numérique, avec des écarts plus importants vis-à-vis de l'approche semi-analytique.

**Note :** Du fait du temps de calcul extrêmement long nécessaire pour chaque trajet de chargement avec l'approche statique, nous avons fait le choix, dans la suite, de ne comparer que les deux approches cinématiques. Nous garderons cependant à l'esprit que

même l'approche cinématique numérique surestime la charge extrême, notamment en flexion et en compression.

Les coupes présentées sur la figure 6.21 ne représentent qu'une fraction très faible de l'ensemble des trajets de chargement. Les murs porteurs de maçonnerie étant souvent chargés par une sollicitation de compression verticale fixe, puis éventuellement par des chargements de cisaillement ou de flexion, il paraît également pertinent de s'intéresser aux différents domaines de résistance obtenus pour un chargement  $N_{22}^0$  constant. La figure 6.22 représente quelques coupes des domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique pour différentes valeurs de  $N_{22}^0$ . Il apparaît que la résistance vis-à-vis de sollicitations hors-plan augmente jusqu'à environ  $N_{22}^0 = -0,25N_c^b$ , puis diminue par la suite. La différence relative entre les approches analytique et numérique, quant à elle, diminue pour des chargements supérieurs à  $N_{22}^0 = -0,25N_c^b$ .

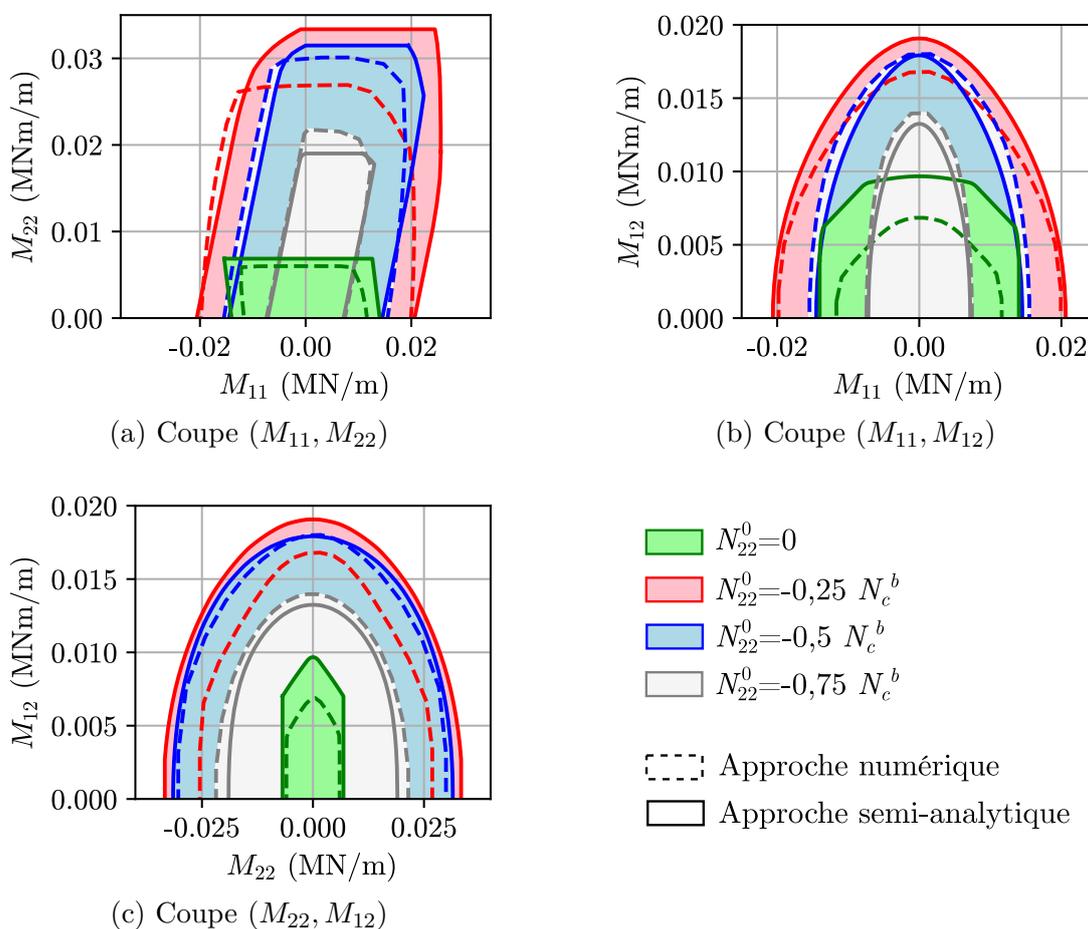


FIGURE 6.22 – Coupes des domaines de résistance en flexion-flexion (a et b) et en flexion-torsion pour différentes précontraintes verticales  $N_{22}^0$

Intéressons-nous maintenant à l'écart entre les approches semi-analytique et numérique pour de telles sollicitations. Pour cette étude, on considère des trajets de chargement paramétrés par ( $M_{11} = \lambda \cos \beta \cos \gamma$ ,  $M_{22} = \lambda \sin \beta \cos \gamma$ ,  $M_{12} = \lambda \sin \gamma$ ) ( $\beta \in [-\pi, \pi]$  et  $\gamma \in [-\pi/2, \pi/2]$ ), à  $N_{22}^0$  fixé (les autres efforts membranaires étant nuls). La figure 6.23 donne la différence relative entre les fonctions d'appui des approches semi-analytique et

numérique, pour les mêmes trajets de chargement, pour trois valeurs de  $N_{22}^0$  :  $N_{22}^0 = 0$ ,  $N_{22}^0 = -0,25N_c^b$  et  $N_{22}^0 = -0,5N_c^b$ . Sur cette figure, seuls les points correspondant à  $\beta \in [0, \pi]$  et  $\gamma \in [0, \pi/2]$  sont représentés, les autres pouvant être obtenus par symétrie.

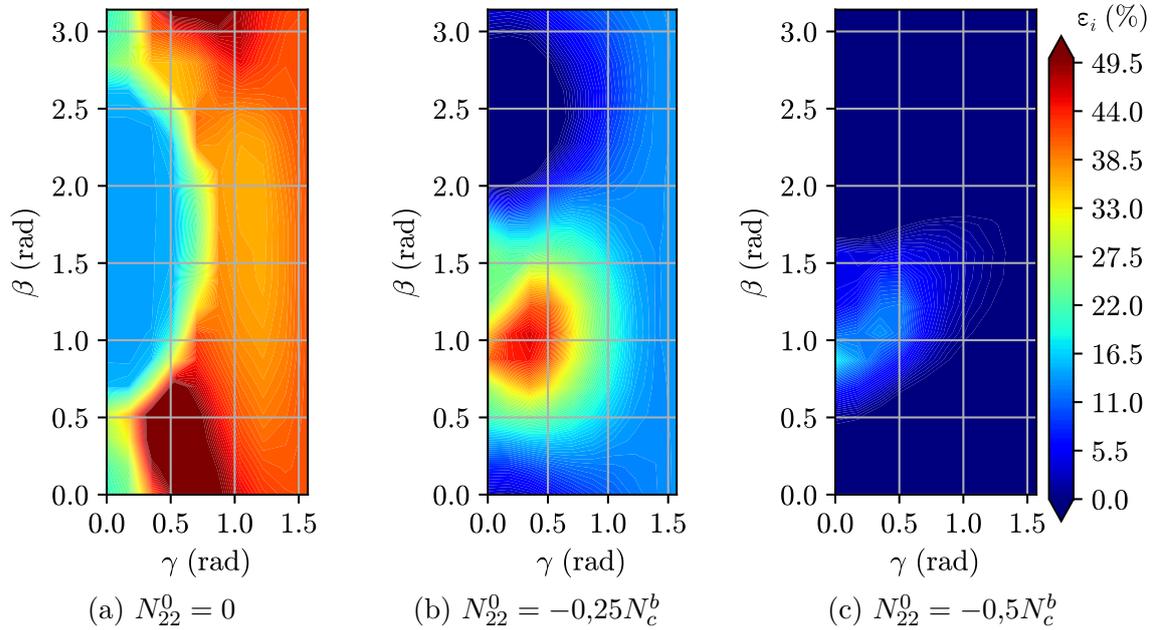


FIGURE 6.23 – Écart relatif en fonction du trajet de chargement pour différentes valeurs de précontrainte de compression verticale

On note encore une fois que pour des trajets de chargements sans précontrainte membranaire verticale, l'écart est assez élevé, surtout pour des sollicitations de torsion. En revanche, plus le mur est précontraint, plus l'écart entre les deux approches se réduit jusqu'à devenir quasiment nul pour une précharge  $N_{22}^0 = -0,5N_c^b$ .

### 3.4 Conclusion

La mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture, présentée dans la partie 2, nous a permis d'obtenir une approche par l'intérieur et une approche par l'extérieur du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie, qui viennent compléter, et le plus souvent améliorer, la première approche analytique proposée dans le chapitre 5. L'encadrement proposé par ces deux approches est d'une précision variable selon la sollicitation : l'écart relatif varie de 3 % pour des sollicitations de traction, à 33 % pour des sollicitations de flexion.

La comparaison de l'approche cinématique numérique avec l'approche cinématique semi-analytique a montré que l'approche numérique permettait, pour la plupart des trajets de chargement considérés, d'améliorer les majorants obtenus par l'approche semi-analytique. En considérant le cas de joints infiniment minces, nous avons vu que pour des sollicitations de flexion couplées à une légère compression, ou pour des sollicitations de torsion, cette

amélioration provenait de l'existence de mécanismes locaux situés dans les coins des blocs. Pour des joints d'épaisseur non-nulle, l'apparition d'autres mécanismes, impliquant notamment des déformations dans les joints, permet d'améliorer légèrement les majorants obtenus par l'approche semi-analytique en traction et en cisaillement.

Bien que l'approche cinématique numérique permette d'améliorer assez largement les majorants obtenus pour certains trajets de chargement, l'écart relatif global entre les deux approches reste relativement faible pour l'exemple considéré. L'approche statique, quant à elle, nécessite des temps de calcul très élevés qui la rendent inadaptée au travail de l'ingénieur. L'approche semi-analytique nous semble donc être un meilleur choix lorsqu'on souhaite procéder à des calculs rapides. Dans ce cas, il paraît nécessaire de savoir en quelle mesure l'approche semi-analytique surestime l'ensemble des charges extrêmes du problème.

## 4 Étude paramétrique

### 4.1 Présentation de l'étude

Bien que, dans le cas du mur testé dans le chapitre 2, l'approche semi-analytique proposée dans le chapitre 5 semble suffisante, nous ne pouvons pour l'instant pas conclure qu'elle est adaptée pour tout type de géométrie de mur ou de matériaux. Pour identifier les cas dans lesquels l'approche numérique est nécessaire, nous avons donc choisi de mener une étude paramétrique.

Trois paramètres sont considérés pour cette étude paramétrique :

- le contraste  $R_c^b/R_c^m$  entre la résistance en compression uniaxiale de la pierre et celle du mortier ;
- la fraction volumique de mortier  $\eta = \Omega_m/(\Omega_m + \Omega_b)$ , où  $\Omega_m$  désigne le volume occupé par le mortier dans la cellule de base représentée sur la figure 6.1, et  $\Omega_b$  représente le volume occupé par les blocs dans cette même cellule de base ;
- l'élanement transversal des joints  $\lambda = t/h$ , où  $t$  est l'épaisseur des joints et  $h$  l'épaisseur du mur.

Les plages de variation des différents paramètres ont été choisis en gardant en tête des valeurs réalistes pour des murs en pierre massive, qui se basent sur des normes de dimensionnement comme l'Eurocode 6 [1] ou le DTU 20.1 (2020) [2]. Bien que ces valeurs concernent la pierre naturelle, les résultats de cette étude peuvent être étendus à d'autres types de maçonneries de blocs pleins.

Afin d'alléger ce chapitre, les graphes concernant les différents cas d'étude sont représentés et commentés dans l'annexe D. Seules les conclusions de cette étude paramétrique sont reportées dans la sous-partie 4.2.

### 4.2 Conclusions principales

L'étude paramétrique présentée dans l'annexe D a principalement montré que :

- Augmenter le contraste entre la résistance en compression de la pierre et du mortier pour une résistance fixée de la pierre (ce qui correspond à diminuer celle du mortier) faisait principalement diminuer la résistance à la traction, à la flexion simple, et dans une moindre mesure au cisaillement et à la torsion de l'assemblage. La résistance à la compression de l'assemblage est quant à elle relativement peu impactée.
- Augmenter la fraction volumique de mortier conduisait principalement à une réduction de la résistance en compression et en torsion de l'assemblage. La résistance à la flexion simple est également impactée dans une moindre mesure, et les résistances en traction et au cisaillement sont très peu impactées (puisque les mécanismes correspondants mettent en jeu des discontinuités dans les joints)
- Augmenter l'élanement transversal des joints semble réduire légèrement la résistance à toutes les sollicitations, sauf en torsion. Ce résultat doit cependant être nuancé car les majorants obtenus dépendent également du maillage utilisé, qui est différent pour toutes les géométries.

Cette étude paramétrique nous a également permis de comparer les deux approches cinématiques, semi-analytique et numérique, proposées dans les chapitres 5 et 6. Elle a notamment montré que l'approche cinématique numérique, qui permet d'explorer un ensemble de champs cinématiquement admissibles différent, et potentiellement plus vaste que l'approche semi-analytique, pouvait présenter un apport intéressant pour certaines géométries de cellule de base, et notamment lorsque les joints sont épais. Dans ce cas, qui regroupe à la fois les fractions volumiques et les transversaux élanements élevés, des mécanismes de rupture locaux, demeurant inaccessibles à l'approche analytique, sont davantage susceptibles de se produire.

Il apparaît également que pour des contrastes élevés entre la résistance en compression de la pierre et du mortier, l'approche semi-analytique surestime assez largement ( $> 30\%$ ) la résistance à la flexion verticale de l'assemblage. En outre, la résistance à la torsion du mur est également surestimée.

Enfin, il convient de garder à l'esprit que les deux approches ici comparées sont des approches cinématiques, qui fournissent des approches par l'extérieur du domaine de résistance. Il serait intéressant de pouvoir comparer les résultats obtenus à une approche statique. Une telle comparaison conduirait cependant à des temps de calcul très élevés, ce qui explique pourquoi seules les approches cinématiques ont été ici comparées.

## 5 Remarques finales

Dans ce chapitre, nous avons présenté la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Ces deux approches présentent l'originalité de pouvoir prendre en compte des types champs de contraintes affines par morceaux ou de vitesses quadratiques par morceaux, en s'affranchissant des hypothèses souvent admises de contraintes ou de déformations planes, c'est-à-dire en traitant le problème comme un problème authentiquement tridimensionnel. Elles ont notamment permis de montrer que ces deux dernières hypothèses étaient trop restrictives. En effet, on a pu observer que les champs de contraintes optimaux ont des composantes hors-plan (notamment  $\sigma_{33}$ ) non-nulles, tandis que les mécanismes optimaux ont intervenir des vitesses virtuelles transversales au mur. Enfin, la mise en œuvre numérique de ces deux approches a permis d'évaluer la pertinence de l'hypothèse de joints infiniment minces, et de voir qu'elle conduisait notamment à surestimer la résistance à la flexion et à la torsion.

La comparaison, dans la partie 3 de ce chapitre, avec l'approche semi-analytique sur le cas d'étude correspondant au mur testé dans le chapitre 2 a montré les bonnes performances de l'approche semi-analytique comparativement à l'approche cinématique numérique. En effet, pour un temps de calcul presque nul, l'approche semi-analytique permet d'obtenir des majorants des charges extrêmes qui, pour des chargements plans, ne sont en moyenne que 6 % plus élevés que ceux obtenus par l'approche cinématique numérique. La différence est un peu plus élevée pour des chargements hors-plan.

Enfin, l'étude paramétrique effectuée dans l'annexe D nous a permis de voir que pour des joints épais (fractions volumiques de mortier et élancements transversaux de joints élevés) et pour des contrastes entre les résistances des matériaux importants, l'approche cinématique numérique permettait notamment d'améliorer l'estimation de la résistance en traction, au cisaillement et en flexion, qui sont cruciales pour certaines sollicitations (sismiques notamment). En revanche, elle n'améliore que très peu l'estimation de la résistance en compression donnée par l'approche analytique.

Le temps de calcul reste cependant le défaut principal des approches numériques. Pour un trajet de chargement donné, on peut avoir une estimation raisonnable de la fonction d'appui macroscopique en quelques dizaines ou centaines de secondes par l'approche cinématique. Pour l'approche statique, il faut plutôt compter entre quelques minutes et près d'une heure par trajet de chargement. Une procédure d'homogénéisation numérique requerrait de calculer soit la fonction d'appui macroscopique (pour l'approche cinématique), soit la valeur du multiplicateur (pour l'approche statique) pour plusieurs millions de trajets de chargement, afin d'obtenir une approche par l'extérieur ou par l'intérieur suffisamment complète du domaine de résistance dans l'espace des six paramètres de chargement. Les temps de calculs sont alors totalement inadaptés à une procédure qui se voulait initialement à visée applicative pour l'ingénieur. De plus, pour bien prendre

en compte la dégradation des propriétés de résistance due au feu, il serait nécessaire de discrétiser beaucoup plus finement la cellule de base dans son épaisseur. Même pour un seul trajet de chargement, le problème devient trop volumineux pour être traité en un temps raisonnable par le solveur d'optimisation. Par la suite, on privilégiera donc l'approche cinématique semi-analytique, tout en gardant à l'esprit qu'elle ne fournit qu'un majorant de la charge extrême.

\*      \*

\*



# Chapitre 7

## Quelques perspectives sur la détermination du critère de résistance macroscopique

**Résumé :** *Ce court chapitre vise à présenter quelques perspectives sur la détermination du critère de rupture macroscopique. Plus précisément, nous nous intéressons au cas où le critère de résistance local est un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, plus représentatif de la résistance réelle de la pierre et du mortier que le critère de Mohr-Coulomb classique. Dans un premier temps, l'implémentation numérique de ce critère est présentée, puis on propose plusieurs approches analytiques ou semi-analytiques pour la détermination du critère de résistance macroscopique.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>220</b>
<b>2</b>	<b>Approche numérique</b>	<b>220</b>
2.1	Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction	220
2.2	Approche cinématique	221
2.3	Remarques finales	224
<b>3</b>	<b>Approches semi-analytiques pour des chargements dans le plan du mur</b>	<b>225</b>
3.1	Adaptation de l'approche analytique du chapitre 5 pour des chargements dans le plan du mur	225
3.2	Mécanisme par taux de déformation homogènes par zone	229
<b>4</b>	<b>Quelques pistes pour des chargements hors du plan du mur</b>	<b>233</b>
4.1	Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction : un point de blocage	233
4.2	Une première solution : l'utilisation d'un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire	234
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>235</b>

---

## 1 Introduction

Dans les chapitres 5 et 6, nous avons présenté plusieurs approches statique et cinématiques du Calcul à la rupture, qui se basent sur le choix d'un critère de résistance local de Mohr-Coulomb. Cependant, comme déjà mentionné dans le chapitre 4, ce critère constitue une approximation de la courbe intrinsèque du critère de résistance observé expérimentalement pour la pierre et pour le mortier. Dans ce même chapitre, nous avons proposé des approches considérant des critères locaux de Mohr-Coulomb tronqués en traction et éventuellement en compression, qui ont permis de mettre en évidence l'influence forte de certains paramètres sur la résistance de l'assemblage pour une géométrie simplifiée.

Dans le présent chapitre, qui se veut un chapitre de perspectives sur la modélisation 3D à l'échelle de l'assemblage, nous proposons donc quelques pistes envisagées pour une description du critère de résistance local s'approchant davantage de la courbe intrinsèque expérimentale. Ces perspectives ont été développées dans un cadre plus large que la détermination de la résistance au feu des maçonneries en pierre massive. Elles pourraient notamment être appliquées de manière plus générale à des murs en blocs pleins.

Dans un premier temps, une extension de l'approche cinématique numérique décrite dans le chapitre 6 est présentée, et les résultats de cette approche sont comparés aux résultats obtenus pour un critère de Mohr-Coulomb classique. Dans un second temps, l'approche semi-analytique du chapitre 5 est étendue au cas d'un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Cette extension est complexe, et plusieurs approches seront présentées, d'abord pour des chargements dans le plan du mur, puis pour des chargements hors-plan.

## 2 Approche numérique

### 2.1 Critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction

Les approches statique et cinématique numériques présentées dans le chapitre 6 peuvent aisément être adaptées pour prendre en compte un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, dont on rappelle l'expression dans l'équation (7.1).

$$f^{MCT,k}(\underline{\sigma}) = \sup_{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}} \left\{ \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k \cos \varphi^k ; \sigma_i - f_t^k \right\} \leq 0 \quad (7.1)$$

La fonction d'appui de ce critère s'écrit :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{c^k \cos \varphi^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}| - \text{tr} \underline{d}) \\ + \frac{f_t^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k) & (k = b, m) \\ \text{si } \text{tr} \underline{d} \geq (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.2)$$

pour un taux de déformation  $\underline{d}$  et :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{V}, \underline{n}) = \begin{cases} \frac{c^k \cos \varphi^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) + \frac{f_t^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (\underline{V} \cdot \underline{n} - |\underline{V}| \sin \varphi^k) \\ \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi^k & (k = b, m) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.3)$$

pour une discontinuité de vitesse  $\underline{V}$  au travers d'une surface de normale  $\underline{n}$ .

L'implémentation du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction a notamment été proposée par Vincent [165], pour les approches statique et cinématique du Calcul à la rupture appliquées à des structures en béton armé. Seules les formulations du critère (pour l'approche statique) et de la fonction d'appui (pour l'approche cinématique) diffèrent dans la mise en œuvre numérique du critère Mohr-Coulomb présentée dans le chapitre 6. Dans ce chapitre, nous ne présenterons que la mise en œuvre de l'approche cinématique.

## 2.2 Approche cinématique

### 2.2.1 Modification de l'approche numérique

La discrétisation de la cellule de base et les contraintes cinématiques reliant les vitesses virtuelles aux taux de déformation locaux, aux discontinuités de vitesses ainsi qu'au tenseur des taux de déformation macroscopique et au tenseur des taux de courbure macroscopique sont identiques à celles présentées dans la sous-partie 2.1 du chapitre 6.

La puissance résistante maximale peut être majorée, à l'échelle de l'élément, par l'expression suivante, correspondant à l'équation (6.11) du chapitre 6 :

$$P_{rm}^{num}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{|\Omega_i|}{4} \sum_{k=1}^4 \pi^{MCT,i}(\mathbf{d}^k) + \sum_{j=1}^{N_i} \frac{|\Sigma_j|}{3} \sum_{l=1}^3 \pi^{MCT,j}(\mathbf{v}^l, \mathbf{n}^j) \quad (7.4)$$

Dans cette expression, la fonction d'appui du critère de Mohr-Coulomb tronqué en

traction s'écrit, pour les taux de déformation  $\mathbf{d}^k$  exprimés au noeud  $k$  de l'élément  $i$  :

$$\begin{aligned} \pi^{MCT,i}(\mathbf{d}^k) = \inf_{\mathbf{e}_1^k, \mathbf{e}_2^k} \operatorname{tr}(\mathbf{e}_1^k) + \left( \frac{2c^i}{1 - \sin \varphi^i} - K^{p,i} f_t^i \right) \operatorname{tr}(\mathbf{e}_2^k) \\ \text{s.c.} \quad \mathbf{d}^k = \mathbf{e}_1^k - \mathbf{e}_2^k \\ \operatorname{tr}(\mathbf{e}_1^k) \geq K^{p,i} \operatorname{tr}(\mathbf{e}_2^k) \\ \mathbf{e}_1^k \succeq 0 ; \mathbf{e}_2^k \succeq 0 \end{aligned} \quad (7.5)$$

où  $K^{p,i} = (1 + \sin \varphi^i)/(1 - \sin \varphi^i)$  est le coefficient de butée du matériau constitutif de l'élément  $i$ .

Pour une discontinuité de vitesse  $\mathbf{v}^l$  au travers d'une surface de normale  $\mathbf{n}^j$ , elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \pi^{MCT,j}(\mathbf{v}^l, \mathbf{n}^j) = \inf_{t^l} \frac{c^j \cos \varphi^j}{1 - \sin \varphi^j} (t^l - (V_1^l n_1^j + V_2^l n_2^j + V_3^l n_3^j)) \\ + \frac{f_t^j}{(1 - \sin \varphi^j)} (V_1^l n_1^j + V_2^l n_2^j + V_3^l n_3^j - t^l) \\ \text{s.c.} \quad t^l \geq \sqrt{(V_1^l)^2 + (V_2^l)^2 + (V_3^l)^2} \\ V_1^l n_1^j + V_2^l n_2^j + V_3^l n_3^j \geq t^l \sin \varphi^j \end{aligned} \quad (7.6)$$

Tout comme pour un critère de Mohr-Coulomb classique, on imposera aux discontinuités de vitesse d'être linéaires sur les surfaces de discontinuité (voir paragraphe 2.1.2 du chapitre 6).

Le reste du problème d'optimisation est identique au problème présenté dans le paragraphe 2.1.3 du chapitre 6. Il revient à minimiser la puissance résistante maximale sous un ensemble de contraintes cinématiques et en vérifiant la condition de pertinence du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction partout sur la cellule de base.

## 2.2.2 Exemple applicatif

Dans cet exemple applicatif, le domaine de résistance obtenu pour des matériaux constitutifs décrits par un critère de Mohr-Coulomb classique est comparé à celui de matériaux décrits par un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Le tableau 7.1 résume les propriétés de résistance considérées. Ces propriétés sont données à titre d'exemple, et la cohésion du mortier a notamment été augmentée par rapport à celle retenue dans les chapitres 4 à 6, afin de permettre de bien voir l'effet de la troncature. La géométrie de la cellule de base est identique à celle considérée dans le chapitre 5, et correspond au mur testé dans le chapitre 2.

TABLEAU 7.1 – Propriétés des matériaux considérées pour les calculs

Matériau	Cohésion $c^k$ (MPa)	Angle de frottement interne $\varphi^k$ (°)	Troncature en traction $f_t^k$ (MPa)	Résistance en compression simple correspondante $R_c^k$ (MPa)	Résistance en traction simple non tronquée $R_t^k$ (MPa)
Pierre	1,53	30	1	5,3	1,8
Mortier	0,79	25	0,1	2,5	1,0

La figure 7.1 (a) représente deux coupes des domaines de résistance macroscopiques obtenus dans le plan  $(N_{11}, N_{22})$  (tels que définis dans les chapitres 5 et 6 - on rappelle que  $N_W = 2N_{12}$ ) et la figure 7.1 (b) sur le plan  $(N_{22}, M_{22})$ . Il apparaît ici que la troncature en traction fait diminuer la résistance à la traction macroscopique, et dans une moindre mesure, à la flexion de l'assemblage. En revanche, sur l'exemple considéré, elle n'influence pas la résistance en compression.

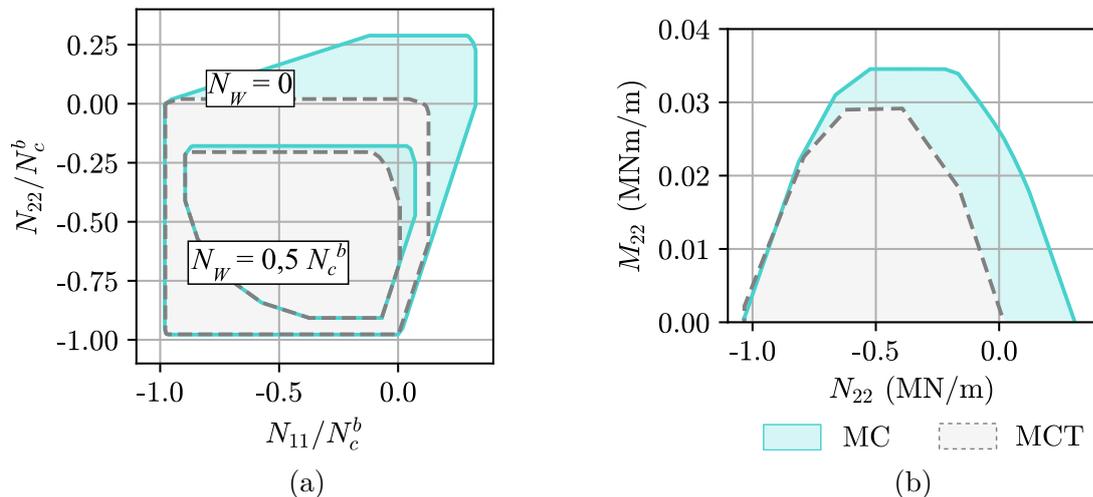


FIGURE 7.1 – Coupes du domaine de résistance par des plans parallèles à  $(N_{11}, N_{22})$  (a) et par le plan  $(N_{22}, M_{22})$  (b)

### 2.2.3 Peut-on négliger la résistance à la traction des matériaux ?

La pierre et le mortier ayant tous deux un comportement fragile en traction, il est admis, dans les approches de type ingénieur, de négliger leur résistance à la traction. Cependant, nous avons vu dans le chapitre 4 qu'une telle simplification pouvait avoir des conséquences inattendues sur la résistance en compression de l'assemblage.

La figure 7.2 (a) donne des projections sur le plan  $(N_{11}, N_{22})$  du domaine de résistance du mur pour différentes valeurs de troncature en traction du mortier  $f_t^m$ , la troncature en traction de la pierre étant maintenue égale à  $f_t^b = 1$  MPa. Il apparaît que, comme on pouvait s'y attendre, la résistance à la traction du mortier joue principalement sur les résistances en traction dans les directions horizontale et verticale.

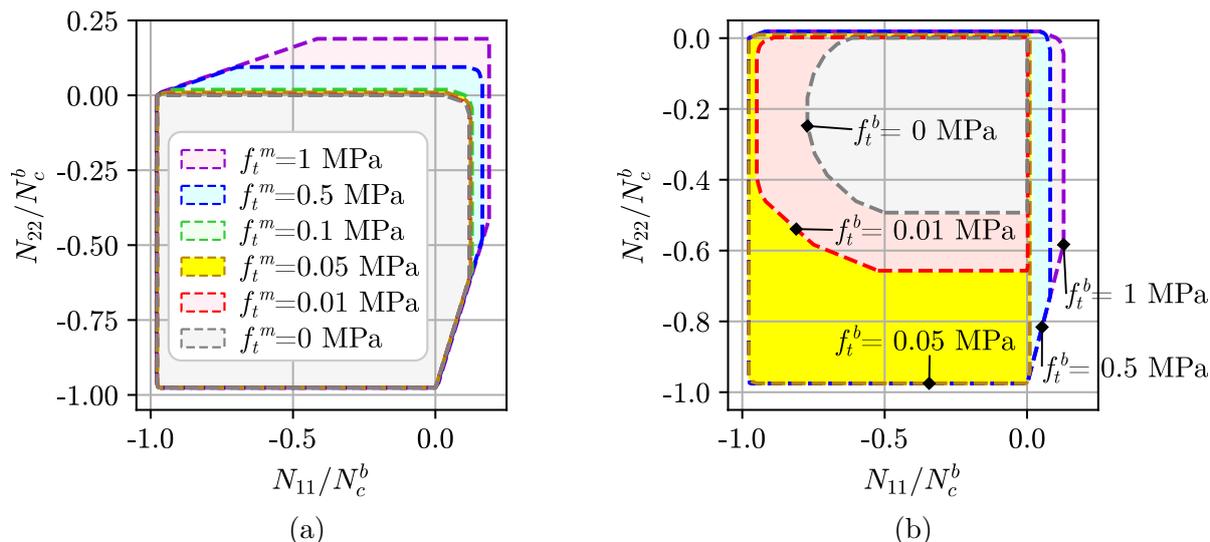


FIGURE 7.2 – Projections du domaine de résistance par le plan  $(N_{11}, N_{22})$  pour différentes valeurs de troncature en traction (a) du mortier  $f_t^m$  et (b) de la pierre  $f_t^b$

La figure 7.2 (b) donne des projections sur le plan  $(N_{11}, N_{22})$  du domaine de résistance du mur pour différentes valeurs de troncature en traction du bloc  $f_t^b$ , la troncature en traction du mortier étant maintenue égale à  $f_t^m = 0,1$  MPa. Le résultat est bien plus surprenant ici. Comme on pouvait s’y attendre, la résistance à la traction de l’assemblage diminue lorsque la troncature en traction diminue et devient plus faible que celle du mortier. En revanche, la résistance en compression et au cisaillement diminue également pour des valeurs très faibles à nulles de la troncature en traction. Pour une troncature en traction  $f_t^b = 0$  MPa, la résistance en compression verticale de l’assemblage est égale à celle du mortier, ce qui est bien trop conservatif (notamment au regard des résultats expérimentaux qui seront présentés dans le chapitre 8). Un mécanisme analytique sera proposé dans la partie 3.2 pour tenter de reproduire les résultats obtenus numériquement.

## 2.3 Remarques finales

Pour conclure cette section, nous avons montré que l’approche cinématique numérique proposée dans le chapitre 6 pouvait aisément être adaptée afin de prendre en compte un critère local de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Une telle modification permettrait de s’approcher davantage des résultats expérimentaux. Nous avons notamment montré dans Donval et al. [166] que le critère de Mohr-Coulomb surestimait la résistance en traction des assemblages de briques testés par Page ([69], [70], [71]).

Le critère ainsi développé montre la polyvalence de l’approche développée dans cette thèse, non pas uniquement pour la modélisation au feu mais aussi pour la modélisation à température ambiante de structures variées en maçonnerie. Cette approche gagnerait maintenant à être complétée par une approche statique par l’intérieur du domaine de

résistance.

Enfin, il est important de noter que les résultats obtenus pour des matériaux complètement tronqués en traction, hypothèse couramment admise dans la pratique de l'ingénieur, peuvent présenter des incohérences avec les observations expérimentales. Il conviendra donc de ne pas négliger la résistance à la traction des blocs dans la modélisation de l'assemblage. En revanche, celle du mortier peut éventuellement être négligée.

## 3 Approches semi-analytiques pour des chargements dans le plan du mur

Dans l'optique d'une méthode à visée applicative pour l'ingénieur, l'approche numérique introduite dans la partie précédente présente l'inconvénient d'avoir un temps de calcul relativement long (environ 30 s par trajet de chargement, comme pour l'approche proposée dans le chapitre 6, sur le même PC portable). Nous avons donc tenté de proposer des approches analytiques et semi-analytiques considérant, localement, un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction.

*Une nomenclature des principaux domaines obtenus dans ce chapitre par des approches cinématiques analytique et semi-analytique est proposée dans l'annexe B.*

### 3.1 Adaptation de l'approche analytique du chapitre 5 pour des chargements dans le plan du mur

Une première piste envisagée consiste à adapter l'approche semi-analytique présentée dans le chapitre 5. Cette adaptation nécessite le calcul des fonctions d'appui pour le mécanisme proposé par de Buhan et de Felice [4] ainsi que pour le mécanisme avec un taux de déformation homogène.

#### 3.1.1 Calcul de la fonction d'appui pour le mécanisme de blocs

En reprenant le mécanisme de blocs rigides de de Buhan et de Felice [4], on peut montrer que la fonction d'appui (notée  $\Pi^{blocs,p,T}(\underline{D})$ ) se met sous la forme suivante (voir

annexe C) :

$$\begin{aligned} \Pi^{bloqs,p,T}(\underline{D}) = & h \left( \frac{f_t^m}{1 - \sin \varphi^m} - c^m \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^m}{2} \right) \right) \text{tr} \underline{D} + \\ & \min_{\Omega_3} \left( hc^m \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^m}{2} \right) - \frac{f_t^m \sin \varphi^m}{1 - \sin \varphi^m} \right) \\ & \left( \sqrt{D_{11}^2 + D_{12} + \Omega_3^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(D_{12} - \Omega_3 + D_{11}/m)^2 + (D_{22} + (D_{12} + \Omega_3)/m)^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sqrt{(D_{12} - \Omega_3 - D_{11}/m)^2 + (D_{22} - (D_{12} + \Omega_3)/m)^2} \right) \quad (7.7) \end{aligned}$$

s.c. :

$$\begin{aligned} D_{11} & \geq 0 \\ fD_{11} - mD_{22} & \leq 0 \\ -fD_{11} + 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} & \leq 0 \\ -fD_{11} - 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} & \leq 0 \end{aligned}$$

On note que les conditions de pertinence de ce critère macroscopique sont identiques à celles du critère proposé par de Buhan et de Felice [4]. En effet, comme montré par les équations (7.2) et (7.3), la fonction d'appui du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction possède les mêmes conditions de pertinence que celles du critère de Mohr-Coulomb classique. Dans l'équation (7.7), on note cependant l'apparition d'un paramètre d'optimisation  $\Omega_3$ . Ce paramètre correspond à la rotation macroscopique de la cellule de base autour de l'axe transversal au mur.

Néanmoins, la fonction d'appui est une somme de racines de fonctions quadratiques du taux de déformation macroscopique et du paramètre d'optimisation  $\Omega_3$ , et peut donc s'exprimer sous forme d'un problème conique quadratique. De plus, les conditions de pertinence de la fonction d'appui peuvent s'exprimer sous forme linéaire. La résolution du problème d'optimisation correspondant est donc très simple à mettre en œuvre avec un solveur d'optimisation conique.

### 3.1.2 Calcul de la fonction d'appui pour le mécanisme homogène

La fonction d'appui pour un mécanisme homogène peut être déterminée en suivant le même raisonnement que celui suivi pour un critère de Mohr-Coulomb classique dans le chapitre 5.

On montre alors que la fonction d'appui du domaine macroscopique correspondant est

la suivante pour  $\varphi^b \geq \varphi^m$  (voir annexe C) :

$$\Pi^{def,p,T}(\underline{D}) = \begin{cases} (\langle R_c \rangle - \eta(K_m^p - K_b^p)f_t^m)(D_I^- + D_{II}^-) \\ \quad \text{si } D_I + D_{II} \leq (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^b \\ \langle f_t \rangle (D_I^+ + D_{II}^+) + \langle R_c - K^p f_t \rangle (D_I^- + D_{II}^-) & \text{sinon} \end{cases} \quad (7.8)$$

Dans l'équation (7.8) :

- $\langle \alpha \rangle = \eta\alpha^m + (1 - \eta)\alpha^b$  désigne la valeur de la moyenne pondérée de la quantité  $\alpha$  ;
- $D_i^+ = (|D_i| + D_i)/2$  désigne la partie positive de la  $i$ ème valeur propre du tenseur des taux de déformation macroscopique, et  $D_i^- = (|D_i| - D_i)/2$  désigne sa partie négative ;

Enfin, on rappelle l'expression du coefficient de butée de chaque matériau :  $K^p = (1 + \sin \varphi)/(1 - \sin \varphi)$ , ainsi que celle de la résistance en compression :  $R_c = 2c \cos \varphi/(1 - \sin \varphi)$ .

### 3.1.3 Approche semi-analytique pour des chargements plans

Finalement, l'approche semi-analytique du domaine de résistance macroscopique de la maçonnerie vis-à-vis de chargements plans est définie de la même manière que dans le chapitre 5, comme l'intersection des domaines obtenus par le mécanisme de blocs, de fonction d'appui  $\Pi^{blocs,p,T}$ , et par le mécanisme homogène, de fonction d'appui  $\Pi^{def,p,T}$ . La fonction d'appui de cette intersection peut être définie de la manière suivante :

$$\Pi^{S.An.,p,T} = \min_{\underline{D}_1 \in \mathbb{R}^3} \left\{ \Pi^{def,p,T}(\underline{D}_1) + \Pi^{blocs,p,T}(\underline{D} - \underline{D}_1) \right\} \quad (7.9)$$

### 3.1.4 Application et comparaison à l'approche numérique

La figure 7.3 compare l'approche semi-analytique proposée ici aux approches numériques proposées dans la partie 2 de ce chapitre, pour le cas d'un critère partiellement tronqué en traction pour la pierre et pour le mortier, et pour le cas d'un critère totalement tronqué en traction pour les deux matériaux. Les valeurs de cohésion et d'angle de frottement interne des matériaux correspondent à celles du tableau 7.1, tandis que les valeurs de troncature en traction correspondantes sont indiquées dans les légendes.

Dans le cas d'un critère partiellement tronqué en traction, l'approche semi-analytique correspond bien à l'approche numérique, sauf pour des sollicitations de traction dans la direction horizontale pour lesquelles l'approche semi-analytique surestime légèrement la résistance. En revanche, dans le cas où  $f_t^b = 0$ , la résistance en compression de l'assemblage obtenue par l'approche cinématique numérique est bien plus faible que celle obtenue par l'approche cinématique semi-analytique.

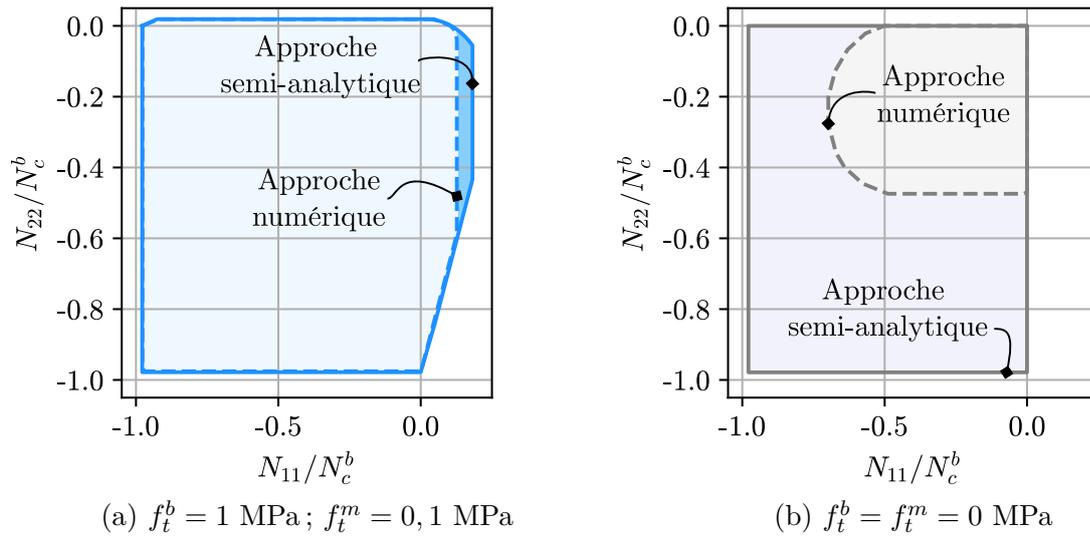


FIGURE 7.3 – Coupe par le plan  $(N_{11}, N_{22})$  du domaine de résistance de la maçonnerie pour des matériaux suivant un critère de Mohr-Coulomb partiellement (a) ou totalement (b) tronqué en traction

Pour une sollicitation de compression verticale et en l'absence de résistance à la traction de la pierre et du mortier, la figure 7.4 (a) donne les iso-valeurs du champ de vitesse verticale dans le plan du mur obtenu par l'approche numérique, la figure 7.4 (b) représente les iso-valeurs de la déformation verticale  $d_{22}$  tandis que la figure 7.4 (c) donne les iso-valeurs de la norme de la vitesse virtuelle  $\underline{u}$  dans le mécanisme solution. Ces trois figures nous renseignent sur le mécanisme optimal, qui n'est plus une combinaison de mouvements de blocs et d'un champ de déformation relativement homogène sur la cellule de base, mais un champ de déformation quasi-homogène par zones.

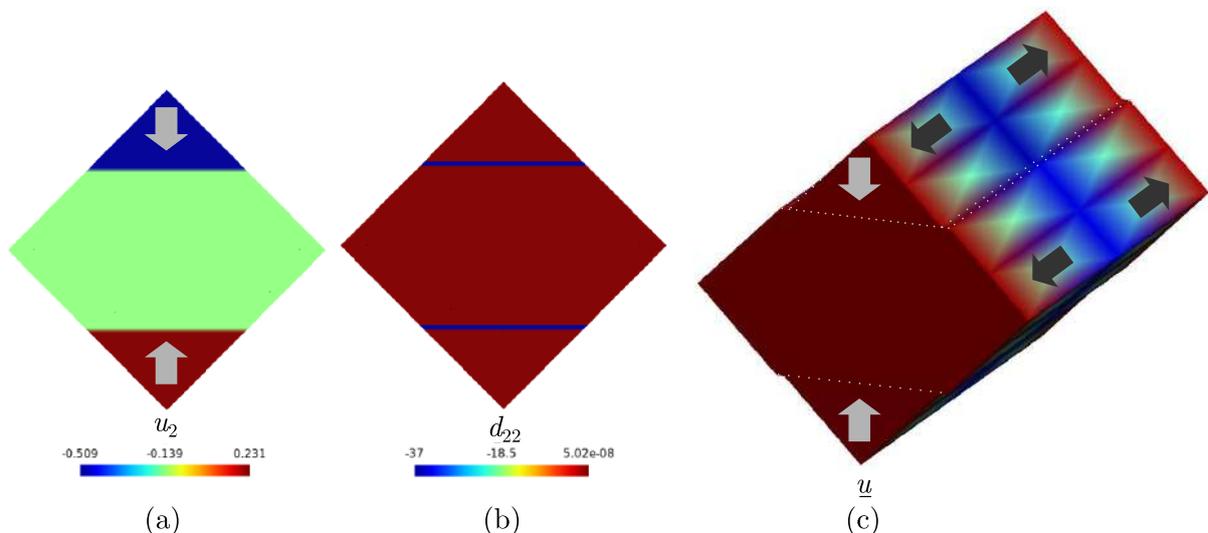


FIGURE 7.4 – Mécanisme obtenu pour une sollicitation  $\underline{D} = -e_2 \otimes e_2$  (compression verticale)

Un tel mécanisme virtuel peut alors être retrouvé par une approche de type "Method of cells", utilisée notamment par Milani et Taliercio [153] pour déterminer le domaine

de résistance d'un mur de maçonnerie sollicité dans son plan. L'approche de ces auteurs suppose cependant que la pierre et le mortier sont dans un état de contraintes planes, ce qui est une simplification erronée dans le cas général. Nous proposons donc, dans la prochaine sous-partie, une approche de type "Method of cell" sans hypothèse préalable sur l'état de contrainte.

### 3.2 Mécanisme par taux de déformation homogènes par zone

#### 3.2.1 Définition du mécanisme par taux de déformation homogène par zone

Dans cette partie, on propose un mécanisme mettant en œuvre des taux de déformation homogènes par zone. Les zones concernées, inspirées des mécanismes virtuels obtenus numériquement, sont représentées sur la figure 7.5.

Pour une sollicitation plane définie par les trois composantes planes<sup>1</sup> du tenseur  $\underline{D}$ , les taux de déformation microscopiques, homogènes par zones, sont donnés dans le tableau 7.2. Ce champ est défini de manière à ce que le champ de vitesse correspondant soit continu. La partie plane des mécanismes correspondants est illustrée sur la figure 7.6 pour des sollicitations  $\underline{D} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1$  (sous-figure (a)),  $\underline{D} = -\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2$  (sous-figure (b)) et  $\underline{D} = (\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1)/2$  (sous-figure (c)).

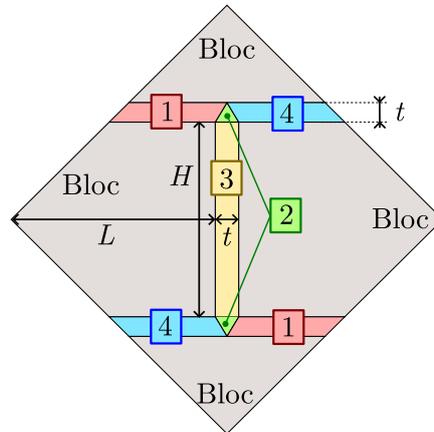


FIGURE 7.5 – Définition des zones pour le mécanisme par taux de déformation homogène par zone

La condition de pertinence du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction impose que le taux de déformation dans la direction transversale au mur soit :

$$d_{33}^i \geq \frac{(|d_1^i| + |d_2^i|) \sin \varphi^m - (d_1^i + d_2^i)}{1 - \sin \varphi^m} \quad (7.10)$$

1. On rappelle que le taux de déformation microscopique  $\underline{d} = \underline{D} + \underline{d}^{per}$  peut admettre des déformations hors-plan tant que celles-ci proviennent d'un champ de vitesse périodique

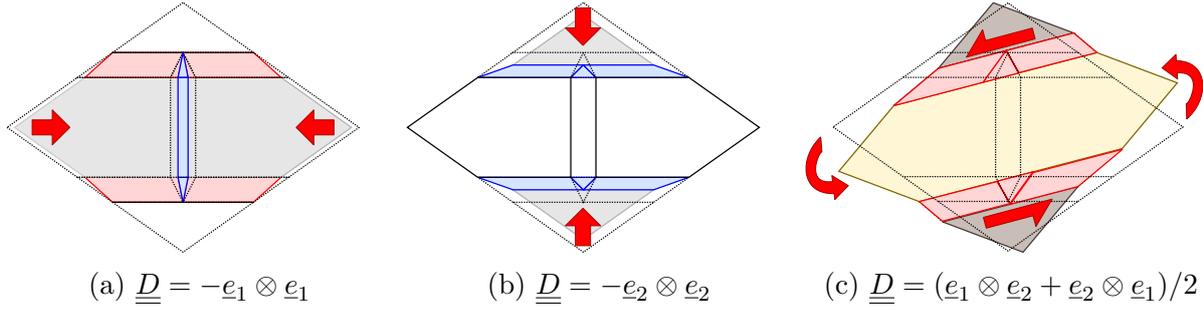


FIGURE 7.6 – Exemples de mécanismes considérés pour des sollicitations particulières

 TABLEAU 7.2 – Valeur des composantes du tenseur des taux de déformation et de l'aire  $S^i$  de chaque zone  $i$  définie sur la figure 7.5

Zone	$d_{11}^i$	$d_{12}^i$	$d_{22}^i$	$d_{33}^i$	$S^i$
1	0	$D_{12} \frac{H+t}{t} + D_{11} \frac{L+t}{4t}$	$D_{22} \frac{H+t}{t}$	$\delta$	$\frac{t}{2} \left( L + \frac{t}{2} \right)$
2	$D_{11} \frac{L+t}{t}$	$D_{12} \frac{H+t}{t}$	$D_{22} \frac{H+t}{t}$	$\delta$	$t^2$
3	$D_{11} \frac{L+t}{t}$	0	0	$\delta$	$Ht$
4	0	$D_{12} \frac{H+t}{t} - D_{11} \frac{L+t}{4t}$	$D_{22} \frac{H+t}{t}$	$\delta$	$\frac{t}{2} \left( L + \frac{t}{2} \right)$
Blocs	0	0	0	$\delta$	$LH$

Pour minimiser la puissance résistante maximale dans le mécanisme tout en vérifiant la condition de pertinence (7.10), nous prendrons :

$$d_{33} = \delta = \max_{j=1-4} \left( \frac{(|d_1^j| + |d_2^j|) \sin \varphi^m - (d_1^j + d_2^j)}{1 - \sin \varphi^m} ; 0 \right) \quad (7.11)$$

Dans chacune des zones numérotées de 1 à 4, la fonction d'appui du critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction s'écrit :

$$\pi^{MCT,m}(\underline{d}) = c^m (|d_I| - d_I + |d_{II}| - d_{II}) \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + f_t^m \left( \delta + \frac{d_I + d_{II} - \sin \varphi^m (|d_I| + |d_{II}|)}{1 - \sin \varphi^m} \right) \quad (7.12)$$

tandis que dans les blocs, où la seule composante non-nulle du tenseur des taux de déformation est  $d_{33} = \delta \geq 0$ , elle s'écrit :

$$\pi^b(\underline{d}) = f_t^b \delta \quad (7.13)$$

Finalement, la fonction d'appui macroscopique correspondant à ce mécanisme, notée  $\Pi^{loc}(\underline{D})$  s'écrit :

$$\Pi^{loc}(\underline{D}) = \langle f_t \rangle \delta + \sum_{i=1}^4 \frac{S^i}{S} \left( R_c^m (d_I^{i-} + d_{II}^{i-}) + \frac{f_t^m}{1 - \sin \varphi^m} (d_I^i + d_{II}^i - (|d_I^i| + |d_{II}^i|) \sin \varphi^m) \right)$$

$$\text{avec : } \delta = \max_{j=1-4} \left( \frac{(|d_1^j| + |d_2^j|) \sin \varphi^m - (d_1^j + d_2^j)}{1 - \sin \varphi^m} ; 0 \right)$$

$$\text{et : } d_I^{i-} = \frac{|d_I^i| - d_I^i}{2} \quad ; \quad d_{II}^{i-} = \frac{|d_{II}^i| - d_{II}^i}{2}$$
(7.14)

Les contributions à la puissance résistante maximale proviennent principalement de la résistance à la traction de la pierre, si elle est non-nulle, ou de la résistance en compression simple du mortier, si la résistance à la traction de la pierre est nulle.

