



# **Instabilités matérielles dans les milieux architecturés : Plasticité de Piobert-Lüders et superélasticité**

Antoine-Emmanuel Viard

## **► To cite this version:**

Antoine-Emmanuel Viard. Instabilités matérielles dans les milieux architecturés : Plasticité de Piobert-Lüders et superélasticité. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. HESAM Université, 2023. Français. ⟨NNT : 2023HESAE012⟩. ⟨tel-04498691⟩

**HAL Id: tel-04498691**

**<https://pastel.hal.science/tel-04498691v1>**

Submitted on 11 Mar 2024

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

École doctorale n° 432 : Science des Métiers de l'ingénieur

# **Doctorat ParisTech**

## **THÈSE**

pour obtenir le grade de docteur délivré par

**l'École Nationale Supérieure des Arts et Métiers**  
**Spécialité doctorale "Mécanique - Matériaux"**

*présentée et soutenue publiquement par*

**Antoine-Emmanuel VIARD**

le 14 mars 2023

# **INSTABILITÉS MATÉRIELLES DANS LES MILIEUX ARCHITECTURÉS : PLASTICITÉ DE PIOBERT-LÜDERS ET SUPERÉLASTICITÉ**

Directeur de thèse : **Justin DIRRENBARGER**

Co-directeur de thèse : **Samuel FOREST**

### **Jury**

<b>Mme Monique Gasperini,</b>	Professeure	Rapporteur
<b>Mme Karine Lavernhe,</b>	Maîtresse de conférences	Rapporteur
<b>M. Remy Dendievel,</b>	Professeur	Examinateur
<b>M. Manuel François,</b>	Professeur	Examinateur
<b>Mme Christelle Combescure,</b>	Maîtresse de conférences	Examinatrice
<b>Mme Cécile Davoine,</b>	Ingénieure de recherche	Examinatrice

**Arts et Métiers Sciences et Technologies - Campus de Paris**

**Laboratoire des Procédés et Ingénierie en Mécanique et Matériaux, UMR CNRS 8006**

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>iii</b>
<b>1 INTRODUCTION</b>	<b>1</b>
1.1 Références . . . . .	7
<b>2 ÉTAT DE L'ART</b>	<b>9</b>
2.1 Les matériaux architecturés . . . . .	10
2.1.1 Effet de l'architecture sur le comportement macroscopique . . . . .	12
2.1.2 Influence du matériau sur le comportement macroscopique . . . . .	15
2.1.3 Mesures des propriétés effectives . . . . .	18
2.2 Instabilités matérielles dans les métaux . . . . .	21
2.2.1 Instabilités plastiques : les bandes de Piobert-Lüders . . . . .	21
2.2.2 Instabilités matérielles dans les AMF : exemple du NiTi . . . . .	23
2.2.3 Localisation de la déformation . . . . .	26
2.2.4 Moyen de mesures . . . . .	27
2.3 Études des matériaux architecturés en présence d'instabilités . . . . .	29
2.3.1 Des matériaux adaptables grâce aux instabilités géométriques . . . . .	29
2.3.2 Architecturation avec instabilités matérielles . . . . .	30
2.4 Conclusion du chapitre . . . . .	33
2.5 Références . . . . .	33
<b>3 Piobert-Lüders</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction . . . . .	40
3.2 Periodic media and material instabilities . . . . .	42
3.2.1 Lattice structure . . . . .	42
3.2.2 Phenomenological simulation of Piobert-Lüders phenomenon . . . . .	44
3.2.3 Numerical approach of the Piobert-Lüders phenomenon . . . . .	45
3.3 Propagation of material instabilities in infinite periodic media . . . . .	46
3.3.1 Periodic boundary value problem . . . . .	46
3.3.2 Triangle lattice . . . . .	49
3.3.3 Square lattice . . . . .	50
3.3.4 Hexagonal lattice . . . . .	53

3.4	The role of the number of unit cells . . . . .	54
3.5	Experimental analysis . . . . .	61
3.5.1	Digital Image Correlation . . . . .	62
3.5.2	Experimental results . . . . .	62
3.5.3	Finite element modeling of the experiments . . . . .	68
3.6	Discussion . . . . .	70
3.7	Concluding remarks . . . . .	72
3.8	Conclusion . . . . .	74
3.9	Références . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Superélasticité</b>	<b>81</b>
4.1	Alliage à mémoire de forme, superélasticité et loi de comportement . . . . .	85
4.1.1	Essai de traction sur une éprouvette en NiTi . . . . .	85
4.1.2	Identification de la loi de comportement . . . . .	86
4.2	Etude expérimentale de matériaux superélastiques architecturés . . . . .	90
4.2.1	Choix des architectures . . . . .	90
4.2.2	Architecture triangulaire . . . . .	91
4.2.3	Architecture hexagonale . . . . .	94
4.2.4	Architecture Kagome . . . . .	99
4.2.5	Conclusion sur les expériences AMF architecturés . . . . .	103
4.3	Modélisation d'instabilités matérielles dans un milieu périodique fini . . . . .	104
4.3.1	Architecture triangulaire . . . . .	105
4.3.2	Architecture hexagonale . . . . .	107
4.3.3	Architecture Kagome . . . . .	111
4.3.4	Conclusion sur le comportement des éprouvettes simulées. . . . .	118
4.4	Modélisation d'un milieu périodique infini en présence d'instabilités maté- rielles de type pseudo-élastique . . . . .	119
4.4.1	Définition des conditions périodiques . . . . .	119
4.4.2	Architecture triangulaire . . . . .	120
4.4.3	Architecture hexagonale . . . . .	123
4.4.4	Architecture Kagome . . . . .	123
4.5	Discussion sur la superélasticité dans les réseaux architecturés. Point de vue expérimental et numérique. . . . .	128
4.5.1	Discussion sur la modélisation numérique (milieu fini et infini) . . . . .	128
4.5.2	Localisation matérielle et structurelle : description de l'"effet Pélican" . . . . .	128
4.5.3	Isotropie élastique et anisotropie plastique . . . . .	129
4.6	Conclusion . . . . .	130
4.7	Références . . . . .	131
<b>5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>135</b>
5.1	Références . . . . .	137

# Chapitre 1

## INTRODUCTION

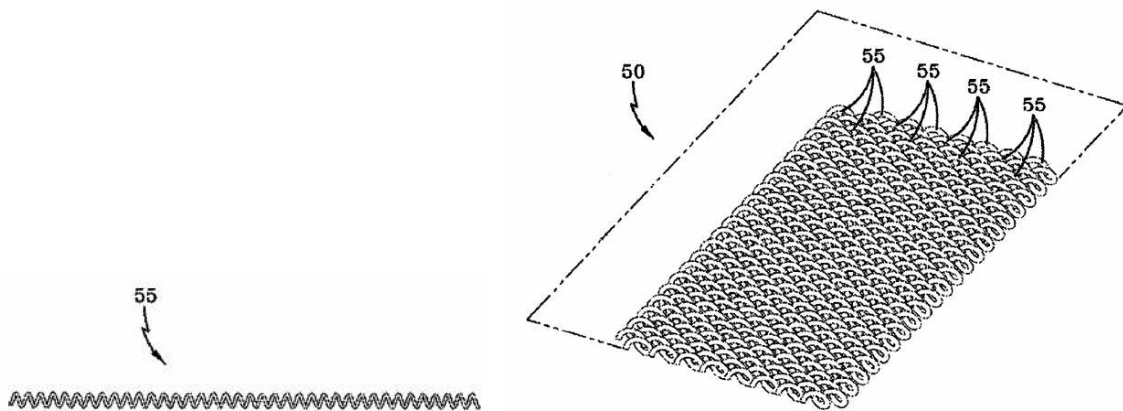
La recherche perpétuelle de l'amélioration des performances des systèmes technologiques complexes est intimement associée à l'optimisation des matériaux employés. Longtemps, le développement de nouveaux matériaux a été limité à la mise au point d'alliages plus performants. Une approche plus récente consiste à considérer le matériau et la structure qu'il compose comme un ensemble. On parle de matériaux architecturés. Les matériaux architecturés métalliques offrent des performances inédites en terme de propriétés mécaniques ramenées à leur masse grâce à une géométrie bien réfléchie. On retrouve ces matériaux dans de nombreuses applications industrielles permettant de répondre aux nouvelles contraintes de réduction de consommation d'énergie dans les transports ou aux nouveaux besoins de performances techniques. D'autre part, les Alliages à Mémoire de Forme (AMF) présentent des propriétés mécaniques remarquables. Les matériaux architecturés fabriqués à partir d'alliages à mémoire de forme sont particulièrement intéressants afin d'exploiter l'amplification des effets superélastique et de mémoire de forme par l'architecture [GRUMMON et collab. \[2006\]](#); [MICHAILIDIS et collab. \[2009\]](#).

Aujourd'hui, les matériaux architecturés et les AMF sont très largement utilisés et dans de nombreux domaines (médical, aéronautique, aérospatial) et l'association des deux permet d'envisager des applications inédites. A titre d'exemple, en octobre 2019, la NASA dépose un brevet pour un pneu superélastique présenté en figure 1.1. Dans la description introductive du projet, on peut lire : *"Un pneu à ressorts fabriqués à partir d'alliage à mémoire de forme peut être pratiquement insensible à la déformation plastique. De plus, l'utilisation d'alliages à mémoire de forme permet un meilleur contrôle de la rigidité effective en fonction de la déformation. Cela permet une plus grande souplesse de conception."* La nouvelle utilisation d'alliages à mémoire de forme capables de subir de fortes déformations en tant que composants porteurs de charge, au lieu de matériaux élastiques classiques, permet d'obtenir un pneu capable de résister à une déformation supérieure aux alliages classiques sans être détérioré de manière irréversible. Le pneu superélastique limite la possibilité de défaillance par perforation, améliorant ainsi la fiabilité du système. Cette

conception de pneu élimine également le besoin d'une armature interne, ce qui simplifie et allège l'ensemble pneu/roue. Cette technologie sera envisagée pour la réalisation des pneumatiques des véhicules des missions extra-terrestres.



FIGURE 1.1 – Exemple d'utilisation d'AMF architecturé : le projet de pneu superélastique développé par la NASA (Brevet US 10,449,804 B1)



(a) Ressort en AMF utilisé pour le pneu superélastique.

(b) Feuille de ressorts en AMF entrelacés utilisée pour le pneu superélastique.

FIGURE 1.2 – Détails des éléments utilisés dans la conception du matériau superélastique architecturé pour le pneu.

Les matériaux tissés, utilisés dans cet exemple, sont une classe de matériaux architecturés. Le chapitre 1 sera l'occasion de revenir plus en détail sur cette classification. L'ensemble du pneu est constitué d'une feuille de ressorts en AMF (Fig. 1.2b) entrelacés (Fig. 1.2a) assemblée directement sur la roue (Fig. 1.3). La figure 1.3 montre la taille de l'architecture de la feuille de ressorts tressés par rapport à la jante. Cette feuille de ressorts en tant que matériau architecturé peut être décrite à une échelle intermédiaire, échelle

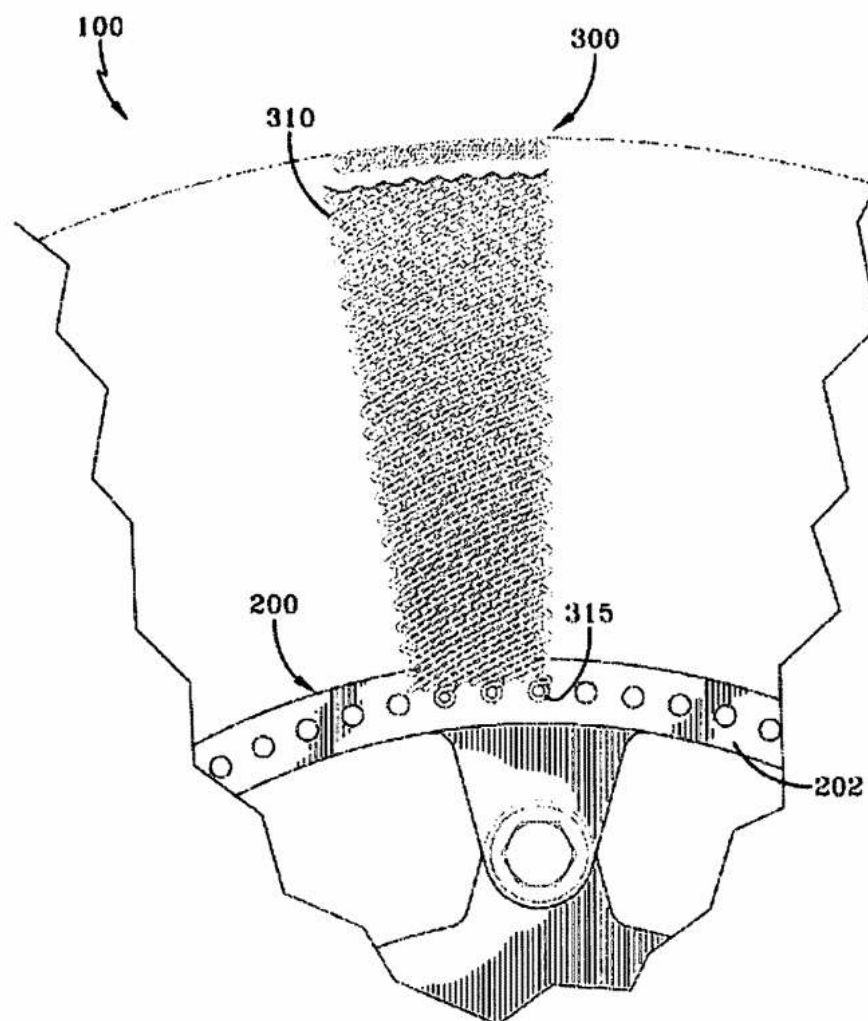


FIGURE 1.3 – Illustration du principe d'assemblage du pneu superélastique avec la roue, extrait du brevet US 10,449,804 B1



mésoscopique, entre la microstructure du matériau constitutif, le NiTi, et la structure, la jante de la roue. Les capacités de déformation du pneu sont apportées par l'association du matériau superélastique et d'une architecture faite de ressorts. Cela permet d'étendre les performances du système.

A l'instar de ce projet, ces travaux de thèse s'inscrivent dans le projet ALMARIS dont la finalité est d'obtenir des effets de structures en exploitant les AMF architecturés sollicités dans leur domaine de déformation réversible.

## **Projet ALMARIS**

L'objectif du projet ALMARIS est de concevoir et de fabriquer via le procédé Selective Laser Melting des architectures périodiques capables de se déformer collectivement de manière réversible afin d'apporter des capacités d'amortissement et de compliance aux structures qui les intègrent. L'essor de l'impression 3D a aidé au développement des matériaux architecturés métalliques. La popularisation de ce procédé de fabrication apporte une grande flexibilité dans l'intégration de ces nouveaux matériaux dans lesquels la structure est composée d'une architecture simple ou plus complexe qui permet d'ajouter des effets d'architectures favorables. L'ambition du projet ALMARIS est d'associer à ces effets d'architectures, les propriétés de l'alliage NiTi pour augmenter l'amplitude de déformation élastique. Le projet ALMARIS propose d'étudier la conception de structures métalliques à la fois légères, robustes et capables de se déformer avec une grande amplitude. Pour cela, le concept repose sur l'association d'une architecture périodique intégrant des effets d'ensemble avec un matériau superélastique, le NiTi, qui offre un domaine de déformation très important et réversible. Le projet s'est articulé autour de 5 work-packages répartis entre tous les acteurs : mise au point du procédé SLM, étude de la superélasticité, modélisation et optimisation de forme, caractérisation mécanique et fabrication de démonstrateurs superélastiques.

## **Le matériau NiTi**

Les AMF sont une classe de matériaux pouvant être sollicités de manière réversible au-delà du domaine élastique. Ils peuvent supporter des déformations supérieures à d'autres alliages métalliques usuels. Ces propriétés mécaniques sont le résultat d'une transformation de phases solides qui permet à ces alliages de voir des déformations de l'ordre de 10% et plus avant de subir des déformations plastiques irréversibles. Macroscopiquement, ce phénomène se traduit par une localisation de la déformation sous forme de bandes propagatives. Les applications intéressent plus particulièrement le domaine aéronautique pour la conception de voilure d'engins volants avec la perspective d'un actionnement possible ou le domaine spatial pour la fabrication de structures absorbant de très grandes déformations sans endommagement.

## L'architecture

Les matériaux architecturés exploitent la possibilité de créer un effet d'architecture grâce à une organisation intelligente de la matière. Le ressort présenté en figure 1.2b est un exemple d'architecturation de la matière pour augmenter la déformation utile du composant. Il existe d'autres manières de concevoir des matériaux architecturés. Une d'elle consiste à construire un espace architecturé périodique à partir d'une cellule élémentaire répétée dans l'espace à occuper. C'est alors la cellule unitaire qui donne à la structure ces propriétés fonctionnelles. Aujourd'hui, les matériaux architecturés sont surtout utilisés dans des applications dédiées à la dissipation d'énergie qui se fait alors par déformation plastique des cellules [MCKOWN et collab., 2008; WANG et collab., 2003]. D'autres applications visent à ajouter des fonctionnalités aux structures. BETTINI et collab. [2010] présente une utilisation des matériaux architecturés superélastiques conçus pour augmenter la souplesse d'un profil aéronautique. Les possibilités de conception semblent illimitées compte tenu du large choix de géométries. En paramétrant les dimensions de celles-ci, il serait possible d'obtenir un matériau fortement adaptable aux demandes fonctionnelles.

## Le procédé SLM

Le procédé SLM (Selective Laser Melting) par sa flexibilité facilite la fabrication de pièces architecturées complexes. Ce procédé permet la production d'objets 3D par empilement de couches de poudre fusionnées par un faisceau laser. Le fichier numérique 3D de la pièce est découpé en couches virtuelles 2D, l'empilement des couches permet de recréer la géométrie désirée. Un rouleau étale une fine couche de poudre de l'ordre de 50 *microns*. Le laser balaie la section 2D du fichier CAO découpé et fait fondre la matière. Ensuite, une nouvelle couche est déposée et l'opération recommence. A la fin, la pièce doit être nettoyée de la poudre non fondue qui l'entoure. Ce procédé offre plusieurs avantages : réalisation de géométries complexes ; préservation, pour les matériaux métalliques, d'une microstructure fine (chargement thermique de courte durée) et amélioration de l'état de surface obtenu par une poudre fine et d'autres paramètres du procédé (épaisseur des couches, optimisation de la taille du faisceau). Certaines études ont montré que les caractéristiques du NiTi, notamment la superélasticité, peuvent être modifiées par les paramètres du procédé SLM. Les variations sont reliées à la quantité d'énergie apportée localement par le laser. Ces modifications sont expliquées par la perte de Nickel par évaporation dans le cas d'énergies élevées. Or, la superélasticité est fortement liée au respect de la composition equi-atomique. Enfin, il reste à préciser que le procédé de fabrication SLM favorise l'apparition de contraintes résiduelles. Il est rapporté dans quelques travaux l'effet des concentrations de contraintes sur la transformation martensitique [BIRNBAUM et YAO, 2010; KRUTH et collab., 2012; SINGH et collab., 2010]. MAO et collab. [2008] ont mis en évidence par ensemble une transformation martensitique progressive dans des grain soumis à un gradient de contrainte. Ce phénomène est susceptible de

se produire dans des structures élaborées par fabrication additive.

L'aspect fabrication porte sur la maîtrise de ce procédé pour la réalisation des architectures superélastiques en NiTi. Les principaux verrous identifiés au lancement du projet en septembre 2016 sont la nécessité d'obtenir une limite d'élasticité élevée afin de garantir une répartition homogène des efforts dans l'architecture finale et la capacité à obtenir un alliage NiTi equi-atomique par fusion laser ayant des propriétés superélastiques suffisantes.

Le projet ALMARIS s'inscrit dans une démarche d'optimisation du triptyque **procédé/architecture/matériau** qui amène à la conception de "matériaux sur-mesure" et de proposer des architectures, associées au caractère superélastique du NiTi, capables de répondre à un besoin bien identifié de la structure.

## Méthode de travail

Les travaux présentés dans ce mémoire s'attachent à comprendre expérimentalement et numériquement le comportement des instabilités matérielles dans un milieu périodique et à en proposer une classification. L'objectif est de mettre en lumière les interactions qui peuvent exister entre les mécanismes de transformation de phases des AMF et différentes architectures cellulaires sélectionnées.

Ces recherches sont articulées autour de l'étude des instabilités matérielles au travers de deux matériaux : un acier doux de type ARMCO présentant des instabilités plastiques de type Piobert-Lüders et un Alliage à Mémoire de Forme, le NiTi, présentant une transformation de phases. Deux grands axes d'étude ont été privilégiés : la modélisation numérique de ces instabilités matérielles avec les architectures, puis la comparaison expérimentale des phénomènes observés numériquement. L'étude de la plasticité de Piobert-Lüders représente une première approche de l'étude comportement d'instabilités propagatives dans les milieux architecturés. Du point de vue numérique et expérimental, le modèle matériau est plus simple à aborder, ne présentant pas d'effet d'hystérésis. Dans un second temps, ces travaux ont été étendus au cas des AMF.

## Plan du manuscrit

Ce manuscrit s'organise en deux parties, découpées selon le type d'instabilité matérielle étudié. La première partie s'intéresse au phénomène de Piobert-Lüders et la deuxième au comportement des alliages à mémoire de forme. Chacune d'elles aborde les aspects de modélisation et d'expérimentation des matériaux architecturés. Le chapitre suivant fait l'état de l'art de l'étude des matériaux architecturés et des instabilités matérielles, d'abord séparément puis ensemble. On aborde les méthodes de modélisation des

architectures ainsi que des instabilités avec les difficultés numériques qui en découlent. Une revue des méthodes expérimentales de ces deux composantes, architecture et instabilité, est également faite. Le chapitre 3 présente l'étude, numérique et expérimentale, de matériaux architecturés avec des instabilités plastiques propagatives. Pour cela, un modèle de matériau avec instabilités matérielles est identifié sur des essais expérimentaux sur des tôles d'ARMCO. Celles-ci seront utilisées pour la conception des éprouvettes architecturées. Trois architectures sont sélectionnées pour leurs comportements mécaniques différents. La comparaison de la modélisation et de l'expérimentation des éprouvettes architecturées en présence des instabilités plastiques permet une classification du comportement des instabilités matérielles propagatives en fonction de l'architecture. Dans le chapitre 4, le matériau utilisé est un alliage à mémoire de forme. Les conclusions du chapitre précédent ouvrent des pistes de réflexion pour l'étude des AMF architecturés. Dans un premier temps, un modèle de comportement pour les AMF est implémenté au formalisme du logiciel Zébulon permettant de reproduire la localisation et la propagation du changement de phase. Le modèle numérique est calibré à partir d'essais sur des tôles de NiTi. On identifie ensuite, grâce à la modélisation numérique, différents comportements du changement de phases dans les milieux architecturés. Enfin on compare les conclusions du modèle numérique aux résultats d'une campagne d'essais sur des éprouvettes architecturées en NiTi. Que ce soit numériquement ou expérimentalement, le comportement macroscopique de l'architecture en présence d'instabilités est extrait et comparé aux mesures du champ de déformation locale inhomogène dans l'architecture.

Ce projet est financé par l'ANR (ANR-16-CE08-0001). Il est le fruit d'une collaboration entre le PIMM, le centre des matériaux, l'ONERA, le LASMIS et Poly-Shape. Des remerciements chaleureux vont à l'équipe expérimentale du Centre des Matériaux où les essais de ces travaux ont été menés, en particulier à Stéphanie Dang pour la corrélation d'images, à Abdenmour Meddour et à Régis Clément pour les moyens expérimentaux.

## 1.1 Références

- BETTINI, P., A. AIROLDI, G. SALA, L. DI LANDRO, M. RUZZENE et A. SPADONI. 2010, «Composite chiral structures for morphing airfoils : Numerical analyses and development of a manufacturing process», *Composites Part B : Engineering*, vol. 41, n° 2, p. 133–147. [5](#)
- BIRNBAUM, A. J. et Y. L. YAO. 2010, «The effects of laser forming on niti superelastic shape memory alloys», *Journal of manufacturing science and engineering*, vol. 132, n° 4. [5](#)
- GRUMMON, D. S., J. A. SHAW et J. FOLTZ. 2006, «Fabrication of cellular shape memory alloy materials by reactive eutectic brazing using niobium», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 438-440, doi :<https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.03.113>, p. 1113–1118, ISSN 0921-5093. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/>

- [pii/S092150930600894X](#), proceedings of the International Conference on Martensitic Transformations. 1
- KRUTH, J.-P., J. DECKERS, E. YASA et R. WAUTHLÉ. 2012, «Assessing and comparing influencing factors of residual stresses in selective laser melting using a novel analysis method», *Proceedings of the institution of mechanical engineers, Part B : Journal of Engineering Manufacture*, vol. 226, n° 6, p. 980–991. 5
- MAO, S., X. HAN, Y. TIAN, J. LUO, Z. ZHANG, Y. JI et M. WU. 2008, «In situ ebsd investigations of the asymmetric stress-induced martensitic transformation in tni shape memory alloys under bending», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 498, n° 1-2, p. 278–282. 5
- MCKOWN, S., Y. SHEN, W. BROOKES, C. SUTCLIFFE, W. CANTWELL, G. LANGDON, G. NURICK et M. THEOBALD. 2008, «The quasi-static and blast loading response of lattice structures», *International Journal of Impact Engineering*, vol. 35, n° 8, p. 795–810. 5
- MICHAILIDIS, P., N. TRIANTAFYLIDIS, J. SHAW et D. GRUMMON. 2009, «Superelasticity and stability of a shape memory alloy hexagonal honeycomb under in-plane compression», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 46, n° 13, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.03.013>, p. 2724–2738, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768309001012>. 1
- SINGH, S., M. MANIRAJ, S. D'SOUZA, R. RANJAN et S. BARMAN. 2010, «Structural transformations in mn 2 niga due to residual stress», *Applied Physics Letters*, vol. 96, n° 8, p. 081 904. 5
- WANG, J., A. G. EVANS, K. DHARMASENA et H. G. WADLEY. 2003, «On the performance of truss panels with kagome cores», *International journal of solids and structures*, vol. 40, n° 25, p. 6981–6988. 5

# Chapitre 2

## ÉTAT DE L'ART

### Sommaire

---

<b>2.1 Les matériaux architecturés . . . . .</b>	<b>10</b>
2.1.1 Effet de l'architecture sur le comportement macroscopique . . . . .	12
2.1.2 Influence du matériau sur le comportement macroscopique . . . . .	15
2.1.3 Mesures des propriétés effectives . . . . .	18
<b>2.2 Instabilités matérielles dans les métaux . . . . .</b>	<b>21</b>
2.2.1 Instabilités plastiques : les bandes de Piobert-Lüders . . . . .	21
2.2.2 Instabilités matérielles dans les AMF : exemple du NiTi . . . . .	23
2.2.3 Localisation de la déformation . . . . .	26
2.2.4 Moyen de mesures . . . . .	27
<b>2.3 Études des matériaux architecturés en présence d'instabilités . . . . .</b>	<b>29</b>
2.3.1 Des matériaux adaptables grâce aux instabilités géométriques . . . . .	29
2.3.2 Architecturation avec instabilités matérielles . . . . .	30
<b>2.4 Conclusion du chapitre . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>2.5 Références . . . . .</b>	<b>33</b>

---

## 2.1 Les matériaux architecturés

Les matériaux architecturés sont une classe innovante de matériaux qui apportent de nouvelles possibilités en terme de propriétés mécaniques. Il est possible de représenter les matériaux selon leurs caractéristiques mécaniques. Un formalisme introduit par Ashby est largement utilisé et connu sous le nom de cartes d'Ashby. La figure 2.8 classe les matériaux en fonction de leur densité et de leur module d'Young. ASHBY [2013] fait remarquer que deux espaces vides persistent et que l'un d'eux - faible densité et module d'Young élevé - est une direction de recherche pour le développement de nouveaux matériaux. L'idée de matériaux architecturés est donc de combler cet espace inaccessible aux matériaux conventionnels.

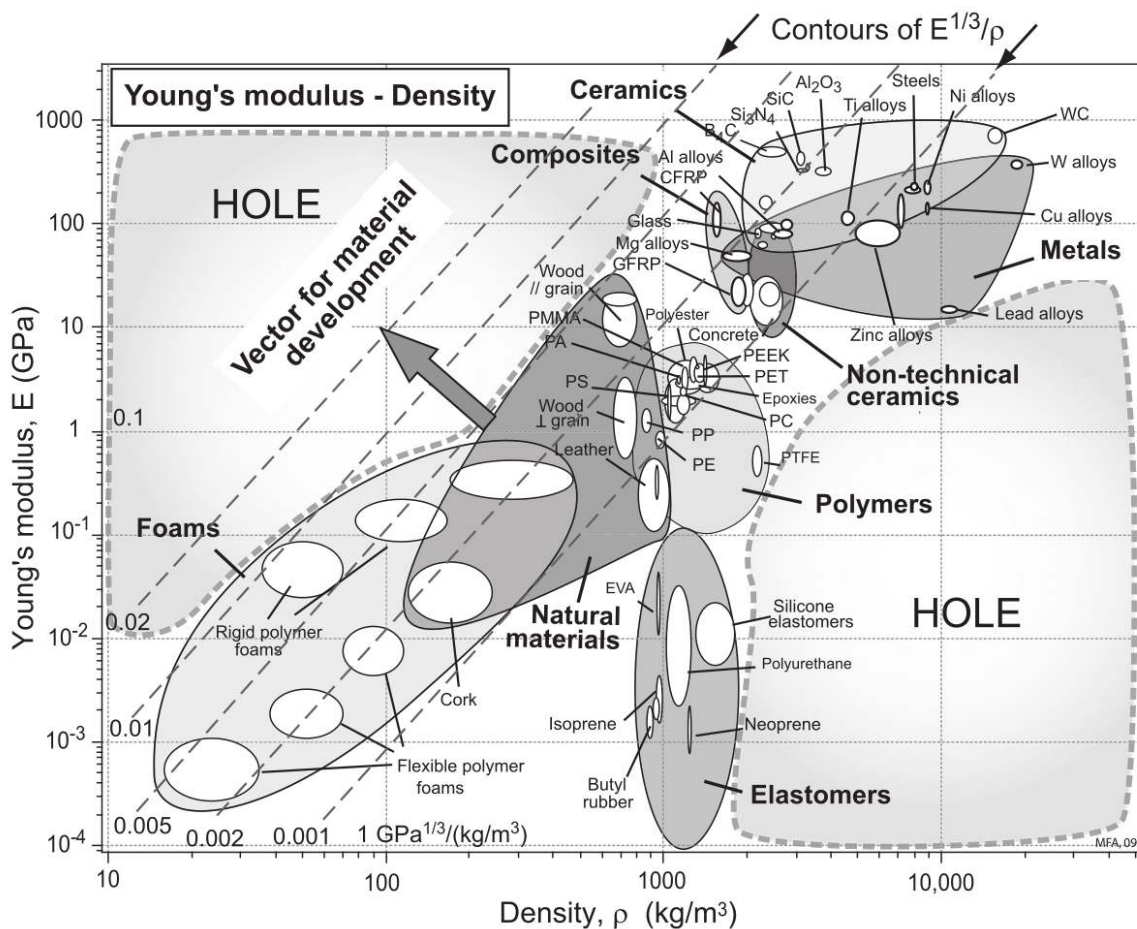


FIGURE 2.1 – Carte de performance d'Ashby dans l'espace masse volumique/module d'Young avec les iso-valeurs de rigidité spécifique. Certaines zones sont occupées par des classes de matériaux et d'autres sont vides. (ASHBY [2013])

Une définition des matériaux architecturés pourrait être la suivante : " *Tout matériau dont la répartition de la matière est maîtrisée et réfléchi de manière à améliorer les propriétés physiques/mécaniques de la structure qu'il compose en comparaison au matériau "plein".* " La répartition de la matière est restreinte à l'échelle du composant, c'est à dire entre le  $\mu\text{m}$  et le  $\text{cm}$ , de sorte que la taille des architectures soit inférieure à celle de la

structure mais supérieure à celle de la microstructure. [ASHBY et BRÉCHET \[2003\]](#); [BOUAZIZ et collab. \[2008\]](#); [BRECHET et EMBURY \[2013\]](#). Les matériaux architecturés traitent de trois échelles différentes : l'échelle macroscopique (celle de la structure et des charge-ments) , l'échelle mésoscopique (celle de l'architecture et de la distribution de la matière) et l'échelle microscopique (celle du matériau constitutif, des phases et des hétérogénéités). Le développement de ces matériaux n'a pas de limite. Les possibilités d'association sont infinies, entre le nombre d'architectures imaginables et la diversité des matériaux existants, ce qui conduit à autant de comportements effectifs différents. Les deux premiers paramètres déterminants dans la conception de ces matériaux sont : l'architecture et le matériau.

Parmi toutes les classes de matériaux architecturés, nous limiterons notre étude aux treillis 2D qui sont un agencement de poutres que l'on peut voir comme une répartition de matériau et de vide dans le plan. Une manière simple de construire un treillis 2D est de s'inspirer des pavages. On appelle un pavage tout recouvrement du plan par un ou plusieurs motifs qui se répètent sans laisser de vide entre eux et sans se chevaucher. En donnant une épaisseur aux contours de chaque motif, on définit les endroits de la matière. L'intérieur est laissé vide. Finalement, la phase solide d'un treillis est constituée de branches connectées entre elles par des nœuds. Ce réseau de barres peut être organisé de manière périodique où un motif identique - la cellule unitaire - est répété. Dans ce cas, on parle aussi de matériau cellulaire. Le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone régulier en sont des exemples, ils sont représentés sur la figure 2.2.

La caractérisation mécanique des matériaux cellulaires cherche à relier une répartition de matière aux propriétés mécaniques de la cellule.

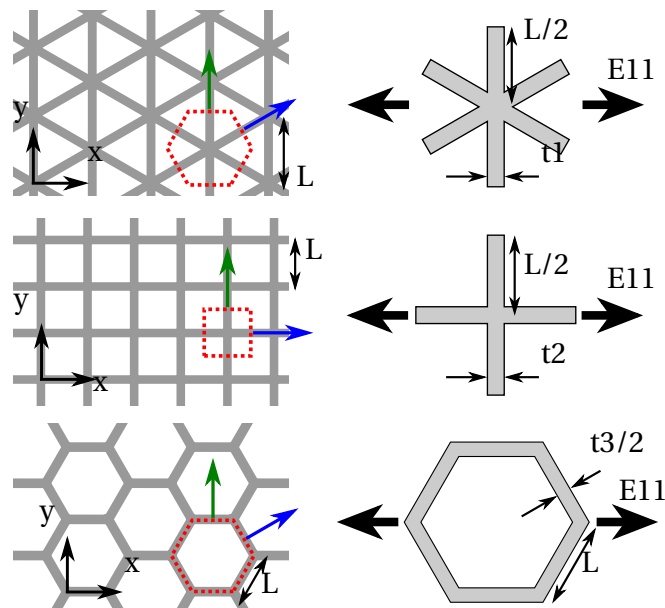


FIGURE 2.2 – Description des treillis triangulaire, carré et hexagonal et de la cellule unitaire associée.