Le mécanisme proposé dans ce paragraphe ne permet cependant pas de prendre en compte une rupture en compression des blocs. Comme dans le chapitre 5 et dans la sous-partie 3.1 de ce chapitre, nous prendrons donc l'intersection du domaine obtenu par l'approche par taux de déformation homogène par zone proposée dans cette sous-partie, et du domaine obtenu par une approche par taux de déformation homogène sur l'ensemble de la cellule de base, comme proposé dans le paragraphe 3.1.2. La fonction d'appui de cette intersection, notée  $\Pi^{An..p,T}$ , est alors définie par :

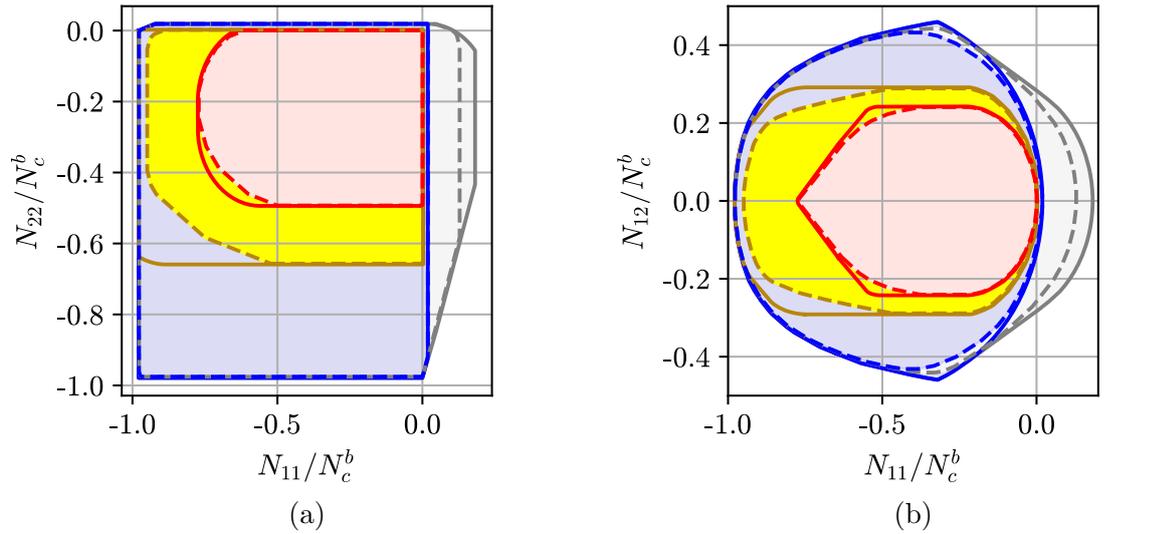
$$\Pi^{An..p,T}(\underline{D}) = \min_{\underline{D}_1 \in \mathbb{R}^3} \left\{ \Pi^{def,p,T}(\underline{D}_1) + \Pi^{loc}(\underline{D} - \underline{D}_1) \right\}$$
(7.15)

### 3.2.2 Application

La figure 7.7 donne quelques projections des critères ainsi obtenus sur les plans  $(N_{11}, N_{22})$  (a) et  $(N_{11}, N_{12})$  (b) pour différentes valeurs de  $f_t^b$ , et les compare à l'approche numérique présentée dans la partie 2. Les valeurs de cohésion et d'angle de frottement interne des matériaux sont celles données dans le tableau 7.1, la troncature en traction du mortier est maintenue égale à  $f_t^m = 0,1$  MPa.

Il apparait que l'intersection des deux approches proposées par l'équation (7.15) présente, dans ce cas, une approximation très satisfaisante du critère obtenu par voie numérique. Cette approche permet également d'expliquer la forte dépendance du modèle à la résistance à la traction des blocs.

Il faut cependant garder à l'esprit que les deux approches proposées sont des approches cinématiques par l'extérieur du domaine de résistance, et qu'il serait très intéressant de les comparer à une approche statique par l'intérieur de ce même domaine de résistance.



Approche analytique

<span style="border: 1px solid red; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0$ MPa	<span style="border: 1px solid blue; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0,1$ MPa	<span style="border: 1px dashed red; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0$ MPa	<span style="border: 1px dashed blue; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0,1$ MPa
<span style="border: 1px solid orange; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0,01$ MPa	<span style="border: 1px solid grey; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 1$ MPa	<span style="background-color: yellow; border: 1px dashed orange; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 0,01$ MPa	<span style="background-color: lightgrey; border: 1px dashed grey; display: inline-block; width: 15px; height: 10px;"></span> $f_t^b = 1$ MPa

Approche numérique

FIGURE 7.7 – Projections des domaines de résistance obtenus pour différentes valeurs de  $f_t^b$  ( $f_t^m = 0,1$  MPa pour tous les domaines) sur les plans  $(N_{11}, N_{22})$  (a) et  $(N_{11}, N_{12})$  (b)

### 3.2.3 Conclusion

L’apport majeur de cette partie concerne la quantification de la forte dépendance de la résistance en compression de l’assemblage à la résistance à la traction de la pierre. Du point de vue de l’ingénieur, on recommande de ne pas la négliger sous peine d’aboutir à des résultats bien trop conservatifs. La résistance à la traction du mortier peut en revanche être négligée.

Sachant que la pierre est fragile en traction, il serait intéressant d’évaluer la dépendance de la résistance en compression de l’assemblage vis-à-vis de sa résistance à la traction par d’autres modélisations que le Calcul à la rupture. On peut notamment penser à des modèles élastoplastiques avec adoucissement et/ou à la prise en compte de l’endommagement.

Dans le cas où la résistance à la traction de la pierre est prise raisonnablement supérieure à 0, en revanche, l’approche semi-analytique constituant l’extension de celle proposée dans le chapitre 5 semble donner des résultats relativement proches de l’approche numérique pour des chargements plans.

## 4 Quelques pistes pour des chargements hors du plan du mur

### 4.1 Le critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction : un point de blocage

Comme dans le chapitre 5, nous cherchons une approche cinématique du domaine de résistance. Cette approche se base sur deux familles de mécanismes : un mécanisme reposant sur des taux de déformation homogènes par plans et un mécanisme de blocs. Si le calcul de la fonction d'appui du premier mécanisme ne pose pas de problème particulier, celle du second mécanisme aboutit à un point de blocage.

Le calcul de la fonction d'appui du critère macroscopique, présentée dans l'annexe C pour un critère de Mohr-Coulomb classique, fait en effet apparaître des termes qui rendraient l'intégration plus difficile pour un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Considérons par exemple la puissance résistante maximale développée dans la discontinuité entre les blocs 1 et 4 (voir figure C.1 de l'annexe C), calculée ici pour un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction :

$$\begin{aligned}
 P_{rm}^{1-4}(\underline{D}, \underline{\chi}) = & \frac{b}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_t^m - c^m \cos \varphi^m}{1 - \sin \varphi^m} \left( \frac{b}{2} D_{12} + a D_{22} - \xi_3 \left( \frac{b}{2} \chi_{12} + a \chi_{22} \right) - \frac{b}{2} \Omega_3 \right) d\xi_3 \\
 & + \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m - f_t^m}{1 - \sin \varphi^m} \int_{-b/4}^0 \left( \left| \frac{b}{2} D_{11} + a D_{12} - \xi_3 \left( \frac{b}{2} \chi_{11} + a \chi_{12} \right) + a \Omega_3 \right| \right. \\
 & \quad \left. + \left| \frac{b}{2} D_{12} + a D_{22} - \xi_3 \left( \frac{b}{2} \chi_{12} + a \chi_{22} \right) - \frac{b}{2} \Omega_3 \right| \right. \\
 & \quad \left. + \left| \left( \xi_1 - \frac{b}{4} \right) \left( \frac{b}{2} \chi_{11} + a \chi_{12} \right) + \frac{b}{2} \Omega_2 - a \Omega_1 \right| \right) d\xi_1 d\xi_3
 \end{aligned} \tag{7.16}$$

Dans l'équation (7.16), le deuxième terme peut éventuellement être intégré de manière analytique. L'expression en résultant est complexe et, en particulier, il n'est pas possible de mettre la détermination de  $P_{rm}^{1-4}(\underline{D}, \underline{\chi})$  sous forme d'un problème d'optimisation conique. Or, une telle forme est particulièrement pratique pour la modélisation du mur par une plaque ou une coque homogène, comme nous le verrons dans le chapitre 9.

Plusieurs pistes peuvent alors être explorées :

- L'intégrale peut être évaluée par quadrature de Gauss. Mais le nombre de variables auxiliaires rattachées au problème d'optimisation serait trop grand pour évaluer directement le critère aux nœuds comme proposé par Bleyer et al. [167] pour le béton armé, et comme on le proposera pour la maçonnerie dans le chapitre 9.
- A partir de la quadrature de Gauss ou de l'expression analytique, on pourrait imaginer

d'approximer le critère par une somme d'ellipsoïdes, comme proposé par Bleyer et al. [168] et par Guéguin et al. [161].

- Une autre solution consiste à considérer un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire plutôt qu'un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Cette autre approximation de la courbe intrinsèque réelle des matériaux permet en effet de réutiliser plus facilement les résultats obtenus dans le chapitre 5.

## 4.2 Une première solution : l'utilisation d'un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire

La figure 7.8 (a) représente un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire (noté "MCBi" par la suite).

Ce dernier correspond à l'intersection de deux critères de Mohr-Coulomb, de cohésions et d'angles de frottement interne respectifs  $(c^{m,1}, \varphi^{m,1})$  et  $(c^{m,2}, \varphi^{m,2})$ . Sa fonction d'appui peut donc être écrite de la manière suivante :

$$\pi^{MCBi}(\underline{d}) = \min_{\underline{d}_1 \in \mathbb{R}^6} \left\{ \pi^{(c^{m,1}, \varphi^{m,1})}(\underline{d}_1) + \pi^{(c^{m,2}, \varphi^{m,2})}(\underline{d} - \underline{d}_1) \right\} \quad (7.17)$$

Finalement, une première approche par l'extérieur du critère de résistance d'un mécanisme de blocs appliquée à une maçonnerie dont le mortier suit un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire correspondrait à l'intersection des approches pour les couples  $(c^{m,1}, \varphi^{m,1})$  et  $(c^{m,2}, \varphi^{m,2})$  :

$$\Pi^{blocs,MCBi}(\underline{D}, \underline{\chi}) = \min_{(\underline{D}_1, \underline{\chi}_1) \in \mathbb{R}^6} \left\{ \Pi^{blocs, c^{m,1}, \varphi^{m,1}}(\underline{D}_1, \underline{\chi}_1) + \Pi^{blocs, c^{m,2}, \varphi^{m,2}}(\underline{D} - \underline{D}_1, \underline{\chi} - \underline{\chi}_1) \right\} \quad (7.18)$$

A titre d'exemple, la figure 7.8 (b) donne une coupe de l'approche par l'extérieur obtenue par un mécanisme de blocs appliqué à une maçonnerie dont le mortier sur un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire. Pour cet exemple, la géométrie est identique à celle du mur du chapitre 2, et le critère de Mohr-Coulomb bilinéaire est défini par les deux couples  $(c^{m,1}, \varphi^{m,1}) = (0,043 \text{ MPa}, 50^\circ)$  et  $(c^{m,2}, \varphi^{m,2}) = (0,79 \text{ MPa}, 25^\circ)$ . Le plan  $(N_{22}, M_{11})$  a été choisi car il permet de bien visualiser les deux critères et leur intersection.

Cette approche reste cependant assez grossière et pourrait par exemple être affinée en discrétisant la cellule de base par couches.

Ces développements sont toujours en cours et permettraient notamment une modélisation plus fidèle de la résistance de structures en maçonnerie de blocs pleins vis-à-vis de sollicitations hors de leur plan.

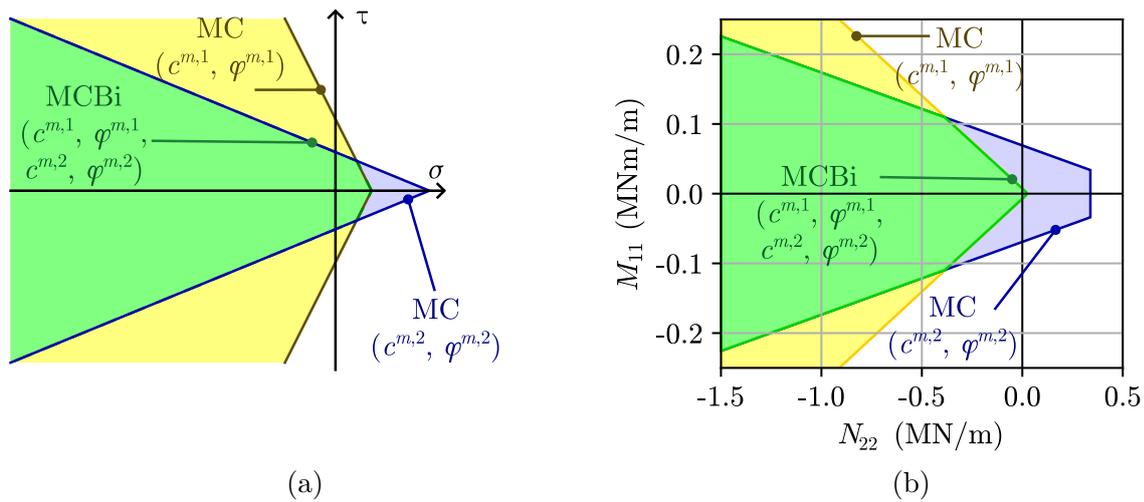


FIGURE 7.8 – (a) Représentation schématique du critère de Mohr-Coulomb bilinéaire dans le plan de Mohr et (b) coupe  $(N_{22}, M_{11})$  du domaine obtenu par un mécanisme de blocs pour un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire

## 5 Conclusion

Dans ce chapitre, des premières extensions aux approches analytiques et numériques présentées dans les chapitres 5 et 6 ont été proposées pour prendre en compte un critère de résistance local de Mohr-Coulomb tronqué en traction ou de Mohr-Coulomb bilinéaire.

Un des apports majeurs consiste en la mise en évidence de l'importance de la résistance à la traction de la pierre dans la résistance en compression de l'assemblage. Cette résistance ne peut pas être négligée sous peine d'aboutir à des résultats bien trop conservatifs. Cependant, la fragilité de la pierre en traction soulève la question de l'utilisation du cadre du Calcul à la rupture, fiable pour des matériaux ductiles et beaucoup moins pour des matériaux fragiles, pour la détermination de la résistance en compression des maçonneries. Du point de vue de l'ingénieur, il pourrait alors être nécessaire de définir des coefficients correctifs. Le chapitre 8 a justement vocation à comparer les résultats d'une campagne expérimentale évaluant la résistance en compression centrée et excentrée de trumeaux de maçonnerie aux résultats de la modélisation par le Calcul à la rupture.

Enfin, les développements proposés dans ce chapitre mériteraient d'être poursuivis pour proposer une détermination plus précise et plus réaliste du domaine de résistance d'un mur de maçonnerie. En particulier, il serait intéressant de proposer une approche statique numérique et d'approfondir l'extension de l'approche semi-analytique du chapitre 6 pour un critère de résistance local de Mohr-Coulomb bilinéaire.

\* \*

\*



# Chapitre 8

## Première validation expérimentale du critère de résistance

**Résumé :** *Dans ce chapitre, on présente les résultats d'une campagne expérimentale lors de laquelle quinze trumeaux de maçonnerie en pierre naturelle ont été testés en compression centrée ou excentrée par rapport au plan médian du trumeau. Ces essais, réalisés à température ambiante, permettent une première comparaison expérimentale avec les approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Ils fournissent également des informations supplémentaires sur le comportement des maçonneries en pierre naturelle à température ambiante, ainsi que sur leur mécanisme de rupture.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>238</b>
<b>2</b>	<b>Protocole expérimental</b> . . . . .	<b>238</b>
2.1	Géométrie et matériaux constitutifs . . . . .	238
2.2	Essais de caractérisation de la pierre et du mortier . . . . .	239
2.3	Mode de chargement des trumeaux et dispositif expérimental correspondant . . . . .	242
2.4	Instrumentation . . . . .	244
2.5	Protocole d'installation et de chargement . . . . .	245
<b>3</b>	<b>Résultats</b> . . . . .	<b>246</b>
3.1	Phase dite "élastique" . . . . .	246
3.2	Résultats globaux : charges de ruine . . . . .	247
3.3	Résultats détaillés : essais centrés . . . . .	248
3.4	Résultats détaillés : essais avec excentrement . . . . .	253
3.5	Remarques finales . . . . .	260
<b>4</b>	<b>Comparaison des essais avec des modèles de calcul</b> . . . . .	<b>260</b>
4.1	Comparaison avec les règles de calcul de l'Eurocode 6 [1] . . . . .	260
4.2	Modélisation par le Calcul à la rupture . . . . .	261
<b>5</b>	<b>Conclusion</b> . . . . .	<b>264</b>

---

# 1 Introduction

Dans les chapitres 4 à 7, nous avons proposé plusieurs approches du domaine de résistance d'un mur en pierre massive reposant sur la mise en œuvre de la théorie du Calcul à la rupture. Ces approches présentent l'avantage d'être rigoureuses, directes et rapides. Cependant, la pierre et le mortier sont, de manière générale, des matériaux plutôt fragiles, pour lesquels les résultats du Calcul à la rupture doivent être interprétés avec beaucoup de précautions. Il paraît donc nécessaire de proposer une première validation expérimentale de ces modélisations, à l'échelle de l'assemblage et à température ambiante.

Dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressés à la résistance d'assemblages maçonnés en pierre naturelle. On peut notamment citer les travaux de Parisi et al. [169] sur le tuf, de Vasconcelos et Lourenço [170] sur le granite, de Corradi et al. [171] sur différentes pierres dont des pierres peu résistantes comme la travertine, ou de Godio et al. [172] sur des maçonneries de moellons. Ces travaux se concentrent sur la résistance des assemblages vis-à-vis de sollicitations planes (compression ou de cisaillement). En ce qui concerne la résistance de maçonneries de blocs pleins vis-à-vis de sollicitations de flexion, les essais de type "airbag" (Chong [173], Duarte [174] parmi d'autres) permettent d'évaluer la résistance de murs vis-à-vis de sollicitations latérales comme le vent. D'autres essais, tels que ceux proposés par Brencich et coauteurs ([175], [176], [177]) permettent d'évaluer la résistance d'assemblages de briques vis-à-vis de sollicitations de compression excentrée. Il existe cependant peu de résultats similaires sur la pierre naturelle. On peut néanmoins citer les essais de Venu Madhava Rao et al. [178] qui traitent de pierres très résistantes.

Dans ce chapitre, on propose donc une campagne expérimentale visant à caractériser le comportement et la résistance en compression centrée ou excentrée de trumeaux de maçonnerie en pierre naturelle. Tout d'abord, le protocole expérimental est présenté, en détaillant le dispositif expérimental conçu pour l'occasion, permettant de solliciter les trumeaux en compression excentrée. Les résultats concernant le comportement (déformations) et la résistance (charge et mécanisme de rupture) des trumeaux sont ensuite présentés. Enfin, les résultats obtenus en ce qui concerne la charge de rupture et le mécanisme de ruine sont comparés à ceux issus d'une modélisation numérique par l'approche cinématique du Calcul à la rupture.

## 2 Protocole expérimental

### 2.1 Géométrie et matériaux constitutifs

Les trumeaux, représentés sur la figure 8.1, mesurent 730 mm de large, 740 mm de haut et 200 mm d'épaisseur. Leur géométrie a été choisie pour se rapprocher au maximum

de celle d'une cellule de base du mur testé dans le chapitre 2. Ils sont composés de deux demi-blocs (coupe dans la largeur) de hauteur 360 mm, de largeur 360 mm et d'épaisseur 200 mm, ainsi que de deux demi-blocs (coupe dans la hauteur) de hauteur 180 mm, de largeur 730 mm et d'épaisseur 200 mm. Les joints horizontaux et les joints verticaux ont une épaisseur de 10 mm. La figure 8.1 (a) reprend cette géométrie, tandis que la figure 8.1 (b) représente quelques trumeaux en chambre climatique.

Ces trumeaux sont constitués de calcaire de Saint-Vaast et de mortier de chaux hydraulique naturelle NHL 3,5, comme pour le mur testé dans le chapitre 2. Ils ont été confectionnés puis stockés en chambre climatique, à 20 °C et 65 % d'humidité, et ont été testés après 27 à 32 jours de cure.

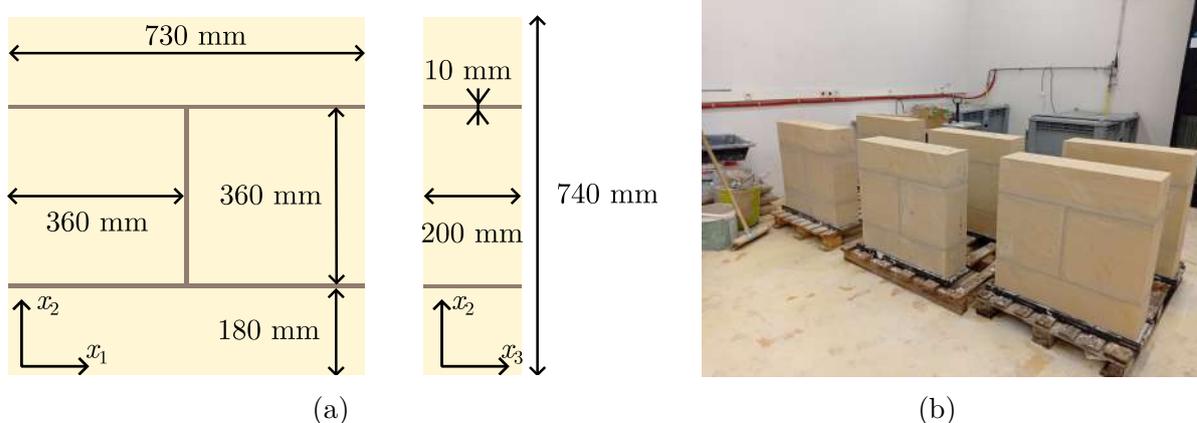


FIGURE 8.1 – (a) Géométrie des trumeaux et (b) quelques trumeaux en chambre climatique

## 2.2 Essais de caractérisation de la pierre et du mortier

La pierre et le mortier ont été caractérisés selon des essais similaires à ceux présentés dans le chapitre 2 et dans l'annexe A.

### 2.2.1 Pierre

Dix essais de résistance en compression simple, selon la norme NF EN 772-1 [102], ont été réalisés sur des blocs de pierre cubiques, de 10 cm de côté, testés perpendiculairement au plan de sédimentation. La résistance en compression moyenne est  $R_c^b = 5,1$  MPa, avec un coefficient de variation de 6,4 %. Cette résistance est très proche de celle trouvée sur les blocs testés dans le chapitre 2 (5,3 MPa).

La figure 8.2 représente la courbe force-déplacement du vérin pour les essais de caractérisation de la pierre. Cette courbe ne peut pas être interprétée quantitativement pour obtenir le module de Young (car le déplacement prend en compte l'ensemble des jeux de la presse utilisée). Néanmoins, son interprétation qualitative nous renseigne sur le

comportement relativement fragile en compression de la pierre (admettant néanmoins une résistance résiduelle non-nulle).

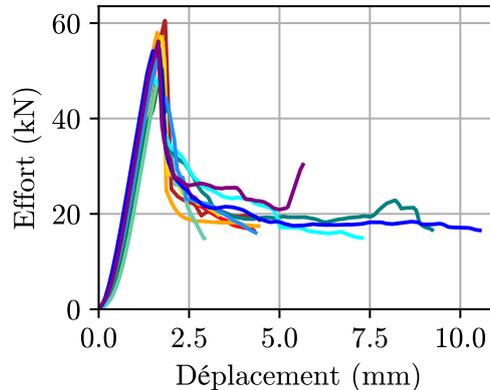


FIGURE 8.2 – Courbe force-déplacement du vérin obtenue lors des essais de résistance en compression de la pierre

Des mesures de vitesse des ondes (ondes  $P$  de compression) ont également été effectuées sur certains blocs, confirmant que le module de Young de la pierre est de l'ordre de  $E = 5$  GPa, comme dans le chapitre 2.

### 2.2.2 Mortier

Quinze échantillons de mortier de 4 x 4 x 16 cm ont été testés en flexion 3 points puis en compression selon la norme NF EN 1015-11 [179], après 28 jours de cure. Ces essais sont identiques à ceux présentés dans le paragraphe 3.2 de l'annexe A.

Le calcaire de Saint-Vaast est une pierre très poreuse (porosité ouverte de 43,4 % d'après Pestre [31]), avec un coefficient de capillarité élevé ( $A = 1,04$  kg/m<sup>2</sup>/s<sup>0.5</sup> contre  $A = 0,03$  kg/m<sup>2</sup>/s<sup>0.5</sup> pour le béton d'après Pestre [31]). Il absorbe donc une partie de l'eau contenue dans le mortier lors de la confection du trumeau. Nous avons donc testé deux protocoles de confection des éprouvettes : le protocole pour les liants hydrauliques (§ 7.2.2 de la norme), déjà utilisé dans le chapitre 2, et le protocole pour les liants aériens avec un faible taux de ciment (§ 7.2.3 de la norme). La différence entre ces deux protocoles concerne l'ajout de papier absorbant dans les moules pendant les deux heures suivant la confection pour le protocole 7.2.3, et donc la teneur en eau des éprouvettes. Ce deuxième protocole nous paraît davantage en adéquation avec l'état du mortier dans le trumeau, bien qu'il ne suive pas exactement la norme.

La figure 8.3 (a) donne les résultats des essais de résistance à la flexion, tandis que la figure 8.3 (b) donne les résultats des essais de résistance en compression. Enfin, le tableau 8.1 présente les valeurs des résistances en flexion et en compression simple obtenues pour les différents essais.

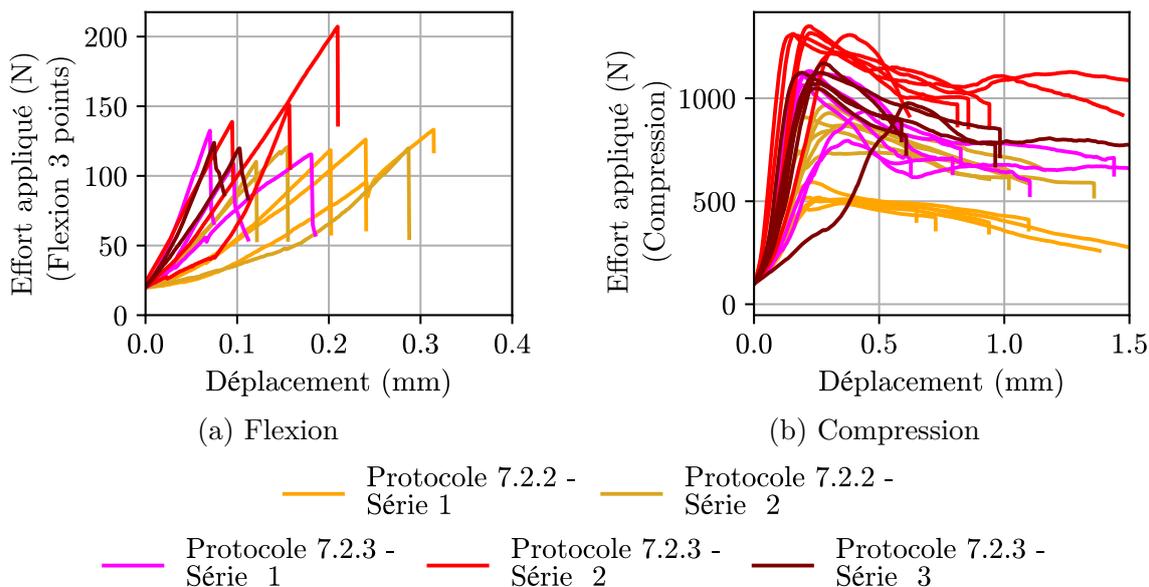


FIGURE 8.3 – Courbe force-déplacement du vérin pour les essais de caractérisation (a) en flexion trois points et (b) en compression du mortier

TABLEAU 8.1 – Résultats des essais de caractérisation du mortier

	Flexion (§ 7.2.2)	Compression (§ 7.2.2)	Flexion (§ 7.2.3)	Compression (§ 7.2.3)
Nombre de valeurs	6	12	8	18
Moyenne	0,28 MPa	0,44 MPa	0,32 MPa	0,71 MPa
Coefficient de variation	6 %	21 %	26 %	12 %

Il apparaît que le mortier est fragile en traction, mais qu'il possède une certaine ductilité en compression. Les résistances en flexion sont assez peu dispersées à l'exception d'un essai. Les valeurs obtenues sont similaires entre les deux protocoles.

Concernant les résistances en compression, en revanche, il apparaît que le protocole de confection des éprouvettes a une influence notable. On note également que les résultats sont assez proches au sein de chaque gâchée de mortier, mais qu'il peut y avoir des différences importantes entre les gâchées. Compte-tenu du mode de préparation du mortier, cette différence vient probablement de la teneur en eau du mortier.

Enfin, on note que les résistances en compression obtenues sont du même ordre de grandeur que celles obtenus dans le chapitre 2. Les résistances sont plus faibles que celles prévues par le DTU 20.1 [2], mais restent en cohérence avec les résultats de certains auteurs (Parent [10] par exemple). Une piste d'explication est que la teneur en eau du mortier a une influence importante sur sa résistance, et que la mise en œuvre du mortier sur le calcaire de Saint-Vaast a nécessité l'ajout d'eau pour garder une maniabilité suffisante.

## 2.3 Mode de chargement des trumeaux et dispositif expérimental correspondant

Comme évoqué dans l'introduction, l'objet des essais présentés dans ce chapitre est de fournir une première validation expérimentale à l'approche de modélisation par le Calcul à la rupture, pour des sollicitations planes et hors du plan du mur. Les chargements supportés par des murs exposés au feu sont des chargements de compression excentrée, c'est pourquoi nous avons choisi de reproduire ce mode de chargement pour les essais à échelle réduite présentés dans ce chapitre.

Le mode de chargement choisi a nécessité la conception d'un dispositif de chargement spécifique, permettant d'appliquer un effort normal, centré ou excentré, au trumeau. La figure 8.4 (a) schématise ce dispositif, tandis que la figure 8.4 (b) représente la maquette numérique réalisée pour la conception du dispositif.

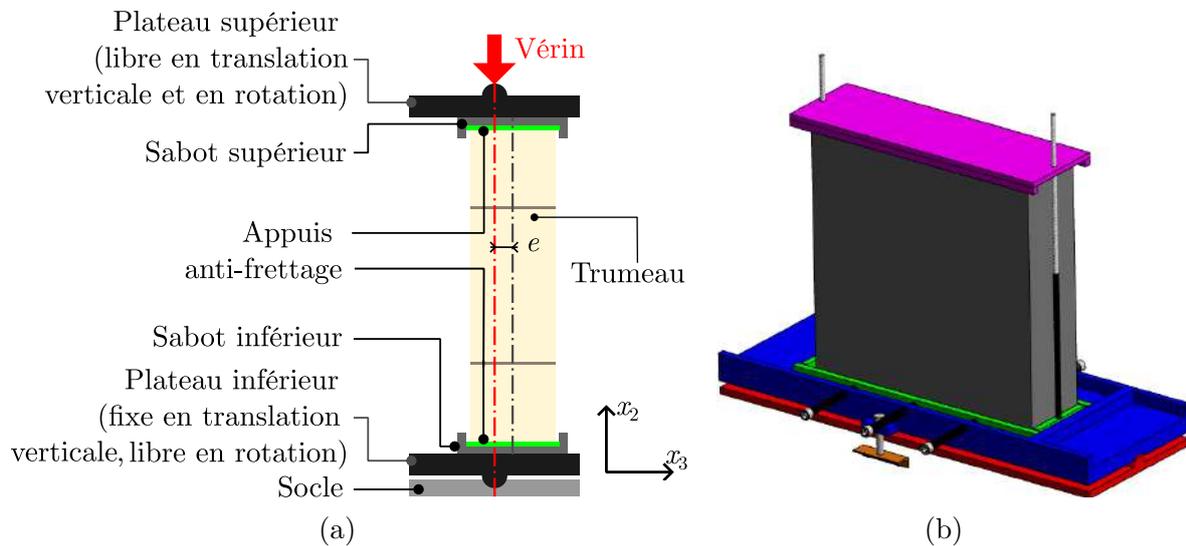


FIGURE 8.4 – (a) Schéma du dispositif expérimental permettant d'appliquer un chargement de compression centrée ou excentrée au trumeau et (b) modèle CAO (Conception Assistée par Ordinateur) du dispositif expérimental

Le moment fléchissant appliqué au trumeau par ce dispositif de chargement est :

$$M = eN \quad (8.1)$$

où  $N$  est l'effort normal appliqué et  $e$  l'excentrement entre l'axe médian du trumeau et l'axe de l'effort normal.

Dans ce dispositif, le trumeau est inséré entre deux sabots, constitués de fers plats ainsi que d'un appui anti-frettage. Le sabot inférieur repose sur un plateau pouvant tourner autour de la direction  $x_1$  par rapport à un plateau fixé au sol. Le sabot peut être centré ou excentré par rapport à l'axe de rotation du plateau. Cet excentrement, réglable par des vis, permet de gérer l'excentrement de la charge verticale. Le sabot supérieur est quant à

## 2. Protocole expérimental

lui en contact lisse avec le plateau supérieur, qui peut lui-même tourner par rapport à la poutre sur laquelle est appliqué le chargement vertical, au moyen d'un vérin.

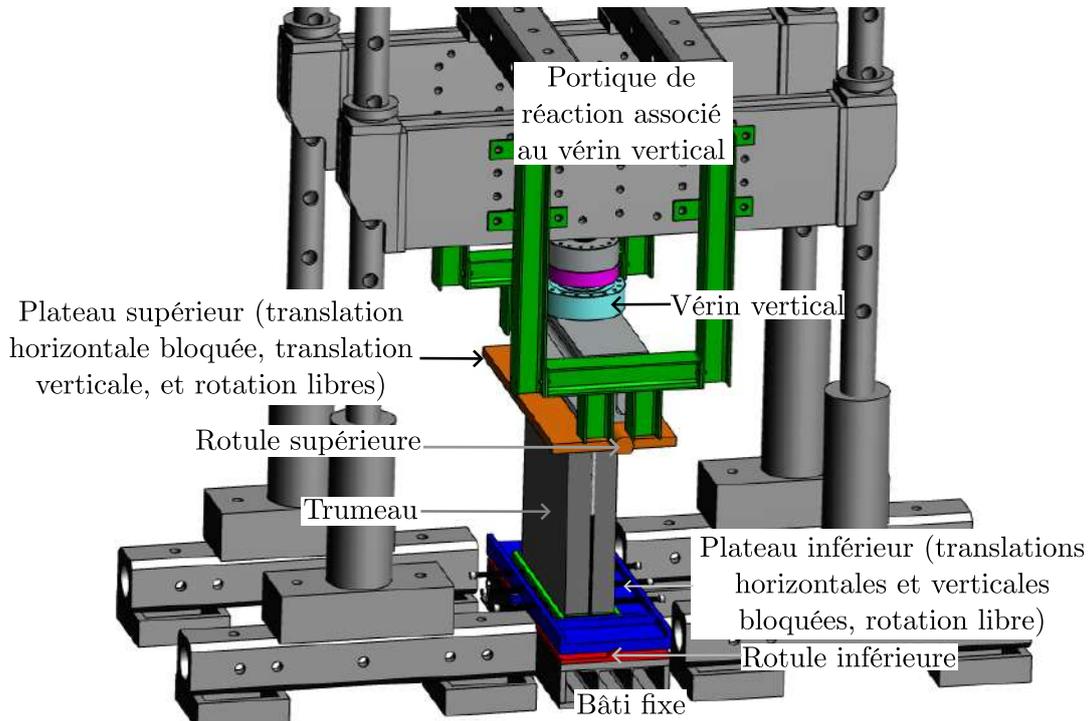


FIGURE 8.5 – Modèle CAO du dispositif expérimental dans son ensemble

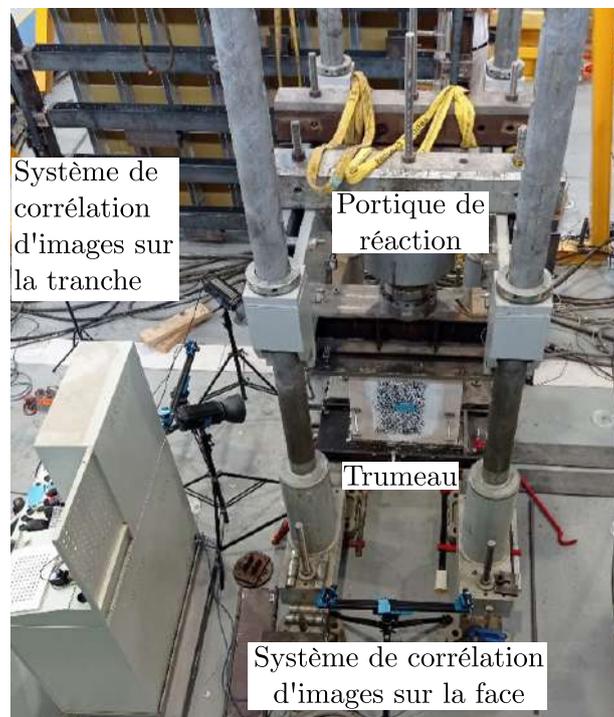


FIGURE 8.6 – Dispositif expérimental dans son ensemble

La figure 8.5 représente l'ensemble du système de chargement, tandis que la figure 8.6 représente le système de chargement dans la halle d'essais. On notera que les tiges

filetées ainsi que les butées représentées sur les figures 8.4 (b) et 8.5 sont nécessaires pour la manutention et l'installation du trumeau, mais qu'elles sont retirées lors de l'essai.

## 2.4 Instrumentation

En plus de l'instrumentation spécifique au système de chargement (capteurs de force et de déplacement du vérin), le trumeau a été équipé de capteurs de déplacement LVDT et d'un système de corrélation d'images.

Quatre capteurs LVDT sont installés aux coins de la maquette pour en étudier la déformation globale. Deux capteurs ont également été installés pour mesurer le déplacement au niveau des joints sur une des faces du trumeau. Lors des essais excentrés, ces capteurs sont positionnés sur la face tendue (ou moins comprimée selon la valeur de l'excentrement). La figure 8.7 représente l'implantation de ces capteurs.

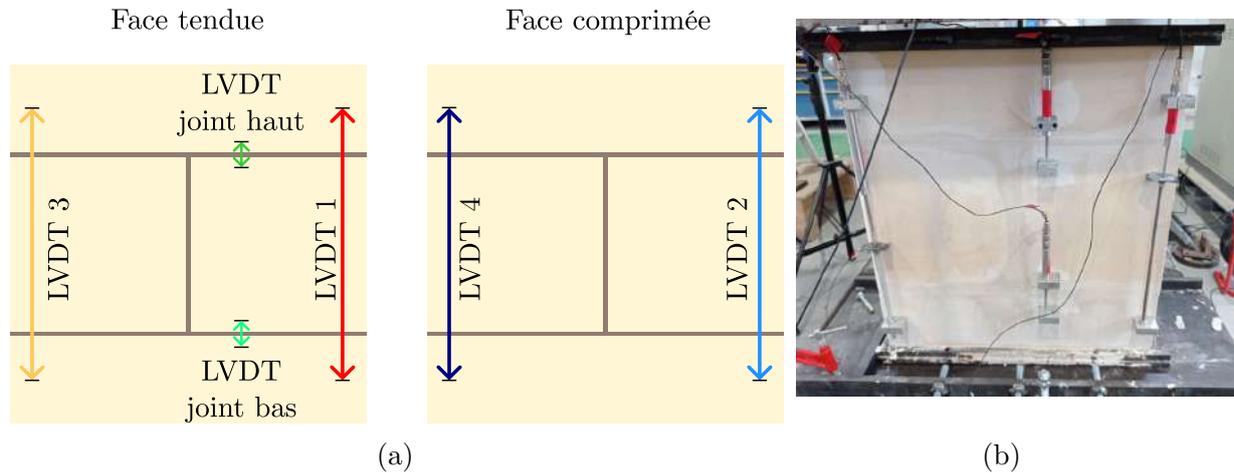


FIGURE 8.7 – Positionnement des capteurs de déplacement LVDT : (a) schéma et (b) photo des capteurs installés sur la face "tendue"

**Note :** Par la suite, pour distinguer les deux faces, on désignera par "face tendue" la face la moins comprimée.

Deux systèmes de corrélation d'images ont également été installés : un pour visualiser la face la plus comprimée du trumeau, et l'autre pour visualiser une de ses faces latérales (qu'on nommera tranche par la suite). Les deux systèmes sont composés de deux caméras et permettent une visualisation stéréoscopique, dans les trois directions de l'espace, des déplacements du trumeau. La figure 8.8 schématise le positionnement du système de corrélation d'images.

A partir du champ de déplacement  $\underline{\xi}$  obtenu par corrélation d'images, il est possible de déterminer le champ de déformation linéarisée, calculé comme suit :

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = (\underline{\text{grad}} \underline{\xi} + {}^t \underline{\text{grad}} \underline{\xi}) / 2 \quad (8.2)$$

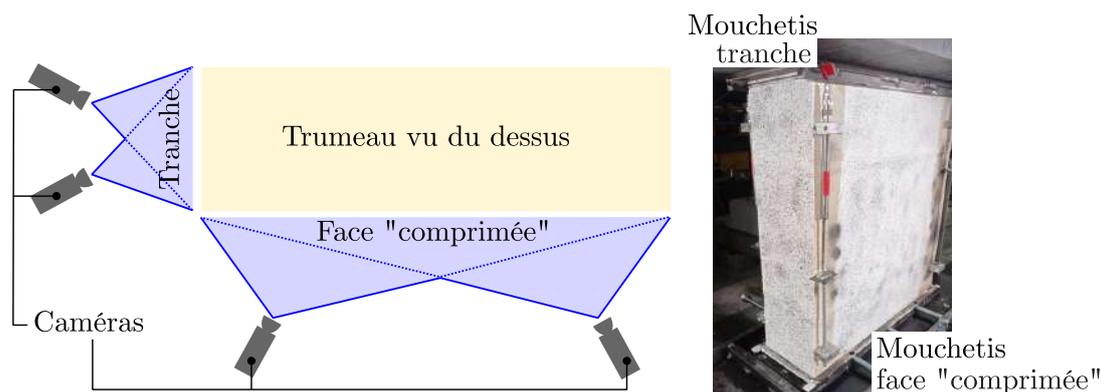


FIGURE 8.8 – Positionnement des deux dispositifs de corrélation d'images

## 2.5 Protocole d'installation et de chargement

Lors de son montage, chaque trumeau est installé dans son sabot inférieur. Le sabot supérieur y est vissé au moyen de tiges filetées pour transporter le trumeau et éviter la rupture des joints, qui sont peu résistants (notamment en traction et en cisaillement) même après 28 jours.

Il est ensuite installé dans le dispositif de chargement, et centré par rapport à l'axe des deux rotules. Pendant cette phase de manutention, le plateau inférieur est maintenu en position horizontale par des butées.

Le protocole de chargement est constitué de deux phases :

- **Première phase : cycles de charge-décharge "élastiques"**. Pour cette première phase, le plan médian du trumeau est centré par rapport à l'axe des rotules. Le trumeau subit cinq cycles de charge-décharge, avec un chargement maximal d'environ 80 kN (environ 15 % de la charge de rupture centrée). Cette phase a deux objectifs : d'une part, précharger le trumeau pour "homogénéiser" le mortier, et d'autre part, tenter de détecter une éventuelle courbure qui montrerait que le plan médian "réel" du trumeau n'est pas centré par rapport à l'axe des rotules. Nous reviendrons sur cette problématique dans la sous-partie 3.1. Par ailleurs, les résultats expérimentaux ont montré que la charge de 80 kN était en réalité au-delà de la limite élastique du trumeau.
- **Seconde phase : chargement (centré ou excentré) jusqu'à la rupture**. Au début de la seconde phase, le trumeau est déchargé. Le trumeau est translaté horizontalement, de la valeur de l'excentrement choisie, par rapport à l'axe des rotules. Enfin, le chargement, piloté en déplacement, est augmenté jusqu'à la rupture du trumeau, définie par une chute brutale de la force mesurée par le vérin.

La figure 8.9 représente schématiquement ce programme de chargement.

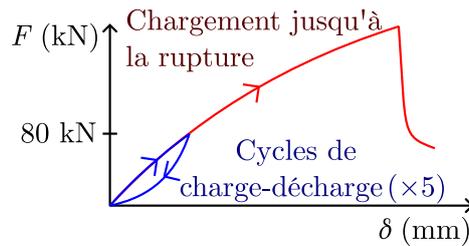


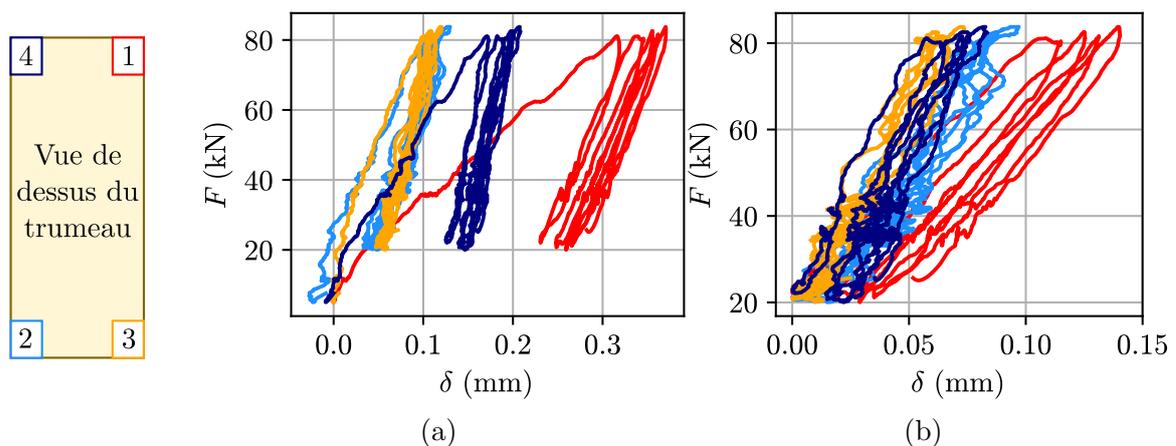
FIGURE 8.9 – Programme de chargement

Quatre valeurs d'excentrement ont été considérées lors de cette campagne expérimentale : 0 mm (noté série A), 17 mm (correspondant à  $e = h/12$  où  $h = 200$  mm est l'épaisseur du trumeau, série B), 33 mm ( $e = h/6$ , série C), et 50 mm ( $e = h/4$ , série D). On notera que seules les trois premières valeurs d'excentrement sont acceptées par l'Eurocode 6 [1], qui considère que l'excentrement du chargement d'un mur porteur doit rester inférieur à  $e = h/6$ . Par ailleurs, deux essais plus exploratoires ont été réalisés avec des excentrements respectifs de  $e = 24$  mm  $\approx h/8$  (essai E) et  $e = 10$  mm =  $h/20$  (essai F).

### 3 Résultats

#### 3.1 Phase dite "élastique"

La figure 8.10 (a) représente, à titre d'exemple, les courbes force-déplacement mesurées par les capteurs de déplacement LVDT 1 à 4 pendant la phase élastique sur le trumeau A4. On note qu'il y a, à l'issue du premier cycle de chargement, une déformation anélastique résiduelle importante.

FIGURE 8.10 – Force  $F$  en fonction du déplacement  $\delta$  mesuré par les capteurs LVDT pour le trumeau A4 (a) à partir du début de la phase élastique et (b) à partir du deuxième cycle de charge-décharge

Si on réinitialise le déplacement à l'issue de ce premier cycle (figure 8.10 (b)), on observe

sur les cycles suivants une légère hystérésis et une faible accumulation de déformations anélastiques.

On rappelle que, pour tous les trumeaux, la phase élastique est réalisée avec un chargement centré. Sur l'ensemble des trumeaux, trois cas de figure principaux ont été rencontrés : le trumeau semble à peu près centré (figure 8.11 (a), correspondant à l'essai C1), le trumeau semble un peu excentré (figure 8.11 (b), essai C3), ou le trumeau est centré d'un côté mais pas de l'autre (figure 8.10 (b), essai A4). Néanmoins, les déplacements semblent trop faibles (et inférieurs ou de l'ordre de grandeur de l'incertitude des capteurs qui les mesurent, qui est comprise entre 0,075 et 0,5 mm selon les capteurs) pour envisager un réglage et un recentrage du trumeau lors de la phase élastique.

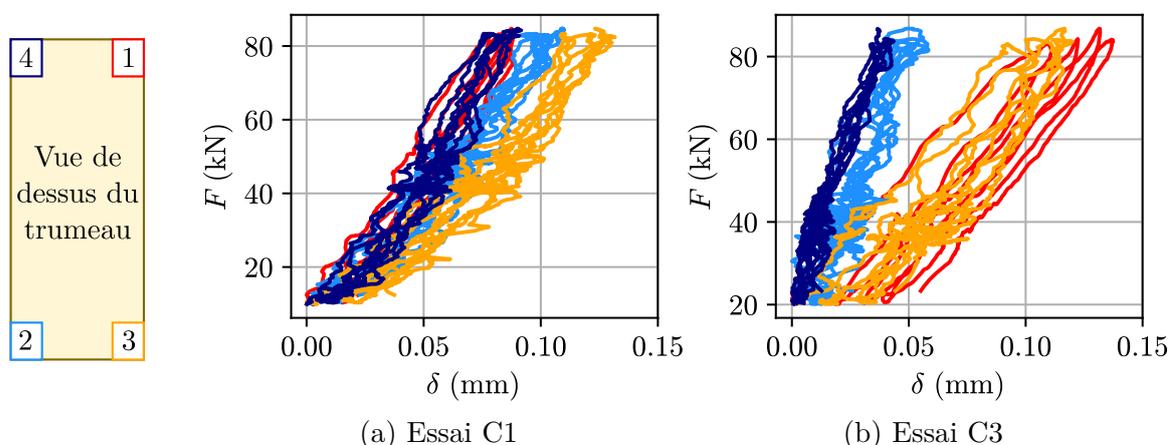


FIGURE 8.11 – Force  $F$  en fonction du déplacement  $\delta$  mesuré par les capteurs LVDT 1 à 4 à partir du deuxième cycle de charge-décharge

### 3.2 Résultats globaux : charges de ruine

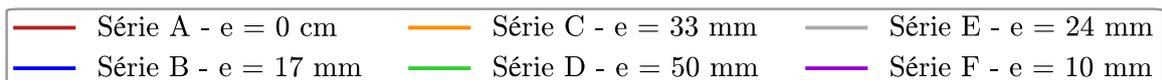
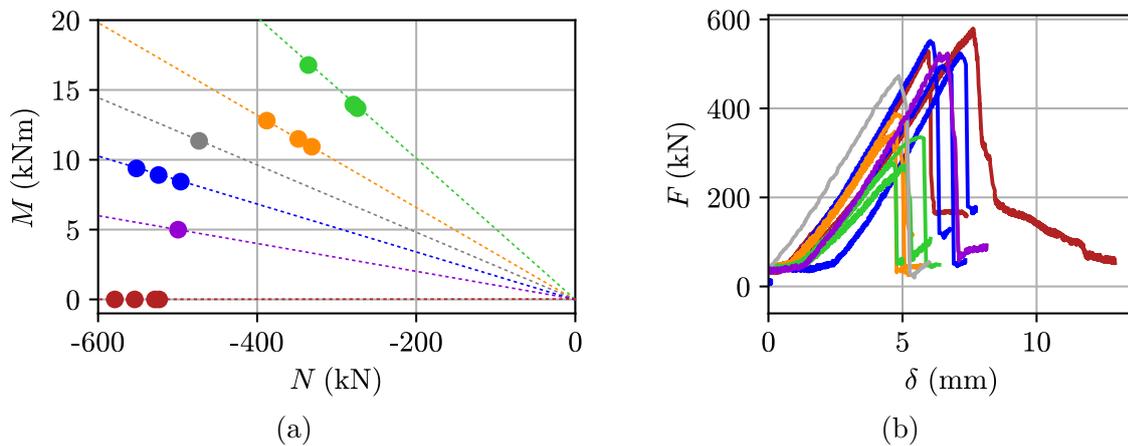
Le tableau 8.2 récapitule les charges de ruine obtenues pour les différentes valeurs d'excentrement.

La figure 8.12 (a) représente ces chargements dans l'espace des efforts normaux  $N$  et moments fléchissants  $M$ . Cette figure fait apparaître très clairement l'effet du moment fléchissant sur la résistance en compression du trumeau. Par exemple, si la charge est excentrée de  $h/6$  (maximum recommandé par l'Eurocode 6 [1]), le chargement vertical causant la ruine du trumeau sera en moyenne 35 % plus faible que si cette charge est centrée.

La figure 8.12 (b) représente les courbes force-déplacement du vérin pour les essais considérés. Elle montre bien le caractère fragile en compression des trumeaux. On note également que le déplacement est quasiment linéaire jusqu'à la rupture.

TABLEAU 8.2 – Valeurs des charges de ruine atteintes pour les différentes séries

Excentrement :	0 mm	Excentrement :	17 mm	Excentrement :	33 mm
A1	579 kN	B1	552 kN	C1	331 kN
A2	529 kN	B2	496 kN	C2	348 kN
A3	554 kN	B3	524 kN	C3	387 kN
A4	523 kN				
Moyenne	546 kN		524 kN		355 kN
CoV	4,6 %		5,3 %		8,0 %
Excentrement :	50 mm	Excentrement :	24 mm	Excentrement :	10 mm
D1	335 kN	E	473 kN	F	499 kN
D2	274 kN				
D3	279 kN				
Moyenne	296 kN				
CoV	11,4 %				


 FIGURE 8.12 – Charges de ruine dans le plan  $(N, M)$  (a) et courbes force  $F$  - déplacement du vérin  $\delta$  pour l'ensemble des essais (b)

### 3.3 Résultats détaillés : essais centrés

#### 3.3.1 Comportement global

La figure 8.13 montre l'évolution du déplacement vertical mesuré par chacun des quatre capteurs LVDT situés dans les coins du trumeau, pour les essais A2 et A4 qui ont été jugés représentatifs des essais centrés. Les comportements observés sur les deux autres essais étaient très similaires. Ce déplacement nous donne accès au comportement global du trumeau, puisqu'il tient compte à la fois des déformations dans la pierre et dans le mortier.

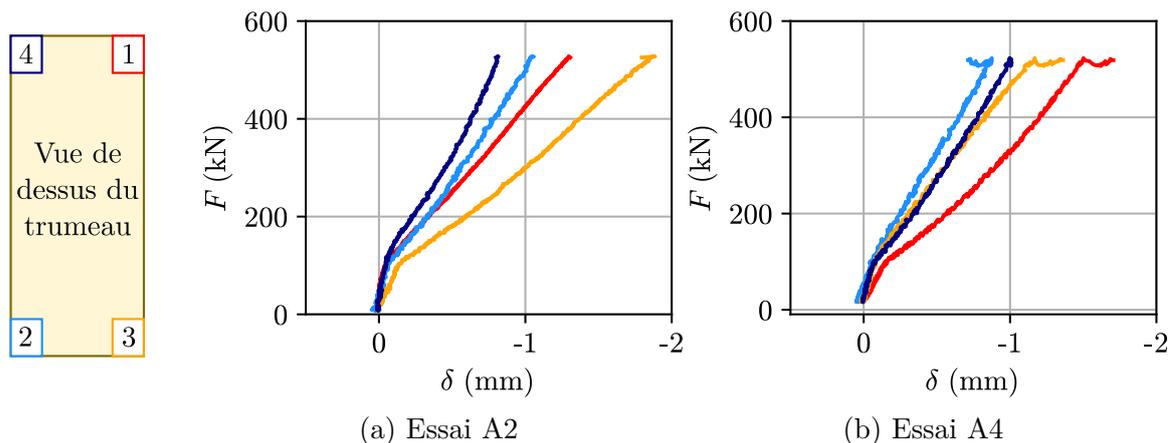


FIGURE 8.13 – Déplacements "macroscopiques"  $\delta$  mesurés par les capteurs LVDT 1 à 4

Il apparait ainsi que, même pour un essai géométriquement centré, il existe des différences dans les déplacements mesurés de part et d'autres du trumeau. Nous reviendrons sur ce constat lors de l'étude des déformations et déplacements locaux.

On note également une discontinuité de la pente de la courbe à environ 80 kN. Cette charge correspond à la charge maximale des cycles "élastiques" et, en combinant cette observation avec celles proposées dans la sous-partie 3.1, on en déduit que le mortier se plastifie pour des charges inférieures à 15 % de la charge de rupture du trumeau.

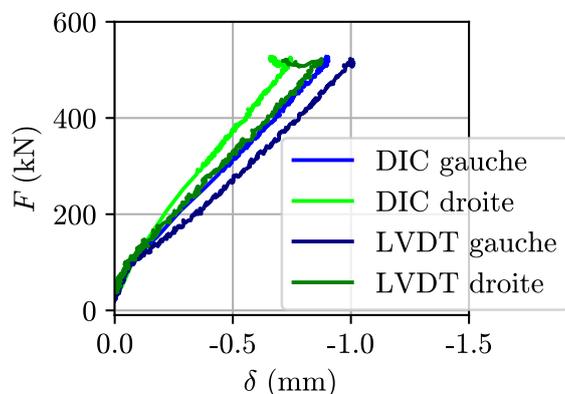


FIGURE 8.14 – Comparaison entre les mesures de corrélation d'images et celles des LVDT sur la face "comprimée"

La figure 8.14 compare le déplacement mesuré par les capteurs LVDT au déplacement entre les deux points d'accroche des capteurs mesuré par corrélation d'images. Les résultats sont proches, ce qui permet de s'assurer de la bonne précision des deux systèmes de mesure. Les sources de différence peuvent provenir du placement des capteurs LVDT et de leur précision.

A partir de la corrélation d'images, on peut également estimer le module d'élasticité global du trumeau. Pour ce faire, on détermine le déplacement relatif entre les deux points représentés sur la figure 8.15 (a), situés sur la tranche du trumeau. La figure 8.15 (b) donne l'évolution de ce déplacement relatif en fonction du chargement pour les trumeaux

A2 et A4, les mesures n'ayant pas pu être réalisées sur les deux autres trumeaux. D'après ces mesures, on obtient un module d'élasticité apparent de l'ordre de 1 à 1,5 GPa. Les mesures des LVDT 1 à 4 ne permettent pas de remonter à ce module d'élasticité apparent car, pour des raisons pratiques d'installation, les capteurs ne prennent pas en compte toute la hauteur du trumeau.

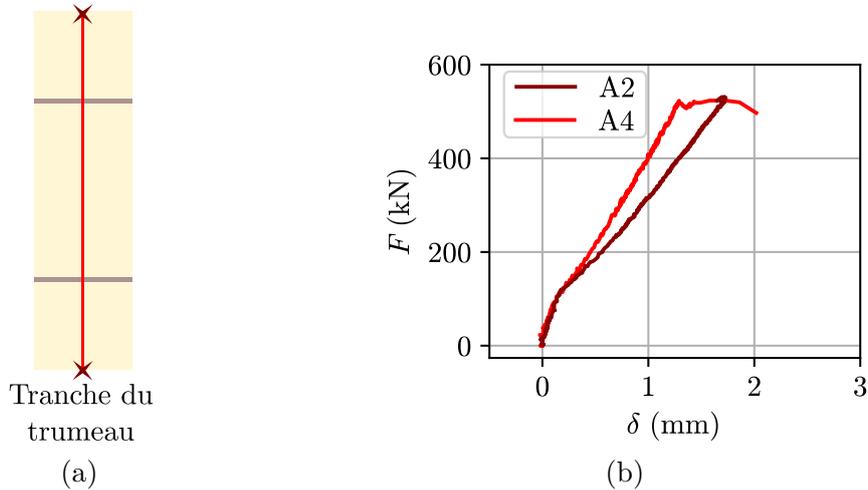


FIGURE 8.15 – Déplacement relatif du haut du trumeau par rapport au bas du trumeau, mesuré par corrélation d'images sur la tranche des trumeaux

### 3.3.2 Déformations locales

La figure 8.16 représente l'évolution des déplacements mesurés par les capteurs LVDT 1 et 3, ainsi que par les deux capteurs installés sur les joints horizontaux inférieur et supérieur. La somme des déplacements mesurés par ces deux capteurs, correspondant à la contribution des joints horizontaux au déplacement vertical total, est également représentée. Il apparaît que les joints horizontaux contribuent à peu près au tiers des déplacements verticaux du trumeau.

Sur l'autre face, on peut obtenir la déformation des joints par corrélation d'images. La figure 8.17 représente, côte-à-côte, les déplacements "macroscopiques" mesurés par les LVDT 1 à 4, et les déplacements relatifs mesurés au niveau des joints. Il apparaît que ces derniers sont plus faibles du côté des LVDT 2 et 4, qui mesurent également un déplacement macroscopique plus faible, que du côté des LVDT 1 et 3. Les déplacements différentiels pourraient donc provenir en partie d'une hétérogénéité du comportement des joints.

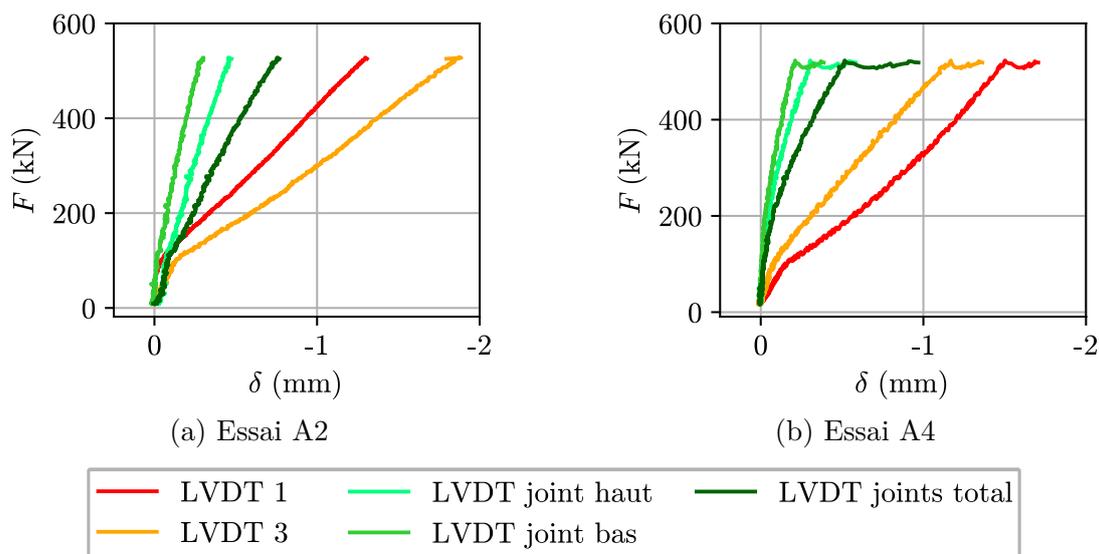
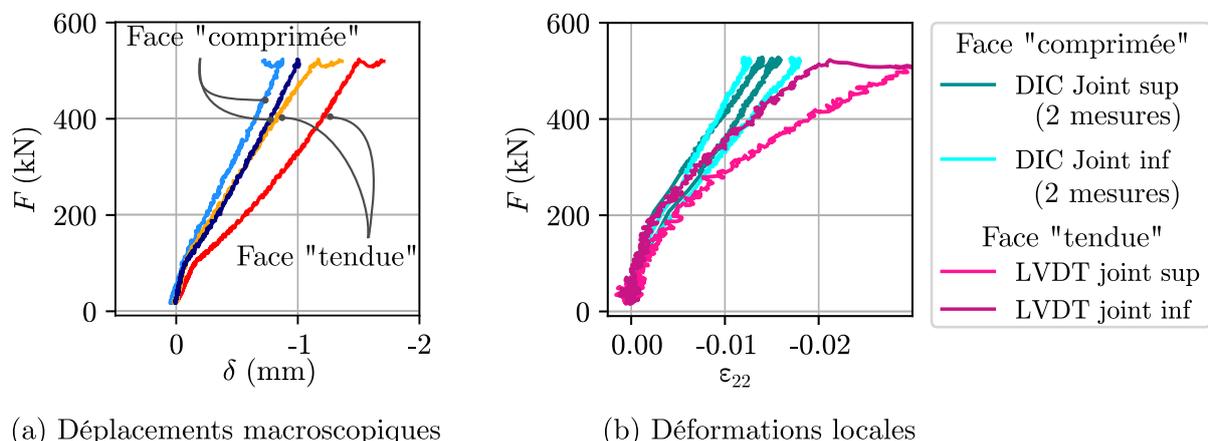
FIGURE 8.16 – Déplacements  $\delta$  mesurés par les capteurs LVDT de la face "tendue"

FIGURE 8.17 – Comparaison des déplacements macroscopiques obtenus par les capteurs LVDT 1 à 4 et les déformations obtenues par les capteurs LVDT positionnés sur les joints ou par corrélation d'images

L'analyse de la corrélation d'images sur la tranche permet de remonter à l'allure de la déformation verticale  $\epsilon_{22}$  locale. La figure 8.18 représente cette déformation, pour différents niveaux de chargement, sur trois lignes horizontales : L0 au milieu du bloc central, L1 dans le joint supérieur et L2 dans le joint inférieur. Les déformations dans les blocs inférieur et supérieur sont davantage perturbées par des effets de bord (malgré la présence des appuis anti-fretage) et sont donc moins exploitables. Il apparaît alors que, pour un même niveau de chargement, les déformations dans le mortier sont environ 15 fois supérieures aux déformations dans la pierre.

A partir des mesures de déformation verticale par corrélation d'images et des LVDT positionnés sur les joints, on peut retrouver un module d'élasticité in-situ pour la pierre et le mortier. Selon le niveau de chargement et la méthode de détermination, on obtient des valeurs de l'ordre de  $E_{pierre} = 4 - 6$  GPa et  $E_{mortier} = 0,1 - 0,4$  GPa.

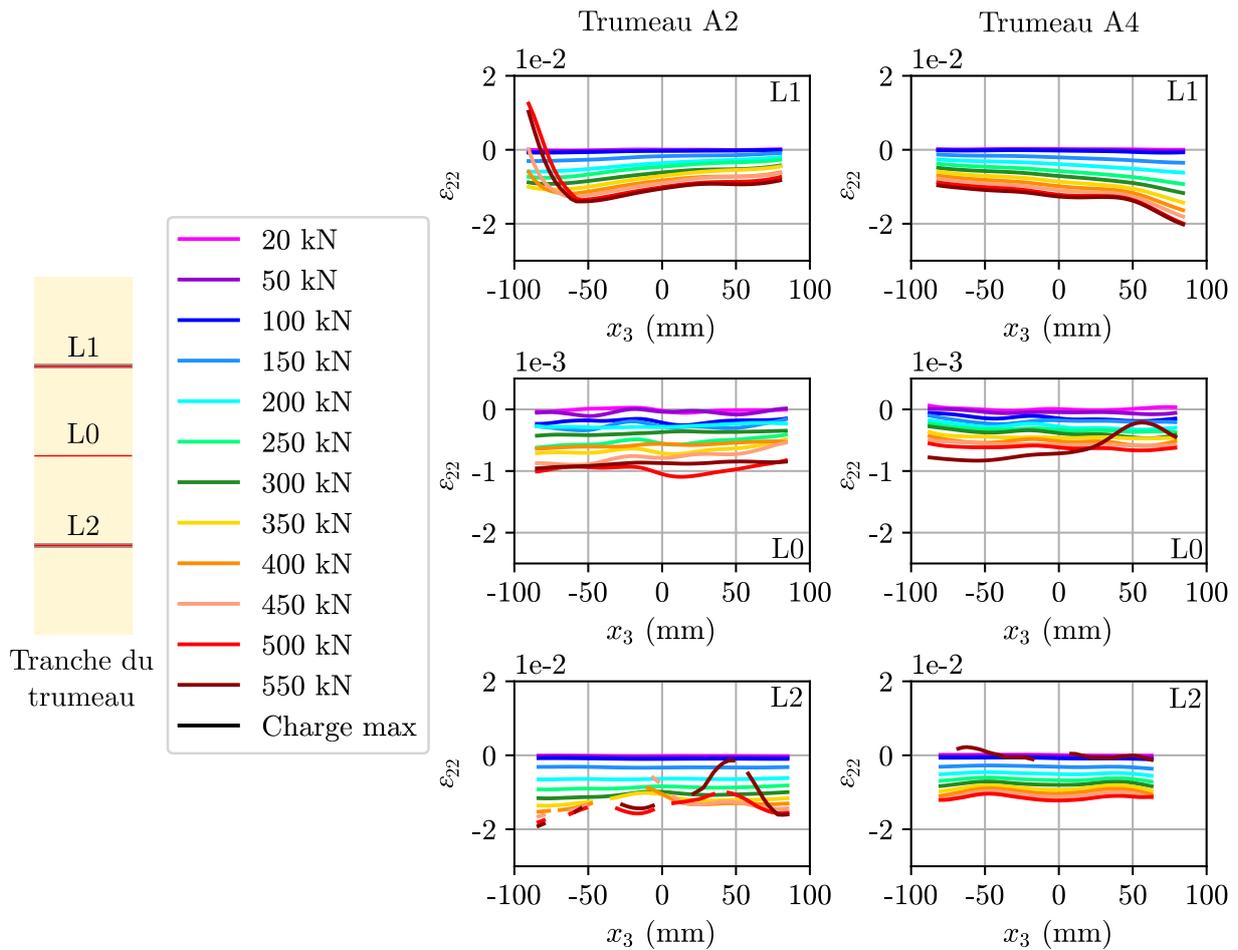


FIGURE 8.18 – Déformations verticales  $\varepsilon_{22}$  pour différents niveaux de chargement, dans la pierre (ligne L0) et dans le mortier (lignes L1 et L2)

### 3.3.3 Mécanisme de rupture

La figure 8.19 montre quelques photos ou images extraites de la corrélation d'images juste après la rupture du trumeau.

Sur la tranche, les fissures s'initient généralement dans la pierre et de manière verticale ou légèrement oblique. Elles se propagent ensuite verticalement au travers des joints. Finalement, le mécanisme de rupture est une sorte d'ouverture horizontale du trumeau. Sur la face, le joint horizontal s'ouvre légèrement et des fissures verticales et obliques se propagent dans la pierre au moment de la rupture.

On note également que, pour un chargement supérieur à 75 % de la charge de rupture environ, le mortier des joints horizontaux sort du joint, complètement écrasé (voir figure 8.20). Néanmoins, le chargement continue d'augmenter et n'atteint pas de plateau comme ce serait le cas si le mortier rompait en compression hydrostatique. Le mécanisme de rupture est donc bien un mécanisme global, intéressant l'ensemble du trumeau, et non pas une simple rupture en compression du mortier.

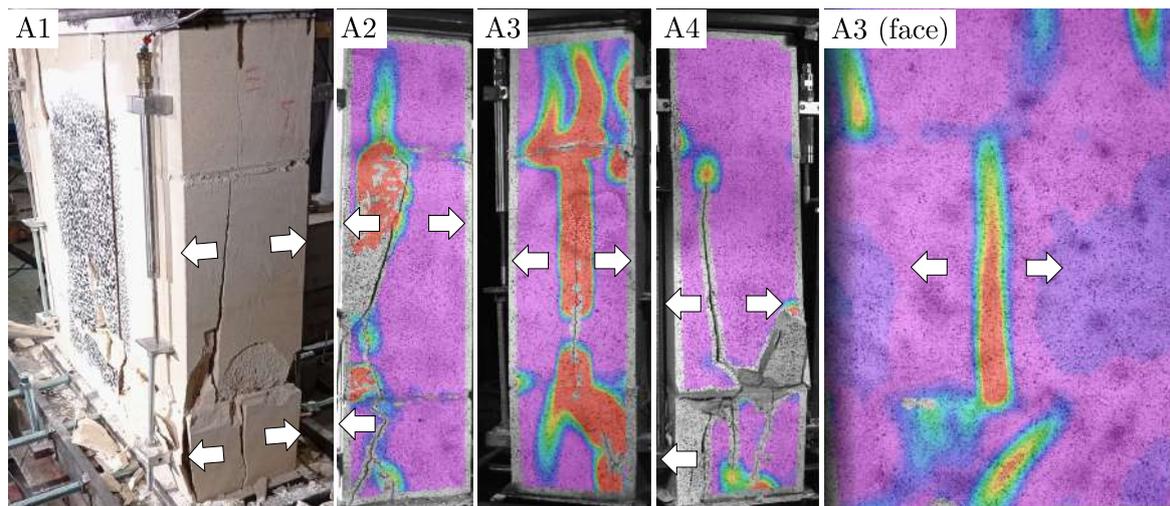


FIGURE 8.19 – Mécanismes de ruine observés pour les trumeaux chargés de manière centrée (Les flèches blanches représentent le déplacement horizontal des blocs)



FIGURE 8.20 – Rupture du bord des joints de mortier

### 3.4 Résultats détaillés : essais avec excentrement

Par souci de concision, nous n'aborderons dans cette partie que les tendances générales qui se sont dégagées des essais avec chargement excentrés, en considérant un ou deux essais représentatifs pour chaque valeur d'excentrement. L'essai B2 (resp. D3) est considéré représentatif de la série B (resp. D). Pour la série C ( $e = h/6$ ), deux profils différents se dégagent : un pour les essais C1 (qui sera considéré comme représentatif) et C2, et un autre pour l'essai C3.

#### 3.4.1 Comportement global

La figure 8.21 regroupe les déplacements mesurés par les capteurs LVDT 1 à 4 pour les différents excentrements considérés.

D'après ces figures, on peut noter que pour un excentrement  $e = h/12$  les quatre capteurs enregistrent une contraction verticale. L'excentrement  $e = h/6$  semble être un "point de bascule" : on retrouve un profil de déplacement pour lequel les capteurs 1 et 3 enregistrent une extension, tandis que les capteurs 2 et 4 enregistrent une contraction.

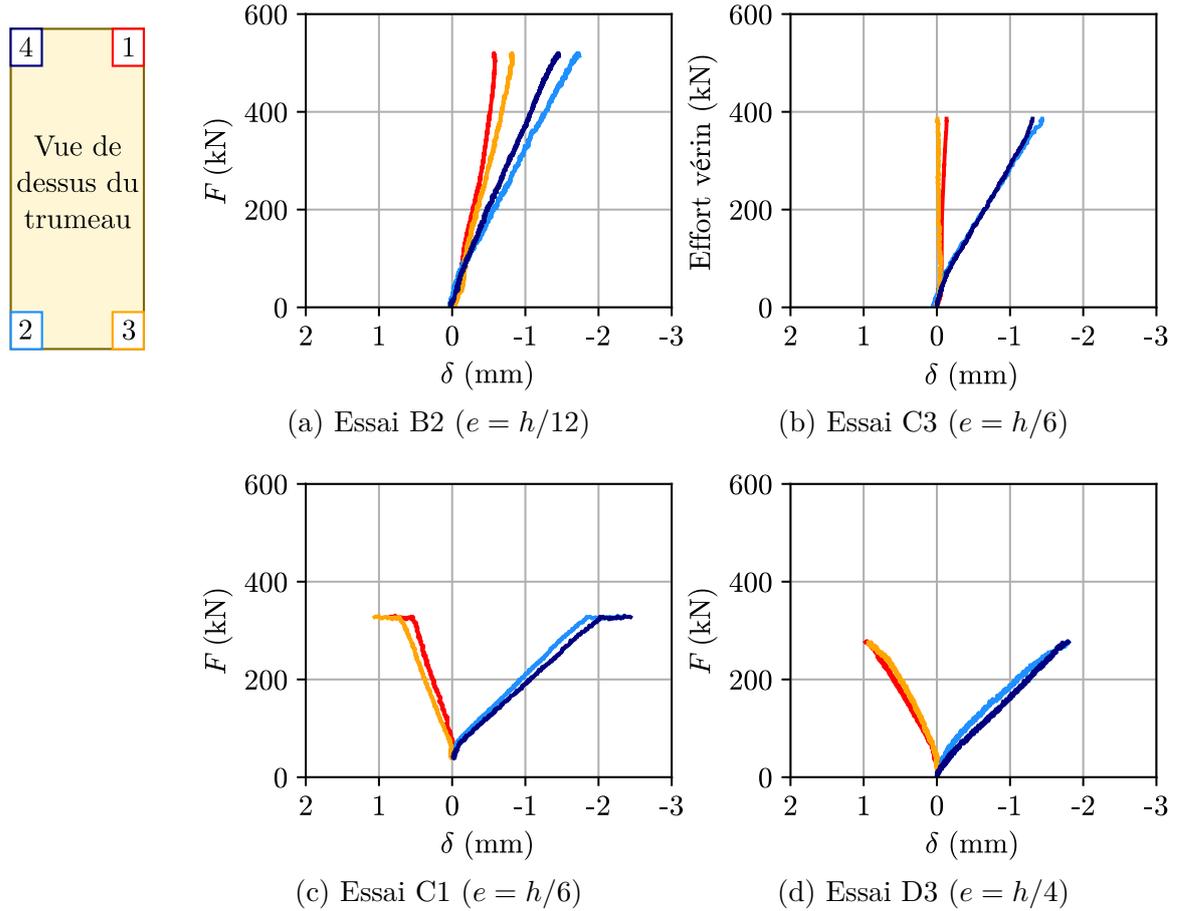


FIGURE 8.21 – Déplacement macroscopique  $\delta$  mesuré par les capteurs LVDT 1 à 4 pour différentes valeurs d'excentrement

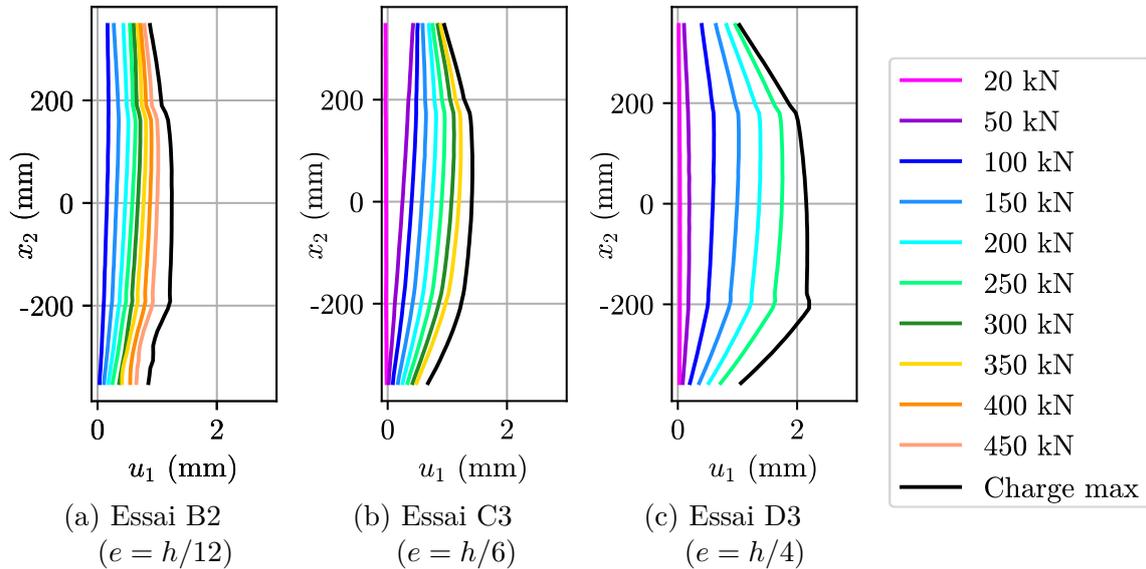


FIGURE 8.22 – Déplacement de l'axe médian du trumeau (représenté sur la figure 8.15 (a)), visualisé par corrélation d'images sur la tranche

Enfin, pour un excentrement  $e = h/4$ , les capteurs 1 et 3 enregistrent une extension tandis que les capteurs 2 et 4 enregistrent toujours une contraction. Les extensions

observées au moment de la rupture augmentent avec l'excentrement de la charge, alors que la contraction observée est toujours de l'ordre de 1,5 à 2 mm.

La figure 8.22 présente le déplacement de l'axe médian du trumeau au cours de l'essai, observé par corrélation d'images sur sa tranche. On peut noter que, quel que soit l'excentrement, la pierre se déforme très peu et toute la déformation de courbure est localisée dans les joints. On note également que le trumeau a tendance à translater légèrement pendant l'essai, ce qui lui est permis par les appuis anti-fretage.

### 3.4.2 Déformations locales et lien micro-macro

La figure 8.23 regroupe les mesures des quatre capteurs LVDT instrumentant la face tendue. Pour la série B, tous ces capteurs enregistrent une contraction, tandis que pour les séries C et D, ils enregistrent une extension.

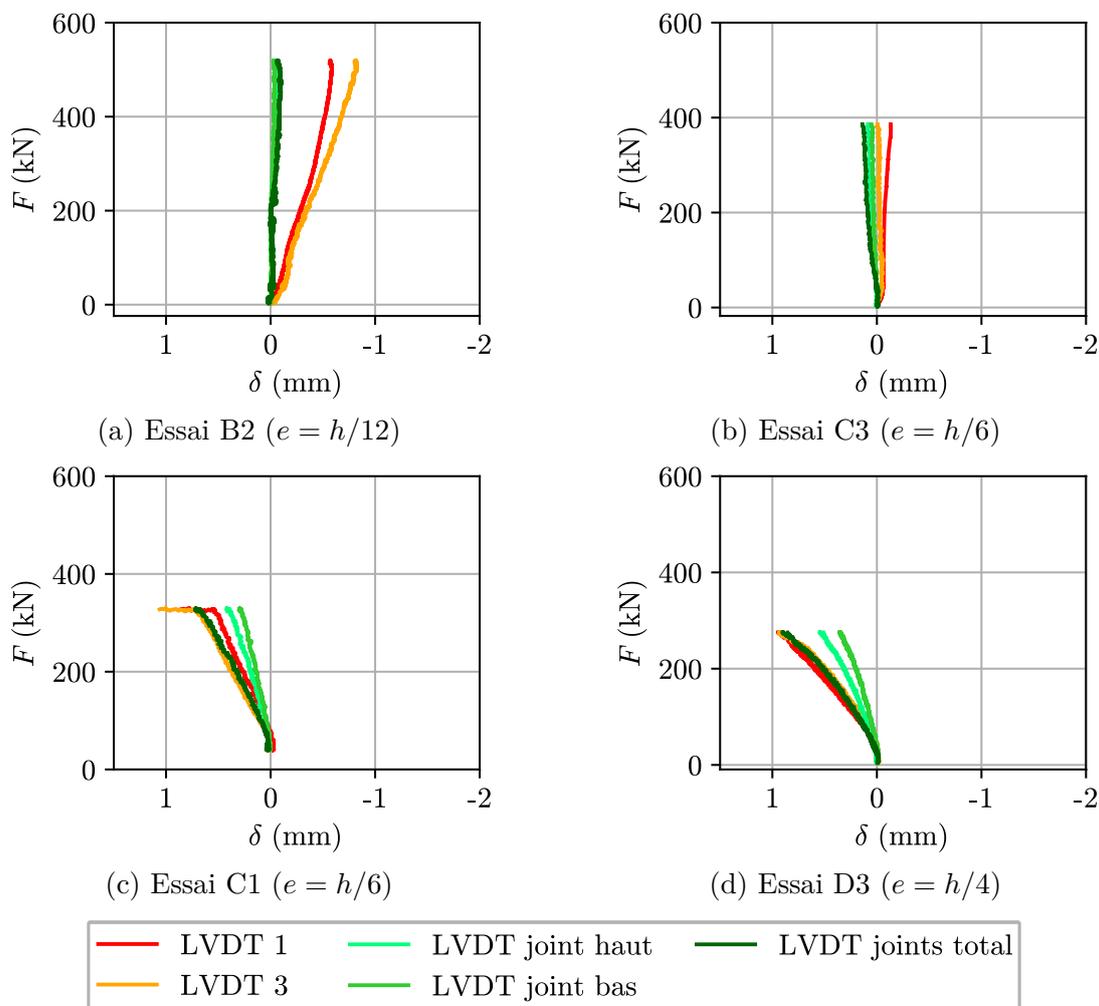


FIGURE 8.23 – Déplacements  $\delta$  mesurés par les capteurs LVDT positionnés sur la face "tendue" pour les essais excentrés

Pour les séries C et D, il est intéressant de noter que la somme des ouvertures des joints horizontaux est très proche de la valeur du déplacement macroscopique au niveau de la face. On en déduit donc que l'extension est très majoritairement due à l'ouverture des joints, et très peu à une extension dans la pierre.

La figure 8.24 donne les déformations verticales  $\varepsilon_{22}$  pour une section représentative dans la pierre et dans le mortier, pour les différents excentremets considérés. La même mesure pour un essai centré est également rappelée pour comparaison.

Il est intéressant de noter que pour les séries C (excentrement  $e = h/6$ ) et D (excentrement  $e = h/4$ ), une partie de la section est en extension. Pour les séries A (excentrement  $e = 0$ ) et B (excentrement  $e = h/12$ ), en revanche, toute la section est comprimée.

Il apparait également que le point de passage d'une section comprimée à une section tendue se situe plus près du plan médian du trumeau lorsqu'on considère une section dans le joint que lorsqu'on considère une section dans le bloc.

Les mesures de la série C sont particulièrement intéressantes car elles correspondent à un cas limite de l'Eurocode 6 [1]. En effet, si on considère un mur linéaire, élastique et homogène, une section du mur reste entièrement comprimée jusqu'à un excentrement  $e = h/6$ . Nous voyons ici que, pour un tel excentrement, plusieurs facteurs dont la plastification du mortier et l'hétérogénéité du trumeau conduisent à la présence de zones tendues.

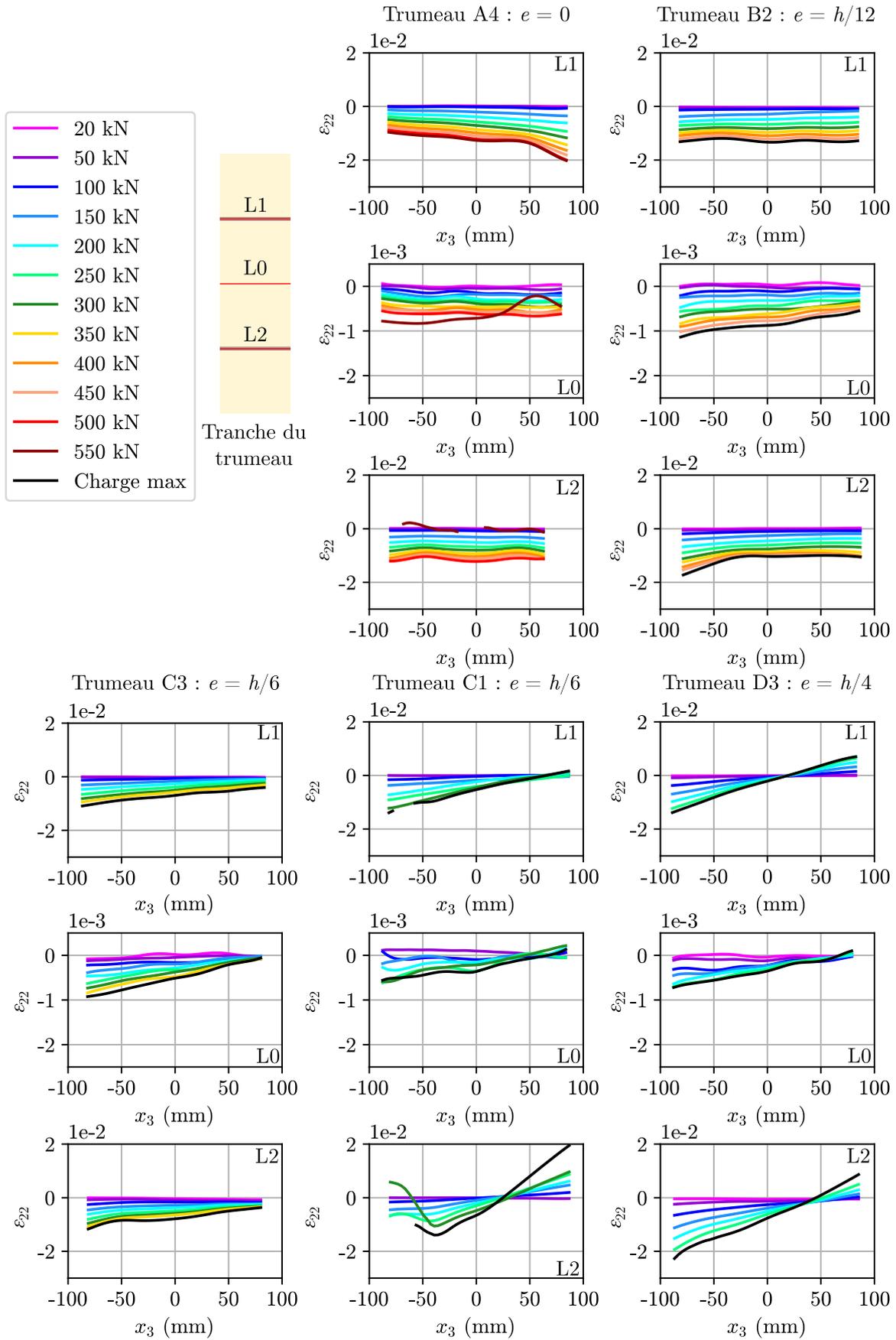


FIGURE 8.24 – Déformations verticales  $\varepsilon_{22}$  pour différents niveaux de chargement et différents excentrement, dans la pierre (ligne L0) et dans le mortier (lignes L1 et L2)

### 3.4.3 Mécanisme de ruine

Les figures 8.25 à 8.28 montrent quelques mécanismes de ruine pour les séries B, C et D.

Ces mécanismes de ruine peuvent être regroupés en plusieurs familles :

- **Rupture en compression locale et "délaminage"** (figure 8.25) : obtenu sur tous les essais excentrés, quel que soit l'excentrement de la charge, ce mode de rupture est caractéristique d'une rupture en compression localisée des blocs.
- **Fissuration verticale globale** (figure 8.26 - concerne les trumeaux B1 et B2) : ce mode de rupture est obtenu exclusivement pour des excentrement inférieurs à  $e = h/12$ . Il semble donc n'apparaître que lorsque toute la section du trumeau est entièrement comprimée.
- **Fissuration verticale locale** (figure 8.27 - concerne les trumeaux B3, C1 à C3, D1 à D3) : ce mode de rupture apparaît principalement pour les essais avec un excentrement supérieur à  $e = h/6$ , sur les blocs inférieur et supérieur, et est souvent couplé avec l'ouverture du joint entre le bloc où il se produit et le bloc du milieu.
- **Rupture en traction du mortier** (figure 8.28 (a) - concerne les trumeaux C1 et C2, D1 et D3) et **Rupture en traction à l'interface entre la pierre et le joint** (figure 8.28 (b) - concerne les trumeaux B1, B2, C3, D2) : chacun de ces modes de rupture est retrouvé sur quatre trumeaux. Il semble donc que le mortier et l'interface pierre-mortier aient des résistances proches.
- **Rupture en traction de la pierre** (figure 8.29 - concerne les trumeaux B2 et B3) : ce mode de rupture se produit assez rarement, et n'a été observé que pour deux essais de la série B



FIGURE 8.25 – Rupture en compression/délaminage de la pierre

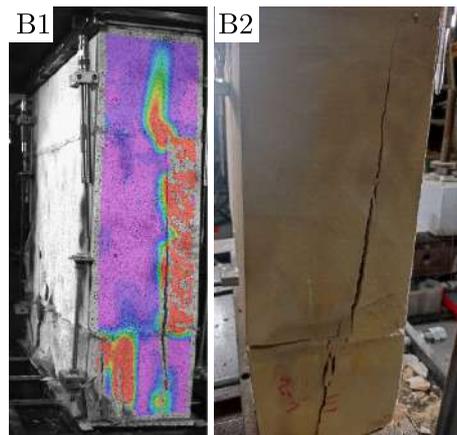


FIGURE 8.26 – Fissuration verticale globale

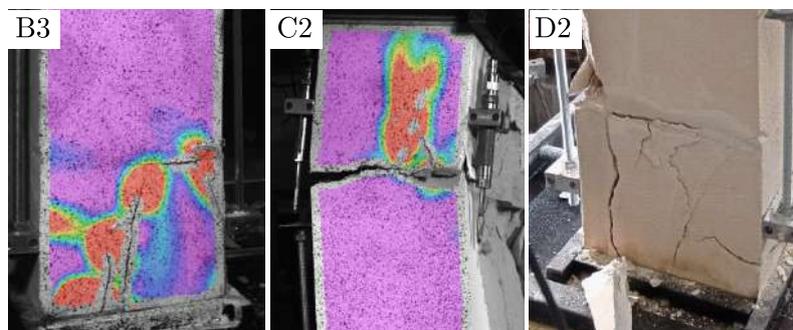


FIGURE 8.27 – Rupture avec une fissuration verticale locale sur la tranche



FIGURE 8.28 – (a) Rupture de l'interface pierre mortier ; (b) Rupture du mortier en traction



FIGURE 8.29 – Rupture par fissuration de la pierre

### 3.5 Remarques finales

En conclusion, cette campagne expérimentale a montré que le mortier utilisé avait un module d'élasticité apparent bien plus faible que la pierre, et que malgré sa faible fraction volumique, il influençait beaucoup les déformations du trumeau. En compression, un tiers des déplacements verticaux sont dus au mortier, alors que celui-ci ne représente que 3 % de la hauteur du trumeau. Par ailleurs, même avec un montage et un positionnement minutieux de la maquette, il existe de petites différences de déplacement entre ses quatre arêtes verticales sous chargement centré.

En ce qui concerne la rupture des trumeaux, il apparaît que l'excentrement de la charge verticale a une forte influence sur la valeur de la charge de ruine des trumeaux. Quel que soit l'excentrement appliqué, la rupture obtenue est fragile. On observe cependant deux types de mécanisme de rupture principaux : un mécanisme pour les excentrement inférieurs à 17 mm ( $h/12$ ), incluant un fendage global du trumeau, et un mécanisme pour les excentrement supérieurs à 33 mm ( $h/6$ ), consistant en une rupture en traction au niveau du joint (dans le mortier ou à l'interface pierre-mortier) et une rupture en compression plus locale au niveau des blocs. Il pourrait être intéressant de rapprocher ces modes de rupture du mode de rupture observé sur le mur testé dans le chapitre 2.

## 4 Comparaison des essais avec des modèles de calcul

### 4.1 Comparaison avec les règles de calcul de l'Eurocode 6 [1]

Pour comparer les essais présentés dans ce chapitre à l'approche proposée dans l'Eurocode 6 [1], on reprend le principe du calcul présenté dans le chapitre 2.

La résistance en compression de l'assemblage vaut :

$$f_c = K f_{c,b}^{0,7} f_{c,m}^{0,3} \quad (8.3)$$

avec, ici, une résistance en compression de la pierre valant  $f_{c,b} = 5,1$  MPa et une résistance en compression du mortier valant  $f_{c,m} = 0,44$  MPa. Pour la pierre naturelle,  $K = 0,45$ . La résistance à la compression de l'assemblage vaut alors **1,1 MPa**.

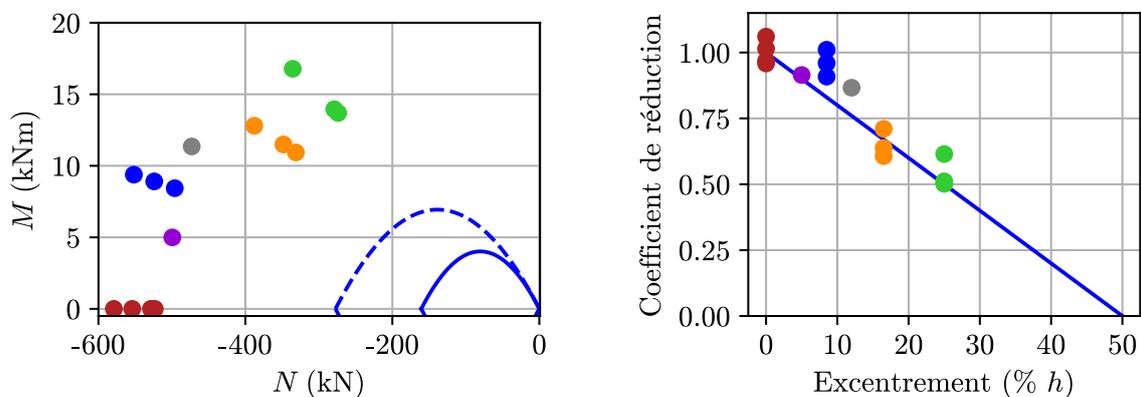
Dans un calcul simplifié de bureau d'étude, où l'on ne peut pas mesurer la résistance en compression du mortier, il serait admis de prendre une valeur forfaitaire de  $f_{c,m} = 2,5$  MPa. En effet, au regard du DTU 20.1 [2] (révision de 2020), la composition choisie pour le mortier est censée lui assurer une résistance supérieure à 2,5 MPa. La résistance à la compression de l'assemblage vaudrait alors **1,9 MPa**.

Par ailleurs, l’Eurocode 6 propose de prendre en compte l’excentrement des charges verticales au moyen d’un coefficient de réduction  $\phi$  à appliquer sur la résistance en compression centrée, et donné par la formule suivante (décroissance affine) :

$$\phi = 1 - \frac{2e}{h} \quad (8.4)$$

Un tel coefficient de réduction peut être justifié en modélisant le mur comme une plaque homogène, en déformations planes, sans résistance à la traction.

Les diagrammes d’interaction correspondant aux deux valeurs de résistance en compression du mortier sont donnés sur la figure 8.30 (a) sous la forme d’arcs de parabole. Il apparaît que, dans le cas présent, l’Eurocode 6 sous-estime assez largement la résistance en compression des trumeaux.



(a) Charges de ruine dans le plan  $(N, M)$  selon l’Eurocode 6 [1]      (b) Facteur de réduction selon l’Eurocode 6 [1]

● A : $e = 0$	● C : $e = 33$ mm	● E : $e = 24$ mm	— EC6 - $f_m = 0,4$ MPa
● B : $e = 17$ mm	● D : $e = 50$ mm	● F : $e = 10$ mm	- - - EC6 - $f_m = 2,5$ MPa

FIGURE 8.30 – Comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats de l’approche proposée dans l’Eurocode 6 [1]

La figure 8.30 (b) représente le facteur de réduction en fonction de l’excentrement. Pour les points expérimentaux, ce facteur de réduction est calculé par rapport à la valeur moyenne de résistance en compression centrée. D’après cette figure, le facteur de réduction de la résistance obtenu expérimentalement est bien en cohérence avec l’Eurocode 6 [1].

## 4.2 Modélisation par le Calcul à la rupture

Comme évoqué en introduction, l’objectif de cette campagne expérimentale était principalement d’évaluer la différence entre les résultats d’essais et ceux obtenus par la modélisation en Calcul à la rupture. Les calculs proposés ici sont des calculs directs, et non pas par homogénéisation, et mettent en œuvre l’approche cinématique.

### 4.2.1 Description du modèle de calcul

Le tableau 8.3 donne les propriétés de résistance des matériaux considérées pour cette modélisation. Au vu des résultats des essais de caractérisation obtenus dans le chapitre 2, on considère un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction pour la pierre. En revanche, compte-tenu des résultats expérimentaux présentés dans le paragraphe 2.2.2 concernant le mortier, un critère de Mohr-Coulomb classique semble ici plus représentatif.