### 2.1.1 Effet de l'architecture sur le comportement macroscopique

#### *Stretch-dominated ou bending-dominated*

Les treillis peuvent être classés en deux catégories *stretch-dominated* et *bending-dominated*. Ces deux groupes héritent leur nom des sollicitations majoritaires dans les branches du réseau qui peuvent être soit en traction/compression ou bien en flexion. MAXWELL [1864] est le premier à introduire une méthode d'analyse pour les structures treillis finis afin de déterminer leur rigidité. Les travaux de CALLADINE [1978] généralisent le critère algébrique de Maxwell en prenant en compte les mécanismes  $m$  et les états auto-contraints  $s$  (état d'équilibre de la structure en absence d'effort extérieur) dans les treillis.

$$M = b - 2j + 3 = s - m \quad (2.1)$$

Un treillis est dit dominé par la traction/compression, *stretch-dominated*, si  $M = 0$ . Il pos-

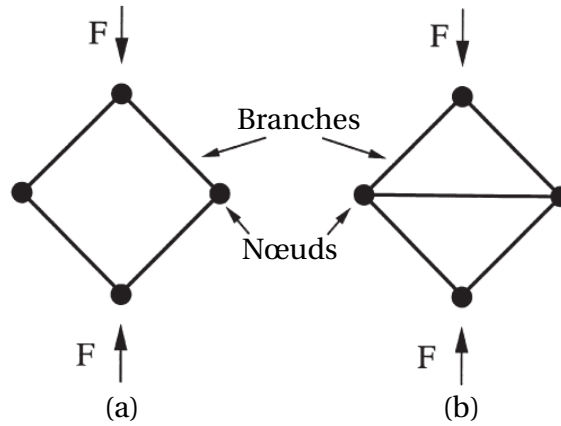


FIGURE 2.3 – Distinction entre les treillis *bending-dominated* (a) et *stretch-dominated* (b).

sède une rigidité importante et est statiquement stable. À l'inverse, un treillis est dit dominé par la flexion, *bending-dominated*, si  $M < 0$ . Il sera accommodant vis-à-vis de la déformation. La figure 2.3 présente ces deux classes de treillis dans le cas 2D. Dans le premier cas (a), les efforts extérieurs entraînent une rotation des nœuds du réseau, ce qui produit une flexion des branches. Dans le deuxième cas (b), du fait de la branche supplémentaire qui augmente la connectivité de la structure, la rotation des nœuds est empêchée. Les branches extérieures sont alors mises en compression et la branche intérieure en traction.

Dans leurs applications, les architectures *stretch-dominated* permettent de développer des structures rigides et légères, tandis que les architectures *bending-dominated* sont utilisées pour des applications d'absorption d'énergie où une certaine déformabilité est recherchée. Au-delà de cette distinction binaire, d'autres auteurs ont introduit une classification basée sur les mécanismes de déformation des architectures, utile pour le développement de matériaux architecturés fonctionnels. Cette classification est reprise dans la figure 2.4.

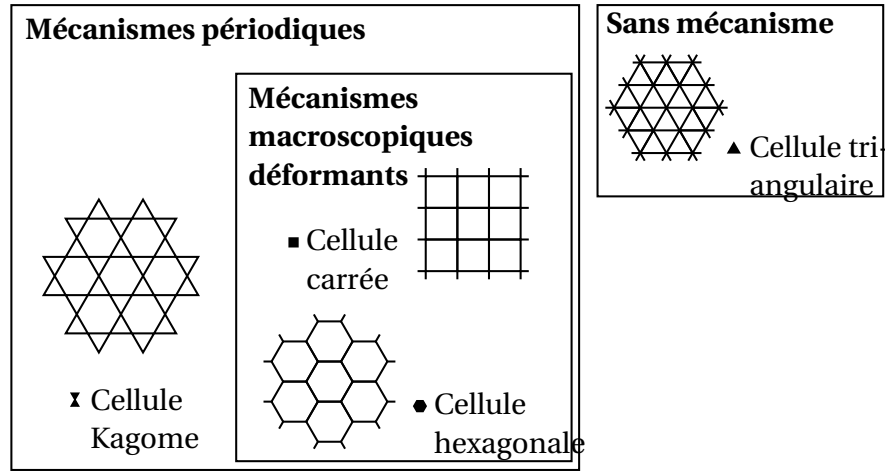


FIGURE 2.4 – Classification des structure étudiées reprise de [FLECK et collab. \[2010\]](#) et réduite aux géométries étudiées par la suite.

[FLECK et collab. \[2010\]](#) décrivent les mécanismes de déformation de différentes architectures en fonction de leur nombre de connectivité. La structure triangulaire a une connectivité de  $Z = 6$ , elle est redondante et ne possède pas de mécanisme de déformation. La structure Kagome a une connectivité de  $Z = 4$  et aucun mécanisme d'effondrement par déformation. Selon les auteurs, cette géométrie peut seulement s'effondrer du fait d'un mécanisme périodique qui ne produit pas de déformation macroscopique. Le mécanisme de déformation implique seulement une rangée entière de cellules. De ce fait, cette architecture est considérée rigide. Les cellules carrée et hexagonale ont des connectivités plus faibles que les deux premières, respectivement de  $Z = 4$  et  $Z = 3$ . Ces architectures peuvent se déformer soit par un mécanisme de déformation macroscopique ou par un mécanisme d'effondrement périodique ne produisant pas de déformation macroscopique.

### Rigidité et limite d'élasticité des matériaux architecturés 2D

L'ambition des matériaux architecturés est d'étendre l'espace des propriétés matériaux par une répartition intelligente de la matière. Jusque-là, nous avons décrit et classé les architectures sur la base de leur topologie. Cependant, il est nécessaire de pouvoir quantifier les propriétés mécaniques de ces matériaux et de les relier à des paramètres géométriques. Les caractéristiques élastiques des architectures sont largement connues [[ASHBY et BRÉCHET, 2003](#); [DESHPANDE et collab., 2001](#); [FLECK et collab., 2010](#); [GIBSON et ASHBY, 1997](#); [GUOMING et collab., 2006](#); [WANG et MCDOWELL, 2005](#)].

A titre d'exemple, le module de Young effectif  $E$  peut s'exprimer de manière proportionnelle à  $E_S$  le module de Young du matériau et  $\rho^{*b}$  la densité relative élevée à la puissance  $b$ . La loi s'exprime :

$$\frac{E}{E_S} = B \times \rho^{*b} \quad (2.2)$$

La densité relative a pour définition :  $\rho^* = \frac{\rho_{cell}}{\rho_{mat}}$ , où  $\rho_{cell}$  et  $\rho_{mat}$  sont respectivement les masses volumiques de la cellule et du matériau constitutif. La densité relative peut être reliée à l'élancement des poutres défini comme le rapport de la longueur d'une branche et de son épaisseur,  $\frac{L}{t}$ .

Ces valeurs sont listées dans le tableau 2.1 pour les trois géométries présentées en figure 2.2. Les cellules hexagonale et carrée orientée à 45° sont *bending-dominated*. Pour celles-ci le coefficient  $b$  est égal à 3. A l'inverse, les cellules triangle, carrée orientée à 0° et Kagome sont toutes *stretch-dominated*. Le coefficient  $b$  est alors égal à 1.

Géométrie	A	B	b	C	c
Triangle	$2\sqrt{3}$	1/3	1	1/3	1
Carré (dir. princ.)	2	1/2	1	1/2	1
Carré (dir. sec.)	2	1/4	3	1/4	2
Hexagone	$2/\sqrt{3}$	3/2	3	1/3	2
Kagome	$\sqrt{3}$	1/3	1	1/2	1

TABEAU 2.1 – Résumé des coefficients de proportionnalité pour les propriétés effectives des matériaux architecturés.

La théorie des poutres appliquée aux milieux architecturés permet par ailleurs de déterminer une contrainte maximale avant plasticité que nous appellerons limite d'élasticité effective. On considère les treillis de la figure 2.2 que l'on sollicite macroscopiquement en appliquant une déformation uniforme. Le treillis subit d'abord un régime élastique correspondant à la réponse élastique de chaque barre du treillis. La loi de comportement intégrée est élastoplastique parfaite avec une limite d'élasticité  $R_0$ . Dès qu'un point matériel du réseau voit une contrainte supérieure à cette limite, on définit la limite d'élasticité effective du réseau. Les travaux de [WANG et McDOWELL \[2005\]](#) présentent la limite d'élasticité effective de plusieurs architectures. Le modèle basé sur la théorie des poutres intègre une loi de comportement élasto-plastique parfaite et considère des petites déformations. Rien n'indique que la limite d'élasticité effective  $\sigma_c$  soit isotrope. On peut cependant rapporter la loi reliant cette limite d'élasticité aux caractéristiques géométriques dans la direction principale  $y$  comme définie sur la figure 2.2.

$$\frac{\sigma_c}{R_0} = C \times \rho^{*c} \quad (2.3)$$

avec les coefficients  $C$  et  $c$  définis dans le tableau 2.1 pour chaque géométrie. Les géométries *stretch-dominated* à savoir le triangle, le Kagome et le carré orienté à 0° ont un coefficient  $c = 1$ . Au contraire, les structures *bending-dominated* sont proportionnelles au carré de la densité relative.

La différenciation des architectures en deux catégories trouve une correspondance dans l'évaluation de leurs propriétés mécaniques. Ainsi, le comportement élastique des architectures peut facilement être évalué; les caractéristiques mécaniques des matériaux

architecturés étant dépendantes de la géométrie de la cellule unitaire. Cependant, le comportement macroscopique évolue également en fonction de celui du matériau constitutif. C'est notamment le cas lorsque l'on commence à écrouir localement le matériau.

### 2.1.2 Influence du matériau sur le comportement macroscopique

Jusqu'ici nous avons décrit le lien entre les caractéristiques élastiques des matériaux cellulaires et leur architecture. Il existe des lois de proportionnalité entre les dimensions géométriques des cellules et les grandeurs mécaniques élastiques. Par ailleurs, il est intéressant de pouvoir caractériser la limite du domaine d'élasticité et d'étudier le comportement plastique des matériaux architecturés. Le matériau constitutif joue un rôle aussi important que l'architecture. En effet, l'apparition de zones de concentration de contrainte est favorisée par l'architecture. Ces zones sont à même de plastifier en premier et de modifier le comportement de la structure entière, voir de mener à sa ruine. Pour certaines applications, il est nécessaire d'avoir une compréhension poussée du comportement élasto-plastique des matériaux architecturés. Les stents en sont un exemple. Ce dispositif médical, qui se présente comme un tube architecturé, sert de support artériel afin d'assurer un flux sanguin idéal. Dans son utilisation, il est amené à subir des déformations dans le domaine plastique. Il est important de pouvoir quantifier le comportement élasto-plastique de ce composant.

#### Ecrouissage du matériau constitutif

Dans leurs premiers travaux sur le comportement des matériaux cellulaires, [GIBSON et ASHBY \[1997\]](#) présentaient déjà une étude des modes de ruines des nids d'abeilles hexagonaux à partir de l'analyse des rotules plastiques. Seulement, cette approximation ne prend pas en compte le comportement élasto-plastique des barres. [MENGES et KNIPSCHILD \[1975\]](#) étudient le comportement plastique des mousses rigides en l'associant au flambage des branches des cellules élémentaires. Plus tard, [KLINTWORTH et STRONGE \[1988\]](#) complètent l'étude du flambage des architectures avec un comportement élasto-plastique amenant à une description des modes de ruine élasto-plastique des matériaux cellulaires et une estimation plus précise des scénarios d'écrasement. [WANG et MCDOWELL \[2005\]](#) comparent les seuils de plasticité pour plusieurs architectures périodiques et démontrent que l'architecture détermine la forme de la surface de charge pour les mêmes densités relatives. Ils relient les différentes topologies de surfaces de charges au caractère *bending-dominated* ou *stretch-dominated* défini dans [DESHPANDE et collab. \[2001\]](#).

La première étude analytique élasto-plastique des barres soumises à de la traction est proposée par [YU et JOHNSON \[1982\]](#) dans le cas du formage de plaque métallique en décrivant notamment la répartition de contrainte dans les sections d'une poutre en flexion. Trois zones plastiques sont présentées : entièrement élastique Fig. 2.5 (a), plastique pri-

maire Fig. 2.5 (b) et plastique secondaire Fig. 2.5 (c). Plus tard, BONFANTI et BHASKAR [2018] adaptent ce modèle pour l'étude analytique élasto-plastique des treillis 2D où les branches du réseau sollicitées en traction et flexion sont étudiées avec le modèle de barres élasto-plastiques (figure 2.6). Ces travaux s'attachent à décrire le comportement macroscopique d'un treillis hexagonal et d'un autre auxétique, ainsi qu'à quantifier le retour élastique après l'application d'un chargement sur la structure. Ces travaux permettent de synthétiser un modèle analytique de barre élasto-plastique qui peut être adapté pour décrire le comportement anélastique des treillis 2D. Les modèles de matériaux architecturés dans les travaux de BONFANTI et BHASKAR [2018] intègrent des loi de comportements élastoplastiques. D'abord plasticité parfaite puis plasticité avec écrouissage hyperbolique dans BONFANTI et collab. [2018]. Les sections des poutres des treillis ont aussi été étudiées de forme carrée ou circulaire. L'auteur étudie grâce à ce modèle de matériaux architecturés avec élasto-plasticité l'effet de retour élastique de plusieurs géométries.

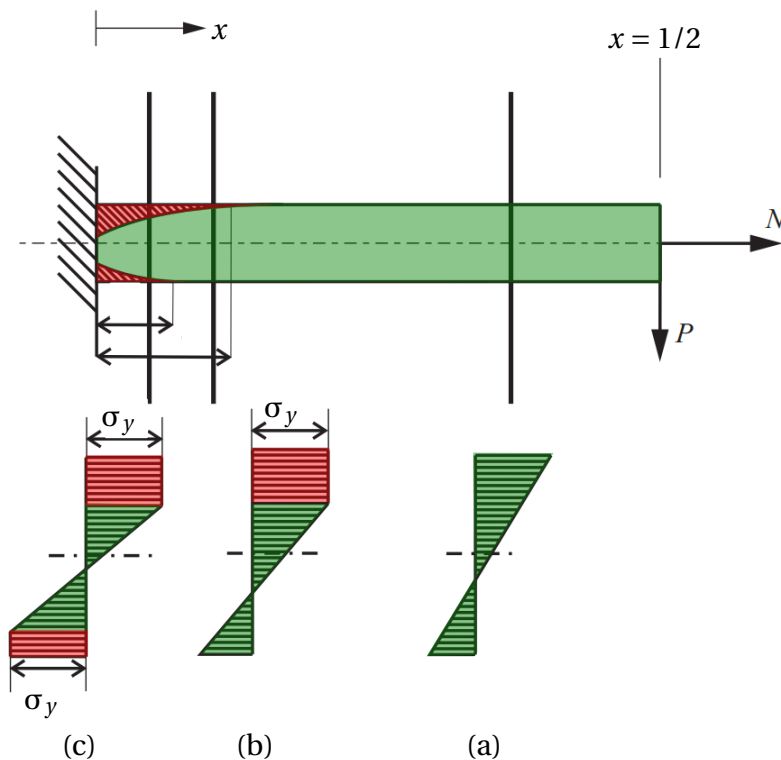


FIGURE 2.5 – Cellule unitaire d'un treillis en nid d'abeille hexagonal avec les rotules plastiques et les branches non déformées lors d'une sollicitation en traction. BONFANTI et BHASKAR [2018]

D'autres études préfèrent l'utilisation de modèles numériques pour l'étude de la plasticité dans les architectures. Par exemple, MANGIPUDI et collab. [2010] modélisent par éléments finis l'évolution de la plasticité dans les matériaux cellulaires et des architectures de Voronoi. Ils s'intéressent aux causes du durcissement des matériaux cellulaires en présence de plasticité. Le modèle exploite deux échelles pour la modélisation de la plasticité :

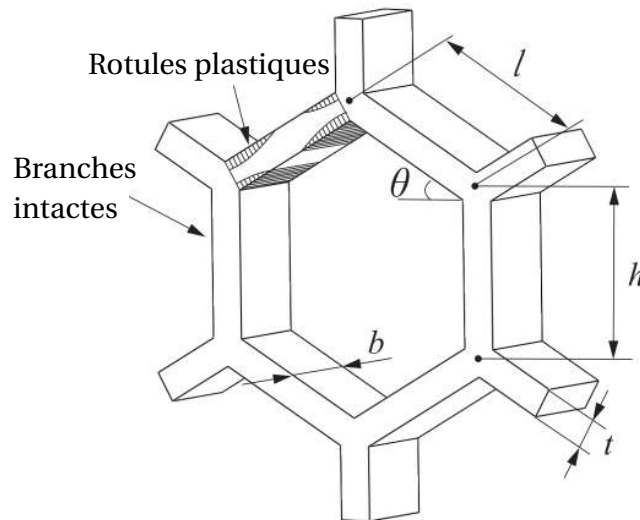


FIGURE 2.6 – Cellule unitaire d'un treillis en nid d'abeille hexagonal avec les rotules plastiques et les branches non déformées lors d'une sollicitation en traction. BONFANTI et BHASKAR [2018]

la première échelle pour le développement de la plasticité dans les branches (échelle microscopique) et la deuxième pour la formation de bandes de plasticité à l'échelle de l'architecture (échelle mésoscopique). Les conclusions montrent que le durcissement des matériaux architecturés est le résultat combiné du durcissement du matériau constitutif et de la réorientation des branches du réseau dont les nœuds jouent le rôle de rotule.

Les travaux de TANKASALA et collab. [2017] s'intéressent à quatre architectures particulières : le triangle, le carré, l'hexagone et le Kagome. Le comportement élasto-plastique est déterminé par un modèle analytique et comparé à un autre modèle éléments finis en grandes déformations. Deux critères de rupture sont discutés dans les conclusions : la déformation locale maximum ou la déformation moyenne maximum dans une section du réseau. Le comportement macroscopique en traction uniaxiale est déterminé pour chaque cellule et caractérisé par 3 régimes : élastique linéaire, rupture plastique des branches par flexion ou tension et post-plastique (principalement en tension due à la réorientation des branches dans la direction de traction).