TABLEAU 8.3 – Propriétés des matériaux considérées pour la modélisation par l’approche cinématique du Calcul à la rupture

	Cohésion $c$	Angle de frottement interne $\varphi$	Résistance en compression uniaxiale	Troncature en traction $f_c$
Pierre	1,47 MPa	30 °	5,1 MPa	1,1 MPa <sup>1</sup>
Mortier	0,14 MPa	25 °	0,44 MPa	/

Les dimensions considérées sont les mêmes que celles des trumeaux représentés sur la figure 8.1. Par symétrie, seul un quart du trumeau est modélisé. La géométrie, les conditions aux limites et les maillages utilisés sont représentés sur la figure 8.31. Sur la figure 8.31 (a), les trois faces sur lesquelles aucune condition aux limites n’est indiquée sont libres d’efforts.

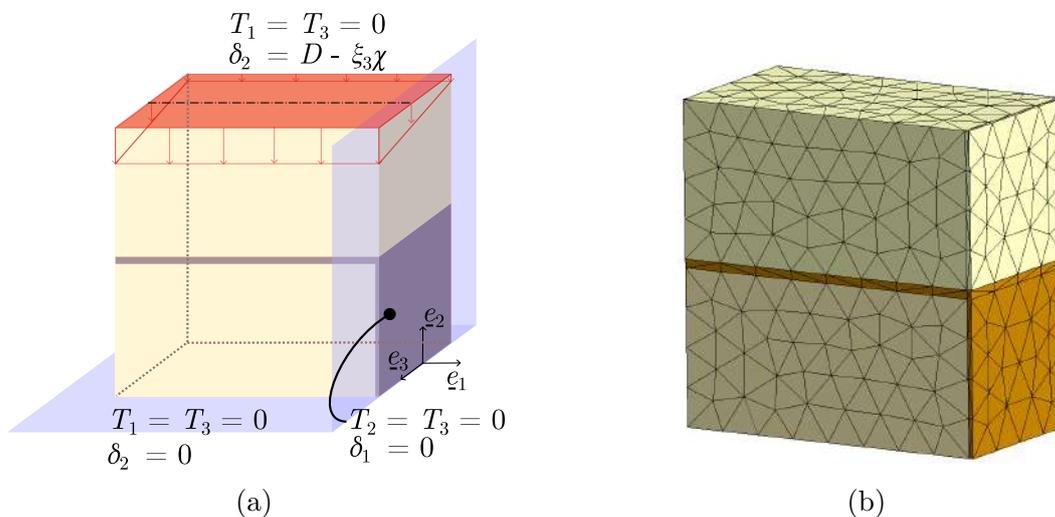


FIGURE 8.31 – Géométrie (a), conditions aux limites (a) et maillage du problème de Calcul à la rupture considéré

### 4.2.2 Résultats

La figure 8.32 représente le diagramme d’interaction obtenu par l’approche cinématique du Calcul à la rupture, tandis que le tableau 8.4 donne les écarts obtenus entre la charge

1. Correspond à la résistance à la traction mesurée dans le chapitre 2 (voir annexe A)

#### 4. Comparaison des essais avec des modèles de calcul

moyenne pour chaque série et le résultat du Calcul à la rupture. L'écart relatif moyen est de 28 % sur l'ensemble des essais.

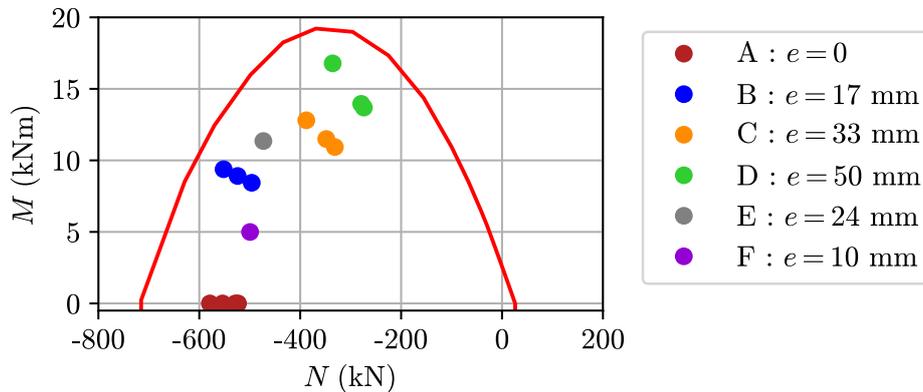


FIGURE 8.32 – Charges de ruine dans le plan  $(N, M)$  obtenues par l'approche cinématique du Calcul à la rupture

TABLEAU 8.4 – Comparaison des résultats expérimentaux avec ceux de la modélisation par l'approche cinématique du Calcul à la rupture

Série	A	B	C	D	E	F
Valeur moyenne expérimentale (kN)	546	524	355	296	473	499
Modélisation (kN)	715	605	479	391	557	650
Ecart relatif	31 %	15 %	35 %	32 %	18 %	31 %

La figure 8.33 représente les différents mécanismes (virtuels) de ruine obtenus pour les séries A à D. Dans ces mécanismes de ruine, on voit bien l'ouverture progressive du joint horizontal lorsque l'excentrement augmente. On note également que cette ouverture apparaît même pour un excentrement  $e = h/12$  (série B), alors qu'elle n'apparaissait pas expérimentalement pour cette valeur d'excentrement. Ces mécanismes virtuels sont plutôt cohérents avec les mécanismes de ruine réels décrits dans le paragraphe 3.4.3.

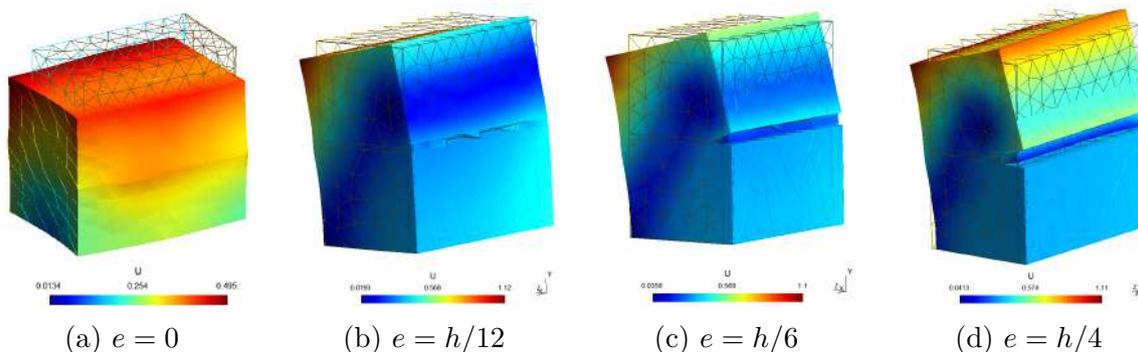


FIGURE 8.33 – Mécanismes de rupture optimaux par le Calcul à la rupture (Les couleurs représentent les isovaleurs de la norme du champ de vitesse virtuelle optimale)

### 4.2.3 Discussion sur les paramètres d'entrée du modèle

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 6, la résistance en compression  $f_{c,b}$  de la pierre a une influence bien plus grande que celle du mortier  $f_{c,m}$  sur la résistance en compression de l'assemblage. Or celle-ci est testée sur des éprouvettes d'élanement 1, selon la norme NF EN 772-1[102]. Les plateaux de la presse utilisée pour évaluer cette résistance en compression n'étant pas parfaitement lisses, l'éprouvette n'est pas dans un état de compression uniaxiale, que nous recherchons pour déterminer les paramètres du modèle de Mohr-Coulomb. Cet essai tend donc à surestimer la valeur de la résistance en compression utilisée dans le modèle.

Toujours selon cette norme, il faudrait multiplier par un facteur allant de 1,15 à 1,35 la résistance d'une éprouvette d'élanement 2 pour obtenir la résistance d'une éprouvette d'élanement 1. En adaptant la valeur de la cohésion de la pierre, on trouve les diagrammes d'interaction donnés sur la figure 8.34, qui sont beaucoup plus en accord avec les données expérimentales.

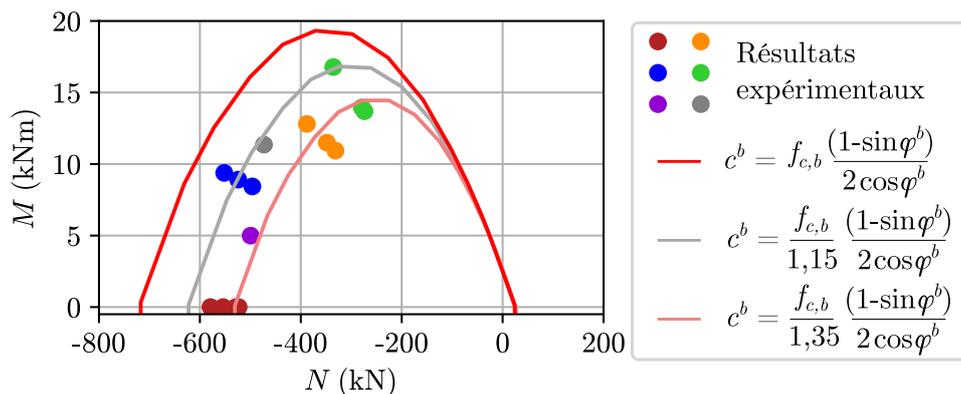


FIGURE 8.34 – Charges de ruine dans le plan  $(N, M)$  avec une résistance en compression corrigée

Il semble donc indispensable de baser le modèle sur la résistance en compression uniaxiale de la pierre, et non pas sur sa résistance en compression selon la norme NF EN 772-1 [102], qui est plus élevée.

## 5 Conclusion

La campagne expérimentale présentée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence la réduction de la capacité portante de trumeaux de maçonnerie lorsque la charge verticale qui leur est appliquée est excentrée par rapport à leur plan médian. Elle a également montré que les joints, malgré leur épaisseur très réduite, avaient un impact important sur la déformation globale du trumeau.

La comparaison des résultats obtenus avec ceux issus des méthodes de calcul de l'Eurocode 6 [1] a montré une bonne cohérence entre les facteurs de réduction de la capacité portante obtenus expérimentalement et ceux de la norme. En revanche, l'Eurocode 6 sous-estime largement (d'un facteur 3,4) la résistance en compression centrée du mur.

La comparaison des résultats expérimentaux avec la modélisation par l'approche cinématique par l'extérieur du Calcul à la rupture a montré que cette dernière surestimait les résultats expérimentaux de 28 % en moyenne. Cependant, la question des paramètres d'entrée du modèle et de leur détermination se pose. En particulier, la résistance en compression uniaxiale ne peut pas être déterminée en utilisant les éprouvettes cubiques de 10 cm de côté classiquement utilisées pour la détermination de la résistance en compression de la pierre. En se basant sur la résistance en compression obtenue sur des éprouvettes d'élanement au moins égal à 2, les résultats du Calcul à la rupture pourraient être bien plus proches des résultats expérimentaux.

\*      \*

      \*



# Chapitre 9

## Évaluation de la stabilité au feu du mur

**Résumé :** *Ce chapitre présente l'évaluation de la stabilité d'un mur en pierre massive exposé au feu. Ce mur est modélisé par une coque dans sa configuration déformée par le feu et dont le critère de résistance est altéré par le feu. La mise en œuvre numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture sur cette structure permet d'accéder à un majorant de la charge extrême pour un certain temps d'exposition au feu. L'originalité de la méthode proposée dans ce chapitre réside dans l'expression du critère de résistance sous sa forme semi-analytique telle que proposée dans le chapitre 5. A titre de perspective, la polyvalence de cette méthode est illustrée au travers d'un exemple classique de structure de maçonnerie.*

### Sommaire

---

<b>1</b>	<b>Introduction</b> . . . . .	<b>269</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème</b> . . . . .	<b>269</b>
2.1	Domaine des chargements potentiellement supportables : approche statique . . . . .	270
2.2	Domaine des chargements potentiellement supportables : approche cinématique . . . . .	271
2.3	Choix de la fonction d'appui homogénéisée . . . . .	273
<b>3</b>	<b>Formulation numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture</b> . . . . .	<b>275</b>
3.1	Discrétisation du problème et contraintes cinématiques . . . . .	275
3.2	Formulation numérique de l'approche cinématique . . . . .	278
<b>4</b>	<b>Exemple d'application</b> . . . . .	<b>280</b>
4.1	Présentation de l'exemple . . . . .	280
4.2	Mise en œuvre pratique du calcul . . . . .	281
4.3	Premiers résultats et comparaison expérimentale . . . . .	282
4.4	Étude paramétrique . . . . .	285

<b>5</b>	<b>Perspectives de l'approche proposée pour l'évaluation de la stabilité des ouvrages en maçonnerie . . . . .</b>	<b>291</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>293</b>

---

## 1 Introduction

Nous avons, dans la première partie de ce mémoire, noté que deux facteurs menaçaient la stabilité au feu d'un mur porteur : la courbure thermique et la dégradation des propriétés de résistance des matériaux avec la température. La deuxième partie de ce mémoire nous a permis de proposer une méthode d'homogénéisation thermoélastique permettant d'estimer la déformée thermomécanique d'un mur exposé au feu sur l'une de ses faces. Dans la troisième partie, nous avons exploré plusieurs approches pour évaluer le domaine de résistance de l'assemblage pierre-mortier, puis avons validé expérimentalement l'utilisation de l'approche par le Calcul à la rupture.

Dans cette dernière partie du mémoire, nous proposons d'évaluer la stabilité du mur de maçonnerie dans sa configuration déformée par le feu (déterminée dans le chapitre 2), en considérant un critère de résistance local altéré par le feu (déterminé dans le chapitre 5), dans le cadre du Calcul à la rupture. De telles approches ont été proposées par Pham et al. [180], Bleyer et al. [181] et Yang et al. [160] pour des murs en béton armé de grande hauteur exposés au feu. Cependant, le critère de résistance de la maçonnerie exposée au feu est bien plus complexe que celui du béton dans les mêmes conditions. L'enjeu de ce chapitre est donc de proposer une approche permettant la prise en compte d'un tel critère dans l'évaluation de la stabilité du mur. Compte-tenu des approches développées précédemment, notamment dans le chapitre 5, nous avons choisi de mettre en œuvre numériquement l'approche cinématique du Calcul à la rupture.

La partie 2 de ce chapitre décrit le problème de Calcul à la rupture considéré ainsi que la mise en œuvre de l'approche cinématique pour déterminer un majorant de la charge extrême potentiellement supportable par le mur exposé au feu. La formulation numérique de cette approche est présentée dans la partie 3. La partie 4 présente ensuite la mise en œuvre de cette approche pour évaluer la stabilité au feu du mur testé dans le chapitre 2. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux, puis une brève étude paramétrique propose quelques pistes de réflexion à destination de l'ingénieur. Enfin, à titre de perspectives et pour montrer la polyvalence de l'approche cinématique ainsi développée, la partie 5 propose son application à un tout autre exemple : celui d'un mur en brique sollicité en cisaillement.

## 2 Position du problème

Le mur dans sa configuration déformée par le feu peut être représenté par une coque modélisée géométriquement par la surface  $S$  dans le repère orthonormé  $(O ; \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ . La figure 9.1 représente une telle configuration. Comme dans les chapitres précédents, le mur est exposé au feu sur sa face  $x_3 < 0$ .

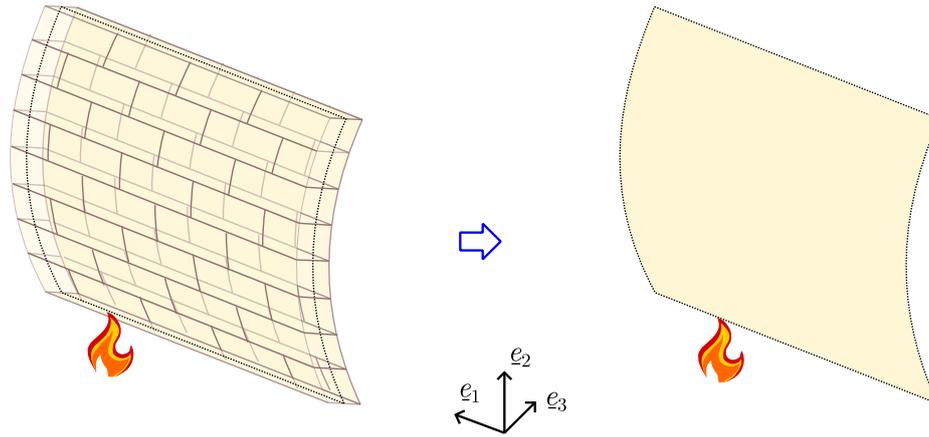


FIGURE 9.1 – Modélisation du mur dans sa configuration déformée par le feu par une coque

Par la suite, nous considérerons le cas d'une coque mince, de faible courbure. Pour faciliter la modélisation et nous ramener au formalisme des plaques, cette coque sera discrétisée en facettes planes. Chacune de ces facettes peut alors être modélisée comme une plaque de Kirchhoff-Love. Ce modèle a déjà été présenté dans le cadre de l'élasticité dans le chapitre 3. Dans la suite de cette section, nous en rappellerons donc seulement les points les plus importants.

## 2.1 Domaine des chargements potentiellement supportables : approche statique

Les efforts généralisés sont décrits en tout point de la plaque par le tenseur des efforts membranaires  $\underline{N}$ , le tenseur des moments fléchissants  $\underline{M}$  et le vecteurs des efforts de cisaillement  $\underline{V}$ .

On supposera par la suite que la plaque est infiniment résistante vis-à-vis de l'effort tranchant  $\underline{V}$ . Le domaine de résistance de la plaque  $G^M(\underline{x})$  au point  $\underline{x}$  de la plaque est donc un sous-domaine de l'espace  $(\underline{N}, \underline{M})$ , de dimension 6.

Dans le cas général, le mur est soumis à un nombre fini de paramètres de chargement, qui peuvent être regroupés dans un vecteur des paramètres de chargement, que l'on notera  $\underline{Q}$ .

Le domaine des chargements potentiellement supportables  $K$  est alors défini de la manière suivante (Salençon [115]) :

$$K = \left\{ \underline{Q} \mid \begin{array}{l} \exists (\underline{N}, \underline{M}) \text{ S.A. } \underline{Q} \\ \forall \underline{x}, (\underline{N}, \underline{M}) \in G^M(\underline{x}) \end{array} \right\} \quad (9.1)$$

Dans l'équation (9.1), une distribution d'efforts généralisés est dite statiquement admissible (noté "S.A.") avec un chargement  $\underline{Q}$  si elle vérifie les équations d'équilibre en termes d'efforts généralisés, la continuité du vecteur contrainte et du vecteur couples de contrainte ainsi que les conditions aux limites, qui ont déjà été présentées dans le chapitre 3.

L'application directe de cette définition constitue l'approche statique du Calcul à la rupture. Elle nécessite la connaissance préalable du domaine de résistance  $G^M(\underline{x})$ . Si ce domaine n'est pas connu de manière exacte, l'utilisation d'une approche par l'intérieur du domaine  $G^M(\underline{x})$  permet également de conserver le statut de minorant de l'approche statique.

## 2.2 Domaine des chargements potentiellement supportables : approche cinématique

La définition par voie statique du domaine des chargements potentiellement supportables présentée dans la sous-partie précédente peut être dualisée par le principe des puissances virtuelles.

Pour le modèle de coque considéré, la cinématique virtuelle en tout point est définie par une vitesse virtuelle  $\underline{U} = U_1 \underline{e}_1 + U_2 \underline{e}_2 + U_3 \underline{e}_3$  et par une vitesse de rotation virtuelle  $\dot{\underline{\Theta}} = \dot{\Theta}_1 \underline{e}_1 + \dot{\Theta}_2 \underline{e}_2 + \dot{\Theta}_3 \underline{e}_3$ .

Alternativement, il est possible de définir un repère local attaché à chaque facette de la coque. On note alors  $\underline{\nu}(\underline{x})$  la normale à la facette en un point  $\underline{x}$  donné,  $\underline{a}_1(\underline{x})$  un vecteur du plan de la facette appartenant au plan horizontal  $(\underline{e}_1, \underline{e}_3)$ , et  $\underline{a}_2(\underline{x})$  le vecteur du plan de la facette tel que  $(\underline{a}_1(\underline{x}), \underline{a}_2(\underline{x}), \underline{\nu}(\underline{x}))$  forme un trièdre orthonormé direct. Le choix de la direction de  $\underline{a}_1(\underline{x})$  permet de s'assurer qu'il s'agira bien de la direction des joints horizontaux, quelle que soit la courbure du mur (et donc l'orientation de la facette considérée).

Dans ce repère, la cinématique virtuelle est définie par :

- Une vitesse virtuelle dans le plan de la facette  $\underline{u} = u_1 \underline{a}_1 + u_2 \underline{a}_2$  ;
- Une vitesse virtuelle hors du plan de la facette  $\underline{u}_3 = u_3 \underline{\nu}$  ;
- Une vitesse de rotation virtuelle autour des vecteurs du plan de la facette  $\underline{\dot{\theta}} = \dot{\theta}_1 \underline{a}_1 + \dot{\theta}_2 \underline{a}_2$ . Par la suite, on utilisera plutôt le vecteur  $\underline{\dot{\beta}} = \underline{\nu} \wedge \underline{\dot{\theta}}$  ;
- Une vitesse de rotation virtuelle autour de la normale à la facette  $\underline{\dot{\vartheta}} = \dot{\vartheta} \underline{\nu}$ .

Les vitesses et vitesses de rotation virtuelles peuvent alors s'exprimer par  $\underline{U} = \underline{u} + \underline{u}_3$  et  $\dot{\underline{\Theta}} = \underline{\dot{\theta}} + \underline{\dot{\vartheta}}$ . La figure 9.2 résume les notations utilisées.

Les vitesses dans le plan sont reliées au taux de déformation virtuel macroscopique

par la relation  $\underline{D} = (\underline{\nabla}u + {}^T \underline{\nabla}u)/2$ , tandis que le vecteur  $\underline{\dot{\beta}}$  est relié au taux de courbure virtuelle macroscopique par la relation  $\underline{\dot{\chi}} = (\underline{\nabla}\dot{\beta} + {}^T \underline{\nabla}\dot{\beta})/2$ .

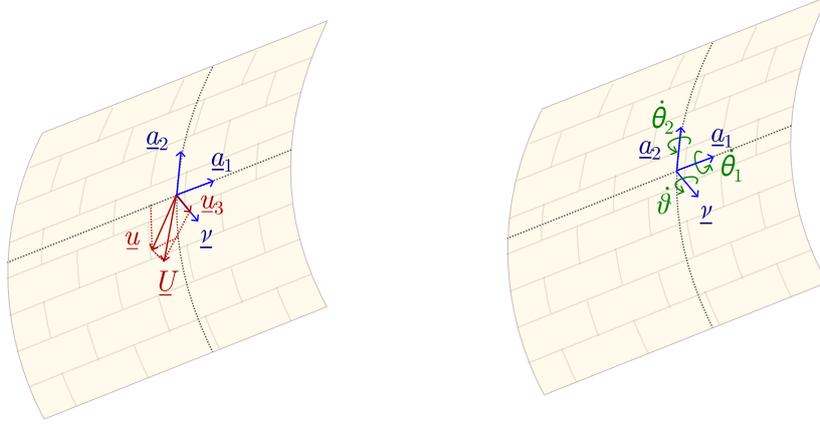


FIGURE 9.2 – Définition des vitesses et vitesses de rotation

Le principe des puissances virtuelles s'écrit :

$$P_e(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = \underline{Q} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = P_d(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) \quad (9.2)$$

où  $\underline{\dot{q}}$  représente le vecteur des paramètres cinématiques en dualité avec le vecteur des paramètres de chargement  $\underline{Q}$ .

Dans le cas particulier où un élément de plaque n'est pas soumis à des couples de torsion au niveau de ses conditions aux limites, la puissance virtuelle de déformation s'écrit (Salençon, 2018 [182]) :

$$P_d(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = \int_{\Omega} \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} dS + \int_{\Gamma_u} \underline{N} : ([\underline{u}] \otimes^s \underline{n}) dl + \int_{\Gamma_{\dot{\beta}}} \underline{M} : ([\underline{\dot{\beta}}] \otimes^s \underline{n}) dl \quad (9.3)$$

Si la première intégrale est tout à fait classique, et était déjà présente dans le cadre de la modélisation élastique, la deuxième, plus spécifique à l'approche par le Calcul à la rupture, permet d'intégrer l'effet de potentielles discontinuités de vitesse le long de courbes  $\Gamma_u$ , ou de discontinuités de vitesse de rotation le long de courbes  $\Gamma_{\dot{\beta}}$ , de vecteur tangent  $\underline{t}$  et de vecteur normal  $\underline{n}$ . On nommera ces courbes "charnières généralisées", ou tout simplement "charnières" par la suite.

L'expression (9.3) repose sur les hypothèses suivantes :

- L'hypothèse de Kirchhoff (correspondant ici à une résistance infinie à l'effort tranchant) se traduit par des taux de déformation virtuelle de cisaillement nuls, et donc, sur un élément, par :  $\underline{\dot{\beta}} = \underline{\nabla}u_3$ .
- En ce qui concerne les discontinuités, l'hypothèse de Kirchhoff se traduit par la nullité de la discontinuité de vitesse de flèche et par le lemme d'Hadamard :  $[[\underline{\nabla}u_3]] \cdot \underline{t} = 0$  où  $\underline{t}$  est la direction de la charnière. Ces charnières correspondent ici aux arêtes entre les facettes.

## 2. Position du problème

---

- Les déformations de torsion, notées  $\varpi = \dot{\vartheta} - \underline{a}_2 \cdot (\underline{\nabla} u + {}^T \underline{\nabla} u) \cdot \underline{a}_1 / 2$  sont supposées nulles dans chaque facette

Ces conditions, qui ne sont autre que des conditions de pertinence, devront être vérifiées lors de la résolution du problème.

La puissance résistante maximale s'écrit alors :

$$P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = \int_{\Omega} \Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) dS + \int_{\Gamma_u} \Pi^M(\llbracket \underline{u} \rrbracket, \underline{n}) dl + \int_{\Gamma_{\beta}} \Pi^M(\llbracket \underline{\dot{\beta}} \rrbracket, \underline{n}) dl \quad (9.4)$$

où  $\Pi^M$ , définie par l'équation (9.5) ci-dessous, désigne la fonction d'appui du critère de résistance macroscopique  $G^M(\underline{x})$  de l'élément de plaque.

$$\Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \sup_{(\underline{N}, \underline{M}) \in \mathbb{R}^6} \left\{ \underline{N} : \underline{D} + \underline{M} : \underline{\dot{\chi}} \mid (\underline{N}, \underline{M}) \in G^M(\underline{x}) \right\} \quad (9.5)$$

Cette définition de la fonction d'appui se généralise aux discontinuités de vitesse et de vitesse de rotation en posant :  $\underline{D} = \llbracket \underline{u} \rrbracket^s \otimes \underline{n}$  et  $\underline{\dot{\chi}} = \llbracket \underline{\dot{\beta}} \rrbracket^s \otimes \underline{n}$ .

Une condition nécessaire de stabilité vis-à-vis d'un chargement radial  $\underline{Q} = \lambda \tilde{\underline{Q}}$  s'écrit :

$$P_e(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = \lambda \tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}} \leq P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) \quad \forall (\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) \quad (9.6)$$

L'approche cinématique du Calcul à la rupture peut alors se mettre sous la forme du problème de minimisation suivant :

$$\min_{\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}} \lambda^c = \frac{P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}})}{\tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}})} \quad (9.7)$$

$$\text{s.c.} \quad \tilde{\underline{Q}} \cdot \underline{\dot{q}}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = 1$$

Comme dans les chapitres 4 et 6, ce problème de minimisation peut être résolu numériquement par la méthode des éléments finis. La problématique reste cependant d'évaluer la valeur de la fonction d'appui (9.5).

### 2.3 Choix de la fonction d'appui homogénéisée

Il existe plusieurs approches de changement d'échelle pour la détermination de la résistance d'une structure.

Une première approche consiste à formuler un critère de résistance macroscopique

à partir de résultats expérimentaux. Cette approche, en plus de nécessiter un nombre important d'essais, ne permet pas de s'assurer que le critère soit bien représentatif dans les six directions de l'espace.

Une deuxième approche consiste à approximer le critère de résistance obtenu par résolution d'un problème auxiliaire sur une cellule de base bien choisie. Concernant les murs de maçonnerie, on peut notamment citer les travaux de Milani et coauteurs [146] qui, après avoir déterminé le domaine de résistance plan de la maçonnerie à partir de la résolution d'un problème auxiliaire portant sur une cellule de base bien choisie, approximent la frontière de ce domaine, appartenant à  $\mathbb{R}^3$ , par un certain nombre de plans. Pour des sollicitations hors du plan du mur, la cellule de base est discrétisée en plusieurs couches dans son épaisseur, et le critère est vérifié dans chaque couche. Une telle méthode ne constitue cependant qu'une approximation, sans statut de minorant ou de majorant, puisque l'état de contrainte dans chaque couche n'est pas nécessairement plan. Le critère de résistance peut également être approché par des ellipses, comme proposé par Guéguin et al. [161] ou Bleyer et de Buhan [168]. Une telle approche nécessite alors d'évaluer le critère de résistance pour un certain nombre de trajets de chargement. Comme souligné par Bleyer [183], une telle approche est possible pour un critère de résistance dépendant de deux ou trois paramètres de chargement, mais est bien plus complexe et longue (voire impossible) à mettre en œuvre pour un critère de résistance dépendant de six paramètres de chargement. Dans le cas présent, en considérant 10 valeurs différentes pour chaque composante de  $\underline{N}$  et de  $\underline{M}$ , il faudrait réaliser  $10^6$  trajets de chargement. Chaque trajet de chargement nécessitant environ 30 s de calcul, il faudrait presque un an de calculs ! Bien que ce temps puisse être assez largement réduit en parallélisant les calculs sur un serveur dédié, nous ne sommes plus du tout dans l'esprit de la méthode à visée applicative pour l'ingénieur que nous cherchons à développer.

Une troisième approche consiste à se baser sur une évaluation semi-analytique de la fonction d'appui. Nous avons proposé dans le chapitre 5 une telle expression, notée  $\Pi^{S.An.,\theta}$ , basée sur la résolution du problème auxiliaire de Calcul à la rupture sur la cellule de base par l'approche cinématique<sup>1</sup>. Pour chaque trajet de chargement donné, elle donne un majorant de la fonction d'appui du critère macroscopique et permet donc d'obtenir une majoration de la puissance résistante maximale développée dans la plaque :

$$P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = \int_{\Omega} \Pi^M(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) d\Omega \leq \int_{\Omega} \Pi^{S.An.,\theta}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) d\Omega \quad (9.8)$$

Une propriété particulièrement intéressante de cette fonction d'appui est de pouvoir s'exprimer sous forme d'un problème d'optimisation conique quadratique. Il est alors possible d'évaluer, directement et sans aucune approximation, la valeur de la fonction

---

1. Pour rappel, l'annexe B propose une nomenclature des principaux domaines de résistance obtenus par des approches cinématiques analytiques et semi-analytiques du Calcul à la rupture et obtenus dans les chapitres 5 et 7

d'appui du critère en tout point de la plaque. C'est cette dernière approche qui a été retenue pour la suite.

### 3 Formulation numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture

#### 3.1 Discrétisation du problème et contraintes cinématiques

Le problème d'optimisation présenté dans la partie 2 peut être discrétisé par la méthode des éléments finis.

La géométrie du mur prend en compte la courbure thermique et n'est pas donc plane. Nous avons donc suivi la même approche que Bleyer et al. [184] et discrétisé le domaine en un ensemble de  $N_e$  facettes planes.

Un repère local, attaché à chaque facette, est alors défini comme suit :

- La normale unitaire de la facette est définie comme suit :

$$\underline{\nu} = \frac{(\underline{X}^2 - \underline{X}^1) \wedge (\underline{X}^3 - \underline{X}^1)}{\|(\underline{X}^2 - \underline{X}^1) \wedge (\underline{X}^3 - \underline{X}^1)\|} \quad (9.9)$$

où  $\underline{X}^1$ ,  $\underline{X}^2$  et  $\underline{X}^3$  désignent les coordonnées des trois sommets de la facette

- Le vecteur  $\underline{a}_1$  est défini de manière à toujours appartenir au plan horizontal ( $\underline{e}_1, \underline{e}_3$ ) : si  $\underline{\nu} \wedge \underline{e}_2 \neq 0$ ,  $\underline{a}_1 = (\underline{e}_2 \wedge \underline{\nu}) / \|\underline{e}_2 \wedge \underline{\nu}\|$ , sinon  $\underline{a}_1 = \underline{e}_1$
- Le vecteur  $\underline{a}_2$  complète ce trièdre orthonormé direct :  $\underline{a}_2 = \underline{\nu} \wedge \underline{a}_1$

Ce repère est schématisé sur la figure 9.3 (a).

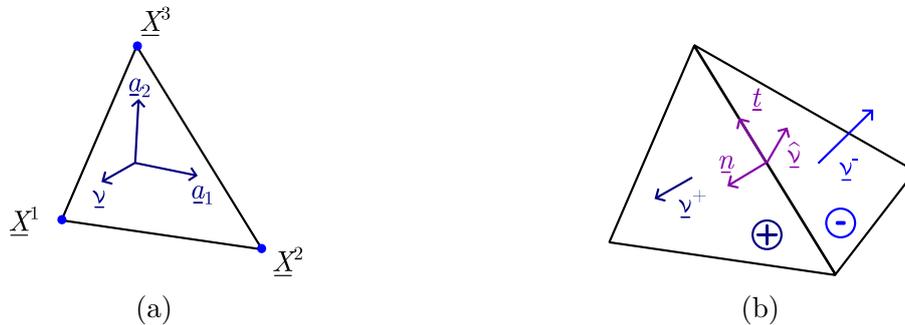


FIGURE 9.3 – Définition du repère local d'une facette (a) et du repère local pour une arête entre deux facettes non-coplanaires (b)

La formulation proposée inclut également des discontinuités de vitesse et des discontinuités de vitesse de rotation. Dans le cas de deux facettes non-coplanaires, ces discontinuités

sont calculées par rapport à une normale moyenne  $\underline{\hat{\nu}}$  définie par (Bleyer et de Buhan [184]) :

$$\underline{\hat{\nu}} = \frac{\underline{\hat{\nu}}^+ + \underline{\hat{\nu}}^-}{\|\underline{\hat{\nu}}^+ + \underline{\hat{\nu}}^-\|} \quad (9.10)$$

La figure 9.3 (b) représente cette normale moyenne.

Pour l'approche cinématique présentée dans ce chapitre, on considère une interpolation quadratique du champ de vitesse  $\underline{U}$ . Concernant les vitesses de rotation, nous considérerons une interpolation linéaire du champ de taux de rotation dans le plan  $\underline{\dot{\beta}}$  ainsi que de la vitesse de rotation autour de la normale à l'élément  $\dot{\nu}$ . Les valeurs nodales de ces champs sont les inconnues principales du problème de minimisation correspondant à l'approche cinématique. Les vitesses sont exprimées aux six nœuds de chaque élément (sommets et milieux des arêtes), tandis que les vitesses de rotation sont exprimées aux trois sommets de chaque élément, de manière à permettre les discontinuités entre éléments. Elles peuvent être regroupées dans un vecteur  $\mathbf{U}^i$  pour les vitesses, et  $\mathbf{\Theta}^i$  pour les vitesses de rotation, définis pour l'élément  $i$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^i &= \{U_1^1 \quad U_2^1 \quad U_3^1 \quad \dots \quad U_1^6 \quad U_2^6 \quad U_3^6\} \\ \mathbf{\Theta}^i &= \{\dot{\beta}_1^1 \quad \dot{\beta}_2^1 \quad \dot{\nu}^1 \quad \dots \quad \dot{\beta}_1^3 \quad \dot{\beta}_2^3 \quad \dot{\nu}^3\} \end{aligned} \quad (9.11)$$

Ces inconnues principales sont linéairement reliées aux inconnues secondaires suivantes, définies par éléments :

- les composantes du tenseur des taux de déformation macroscopique  $\underline{D}$ , qui varient linéairement sur chaque élément ;
- les composantes du tenseur des taux de courbure macroscopique  $\underline{\dot{\chi}}$ , qui sont constantes sur chaque élément.

Ces inconnues secondaires peuvent respectivement être regroupées dans un vecteur  $\mathbf{D}^i$  et dans un vecteur  $\mathbf{\dot{X}}^i$ , définis pour l'élément  $i$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^i &= \{D_{11}^1 \quad D_{22}^1 \quad 2D_{12}^1 \quad \dots \quad D_{11}^3 \quad D_{22}^3 \quad 2D_{12}^3\} \\ \mathbf{\dot{X}}^i &= \{\dot{\chi}_{11} \quad \dot{\chi}_{22} \quad 2\dot{\chi}_{12}\} \end{aligned} \quad (9.12)$$

La figure 9.4 résume l'interpolation adoptée sur les éléments pour les inconnues principales et secondaires.

Sur chaque élément, les inconnues principales et secondaires sont reliées par quatre relations linéaires qui peuvent être exprimées sous forme matricielle :

- entre les taux de déformations et la partie symétrique du gradient des vitesses dans le plan de chaque élément ;
- entre la rotation autour de la normale au plan et la partie antisymétrique du gradient des vitesses dans le plan ;

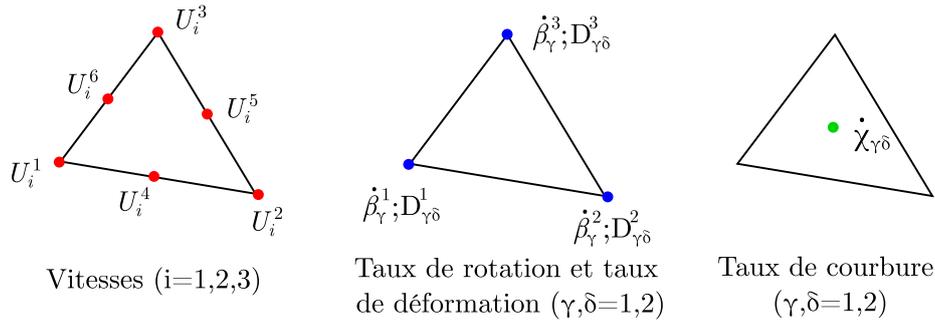


FIGURE 9.4 – Interpolation adoptée

- entre le taux de rotation et le gradient de la vitesse hors-plan ;
- entre le taux de courbure et le gradient du taux de rotation.

Comme mentionné précédemment, la formulation inclut également des discontinuités de vitesse dans le plan (notées  $[[\underline{u}]]$ ) et de vitesse de rotation (notées  $[[\dot{\Theta}]]$ ), que l'on peut considérer comme des inconnues secondaires également. Puisque la fonction d'appui associée à une discontinuité de vitesse  $[[\underline{u}]]$  au travers d'une arête de normale  $\underline{n}$  (correspondant ici aux arêtes entre deux facettes) peut s'exprimer comme la fonction d'appui associée à un taux de déformation  $\underline{D} = [[\underline{u}]] \otimes^s \underline{n}$ , les discontinuités de vitesses sont stockées sous la forme d'un vecteur  $\mathbf{D}^k$ , défini par arête de discontinuité de vitesse  $k$ . Sur le même principe, les discontinuités de taux de rotation  $[[\dot{\beta}]]$  au travers d'une arête de normale  $\underline{n}$  sont stockées sous la forme d'un taux de courbure équivalent  $\underline{\dot{\chi}} = [[\dot{\beta}]] \otimes^s \underline{n}$ , dans un vecteur noté  $\dot{\mathbf{X}}^k$ . Ce vecteur est également défini pour toute arête de discontinuité de vitesse  $k$ .

Comme dans les chapitres 4 et 6, on contraint les discontinuités de vitesse à être linéaires sur le long des arêtes de discontinuité. Les discontinuités de taux de rotation sont, quant à elles, linéaires du fait de l'interpolation choisie.

Toutes les contraintes cinématiques présentées dans ce paragraphe sont des contraintes linéaires, qui peuvent se résumer sous la forme d'un simple système matriciel du type :

$$\mathbf{A}^c \mathbf{x}^c = \mathbf{0} \quad (9.13)$$

où l'exposant  $c$  se réfère au fait qu'il s'agisse de contraintes cinématiques. Dans cette équation,  $\mathbf{x}^c$  est le vecteur rassemblant toutes les inconnues principales et secondaires contenues dans les vecteurs  $\mathbf{U}^i$ ,  $\dot{\Theta}^i$ ,  $\mathbf{D}^i$  et  $\dot{\mathbf{X}}^i$  pour tous les éléments  $i$  de la structure et les vecteurs  $\mathbf{D}^k$  et  $\dot{\mathbf{X}}^k$  pour toutes les arêtes de discontinuités  $k$ .

### 3.2 Formulation numérique de l'approche cinématique

Comme indiqué dans la sous-partie 2.3, la puissance résistante maximale peut être majorée de la manière suivante :

$$P_{rm}(\underline{U}, \dot{\underline{\Theta}}) \leq P_{rm}^{S.An.,\theta}(\underline{U}, \dot{\underline{\Theta}}) = \int_{\Omega} \Pi^{S.An.,\theta}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) d\Omega + \int_{\Gamma=\Gamma_{\underline{u}} \cup \Gamma_{\dot{\underline{\beta}}}} \Pi^{S.An.,\theta}(\llbracket \underline{u} \rrbracket, \llbracket \dot{\underline{\beta}} \rrbracket) dl \quad (9.14)$$

où  $\Pi^{S.An.,\theta}$  désigne la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique obtenu par voie semi analytique (notée *S.An.*), en prenant en compte la dégradation des matériaux avec l'augmentation de la température.

Du point de vue numérique, les deux termes du membre de droite de l'équation (9.14) peuvent être eux-même être évalués par excès par une quadrature de Gauss, dans laquelle la valeur de la fonction d'appui est évaluée aux trois sommets de l'élément ou aux deux nœuds extrêmes de la charnière généralisée :

$$\int_{\Omega} \Pi^{S.An.,\theta}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) d\Omega \leq \sum_{i=1}^{N_e} \frac{S_i}{3} \sum_{j=1}^3 \Pi^{S.An.,\theta}(\mathbf{D}^i, \dot{\mathbf{X}}^i) \quad (9.15)$$

$$\int_{\Gamma} \Pi^{S.An.,\theta}(\llbracket \underline{u} \rrbracket, \llbracket \dot{\underline{\beta}} \rrbracket) dl \leq \sum_{k=1}^{N_i} \frac{l_k}{2} \sum_{j=1}^2 \Pi^{S.An.,\theta}(\mathbf{D}'^k, \dot{\mathbf{X}}'^k)$$

Dans cette équation,  $N_e$  désigne le nombre d'éléments (ou de facettes), et  $N_i$  désigne le nombre d'arêtes entre ces facettes. De plus, la fonction d'appui du domaine de résistance macroscopique obtenu par voie semi analytique  $\Pi^{S.An.,\theta}$  est définie comme l'intersection du domaine obtenu en considérant un mécanisme de blocs, dont la fonction d'appui est notée  $\Pi^{blocs,\theta}$  et un mécanisme de déformation affine dans la cellule de base et homogène par couches, dont la fonction d'appui est notée  $\Pi^{def,\theta}$  (voir annexe B) :

$$\Pi^{S.An.,\theta}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \min_{(\underline{D}_1, \underline{\dot{\chi}}_1) \in \mathbb{R}^6} \left\{ \Pi^{def,\theta}(\underline{D}_1, \underline{\dot{\chi}}_1) + \Pi^{blocs,\theta}(\underline{D} - \underline{D}_1, \underline{\dot{\chi}} - \underline{\dot{\chi}}_1) \right\} \quad (9.16)$$

Ces deux fonctions d'appui ont été définies dans le chapitre 5.

La fonction d'appui correspondant au mécanisme mettant en œuvre des taux de déformation homogènes par plans peut être majorée par quadrature trapézoïdale, en discrétisant la cellule de base en  $N$  couches dans son épaisseur, de la manière suivante :

$$\Pi^{def,\theta}(\underline{D}_1, \underline{\dot{\chi}}_1) = \int_{-h/2}^{h/2} \pi^{def,p}(\underline{D}_1 - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}_1) d\xi_3 \leq \sum_{k=1}^N \omega_k \pi^{def,p}(\mathbf{d}^k) \quad (9.17)$$

Dans l'équation (9.17), les  $\omega_k$  représentent les poids de la quadrature de Gauss, et  $\pi^{def,p}$

la fonction d'appui dans un plan donné, déjà définis dans le chapitre 5. On a également introduit les variables auxiliaires  $\mathbf{d}^k = \mathbf{D} - \xi_3^k \dot{\mathbf{X}}$  représentant la déformation locale dans le plan  $k$ . Pour un couple  $(\underline{D}, \underline{\dot{X}})$  donné, la fonction d'appui  $\Pi^{def,\theta}$  peut être évaluée directement. Cependant, son écriture sous une forme adaptée au solveur d'optimisation conique requiert la définition de variables scalaires et de contraintes auxiliaires linéaires et coniques supplémentaires.

La fonction d'appui correspondant au mécanisme mettant en œuvre des mouvements de bloc peut également se réécrire comme un ensemble de conditions linéaires et coniques, impliquant l'introduction de variables auxiliaires.

Finalement, la formulation numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture se ramène à un problème d'optimisation conique consistant à minimiser le multiplicateur  $\lambda^c$  sous :

- Les contraintes cinématiques linéaires décrites dans la sous-partie 3.1 ;
- Les contraintes linéaires et coniques permettant le calcul des différentes fonctions d'appui et de leurs éventuelles conditions de pertinence ;
- De manière classique, on imposera également que la puissance des efforts extérieurs soit égale à 1.

Ce problème peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\min \lambda^c = \sum_{i=1}^{N_e} \frac{S_i}{3} \sum_{j=1}^3 \Pi^{S.An.}(\mathbf{D}^i, \dot{\mathbf{X}}^i) + \sum_{k=1}^{N_i} \frac{l_k}{2} \sum_{j=1}^2 \Pi^{S.An.}(\mathbf{D}^{jk}, \dot{\mathbf{X}}^{jk})$$

s.c. :

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\in \mathcal{K}^1 \times \dots \times \mathcal{K}^p \\ P_e(\mathbf{x}) &= 1 \end{aligned} \tag{9.18}$$

Dans l'équation (9.18),  $\mathbf{x}$  désigne le vecteur regroupant l'ensemble des variables d'optimisation principales, secondaires et auxiliaires. Les contraintes linéaires précédemment évoquées sont regroupées dans l'égalité  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , tandis que les contraintes coniques sont regroupées sous la forme  $\mathbf{x} \in \mathcal{K}^1 \times \dots \times \mathcal{K}^p$ , où les  $\mathcal{K}^i$  désignent les  $p$  cônes de second ordre utilisés.

L'apport majeur de l'approche proposée ici est de ne pas nécessiter la résolution numérique préalable d'un problème auxiliaire, puis l'approximation du critère de résistance obtenu. La présence, dans la même formulation, de variables microscopiques définissant la fonction d'appui locale, et de variables macroscopiques définissant la cinématique globale du mur, permet donc une évaluation directe et rapide de la stabilité au feu du mur.

## 4 Exemple d'application

### 4.1 Présentation de l'exemple

Pour ce premier exemple, on s'intéresse au mur testé dans le chapitre 2. Le mur est donc modélisé par une coque mince, dont la coordonnée hors-plan correspond à la flèche thermoélastique calculée dans le chapitre 3 pour un temps d'exposition au feu donné. Localement, son critère de résistance est défini de manière duale par la fonction d'appui déterminée selon l'approche semi-analytique proposée dans le chapitre 5, pour le même temps d'exposition au feu.

Les caractéristiques géométriques utilisées pour le calcul sont identiques à celles considérées dans les chapitres 3 et 5. Les propriétés thermoélastiques à température ambiante et au feu correspondent à celles du chapitre 3. Concernant les propriétés de résistance, l'angle de frottement interne et le coefficient de dégradation de la résistance en compression des deux matériaux avec la température, ainsi que la cohésion du mortier, sont identiques à ceux considérés dans les chapitres 4 et 5. Compte-tenu des observations expérimentales du chapitre 8, nous considérerons deux valeurs de cohésion à température ambiante pour la pierre :  $c^b = 1,53$  MPa (comme dans les chapitres 4 et 5) et  $c^b = c^b/1,35$ . Pour rappel, ce coefficient 1,35 provient de la surestimation probable de la cohésion lorsqu'elle est déterminée via un essai de résistance en compression sur une éprouvette cubique, d'élanement 1, et non pas sur une éprouvette d'élanement 2.

Pour se rapprocher des conditions expérimentales correspondant à l'essai du chapitre 2, nous considérerons que la rotation et le déplacement vertical du bord inférieur de cette coque sont bloqués, qu'elle est en appui simple sur son bord supérieur, et que ses bords latéraux sont libres. Un chargement vertical, éventuellement excentré par rapport au plan médian de la coque, est appliqué sur son bord supérieur. Le problème étant symétrique par rapport au plan  $(O, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ , seule la moitié du mur sera modélisée. Ces conditions aux limites sont rappelées sur la figure 9.5 (a), tandis que la figure 9.5 (b) représente le maillage utilisé. Le maillage initial est identique pour tous les temps d'exposition au feu, mais les coordonnées des nœuds sont modifiées pour prendre en compte la déformée obtenue par le calcul thermoélastique pour un temps d'exposition au feu donné.

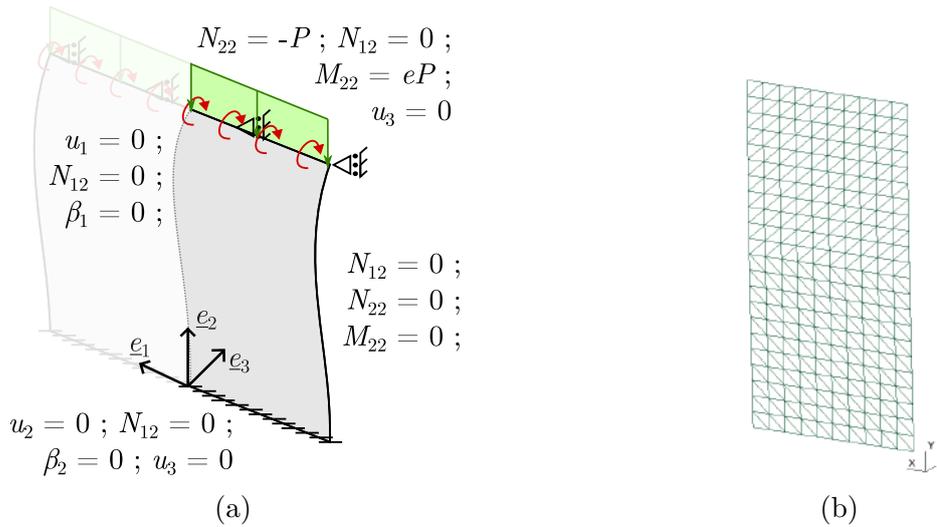


FIGURE 9.5 – (a) Conditions aux limites considérées pour le mur et (b) maillage utilisé

## 4.2 Mise en œuvre pratique du calcul

La plupart des calculs sont conduits sur la configuration déformée par le feu du mur. Or cette configuration dépend non seulement du temps d'exposition au feu et des conditions aux limites cinématiques, mais aussi du chargement imposé en termes d'efforts membranaires et de moments fléchissants.