De manière générale, la plasticité dans les matériaux cellulaires a d'abord été étudiée dans l'optique de déterminer les limites du comportement élastique. Ensuite, dans le cadre d'applications pour l'absorption d'énergie, cette première description est complétée par l'étude des mécanismes de ruines à toutes les échelles du matériau. Nous nous intéresserons, dans ce travail de recherche, à l'étude d'une loi de plasticité propagative qui relève de la présence d'instabilités matérielles dans ces milieux cellulaires. Nous chercherons à mettre en évidence les interactions entre les instabilités matérielles propagatives et l'architecture.

### 2.1.3 Mesures des propriétés effectives

#### Modèle phénoménologique

Les hétérogénéités jouent un rôle important dans la détermination des propriétés effectives d'un matériau. Pour les matériaux architecturés, nous avons vu que la géométrie et le comportement du matériau sont déterminantes. L'approche phénoménologique consiste à déterminer le comportement du matériau architecturé à partir de la connaissance du comportement des phases à l'échelle microscopique. Les méthodes d'homogénéisation visent à déterminer les propriétés mésoscopiques du matériau cellulaire en prenant en compte de manière raisonnable les hétérogénéités des échelles inférieures. Elles reposent toutes sur la définition d'un Volume Élémentaire Représentatif.

La première définition du VER est donnée par [HILL \[1963\]](#). Le VER est un échantillon représentatif de la composition structurelle de la matière en moyenne et qui contient suffisamment d'inclusions pour que les propriétés effectives soient indépendantes des conditions aux limites. Les travaux de [TRUSOV et KELLER \[1997\]](#) évoque un échantillon de taille minimale permettant de représenter tous les mécanismes de déformation. Un VER plus grand n'engendre alors pas de variation des champs de contraintes et de déformations. Toutes les définitions du VER que l'on peut trouver dans la littérature [[DRUGAN et WILLIS, 1996](#); [EVESQUE, 2005](#); [HASHIN, 1983](#); [VAN MIER, 1996](#)] s'accordent sur le fait que le VER doit être suffisamment grand pour contenir les informations nécessaires de la microstructure et suffisamment petit par rapport à la taille de la structure pour ne pas éliminer les hétérogénéités macroscopiques. On voit apparaître ici l'importance de la définition des échelles Micro-Méso-Macro [[HASHIN, 1983](#)]. Ces définitions concernent très largement tout matériau composites constitué d'au moins deux phases pouvant être considérées comme des milieux continus et partageant une interface. Cependant, nous restreignons notre étude aux matériaux architecturés périodiques. Dans ce cas, il ne reste plus qu'une seule phase utile de matériau. La seconde étant remplacée par le vide. Ceci nous place dans un des deux cas décrit par [OSTOJA-STARZEWSKI \[2001\]](#) pour lesquels la définition du VER est évidente : à savoir la cellule unitaire.

Comme dans tous problèmes de mécanique, il est nécessaire de définir les conditions imposées aux bords du domaine étudié. Généralement, trois types de conditions aux limites sont introduites pour résoudre les équations constitutives sur le VER : Conditions aux limites en déplacement (Dirichlet), conditions aux limites en effort (Neumann) et conditions aux limites mixtes. Dans le cadre de la modélisation d'un milieu périodique, un quatrième type de conditions émerge : les conditions périodiques. Ce sont ces dernières qui seront utilisées pour les études numériques. [JIANG et collab. \[2002\]](#) ont étudié l'effet des différentes conditions aux limites dans la modélisation élasto-plastique d'un milieu périodique. Leurs travaux concluent que les comportements identifiés avec les



conditions périodiques sont toujours bornés par les conditions en déplacement et en effort. De plus, les résultats des différentes conditions aux limites convergent avec l'augmentation de la taille du VER.

### Aspect expérimental

Si l'on est capable de déterminer les propriétés effectives des matériaux architecturés à partir des données géométriques, il est plus complexe de connaître les niveaux de contraintes locales. L'architecture génère des concentrations de contrainte, notamment au niveau des rotules plastiques où la contrainte locale est plus importante que la contrainte macroscopique vue par la structure architecturée. [CONWAY et PATAKY \[2018\]](#) proposent un protocole de caractérisation expérimentale des matériaux architecturés avec une synthèse sur les différentes méthodes de calculs de la déformation et de la contrainte dans les matériaux architecturés. Ils comparent, par exemple, trois définitions différentes pour le calcul de la contrainte macroscopique pendant un essai de traction. La figure 2.7 montre une des éprouvettes utilisées pour un essai de caractérisation. En parallèle, ils complètent l'identification du comportement homogénéisé avec une étude locale de la déformation dans une cellule unitaire (Fig. 2.8). Pour plusieurs architectures, le comportement élastoplastique macroscopique de l'éprouvette est comparé avec le champ de déformation locale dans la cellule unitaire.

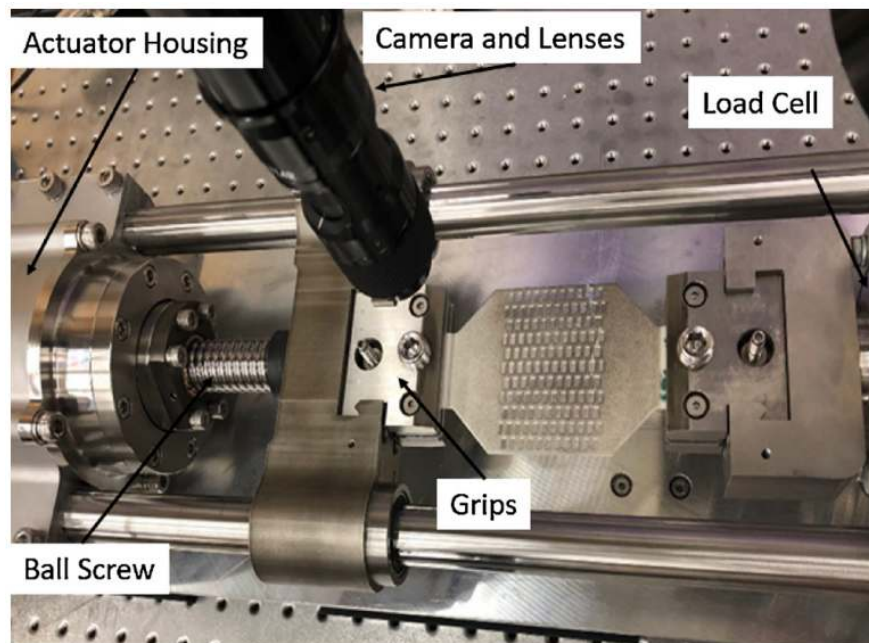


FIGURE 2.7 – Montage expérimental pour la caractérisation d'éprouvettes architecturées ([CONWAY et PATAKY \[2018\]](#))



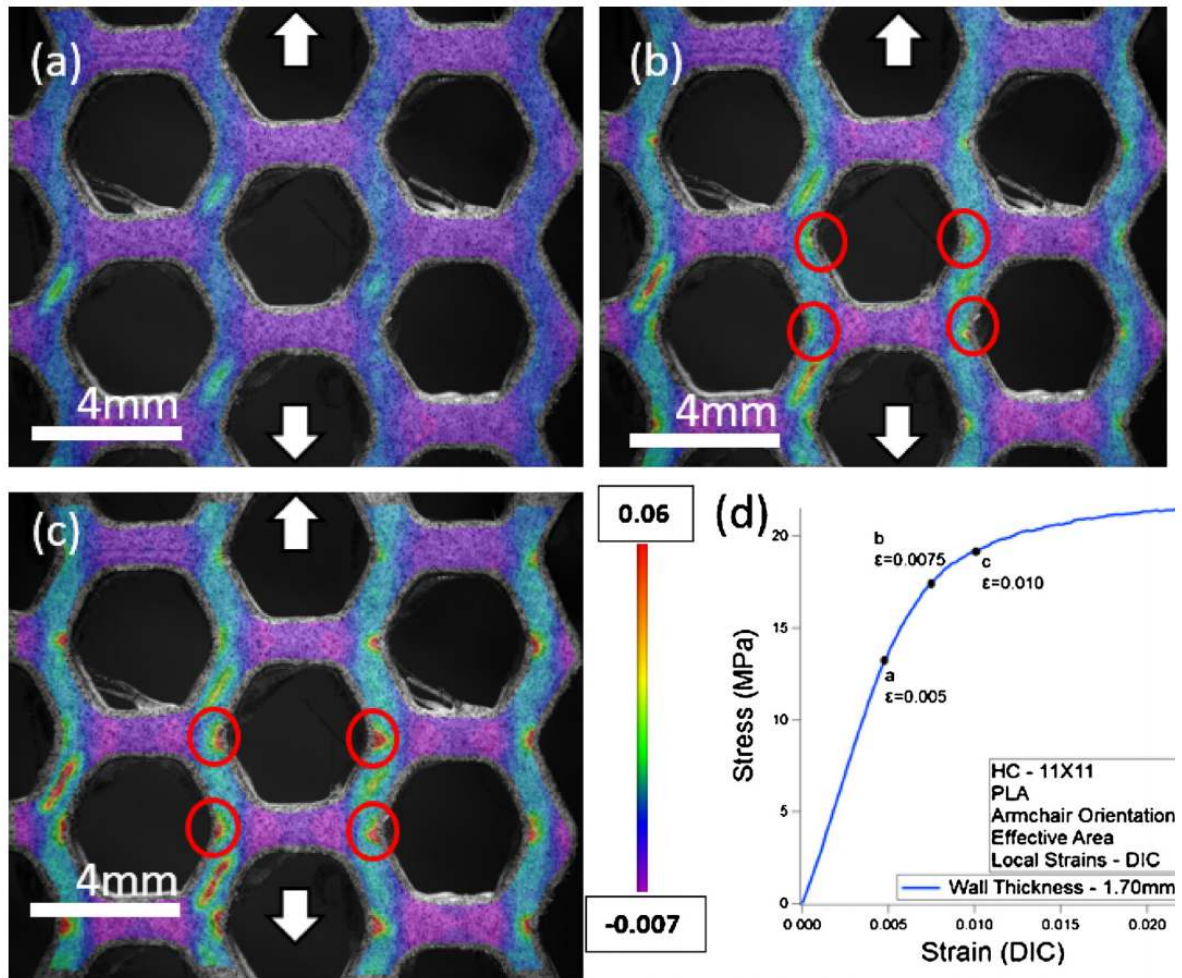


FIGURE 2.8 – Champ de déformation axiale obtenu par Corrélation d'Images (a, b, c) et courbe globale de comportement (d). (CONWAY et PATAKY [2018])

## 2.2 Instabilités matérielles dans les métaux

Les instabilités matérielles amènent à des comportements particuliers dans les matériaux solides. Elles sont la conséquence de particularités dans la loi de comportement du matériau qui présente un adoucissement. Nous nous intéressons ici aux mécanismes physiques à l'origine de deux instabilités matérielles bien connues : la plasticité de Piobert-Lüders et le changement de phase dans les AMF.

### 2.2.1 Instabilités plastiques : les bandes de Piobert-Lüders

Dans la bibliographie, la paternité des instabilités plastiques revient généralement à Lüders qui, en 1860, décrit des lignes inclinées sur des tôles de fer lors d'essais de traction [LÜDERS \[1860\]](#). Cependant, quelques années plus tôt en 1842, [PIOBERT \[1842\]](#) rapporte, le premier, l'observation de ces lignes laissées par un tir de boulet sur des blindages. Parallèlement à Piobert, [MASSON \[1841\]](#) relie un comportement macroscopique saccadé à une déformation hétérogène lors de l'étude mécanique de cylindres minces.

Le phénomène de Piobert-Lüders décrit l'écrouissage non uniforme dans les aciers doux sous la forme de bandes de localisation de la déformation qui traversent le matériau. Ce phénomène transitoire se termine lorsque l'échantillon est complètement écroui. Ces bandes de déformations ont pour origine l'interaction entre les dislocations et les atomes en solution solide. Les dislocations attirent les atomes en solution qui diffusent dans leur direction de manière privilégiée jusqu'à former des *nuages de Cottrell* [[COTTRELL et BILBY, 1949](#)]. Cet agencement a pour effet d'ancrer les dislocations. Une contrainte supplémentaire est alors nécessaire pour que les dislocations bloquées se mettent en mouvement et provoquent une déformation plastique. Lorsqu'une contrainte suffisante est atteinte, elle induit le désancrage des dislocations qui est suivi d'un adoucissement du comportement matériau. Autrement dit la contrainte chute avec l'apparition de la plasticité.

La courbe de contrainte-déformation schématique d'une éprouvette en traction est reproduite à la figure [2.9](#). De A à B, la déformation est élastique, mais après B, limite d'élasticité, la contrainte chute soudainement avec l'apparition simultanée sur l'échantillon de la première bande de Luders. C'est la localisation de la déformation plastique. En dehors de cette bande, le matériau reste dans le domaine élastique. La bande ensuite se propage le long de l'éprouvette décrivant un plateau de contrainte entre les points C et D. Au point D, la bande a traversé toute l'éprouvette qui est entièrement écrouie. Au-delà de ce point, la contrainte augmente fortement et la déformation redevient homogène.

L'instabilité plastique de type Piobert-Lüders possède un caractère propagatif à l'échelle de la structure avec ces bandes de déformation. Le caractère propagatif est dû à la succession de l'adoucissement et du durcissement d'écrouissage consécutif. Mais les instabilités matérielles ne sont pas restreintes à la plasticité. Un phénomène similaire à celui de Piobert-Lüders apparaît dans les alliages à mémoire de forme. On parle notam-

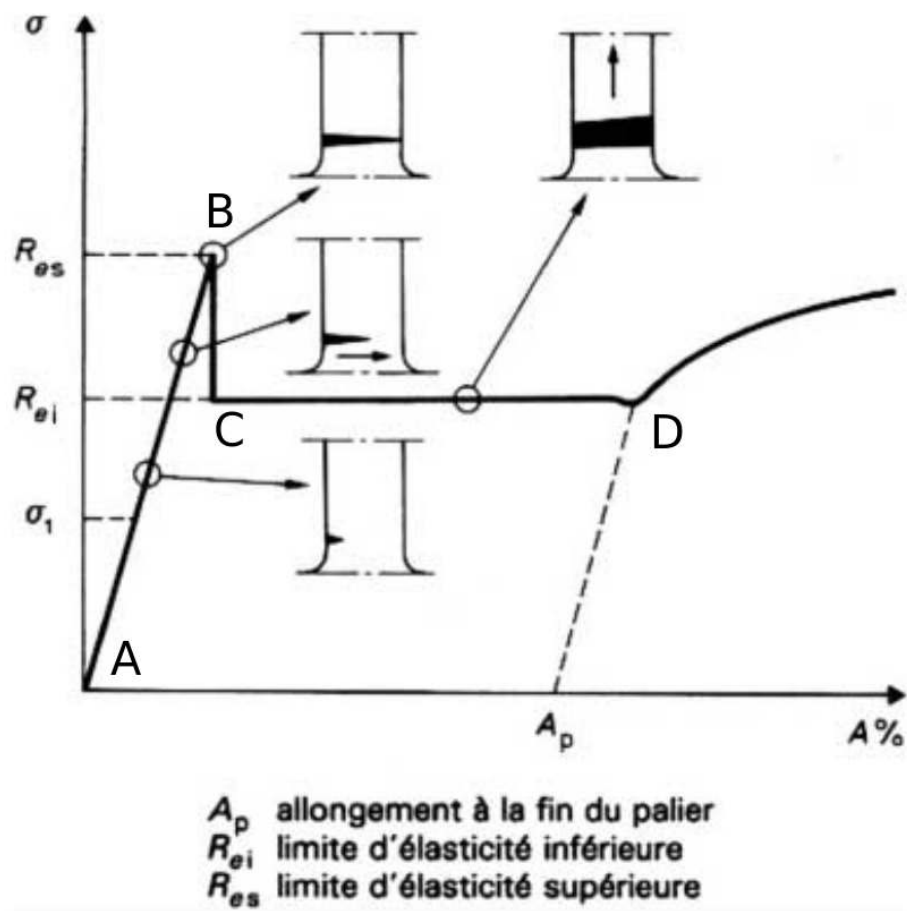


FIGURE 2.9 – Courbe schématique de la réponse macroscopique d'un essai de traction d'acier doux. (GRUMBACH [1993])

ment de phénomène à la manière de Lüders (*Lüders-like*).

### 2.2.2 Instabilités matérielles dans les AMF : exemple du NiTi

Au début des années 1960, W. J. Buehler and R. Wiley travaillent sur le développement de nouveaux matériaux pour les pointes avant de missiles et étudient les alliages de nickel et de titane au centre de recherche "Naval Ordnance Laboratory". Dans le brevet relatif aux découvertes de ces travaux, ils décrivent l'effet mémoire de forme d'un nouvel alliage TiNi : "*[...] ayant la capacité d'être déformé plastiquement à température ambiante et conservant l'état déformé jusqu'à ce qu'il soit chauffé à une température plus élevée après quoi l'état antérieur non déformé est retrouvé.*" (BUEHLER et WILEY [1965]). Par la suite, cette classe de matériaux sera appelée Nitinol, -nol désignant l'acronyme de Naval Ordnance Laboratory. C'est quelques années plus tôt, en 1957, que [RACHINGER, 1958] décrit un comportement "super-élastique" résultat d'une transformation martensitique réversible et présentent le développement de nouveaux alliages à mémoire de forme.

Du point de vue phénoménologique, les manifestations de la superélasticité sont similaires à celles de la plasticité de Piobert-Lüders dans les aciers doux. Lors d'un essai de traction, les AMF sont le siège d'une localisation de la déformation sous forme de bandes inclinées qui se propagent le long de l'éprouvette. La courbe d'écrouissage présente, comme dans le cas de la plasticité de Piobert-Lüders, un plateau de contrainte correspondant à la propagation de l'instabilité.