Nous avons vu dans le chapitre 3 que ces chargements mécaniques avaient un impact bien plus faible que le chargement thermique sur la déformée thermomécanique. Par ailleurs, ajouter un chargement vertical (vers le bas) centré par rapport au plan médian du mur tend à en faire diminuer la déformée hors plan (voir par exemple la figure 2.34 du chapitre 2). Réaliser les calculs sur la configuration déformée d'un mur exposé uniquement au feu ( $P = 0$  sur la figure 9.5 (a)) risque donc de donner une charge extrême plus faible que s'ils étaient réalisés sur la configuration déformée d'un mur exposé au feu et soumis à un chargement vertical  $P \geq 0$ . Cette première estimation serait donc conservative.

On peut cependant proposer une approche itérative (représentée sur la figure 9.6) pour tenter de prendre en compte le chargement mécanique de manière plus précise. Un premier calcul de stabilité est réalisé sur la déformée non-chargée du mur. La déformée est ensuite recalculée pour un chargement mécanique égal à la valeur de la charge extrême trouvée par le premier calcul, puis un calcul de stabilité est réalisé sur cette nouvelle configuration déformée. Si la nouvelle valeur de charge extrême obtenue diffère de la première valeur de plus d'une certaine valeur seuil  $\varepsilon$ , alors la déformée, puis la charge extrême sont recalculées, et ainsi de suite. Par la suite, on prendra  $\varepsilon = 5 \%$  pour éviter de faire un nombre trop élevé d'itérations.

En pratique, pour le mur testé et avec les conditions aux limites considérées (encastrement en bas du mur et appui simple en haut), cette méthode converge dès la première

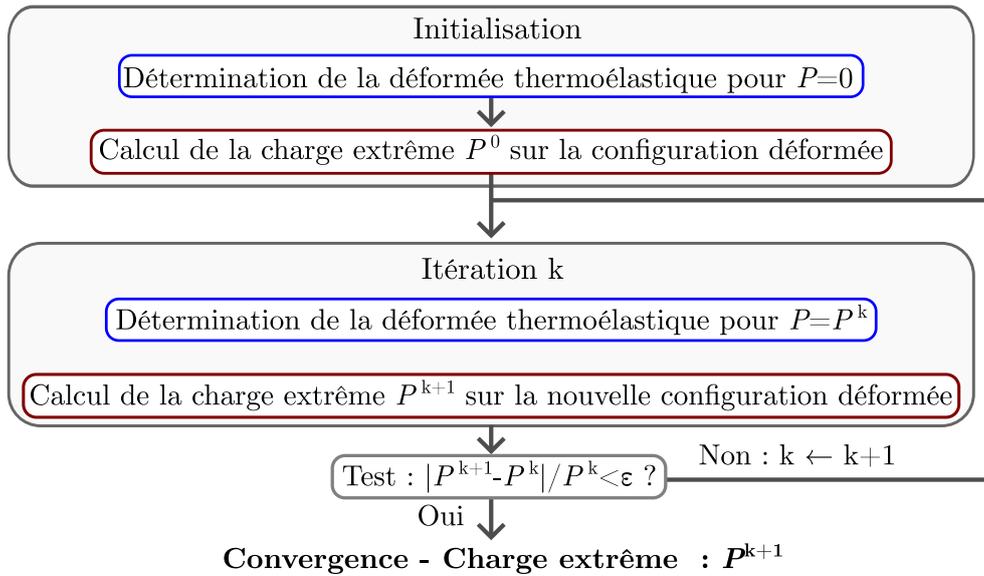


FIGURE 9.6 – Approche itérative de détermination de la charge extrême pour un temps d’exposition au feu donné

itération et le résultat du calcul sur la déformée sans chargement additionnel est identique à celui du calcul sur la déformée avec chargement.

**Note :** Cette approche itérative nous donne la capacité portante après un certain temps d’exposition au feu. C’est en réalité un problème un peu différent de celui que doit résoudre l’ingénieur qui souhaite évaluer la stabilité du mur après un temps d’exposition au feu donné, pour une charge donnée, et qui cherche une réponse de type binaire (stable/instable). Cependant, il nous a paru intéressant du point de vue scientifique de regarder l’évolution de la capacité portante en fonction du temps.

### 4.3 Premiers résultats et comparaison expérimentale

Intéressons-nous, dans un tout premier calcul, à un mur non-exposé au feu. Le tableau 9.1 donne quelques informations sur le problème numérique résolu pour le maillage représenté sur la figure 9.5 (b). Le temps de calcul total est de 30 s sur un PC portable équipé d’un processeur Intel Core i7 et de 16 Go de RAM. Il s’agit donc d’un temps de calcul tout à fait adapté au travail de l’ingénieur.

TABEAU 9.1 – Informations sur le problème de Calcul à la rupture numérique

Nombre de noeuds	253	Contraintes	430 629
Nombre d’éléments	440	Variables scalaires	748 392
Discrétisation $N$	20	Variables coniques	313 664
dans l’épaisseur		Temps de résolution	30 s

### 4.3.1 Résultats numériques

La figure 9.7 donne l'évolution de la charge extrême en fonction du temps d'exposition au feu pour les deux valeurs de cohésion de la pierre considérées. Il apparaît que la capacité portante du mur diminue de **23 %** après 180 min d'exposition au feu (par rapport à un mur non-exposé).

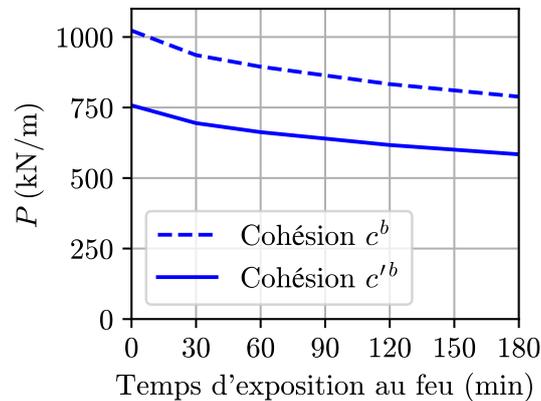


FIGURE 9.7 – Charge extrême en fonction du temps d'exposition au feu

Les mécanismes de rupture obtenus numériquement ne sont pas très parlants. Il s'agit à chaque fois d'une charnière localisée sur le bord supérieur du mur. La figure 9.8 (a) donne le mécanisme obtenu lorsqu'on empêche numériquement la formation de charnières sur les bords du mur. La charnière se déporte juste en dessous, de manière à créer la discontinuité de courbure virtuelle la plus faible possible au niveau de l'encastrement. La figure 9.8 (b) représente une projection du critère de résistance macroscopique sur le plan  $(N_{22}, M_{22})$  pour 180 min d'exposition au feu. Elle met en évidence le plan  $P_e(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}}) = P_{rm}(\underline{U}, \underline{\dot{\Theta}})$  aboutissant à la formation de cette charnière généralisée, qui correspond à la fois à une discontinuité de taux de rotation et à une discontinuité de vitesse de translation.

On notera également que les calculs menés sur la configuration non déformée du mur (modélisé par une plaque), avec un critère de résistance altéré par le feu, donnent des résultats identiques à ceux obtenus sur la configuration déformée du mur, avec un mécanisme de rupture similaire (charnière horizontale en haut du mur). Dans le cas spécifique de cet essai au feu, pour un chargement vertical centré et compte-tenu de la faible courbure thermique, il semble donc qu'on pourrait se passer de l'approche par éléments finis et modéliser le mur par une simple plaque. Le mécanisme de rupture pourrait alors être obtenu par des charnières généralisées. Une telle optimisation serait probablement un peu plus rapide. On perdrait cependant le caractère général de la méthode qui permet de s'intéresser à des chargements et des configurations géométriques très variées.

Cette analyse permet également de se rendre compte que, dans le cas considéré, le mur rompt en compression simple, et non pas en flexion composée comme dans le cas des voiles de grande hauteur en béton traités par Pham et al. [180], Bleyer et al. [181] ou Yang et al. [160].

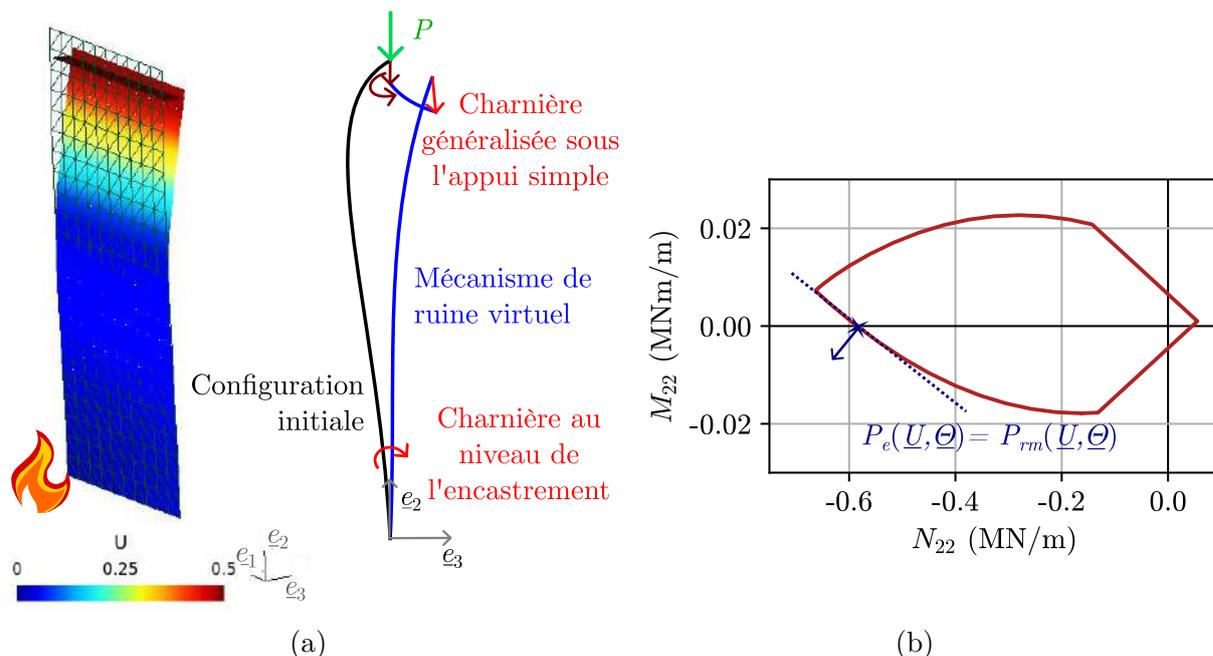


FIGURE 9.8 – (a) Mécanisme de rupture optimal (couleurs correspondant aux isovaleurs de la norme de la vitesse virtuelle) et schématisation du mécanisme vu de côté, et (b) plan  $P_e(\underline{U}, \underline{\Theta}) = P_{rm}(\underline{U}, \underline{\Theta})$  tangent au domaine de résistance (tracé pour une cohésion  $c^b$  pour les blocs)

### 4.3.2 Comparaison expérimentale

Le mur testé dans le chapitre 2 a rompu pour une charge de **250 kN/m** après 180 min d'exposition au feu. Selon la valeur de résistance en compression de la pierre considérée, nous obtenons ici une charge extrême de **788 kN/m** (cohésion  $c^b$ ) ou **584 kN/m** (cohésion  $c^b$ ) après 180 min d'exposition au feu. L'approche numérique surestime donc la charge extrême d'un facteur 3,1 (cohésion  $c^b$ ) ou d'un facteur 2,3 (cohésion  $c^b$ ).

Les essais réalisés à température ambiante dans le chapitre 8 ont permis de mettre en évidence que les ruptures en flexion composée de la maçonnerie se traduisaient presque toujours par l'ouverture des joints horizontaux du côté le moins comprimé du mur. Au contraire, les ruptures en compression se traduisaient plutôt par des fissures dans des plans verticaux parallèles au plan du mur, traversant plusieurs blocs. Les fissures observées dans l'essai présenté dans le chapitre 2 correspondent plutôt à ce dernier type, ce qui permet de supposer que le mur a rompu en compression. Les résultats présentés dans la sous-partie 4.3.1 montrent également une rupture en compression. Le mécanisme virtuel obtenu est un peu différent, puisque la rupture en compression se produit en haut du mur et non pas dans sa partie inférieure.

Quelques pistes peuvent expliquer la différence observée en termes de capacité portante :

- Le positionnement du mur dans le système expérimental, tout comme le positionnement des blocs dans le mur, ne sont pas parfaits. L'observation minutieuse du

système expérimental a permis de mettre en évidence une incertitude de positionnement du mur de l'ordre de 1 à 2 cm dans la direction  $e_3$ , tandis que la corrélation d'images a montré des décalages de l'ordre de  $\pm 4$  mm des blocs dans le mur. Ces imperfections peuvent contribuer à la diminution de la charge de ruine du mur testé par rapport à des conditions "parfaites". Nous proposons d'évaluer leur effet via l'étude paramétrique proposée dans la partie 4.4.

- Le mur comme le système expérimental donnent lieu à des incertitudes. Expérimentalement, le mur, qui est pourtant supposé symétrique par rapport à un plan vertical à mi-largeur, a subi des déplacements différents entre son côté gauche et son côté droit. Par ailleurs, la corrélation d'image nous a montré que la poutre de chargement n'était pas parfaitement droite. Toutes ces imperfections rendent difficile la définition des conditions aux limites pour la modélisation.
- Si le mortier utilisé possède une certaine ductilité, la pierre, en revanche, est plus fragile. Nous avons vu dans le chapitre 8 que cette fragilité se reportait sur les trumeaux. A température ambiante, la résistance en compression peut néanmoins être évaluée de manière assez satisfaisante par le Calcul à la rupture. En revanche, il est possible que l'élévation de température rende encore plus fragile la pierre ou le mortier, ou introduise un endommagement local, et que des coefficients correctifs soient nécessaires pour mieux prendre en compte cette fragilité. Une autre manière de prendre en compte la fragilité de la pierre pourrait aussi consister à se baser sur la résistance en compression résiduelle de la pierre (voir chapitre 8), et non pas sur sa résistance en compression au pic.

### 4.4 Étude paramétrique

L'objectif de cette étude paramétrique est de quantifier l'effet des incertitudes de positionnement mentionnées dans la partie précédente, mais aussi de proposer quelques premiers résultats pour généraliser la méthode proposée à d'autres configurations de mur. Pour toute l'étude paramétrique, nous avons retenu la valeur  $c^b$  pour la cohésion à température ambiante de la pierre.

#### 4.4.1 Excentrement de la charge

Comme évoqué dans la sous-partie précédente, le chargement appliqué lors de l'essai pourrait avoir été appliqué de manière légèrement excentrée. De manière plus générale, les murs porteurs en pierre massive peuvent être soumis à des chargements centrés (pour les murs à l'intérieur du bâtiment) ou excentrés (pour des murs de façade). Il paraît donc intéressant d'évaluer plus précisément l'effet de cet excentrement sur la résistance au feu de la structure.

Pour prendre en compte cet excentrement initial  $e$  de la charge, on considèrera qu'un moment  $M_{22} = eP$  est appliqué en tête de mur (voir figure 9.5). On rappelle qu'une valeur négative d'excentrement correspond à un excentrement vers le feu.

La figure 9.9 donne la valeur de la capacité portante du mur en fonction de l'excentrement du chargement vertical pour différents temps d'exposition au feu. Il est intéressant de noter la perte de symétrie par rapport à l'axe médian du mur lorsque le mur est exposé au feu.

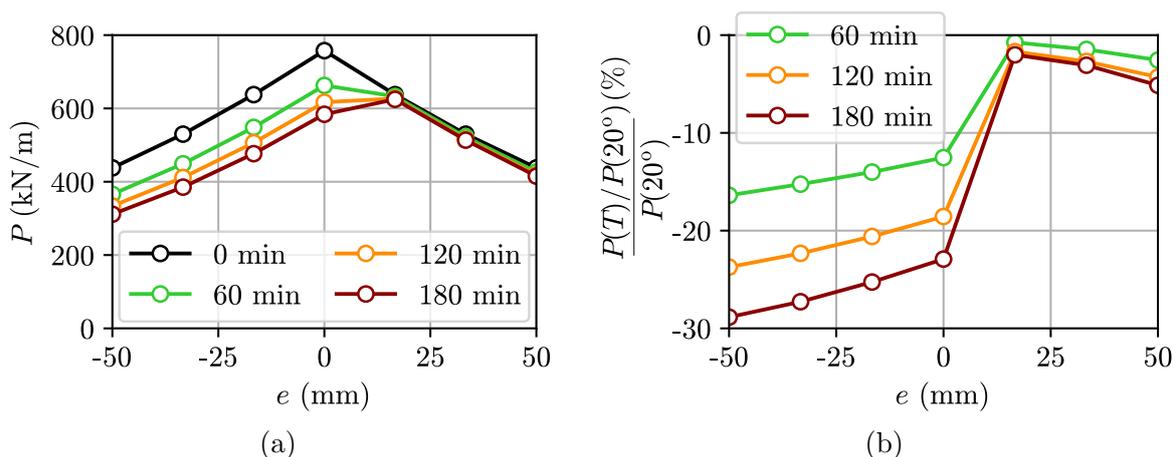


FIGURE 9.9 – (a) Charge extrême en fonction de l'excentrement de la charge verticale pour différents temps d'exposition au feu et (b) pourcentage de réduction de la charge extrême en fonction de l'excentrement pour différents temps d'exposition au feu

Considérons un mur de façade, sur lequel le chargement, provenant du plancher adjacent, est excentré. Le feu se déclare dans le demi-espace  $x_3 \leq 0$  (voir figure 9.10), et entraîne une dégradation de la cohésion des deux matériaux  $c(x_3)$ , qui devient alors hétérogène dans l'épaisseur du mur. D'après la figure 9.9, la perte de capacité portante pour ce mur chargé de manière excentrée par un excentrement  $e < 0$  (figure 9.10 (a) - feu à l'intérieur du bâtiment) serait plus grande que pour un mur chargé de manière centrée. Le cas bien moins probable dans lequel le feu se déclare à l'extérieur du bâtiment (figure 9.10 (b) - excentrement  $e > 0$ ) entraîne une perte de capacité plus faible que dans le cas d'un chargement centré. On en conclut finalement que ce sont les murs de façade, pour lesquels le chargement est excentré, qui sont les plus sensibles aux effets du feu, et non pas les murs séparatifs à l'intérieur du bâtiment.

La figure 9.9 nous permet également de déterminer la perte de capacité portante qui serait associée à des éventuelles imperfections du système de chargement. Pour 180 min d'exposition au feu, un excentrement du chargement de 17 mm vers le feu conduit à une capacité portante 18 % plus faible que pour un chargement centré, tandis qu'un chargement excentré de 17 mm dans la direction opposée au feu conduit à une capacité portante 7 % plus élevée que pour un chargement centré.

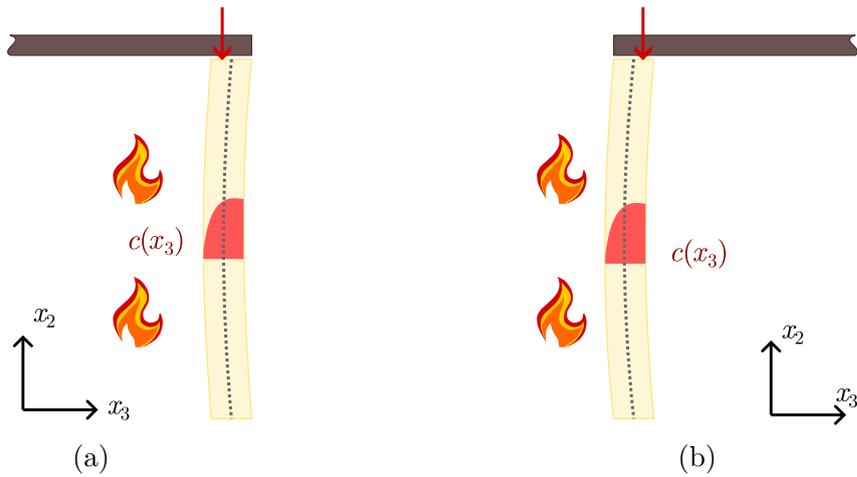


FIGURE 9.10 – Effet d'un chargement excentré selon le positionnement du feu (a) du côté de l'excentrement et (b) à l'opposé de l'excentrement

#### 4.4.2 Influence des conditions aux limites

Dans les chapitres 2 et 3, nous avons mis en évidence la difficulté de définir précisément les conditions aux limites concernant le déplacement et la rotation du haut et du bas du mur. Les résultats récents des essais de Pimienta et al. [16] montrent que sur d'autres types de pierres et avec des valeurs de chargement un peu différentes, les conditions aux limites semblent se rapprocher davantage d'un appui simple (rotation libre) que d'un encastrement (rotation bloquée) en bas du mur. On propose donc de comparer les résultats obtenus dans le cas d'un modèle où les deux bords horizontaux (inférieur et supérieur) seraient en appui simple aux résultats présentés dans la partie 4.3.1, pour lesquels on considèrerait que le bord inférieur était encasturé. Ces conditions aux limites sont rappelées sur la figure 9.11.

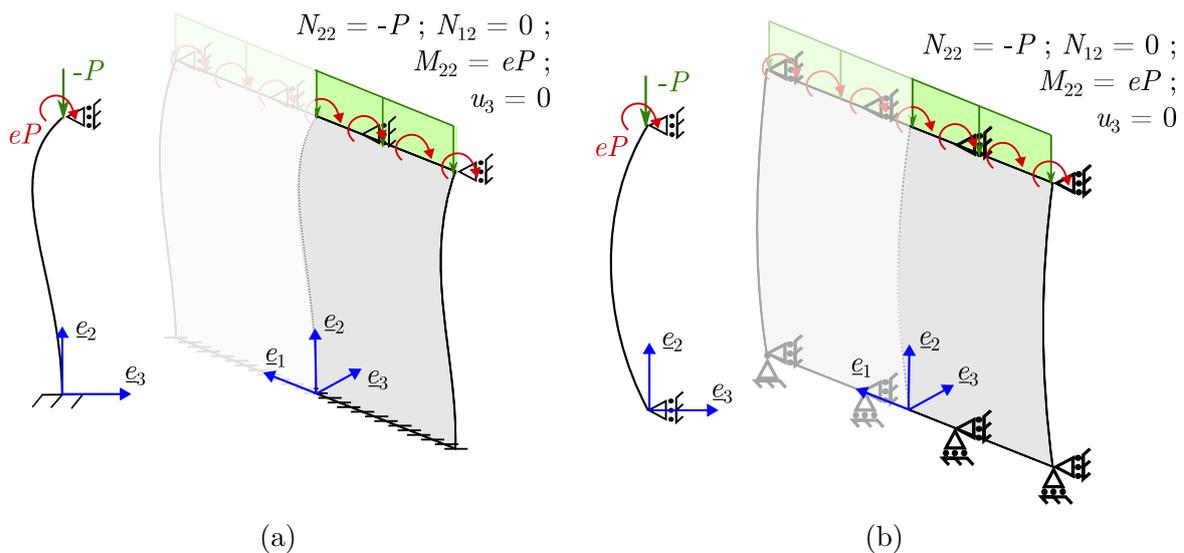


FIGURE 9.11 – Comparaison de deux types de conditions aux limites concernant les rotations et déplacements hors-plan : (a) encastrement en bas du mur et appui simple en haut, et (b) appui simple en haut et en bas du mur

La figure 9.12 (a) donne l'évolution de la flèche maximale (obtenue par l'approche d'homogénéisation thermoélastique développée dans le chapitre 3, en l'absence de chargement vertical  $P$ ) en fonction du temps pour ces deux cas. Sur cette figure, les cercles représentent la valeur de la flèche maximale pour un mur en appui simple sur ses deux bords horizontaux, chargé mécaniquement avec la charge  $P$  conduisant à la rupture déterminée par l'approche itérative représentée sur la figure 9.6. Il faut deux itérations pour arriver à la convergence. On note que la déformée avec un chargement mécanique est un peu plus faible que la déformée pour  $P = 0$ .

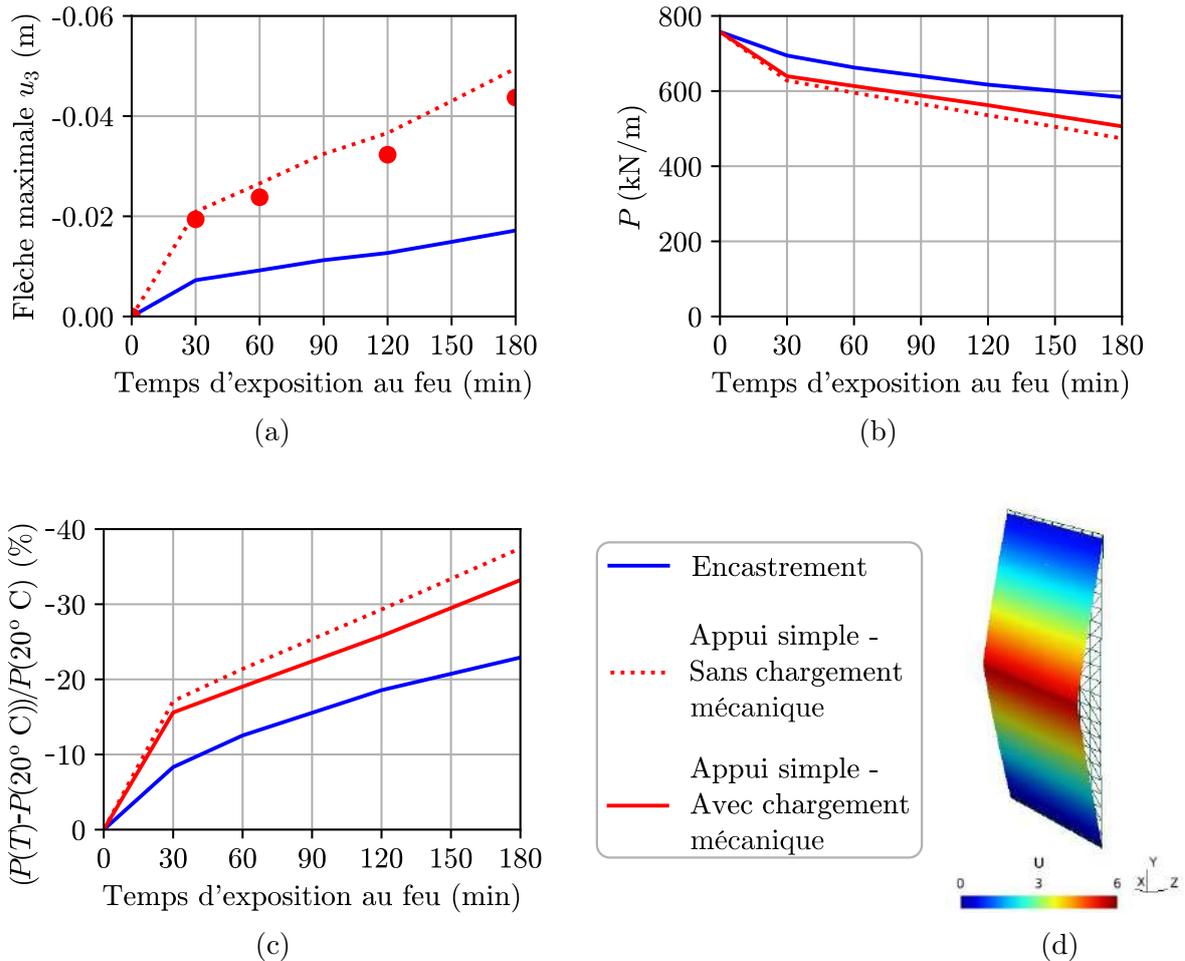


FIGURE 9.12 – Flèche (a), charge extrême (b) et perte relative de capacité portante (c) pour différentes conditions aux limites; (d) mécanisme de rupture pour un mur en appui simple sur ses deux bords horizontaux (les couleurs correspondent aux isovaleurs de la norme de la vitesse)

La figure 9.12 (b) donne l'évolution de la charge extrême en fonction du temps. Dans le cas où le bas du mur est encasturé, les calculs sur configuration déformée avec ou sans chargement mécanique donnent les mêmes résultats, car le mécanisme optimal met en œuvre une charnière située sur le bord supérieur, non déformé, du mur. Dans le cas où le bas du mur est en appui simple, en revanche, le calcul sur la configuration chargée aboutit à des charges extrêmes légèrement plus élevées.

Comme déjà mis en évidence dans le chapitre 3, la flèche est 2,8 fois plus élevée pour un mur en appui simple sur ces deux bords horizontaux que pour un mur encastré en pied et en appui simple en tête. La combinaison de cette flèche et de l'absence de blocage de la rotation en bas du mur conduisent à une charge de rupture 14 % plus faible pour le mur en appui simple que pour le mur encastré après 180 min d'exposition au feu.

La figure 9.12 (c) donne l'évolution de la dégradation de la capacité portante en fonction du temps d'exposition au feu. Après 180 min d'exposition au feu, un mur en appui simple sur ses deux bords horizontaux a perdu le tiers de sa capacité portante, tandis qu'un mur encastré en bas et en appui simple en haut a perdu moins du quart de sa capacité portante.

La figure 9.12 (d) donne le mécanisme de rupture après 180 min d'exposition au feu pour le mur en appui simple sur ses deux bords horizontaux. Ce mécanisme est différent de celui obtenu pour le mur encastré en pied (représenté sur la figure 9.8 (a)). On voit alors le changement de mode de ruine de la structure.

### 4.4.3 Influence de la hauteur du mur

On propose maintenant de s'intéresser à des murs de différentes hauteurs, comprises entre 3 et 6 m. La largeur et l'épaisseur du mur restent fixées à 2,92 m et 0,2 m respectivement. On notera que l'Eurocode 6 [1] recommande de ne pas dépasser un élancement (rapport hauteur/épaisseur) de 27, ce qui correspond ici à une hauteur de 5,4 m.

La figure 9.13 donne l'évolution de la flèche en fonction du temps pour les quatre hauteurs considérées, dans le cas où (a) le bord inférieur est encastré et (b) où le bord inférieur est en appui simple. Dans ces deux cas, le bord supérieur du mur est en appui simple. A ce stade, on peut noter que la flèche maximale augmente de manière quadratique avec la hauteur du mur. Pour un mur de 6 m, la flèche est de l'ordre de grandeur de l'épaisseur du mur, et l'effet de second ordre, aussi nommé effet  $P - \delta$ , pourrait alors ne plus être négligeable.

Dans le cas où les murs sont encastrés sur leur bord inférieur, la hauteur du mur n'influe pas sur la charge extrême ni sur le mécanisme de rupture jusqu'à une hauteur de mur de 5 m. Pour un mur de 6 m, l'influence de la hauteur reste minime : la charge extrême après 180 min d'exposition au feu est inférieure de 4 % à celle d'un mur de 3 à 5 m (voir figure 9.13 (a)).

Concernant les murs en appui simple sur leurs deux bords horizontaux, il apparaît que la hauteur du mur a en revanche une forte influence sur la charge extrême : celle du mur de 3 m est 2,6 fois plus élevée que celle du mur de 6 m pour 180 min d'exposition au feu. La chute de capacité portante observée provient très probablement de l'augmentation importante de la flèche.

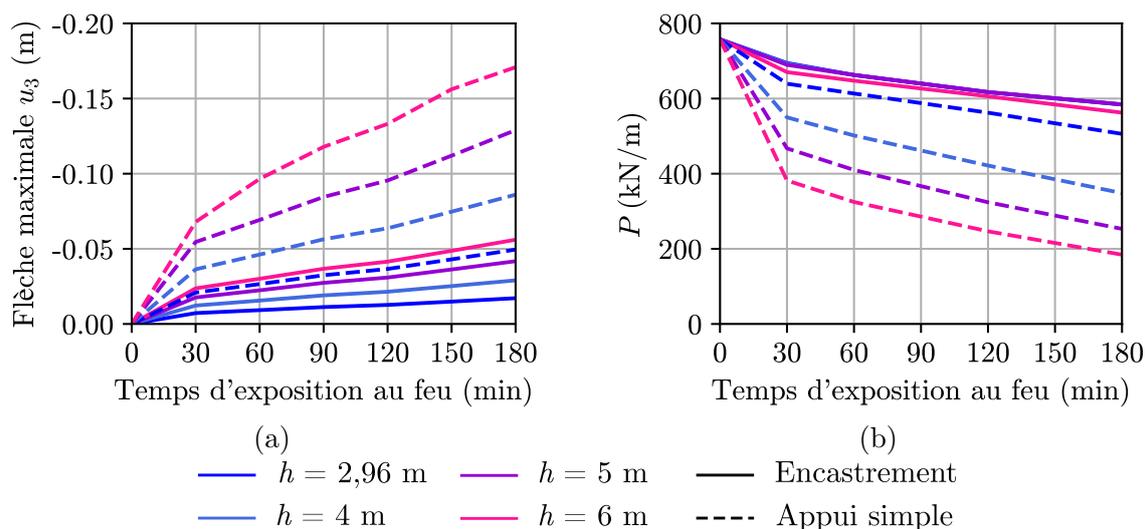


FIGURE 9.13 – Flèche maximale (a) et charge extrême (b) en fonction du temps d'exposition au feu pour des murs de différentes hauteurs

On note sur la figure 9.13 (a) que la flèche du mur encastrement de 6 m est plus élevée que celle du mur en appui simple de 2,96 m. Cependant, la présence de l'encastrement conduit à une charge extrême plus élevée pour le premier que pour le second. Les murs sont certes déstabilisés par la flèche thermique, mais la présence de restrictions cinématiques sur les bords peut avoir un effet stabilisateur important.

#### 4.4.4 Remarques finales

L'étude paramétrique proposée a permis de quantifier l'effet de certains facteurs, comme le blocage en rotation ou non du bord inférieur du mur ou de sa hauteur. Elle a notamment montré que les contraintes cinématiques de type encastrement avaient un effet stabilisateur sur la structure. En revanche, comme pressenti, la déformée thermique va plutôt avoir un effet déstabilisateur, d'autant plus important que le mur est élancé. Concernant ce paramètre, on gardera toutefois à l'esprit que les calculs de déformée proposée ne prennent pas en compte l'effet  $P - \delta$ , et ne sont donc pas adaptés aux murs de très grande hauteur (typiquement, dont l'élancement dépasse la valeur de 27 proposée par l'Eurocode 6 [1]). Un autre résultat intéressant pour l'ingénieur concerne la sensibilité assez forte de la capacité portante à l'excentrement avec lequel le chargement est appliqué.

Au travers de cette étude paramétrique, on montre également que la rapidité de résolution (quelques minutes pour un mur entier) rend la méthode développée très adaptée en cas d'incertitudes sur les données d'entrée du modèle, tant au niveau de la géométrie que des propriétés mécaniques ou du chargement. Enfin, pour se rapprocher des résultats obtenus expérimentalement, il serait intéressant d'explorer l'effet d'incertitudes sur les données de chargement : en effet, nous avons vu dans le chapitre 2 que le chargement imposé est plus proche d'une résultante et que les imperfections du mur pourraient conduire

cette charge à être mal répartie sur la largeur du mur.

## 5 Perspectives de l'approche proposée pour l'évaluation de la stabilité des ouvrages en maçonnerie

L'approche développée dans ce chapitre, et de manière plus générale dans ce mémoire, a pour but de déterminer la résistance au feu d'un mur de maçonnerie en pierre naturelle. Cependant, les développements proposés peuvent être appliqués sans modification aucune à bien d'autres cas.

On propose, à titre d'exemple, de s'intéresser au cas d'un mur de briques testé en cisaillement par Vermeltfoort et Raijmakers [185] et utilisé comme cas-test par de nombreux modélisateurs, dont Lourenço [186], Sutcliffe et al. [187] et Milani et al. [146].

Le mur considéré mesure 990 mm de large et 1000 mm de haut. Il est composé de briques pleines de dimensions 210 mm × 52 mm × 100 mm, assemblées par un mortier de 10 mm d'épaisseur. La brique (resp. le mortier) est supposée obéir à un critère de Mohr-Coulomb de cohésion  $c^b = 2$  MPa (resp.  $c^m = 0,22$  MPa) et d'angle de frottement interne  $\varphi^b = 45^\circ$  (resp.  $\varphi^m = 37^\circ$ ). Ces données correspondent à celles utilisées par Sutcliffe et al. [187] et par Milani et al. [146].

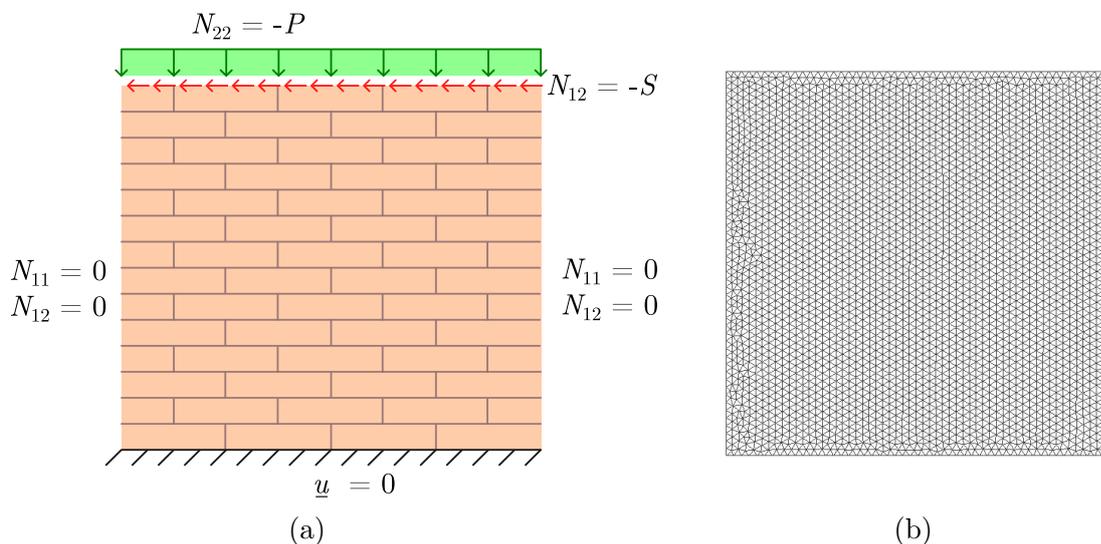


FIGURE 9.14 – (a) Conditions aux limites du problème considéré et (b) maillage utilisé, constitué de 3033 nœuds et 5864 éléments

Ce mur est soumis sur son bord supérieur à une charge verticale fixe  $P$  et à une charge horizontale variable  $S$ , dont on cherche à déterminer la valeur extrême pour une certaine valeur de  $P$ . La figure 9.14 résume les conditions aux limites considérées. Nous considérerons ici une précharge verticale de 2,12 MPa, soit  $P = 212$  kN.

Le tableau 9.2 compare la charge extrême de cisaillement obtenue par notre approche aux résultats de Sutcliffe et al. [187] et de Milani et al. [146]. Le mécanisme correspondant est représenté sur la figure 9.15 (a).

TABLEAU 9.2 – Comparaison des charges extrêmes obtenues avec les résultats de la littérature

Référence	Cette étude	Sutcliffe et al [187]	Milani et al. [146]	Milani et al. [146]
Approche	Cinématique homogénéisée	Statique directe	Statique homogénéisée	Cinématique homogénéisée
Valeur (kN/m)	82,9	82,9	80,81	90,66

On note que le résultat obtenu est identique à l’approche statique de Sutcliffe et al. [187] (qui propose une approche directe, et non pas homogénéisée), et légèrement inférieure aux approches cinématiques directes et par homogénéisation mises en œuvre par Milani et al. [146].

Il est également intéressant de noter la complémentarité des deux mécanismes (blocs et homogène) : à titre d’exemple la figure 9.15 représente la valeur locale de puissance dissipée dans le mécanisme homogène  $\Pi^{def}$  (b), dans le mécanisme de blocs  $\Pi^{blocs}$  (c), et de la puissance totale dissipée (d) (voir équation (9.16) ou annexe B).

Cette complémentarité est également illustrée au niveau des charges extrêmes. En considérant uniquement la fonction d’appui du mécanisme de blocs (correspondant à des blocs infiniment résistants - les déformations dans le mécanisme homogène sont bloquées), on obtient une charge extrême de 113 kN/m (soit 36 % de plus qu’avec la fonction d’appui du mécanisme complet). Avec un mécanisme homogène (déformations bloquées dans le mécanisme de blocs), la charge extrême vaut 106 kN/m (28 % de plus que pour le mécanisme complet). Cette exemple montre bien l’importance qu’il y a à considérer à la fois la résistance des joints et celle des blocs (qui est souvent considérée infinie) dans la modélisation des maçonneries.

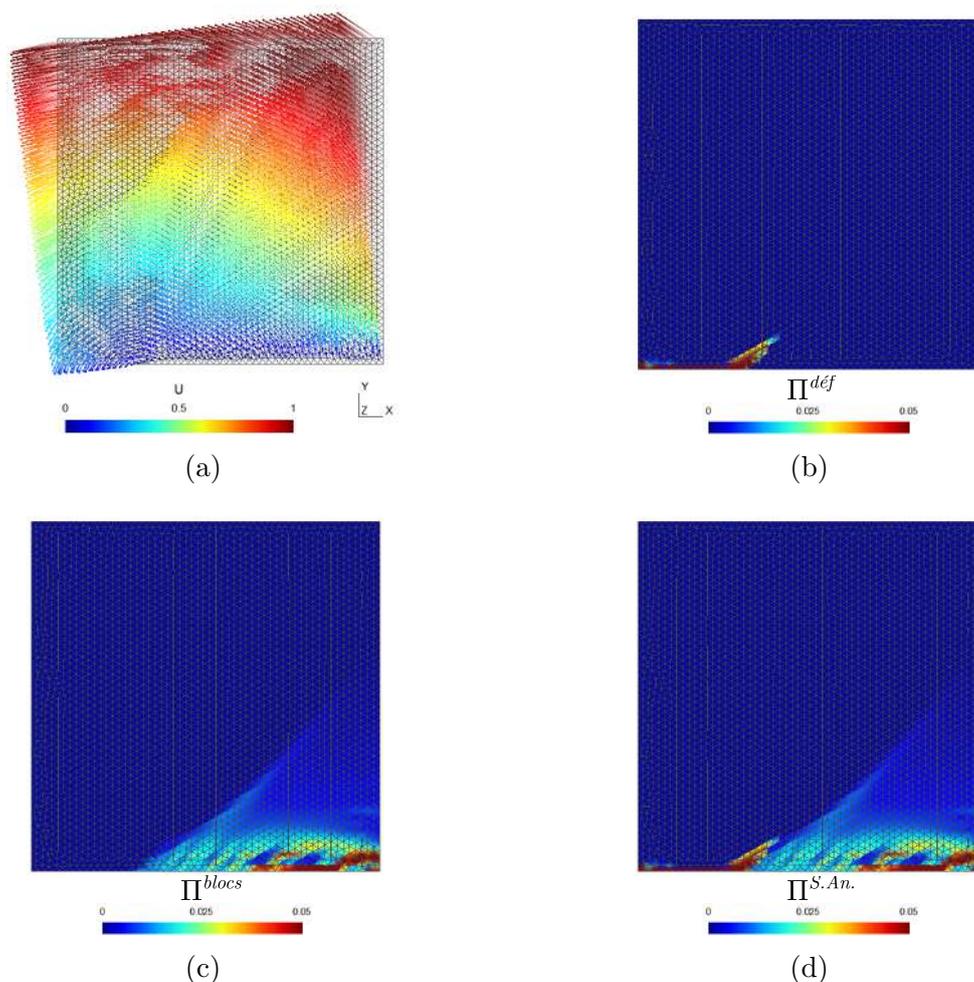


FIGURE 9.15 – Mécanisme optimal (a); Puissance dissipée dans les mécanismes de déformation homogène (b), de blocs (c) et dans le mécanisme semi-analytique (d)

## 6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons posé la clé de voûte de la méthode développée dans ce mémoire, permettant ainsi d'évaluer la stabilité au feu d'un mur, modélisé par une coque dans sa configuration déformée par le feu, avec un critère de résistance altéré par le feu.

L'approche cinématique numérique proposée permet une évaluation rigoureuse de la résistance au feu du mur. Sa mise en œuvre sur l'exemple du mur testé dans le chapitre 2 a permis de montrer que le mur perdait environ 23 % de sa capacité portante après 180 min d'exposition au feu. Cette méthode donne cependant des résultats supérieurs d'un facteur 2 à 3 aux charges extrêmes mesurées expérimentalement, et nécessitera donc quelques ajustements pour en accroître la précision. On peut notamment penser à une description des conditions aux limites plus proche des conditions réelles de l'essai ou à un critère de résistance local suivant mieux la courbe intrinsèque du critère de résistance expérimental de la pierre et du mortier que le critère de Mohr-Coulomb. Par ailleurs, l'approche proposée par le Calcul à la rupture est d'autant plus précise que le comportement des matériaux

est ductile. Il risque donc d'être nécessaire de définir des coefficients de correction pour prendre en compte la fragilité de la pierre.

Au travers d'une étude paramétrique, nous avons identifié quelques facteurs permettant d'augmenter la résistance au feu (encastrement du mur), et d'autres rendant l'exposition au feu plus délétère (chargement excentré, mur très élancé par exemple).

Finalement, la méthode développée est loin d'être limitée à l'étude de la stabilité des murs en pierre massive exposés au feu. Nous avons ainsi proposé un exemple applicatif simple sur un mur en brique sollicité en cisaillement, mais il serait intéressant de comparer les résultats de cette méthode aux autres approches existantes ainsi qu'à des résultats expérimentaux pour des murs en maçonnerie de blocs pleins sollicités dans leur plan ou hors de leur plan, pour des voûtes soumises à des chargements mécaniques ou exposées au feu, ou encore pour évaluer la résistance résiduelle de murs de maçonnerie après leur exposition au feu.

\*       \*  
\*  
\*  
\*

# Chapitre 10

## Conclusions et perspectives

### 1 Conclusions

Le présent travail a proposé une méthode de dimensionnement au feu des murs de maçonnerie en pierre massive, se voulant à visée applicative pour l'ingénieur. Tirant parti du caractère périodique des murs de maçonnerie étudiés, l'approche proposée se base sur le cadre de l'homogénéisation périodique, tant pour évaluer la courbure thermique, dans le cadre de la thermoélasticité, que pour déterminer le critère de résistance à l'échelle de l'assemblage, dans le cadre du Calcul à la rupture. Les résultats des modélisations développées ont ensuite été comparés à plusieurs essais, aussi bien à l'échelle de l'assemblage, à température ambiante et au feu, qu'à l'échelle du mur exposé au feu.

La première partie de ce mémoire nous a permis de mettre en évidence les phénomènes physiques qui entrent en jeu lorsqu'un mur en maçonnerie est exposé au feu, et de proposer une première modélisation du transfert thermique dans le mur sous une telle sollicitation. L'essai de résistance au feu présenté dans le chapitre 2 nous a offert une description détaillée des principaux effets du feu, et du gradient thermique qu'il génère, sur un mur de maçonnerie en pierre massive : l'apparition d'une déformée thermique et la perte de résistance progressive des matériaux. Deux essais complémentaires sur un four à maquette ont permis de compléter l'évaluation du gradient thermique dans l'épaisseur du mur, et de montrer la présence de couplages hygrothermiques marqués dus à la présence d'eau dans la pierre et dans le mortier. Les résultats de ces trois essais ont également été comparés à ceux d'autres essais, disponibles dans la littérature, réalisés sur des murs en pierre similaires. Enfin, l'essai thermomécanique nous a servi de fil rouge tout au long du mémoire, en fournissant une partie des données d'entrée des modèles développés et un point de comparaison pour les résultats obtenus par ces mêmes modèles.

Dans la deuxième partie de ce mémoire, constituée du chapitre 3, nous avons proposé une approche thermoélastique pour la détermination de la déformée thermomécanique du

mur exposé au feu sur l'une de ses faces. La comparaison de cette modélisation avec une approche tridimensionnelle directe par éléments finis a montré sa très bonne précision pour des temps de calcul bien moindres que le calcul complet. Ce faible temps de calcul rend cette approche très adaptée à son usage par l'ingénieur ainsi qu'à la réalisation d'études paramétriques et à la prise en compte d'incertitudes sur les données d'entrée du modèle. Cependant, le choix d'un comportement thermoélastique pour les matériaux a montré quelques limites et certains phénomènes observés expérimentalement et présentés dans le chapitre 2 (fissuration, stabilisation de la déformée thermique après un certain temps d'exposition au feu) n'ont pu être reproduits.

La troisième partie de ce mémoire a proposé une approche progressive de la détermination du critère de résistance macroscopique de l'assemblage de pierres et de mortier constituant le mur.

Le chapitre 4 a présenté une première approche simplifiée dans laquelle le mur est considéré comme infiniment long et modélisé en déformations planes dans son plan vertical transversal. Cette approche permet d'obtenir rapidement, grâce à la mise en œuvre des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture, un encadrement précis du domaine de résistance macroscopique. Le caractère bidimensionnel de la géométrie rend les calculs bien plus légers que dans le cas 3D, à la fois par le nombre limité de degrés de liberté et par le type de problème d'optimisation à résoudre (optimisation conique quadratique en 2D, optimisation semi-définie positive en 3D). Cela nous a donc permis de tester des critères de résistance locaux se rapprochant davantage de la courbe intrinsèque expérimentale de la pierre et du mortier. Nous nous sommes notamment intéressés à des critères de Mohr-Coulomb tronqués en traction et en compression, et avons montré que la troncature en traction avait un effet notable sur la résistance à la traction et à la flexion simple de l'assemblage. La limitation de résistance en compression isotrope semble quant à elle moins importante à prendre en compte.

Le chapitre 2 nous a montré que le mécanisme de rupture n'est pas un mécanisme plan, nécessitant donc d'étendre l'approche proposée dans le chapitre 4 et de considérer une géométrie et des sollicitations tridimensionnelles. Cela a fait l'objet des chapitres 5 et 6. Dans le chapitre 5, nous avons tout d'abord proposé une approche analytique du domaine de résistance en combinant un mécanisme de blocs rigides proposé par de Buhan et de Felice [4] à un mécanisme de déformation homogène (de type "borne de Voigt"), puis étendu cette approche au cas de chargements hors du plan du mur dans un premier temps, puis à la prise en compte la dégradation des propriétés de résistance de la pierre et du mortier dans un second temps. Le chapitre 6 a ensuite permis d'évaluer la pertinence de l'approche cinématique semi-analytique proposée dans le chapitre 5 en la comparant à la mise en œuvre numérique des approches statique et cinématique du Calcul à la rupture. Au travers d'une étude paramétrique, nous avons montré que la mise en œuvre numérique de l'approche cinématique permettait d'améliorer légèrement l'approche par l'extérieur du domaine de résistance par rapport à l'approche semi-analytique, mais ce

au prix d'un temps de calcul qui la rendait inaccessible à l'ingénieur. Nous avons également constaté que l'écart entre les résultats des approches statique et cinématique était plus grand que dans le cas 2D (environ 15 % d'écart en compression simple dans la direction verticale, contre 5 % en 2D) à cause de l'augmentation de la taille du problème et des difficultés de calcul évoquées précédemment. Enfin, pour l'ingénieur et le praticien, l'étude paramétrique a souligné l'intérêt de réaliser des joints de faible épaisseur afin de maximiser la résistance en compression et au cisaillement de l'assemblage. Elle a aussi montré que la résistance à la traction, au cisaillement et à la flexion simple de l'assemblage dépendaient principalement de la résistance du mortier, tandis que la résistance à la compression dépendait principalement de celle de la pierre.