**Origine physique** A l'échelle de la microstructure, le NiTi dérive ces propriétés d'une transformation displacive (ou martensitique) réversible entre une phase austénitique (B2) et une autre martensitique (B19'). La réversibilité laisse apparaître, pour des températures particulières, un effet d'hystérésis de la courbe d'écrouissage, décrit par RACHINGER [1958].

Les différents phénomènes liés à la transformation martensitique dans le NiTi sont identifiables dans l'espace des déformations ( $\epsilon$ ) - contraintes ( $\sigma$ ) - températures ( $T$ ) représenté sur la figure 2.10. Cette figure présente également un essai de DSC (Differential Scanning Calorimetry) qui montre l'évolution de la différence de flux de chaleur en fonction de la température. L'essai est réalisé à contrainte nulle. La transformation de phase austénite (B2) - martensite (B19') est obtenue thermiquement. Il permet d'observer un premier changement de phase de l'austénite en martensite lors du chauffage qui débute à la température  $A_s$  et se termine à la température  $A_f$ . Le deuxième changement de phase de la martensite auto-accomodée (induite thermiquement) en austénite a lieu lors du refroidissement. Il débute à la température  $M_s$  et se termine à  $M_f$ .

La transformation martensitique peut également être activée par un chargement mécanique, ce qui nous intéressera principalement dans la suite de ces travaux. En fonction

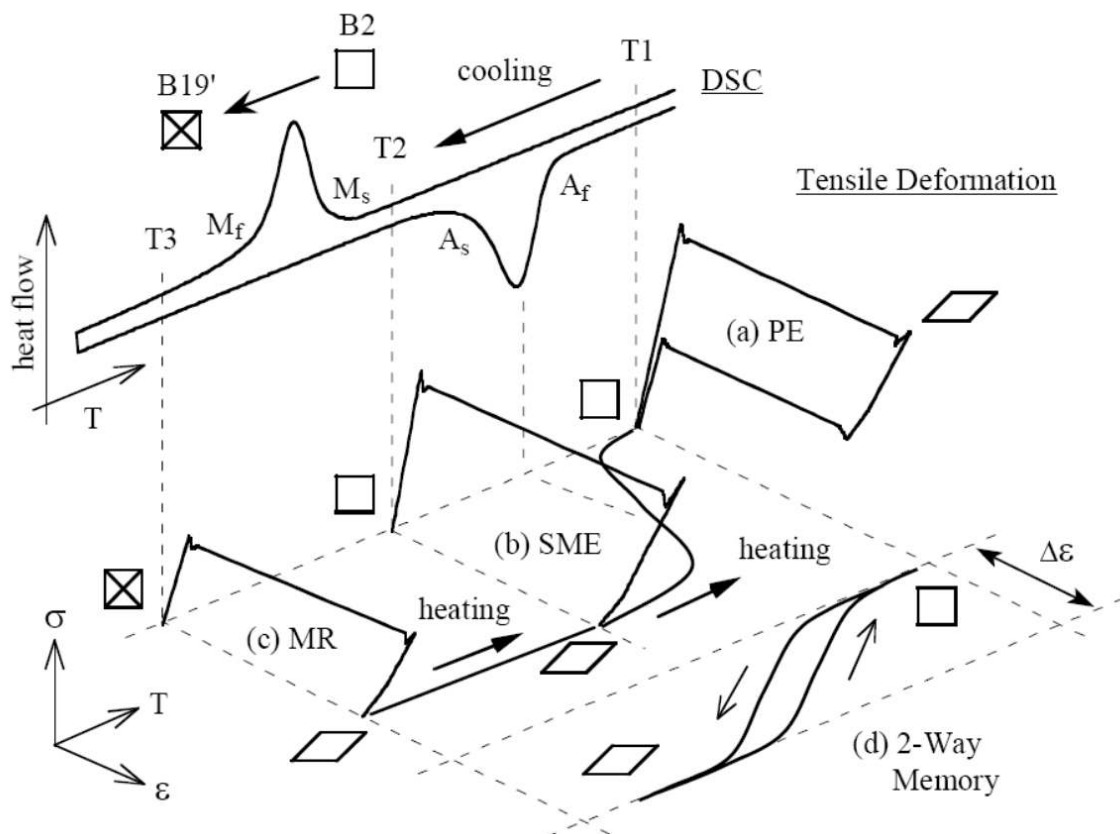


FIGURE 2.10 – Comportement thermomécanique du NiTi représenté dans l'espace déformation-constraint-temperature. (a) Superélasticité ou pseudo-élasticité (PE : Pseudo-Elasticity); (b) Effet mémoire de forme (SME : Shape Memory Effect); Réorientation martensitique (MR : Martensitic Reorientation); (d) Effet mémoire double sens. (MAHMUD [2009])

de la température à laquelle on sollicite en traction un échantillon de NiTi, trois comportements sont possibles. Ils sont représentés par les courbes (a), (b) et (c) sur la figure 2.10.

**Superélasticité** Si l'échantillon est à la température  $T_1$  supérieure à la température  $A_f$ , celui-ci est dans un état austénitique. Sollicité mécaniquement, il a un comportement superélastique. Le comportement superélastique est représenté par la courbe de contrainte-déformation (a) (Fig. 2.10). Ce phénomène est le siège d'une transformation de l'austénite en martensite orientée (induite mécaniquement). Lors du chargement, la réponse mécanique commence par la déformation élastique de l'austénite, le plateau supérieur décrit la propagation du front de changement de phase de l'austénite vers la martensite. Le déchargement se poursuit par la déformation élastique de la martensite et se poursuit par la transformation inverse de la martensite en austénite pendant le plateau inférieur, enfin l'austénite retrouve un comportement élastique. La différence de contrainte entre les deux plateaux de transformation laisse apparaître une boucle d'hystérésis qui produit une dissipation d'énergie.

**Effet mémoire de forme et réorientation martensitique** L'effet mémoire de forme a lieu lorsque l'échantillon est à une température comprise entre  $M_s$  et  $A_s$ . Les phases austénitique et martensitique coexistent. Après un cycle de charge et décharge, le matériau est dans un état de martensite orientée. Un chargement thermique peut permettre de retrouver l'état cristallographique initial austénitique ainsi que la forme de l'échantillon.

A une température  $T_3$ , l'échantillon se trouve entièrement sous la forme de martensite auto-accomodée. Le chargement permet la réorientation de cette martensite auto-accomodée dans la direction du chargement.

**Effet mémoire double** Il décrit la possibilité d'éduquer le matériau en lui donnant deux phases stables, une à basse température ( $T < M_f$ ) et l'autre à haute température ( $T > A_f$ ). Le passage de l'une à l'autre se fait par un chargement thermique.

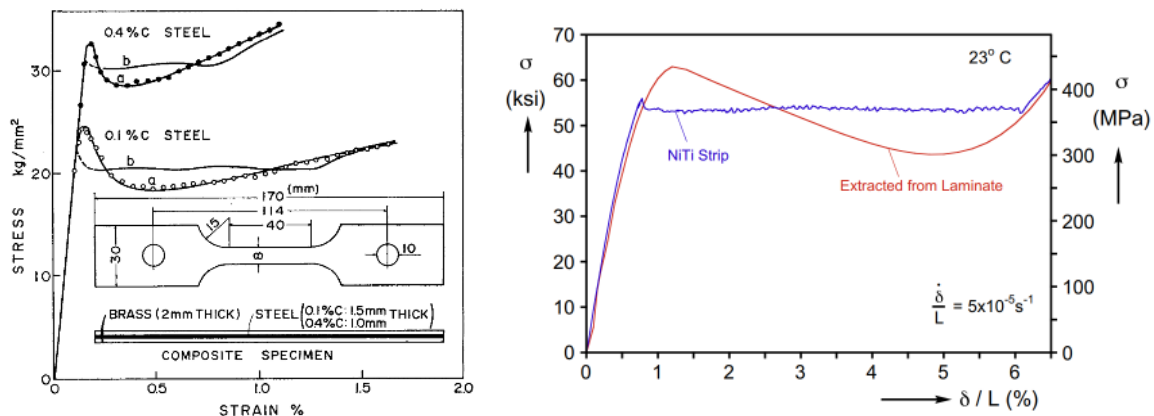
Dans le chapitre 4 consacré à l'architecture de matériaux superélastiques, nous n'exploiterons le matériau que dans sa phase superélastique.

Phénoménologiquement, la plasticité de Piobert-Lüders et le changement de phase dans le NiTi sont deux instabilités matérielles qui se manifestent sous la forme d'une bande de localisation propagative. La section suivante s'attache à décrire comment reproduire ce comportement de manière macroscopique, c'est-à-dire sans rendre compte des origines physiques distinctes de ces deux phénomènes.

### 2.2.3 Localisation de la déformation

En mécanique, les instabilités décrivent le comportement d'un système, sensible à des perturbations infinitésimales. Les instabilités matérielles sont à relier aux propriétés intrinsèques du matériau qui se manifestent à l'échelle de la structure par une localisation de la déformation. La description locale des instabilités plastiques a d'abord été faite pour les bandes de Piobert-Lüders. A partir du comportement des dislocations, [HAHN \[1962\]](#); [JOHNSTON \[1962\]](#) décrivent la nécessité d'un comportement durcissant-adoucissant-durcissant du matériau pour reproduire la localisation et la propagation des bandes de déformation.

La preuve expérimentale d'un comportement adoucissant de la localisation est apporté par [SHIOYA et SHIOIRI \[1976\]](#). En imposant une déformation homogène de l'éprouvette à l'aide de lames de cuivre collées sur l'éprouvette, ils obtiennent la courbe donnée en figure 2.11a. [HALLAI et KYRIAKIDES \[2013\]](#) reproduisent l'expérience avec le même montage expérimental et mettent en évidence un comportement similaire pour le NiTi (Fig. 2.11b). Dans les deux cas, le comportement local s'écarte du comportement macroscopique uniquement en présence des instabilités matérielles et d'une déformation inhomogène. A la fin du plateau, les deux courbes redeviennent identiques et la déformation est quasi-homogène.



(a) Comportements de deux aciers (0,1% et 0,4%C) identifiés expérimentalement par [SHIOYA et SHIOIRI \[1976\]](#). Le comportement conventionnel non contraint est aussi représenté. (b) Comportement du NiTi superélastique identifié expérimentalement par [HALLAI et KYRIAKIDES \[2013\]](#). Le comportement conventionnel de l'éprouvette non contrainte est aussi représenté.

FIGURE 2.11 – Démonstration expérimentale du comportement matériau localement adoucissant-durcissant à l'origine des instabilités matérielles.

L'étude d'un cas simple d'une barre en traction dont le comportement favorise l'apparition d'instabilités matérielles permet de comprendre les phénomènes de localisation de la déformation et de perte d'unicité du champ de déformation.



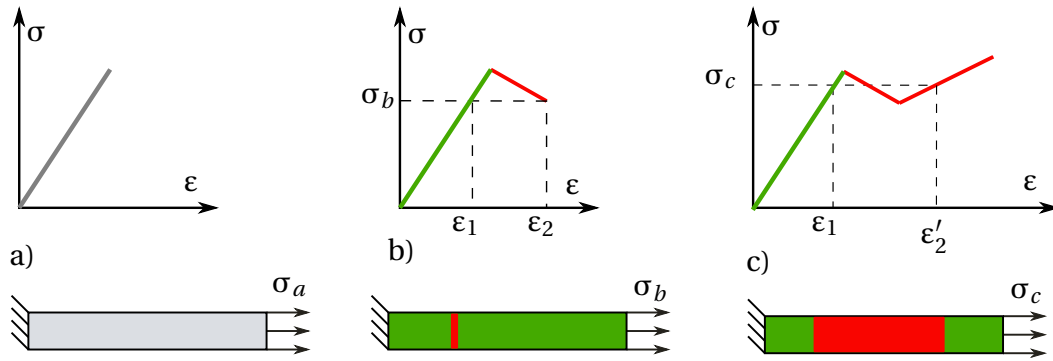


FIGURE 2.12 – Exemple 1D d'une barre en traction avec une loi de comportement adoucissante-durcissante. a) phase élastique. b) phase de localisation. c) phase de propagation. À gauche : état de déformation dans la barre. À droite : loi de comportement locale.

La première phase de chargement correspond au comportement élastique du matériau (schéma a), Fig. 2.12). L'équilibre statique de la poutre implique une répartition constante de la contrainte le long de la poutre. La loi de Hooke impose une déformation homogène le long de la poutre.

La phase de plasticité n'est atteinte que lorsque la contrainte dépasse la limite d'élasticité. Pour chaque point matériel de l'éprouvette, deux chemins sont possibles (schéma b), Fig. 2.12). Soit la déformation augmente et le matériau s'écrouit (chemin rouge) ou bien la déformation diminue et le matériau reste élastique (chemin vert). La contrainte macroscopique  $\sigma_b$ , elle, diminue. Les zones dont la déformation locale vaut  $\epsilon_1$  sont en décharge élastique tandis que la zone  $\epsilon_2$  subit une déformation plastique. Toute combinaison de zones, en nombre et en taille est admissible, ainsi il existe une infinité de solutions admissibles. Dans les faits, tous les points de la poutre ne voient pas exactement le même état de contrainte et de déformation. Les imperfections matérielles ou géométriques ou les conditions aux limites introduisent des zones faibles. Ces zones favorisent la localisation. Numériquement, c'est ainsi qu'il est possible de contrôler l'endroit de la localisation. Afin de modéliser la propagation de la bande de localisation, une troisième phase de durcissement plastique est nécessaire (schéma c, Fig. 2.12). Les points matériels ayant localisé continuent à se déformer. L'augmentation de la contrainte au dessus du premier pic de contrainte entraîne la localisation des points voisins à la zone localisée. On voit alors macroscopiquement la bande se propager le long de la poutre.

## 2.2.4 Moyen de mesures

La réponse macroscopique d'une structure avec des instabilités matérielles est caractéristique et présente un plateau de plasticité ou de transformation. Ce comportement traduit la localisation de la déformation visible sur la structure. Plusieurs études rapportent une caractérisation, d'abord visuelle, des bandes de Piobert-Lüders [BUTLER, 1962; HALL, 1970; HALL et collab., 1982] et de leur propagation. Cependant, en présence d'instabilités matérielles, la réponse macroscopique de la structure diffère de la réponse



locale du matériau. Il est donc nécessaire d'avoir accès à une mesure locale des propriétés du matériau permettant ainsi de relier les effets de la localisation au comportement macroscopique. La mesure par corrélation d'image est devenue la méthode plus répandue (HALLAI et KYRIAKIDES [2013]; WATTRISSE et collab. [2001]) car elle permet de quantifier la déformation locale. Le champ de déformation sur l'ensemble de la structure est obtenu par comparaison de deux images successives du champ de déplacement révélé par un mouchetis de surface.

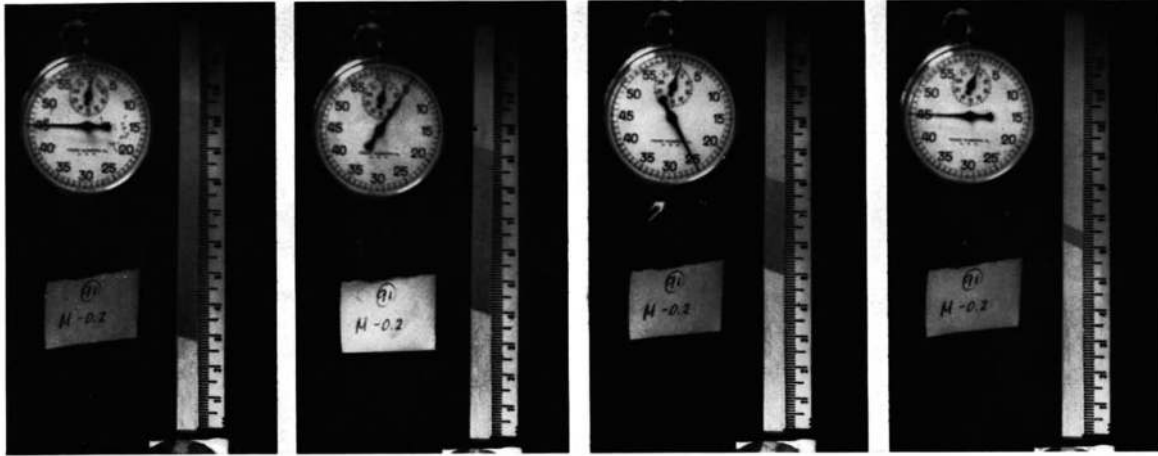


FIGURE 2.13 – Illustration de la propagation de bandes de Piobert-Lüders par BUTLER [1962]

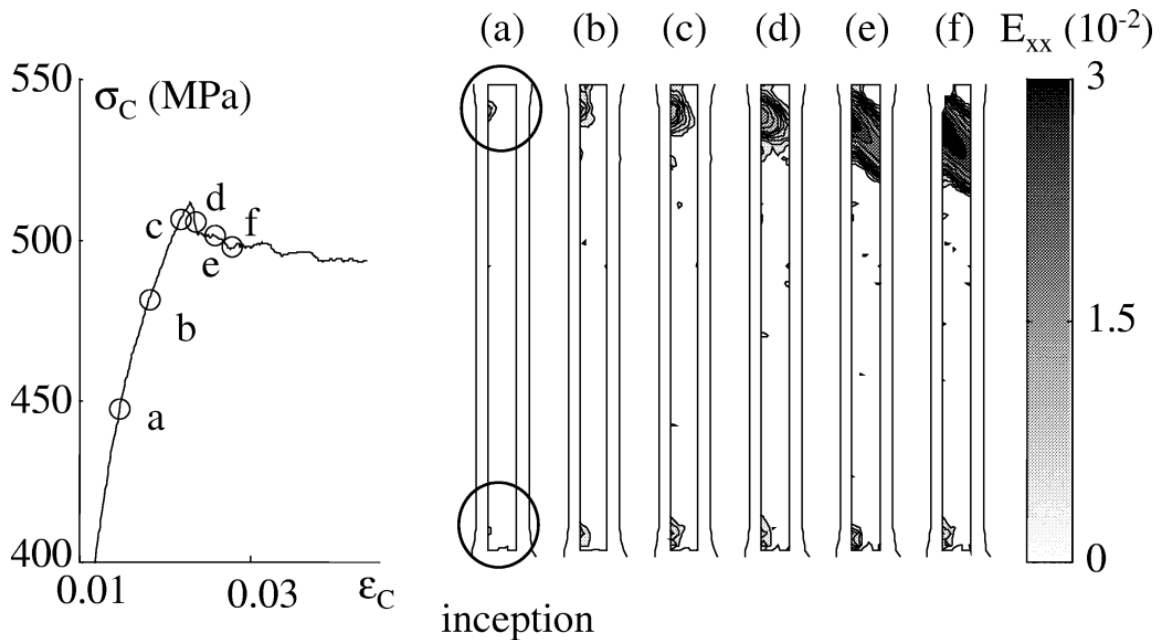


FIGURE 2.14 – Propagation d'une bande de Piobert-Lüders par WATTRISSE et collab. [2001] avec mesure de la déformation lagrangienne axiale  $E_{xx}$ .