Nous avons vu dans le chapitre 4 l'intérêt de décrire la résistance des matériaux constitutifs par un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. Le chapitre 7 propose un prolongement des chapitres 5 et 6 permettant de prendre en compte ce critère de résistance. Nous avons vu que la mise en œuvre numérique de ce critère ne posait pas de difficulté particulière, tout comme l'approche analytique vis-à-vis de chargements plans. En revanche, la mise en œuvre semi-analytique de l'approche cinématique ne nous a pas permis d'aboutir à une formulation pouvant se mettre sous la forme d'un problème d'optimisation quadratique conique, nécessaire pour l'approche proposée dans le chapitre 9. Nous avons donc proposé quelques pistes pour contourner ce problème, dont l'utilisation d'un critère de Mohr-Coulomb bilinéaire, qui constitue une autre approximation de la courbe intrinsèque des matériaux considérés. Un autre résultat important de ce chapitre concerne l'influence de la résistance à la traction de la pierre sur la résistance en compression de l'assemblage. La pierre étant particulièrement fragile en traction, on peut alors se demander s'il est bien raisonnable de se baser sur le Calcul à la rupture pour déterminer la résistance en compression de l'assemblage, et s'il ne serait pas préférable de se baser sur des modélisations plus adaptées aux matériaux quasi-fragiles en tenant notamment compte de l'endommagement des matériaux. Nous avons tenté d'apporter une réponse expérimentale à cette question dans le chapitre 8.

Pour cette validation expérimentale à l'échelle de l'assemblage, nous avons proposé un dispositif de chargement permettant de charger un trumeau, dont la géométrie est proche d'une cellule de base du mur considéré dans le chapitre 2, en compression centrée ou excentrée par rapport au plan du trumeau. Ces essais ont mis en évidence la forte influence de l'excentrement, même relativement faible, sur la capacité portante du trumeau, ce qui justifie donc parfaitement la prise en compte de l'excentrement dû à la déformée thermique dans les calculs. La comparaison à une modélisation numérique basée sur l'approche cinématique du Calcul à la rupture a montré que le Calcul à la rupture reproduisait bien les tendances observées en termes de perte de capacité portante due à l'excentrement de la charge. Elle a également montré l'importance d'utiliser des essais adaptés, qui peuvent être différents des essais "classiques" de l'ingénieur, pour déterminer les propriétés de résistance des matériaux utilisées comme paramètres d'entrée des modèles.

La quatrième partie de ce mémoire, constituée du chapitre 9, a exposé la "clé de voûte" de l'approche développée dans cette thèse. Ce chapitre a présenté l'implémentation numérique de l'approche cinématique du Calcul à la rupture sur le mur dans sa configuration déformée par le feu calculée dans le chapitre 3, modélisé comme une coque, avec un critère de résistance altéré par le feu tel que déterminé dans le chapitre 5. L'apport majeur de l'approche proposée dans ce chapitre réside dans la résolution directe du problème auxiliaire d'homogénéisation en Calcul à la rupture à l'échelle de chaque nœud du maillage éléments finis, ce qui permet une résolution rapide du problème. Cette modélisation a notamment permis de montrer qu'un mur porteur en maçonnerie d'élançement courant (inférieur à 15) rompait en compression, et non pas en flexion, lorsqu'il était exposé au feu. La comparaison des résultats de la modélisation aux résultats expérimentaux du chapitre 2 a néanmoins montré que la méthode proposée surestimait la charge extrême du mur d'un facteur 2 à 3. Il semble donc nécessaire de poursuivre le développement de la méthode proposée en affinant certains aspects pour en améliorer la précision.

## 2 Perspectives

### 2.1 Sur l'approche de modélisation proposée dans cette thèse

La méthode de modélisation proposée dans cette thèse a été développée dans le cadre de l'évaluation de la résistance au feu des murs de maçonnerie en pierre massive. Cependant, nous avons vu dans le chapitre 9 qu'elle pourrait être utilisée dans bien d'autres cas sans adaptations majeures. Une première perspective consiste donc à l'appliquer à d'autres types de maçonneries (notamment les maçonneries en briques) et à d'autres géométries (notamment les voûtes), que ce soit à température ambiante ou au feu. Les résultats d'un tel travail pourront ensuite être comparés à d'autres approches de modélisation, comme par exemple les différentes approches proposées par Milani [81], ce qui permettrait notamment de comparer l'approche cinématique proposée à une approche statique. Des développements additionnels pourraient également être réalisés pour intégrer une description plus précise du critère de résistance à l'échelle locale, ou pour prendre en compte une résistance finie à l'effort tranchant dans le critère de résistance macroscopique. Ainsi, on peut espérer se rapprocher des résistances réellement mesurées sur des structures en maçonnerie.

De manière plus générale, il serait intéressant de voir comment la méthode proposée peut être adaptée pour prendre en compte d'autres types d'assemblages maçonnés, qu'ils soient réguliers ou irréguliers, périodiques ou non.

## 2.2 Sur la comparaison entre la modélisation et les essais

La comparaison expérimentale à température ambiante proposée dans le chapitre 8 montre que le Calcul à la rupture pourrait être bien adapté à la détermination de la résistance des maçonneries, mais qu'il est néanmoins nécessaire de déterminer les paramètres d'entrée du modèle par des essais adaptés, qui ne sont pas nécessairement les essais classiques de l'ingénieur. Il serait intéressant de vérifier dans quelle mesure l'approche par le Calcul à la rupture reste adaptée pour d'autres types de blocs (pierre ou autres matériaux) et de mortier (comme un mortier de ciment potentiellement plus fragile qu'un mortier de chaux hydraulique).

A haute température en revanche, la différence entre les résultats de la modélisation et ceux de l'essai est plus élevée. Cela peut provenir d'incertitudes expérimentales, mais aussi des hypothèses de modélisation. En ce qui concerne l'évaluation de la déformée, nous avons notamment observé expérimentalement l'apparition de fissures lors de l'exposition au feu du mur. L'apparition de ces fissures ne peut pas être modélisée dans le cadre thermoélastique linéaire du modèle proposé. Compte-tenu de leur positionnement périodique, il pourrait cependant être intéressant de les intégrer directement au modèle, soit au niveau de la cellule de base, soit au niveau du mur homogénéisé, pour voir si la déformée thermomécanique ainsi obtenue se rapproche davantage de la déformée obtenue expérimentalement. Concernant l'évaluation de la résistance du mur, le Calcul à la rupture ne permet pas de prendre en compte la fragilité de la pierre et, dans une moindre mesure, du mortier. Il sera probablement nécessaire de définir un coefficient correctif pour prendre en compte cette fragilité, et sa définition passera probablement par la réalisation de campagnes expérimentales additionnelles. Ces campagnes expérimentales, malgré leur coût élevé, paraissent nécessaires pour s'assurer de la fiabilité des résultats obtenus. Difficile en effet de tirer des conclusions d'un unique essai de résistance au feu lorsque l'on connaît toutes les incertitudes introduites par le dispositif expérimental, par la variabilité des matériaux et par la construction du mur.

De manière plus générale, il serait intéressant d'introduire des méthodes probabilistes pour l'évaluation de la stabilité des ouvrages en maçonnerie. Le Calcul à la rupture, par sa nature directe et donc plus rapide, se prête bien à de telles approches (Salençon [115]). L'incertitude et la variabilité peuvent résider tant au niveau de la géométrie de l'assemblage (comme cela a déjà été en partie proposé par Sab [157]), qu'au niveau du critère de résistance ou du niveau de chargement.

## 2.3 Sur le comportement au feu des maçonneries

Le chapitre 3 et le chapitre 9 ont mis en évidence des différences entre le comportement expérimental et les résultats des différentes modélisations, tant pour la déformée que

pour la résistance au feu du mur. Ils ont également montré que les conditions aux limites imparfaites de l'essai étaient difficiles à prendre en compte par un modèle de plaque ou de coque, et pourraient nécessiter une modélisation 3D, avec prise en compte de certains phénomènes anélastiques d'élastoplasticité, d'endommagement et de fissuration. De tels modèles sont assez peu compatibles avec des méthodes d'ingénieur, mais peuvent être particulièrement intéressants pour l'analyse approfondie d'édifices monumentaux comme la cathédrale Notre-Dame de Paris, pour laquelle les financements et le temps disponibles sont plus importants. De tels travaux ont été entrepris dans le cadre de deux projets ANR : POSTFIRE [39] et DEMMEFI [40]. Une première perspective intéressante de cette thèse et de ces deux projets serait donc de comparer les résultats obtenus par les différents modèles développés. Par ailleurs, dans ces deux projets comme dans cette thèse, des campagnes expérimentales permettent de mieux comprendre le comportement à température ambiante ou élevée des matériaux constitutifs des maçonneries, de leur assemblage ou de murs. Des comparaisons entre les résultats expérimentaux et les résultats de la modélisation pourraient donc être proposées dans un futur proche.

De manière plus générale, les résultats de cette thèse constituent un premier pas vers l'intégration de méthodes de dimensionnement au feu des murs en pierre massive dans l'Eurocode 6 (Partie 1-2). Une telle introduction faciliterait grandement le dimensionnement au feu des murs de maçonnerie en pierre massive porteuse vis-à-vis du feu, et contribuerait à rendre plus attractif ce matériau très avantageux du point de vue de l'impact environnemental des constructions.

\*   \*  
\*  
\*  
\*

# Annexe A

## Essais de caractérisation des matériaux mis en œuvre dans les essais du chapitre 2

Cette annexe détaille les essais de caractérisation des matériaux mis en œuvre pour la réalisation des murs et murets testés au feu lors des essais présentés dans le chapitre 2.

Les propriétés physiques et mécaniques évaluées sont la masse volumique, le module de Young dynamique, la résistance en traction et en compression et la teneur en eau.

### 1 Masse volumique

La masse volumique des deux composants a été mesurée de manière sommaire (Masse du bloc / volume du bloc) sur tous les échantillons testés dans le cadre des essais de caractérisation.

La masse volumique de la pierre est de  $1550 \text{ kg/m}^3$ , avec un coefficient de variation de 2,5 %, principalement dû à l'hétérogénéité de la pierre. Cette masse volumique est tout à fait cohérente avec les données provenant de procès-verbaux du fournisseur, et disponible dans la base de données "Lithoscope" du CTMNC ( $1540 \text{ kg/m}^3$ , mesurée selon la norme NF EN 1936 [188]).

La masse volumique du mortier a été déterminée sur les éprouvettes destinées à l'essai de caractérisation en flexion et en compression. Elle est un peu plus élevée que celle de la pierre, et vaut  $1640 \text{ kg/m}^3$ .

## 2 Vitesse des ondes

Des essais de vitesse de propagation des ondes  $P$  ont été réalisés sur des cubes de pierre de 10 cm, dans les trois directions potentielles d'anisotropie de la pierre.



FIGURE A.1 – Mesure de la vitesse des ondes  $P$

Les essais n'ont pas montré d'anisotropie en termes de vitesse de propagation des ondes. La vitesse d'onde moyenne est 2050 m/s, avec un coefficient de variation de 3,5 %.

Le module d'Young dynamique  $E^{dyn}$  de la pierre est relié à la vitesse des ondes  $P$ , notée  $V_p$ , par la relation suivante :

$$E^{dyn} = \rho \frac{V_p^2 (1 + \nu)(1 - 2\nu)}{1 - \nu} \quad (\text{A.1})$$

A partir de ces données, pour une masse volumique valant  $\rho = 1550 \text{ kg/m}^3$  (déterminée dans la partie 1) et un coefficient de Poisson compris entre  $\nu = 0,2$  et  $\nu = 0,3$ , on obtient un module d'élasticité compris entre  $E^{dyn} = 4,9 \text{ GPa}$  et  $E^{dyn} = 5,9 \text{ GPa}$ . Cette valeur est en cohérence avec la valeur donnée par Huet [189] ( $E^{stat} = 4,5 \text{ GPa}$ ).

## 3 Résistance à la traction et à la compression

### 3.1 Pierre

Neuf essais de résistance en compression simple, suivant la norme NF EN 772-1 [102], ont été réalisés sur des blocs de pierre cubiques de 10 cm de côté, testés perpendiculairement au plan de sédimentation. La résistance en compression moyenne est  $R_c^b = 5,3 \text{ MPa}$ , avec un coefficient de variation de 11 %.

Huit essais de résistance en traction par flexion, suivant la norme NF EN 12372 [190], ont été réalisés sur des prismes de pierre de dimensions  $L = 300 \text{ mm}$ ,  $b = 50 \text{ mm}$  et

### 3. Résistance à la traction et à la compression

---

$h = 50$  mm, le plan de sédimentation étant perpendiculaire à la grande dimension de l'éprouvette.

Ces essais sont des essais de flexion trois points, comme décrits par la figure A.2. Sur cette figure,  $b$  représente l'épaisseur dans la direction transversale. La force  $F$  appliquée est reliée à la résistance en traction par la relation :

$$R_f = \frac{3Fl}{2bh^2} \quad (\text{A.2})$$

où la distance entre les appuis vaut  $l = 250$  mm Cette résistance en traction par flexion  $R_f$  correspond donc à la limite d'élasticité en traction du matériau testé.

La résistance à la traction moyenne est  $R_f^b = 1,15$  MPa, avec un coefficient de variation de 8 %.

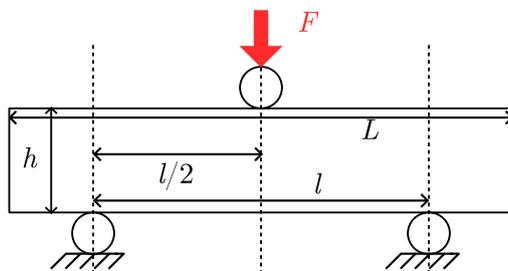


FIGURE A.2 – Essai de résistance à la traction par flexion de la pierre

On note que, en compression comme en traction par flexion, la dispersion des résultats est plutôt faible.

## 3.2 Mortier

Trois échantillons de mortier de dimensions 4 cm x 4 cm x 16 cm ont été testés selon la norme NF EN 1015-11 [179] (voir figure A.3). Le principe de cet essai est de faire, dans un premier temps, un essai de flexion trois points (similaire à celui décrit dans la sous-partie 3.1 et sur la figure A.2 pour la pierre, mais avec  $b = h = 40$  mm,  $L = 160$  mm et  $l = 100$  mm). Cet essai rompt l'éprouvette en deux morceaux, sur lesquels on vient faire un essai de compression simple en appuyant sur une surface carrée de 4 cm de côté (voir figure A.3 (b)).

On notera que le mortier frais présentait un aspect très liquide, et que le mortier durci était tellement friable qu'une des éprouvettes avait déjà rompu avant l'essai de flexion. Cette consistance est probablement due à l'eau ajoutée au mortier pour obtenir une maniabilité suffisante compte-tenu de la porosité du calcaire de Saint-Vaast. Les valeurs obtenues sont en cohérence avec celles obtenues lors de la campagne expérimentale sur des

trumeaux sollicités mécaniquement, à température ambiante, présentée au chapitre 8, et pour laquelle le mortier avait été réalisé par le même opérateur.

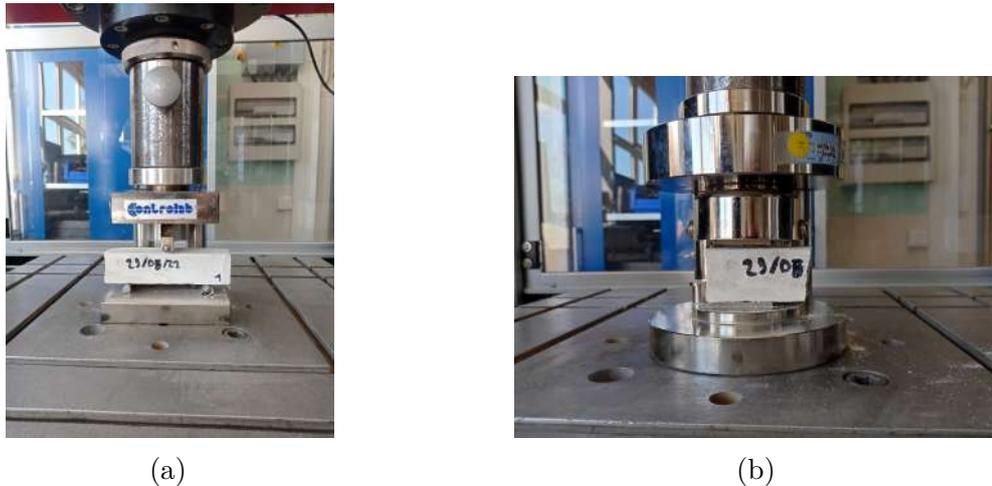


FIGURE A.3 – Essai de résistance en flexion puis compression du mortier selon la norme NF EN 1015-11

La résistance moyenne à la traction par flexion est 0,08 MPa. Le calcul d'un écart type pour seulement trois valeurs ne nous a pas paru pertinent.

La résistance moyenne à la compression est  $R_c^m = 0,51$  MPa, avec un coefficient de variation de 6 %, sur six échantillons.

## 4 Teneur en eau

Lors d'un essai de résistance au feu normalisé, la teneur en eau massique des composants doit être suivie, et selon la norme NF EN 1363 [96], l'essai ne peut être conduit que si la variation de cette teneur en eau (correspondant simplement à la variation relative de masse ici) est inférieure à 0,1% par 24 h. Afin de vérifier cette condition, deux demi-blocs de pierre "témoins" (dimensions 36 cm x 36 cm x 20 cm) identiques à ceux composant le mur et les murets, ont été pesés quotidiennement entre la confection du mur et la réalisation de l'essai, soit durant 34 jours. La stabilisation pondérale a été atteinte au bout de 27 jours. Les blocs témoins ont été passés à l'étuve après 34 jours de séchage. La teneur en eau de ces blocs témoins le jour de l'essai thermo-mécanique a été évaluée à 0,3%.

On note tout de même l'importante perte de masse des deux blocs témoins durant les 34 jours de séchage, de l'ordre de 15 % de leur masse initiale. Cette forte teneur en eau initiale provient à la fois des phases d'extraction en carrière et de découpe des blocs en usine. Elle s'explique par la nature poreuse de la pierre, associée à une très forte capacité d'absorption d'eau par capillarité. Nous reviendrons sur ces deux propriétés dans le chapitre 8

\* \*  
\*



# Annexe B

## Nomenclature des différentes approches par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique introduites dans les chapitres 5 et 7

Cette annexe récapitule les différentes approches par l'extérieur du domaine de résistance macroscopique introduites dans les chapitres 5 et 7, et les domaines de résistance associés.

### 1 Généralités

Les notations suivantes, relativement courantes, ont été utilisées dans les chapitres 5 à 7.

- $G^M$  Désigne de façon générique le domaine de résistance macroscopique du mur. Ce domaine n'est pas connu et tout l'objet des chapitres 5 à 7 est de réussir à en proposer des approches par l'intérieur et par l'extérieur.
- $\Pi^{nom\_critère}$  Fonction d'appui associée au domaine de résistance macroscopique  $G^{nom\_critère}$ .
- $\pi^k(\underline{d})$  Fonction d'appui du matériau  $k$  suivant un critère de Mohr-Coulomb pour un taux de déformation local  $\underline{d}$ .  
*Introduit dans le chapitre 5*
- $\pi^{MCT,k}(\underline{d})$  Fonction d'appui du matériau  $k$  suivant un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, pour un taux de déformation local  $\underline{d}$ .  
*Introduit dans le chapitre 7*

## 2 Approches cinématiques pour des sollicitations dans le plan du mur

Les approches par l'extérieur du domaine de résistance présentées dans la partie 3 du chapitre 5 prennent en compte uniquement des sollicitations dans le plan du mur (i.e. pour des sollicitations du type  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}} = 0)$ ). Leur nom est affecté d'un exposant "p" pour "plan". Le critère de résistance local est un critère de Mohr-Coulomb.

Les trois approches suivantes ont été présentées :

$G^{def,p}$       Domaine obtenu par le mécanisme mettant en œuvre un taux de déformation homogène sur la cellule de base, identique dans la pierre et dans le mortier. Correspond à une borne type "Voigt" sur la résistance.

*Présenté dans la sous-partie 3.1 du chapitre 5.*

$G^{blocs,p}$       Domaine obtenu par le mécanisme de blocs rigides proposé par de Buhan et de Felice [4].

*Présenté dans la sous-partie 3.2 du chapitre 5.*

$G^{an,p}$       **Approche analytique du domaine de résistance.** Intersection des domaines  $G^{def,p}$  et  $G^{blocs,p}$ .

*Présenté dans la sous-partie 3.3 du chapitre 5.*

## 3 Approches cinématiques pour des sollicitations quelconques

Cette partie récapitule les approches par l'extérieur du domaine de résistance présentées dans la partie 4 du chapitre 5, pour un critère de résistance local de Mohr-Coulomb.

Les trois approches suivantes ont été présentées :

$G^{def}$       Domaine de résistance obtenu par le mécanisme mettant en œuvre un taux de déformation "homogène par couches", de la forme  $\underline{d} = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}$ , identique dans la pierre et dans le mortier.

*Présenté dans la sous-partie 4.2 du chapitre 5.*

$G^{blocs}$       Domaine de résistance obtenu par le mécanisme de blocs rigides introduit par Sab [5].

*Présenté dans la sous-partie 4.1 du chapitre 5; le calcul de la fonction d'appui est présenté dans la partie 1 de l'annexe C.*

$G^{S.An.}$  **Approche Semi-Analytique du domaine de résistance.** Intersection des deux domaines  $G^{def}$  et  $G^{blocs}$ .  
*Présenté dans la sous-partie 4.3 du chapitre 5.*

## 4 Approches cinématiques pour des sollicitations quelconques, avec prise en compte de la dégradation des matériaux due à la température

Dans la partie 5 du chapitre 5, nous avons introduit des approches par l'extérieur du domaine de résistance du mur lorsque celui est exposé au feu. Ces approches par l'extérieur prennent donc en compte la dégradation des propriétés de résistance des matériaux dans l'épaisseur du mur. Un exposant " $\theta$ " est apposé à leur nom pour traduire la prise en compte de la dégradation due aux températures élevées.

Trois approches ont été présentées :

$G^{def,\theta}$  Domaine de résistance obtenu par le mécanisme mettant en œuvre un taux de déformation "homogène par couches", de la forme  $\underline{d} = \underline{D} - \xi_3 \underline{\dot{\chi}}$ , identique dans la pierre et dans le mortier.

*Présenté dans la sous-partie 5.1 du chapitre 5.*

$G^{blocs,\theta}$  Domaine de résistance obtenu par le mécanisme de blocs rigide introduit par Sab [5].

*Présenté dans la sous-partie 5.1 du chapitre 5; le calcul de la fonction d'appui est présenté dans la partie 1 de l'annexe C.*

$G^{S.An.,\theta}$  **Approche Semi-Analytique du domaine de résistance, prenant en compte la dégradation des matériaux à haute température.** Intersection des deux domaines  $G^{def,\theta}$  et  $G^{blocs,\theta}$ . Il s'agit du domaine de résistance (et de la fonction d'appui correspondante) utilisé dans le chapitre 9 pour évaluer la stabilité du mur exposé au feu.

*Présenté dans la sous-partie 5.1 du chapitre 5.*

## 5 Approches cinématiques pour des sollicitations dans le plan du mur, critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction

Dans la partie 3.1 du chapitre 7, nous avons étendu l'approche proposée dans la partie 3 du chapitre 5 au cas où les matériaux vérifient localement un critère de Mohr-Coulomb

tronqué en traction, toujours pour des sollicitations dans le plan du mur.

Le nom des domaines obtenu est affecté d'un "p" pour montrer que ces domaines ne concernent que des sollicitations dans le plan du mur, et de "T" pour rappeler que le critère local est celui de Mohr-Coulomb tronqué en traction.

Les trois approches suivantes ont été présentées pour généraliser l'approche analytique du chapitre 5 :

- $G^{def,p,T}$  Domaine obtenu par le mécanisme mettant en œuvre un taux de déformation homogène sur la cellule de base, identique dans la pierre et dans le mortier. Correspond à une borne de type "Voigt" sur la résistance.  
*Présenté dans la sous-partie 3.1.2 du chapitre 7; le calcul de la fonction d'appui est présenté dans la partie 3 de l'annexe C.*
- $G^{blocs,p,T}$  Domaine obtenu par le mécanisme de blocs rigides proposé par de Buhan et de Felice [4].  
*Présenté dans la sous-partie 3.1.1 du chapitre 7; le calcul de la fonction d'appui est présenté dans la partie 2 de l'annexe C.*
- $G^{S.An.,p,T}$  **Approche semi-analytique du domaine de résistance du mur sollicité dans son plan pour un critère local de Mohr-Coulomb tronqué en traction.** Intersection des domaines  $G^{def,p,T}$  et  $G^{blocs,p,T}$ .  
*Présenté dans la sous-partie 3.1.3 du chapitre 7.*

Ces trois approches n'étaient cependant pas suffisantes pour rendre compte de certains mécanismes optimaux pour des troncatures en traction très faibles. Deux approches additionnelles ont alors été proposées :

- $G^{loc}$  Domaine obtenu par le mécanisme mettant en œuvre des taux de déformation homogènes par zones.  
*Présenté dans la sous-partie 3.2 du chapitre 7.*
- $G^{An.,p,T}$  **Approche analytique du domaine de résistance du mur sollicité dans son plan pour un critère local de Mohr-Coulomb tronqué en traction.** Intersection des domaines  $G^{loc}$  et  $G^{def,p,T}$ .  
*Présenté dans la sous-partie 3.2 du chapitre 7.*

## 6 Approches cinématiques pour des sollicitations quelconques, critère de Mohr-Coulomb bilinéaire

Nous avons montré dans la partie 4 du chapitre 7 qu'il était difficile d'étendre l'approche semi-analytique du chapitre 5 au cas où les matériaux suivaient localement un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction. En revanche, il est possible de considérer un critère de





# Annexe C

## Fonctions d'appui des différents critères macroscopiques utilisés dans cette thèse

Cette annexe détaille les calculs mis en œuvre pour déterminer les fonctions d'appui macroscopiques pour les trois mécanismes et critères locaux suivants :

- Mécanisme de blocs proposé par Sab [5] pour un critère de Mohr-Coulomb incluant, en plus, la variation de la cohésion du matériau constitutif du mortier dans l'épaisseur du mur ;
- Mécanisme de déformation homogène sur la cellule de base proposé dans le chapitre 6, en considérant un critère de résistance local de Mohr-Coulomb tronqué en traction, pour des sollicitations dans le plan du mur ;
- Mécanisme de blocs proposé par de Buhan et de Felice [4], en considérant un critère de résistance local de Mohr-Coulomb tronqué en traction, pour des sollicitations dans le plan du mur.

Les notations sont similaires à celles utilisées dans les chapitres 5 à 7.

### 1 Fonction d'appui associée au mécanisme de blocs proposé par Sab [5]

Le mécanisme proposé par Sab [5] repose sur une division de la cellule de base en quatre blocs, proposée par de Buhan et de Felice [4], représentés sur la figure C.1.

Comme dans les chapitres 5 à 7, les blocs ont une hauteur  $a$ , une longueur  $b$  et une épaisseur  $h$ .  $\lambda$  permet de paramétrer le positionnement des points  $M^+$ ,  $M^-$ ,  $N^+$  et  $N^-$ ,

qui seront explicités par la suite. Dans la direction transversale  $\xi_3$ , l'origine  $O$  du repère appartient au plan médian de la cellule de base.

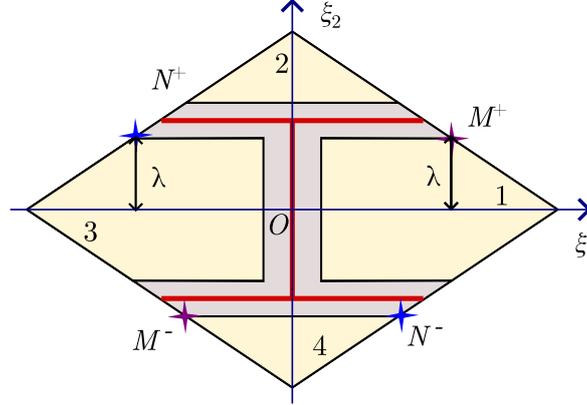


FIGURE C.1 – Division des blocs pour le mécanisme proposé par Sab [5]

## 1.1 Détermination de la vitesse des quatre blocs de la cellule de base

On rappelle que les quatre blocs composant la cellule de base sont animés d'un mouvement de corps rigide tel que la vitesse  $\underline{u}^i$  de chaque bloc puisse s'écrire :

$$\underline{u}^i = \underline{t}^i + \underline{\Omega}^i \wedge (\underline{\xi} - \underline{\xi}^i) \quad (\text{C.1})$$

où  $\underline{t}^i$  est la vitesse de translation du bloc,  $\underline{\Omega}^i$  sa vitesse de rotation et  $\underline{\xi}^i$  le vecteur coordonnée du centre du bloc.

L'objectif de ce paragraphe est de déterminer les valeurs des translations et rotations de chaque bloc de sorte à ce que la différence de vitesse entre deux points de vecteurs coordonnées respectifs  $\underline{\xi}$  et  $\underline{\xi}'$ , situés sur les bords de la cellule de base et reliés par périodicité vaille :

$$\Delta \underline{u} = \underline{D} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') - \xi_3 \underline{\dot{\chi}} \cdot (\underline{\xi} - \underline{\xi}') + \frac{1}{2} \left( (\underline{\xi} \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}) - (\underline{\xi}' \cdot \underline{\dot{\chi}} \cdot \underline{\xi}') \right) \underline{e}_3 \quad (\text{C.2})$$

Soient les deux couples  $(N, N^+)$  et  $(M, M^+)$  tels que définis sur la cellule de base représentée sur la figure C.1.

Les coordonnées de ces quatre points sont les suivantes :

$$M^+ : \begin{pmatrix} \frac{-b}{2a}\lambda + \frac{b}{2} \\ \lambda \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad M^- : \begin{pmatrix} \frac{-b}{2a}\lambda \\ \lambda - a \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$N^+ : \begin{pmatrix} \frac{b}{2a}\lambda - \frac{b}{2} \\ \lambda \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad N^- : \begin{pmatrix} \frac{b}{2a}\lambda \\ \lambda - a \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Pour que le champ de vitesse  $\underline{u}$  soit cinématiquement admissible, la variation de vitesse entre les deux points  $M$  et  $M^+$  s'écrit, d'après l'équation (C.2) :

$$\underline{u}(M^+) - \underline{u}(M^-) = \begin{pmatrix} (D_{11} - \xi_3 \dot{\chi}_{11}) \frac{b}{2} + (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12}) a \\ (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12}) \frac{b}{2} + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) a \\ \frac{b^2}{8} \dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22} \frac{a^2}{2} + \lambda (a \dot{\chi}_{22} - \frac{b^2}{4a} \dot{\chi}_{11}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Entre les points  $N$  et  $N^+$ , elle s'écrit :

$$\underline{u}(N^+) - \underline{u}(N^-) = \begin{pmatrix} -(D_{11} - \xi_3 \dot{\chi}_{11}) \frac{b}{2} + (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12}) a \\ -(D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12}) \frac{b}{2} + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) a \\ \frac{b^2}{8} \dot{\chi}_{11} - \dot{\chi}_{22} \frac{a^2}{2} + \lambda (a \dot{\chi}_{22} - \frac{b^2}{4a} \dot{\chi}_{11}) \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Par ailleurs, d'après l'équation (C.1), la différence de vitesse entre les points  $M^+$  et  $M^-$  s'écrit (Cecchi et Sab [75]) :

$$\underline{u}^1 - \underline{u}^4 = \underline{t}^1 - \underline{t}^4 + (\underline{\Omega}^1 - \underline{\Omega}^4) \wedge \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a}\lambda \\ \lambda \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

si les points appartiennent aux blocs 1 et 4, et :

$$\underline{u}^2 - \underline{u}^3 = \underline{t}^2 - \underline{t}^3 + (\underline{\Omega}^2 - \underline{\Omega}^3) \wedge \begin{pmatrix} -\frac{b}{2a}\lambda + \frac{b}{2} \\ \lambda - a \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

si les deux points appartiennent aux blocs 2 et 3.

De la même manière, la différence de vitesse entre les points  $N^+$  et  $N^-$  s'écrit :

$$\underline{u}^3 - \underline{u}^4 = \underline{t}^3 - \underline{t}^4 + (\underline{\Omega}^3 - \underline{\Omega}^4) \wedge \begin{pmatrix} \frac{b}{2a}\lambda \\ \lambda \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.9})$$

si les points appartiennent aux blocs 3 et 4, et :

$$\underline{u}^2 - \underline{u}^1 = \underline{t}^2 - \underline{t}^1 + (\underline{\Omega}^2 - \underline{\Omega}^1) \wedge \begin{pmatrix} \frac{b}{2a}\lambda - \frac{b}{2} \\ \lambda - a \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

si les points appartiennent aux blocs 1 et 2

En reliant les expressions des équations (C.7) et (C.8) à celle de l'équation (C.5) d'une part, et celle des équations (C.9) et (C.10) à celle de l'équation (C.6) d'autre part, on peut identifier les valeurs des translations relatives et rotations relatives entre les différents blocs. Les mouvements des quatre blocs sont ensuite définis à un mouvement de corps rigide près, dont on notera  $\underline{t}$  la vitesse de translation et  $\underline{\Omega}$  la vitesse de rotation. Le tableau C.1 donne les composantes du vecteur vitesse de translation et du vecteur vitesse de rotation de chaque bloc en fonction du chargement ( $\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}$ ) ainsi que des composantes des vecteurs  $\underline{t}$  et  $\underline{\Omega}$  du mouvement de corps rigide global.

TABLEAU C.1 – Valeurs des translations et rotations des quatre blocs du mécanisme

	Bloc 1	Bloc 2	Bloc 3	Bloc 4
$t_1^i =$	$D_{11}\frac{b}{2} + t_1$	$D_{12}a + t_1$	$-D_{11}\frac{b}{2} + t_1$	$-D_{12}a + t_1$
$t_2^i =$	$D_{12}\frac{b}{2} + t_2$	$D_{22}a + t_2$	$D_{22}a + t_2$	$-D_{22}a + t_2$
$t_3^i =$	$-\frac{a^2}{2}\dot{\chi}_{22} + t_3$	$-\frac{b^2}{8}\dot{\chi}_{11} + t_3$	$-\frac{a^2}{2}\dot{\chi}_{22} + t_3$	$-\frac{b^2}{8}\dot{\chi}_{11} + t_3$
$\Omega_1^i =$	$\dot{\chi}_{12}\frac{b}{2} + \Omega_1$	$\dot{\chi}_{22}a + \Omega_1$	$-\dot{\chi}_{12}\frac{b}{2} + \Omega_1$	$-\dot{\chi}_{12}\frac{b}{2} + \Omega_1$
$\Omega_2^i =$	$-\dot{\chi}_{11}\frac{b}{2} + \Omega_2$	$-\dot{\chi}_{12}a + \Omega_2$	$\dot{\chi}_{11}\frac{b}{2} + \Omega_2$	$\dot{\chi}_{12}a + \Omega_2$
$\Omega_3^i =$	$\Omega_3$	$\Omega_3$	$\Omega_3$	$\Omega_3$

## 1.2 Discontinuité de vitesse

A partir des vitesses données dans le tableau C.1, il devient possible d'établir la valeur des différentes discontinuités de vitesses entre les blocs. Les vecteurs discontinuité de vitesse des discontinuités 1-3, 3-2, 4-3, 1-4 et 2-1 sont donnés par les équations (C.11) à (C.15).

$$\underline{u}^1 - \underline{u}^3 = \begin{pmatrix} bD_{11} - \xi_3\dot{\chi}_{11} \\ bD_{12} - \xi_3b\dot{\chi}_{12} - b\Omega_3 \\ \xi_2b\dot{\chi}_{12} + b\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

$$\underline{u}^3 - \underline{u}^2 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2}D_{11} - aD_{12} + \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}\right) - a\Omega_3 \\ -\frac{b}{2}D_{12} - aD_{22} + \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{12} + a\dot{\chi}_{22}\right) + \frac{b}{2}\Omega_3 \\ -\left(\xi_1 + \frac{b}{4}\right)\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}\right) + a\Omega_1 - \frac{b}{2}\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

$$\underline{u}^4 - \underline{u}^3 = \begin{pmatrix} \frac{b}{2}D_{11} - aD_{12} - \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} - a\dot{\chi}_{12}\right) - a\Omega_3 \\ \frac{b}{2}D_{12} - aD_{22} - \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{12} - a\dot{\chi}_{22}\right) - \frac{b}{2}\Omega_3 \\ \left(\xi_1 + \frac{b}{4}\right)\left(-a\dot{\chi}_{12} + \frac{b}{2}\dot{\chi}_{11}\right) + a\Omega_1 + \frac{b}{2}\Omega_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

$$\underline{u}^1 - \underline{u}^4 = \begin{pmatrix} \frac{b}{2}D_{11} + aD_{12} - \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}\right) + a\Omega_3 \\ \frac{b}{2}D_{12} + aD_{22} - \xi_3\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{12} + a\dot{\chi}_{22}\right) - \frac{b}{2}\Omega_3 \\ \left(\xi_1 - \frac{b}{4}\right)\left(\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}\right) + \frac{b}{2}\Omega_2 - a\Omega_1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

$$\underline{u}^2 - \underline{u}^1 = \begin{pmatrix} -\frac{b}{2}D_{11} + aD_{12} - \xi_3(-\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}) + a\Omega_3 \\ -\frac{b}{2}D_{12} + aD_{22} - \xi_3(-\frac{b}{2}\dot{\chi}_{12} + a\dot{\chi}_{22}) + \frac{b}{2}\Omega_3 \\ (\xi_1 - \frac{b}{4})(-\frac{b}{2}\dot{\chi}_{11} + a\dot{\chi}_{12}) - \frac{b}{2}\Omega_2 - a\Omega_1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

### 1.3 Condition de pertinence

Dans le cas général, la condition de pertinence des critères de Mohr-Coulomb et de Mohr-Coulomb tronqué en traction s'écrit :

$$\underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi^m \quad (\text{C.16})$$

Dans la suite, les calculs seront détaillés pour les discontinuités 3-1 et 3-2. Les calculs pour les discontinuités 1-2, 3-4 et 4-1 sont analogues à ceux de la discontinuité 3-2 et seront donc présentés de manière plus succincte.

#### 1.3.1 Discontinuité sur le joint vertical

Pour la discontinuité 3-1, dont la normale est  $\underline{e}_1$ , la condition de pertinence s'écrit :

$$bD_{11} - \xi_3\dot{\chi}_{11} \geq \sqrt{(bD_{11} - \xi_3\dot{\chi}_{11})^2 + (bD_{12} - \xi_3b\dot{\chi}_{12} - b\Omega_3)^2 + (\xi_2b\dot{\chi}_{12} + b\Omega_2)^2} \sin \varphi^m \quad (\text{C.17})$$

Par convexité de la fonction d'appui, il suffit de vérifier que la condition de pertinence est bien vérifiée en  $\xi_3 = -h/2$  et en  $\xi_3 = h/2$  pour vérifier qu'elle est bien vérifiée sur l'ensemble de l'épaisseur du mur. Cela revient à vérifier que :

$$bD_{11}^\varepsilon \geq \sqrt{(bD_{12}^\varepsilon - b\Omega_3)^2 + (\xi_2b\dot{\chi}_{12} + b\Omega_2)^2} \tan \varphi^m \quad (\text{C.18})$$

ou encore :

$$(D_{11}^\varepsilon)^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 \geq (\xi_2\dot{\chi}_{12} + \Omega_2)^2 \quad (\text{C.19})$$

Dans les deux précédentes équations, on a noté :

$$D_{\alpha\beta}^\varepsilon = D_{\alpha\beta} - \varepsilon \frac{h}{2} \dot{\chi}_{\alpha\beta} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1 \quad (\text{C.20})$$

En particulier, cette inéquation doit être vérifiée pour  $\xi_2 = \pm \frac{a}{2}$ , d'où :

$$(D_{11}^\varepsilon)^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 \geq \left( -\frac{a}{2} \dot{\chi}_{12} + \Omega_2 \right)^2 \quad (\text{C.21})$$

et :

$$(D_{11}^\varepsilon)^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 \geq \left( \frac{a}{2} \dot{\chi}_{12} + \Omega_2 \right)^2 \quad (\text{C.22})$$

La valeur de  $\Omega_2$  permettant de rendre cette condition la moins restrictive possible est de considérer  $\Omega_2 = 0$ . La condition de pertinence de la discontinuité de vitesse entre les blocs 1 et 3 se réécrit finalement :

$$D_{11}^\varepsilon \geq \sqrt{(D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 + \left( \frac{a}{2} \dot{\chi}_{12} \right)^2} \tan \varphi^m \quad (\text{C.23})$$

### 1.3.2 Discontinuités sur les joints horizontaux

De la même manière, on détermine les conditions de pertinence des discontinuités situées au niveau des joints horizontaux (entre les blocs 2 et 3, 3 et 4, 4 et 1, 1 et 2). Dans la suite de ce paragraphe, on pose :

$$m = \frac{2a}{b} \quad \text{et} \quad D_{\alpha\beta}^{\varepsilon'} = D_{\alpha\beta} - \varepsilon' \frac{h}{2} \dot{\chi}_{\alpha\beta} \quad (\varepsilon' = \pm 1) \quad (\text{C.24})$$

Tout comme dans le paragraphe précédent, la condition de pertinence ne sera vérifiée qu'en  $\xi_3 = \pm h/2$ . Par convexité de la fonction d'appui, la vérification de la condition de pertinence en ces deux points implique qu'elle soit vérifiée dans toute l'épaisseur du mur.

**Discontinuité entre les blocs 3 et 2**  $(\xi_1 \in \left[ -\frac{b}{4}; 0 \right], \underline{n} = -\underline{e}_2)$

$$mD_{22}^{\varepsilon'} + (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) \geq \tan \varphi^m \sqrt{(D_{11}^{\varepsilon'} + m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + ((\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})(\xi_1 + \frac{b}{4}) - m\Omega_1 + \Omega_2)^2} \quad (\text{C.25})$$

**Discontinuité entre les blocs 4 et 3**  $(\xi_1 \in \left[ -\frac{b}{4}; 0 \right], \underline{n} = -\underline{e}_2)$

$$mD_{22}^{\varepsilon'} - (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) \geq \tan \varphi^m \sqrt{(D_{11}^{\varepsilon'} - m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + ((-\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})(\xi_1 + \frac{b}{4}) - m\Omega_1 - \Omega_2)^2} \quad (\text{C.26})$$

**Discontinuité entre les blocs 1 et 4** ( $\xi_1 \in \left[0; \frac{b}{4}\right]$ ,  $\underline{n} = \underline{e}_2$ )

$$mD_{22}^{\varepsilon'} + (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) \geq \tan \varphi^m \sqrt{(D_{11}^{\varepsilon'} + m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + ((\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})\left(\frac{b}{4} - \xi_1\right) + m\Omega_1 - \Omega_2)^2} \quad (\text{C.27})$$

**Discontinuité entre les blocs 2 et 1** ( $\xi_1 \in \left[0; \frac{b}{4}\right]$ ,  $\underline{n} = \underline{e}_2$ )

$$mD_{22}^{\varepsilon'} - (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) \geq \tan \varphi^m \sqrt{(D_{11}^{\varepsilon'} - m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + ((-\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})\left(\frac{b}{4} - \xi_1\right) + m\Omega_1 + \Omega_2)^2} \quad (\text{C.28})$$

**Valeur de  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$**  On peut réécrire ces quatre dernières conditions, en regroupant d'une part les conditions de pertinence des discontinuités 3-2 et 1-4, et d'autre part celle des discontinuités 4-3 et 2-1.

On a donc tout d'abord les quatre équations (C.29) à (C.32) correspondant aux discontinuités 3-2 (équation (C.25)) et 1-4 (équation (C.27)) qui sont évaluées en  $\xi_1 = 0$ , en  $\xi_1 = -b/4$  (équation (C.27) uniquement) et en  $\xi_1 = b/4$  (équation (C.25) uniquement).

$$(mD_{22}^{\varepsilon} + (D_{12}^{\varepsilon} - \Omega_3))^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{11}^{\varepsilon} + m(D_{12}^{\varepsilon} + \Omega_3))^2 \geq ((\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})\frac{b}{4} - m\Omega_1 + \Omega_2)^2 \quad (\text{C.29})$$

$$(mD_{22}^{\varepsilon} + (D_{12}^{\varepsilon} - \Omega_3))^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{11}^{\varepsilon} + m(D_{12}^{\varepsilon} + \Omega_3))^2 \geq ((\dot{\chi}_{11} + m\dot{\chi}_{12})\frac{b}{4} + m\Omega_1 - \Omega_2)^2 \quad (\text{C.30})$$

$$(mD_{22}^{\varepsilon} + (D_{12}^{\varepsilon} - \Omega_3))^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{11}^{\varepsilon} + m(D_{12}^{\varepsilon} + \Omega_3))^2 \geq (m\Omega_1 - \Omega_2)^2 \quad (\text{C.31})$$

$$(mD_{22}^{\varepsilon} + (D_{12}^{\varepsilon} - \Omega_3))^2 \arctan^2 \varphi^m - (D_{11}^{\varepsilon} + m(D_{12}^{\varepsilon} + \Omega_3))^2 \geq (-m\Omega_1 + \Omega_2)^2 \quad (\text{C.32})$$

Le couple  $(\Omega_1, \Omega_2)$  qui permet de rendre cet ensemble de conditions le moins restrictif possible est tel que  $\Omega_2 = -m\Omega_1$ .

De la même manière, si on s'intéresse aux discontinuités 4-3 et 2-1, on peut montrer que le couple  $(\Omega_1, \Omega_2)$  qui permet de rendre cet ensemble de conditions le moins restrictif possible est tel que  $\Omega_2 = m\Omega_1$ . On en déduit finalement que  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$  dans les conditions de pertinence (C.25) à (C.28).

## 1.4 Fonction d'appui du critère de Sab - matériau de Mohr-Coulomb

### 1.4.1 Calcul de la puissance résistante maximale pour chaque discontinuité - critère de Mohr-Coulomb

Pour un mécanisme pertinent (i.e. vérifiant les équations (C.25) à (C.28)), on peut déterminer la puissance résistante maximale pour chacune des discontinuités.

**Discontinuité 1-3 :**

$$P_{rm}^{1,3}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = ab \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} (D_{11} - \xi_3 \dot{\chi}_{11}) d\xi_3 \quad (\text{C.33})$$

**Discontinuité 2-3 :**

$$P_{rm}^{2,3}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{ab}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} \left( \frac{1}{m} (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12} + \Omega_3) + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) \right) d\xi_3 \quad (\text{C.34})$$

**Discontinuité 3-4 :**

$$P_{rm}^{3,4}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{ab}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} \left( -\frac{1}{m} (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12} + \Omega_3) + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) \right) d\xi_3 \quad (\text{C.35})$$

**Discontinuité 4-1 :**

$$P_{rm}^{4,1}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{ab}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} \left( \frac{1}{m} (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12} + \Omega_3) + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) \right) d\xi_3 \quad (\text{C.36})$$

**Discontinuité 1-2 :**

$$P_{rm}^{1,2}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{ab}{4} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} \left( -\frac{1}{m} (D_{12} - \xi_3 \dot{\chi}_{12} + \Omega_3) + (D_{22} - \xi_3 \dot{\chi}_{22}) \right) d\xi_3 \quad (\text{C.37})$$

### 1.4.2 Puissance résistante maximale totale sur la cellule de base et fonction d'appui du critère

Si le couple  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  vérifie les conditions de pertinence établies dans les équations (C.23) et (C.25) à (C.28), la fonction d'appui du critère homogénéisé est définie comme :

$$\begin{aligned} \Pi^{bloes}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) &= \frac{1}{|S|} (P_{rm}^{1,3}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + P_{rm}^{2,3}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + P_{rm}^{3,4}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + P_{rm}^{4,1}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) + P_{rm}^{1,2}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})) \\ &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{c^m(\xi_3)}{\tan \varphi^m} (D_{11} + D_{22} - \xi_3(\dot{\chi}_{11} + \dot{\chi}_{22})) d\xi_3 \\ &= h \frac{\langle c^m \rangle}{\tan \varphi} \text{tr} \underline{D} - h \frac{\langle c^m \xi_3 \rangle}{\tan \varphi^m} \text{tr} \underline{\dot{\chi}} \end{aligned} \quad (\text{C.38})$$

où on a introduit la notation suivante pour la valeur moyenne sur l'épaisseur :

$$\langle \bullet \rangle = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \bullet d\xi_3 \quad (\text{C.39})$$

Finalement, la fonction d'appui s'écrit :

$$\Pi^{bloes}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) = \frac{\langle c \rangle}{\tan \varphi} h \text{tr} \underline{D} + \frac{\langle c \cdot \xi_3 \rangle}{\tan \varphi} h \text{tr} \underline{\dot{\chi}}$$

s.c. :

$$\begin{aligned} D_{11}^\varepsilon &\geq \sqrt{(D_{12}^\varepsilon - \Omega_3)^2 + \left(\frac{a}{2} \dot{\chi}_{12}\right)^2 \tan \varphi} \quad (\text{C.40}) \\ m D_{22}^{\varepsilon'} &\geq -\varepsilon'' (D_{12}^{\varepsilon'} - \Omega_3) + \tan \varphi \sqrt{(\varepsilon'' D_{11}^{\varepsilon'} + m(D_{12}^{\varepsilon'} + \Omega_3))^2 + ((\varepsilon'' \dot{\chi}_{11} + m \dot{\chi}_{12}) \frac{b}{4})^2} \\ &(\varepsilon = \pm 1 \text{ et } \varepsilon' = \pm 1 \text{ et } \varepsilon'' = \pm 1) \end{aligned}$$

## 2 Fonction d'appui associée au mécanisme de blocs proposé de Buhan et de Felice [4] - matériau de Mohr-Coulomb tronqué en traction

Dans le chapitre 7, nous avons souhaité étendre les approches proposées dans le chapitre 5 au cas dans lequel les matériaux obéissent à un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction.

De façon générale, ce critère s'écrit :

$$f^k(\underline{\sigma}) = \sup_{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}} \left\{ \sigma_I(1 + \sin \varphi^k) - \sigma_{III}(1 - \sin \varphi^k) - 2c^k \cos \varphi^k ; \sigma_i - f_t^k \right\} \leq 0 \quad (C.41)$$

$$(k = b, m)$$

La fonction d'appui correspondante, pour une discontinuité de vitesse  $\underline{V}$  au travers d'une surface de normale  $\underline{n}$  localisée dans le mortier (noté  $m$ ) est :

$$\pi^{MCT,m}(\underline{V}, \underline{n}) = \begin{cases} \frac{c^m \cos \varphi^m}{(1 - \sin \varphi^m)} (|\underline{V}| - \underline{V} \cdot \underline{n}) + \frac{f_t^m}{(1 - \sin \varphi^m)} (\underline{V} \cdot \underline{n} - |\underline{V}| \sin \varphi^m) \\ \quad \text{si } \underline{V} \cdot \underline{n} \geq |\underline{V}| \sin \varphi^m \\ +\infty \text{ sinon} \end{cases} \quad (k = b, m) \quad (C.42)$$

Le mécanisme proposé par de Buhan et de Felice [4] correspond à la restriction du mécanisme proposé par Sab [5] à des mouvements plans, c'est-à-dire pour  $\underline{\dot{\chi}} = \underline{0}$  et  $\Omega_1 = \Omega_2 = 0$ . Les expressions des discontinuités de vitesse au niveau des joints et des conditions de pertinence données dans la partie précédente restent donc valables.

L'équation (C.43) donne les conditions de pertinence dans le cas général.

$$\begin{aligned} |D_{12} - \Omega_3| &\geq |D_{11}| \tan \varphi^m \\ |D_{12} - \Omega_3 - mD_{22}| &\geq |D_{11} - m(D_{12+\Omega_3})| \tan \varphi^m \\ |D_{12} - \Omega_3 + mD_{22}| &\geq |D_{11} + m(D_{12+\Omega_3})| \tan \varphi^m \end{aligned} \quad (C.43)$$

En introduisant  $f = \tan \varphi^m$ , on peut montrer que si  $m = 2a/b \leq 1/f$ , ces conditions de pertinence peuvent se réécrire (de Buhan et de Felice [4]) :

$$\begin{aligned} D_{11} &\geq 0 \\ fD_{11} - mD_{22} &\leq 0 \\ -fD_{11} + 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} &\leq 0 \\ -fD_{11} - 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} &\leq 0 \end{aligned} \quad (C.44)$$

Sur la cellule de base, la fonction d'appui du critère homogénéisé est alors définie

comme :

$$\begin{aligned} \Pi^{blocs,p,T}(\underline{D}) = & h \left( \frac{f_t^m}{1 - \sin \varphi^m} - c^m \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^m}{2} \right) \right) \text{tr} \underline{D} + \\ & \min_{\Omega_3} \left( hc^m \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi^m}{2} \right) - \frac{f_t^m \sin \varphi^m}{1 - \sin \varphi^m} \right) \\ & \left( \sqrt{D_{11}^2 + D_{12} + \Omega_3^2} + \frac{1}{2} \sqrt{(D_{12} - \Omega_3 + D_{11}/m)^2 + (D_{22} + (D_{12} + \Omega_3)/m)^2} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sqrt{(D_{12} - \Omega_3 - D_{11}/m)^2 + (D_{22} - (D_{12} + \Omega_3)/m)^2} \right) \quad (\text{C.45}) \end{aligned}$$

s.c. :

$$D_{11} \geq 0$$

$$fD_{11} - mD_{22} \leq 0$$

$$-fD_{11} + 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} \leq 0$$

$$-fD_{11} - 2D_{12} - \frac{1}{f}D_{22} \leq 0$$

### 3 Fonction d'appui associée au mécanisme homogène proposé dans le chapitre 6 - matériaux de Mohr-Coulomb tronqués en traction

L'objectif de cette partie est de proposer une approche par l'extérieur du domaine de résistance d'un mur en maçonnerie composé de matériaux suivant un critère de Mohr-Coulomb tronqué en traction, vis-à-vis de sollicitations dans le plan du mur uniquement.

En mettant en œuvre une approche similaire à celle présentée dans le chapitre 5, on propose d'explorer la classe des mécanismes homogènes de la forme :

$$\underline{d} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \quad (\text{C.46})$$

Ce taux de déformation dérive bien d'un champ de vitesse cinématiquement admissible avec un chargement  $\underline{D}$  qui en fixe les composantes planes, tandis que la composante hors-plan  $d_{33} = \delta$  joue le rôle d'une variable d'optimisation.

Pour un taux de déformation quelconque  $\underline{d}$ , la fonction d'appui du critère de Mohr-

Coulomb tronqué en traction s'écrit :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = \begin{cases} \frac{c^k \cos \varphi^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}| - \text{tr} \underline{d}) \\ + \frac{f_t^k}{(1 - \sin \varphi^k)} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k) & (k = b, m) \\ \text{si } \text{tr} \underline{d} \geq (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.47})$$

et peut également se réécrire :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = \begin{cases} R_c^k (d_I^- + d_{II}^- + d_{III}^-) + \frac{f_t^k}{1 - \sin \varphi^k} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k) \\ \text{si } \text{tr}(\underline{d}) \geq (|d_I| + |d_{II}| + |d_{III}|) \sin \varphi^k \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{C.48})$$

Dans l'expression (C.48), on a introduit la partie négative de la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre du tenseur des taux de déformation  $\underline{d}$ , que l'on a noté  $d_i^- = (|d_i| - d_i)/2$  la partie négative de la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre du tenseur  $\underline{d}$ , et  $R_c^k = \frac{2c^k}{1 - \sin \varphi^k}$  est la résistance en compression simple du matériau  $k$ .

Plaçons-nous tout d'abord dans le cas où  $(|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \geq 0$  dans au moins un des deux constituants. Dans ce cas, pour que la condition de pertinence soit vérifiée dans les deux constituants,  $\delta \geq 0$  et cette condition de pertinence se réécrit :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = R_c^k (d_I^- + d_{II}^-) + \frac{f_t^k}{1 - \sin \varphi^k} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}|) \sin \varphi^k) + \delta^{\min} f_t^k \quad (\text{C.49})$$

avec :

$$\delta^{\min} = \sup_{i=b,m} \frac{(|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - (D_I + D_{II})}{1 - \sin \varphi^k} \quad (\text{C.50})$$

Dans le cas contraire  $((|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^k - D_I - D_{II} \leq 0$  dans les deux constituants), la valeur de  $\delta$  peut être positive ou négative. Pour  $\delta \leq 0$ , la fonction d'appui se réécrit :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = R_c^k (d_I^- + d_{II}^-) + \frac{f_t^k}{1 - \sin \varphi^k} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}|) \sin \varphi^k) + \delta (K^{p,k} f_t^k - R_c^k) \quad (\text{C.51})$$

tandis que pour  $\delta \geq 0$ , elle se réécrit :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = R_c^k (d_I^- + d_{II}^-) + \frac{f_t^k}{1 - \sin \varphi^k} (\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}|) \sin \varphi^k) + \delta f_t^k \quad (\text{C.52})$$

Au vu de ces deux équations, il apparait que la valeur de  $\delta$  minimisant la fonction d'appui est  $\delta = 0$ . La fonction d'appui correspondant au matériau  $k$  est alors :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = R_c^k(d_I^- + d_{II}^-) + \frac{f_t^k}{1 - \sin \varphi^k}(\text{tr} \underline{d} - (|d_I| + |d_{II}|) \sin \varphi^k) \quad (\text{C.53})$$

Après calcul, cette fonction d'appui peut également se réécrire :

$$\pi^{MCT,k}(\underline{d}) = (R_c^k - K^{p,k} f_t^k)(d_I^- + d_{II}^-) + f_t^k(d_I^+ + d_{II}^+) \quad (\text{C.54})$$

où  $d_i^+ = (|d_i| + d_i)/2$  est la partie positive de la  $i^{\text{ème}}$  valeur propre du tenseur  $\underline{d}$

La puissance résistante maximale sur la cellule de base s'écrit :

$$P_{rm}(D_I, D_{II}, \delta^{min}) = |S|h \left( (1 - \eta)\pi^{MCT,b}(D_I, D_{II}, \delta^{min}) + \eta\pi^{MCT,m}(D_I, D_{II}, \delta^{min}) \right) \quad (\text{C.55})$$

et la fonction d'appui de l'approche par l'extérieur du domaine de résistance ainsi obtenue est définie par :

$$\Pi^{def,p,T}(D_I, D_{II}) = \frac{P_{rm}(D_I, D_{II}, \delta^{min})}{|S|} \quad (\text{C.56})$$

En supposant que  $\varphi^b \geq \varphi^m$ , on obtient finalement l'expression suivante pour la fonction d'appui :

$$\Pi^{def,p,T}(D_I, D_{II}) = \begin{cases} h \langle R_c \rangle - \eta(K_m^p - K_b^p) f_t^m (D_I^- + D_{II}^-) & \text{si } D_I + D_{II} \leq (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^b \\ h \langle f_t \rangle (D_I^+ + D_{II}^+) + h \langle R_c - K^p f_t \rangle (D_I^- + D_{II}^-) & \text{si } D_I + D_{II} \geq (|D_I| + |D_{II}|) \sin \varphi^b \end{cases} \quad (\text{C.57})$$

\* \*

\*

# Annexe D

## Comparaison des approches cinématiques semi-analytique et numérique proposées dans les chapitres 5 et 6 : étude paramétrique

Cette annexe présente une étude paramétrique qui compare l'approche cinématique semi-analytique proposée dans le chapitre 5 avec l'approche cinématique numérique présentée dans le chapitre 6. Elle vise à identifier les cas dans lesquels l'approche numérique est nécessaire et apporte une véritable amélioration par rapport à l'approche semi-analytique.

### 1 Présentation de l'étude paramétrique

#### 1.1 Cas étudiés

Les notations utilisées dans cette annexe sont identiques à celles des chapitres 5 et 6.

Trois paramètres sont considérés pour cette étude paramétrique :

- le contraste  $R_c^b/R_c^m$  entre la résistance en compression uniaxiale de la pierre et celle du mortier ;
- la fraction volumique de mortier  $\eta = \Omega_m/(\Omega_m + \Omega_b)$ , où  $\Omega_m$  désigne le volume occupé par le mortier dans la cellule de base représentée sur la figure 5.1 du chapitre 5 par exemple, et  $\Omega_b$  représente le volume occupé par les blocs dans cette même cellule de base ;
- l'élançement transversal des joints  $\lambda = t/h$ , où  $t$  est l'épaisseur des joints et  $h$  l'épaisseur du mur.

Pour cette étude paramétrique, le cas de référence correspond à une fraction volumique  $\eta = 10 \%$ , un contraste valant  $R_c^b/R_c^m = 5$  et un élancement transversal  $\lambda = 0,05$ . L'épaisseur des joints, ainsi que la résistance en compression des blocs ( $R_c^b = 5,3$  MPa), sont considérées comme constantes pour l'ensemble de l'étude paramétrique. Pour atteindre les valeurs de référence de la fraction volumique et de l'élancement mentionnées plus haut, les blocs ont une longueur  $L = 0,275$  m, une hauteur  $H = 0,138$  m et une épaisseur  $h = 0,2$  m. Les blocs (respectivement le mortier) ont une cohésion  $c^b = 1,53$  MPa (resp.  $c^m = 0,34$  MPa) et un angle de frottement interne  $\varphi^b = 30^\circ$  (resp.  $\varphi^m = 25^\circ$ ).

## 1.2 Quelques rappels de notations

On rappelle l'expression de l'écart relatif entre les résultats de l'approche numérique et de l'approche analytique, pour un trajet de chargement  $i$  :

$$\varepsilon_i = \frac{\Pi^{S.An.}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}}) - \Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})}{\Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})} \quad (\text{D.1})$$

où  $\Pi^{S.An.}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  désigne la fonction d'appui macroscopique obtenue par voie semi-analytique pour un trajet de chargement  $(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$ , tandis que  $\Pi^{num}(\underline{D}, \underline{\dot{\chi}})$  désigne la fonction d'appui macroscopique obtenue par l'approche numérique pour ce même trajet de chargement.

On introduit également un écart relatif moyen sur l'ensemble des trajets de chargement considérés, que l'on définit par :

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \varepsilon_i \quad (\text{D.2})$$

On rappelle également les notations suivantes :

$$N_c^b = hR_c^b = \Pi(D_{22})/|S| \quad M^b = h^2(R_c^b + R_t^b)/8 = \Pi(\dot{\chi}_{22})/|S| \quad (\text{D.3})$$

où  $N_c^b$  correspond à la résistance en compression d'une plaque homogène, composée uniquement du matériau constitutif du bloc et  $M^b$  correspond à la résistance maximale en flexion d'une plaque homogène, composée uniquement du matériau constitutif du bloc.

Enfin, on utilisera le fait que pour une plaque homogène composée uniquement du matériau constitutif du bloc, la fonction d'appui correspondant aux sollicitations  $\dot{\chi}_{11} = 1$ ,  $\dot{\chi}_{22} = 1$  et  $\dot{\chi}_{12} = 1$  (autres  $D_{\alpha\beta} = 0$ ,  $\dot{\chi}_{\alpha\beta} = 0$  pour  $(\alpha, \beta = 1, 2)$ ) prend les valeurs suivantes :

$$\Pi^b(\dot{\chi}_{11}) = \Pi^b(\dot{\chi}_{22}) = h^2(R_c^b + R_t^b)/8 \quad \Pi^b(\dot{\chi}_{12}) = h^2 R_c^b/4 \quad (\text{D.4})$$

Le paramétrage des trajets de chargement plans par les angles  $\beta$  et  $\gamma$  peut être retrouvé

dans l'équation (6.18) et sur la figure 6.8 (b) du chapitre 6, tandis que le paramétrage des trajets de chargement hors-plan par un angle  $\alpha$  peut être retrouvé sur la figure 6.12 du chapitre 6.

## 2 Influence du contraste entre les résistances en compression des blocs et du mortier

Pour la maçonnerie en pierre massive neuve, la classe de résistance mécanique du mortier doit être adaptée à la résistance en compression de la pierre naturelle (voir par exemple le DTU 20.1 [2]). Si l'on considère uniquement les maçonneries récentes, il est probable que le rapport entre la résistance en compression de la pierre reste inférieur à  $R_c^b/R_c^m = 8$ . En revanche, si l'on s'intéresse à des maçonneries anciennes, l'altération due au vieillissement du mortier fait qu'il est possible d'avoir des contrastes plus élevés, c'est pourquoi on a considéré des contrastes pouvant aller jusqu'à 20 dans cette étude.

### 2.1 Sollicitations planes

La figure D.1 représente les projections des domaines de résistance analytique et numérique sur les plans  $(N_{11}, N_{22})$  et  $(N_V, N_W)$ .

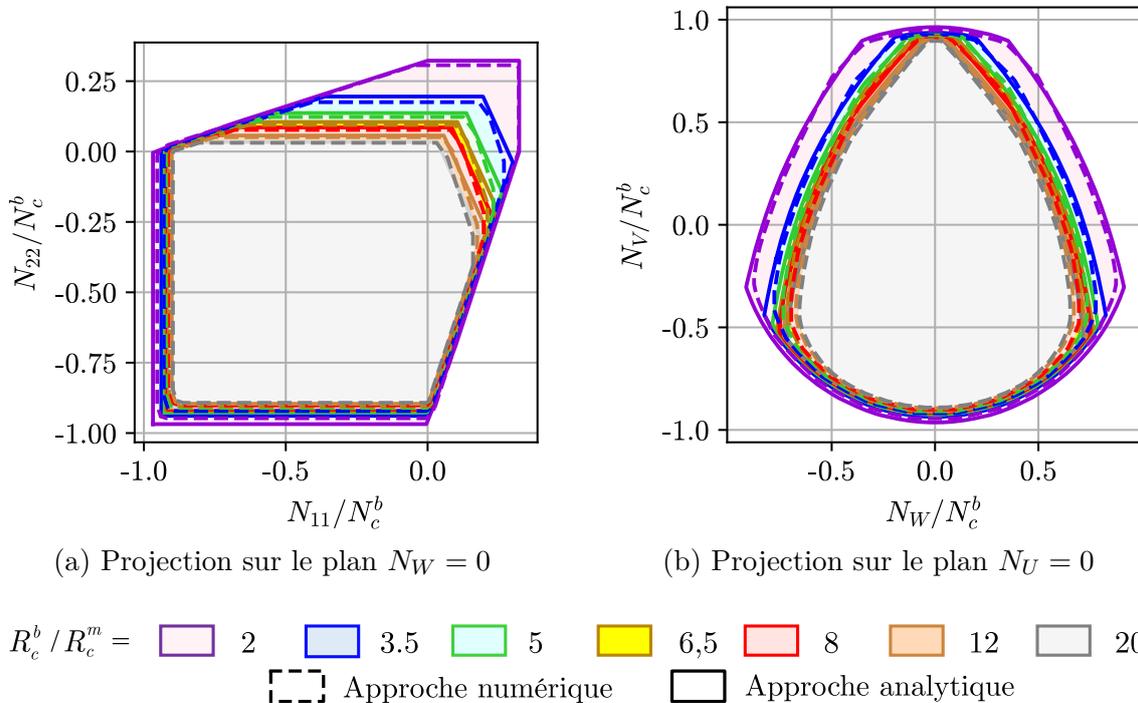


FIGURE D.1 – Domaines de résistance analytique et numérique pour différents contrastes entre les résistances en compression de la pierre et du mortier

Comme on peut le voir sur la figure D.1, lorsque le contraste augmente, la résistance relative de la maçonnerie comparée à la résistance du bloc diminue. Ce phénomène est plus prononcé en traction qu'en cisaillement, et presque imperceptible en compression. Cela est cohérent avec le fait que de vieux bâtiments, dont le mortier est usé par le temps, peuvent toujours supporter des sollicitations de compression importantes alors qu'ils sont beaucoup plus vulnérables aux sollicitations sismiques et aux sollicitations de cisaillement accidentelles.

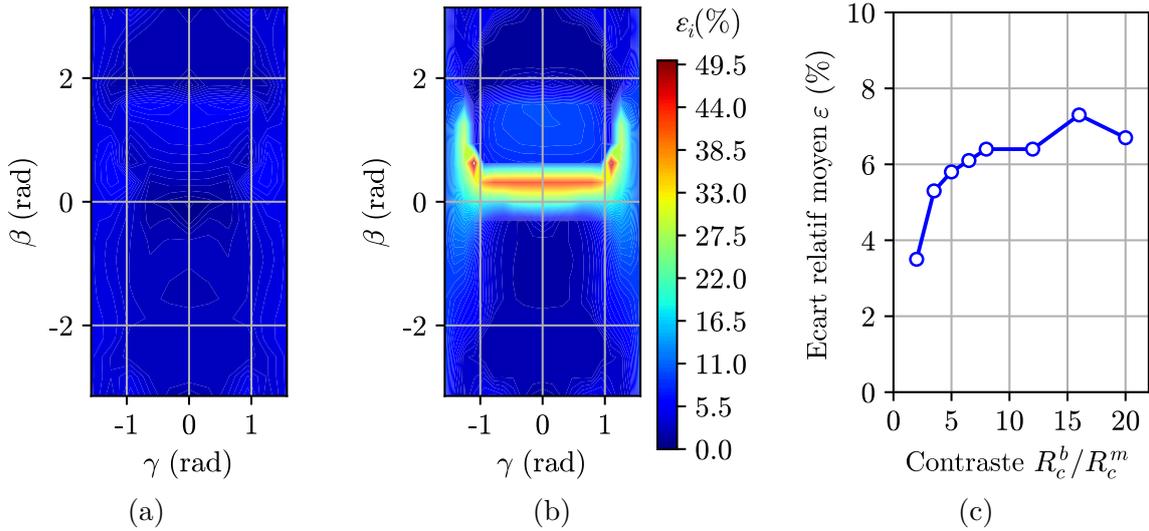


FIGURE D.2 – Écart relatif  $\varepsilon_i$  entre  $\Pi^{num}(\underline{D})$  et  $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$  (D.1) en fonction du trajet de chargement pour (a) le plus petit et (b) le plus grand contraste  $R_c^b/R_c^m$  considéré; (c) écart relatif moyen  $\varepsilon$  en fonction du contraste.

Il apparaît également que les domaines de résistance obtenus par les approches analytique et numérique sont visuellement similaires et évoluent de la même manière avec le contraste. Comme montré sur la figure D.2, l'écart relatif entre les deux approches est plus élevé pour des sollicitations de traction (qu'elles soient ou non combinées avec du cisaillement). Ces efforts correspondent à des taux de déformation macroscopiques  $D_{11}, D_{22} \geq 0$ , ou encore à  $\beta \in [0; \pi/2]$ . Sur cette figure,  $\beta$  et  $\gamma$  paramètrent la direction du trajet de chargement tel que défini par l'équation (6.18), et les écarts relatifs par trajet de chargement  $\varepsilon_i$  (resp. moyens  $\varepsilon$ ) sont définis par l'équation (D.1) (resp. (D.2)). L'écart relatif reste relativement bas pour un contraste de 2, et augmente avec le contraste jusqu'à atteindre une valeur proche de 50 % en traction pour un contraste de 20. Dans ce dernier cas, un écart relatif aussi élevé doit principalement être attribué au fait que la valeur de la fonction d'appui macroscopique est faible, l'écart absolu entre les deux fonctions d'appui étant du même ordre de grandeur que pour un contraste de 2. L'écart relatif moyen est toujours positif, varie entre 3,5 et 6,7 % et augmente avec le contraste. Pour des sollicitations planes, à l'exception de quelques rares trajets de chargement, on peut donc conclure que l'approche semi-analytique fournit des résultats très pertinents, et ce quel que soit le contraste entre les propriétés de résistance des deux matériaux.

## 2.2 Sollicitations hors-plan

La figure D.3 représente les coupes  $(N_{11}/N_c^b, M_{11}/M^b)$  (a),  $(N_{22}/N_c^b, M_{22}/M^b)$  (b) et  $(N_{12}/N_c^b, M_{12}/M^b)$  (c), tandis que la figure D.4 représente l'écart relatif entre les majorants obtenus par l'approche analytique et par l'approche numérique pour chaque trajet de chargement. Un écart relatif négatif correspond à un trajet de chargement pour lequel l'approche semi-analytique donne un meilleur majorant que l'approche numérique. Pour rappel, les valeurs de  $N_c^b$  et  $M^b$  sont définies par l'équation (D.3)

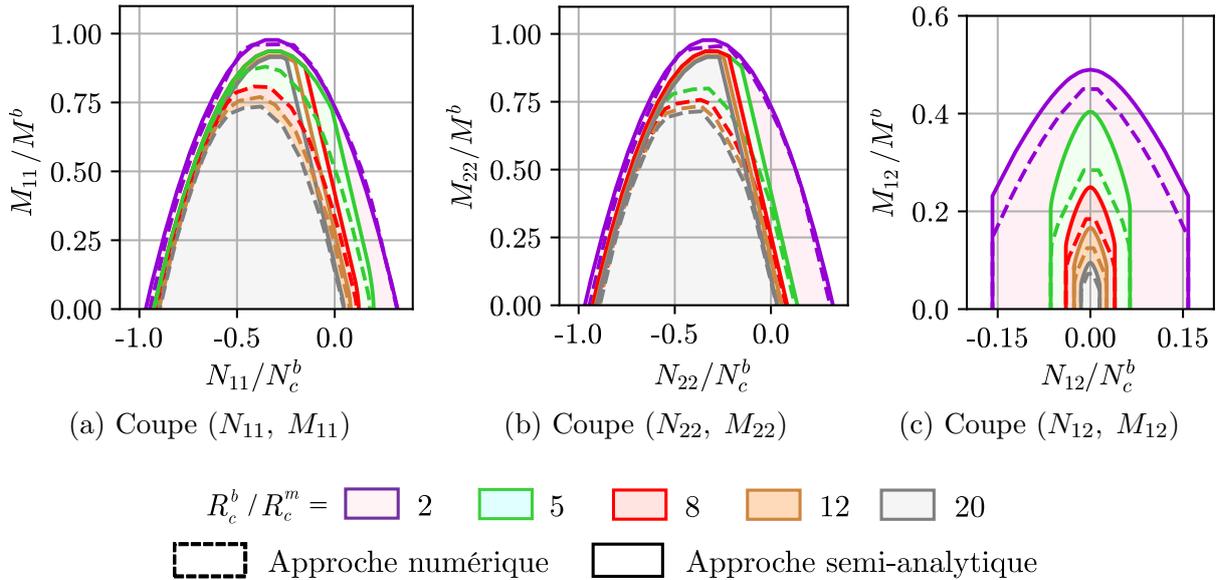


FIGURE D.3 – Coupes des domaines de résistance semi-analytique et numérique pour différentes valeurs de contraste entre la résistance en compression de la pierre et celle du mortier

D'après la figure D.3, il apparaît que l'augmentation du contraste fait diminuer la résistance à la flexion, et ce quelle que soit la direction de sollicitation. Comme montré dans le paragraphe 2.1, la résistance au cisaillement est également affectée, tout comme la résistance à la traction dans une moindre mesure. La résistance en compression est en revanche peu affectée.

On note sur ces figures que les écarts les plus importants entre les approches semi-analytique et numérique correspondent à des sollicitations de flexion avec un peu de compression, ou à une sollicitation de torsion. L'écart relatif peut dépasser 100 % pour certains trajets de chargement, probablement parce que les valeurs absolues sont relativement proches de zéro.

En plus de ces trois coupes, et puisqu'il est impossible d'explorer et de représenter l'écart relatif pour l'ensemble des trajets de chargement dans  $\mathbb{R}^6$ , nous avons choisi de l'évaluer pour trois sollicitations particulières :  $\dot{\chi}_{11} = 1$ ,  $\dot{\chi}_{22} = 1$ , et  $\dot{\chi}_{12} = 1$ , qui viennent compléter les sollicitations déjà considérées dans le paragraphe 2.1.

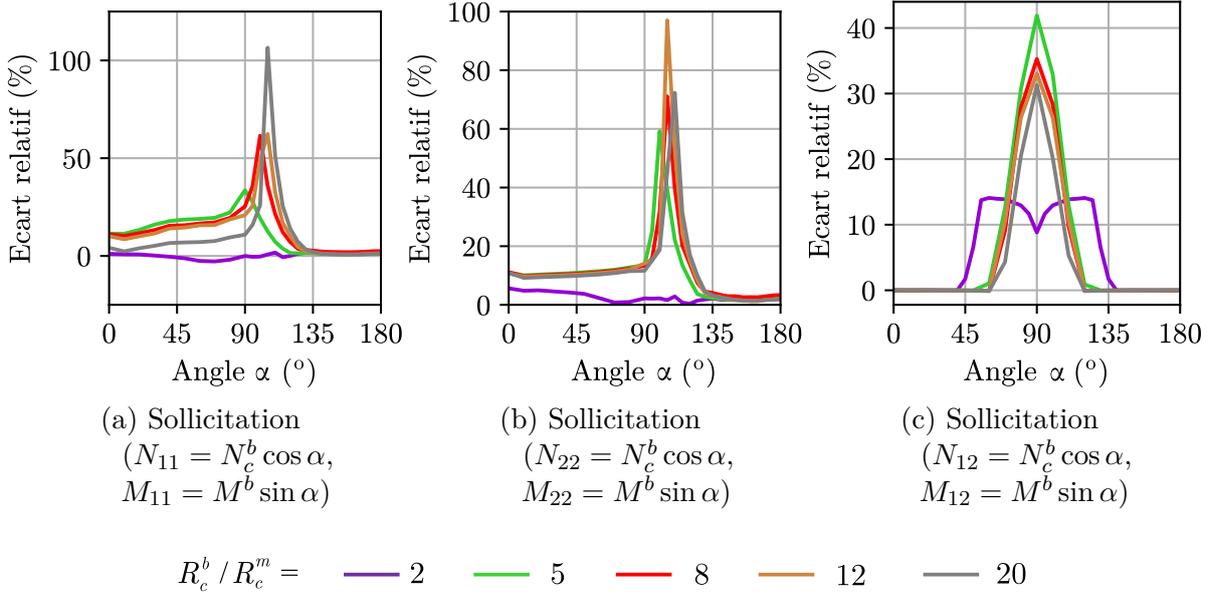


FIGURE D.4 – Écart relatif  $\varepsilon_i$  (D.1) entre les fonctions d'appui macroscopiques obtenues pour les différents trajets de chargement paramétrés par un angle  $\alpha$  représentés sur la figure D.3

Le graphe D.5 (a) présente l'évolution de la valeur de la puissance résistante maximale  $\Pi(\dot{\chi}_{\alpha\beta})$  pour ces sollicitations rapportée à celle d'une plaque homogène  $\Pi^b(\dot{\chi}_{\alpha\beta})$ , tandis que la figure D.5 (b) montre l'évolution de l'écart relatif entre les approches semi-analytique et numérique en fonction du contraste pour ces mêmes sollicitations. Un contraste nul correspond à une cellule de base homogène composée uniquement du matériau constitutif du bloc. La fonction d'appui correspondante  $\Pi^b(\dot{\chi}_{\alpha\beta})$  est définie par l'équation (D.4) pour les sollicitations considérées.

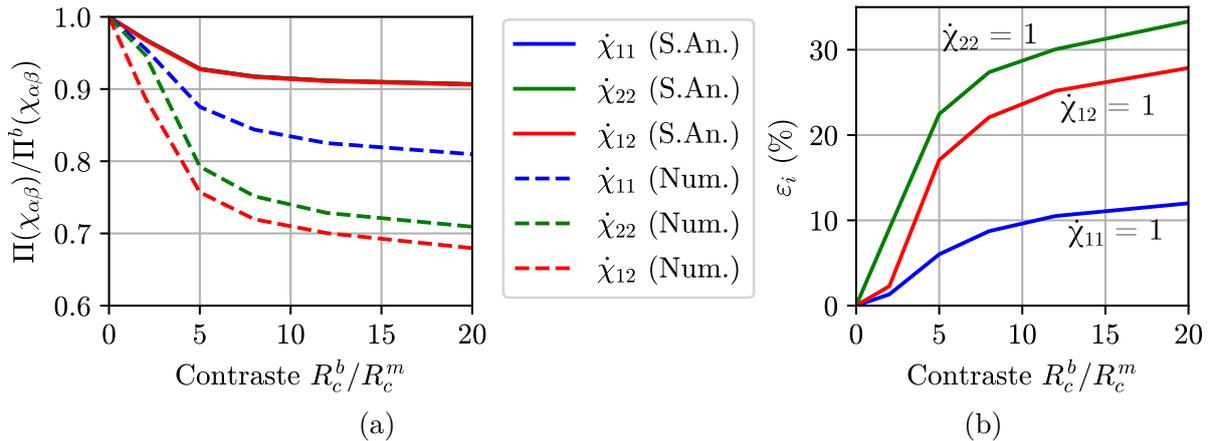


FIGURE D.5 – (a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue pour une sollicitation donnée sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différentes valeurs de contraste<sup>1</sup>; (b) écart relatif  $\varepsilon_i$  (D.1) entre ces valeurs selon qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique

1. Sur la figure D.5 (a), les trois approches semi-analytiques sont confondues

Il apparait que pour un contraste faible ( $R_c^b/R_c^m = 2$ ), l'écart relatif est de l'ordre de 3 % pour une flexion dans la direction 1 et pour une torsion, alors qu'il vaut 9 % pour une flexion dans la direction 2. Pour un contraste très élevé ( $R_c^b/R_c^m = 20$ ), on atteint des valeurs d'écart relatif supérieures à 30 % pour une sollicitation de flexion dans la direction 2. Dans ce cas, l'apport de l'approche numérique, malgré son temps de calcul élevé, est notable car l'approche analytique perçoit mal la réduction de résistance en flexion.

En conclusion, l'approche semi-analytique donne des résultats similaires à ceux de l'approche numérique pour des sollicitations dans le plan du mur, mais surestime assez largement sa résistance à la flexion et à la torsion pour des contrastes élevés entre la résistance en compression de la pierre et celle du mortier. Cette conclusion est particulièrement importante pour l'ingénieur, car un mur porteur en pierre massive est souvent soumis à des sollicitations de flexion composée, pour un mur de façade sur lequel le plancher applique une charge de compression excentrée par exemple. Il faudra donc garder à l'esprit le caractère de majorant de la solution semi-analytique en analysant les résultats.

## 3 Influence de la fraction volumique de mortier

Il n'y a pas véritablement de règle concernant la taille des blocs dans les normes de dimensionnement des ouvrages en pierre naturelle, ce qui rend difficile l'estimation d'un intervalle de variation de la fraction volumique de mortier. On considère ici une fraction volumique variant entre 2,5 % et 30 %. Afin de garder un élancement constant au niveau des joints, l'épaisseur du mur est fixée à 0,2 m et celle des joints à 10 mm, tandis que la hauteur et la largeur des blocs varient, tout en gardant un rapport  $L/H = 2$ . Le tableau D.1 donne les dimensions des blocs pour les différentes valeurs de fraction volumique de mortier.

TABLEAU D.1 – Taille de bloc pour les différentes fractions volumiques considérées

Fraction volumique de mortier $\eta$	2,5 %	5 %	10 %	20 %	30 %
Hauteur de bloc correspondante $H$ (m)	0,59	0,29	0,14	0,063	0,038

### 3.1 Sollicitations planes

La figure D.6 représente les projections des domaines de résistance analytique et numérique sur les plans  $(N_{11}, N_{22})$  et  $(N_V, N_W)$ . Au vu de ces figures, il apparait que :

- La fraction volumique de mortier impacte principalement la résistance en compression de la maçonnerie, et dans une moindre mesure, sa résistance au cisaillement. La résistance à la traction dans la direction 2 (qui est obtenue par un mécanisme de

discontinuité de vitesse dans le joint horizontal), n'est pas affectée du tout par la variation de fraction volumique, et la résistance en traction dans la direction 1 n'est que légèrement affectée ;

- L'évolution des domaines de résistance obtenus par les approches analytique et numérique est assez similaire, bien que l'approche analytique tende à surestimer la résistance au cisaillement, surtout pour des fractions volumiques de mortier élevées.

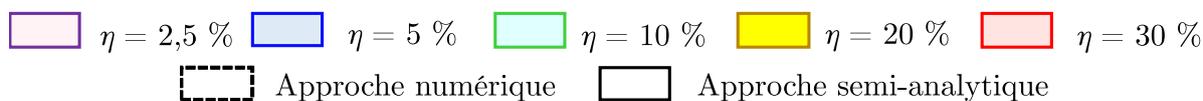
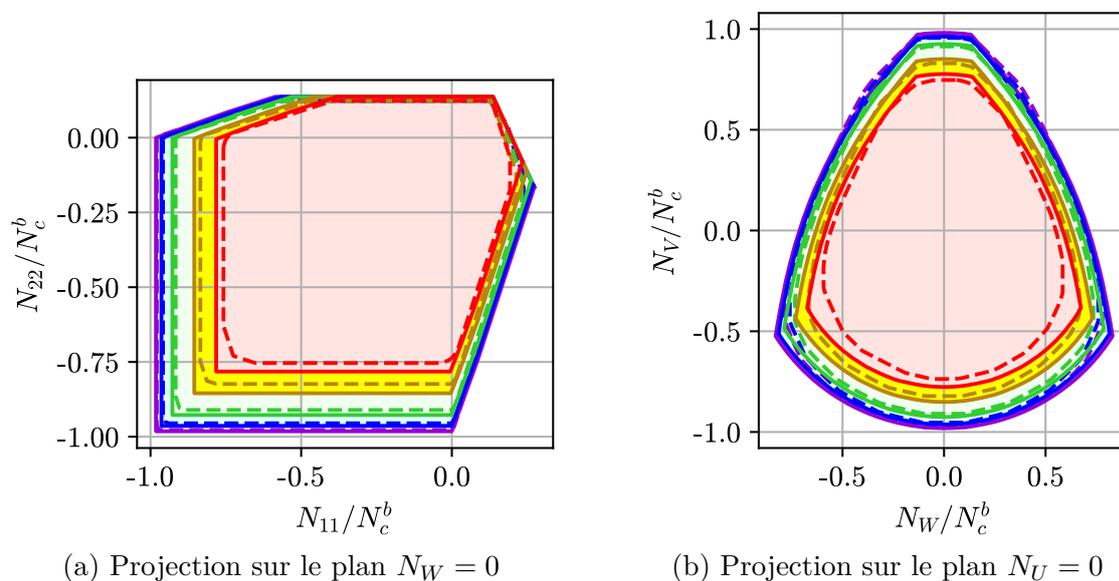


FIGURE D.6 – Domaines de résistance vis-à-vis de sollicitations planes obtenus par les approches analytique et numérique pour différentes valeurs de la fraction volumique du mortier

La figure D.7 représente l'écart relatif entre les approches analytique et numérique (défini par l'équation (D.1)), pour chaque trajet de chargement représenté par un couple  $(\beta, \gamma)$ , pour la plus faible (a) et pour la plus grande (b) fraction volumique considérées. La figure D.7 (c) représente l'écart relatif moyen  $\varepsilon$  (D.2) en fonction de la fraction volumique.

Comme suggéré par la figure D.6, cet écart relatif moyen augmente avec la fraction volumique. L'écart relatif est plus élevé dans les zones correspondant à une sollicitation de cisaillement ou de traction dans la direction 2, et plus faible dans les zones de compression couplées à des sollicitations de cisaillement faibles ou nulles. Pour ces dernières sollicitations, l'approche numérique améliore l'approche analytique de 5 % au mieux. Enfin, l'écart relatif moyen reste limité, puisqu'il va de 4,8 % (pour une fraction volumique  $\eta = 2,5\%$ ) à 10,9 % (pour une fraction volumique  $\eta = 30\%$ ).

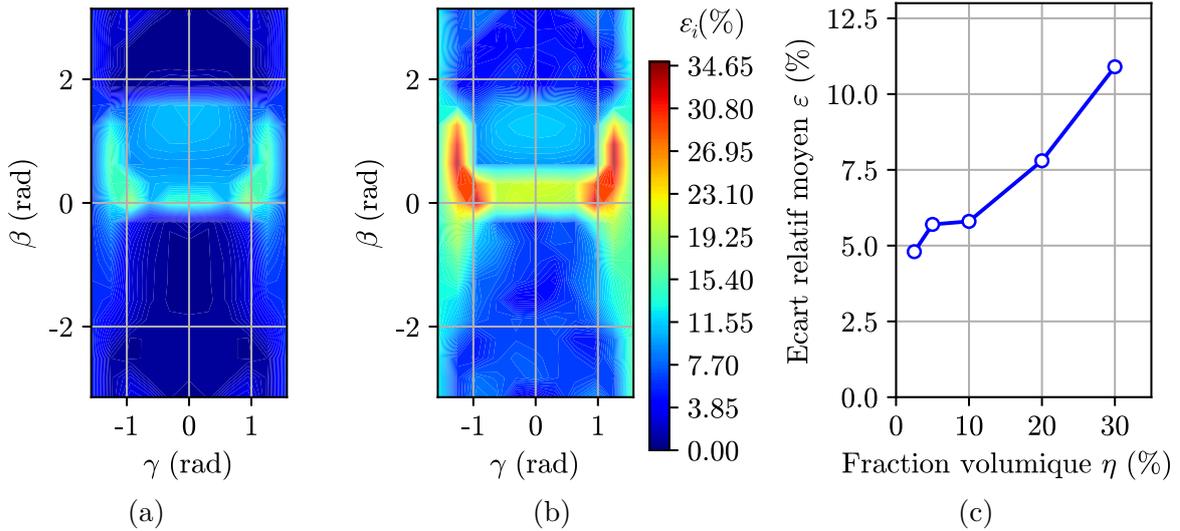


FIGURE D.7 – Écart relatif  $\varepsilon_i$  entre  $\Pi^{num}(\underline{D})$  et  $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$  défini par (D.1) en fonction du trajet de chargement (défini par l'équation (6.18)) pour (a) la plus petite et (b) la plus grande fraction volumique  $\eta$  considérée; (c) écart relatif moyen  $\varepsilon$  (D.2) en fonction de la fraction volumique

### 3.2 Sollicitations hors-plan

La figure D.8 présente des coupes  $(N_{11}/N_c^b, M_{11}/M_c^b)$  (a),  $(N_{22}/N_c^b, M_{22}/M_c^b)$  (b) et  $(N_{12}/N_c^b, M_{12}/M_c^b)$  (c) pour différentes valeurs de fraction volumique de mortier.

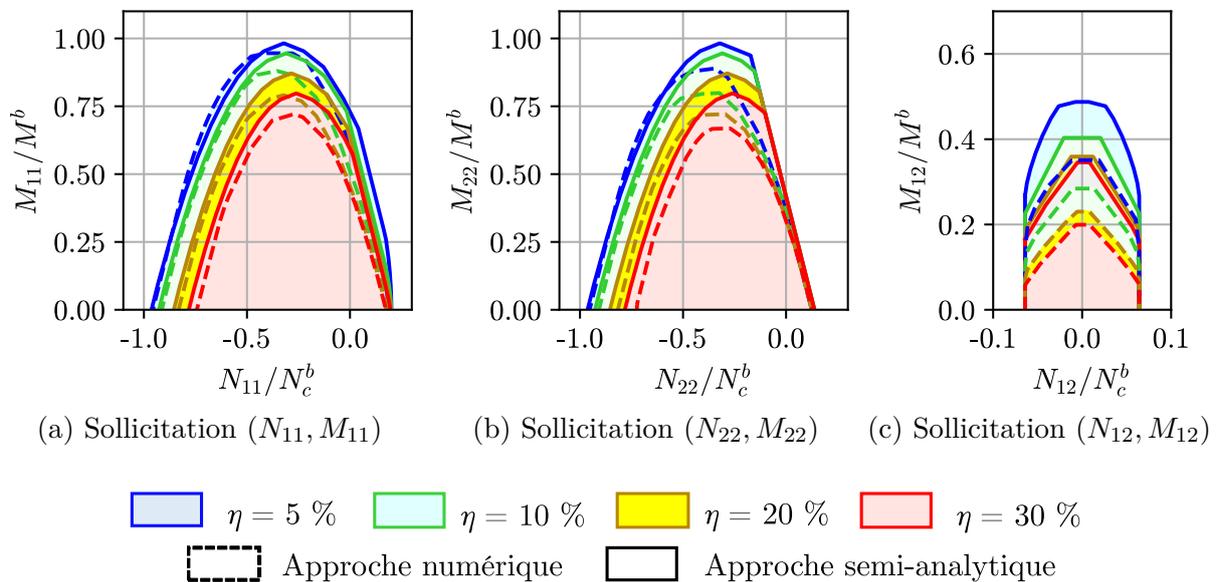


FIGURE D.8 – Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique pour différentes valeurs de fraction volumique de mortier

Dans le paragraphe 3.1, nous avons montré que la résistance en compression de l'assemblage dépendait fortement de la fraction volumique de mortier. C'est encore le cas ici, et on peut également noter que la résistance à la flexion est également dégradée, ce

qui montre bien l'intérêt de construire avec des joints relativement minces.

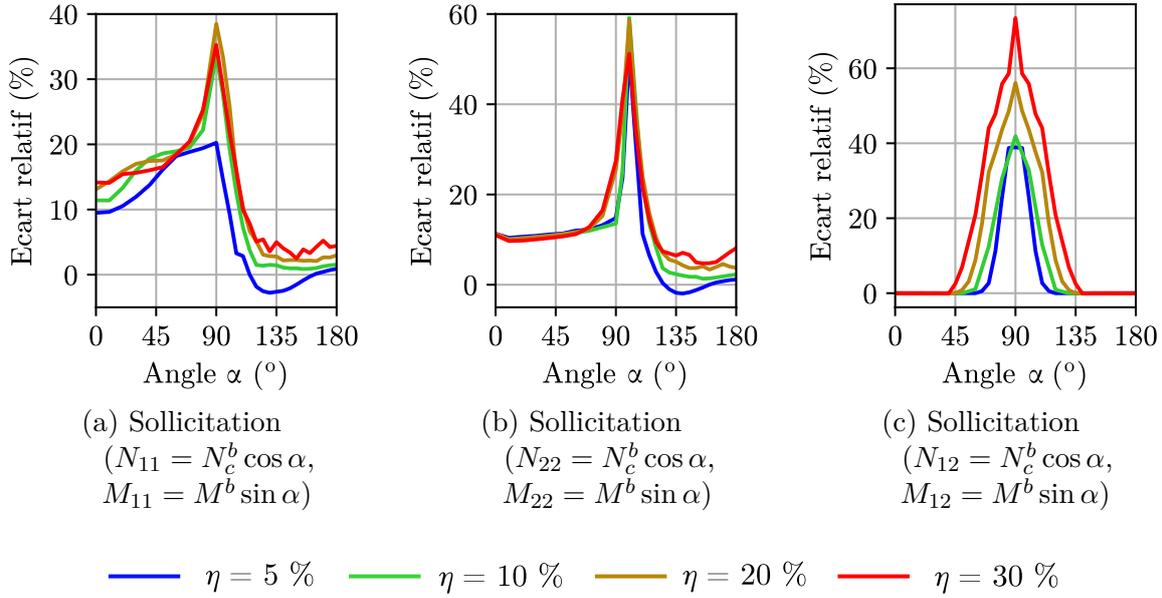


FIGURE D.9 – Écart relatif  $\varepsilon_i$  (D.1) pour les différents trajets de chargement paramétrés par un angle  $\alpha$  représentés sur la figure D.8

Contrairement au cas de la variation de contraste, l'approche semi-analytique permet de rendre compte relativement bien de la dégradation de la résistance en flexion. Il subsiste cependant un écart entre cette approche et l'approche numérique, comme on peut le voir sur les figures D.9 et D.10, et ce quelle que soit la direction de sollicitation. Les écarts maximaux apparaissent encore une fois pour des sollicitations de flexion combinées à une légère compression, ainsi que pour l'application d'un moment de torsion.

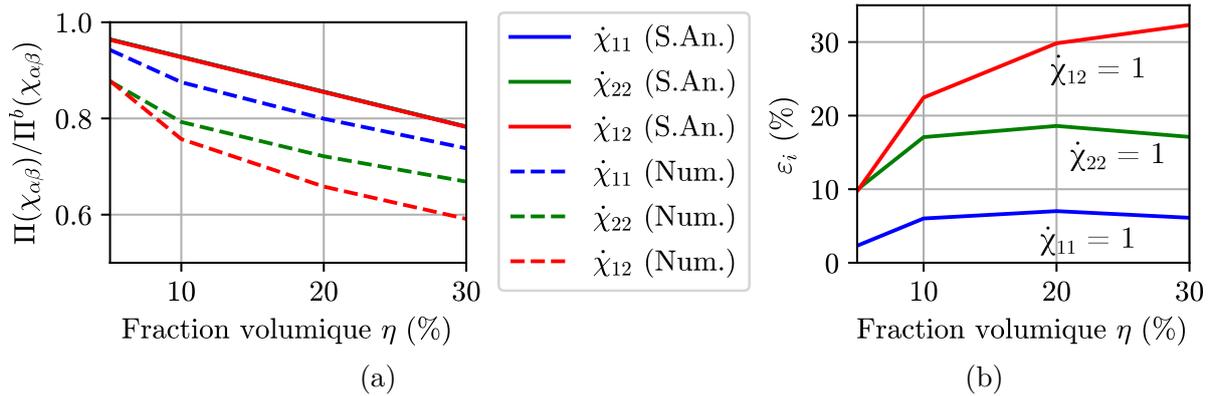


FIGURE D.10 – (a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différentes fractions volumiques de mortier<sup>2</sup>; (b) écart relatif  $\varepsilon_i$  (D.1) entre ces valeurs suivant qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique

2. Sur la figure D.10 (a), les trois approches semi-analytiques sont confondues

## 4 Influence de l'élanement transversal des joints

De la même manière que pour la taille des blocs, les normes de dimensionnement actuelles ne prescrivent pas d'épaisseur de joints. Il est cependant reconnu que des joints minces impactent favorablement la résistance de l'assemblage. Le DTU 20.1 [2] considère que des joints "épais", usuellement employés pour la construction en pierre massive, ont une épaisseur allant de 8 mm à 30 mm. Considérant que l'épaisseur de ces murs est généralement comprise entre 20 et 50 cm, il nous est apparu raisonnable de considérer des valeurs d'élanement comprises entre 0,02 et 0,15 pour un joint d'épaisseur 10 mm. Dans le but de faire varier l'élanement sans affecter les autres paramètres, les dimensions dans le plan du mur sont conservées, et seule son épaisseur varie. Le tableau D.2 donne l'épaisseur du mur pour les différents élanements considérés.

TABLEAU D.2 – Épaisseur du mur pour les différentes valeurs d'élanement transversales considérées

Elancement transversal $\lambda$	0,02	0,05	0,1	0,15
Epaisseur du mur $h$	0,5	0,2	0,1	0,067

### 4.1 Sollicitations planes

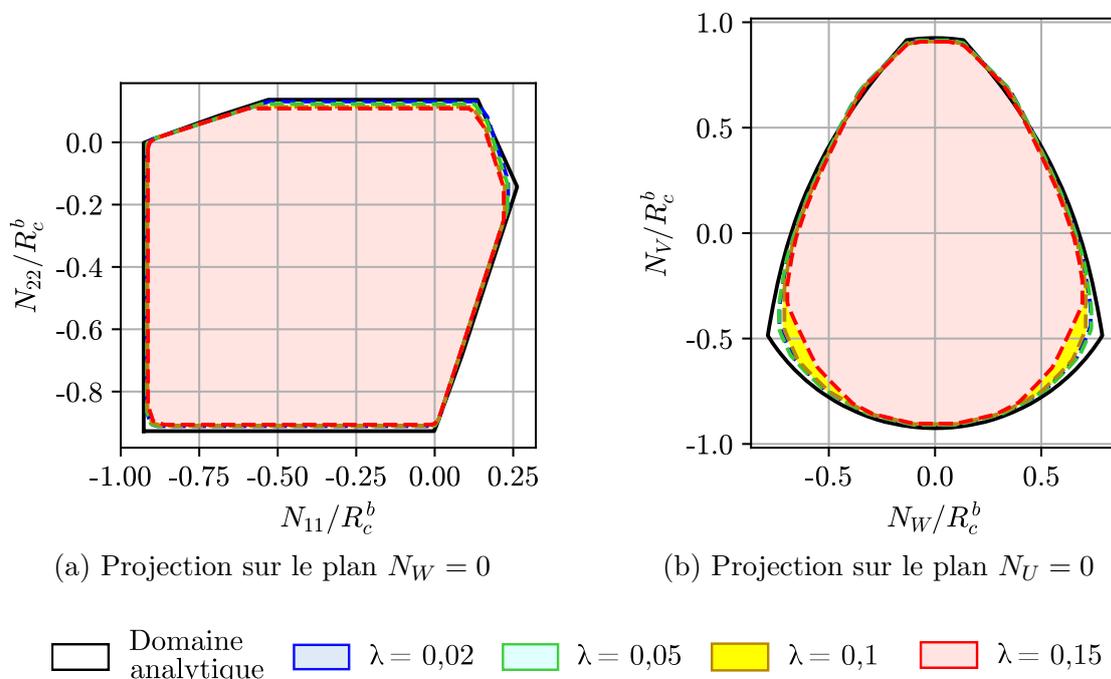


FIGURE D.11 – Domaines de résistance vis-à-vis de sollicitations planes obtenus par les approches analytique et numérique pour différentes valeurs d'élanement transversal des joints

La figure D.11 représente des projections du domaine de résistance sur le plan  $(N_{11}, N_{22})$  (sous-figure (a)) et sur le plan  $(N_V, N_W)$  (sous-figure (b)). On notera que l'éclatement n'impacte pas les résultats de l'approche analytique car cette dernière, se basant sur des mécanismes homogènes avec des discontinuités éventuelles, ne prend pas en compte cet éclatement transversal. Ces mécanismes peuvent être vus comme un cas limite pour un éclatement nul et sans effets de bords dus aux faces libres du mur. A l'inverse, plus l'éclatement du joint est grand, plus on voit apparaître des mécanismes localisés à proximité des surfaces libres des joints. De tels mécanismes peuvent être observés sur la figure D.12, qui montre les mécanismes de rupture optimaux obtenus numériquement pour un éclatement  $\lambda = 0,05$  (a) et  $\lambda = 0,5$  (b).