Le changement de phase et la plasticité de Piobert-Lüders sont également accompagnés d'une variation de la température qui peut être relevée par thermographie infrarouge

[LOUCHE et CHRYSOCHOOS, 2001]. De nombreuses autres méthodes permettent de mesurer la propagation des bandes de localisation sans pour autant quantifier la déformation dans la bande.

Nous avons introduit, dans cette section, les notions importantes à propos des instabilités depuis leurs origines physiques jusqu'à leur manifestation macroscopique. La plasticité de Piobert-Lüders et le changement de phase dans les AMF sont deux instabilités propagatives qui présentent une localisation de la déformation. Phénoménologiquement, il est possible de modéliser ce comportement par une loi matériau adéquate. Enfin, la caractérisation expérimentale privilégiée pour ces phénomènes est la corrélation d'images.

## **2.3 Études des matériaux architecturés en présence d'instabilités**

### **2.3.1 Des matériaux adaptables grâce aux instabilités géométriques**

Dans les matériaux solides, les instabilités peuvent avoir une origine géométrique. Dans le cas des matériaux cellulaires de nombreuses études s'attardent sur le flambement des poutres soumises localement à une sollicitation de compression importante (BONFANTI et BHASKAR [2018]; TANKASALA et collab. [2017]). Macroscopiquement, ce phénomène crée des bandes de localisation qui traversent la structure et génère un adoucissement dans le comportement effectif [GUO et GIBSON, 1999; SILVA et GIBSON, 1997]. Ce phénomène n'est pas nécessairement catastrophique et des configurations post-flambement stables peuvent être exploitées afin de modifier les propriétés mécaniques ou fonctionnelles du matériau architecturé. Il a été montré la possibilité de contrôler le flambement dans les nids d'abeilles en introduisant une hiérarchie d'architecture COMBESURE et ELLIOTT [2017]. De plus, certaines configurations post-flambées modifient les propriétés locales du matériau. WANG et collab. [2013] étudient les effets des non-linéarités géométriques et matérielles dans un milieu architecturé et montrent qu'il est possible de faire varier les propriétés de propagation d'ondes. D'autres études proposent des solutions architecturées pour la dissipation d'énergie. Les travaux de RESTREPO et collab. [2015] introduisent un matériau cellulaire à transformation de phases. Les cellules élémentaires présentent un mécanisme structurel bi-stable ou méta-stable rendu possible par une conception permettant un retour élastique de la structure. Le comportement macroscopique obtenu est présenté en figure 2.15 qui n'est pas sans rappeler celui des alliages à mémoires de forme.

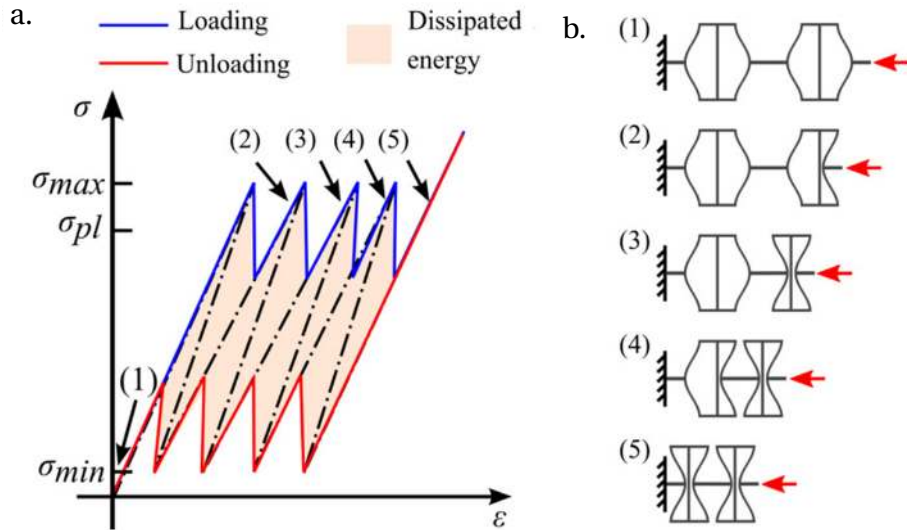


FIGURE 2.15 – Conception d'un matériau cellulaire à transformation de phase proposée par [RESTREPO et collab. \[2015\]](#). a) Représentation schématique du comportement mécanique de plusieurs cellules élémentaires sous chargement à déplacement contrôlé. b) Représentation schématique des différentes configurations du mécanisme relevées sur la courbe de comportement.

Les différents principes évoqués laissent à voir quelques unes des possibilités de création de matériaux architecturés tirant profit des instabilités géométriques pour offrir de nouvelles fonctionnalités. D'autres initiatives s'attardent plus particulièrement sur les instabilités matérielles.

### 2.3.2 Architecturation avec instabilités matérielles

Si l'on peut trouver dans la littérature des exemples de structures en AMF comme les nids d'abeille [[GRUMMON et collab., 2006](#)] ou l'architecture hexachirale [[HASSAN et collab., 2008](#)], leur nombre reste peu important. La faible production de matériaux superélastiques architecturés peut s'expliquer par les difficultés d'usinage du NiTi [[WEINERT et PETZOLDT, 2004](#)]. A noter que récemment, [BARTOLOMEU et collab. \[2020\]](#) ont réussi avec succès à réaliser des matériaux cellulaires plus complexes par impression laser. Les applications visées sont la fabrication de prothèses avec un module d'élasticité adaptable à celui des os. Les interactions de l'architecture avec la transformation de phase ne sont pas étudiées, le composant étant exploité dans le domaine élastique. Il est tout de même important de relever que le procédé de fabrication utilisé dans ce cas conditionne fortement les propriétés superélastiques du matériau final.

De ce fait, la majeure partie des travaux concernant les matériaux superélastiques architecturés se résume à l'étude de structures simples - [KAZINAKIS et collab. \[2021\]](#) étudient, numériquement et expérimentalement, l'interaction entre les instabilités matérielles et géométriques dans le cas de tubes de NiTi en flexion - ou bien d'architectures conçues à partir d'éléments simples (fils, feuilles ou tubes). Par exemple, [MACHADO et collab. \[2015\]](#) comparent deux empilements de tubes en NiTi pour lesquels les réponses

macroscopiques dans le domaine de superélasticité sont différentes. La boucle d'hystérésis est particulièrement affectée par le choix de l'architecture. Un des intérêts d'utiliser le NiTi avec une architecture complexe est d'amplifier la déformation à l'échelle de la structure. Cet effet est recherché dans les stents en NiTi (fig. 2.16) ; des dispositifs médicaux placés dans les artères pour maintenir un flux sanguin normal. MEHRABI et PARIZI [2018] mettent en évidence l'influence sur le comportement mécanique et la superélasticité de la géométrie choisie. La figure 2.17 présente la réponse mécanique des deux stents en NiTi étudiés lors d'un essai de traction. On y observe que l'effet superélastique n'est activé que pour une seule géométrie grâce à une contrainte plus importante. Cependant, l'étude locale de la transformation de phase permettant la superélasticité n'est pas présentée.

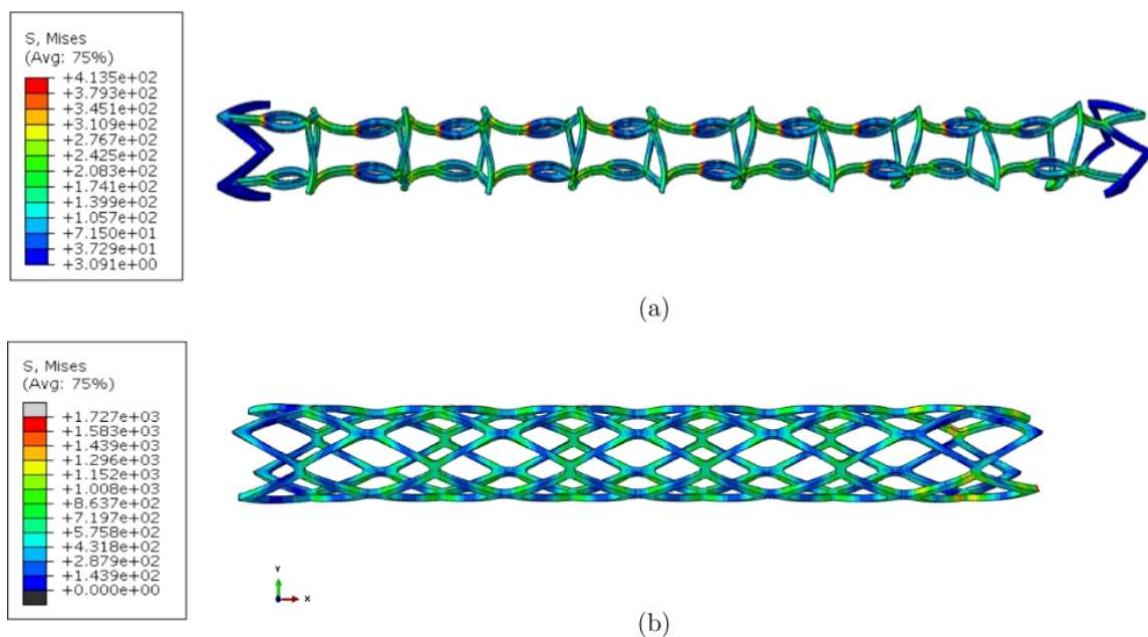


FIGURE 2.16 – Champ des contraintes de Von Mises pour (a) la géométrie en V et (b) la géométrie diamant lors d'un essai de traction. [MEHRABI et PARIZI, 2018]

Malgré l'engouement pour les matériaux à mémoire de forme, la bibliographie sur les matériaux superélastiques architecturés est pauvre. De plus, l'étude locale de la transformation de phase dans le cas du NiTi est rarement comparée avec le comportement macroscopique. Ceci ne permet pas mettre en évidence l'influence de la géométrie sur la propagation des instabilités matérielles.

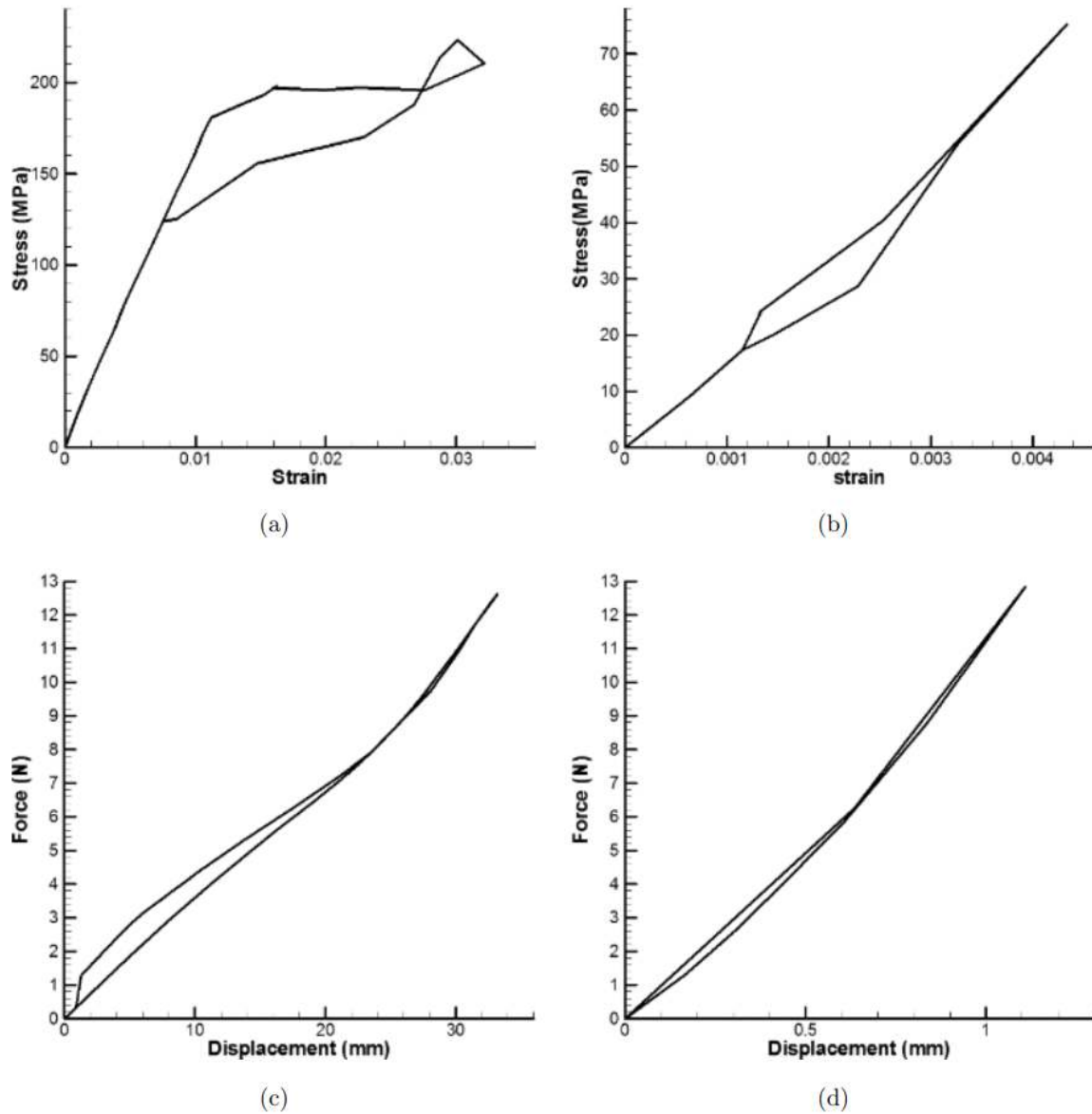


FIGURE 2.17 – Comportement superelastique des géométries en V (a) et diamant (b) et courbes force-déplacement des géométries en V (c) et diamant (d) lors d'un essai de traction avec décharge. [MEHRABI et PARIZI, 2018]

## 2.4 Conclusion du chapitre

Nous l'avons vu, l'intérêt pour les matériaux architecturés est grandissant depuis ces dernières années. Cette nouvelle classe de matériaux ouvre à de plus larges possibilités de développement de matériaux utiles en y associant un comportement matériau particulier comme celui des AMF. La compréhension de l'origine physique des instabilités matérielles et leur modélisation numérique sont bien comprises depuis longtemps. D'autres part, les outils d'étude des matériaux architecturés commencent aujourd'hui à être mature numériquement et expérimentalement. Cependant très peu de travaux ont exploité l'association d'une architecture avec les instabilités matérielles. Certaines études ont seulement pu caractériser les interactions entre des structures simples et des instabilités matérielles propagatives, comme les bandes de Piobert-Lüders ou le changement de phase dans les AMF.

Ces travaux de thèse cherchent à étudier et caractériser les interactions entre des architectures complexes et deux instabilités matérielles, la plasticité de Piobert-Lüders et le changement de phase dans les AMF. Les matériaux architecturés à instabilités seront d'abord modélisés numériquement et ensuite étudiés expérimentalement.

## 2.5 Références

- ASHBY, M. 2013, «Designing architected materials», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, doi :<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.04.033>, p. 4–7, ISSN 1359-6462. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646212002965>. 10
- ASHBY, M. F. et Y. J. M. BRÉCHET. 2003, «Designing hybrid materials», *Acta Materialia*, vol. 51, n° 19, doi :[10.1016/S1359-6454\(03\)00441-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(03)00441-5), p. 5801–5821, ISSN 1359-6454. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645403004415>. 11, 13
- BARTOLOMEU, F., M. COSTA, N. ALVES, G. MIRANDA et F. SILVA. 2020, «Engineering the elastic modulus of NiTi cellular structures fabricated by selective laser melting», *Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials*, vol. 110, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmbbm.2020.103891>, p. 103 891, ISSN 1751-6161. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1751616120304458>. 30
- BONFANTI, A. et A. BHASKAR. 2018, «Elastoplastic response and recoil of honeycomb lattices», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 71, doi :[10.1016/j.euromechsol.2017.12.003](https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.12.003), p. 77–88, ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753817301122>. 16, 17, 29



- BONFANTI, A., S. SYNGELLAKIS et A. BHASKAR. 2018, «Elastoplastic response and recoil of lattice structures under hyperbolic hardening», *Journal of Mechanical Science and Technology*, vol. 32, n° 4, p. 1667–1675. 16
- BOUAZIZ, O., Y. BRÉCHET et J. D. EMBURY. 2008, «Heterogeneous and Architected Materials : A Possible Strategy for Design of Structural Materials», *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, n° 1-2, doi :10.1002/adem.200700289, p. 24–36, ISSN 1527-2648. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adem.200700289>. 11
- BRECHET, Y. et J. D. EMBURY. 2013, «Architected materials : Expanding materials space», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, doi :10.1016/j.scriptamat.2012.07.038, p. 1–3, ISSN 1359-6462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135964621200499X>. 11
- BUEHLER, W. J. et R. C. WILEY. 1965, «Nickel-base alloys», URL <https://patents.google.com/patent/US3174851A/en>, uS Patent 3,174,851. 23
- BUTLER, J. 1962, «Lüders front propagation in low carbon steels», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 10, n° 4, doi :https://doi.org/10.1016/0022-5096(62)90003-0, p. 313–318, ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509662900030>. 27, 28
- CALLADINE, C. R. 1978, «Buckminster Fuller’s “Tensegrity” structures and Clerk Maxwell’s rules for the construction of stiff frames», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 14, n° 2, doi :10.1016/0020-7683(78)90052-5, p. 161–172, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020768378900525>. 12
- COMBESCURE, C. et R. S. ELLIOTT. 2017, «Hierarchical honeycomb material design and optimization : Beyond linearized behavior», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 115-116, doi :https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.03.011, p. 161–169, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317301166>. 29
- CONWAY, K. M. et G. J. PATAKY. 2018, «Effective area method for calculating global properties of cellular materials», *Materials Today Communications*, vol. 17, doi :https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2018.09.003, p. 144 – 152, ISSN 2352-4928. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352492818303003>. 19, 20
- COTTRELL, A. H. et B. A. BILBY. 1949, «Dislocation theory of yielding and strain ageing of iron», *Proceedings of the Physical Society. Section A*, vol. 62, n° 1, p. 49. 21
- DESHPANDE, V. S., M. F. ASHBY et N. A. FLECK. 2001, «Foam topology : bending versus stretching dominated architectures», *Acta Materialia*, vol. 49, n° 6, doi :

- 10.1016/S1359-6454(00)00379-7, p. 1035–1040, ISSN 1359-6454. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645400003797>. 13, 15
- DRUGAN, W. et J. WILLIS. 1996, «A micromechanics-based nonlocal constitutive equation and estimates of representative volume element size for elastic composites», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 4, p. 497–524. 18
- EVESQUE, P. 2005, «Fluctuations, correlation and representative elementary volume (rev) in granular materials», . 18
- FLECK, N. A., V. S. DESHPANDE et M. F. ASHBY. 2010, «Micro-architected materials : past, present and future», *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 466, n° 2121, doi :10.1098/rspa.2010.0215, p. 2495–2516. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.2010.0215>. 12, 13
- GIBSON, L. J. et M. F. ASHBY. 1997, *Cellular Solids : Structure and Properties*, 2<sup>e</sup> éd., Cambridge Solid State Science Series, Cambridge University Press, Cambridge, ISBN 978-0-521-49911-8, doi:10.1017/CBO9781139878326. URL <https://www.cambridge.org/core/books/cellular-solids/BC25789552BAA8E3CAD5E1D105612AB5>. 13, 15
- GRUMBACH, M. 1993, «Vieillissement des aciers», *Techniques de l'ingénieur*. 22
- GRUMMON, D. S., J. A. SHAW et J. FOLTZ. 2006, «Fabrication of cellular shape memory alloy materials by reactive eutectic brazing using niobium», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 438-440, doi :<https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.03.113>, p. 1113–1118, ISSN 0921-5093. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092150930600894X>, proceedings of the International Conference on Martensitic Transformations. 30
- GUO, X. E. et L. J. GIBSON. 1999, «Behavior of intact and damaged honeycombs : a finite element study», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 41, n° 1, doi :10.1016/S0020-7403(98)00037-X, p. 85–105, ISSN 0020-7403. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002074039800037X>. 29
- GUOMING, H., W. HUI, Z. YOULIN et B. WUJUN. 2006, «A large deformation model for the elastic moduli of two-dimensional cellular materials», *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, vol. 21, n° 2, p. 154. 13
- HAHN, G. 1962, «A model for yielding with special reference to the yield-point phenomena of iron and related bcc metals», *Acta Metallurgica*, vol. 10, n° 8, doi :[https://doi.org/10.1016/0001-6160\(62\)90041-X](https://doi.org/10.1016/0001-6160(62)90041-X), p. 727–738, ISSN 0001-6160. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/000161606290041X>. 26
- HALL, E. . 1970, «Yield point phenomena in metals and alloys», . 27



- HALL, E., R. CARTER et G. VITULLO. 1982, «Luders band fronts in mild steel», , p. 393–399. 27
- HALLAI, J. F. et S. KYRIAKIDES. 2013, «Underlying material response for Lüders-like instabilities», *International Journal of Plasticity*, vol. 47, doi :10.1016/j.ijplas.2012.12.002, p. 1–12, ISSN 0749-6419. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641912001854>. 26, 28
- HASHIN, Z. 1983, «Analysis of composite materials—a survey», . 18
- HASSAN, M., F. SCARPA, M. RUZZENE et N. MOHAMMED. 2008, «Smart shape memory alloy chiral honeycomb», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 481-482, doi :<https://doi.org/10.1016/j.msea.2006.10.219>, p. 654–657, ISSN 0921-5093. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509307011987>, proceedings of the 7th European Symposium on Martensitic Transformations, ESOMAT 2006. 30
- HILL, R. 1963, «Elastic properties of reinforced solids : some theoretical principles», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, n° 5, p. 357–372. 18
- JIANG, M., I. JASIUK et M. OSTOJA-STARZEWSKI. 2002, «Apparent elastic and elastoplastic behavior of periodic composites», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n° 1, p. 199–212. 18
- JOHNSTON, W. G. 1962, «Yield points and delay times in single crystals», *Journal of Applied Physics*, vol. 33, n° 9, doi :10.1063/1.1702538, p. 2716–2730. 26
- KAZINAKIS, K., S. KYRIAKIDES, D. JIANG, N. J. BECHLE et C. M. LANDIS. 2021, «Buckling and collapse of pseudoelastic NiTi tubes under bending», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 221, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2019.12.017>, p. 2–17, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768319305244>. 30
- KLINTWORTH, J. et W. STRONGE. 1988, «Elasto-plastic yield limits and deformation laws for transversely crushed honeycombs», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 30, n° 3, doi :[https://doi.org/10.1016/0020-7403\(88\)90060-4](https://doi.org/10.1016/0020-7403(88)90060-4), p. 273–292, ISSN 0020-7403. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0020740388900604>. 15
- LOUCHE, H. et A. CHRYSOCHOOS. 2001, «Thermal and dissipative effects accompanying lüders band propagation», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 307, n° 1-2, p. 15–22. 29
- LÜDERS, W. 1860, «Über die Ausserung der Elasticität an stahlartigen eisenstaben und stahlstaben, und über eine beim biegen solcher stäbe beobachtete Molecularbewegung», *Dingler's Polytechnisches Journal*. 21

- MACHADO, G., H. LOUCHE, T. ALONSO et D. FAVIER. 2015, «Superelastic cellular niti tube-based materials : Fabrication, experiments and modeling», *Materials & Design (1980-2015)*, vol. 65, p. 212–220. 30
- MAHMUD, A. S. 2009, *Thermomechanical treatment of Ni-Ti shape memory alloy*, thèse de doctorat, University of Western Australia. 24
- MANGIPUDI, K. R., S. W. VAN BUUREN et P. R. ONCK. 2010, «The microstructural origin of strain hardening in two-dimensional open-cell metal foams», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 47, n° 16, doi :10.1016/j.ijsolstr.2010.04.009, p. 2081–2096, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768310001393>. 16
- MASSON, A. P. 1841, «Sur l'élasticité des corps solides», *Annales de Chimie et de Physique (troisième série)*. 21
- MAXWELL, F. J. C. 1864, «On the calculation of the equilibrium and stiffness of frames», *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, vol. 27, n° 182, doi :10.1080/14786446408643668, p. 294–299, ISSN 1941-5982. URL <https://doi.org/10.1080/14786446408643668>, publisher : Taylor & Francis \_eprint : <https://doi.org/10.1080/14786446408643668>. 12
- MEHRABI, R. et F. S. PARIZI. 2018, «Investigation of mechanical behavior of niti stent under different loadings», *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, vol. 18, n° 06, p. 1850 029. 31, 32
- MENGES, G. et F. KNIPSCHILD. 1975, «Estimation of mechanical properties for rigid polyurethane foams», *Polymer Engineering & Science*, vol. 15, n° 8, p. 623–627. 15
- OSTOJA-STARZEWSKI, M. 2001, «Microstructural Randomness Versus Representative Volume Element in Thermomechanics », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 69, n° 1, doi :10.1115/1.1410366, p. 25–35, ISSN 0021-8936. URL <https://doi.org/10.1115/1.1410366>. 18
- PIOBERT, G. 1842, *Mémorial de l'Artillerie*, vol. 5, chap. Expérience sur la pénétration des projectiles dans le fer forgé, Bachelier, p. 502–509. 21
- RACHINGER, W. A. 1958, «A "super-elastic" single crystal calibration bar», *British Journal of Applied Physics*, vol. 9, n° 6, doi :10.1088/0508-3443/9/6/308, p. 250–252. URL <https://doi.org/10.1088/0508-3443/9/6/308>. 23
- RESTREPO, D., N. D. MANKAME et P. D. ZAVATTIERI. 2015, «Phase transforming cellular materials», *Extreme Mechanics Letters*, vol. 4, doi :<https://doi.org/10.1016/j.eml.2015.08.001>, p. 52–60, ISSN 2352-4316. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352431615000929>. 29, 30

- SHIOYA, T. et J. SHIOIRI. 1976, «Elastic-plastic analysis of the yield process in mild steel», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 24, n° 4, doi :[https://doi.org/10.1016/0022-5096\(76\)90002-8](https://doi.org/10.1016/0022-5096(76)90002-8), p. 187–204, ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509676900028>. 26
- SILVA, M. J. et L. J. GIBSON. 1997, «The effects of non-periodic microstructure and defects on the compressive strength of two-dimensional cellular solids», *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 39, n° 5, doi :[10.1016/S0020-7403\(96\)00065-3](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(96)00065-3), p. 549–563, ISSN 0020-7403. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020740396000653>. 29
- TANKASALA, H. C., V. S. DESHPANDE et N. A. FLECK. 2017, «Tensile response of elastoplastic lattices at finite strain», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 109, doi :[10.1016/j.jmps.2017.02.002](https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.02.002), p. 307–330, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616307967>. 17, 29
- TRUSOV, P. et I. KELLER. 1997, «The theory of constitutive relations : Part i», *Perm : Perm State Technical University*. 18
- VAN MIER, J. G. 1996, *Fracture processes of concrete*, vol. 12, CRC press. 18
- WANG, A. J. et D. L. MCDOWELL. 2005, «Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density», *International Journal of Plasticity*, vol. 21, n° 2, doi :[10.1016/j.ijplas.2003.12.002](https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.002), p. 285–320, ISSN 0749-6419. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641904000026>. 13, 14, 15
- WANG, P., J. SHIM et K. BERTOLDI. 2013, «Effects of geometric and material nonlinearities on tunable band gaps and low-frequency directionality of phononic crystals», *Phys. Rev. B*, vol. 88, doi :[10.1103/PhysRevB.88.014304](https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.014304), p. 014 304. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.014304>. 29
- WATTRISSE, B., A. CHRYSOCHOOS, J.-M. MURACCIOLE et M. NÉMOZ-GAILLARD. 2001, «Kinematic manifestations of localisation phenomena in steels by digital image correlation», *European Journal of Mechanics-A/Solids*, vol. 20, n° 2, p. 189–211. 28
- WEINERT, K. et V. PETZOLDT. 2004, «Machining of niti based shape memory alloys», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 378, n° 1, doi :<https://doi.org/10.1016/j.msea.2003.10.344>, p. 180–184, ISSN 0921-5093. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S092150930400005X>, european Symposium on Martensitic Transformation and Shape-Memory. 30
- YU, T. X. et W. JOHNSON. 1982, «Influence of axial force on the elastic-plastic bending and springback of a beam», *Journal of Mechanical Working Technology*, vol. 6, n° 1, doi :[10.1016/0378-3804\(82\)90016-X](https://doi.org/10.1016/0378-3804(82)90016-X), p. 5–21, ISSN 0378-3804. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/037838048290016X>. 15

# Chapitre 3

## INSTABILITÉS PLASTIQUES DE TYPE PIOBERT-LÜDERS

### Sommaire

---

<b>3.1 Introduction</b>	<b>40</b>
<b>3.2 Periodic media and material instabilities</b>	<b>42</b>
3.2.1 Lattice structure	42
3.2.2 Phenomenological simulation of Piobert-Lüders phenomenon	44
3.2.3 Numerical approach of the Piobert-Lüders phenomenon	45
<b>3.3 Propagation of material instabilities in infinite periodic media</b>	<b>46</b>
3.3.1 Periodic boundary value problem	46
3.3.2 Triangle lattice	49
3.3.3 Square lattice	50
3.3.4 Hexagonal lattice	53
<b>3.4 The role of the number of unit cells</b>	<b>54</b>
<b>3.5 Experimental analysis</b>	<b>61</b>
3.5.1 Digital Image Correlation	62
3.5.2 Experimental results	62
3.5.3 Finite element modeling of the experiments	68
<b>3.6 Discussion</b>	<b>70</b>
<b>3.7 Concluding remarks</b>	<b>72</b>
<b>3.8 Conclusion</b>	<b>74</b>
<b>3.9 Références</b>	<b>75</b>

---

Nous cherchons à explorer dans cette partie le comportement des instabilités matérielles de type Piobert-Lüders dans un milieu architecturé périodique. Ce travail a fait l'objet d'une publication dans la revue *International Journal of Structures and Solids* intitulées, *Propagating material instabilities in planar architected materials* en 2019.

Soumis à des sollicitations de traction, les aciers doux (faible taux de carbone) présentent une déformation inhomogène. Ce phénomène connu sous le nom de plasticité de Piobert-Lüders crée des bandes de localisation de la déformation qui se propagent dans la structure. Jusqu'à aujourd'hui, ce phénomène de déformation localisée n'a été étudié, expérimentalement et numériquement, que pour des géométries simples comme des plaques, des tubes et des éprouvettes de rupture normalisées. Ce chapitre s'intéresse à des structures architecturées, plus spécifiquement aux structures treillis qui peuvent être considérés comme la répétition d'une cellule unitaire constituée de barres connectées distribuées périodiquement dans l'espace. Cette classe de matériaux avancés tire de leur architecture interne de nouvelles propriétés mécaniques.

Nous étudions l'effet de l'architecture sur le comportement global de la structure. Plus particulièrement, comment les bandes de transformation interagissent avec le treillis et s'il est possible de contrôler l'initiation et la propagation de ces instabilités par l'architecture. Un modèle élasto-plastique de matériau est utilisé afin de modéliser l'initiation et la propagation des instabilités de Piobert-Lüders dans un matériau architecturé. Le modèle prend en compte l'hypothèse de grandes déformations associée aux conditions aux limites périodiques pour représenter le milieu périodique infini. L'initiation et la propagation des bandes de transformation dépendent de la géométrie de la cellule élémentaire et de la direction de chargement. Plusieurs comportements des bandes de transformation seront identifiés dans les milieux architecturés en fonction de leur géométrie. Les instabilités matérielles modifient le comportement mécanique des structures autant qu'elles peuvent être contrôlées par celles-ci. Ces résultats numériques seront comparés à des essais expérimentaux réalisés sur des éprouvettes architecturées découpées au laser dans des plaques d'acier ARMCO.

### 3.1 Introduction

Architected materials, in the sense given by [ASHBY \[2013\]](#); [ASHBY et BRÉCHET \[2003\]](#); [BOUAZIZ et collab. \[2008\]](#); [BRÉCHET \[2013\]](#); [BRÉCHET et EMBURY \[2013\]](#), are obtained from a design process aiming at fulfilling a specific set of requirements through a given functionality, behavior, or performance, induced via a particular morphological arrangement between multiple material phases. Among architected materials, lattices are a specific kind of cellular materials, i.e. a combination of material and space. Lattice structures are composed of a connected network of struts, that may be organized periodically in space. They are generally used in cases where there is a need for either high specific stiffness, or high specific strength, but are also the basis of mechanical metamaterials [ASHBY \[2006\]](#); [COMBESCURE et ELLIOTT \[2017\]](#); [CÔTÉ et collab. \[2006\]](#); [DELL'ISOLA et collab. \[2018\]](#); [LATTURE et collab. \[2018\]](#); [NASSAR et collab. \[2016\]](#); [ONAL et collab. \[2018\]](#); [PONCELET et collab. \[2018\]](#); [ROSI et AUFRAY \[2019\]](#); [ROSI et collab. \[2018\]](#); [TURCO et collab. \[2018\]](#); [ZOK et collab. \[2016\]](#). Modeling the mechanical response of architected materials, especially

lattice structures, is of prime interest for enabling their use in industrial applications. From an analytical viewpoint, models are available for the description of the elastic behavior of cellular and lattice materials based on a strength of materials approach. Beyond the classical elastic behavior of cellular materials, [GIBSON et ASHBY \[1999\]](#) proposed a description based on geometrical and material parameters for the nonlinear behavior of lattices, *e.g.* plastic buckling, toughness. Following the seminal work by Gibson and Ashby, 2D topologies were widely studied using both analytical and numerical models [ALONSO et FLECK \[2007\]](#); [FLECK et QIU \[2007\]](#); [WANG et McDOWELL \[2004, 2005\]](#) in order to improve the description of elastoplasticity and failure of such materials. By taking into account the deflection of inclined struts in lattices, *i.e.* extending the analytical model to large deformations, [GUOMING et collab. \[2006\]](#) improved the description of elastic moduli in 2D cellular materials given in [GIBSON et ASHBY \[1999\]](#).

In the same way, [TANKASALA et collab. \[2017\]](#) investigated the tensile response of lattices at finite strains. A description of various regimes from buckling to fracture in lattices under tension was given. Using an elastic perfectly-plastic material model, [BONFANTI et BHASKAR \[2018\]](#); [BONFANTI et collab. \[2016\]](#) focused on the nonlinear plastic response of cell walls in 2D lattices under combined loads. A study of geometrical instabilities through computational modeling completed by experimental testing in 2D cellular materials is proposed by [NIKNAM et AKBARZADEH \[2018\]](#).