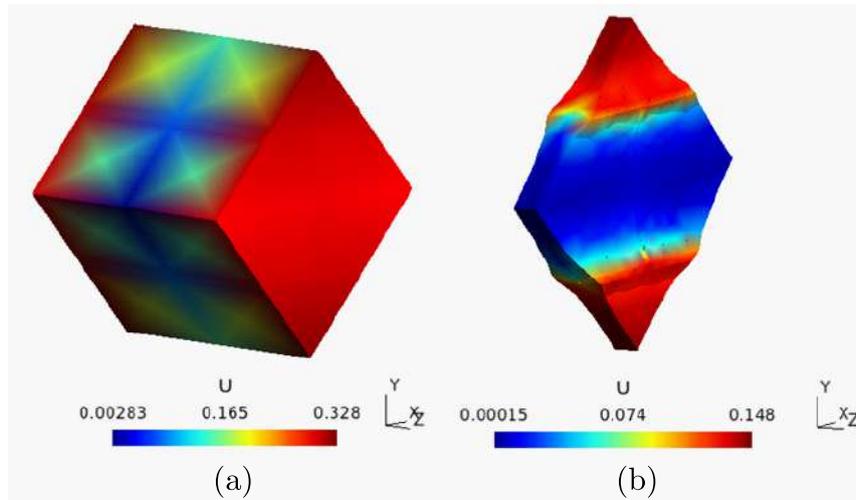


FIGURE D.12 – Mécanismes optimaux obtenus numériquement pour un éclatement  $\lambda = 0,05$  (a) et  $\lambda = 0,5$  (b)

La figure D.13 représente l'écart relatif entre l'approche analytique et l'approche numérique pour les éclatements considérés. Il est à noter, une fois encore, que les mécanismes analytiques proposés donnent de bonnes estimations des résistances vis-à-vis de sollicitations de compression, et de moins bonnes estimations pour les sollicitations de traction (combinées ou non à du cisaillement). Les zones où l'erreur est la plus élevée sur la figure D.11 correspondent aux zones sur la figure D.13 où la différence est la plus grande entre les approches analytique et numérique.

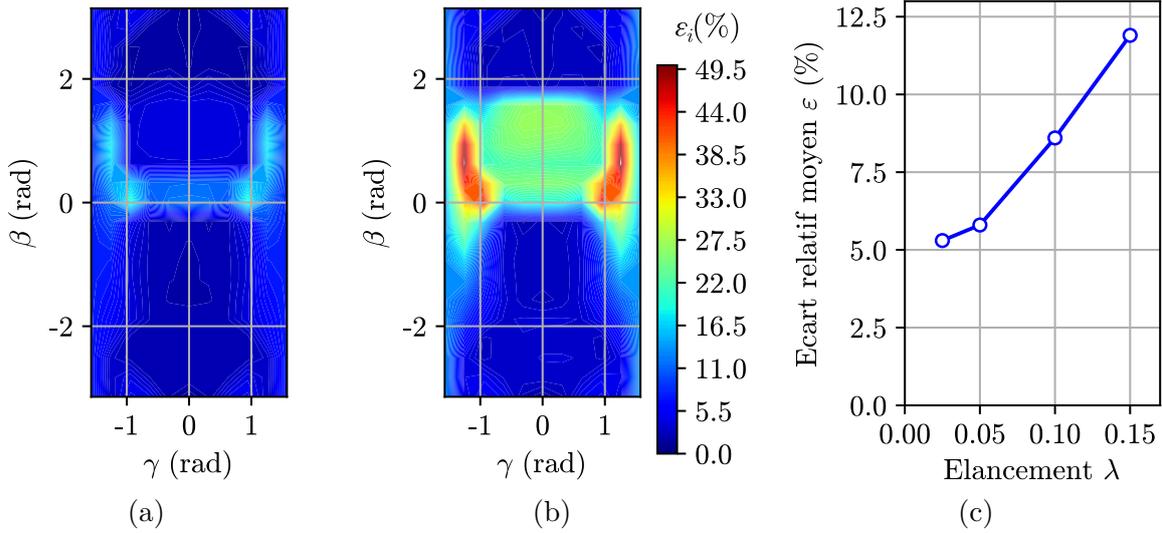


FIGURE D.13 – Écart relatif  $\varepsilon_i$  défini par (D.1) entre  $\Pi^{num}(\underline{D})$  et  $\Pi^{S.An.}(\underline{D})$  en fonction du trajet de chargement pour (a) le plus petit et (b) le plus grand éclancement  $\lambda$  considéré ; (c) écart relatif moyen  $\varepsilon$  défini par (D.2) en fonction de l'éclancement

## 4.2 Sollicitations hors-plan

La figure D.14 représente des coupes  $(N_{11}/N_c^b, M_{11}/M^b)$  (a),  $(N_{22}/N_c^b, M_{22}/M^b)$  (b) et  $(N_{12}/N_c^b, M_{12}/M^b)$  (c) pour différents éclancements transversaux des joints. Comme déjà indiqué dans le paragraphe précédent, l'approche semi-analytique, représentée en trait continu noir sur la figure D.14, ne permet pas d'évaluer les effets de l'éclancement.

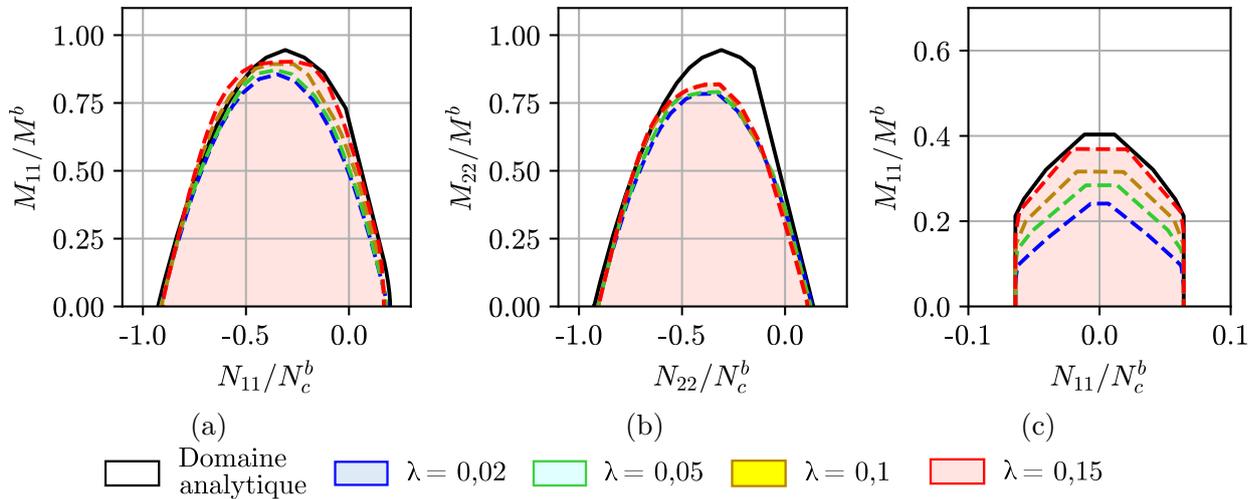


FIGURE D.14 – Coupes des domaines de résistance obtenus par les approches semi-analytique et numérique pour différentes valeurs d'éclancement transversal  $\lambda$  des joints

On note visuellement sur ces figures que l'éclancement impacte assez peu la différence relative entre les approches semi-analytique et numérique. Pour des sollicitations de flexion ou de torsion, il a même tendance à réduire cet écart. La figure D.15 (a), qui présente l'évolution des puissances résistantes maximales  $\Pi(\dot{\chi}_{\alpha\beta})$  pour  $\dot{\chi}_{11} = 1$ ,  $\dot{\chi}_{22} = 1$  et  $\dot{\chi}_{12} = 1$  en fonction de l'éclancement, montre des évolutions similaires. La figure D.15 (b), qui présente

l'écart relatif entre les puissances résistantes maximales obtenues par les approches semi-analytique et numérique, montre également que, pour ces sollicitations, l'écart relatif diminue lorsque l'élanement augmente. De telles conclusions proviennent probablement du fait que les maillages utilisés soient différents, et que les solutions obtenues, qui sont des majorants, pourraient être améliorés avec des maillages plus fins (qui conduiraient par contre à des temps de calculs beaucoup plus élevés).

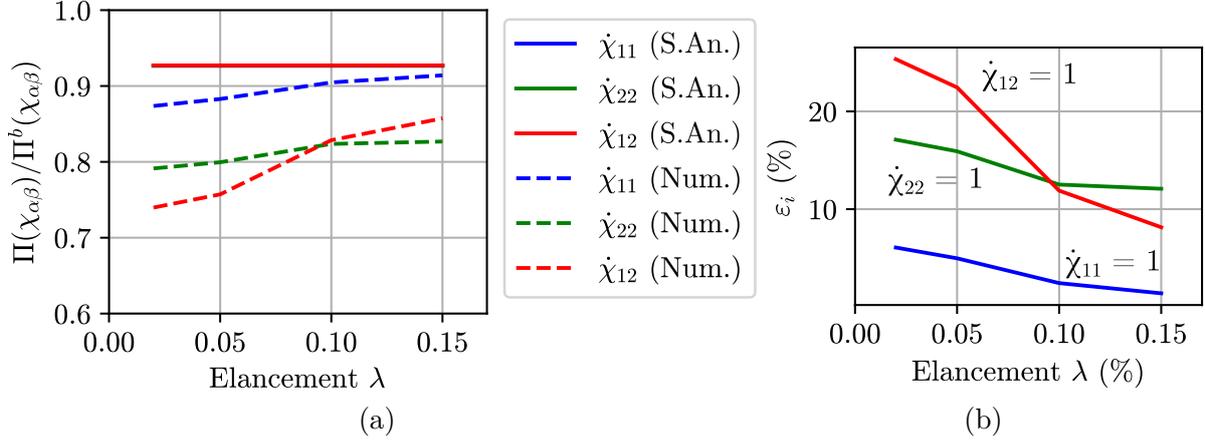


FIGURE D.15 – (a) Rapport entre la puissance résistante maximale obtenue sur la maçonnerie et sur une plaque homogène pour différents élanements<sup>3</sup>; (b) écart relatif  $\varepsilon_i$  défini par (D.1) entre ces valeurs suivant qu'elles soient obtenues par l'approche semi-analytique ou par l'approche numérique

## 5 Conclusion

En conclusion, cette étude paramétrique a principalement montré que :

- Augmenter le contraste entre la résistance en compression de la pierre et du mortier pour une résistance fixée de la pierre (ce qui correspond à diminuer celle du mortier) faisait principalement diminuer la résistance à la traction, à la flexion simple, et dans une moindre mesure au cisaillement et à la torsion de l'assemblage. La résistance à la compression de l'assemblage est quant à elle relativement peu impactée.
- Augmenter la fraction volumique de mortier conduisait principalement à une réduction de la résistance en compression et en torsion de l'assemblage. La résistance à la flexion simple est également impactée dans une moindre mesure, et les résistances en traction et au cisaillement sont très peu impactées (puisque les mécanismes correspondants mettent en jeu des discontinuités dans les joints)
- Augmenter l'élanement transversal des joints semble réduire légèrement la résistance à toutes les sollicitations, sauf en torsion. Ce résultat doit cependant être nuancé car les majorants obtenus dépendent également du maillage utilisé, qui est différent pour toutes les géométries.

3. Sur la figure D.15 (a), les trois approches semi-analytiques sont confondues

Cette étude paramétrique nous a également permis de comparer les deux approches cinématiques, semi-analytique et numérique, proposées dans les chapitres 5 et 6. Elle a notamment montré que l'approche cinématique numérique, qui permet d'explorer un ensemble de champs cinématiquement admissibles différent, et potentiellement plus vaste que l'approche semi-analytique, pouvait présenter un apport intéressant pour certaines géométries de cellule de base, et notamment lorsque les joints sont épais. Dans ce cas, qui regroupe à la fois les fractions volumiques et les transversaux élancements élevés, des mécanismes de rupture locaux, demeurant inaccessibles à l'approche analytique, sont davantage susceptibles de se produire.

Il apparaît également que pour des contrastes élevés entre la résistance en compression de la pierre et du mortier, l'approche semi-analytique surestime assez largement ( $> 30\%$ ) la résistance à la flexion verticale de l'assemblage. En outre, la résistance à la torsion du mur est également surestimée.

Enfin, il convient de garder à l'esprit que les deux approches ici comparées sont des approches cinématiques, qui fournissent des approches par l'extérieur du domaine de résistance. Il serait intéressant de pouvoir comparer les résultats obtenus à une approche statique. Une telle comparaison conduirait cependant à des temps de calcul très élevés, ce qui explique pourquoi seules les approches cinématiques ont été ici comparées.

\*       \*  
\*  
\*  
\*



# Bibliographie

- [1] NF EN 1996-1-1 : Eurocode 6 - Calcul des ouvrages en maçonnerie - Partie 1-1 : règles générales pour ouvrages en maçonnerie armée et non armée, 2005.
- [2] NF DTU 20.1 : Ouvrages en maçonnerie de petits éléments - Parois et murs, 2020.
- [3] D. T. PHAM, E. DONVAL, N. PINOTEAU, P. PIMIENTA et D. PALLIX : Test of loaded and unloaded natural stone masonry walls exposed to fire. *Materials and Structures*, 55(9):229, novembre 2022.
- [4] P. de BUHAN et G. de FELICE : A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 45:1085–1104, 1997.
- [5] K. SAB : Yield design of thin periodic plates by a homogenization technique and an application to masonry walls. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(9):641–646, septembre 2003.
- [6] CENTRE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE DU BÂTIMENT : Base de Données Nationale des Bâtiments.
- [7] F. SCIARRETTA, J. ESLAMI, A. L. BEAUCOUR et A. NOUMOWÉ : State-of-the-art of construction stones for masonry exposed to high temperatures. *Construction and Building Materials*, 304:124536, octobre 2021.
- [8] M. VIGROUX, J. ESLAMI, A. L. BEAUCOUR, A. BOURGÈS et A. NOUMOWÉ : High temperature behaviour of various natural building stones. *Construction and Building Materials*, 272:121629, février 2021.
- [9] A. COSTIGAN et S. PAVÍA : Influence of the mechanical properties of lime mortar on the strength of brick masonry. *RILEM Bookseries*, 7:359–372, 01 2013.
- [10] T. PARENT : *Méthodologie de diagnostic de structures maçonnées anciennes*. Thèse de doctorat, Université Toulouse 3, 2015.
- [11] J. BOŠNJAK, S. GAMBARELLI, A. SHARMA et A. MEŠKOVIĆ : Experimental and numerical studies on masonry after exposure to elevated temperatures. *Construction and Building Materials*, 230:116926, janvier 2020.

- 
- [12] S. RUSSO et F. SCIARRETTA : Experimental and Theoretical Investigation on Masonry after High Temperature Exposure. *Experimental Mechanics*, 52(4):341–359, avril 2012.
- [13] G. M. E. COOKE : Thermal bowing and how it affects the design of fire separating construction. *Fire and materials*, 13(1):230–236, 1988.
- [14] T. D. NGUYEN et F. MEFTAH : Behavior of clay hollow-brick masonry walls during fire. Part 1 : Experimental analysis. *Fire Safety Journal*, 52:55–64, août 2012.
- [15] R. G. OLIVEIRA, J. P. C. RODRIGUES, J. MIGUEL PEREIRA, P. B. LOURENÇO et R. F. R. LOPES : Experimental and numerical analysis on the structural fire behaviour of three-cell hollowed concrete masonry walls. *Engineering Structures*, 228:111439, février 2021.
- [16] P. PIMENTA, A. OBAIE, E. DONVAL, D. T. PHAM, A. NOUMOWÉ, J. ESLAMI et D. HOXHA : Fire behaviour of limestone masonry during and after fire. In *Proceedings of the 4th International Fire Safety Symposium IFireSS 2023*, Rio de Janeiro, Brazil, juin 2023.
- [17] NF EN 1996-1-2 : Eurocode 6 : Calcul des ouvrages en maçonnerie. Partie 1-2 : Règles générales - Comportement au feu, 2005.
- [18] P. BLOCK, M. DEJONG et J. OCHSENDORF : As Hangs the Flexible Line : Equilibrium of Masonry Arches. *Nexus Network Journal*, 8(2):13–24, octobre 2006.
- [19] R. MAIA AVELINO, A. IANNUZZO, T. VAN MELE et P. BLOCK : Assessing the safety of vaulted masonry structures using thrust network analysis. *Computers & Structures*, 257:106647, décembre 2021.
- [20] T. T. BUI, A. LIMAM et V. SARHOSIS : Failure analysis of masonry wall panels subjected to in-plane and out-of-plane loading using the discrete element method. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, pages 1–17, février 2019.
- [21] P. B. LOURENÇO et J. G. ROTS : Multisurface Interface Model for Analysis of Masonry Structures. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(7):660–668, juillet 1997.
- [22] A NADJAI, M O’GARRA et F ALI : Finite element modelling of compartment masonry walls in fire. *Computers & Structures*, 81(18-19):1923–1930, août 2003.
- [23] T. D. NGUYEN et F. MEFTAH : Behavior of hollow clay brick masonry walls during fire. Part 2 : 3D finite element modeling and spalling assessment. *Fire Safety Journal*, 66:35–45, mai 2014.
- [24] Y. ABDALLAH, J. SULEM, M. BORNERT et I. STEFANOÛ : Compaction banding in high-porosity carbonate rocks. Part I : Experimental observations. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 126, décembre 2020.

- [25] C. L. KHOO : *A failure criterion for brickwork in axial compression*. Thèse de doctorat, University of Edinburgh, 1972.
- [26] MINISTÈRE DE LA TRANSITION ÉCOLOGIQUE ET DE LA COHÉSION DES TERRITOIRES : Construction et performance environnementale du bâtiment, octobre 2022. Disponible à : <https://www.ecologie.gouv.fr/construction-et-performance-environnementale-du-batiment>.
- [27] Arrêté du 4 août 2021 relatif aux exigences de performance énergétique et environnementale des constructions de bâtiments en France métropolitaine et portant approbation de la méthode de calcul prévue à l'article R. 172-6 du code de la construction et de l'habitation.
- [28] Décret n° 2021-1004 du 29 juillet 2021 relatif aux exigences de performance énergétique et environnementale des constructions de bâtiments en France métropolitaine.
- [29] NF EN 13501-2 : Classement au feu des produits et éléments de construction - partie 2 : classement à partir des données d'essais de résistance au feu à l'exclusion des produits utilisés dans les systèmes de ventilation, 2016.
- [30] A. DAWARE et M. Z. NASER : Fire performance of masonry under various testing methods. *Construction and Building Materials*, 289:123183, juin 2021.
- [31] T. PESTRE : *La pierre naturelle dans un contexte d'évolution réglementaire environnementale de la construction, étude des transferts hygrothermiques au sein des composants d'enveloppes de bâtiments*. Thèse de doctorat, Université d'Artois, octobre 2021.
- [32] NF EN 1992-1-2 : Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - Partie 1-2 : Règles générales - Calcul du comportement au feu, 2004.
- [33] M. VIGROUX, F. SCIARRETTA, J. ESLAMI, A. L. BEAUCOUR et A. BOURGÈS, A. and Noumowé : High temperature effects on the properties of limestones : post-fire diagnostics and material's durability. *Materials and Structures*, 55(10):253, décembre 2022.
- [34] M. ANDREINI, M. CACIOLAI, S. La MENDOLA, L. MAZZIOTTI et M. SASSU : Mechanical behavior of masonry materials at high temperatures. *Fire and Materials*, 39(1):41–57, 2015.
- [35] P. BAMONTE, P. G. GAMBAROVA et F. SCIARRETTA : Thermo-mechanical properties and stress-strain curves of ordinary cementitious mortars at elevated temperatures. *Construction and Building Materials*, 267:121027, janvier 2021.
- [36] V. PACHTA, S. TRIANTAFYLLAKI et M. STEFANIDOU : Performance of lime-based mortars at elevated temperatures. *Construction and Building Materials*, 189:576–584, novembre 2018.

- 
- [37] C. GUENSER, S. CORN, M. SALGUES, N. DOMEDE et P. MORENON : Effet des hautes températures de l'incendie de Notre-Dame de Paris sur les caractéristiques mécaniques et thermiques d'un calcaire lutétien représentatif. In *NOMAD 2022-4e conférence internationale francophone Nouveaux Matériaux et Durabilité*, 2022.
- [38] F. HOMAND-ETIENNE et R. HOUPERT : Comportement mécanique des roches en fonction de la température. *Revue Française de Géotechnique*, (28), 1984.
- [39] AGENCE NATIONALE DE LA RECHERCHE : Stabilité et préservation des bâtiments du patrimoine culturel en maçonnerie de pierre après incendie - POSTFIRE, 2020. Disponible à : [anr.fr/Projet-ANR-20-CE22-0012](https://anr.fr/Projet-ANR-20-CE22-0012).
- [40] AGENCE NATIONALE DE LA RECHERCHE : Evaluation structurale post-incendie des Monuments Historiques, vers une utilisation optimisée de la MEF et de la MED - DEMMEFI, 2020. Disponible à : [anr.fr/Projet-ANR-20-CE22-0004](https://anr.fr/Projet-ANR-20-CE22-0004).
- [41] F. R. RUVALCABA AYALA : *Mechanical properties and structural behaviour of masonry at elevated temperatures*. Thèse de doctorat, University of Manchester, 2011.
- [42] S. H. INGBERG : *Fire Tests of Brick Walls*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1954.
- [43] H. D. FOSTER, E. R. PINKSTON et S. H. INGBERG : *Fire Resistance of Walls of Lightweight-aggregate Concrete Masonry Units*. U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1950.
- [44] H. D FOSTER, E. R. PINKSTON et S. H. INGBERG : Fire resistance of walls of gravel-aggregate concrete masonry units. Rapport technique NBS BMS 120, National Bureau of Standards, Gaithersburg, MD, 1951.
- [45] S. M. BYRNE : Fire resistance of load-bearing masonry walls. *Fire Technology*, 15(3):180–188, août 1979.
- [46] F. AL NAHHAS, R. AMI SAADA, G. BONNET et P. DELMOTTE : Resistance to fire of walls constituted by hollow blocks : Experiments and thermal modeling. *Applied Thermal Engineering*, 27(1):258–267, janvier 2007.
- [47] H. POPE : *Improving the Fire Resistance of Concrete Masonry Walls*. Thèse de doctorat, Carleton University, Ottawa, Ontario, 2021.
- [48] R. L. G. OLIVEIRA, J. P. C. RODRIGUES, J. M. PEREIRA, P. B. LOURENÇO et H. U. MARSCHALL : Thermomechanical behaviour of refractory dry-stacked masonry walls under uniaxial compression. *Engineering Structures*, 240:112361, août 2021.
- [49] A. P. FANTILLI et N. S. BURELLO : Masonry arches and vaults under fire. *Journal of Building Engineering*, 56:104740, septembre 2022.

- [50] CTE : Código Técnico de la Edificación, 2022.
- [51] A. COSTIGAN, S. PAVÍA et O. KINNANE : An experimental evaluation of prediction models for the mechanical behavior of unreinforced, lime-mortar masonry under compression. *Journal of Building Engineering*, 4:283–294, décembre 2015.
- [52] M. ANDREINI et M. SASSU : Mechanical behaviour of full unit masonry panels under fire action. *Fire Safety Journal*, 46(7):440, août 2011.
- [53] PR NF EN 1996-1-2 : Eurocode 6 : Calcul des ouvrages en maçonnerie. Partie 1-2 : Règles générales - Comportement au feu (projet de révision), 2022.
- [54] ISO 834-1 : Essai de résistance au feu - Éléments de construction - Partie 1 : exigences générales, 1999.
- [55] A. MARIA D’ALTRI, V. SARHOSIS, G. MILANI, J. ROTS, S. CATTARI, S. LAGOMARSINO, E. SACCO, A. TRALLI, G. CASTELLAZZI et S. de MIRANDA : Modeling Strategies for the Computational Analysis of Unreinforced Masonry Structures : Review and Classification. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 27(4):1153–1185, septembre 2020.
- [56] J. HEYMAN : The stone skeleton. *International Journal of Solids and Structures*, 2(2):249–279, avril 1966.
- [57] V. PLEVRIS et P. G. ASTERIS : Modeling of masonry failure surface under biaxial compressive stress using Neural Networks. *Construction and Building Materials*, 55:447–461, mars 2014.
- [58] H. FRIAA, M. LAROUCSI HELLARA, I. STEFANO, K. SAB et A. DOGUI : Artificial neural networks prediction of in-plane and out-of-plane homogenized coefficients of hollow blocks masonry wall. *Meccanica*, 55(3):525–545, mars 2020.
- [59] P. BLOCK et J. OCHSENDORF : Thrust Network Analysis : A New Methodology for Three-Dimensional Equilibrium. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 48(3):167–173, décembre 2007.
- [60] A. FRADDOSIO, N. LEPURE et M. D. PICCIONI : Thrust Surface Method : An innovative approach for the three-dimensional lower bound Limit Analysis of masonry vaults. *Engineering Structures*, 202:109846, janvier 2020.
- [61] M. COMO : *Statics of Historic Masonry Constructions*, volume 9 de *Springer Series in Solid and Structural Mechanics*. Springer International Publishing, Cham, 2017.
- [62] A. CHIOZZI, G. MILANI et A. TRALLI : A Genetic Algorithm NURBS-based new approach for fast kinematic limit analysis of masonry vaults. *Computers & Structures*, 182:187–204, avril 2017.

- 
- [63] P. MERIGGI, G. DE FELICE, S. DE SANTIS, F. GOBBIN, A. MORDANOVA et B. PANTÒ : Distinct Element Modelling of Masonry Walls under Out-Of-Plane Seismic Loading. *International Journal of Architectural Heritage*, 13(7):1110–1123, octobre 2019.
- [64] F. MASI, I. STEFANO, V. MAFFI-BERTHIER et P. VANNUCCI : A Discrete Element Method based-approach for arched masonry structures under blast loads. *Engineering Structures*, 216:110721, août 2020.
- [65] V. VENZAL, S. MOREL, T. PARENT et F. DUBOIS : Frictional cohesive zone model for quasi-brittle fracture : Mixed-mode and coupling between cohesive and frictional behaviors. *International Journal of Solids and Structures*, 198:17–30, août 2020.
- [66] A. FERRANTE : A new hybrid FEM-DEM approach for more realistic evaluation of masonry structures. *Academic Journal of Civil Engineering*, 40(1):190–193, 2022.
- [67] L. MACORINI et B. A. IZZUDDIN : A non-linear interface element for 3D mesoscale analysis of brick-masonry structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85(12):1584–1608, mars 2011.
- [68] M. DHANASEKAR, A. W. PAGE et P. W. KLEEMAN : The failure of brick masonry under biaxial stresses. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 79(2):295–313, 1985.
- [69] A. W. PAGE : A biaxial failure criterion for brick masonry in the tension-tension range. *Int. J. Masonry Constr.*, 1(1):26, 1980.
- [70] A. W. PAGE : The biaxial compressive strength of brick masonry. *Ice Proceedings*, 71:893–906, janvier 1981.
- [71] A. W. PAGE : The strength of brick masonry under biaxial tension-compression. *International journal of masonry construction*, 3(1):26–31, 1983.
- [72] P. B. LOURENÇO, J. G. ROTS et J. BLAAUWENDRAAD : Continuum Model for Masonry : Parameter Estimation and Validation. *Journal of Structural Engineering*, 124(6):642–652, juin 1998.
- [73] G. MILANI et M. VALENTE : Failure analysis of seven masonry churches severely damaged during the 2012 Emilia-Romagna (Italy) earthquake : Non-linear dynamic analyses vs conventional static approaches. *Engineering Failure Analysis*, 54:13–56, 2015.
- [74] G.N. PANDE, J.X. LIANG et J. MIDDLETON : Equivalent elastic moduli for brick masonry. *Computers and Geotechnics*, 8(3):243–265, 1989.
- [75] A. CECCHI et K. SAB : A multi-parameter homogenization study for modeling elastic masonry. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(2):249–268, janvier 2002.

- [76] M. MISTLER, A. ANTHOINE et C. BUTENWEG : In-plane and out-of-plane homogenisation of masonry. *Computers & Structures*, 85(17):1321–1330, septembre 2007.
- [77] Y. ZHOU, L. J. SLUYS et R. ESPOSITO : An improved mean-field homogenization model for the three-dimensional elastic properties of masonry. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 96:104721, novembre 2022.
- [78] T. J. MASSART, R. H. J. PEERLINGS et M. G. D. GEERS : Mesoscopic modeling of failure and damage-induced anisotropy in brick masonry. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23(5):719–735, septembre 2004.
- [79] T. J. MASSART, R. H. J. PEERLINGS et M. G. D. GEERS : An enhanced multi-scale approach for masonry wall computations with localization of damage. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69(5):1022–1059, janvier 2007.
- [80] D. ADDESSI, P. DI RE, C. GATTA et E. SACCO : Non-Uniform TFA reduced multiscale procedure for shell-3D modeling of periodic masonry structures. *Mechanics Research Communications*, 130:104122, juillet 2023.
- [81] G. MILANI : Four approaches to determine masonry strength domain. *Proceedings of the ICE - Engineering and Computational Mechanics*, 168(3):99–121, septembre 2015.
- [82] I. STEFANOU, K. SAB et J.-V. HECK : Three dimensional homogenization of masonry structures with building blocks of finite strength : A closed form strength domain. *International Journal of Solids and Structures*, 54:258–270, février 2015.
- [83] J. SULEM et H. B. MÜHLHAUS : A continuum model for periodic two-dimensional block structures. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, 2(1):31–46, janvier 1997.
- [84] M. GODIO, I. STEFANOU, K. SAB et J. SULEM : Cosserat Elastoplastic Finite Elements for Masonry Structures. *Key Engineering Materials*, 624:131–138, 2015. Conference Name : Mechanics of Masonry Structures Strengthened with Composite Materials ISBN : 9783038352037.
- [85] A. NADJAI, M. O’GARRA, F. A. ALI et D. LAVERTY : A numerical model for the behaviour of masonry under elevated temperatures. *Fire and Materials*, 27(4):163–182, 2003.
- [86] A. NADJAI, M. O’GARA, F. ALI et R. JURGEN : Compartment Masonry Walls in Fire Situations. *Fire Technology*, 42(3):211, avril 2006.
- [87] P. R. PRAKASH, M. AZENHA, J. M. PEREIRA et P. B. LOURENÇO : Finite element based micro modelling of masonry walls subjected to fire exposure : Framework

- validation and structural implications. *Engineering Structures*, 213:110545, juin 2020.
- [88] T. D. NGUYEN, F. MEFTA, R. CHAMMAS et A. MEBARKI : The behaviour of masonry walls subjected to fire : Modelling and parametrical studies in the case of hollow burnt-clay bricks. *Fire Safety Journal*, 44(4):629–641, mai 2009.
- [89] A. SRIDI : *Modélisations thermomécanique et numérique du comportement de maçonneries en briques alvéolées en terre cuite sous chargements mécanique et thermique sévères*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay, avril 2018.
- [90] D. T. PHAM : *Analyse par le calcul à la rupture de la stabilité au feu des panneaux en béton armé de grandes dimensions*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, décembre 2014.
- [91] M. YANG : *Analyse de la stabilité au feu des murs en béton armé par l’approche calcul à la rupture*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, décembre 2018.
- [92] Md MIAH, N. PINOTEAU et Pierre PIMIENTA : A thermo mechanical experimental investigation on 3 loaded concrete walls exposed to ISO 834-1 fire. juin 2016. In : Proceedings of the 9th international conference Structures in fire-SIF’2016, Princeton, USA.
- [93] D. T. PHAM, N. PINOTEAU, M. YANG, P. de BUHAN, P. PIMIENTA et R. MÈGE : Full-scale fire test on a high-rise RC wall. *Engineering Structures*, 227:111435, janvier 2021.
- [94] CENTRE TECHNIQUE DE MATÉRIAUX NATURELS DE CONSTRUCTION : Lithoscope - la base de donnée des pierres naturelles françaises du CTMNC. Disponible à : [lithoscopectmnc.com](http://lithoscopectmnc.com) (Consulté le 8 mars 2023).
- [95] CORRELATED SOLUTIONS : VIC 3D. Disponible à <https://www.correlatedsolutions.com/vic-3d>.
- [96] NF EN 1363-1 : Essais de résistance au feu - Partie 1 : Exigences générales, 2020.
- [97] M. DHANASEKAR, A. W. PAGE et P. W. KLEEMAN : The failure of brick masonry under biaxial stresses. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 79(2):295–313, juin 1985.
- [98] J.-M. FRANSSSEN : SAFIR : A thermal/structural program for modeling structures under fire. *Engineering Journal*, 42(3):143–158, 2005.
- [99] NF EN 1991-1-2 : Eurocode 1 : actions sur les structures - partie 1-2 : actions générales - actions sur les structures exposées au feu, 2003.

- [100] M. VIGROUX : *Influence de la microstructure et de la minéralogie sur l'endommagement mécanique des pierres du patrimoine bâti sous l'effet de conditions environnementales sévères*. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, février 2020.
- [101] NF EN 1992-1-2 : Eurocode 2 : Calcul des structures en béton - partie 1-2 : Règles générales - calcul du comportement au feu, 2005.
- [102] NF EN 772-1 : Méthodes d'essai des éléments de maçonnerie - partie 1 : détermination de la résistance à la compression.
- [103] S. BOURGEOIS : *Modélisation numérique des panneaux structuraux légers*. Thèse de doctorat, septembre 1997.
- [104] A. CECCHI et K. SAB : Out of plane model for heterogeneous periodic materials : the case of masonry. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 21(5):715–746, janvier 2002.
- [105] N. GNANAKRISHNAN : The effect of end restraint on the stability of masonry walls exposed to fire. Rapport technique Technical records No. 531, National Building Technology Centre.
- [106] COMMISSARIAT À L'ENERGIE ATOMIQUE : Cast3M.
- [107] S. P. TIMOŠENKO et S. WOINOWSKY-KRIEGER : *Theory of plates and shells*. Engineering societies monographs. McGraw-Hill, New York, 2. ed., reissued édition, 1987.
- [108] A. LOGG, K.-A. MARDAL et G. WELLS, éditeurs. *Automated Solution of Differential Equations by the Finite Element Method*, volume 84 de *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2012.
- [109] M. ALNÆS, J. BLECHTA, J. HAKE, A. JOHANSSON, B. KEHLET, A. LOGG, C. RICHARDSON, J. RING, M. E. ROGNES et G. N. WELLS : The FEniCS Project Version 1.5. *Archive of Numerical Software*, Vol 3, 2015.
- [110] J. S. HALE, M. BRUNETTI, S. P. A. BORDAS et C. MAURINI : Simple and extensible plate and shell finite element models through automatic code generation tools. *Computers & Structures*, 209:163–181, octobre 2018.
- [111] J. BLEYER : *Numerical Tours of Computational Mechanics with FEniCS*. Zenodo, 2018.
- [112] E. DONVAL, D.T. PHAM, G. HASSEN, P. de BUHAN et D. PALLIX : A simplified model for predicting the deformed shape of masonry walls subjected to fire loading. *In Proceedings of the 6th international conference on Applications of Structural Fire Engineering - ASFE'21*, Ljubjana, Slovenia, juin 2021.

- 
- [113] B. A. BOLEY et J. H. WEINER : *Theory of thermal stresses*. Dover Publications, Mineola, NY, 1997.
- [114] Z. P. BAŽANT et L. CEDOLIN : *Stability of structures : Elastic, inelastic, fracture and damage theories*. 2010.
- [115] J. SALENÇON : *Calcul à la rupture et analyse limite*. Presses de l'École nationale des ponts et chaussées, Paris, 1983.
- [116] P. SUQUET : Analyse limite et homogénéisation. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics*, 296:1355–1358, 1983.
- [117] P. de BUHAN : Approche fondamentale du calcul à la rupture des ouvrages en sols renforcés. *These d'Etat, Paris VI*, 1986.
- [118] S. MAGHOUS : *Détermination du critère de résistance macroscopique d'un matériau hétérogène à structure périodique. Approche numérique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991.
- [119] P. de BUHAN et A. TALIERCIO : A homogenization approach to the yield strength of composite materials. *European Journal of Mechanics. A, Solids*, 10(2):129–154, 1991.
- [120] P. de BUHAN, L. SIAD et J. SALENCON : Critère de résistance pour le matériau 'terre-armée'. *Comptes Rendus-Académie des Sciences, Serie II*, 302(7):377–381, 1986.
- [121] B. JELLALI, M. BOUASSIDA et P. de BUHAN : A homogenization method for estimating the bearing capacity of soils reinforced by columns. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*, 29(10):989–1004, 2005.
- [122] M. GUEGUIN, G. HASSEN et P. de BUHAN : Numerical assessment of the macroscopic strength criterion of reinforced soils using semidefinite programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 99(7):522–541, 2014.
- [123] Q. THAI SON, G. HASSEN et P. de BUHAN : A multiphase approach to the stability analysis of reinforced earth structures accounting for a soil–strip failure condition. *Computers and Geotechnics*, 36(3):454–462, 2009.
- [124] H. VINCENT, M. ARQUIER, J. BLEYER et P. de BUHAN : Numerical upper bounds to the ultimate load bearing capacity of three-dimensional reinforced concrete structures. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 44(16): 2216–2240, 2020.
- [125] G. HASSEN, E. DONVAL et P. de BUHAN : Numerical stability analysis of reinforced soil structures using the multiphase model. *Computers and Geotechnics*, 133:104035, mai 2021.

- [126] J. BLEYER et P. de BUHAN : A computational homogenization approach for the yield design of periodic thin plates. part i : Construction of the macroscopic strength criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 51(13):2448–2459, 2014.
- [127] G. MILANI, P. LOURENÇO et A. TRALLI : 3D homogenized limit analysis of masonry buildings under horizontal loads. *Engineering Structures*, 29(11):3134–3148, novembre 2007.
- [128] T. LEWIŃSKI : Effective models of composite periodic plates—ii. simplifications due to symmetries. *International Journal of Solids and Structures*, 27(9):1173–1184, 1991.
- [129] J. DALLOT et K. SAB : Limit analysis of multi-layered plates. Part I : The homogenized Love–Kirchhoff model. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 56(2):561–580, février 2008.
- [130] A. CECCHI et K. SAB : A homogenized Reissner–Mindlin model for orthotropic periodic plates : Application to brickwork panels. *International Journal of Solids and Structures*, 44(18):6055–6079, septembre 2007.
- [131] J. BLEYER, D. T. PHAM, P. de BUHAN et Céline FLORENCE : Yield Design of Periodically Heterogeneous Plates. In P. FUSCHI, Aurora A. PISANO et Dieter WEICHERT, éditeurs : *Direct Methods for Limit and Shakedown Analysis of Structures*, pages 143–158. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [132] J. LYSMER : Limit analysis of plane problems in soil mechanics. *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division*, 96(4):1311–1334, 1970.
- [133] E. ANDERHEGGEN et H. KNÖPFEL : Finite element limit analysis using linear programming. *International Journal of Solids and Structures*, 8(12):1413–1431, 1972.
- [134] Y. NESTEROV et A. NEMIROVSKII : *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*. SIAM, 1994.
- [135] A. MAKRODIMOPOULOS et C. M. MARTIN : Upper bound limit analysis using simplex strain elements and second-order cone programming. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31(6):835–865, 2007.
- [136] K. KRABBENHØFT, A.V. LYAMIN et S.W. SLOAN : Formulation and solution of some plasticity problems as conic programs. *International Journal of Solids and Structures*, 44(5):1533–1549, mars 2007.
- [137] MOSEK APS : *MOSEK Optimizer API for Python 9.3.18*. 2022.
- [138] C. M. MARTIN et A. MAKRODIMOPOULOS : Finite-Element Limit Analysis of Mohr–Coulomb Materials in 3D Using Semidefinite Programming. *Journal of Engineering Mechanics*, 134(4):339–347, avril 2008.

- 
- [139] K. KRABBENHØFT, A. V. LYAMIN et S. W. SLOAN : Three-dimensional Mohr-Coulomb limit analysis using semidefinite programming. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):1107–1119, juin 2007.
- [140] N. PODLICH, A. LYAMIN et S. SLOAN : High-performance interior point methods for three-dimensional finite element limit analysis. In *Proceedings of the XY International Conference on Computational Plasticity. Fundamentals and Applications. COMPLAS 2019*, Barcelona, 2019.
- [141] G. DHATT et G. TOUZOT : *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Maloine, Paris, 1987.
- [142] E. BEMER, O. VINCKÉ et P. LONGUEMARE : Geomechanical Log Deduced from Porosity and Mineralogical Content. *Oil & Gas Science and Technology*, 59(4):405–426, juillet 2004.
- [143] P. BAUD, A. SCHUBNEL, M. HEAP et A. ROLLAND : Inelastic compaction in high-porosity limestone monitored using acoustic emissions. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 122(12):9989–10,008, 2017.
- [144] L. PELÀ, K. KASIOUMI et P. ROCA : Experimental evaluation of the shear strength of aerial lime mortar brickwork by standard tests on triplets and non-standard tests on core samples. *Engineering Structures*, 136:441–453, avril 2017.
- [145] A. GHIMIRE, S. NOOR-E-KHUDA, S. N. ULLAH et T. SUNTHARAVADIVEL : Determination of Mohr–Coulomb failure envelope, mechanical properties and UPV of commercial cement-lime mortar. *Materials and Structures*, 55(4):111, avril 2022.
- [146] G. MILANI, Pablo LOURENÇO et A. TRALLI : Homogenised limit analysis of masonry walls, Part II : Structural examples. *Computers & Structures*, 84(3):181–195, janvier 2006.
- [147] R. HAYEN, K. VAN BALEN et K. VAN GEMERT : The mechanical behaviour of mortars in triaxial compression. 2004.
- [148] M. P. NIELSEN et L. C. HOANG : *Limit analysis and concrete plasticity*. CRC press, 2016.
- [149] L. BIOLZI : Evaluation of Compressive Strength of Masonry Walls by Limit Analysis. *Journal of Structural Engineering*, 114(10):2179–2189, octobre 1988.
- [150] G. MILANI, P. LOURENÇO et A. TRALLI : Homogenization Approach for the Limit Analysis of Out-of-Plane Loaded Masonry Walls. *Journal of Structural Engineering*, 132(10):1650–1663, octobre 2006.
- [151] E. MILANI, G. MILANI et A. TRALLI : Limit analysis of masonry vaults by means of curved shell finite elements and homogenization. *International Journal of Solids and Structures*, 45(20):5258–5288, octobre 2008.

- [152] G. MILANI : Simple lower bound limit analysis homogenization model for in- and out-of-plane loaded masonry walls. *Construction and Building Materials*, 25(12):4426–4443, décembre 2011.
- [153] G. MILANI et A. TALIERCIO : Limit analysis of transversally loaded masonry walls using an innovative macroscopic strength criterion. *International Journal of Solids and Structures*, 81:274–293, mars 2016.
- [154] H. K. HILSDORF : Investigation into the failure mechanism of brick masonry loaded in axial compression. *Designing engineering and constructing with masonry products*, pages 34–41, 1969.
- [155] A. ANTHOINE : Homogenization of Periodic Masonry : Plane Stress, Generalized Plane Strain or 3d Modelling? *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 13(5):319–326, 1997.
- [156] R. SAHLAOUI, K. SAB et J.-V. HECK : Yield strength of masonry-like structures containing thin adhesive joints : 3D or 2D-interface model for the joints? *Comptes Rendus Mécanique*, 339(6):432–438, juin 2011.
- [157] K. SAB : Overall ultimate yield strength of a quasi-periodic masonry. *Comptes Rendus Mécanique*, 337(8):603–609, août 2009.
- [158] H. H. LE, D. GARNIER, A.-S. COLAS, B. TERRADE et J.-C. MOREL : 3D homogenised strength criterion for masonry : Application to drystone retaining walls. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 95:239–253, octobre 2016.
- [159] D.T. PHAM, P. de BUHAN, C. FLORENCE, J.V. HECK et H.H. NGUYEN : Interaction diagrams of reinforced concrete sections in fire : A yield design approach. *Engineering Structures*, 90:38–47, mai 2015.
- [160] M. YANG, D. T. PHAM, J. BLEYER et P. de BUHAN : Evaluating the failure load of high-rise reinforced concrete walls under fire loading using the yield design approach. *Structures*, 48:934–946, février 2023.
- [161] M. GUEGUIN, G. HASSEN et P. de BUHAN : Stability analysis of homogenized stone column reinforced foundations using a numerical yield design approach. *Computers and Geotechnics*, 64:10–19, mars 2015.
- [162] A. MAKRODIMOPOULOS et C. M. MARTIN : Upper bound limit analysis using discontinuous quadratic displacement fields. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 24(11):911–927, 2008.
- [163] C. GEUZAINÉ et J.-F. REMACLE : Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities : THE GMSH PAPER. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331, septembre 2009.

- 
- [164] G. MILANI et A. TALIERCIO : In-plane failure surfaces for masonry with joints of finite thickness estimated by a Method of Cells-type approach. *Computers & Structures*, 150:34–51, avril 2015.
- [165] H. VINCENT : *Développement d'un modèle de calcul de la capacité ultime d'éléments de structure (3D) en béton armé, basé sur la théorie du calcul à la rupture*. Thèse de doctorat, Université Paris-Est, novembre 2018.
- [166] E. DONVAL, D. T. PHAM, G. HASSEN, P. de BUHAN et M. VIGROUX : 3D analytical and numerical upper-bound homogenization approaches to the in-plane strength domain of a running-bond masonry wall. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2023.
- [167] J. BLEYER, D. T. PHAM et P. de BUHAN : *Numerical Yield Design Analysis of High-Rise Reinforced Concrete Walls in Fire Conditions*. Springer, Cham, 2017.
- [168] J. BLEYER et P. de BUHAN : Yield surface approximation for lower and upper bound yield design of 3D composite frame structures. *Computers & Structures*, 129:86–98, décembre 2013.
- [169] F. PARISI, C. BALESTRIERI et D. ASPRONE : Nonlinear micromechanical model for tuff stone masonry : Experimental validation and performance limit states. *Construction and Building Materials*, 105:165–175, février 2016.
- [170] G. VASCONCELOS et P. B. LOURENÇO : In-Plane Experimental Behavior of Stone Masonry Walls under Cyclic Loading. *Journal of Structural Engineering*, 135(10):1269–1277, octobre 2009.
- [171] M. CORRADI, A. BORRI et A. VIGNOLI : Experimental study on the determination of strength of masonry walls. *Construction and Building Materials*, 17(5):325–337, juillet 2003.
- [172] M. GODIO, F. VANIN, S. ZHANG et K. BEYER : Quasi-static shear-compression tests on stone masonry walls with plaster : Influence of load history and axial load ratio. *Engineering Structures*, 192:264–278, août 2019.
- [173] V. L. CHONG : *The behaviour of laterally loaded masonry panels with openings*. Thèse de doctorat, University of Plymouth, 1993.
- [174] R. B. DUARTE : *A study of the lateral strength of brickwork panels with openings*. Thèse de doctorat, University of Edinburgh, 1993.
- [175] A. BRENCICH : Mechanical response of solid clay brickwork under eccentric loading. Part I : Unreinforced masonry. *Materials and Structures*, 38(276):257–266, janvier 2005.

- [176] A. BRENCICH, C. CORRADI et L. GAMBAROTTA : Eccentrically loaded brickwork : Theoretical and experimental results. *Engineering Structures*, 30(12):3629–3643, décembre 2008.
- [177] A. BRENCICH et G. de FELICE : Brickwork under eccentric compression : Experimental results and macroscopic models. *Construction and Building Materials*, 23(5):1935–1946, mai 2009.
- [178] K. VENU MADHAVA RAO, B. V. VENKATARAMA REDDY et K. S. JAGADISH : Strength characteristics of stone masonry. *Materials and Structures*, 30(4):233–237, mai 1997.
- [179] NF EN 1015-11 : Méthodes d’essai des mortiers pour maçonnerie - Partie 11 : détermination de la résistance en flexion et en compression du mortier durci, 2019.
- [180] D. T. PHAM, P. de BUHAN, Céline FLORENCE, J.-V. HECK et Hong Hai NGUYEN : Yield design-based analysis of high rise concrete walls subjected to fire loading conditions. *Engineering Structures*, 87:153–161, mars 2015.
- [181] J. BLEYER, D. T. PHAM et P. de BUHAN : Failure design of high-rise concrete panels under fire loading. *Proceedings of the ICE - Engineering and Computational Mechanics*, 168(4):178–185, décembre 2015.
- [182] J. SALENÇON : *Virtual Work Approach to Mechanical Modeling*. J. Wiley & Sons, 2018.
- [183] J. BLEYER : *Méthodes numériques pour le calcul à la rupture des ouvrages de génie civil*. Thèse de doctorat, 2015.
- [184] J. BLEYER et P. de BUHAN : A numerical approach to the yield strength of shell structures. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 59:178–194, septembre 2016.
- [185] A. T. VERMELTFOORT et T. M. J. RAIJMAKERS : Shear tests on masonry panels of 1x1 m<sup>2</sup>. In A. Th VERMELTFOORT, éditeur : *Research on building structures and building physics : proceedings of an interuniversity research seminar, Eindhoven, November 18-20, 1992*, pages 171–177. Eindhoven University of Technology, 1992.
- [186] P. LOURENCO : *Computational Strategy for Masonry Structures*. janvier 1996.
- [187] D. J. SUTCLIFFE, H. S. YU et A. W. PAGE : Lower bound limit analysis of unreinforced masonry shear walls. *Computers & Structures*, 79(14):1295–1312, juin 2001.
- [188] NF EN 1936 : Méthodes d’essai pour pierres naturelles - détermination des masses volumiques réelle et apparente et des porosités ouverte et totale., 2007.

- [189] C. HUET : Méthode de détermination de l'énergie spécifique de rupture et application aux céramiques et à divers matériaux minéraux. *Cahiers du groupe français de rhéologie*, pages 164–176, 1974.
- [190] NF EN 12372 : Méthodes d'essai pour pierres naturelles - Détermination de la résistance à la flexion sous charge centrée, 2022.