Most of the previous studies generally consider perfect elastoplastic models to study plasticity in lattices. Another type of instabilities is related to the microstructure for some materials, *e.g.* mild steel, aluminum alloy, etc. This is the so-called Piobert-Lüders [LÜDERS \[1860\]](#); [PIOBERT \[1842\]](#) phenomenon, which occurs during the initiation of plasticity and causes localized plastic deformation as bands that propagate along the specimen. The question arises of the interaction of such static strain ageing instabilities with the architecture of the lattice. To the knowledge of the authors, this problem has never addressed for lattice structures. For example, [KYRIAKIDES et collab. \[2008\]](#) studied, numerically and experimentally, the interaction between Lüders banding and buckling of steel bars. Another example in which the architecture can alter the modes of buckling of a structure has been presented by [HE et collab. \[2018\]](#) exploring various geometries of vertices in a square lattice. [HALLAI et KYRIAKIDES \[2011\]](#) emphasized the role of the propagation of Piobert-Lüders bands in the emergence of a propagating non-uniform curvature during the bending of steel tubes.

The localized nature of the Piobert-Lüders bands can lead to premature collapse if not properly accounted in the design. On the other hand, one could take advantage of these instabilities for instance by controlling them through the architecture.

In this article, we are interested in the interaction between the Piobert-Lüders phenomenon and 2D-lattices with different topologies covering both bending- and stretch-dominated behaviors. The objective of the present paper is to simulate the initiation and propagation of Piobert-Lüders bands within planar architected media and to study how



such material instabilities affect the mechanical response of architected materials. This work aims at a classification of architectures enabling or impeding the propagation of localized deformation modes induced by the Piobert–Lüders bands occurring in the struts.

The paper is organized as follows : firstly, the finite deformation elastoplastic model accounting for Piobert-Lüders is presented. In the same section, three archetypal geometries are introduced for the subsequent simulations and experiments. The initial boundary value problem including periodic boundary conditions is formulated and finite element simulation results are reported in Section 3.3. The macroscopic behavior of each lattice is analyzed in the light of accumulated plastic strain maps. Section 3.4 deals with the issue of the proper volume element size to be considered in the presence of instabilities while considering periodic boundary conditions. An experimental validation of the predicted instability propagation properties is proposed in Section 3.5 for the considered architectures. For that purpose finite size samples with a limited number of cells are tested to investigate the localization phenomena at the local and global scales. The experimental results are compared to finite element simulations on the whole samples. A thorough discussion of the results is presented in Section 3.6 and concluding remarks are provided in Section 3.7.

The following notations are used throughout : first, second and fourth order tensors are respectively denoted by  $\underline{a}$ ,  $\underline{b}$  and  $\underline{\underline{C}}$ . The double contraction is written  $\underline{a} : \underline{a} = a_{ij}a_{ij}$ .

## 3.2 Periodic media and material instabilities

### 3.2.1 Lattice structure

A lattice structure is characterized by as a tessellation of unit-cells periodically distributed in space. In the following, we are only interested in 2D lattices. Numerous studies focused on the behavior of these architectures and they are classically divided into two different groups depending on their main deformation mode : (i) bending-dominated or (ii) stretch-dominated, shown in Figure 3.1.

(i) Bending-dominated : in Figure 3.1, the first configuration (a) is a mechanism according to [DESHPANDE et collab. \[2001\]](#). When loaded, it can deform thanks to the rotation of pin-joints and induces bending in the struts caused by rigidity of the joints. It exhibits low stiffness and low strength.

(ii) Stretch-dominated : in Figure 3.1, the second configuration (b) is a structure as explained in the work of [DESHPANDE et collab. \[2001\]](#). When loaded, struts are either in tension or in compression thanks to the higher connectivity between joints. Joints are mostly not rotating and the deformation is stretch-dominated. Such structures usually exhibit higher stiffness and strength than bending-dominated lattices.

This study focuses on the in-plane finite strain tensile response of three representative topologies : triangle, square and hexagon as shown in Figure 3.2. These ideal struc-



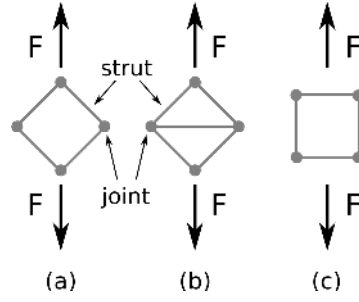


FIGURE 3.1 – (a) a mechanism; (b) a structure; (c) self-stressed state mechanism adapted from [DESHPANDE et collab. \[2001\]](#)

tures display a large variety of mechanical responses, which justifies the choice of those topologies.

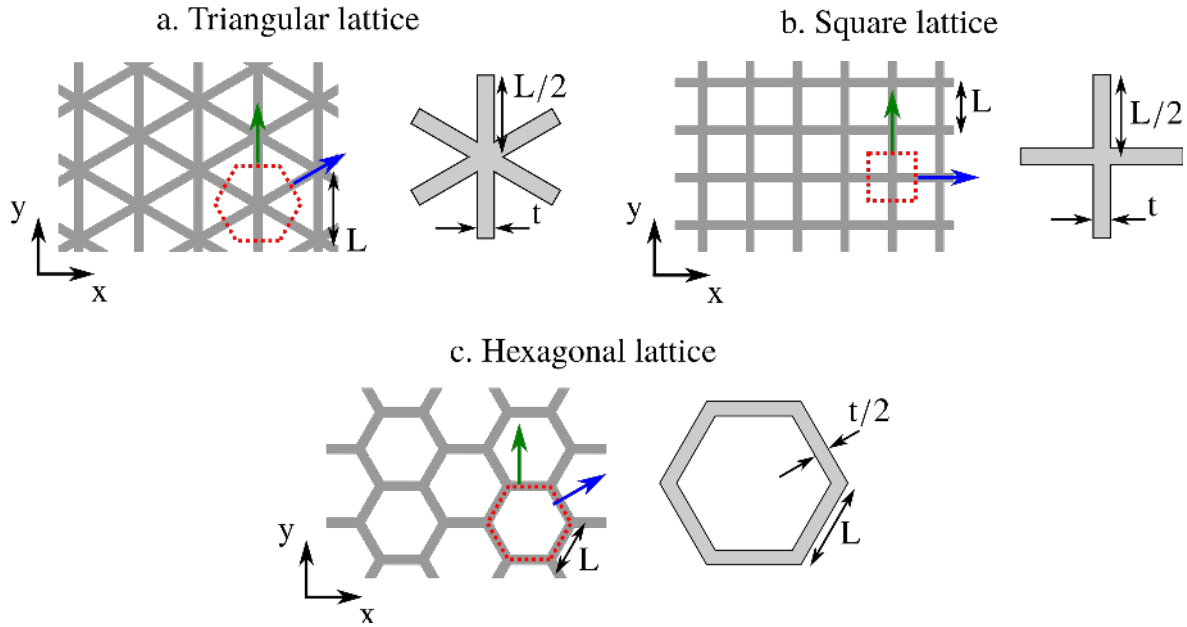


FIGURE 3.2 – Lattice topologies and their corresponding unit cells employed for the FE simulation with their periodic vectors. (a) triangle lattice, (b) diamond lattice and (c) hexagon lattice.

The triangle and the hexagon lattices are invariant by a  $60^\circ$  rotation, the square by a  $90^\circ$ . As explained in [AUFRAY et collab. \[2015\]](#); [TANKASALA et collab. \[2017\]](#), the triangle and the hexagon lattices are isotropic in-plane for linear elasticity, but anisotropic for non-linear behavior. The triangle lattice is stiff and belongs to the stretch-dominated structures while the hexagon lattice is bending-dominated and exhibits a more compliant behavior. On the contrary, the square lattice exhibits quadratic anisotropy in-plane for linear elasticity. It displays a stretch-dominated behavior if loaded along its struts and a bending-dominated behavior when struts are oriented by  $45^\circ$  with respect to the loading direction. Therefore, it is interesting to study which direction and which geometry promote the propagation of plastic strain bands. The three architectures will be loaded in all possible in-plane directions taking into account their symmetry. Each unit cell is defined by the length and thickness of its struts. For each lattice, the relative density is fixed to

30% and the length  $L$  of the struts to 1. The corresponding thickness of the struts of each lattice reported in table 3.1 for each geometry.

	Triangle	Diamond	Hexagon
Thickness	0.09	0.15	0.26

TABLEAU 3.1 – Thickness of struts for a 30% relative density and a length of 1.

### 3.2.2 Phenomenological simulation of Piobert-Lüders phenomenon

The Piobert-Lüders instability in low carbon steels characterizes the transition from the elastic to the plastic deformation regimes corresponding to the release of dislocations pinned by interstitial atoms. Macroscopically, it generally results in the emergence and subsequent propagation of plastic deformation bands.

An elastoplastic material model is used in this work in order to simulate the Piobert-Lüders band formation and propagation. The model accounts for large deformations as needed because of the high strain levels experienced locally by the different geometries studied in Section 3.3.

The finite deformation formulation chosen in the present work for isotropic nonlinear material behavior is based on a co-rotational transformation of the stress rate-strain rate problem making use of a local objective frame. This framework developed in [BESSON et collab. \[2009\]](#); [DOGUI et SIDOROFF \[1986\]](#); [LADEVÈZE \[1980\]](#) allows for the extension of constitutive laws from infinitesimal strains to large deformations without modification of the form of the plastic flow and hardening rules.  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$  and  $\underline{\underline{s}}$  are the invariant strain rate and stress measures defined by transport of the Eulerian strain rate  $\underline{\underline{D}}$  and the Cauchy stress  $\underline{\underline{T}}$  into the local objective frame  $\underline{\underline{E'}}$ . The evolution from  $\underline{\underline{E}}$  to  $\underline{\underline{E'}}$  is characterized by the rotation  $\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{x}}, t)$ . The velocity gradient  $\underline{\underline{L}}$  is defined as  $\underline{\underline{L}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$  where  $\underline{\underline{F}}$  is the usual deformation gradient.  $\underline{\underline{L}}$  is decomposed into its symmetric and skew parts,  $\underline{\underline{D}}$  and  $\underline{\underline{\Omega}}$ .

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{Q}} \\ \underline{\underline{Q}} \text{ such that } \dot{\underline{\underline{Q}}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{\Omega}} \end{cases} \quad (3.1)$$

The strain rate tensor  $\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}$  is split into elastic and plastic parts. The yield function is  $f(\underline{\underline{s}}, R)$ . The rate-independent elastoplasticity model for large deformation is finally written as :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{\epsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e + \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p \\ f(\underline{\underline{s}}, R) = J_2(\underline{\underline{s}}) - R(p) \\ \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{p} \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{s}}}, \dot{p} \geq 0 \\ \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{C}} : \dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^e \end{cases} \quad (3.2)$$

where  $R(p)$  is the yield stress taken as a function of the accumulated plastic strain  $p$ .

A von Mises criterion is chosen for  $f$  with  $J_2(\mathbf{s}) = \sqrt{\frac{3}{2} \mathbf{s}^{\text{dev}} : \mathbf{s}^{\text{dev}}}$ , the second invariant of the stress tensor and  $\mathbf{s}^{\text{dev}}$  is the deviatoric part of the stress tensor.

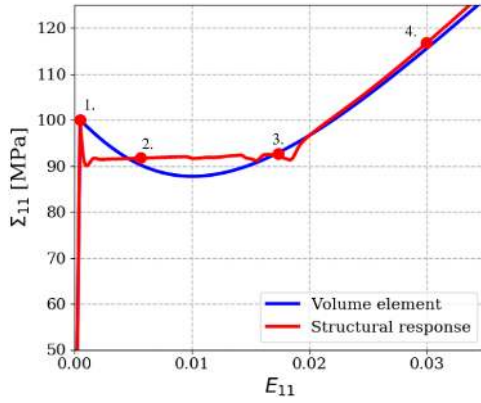


FIGURE 3.3 – Intrinsic constitutive law for Lüders phenomenon integrated on a single Gauss point (Volume element) compared to the overall response of a plate endowed with this material behavior. The accumulated plastic strain maps corresponding to the points (1,2,3,4) marked on the plate response curve are shown in Figure 3.4.

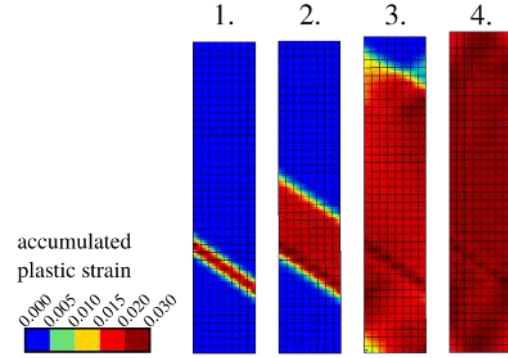


FIGURE 3.4 – Accumulated plastic strain maps on a sample in tension with propagation of a Lüders localization band.

### 3.2.3 Numerical approach of the Piobert-Lüders phenomenon

TSUKAHARA et IUNG [1998] introduced a local behavior modeling the Piobert-Lüders behavior by the finite element method. It consists in a description of the work-hardening material function as linear softening branch followed by a linear hardening branch. Later, BALLARIN et collab. [2009] smoothened this behavior hardening potentials evolving non linearly with  $p$ .

$$R(p) = R_0 + Q_1(1 - e^{-b_1 p}) + Q_2(1 - e^{-b_2 p}) + Q_3(1 - e^{-b_3 p}) \quad (3.3)$$

$R_0$ (MPa)	$Q_1$ (MPa)	$b_1$	$Q_2$ (MPa)	$b_2$	$Q_3$ (MPa)	$b_3$
100	400	10	-100	80	5	300

TABEAU 3.2 – Parameters for the phenomenological plasticity model

The elastic behavior is described by the Young modulus and the Poisson ratio, equal to 210 GPa and 0.3, respectively. Regarding the plastic behavior, a softening term is ( $Q_2; b_2$ )

added to a Voce strain hardening law described by the initial yield stress  $R_0$  and the parameters  $(Q_1; b_1)$  with  $Q_1 > 0$  and  $Q_2 < 0$ . Static strain aging is model by the negative potential  $Q_2$ . The third function  $(Q_3; b_3)$  is added to the initial modeled to smooth out the peak stress for better convergence during finite element simulation [MARAIS et collab. \[2012\]](#). The corresponding values of the parameters are given in Table 4.1. These parameters are chosen to replicate a 2% strain long stress plateau at 90 MPa and a stress peak at 100 MPa as shown in Figure 3.3. On the same figure, the softening branch of the function  $R(p)$  is visible in the constitutive response of a material point. It is well-known that such a softening branch is unstable and leads to the formation of a localization band right after the peak stress [MAZIÈRE et FOREST \[2015\]](#). This is illustrated by the finite element simulation of a plate in tension with the corresponding overall stress (force divided by the initial section) and applied overall strain curve in Figure 3.3. 3D-computation have been performed in order to minimize the constraints on the behavior of instabilities. The formation and propagation of Piobert-Lüders band in such a plate in tension is illustrated in Figure 3.4. This phenomenological approach is used to mimic the Piobert-Lüders effect in our simulations.

Macroscopically, it yields a stress plateau at a lower value than the peak, as shown in Figure 3.3. After the propagation of the band throughout the specimen, homogeneous hardening starts taking place.

### 3.3 Propagation of material instabilities in infinite periodic media

#### 3.3.1 Periodic boundary value problem

The investigated lattices are periodic in the plane. The homogenized behavior of the structure is found from the unit-cell with appropriate periodic boundary conditions. The reference configuration of the unit cell is called  $V_0$  whereas the current state at time  $t$  is  $V$ . The displacement field inside the unit cell is respectively called  $\underline{\mathbf{u}}$ . The macroscopic strain and stress tensors are defined as spatial averages over the unit cell :

$$\underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \text{Grad } \underline{\mathbf{u}} dV_0 \quad (3.4)$$

$$\underline{\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \underline{\mathbf{P}} dV_0 \quad (3.5)$$

The gradient operator Grad is computed with respect to Lagrange coordinates. Note that the conjugate of  $\underline{\mathbf{E}}$  in the work of internal forces is the Boussinesq stress tensor  $\underline{\mathbf{\Sigma}}$ , also called first Piola-Kirchhoff stress tensor.  $\underline{\mathbf{P}}$  is defined as the local Boussinesq stress tensor inside the unit cell.

The periodic boundary value problem over the unit cell aims at finding the local displacement field  $\underline{\mathbf{u}}$  as the sum of a macroscopic part and a periodic fluctuation :

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{E}} \cdot \underline{\mathbf{X}} + \underline{\mathbf{v}} \quad (3.6)$$

where  $\underline{\mathbf{E}}$  is the prescribed macroscopic strain tensor and  $\underline{\mathbf{X}}$  denote the Lagrange reference coordinates. Applying the macroscopic strain  $\underline{\mathbf{E}}$ , one computes the fluctuation vector in the unit cell. The uniform strain distribution  $\underline{\mathbf{E}}$  would be the strain of the medium if it were homogeneous and  $\underline{\mathbf{v}}$  represents an in-plane periodic fluctuation of the displacement due to local inhomogeneities of the material and in this present case to the architecture. Thus, the strain and stress fields over the infinite structure vary in a periodic manner around the mean values  $\underline{\mathbf{E}}$  and  $\underline{\mathbf{\Sigma}}$  with a periodicity equal to the unit cell size. The periodic boundary conditions mean that the fluctuation  $\underline{\mathbf{v}}$  takes the same value at homologous points on opposite sides of the cell, such that :

$$\forall(\underline{\mathbf{x}}^-; \underline{\mathbf{x}}^+) \in (\partial\Omega^-; \partial\Omega^+), \quad \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}^-) = \underline{\mathbf{v}}(\underline{\mathbf{x}}^+) \quad (3.7)$$

whereas the traction vector  $\underline{\mathbf{P}} \cdot \underline{\mathbf{n}}$  is anti-periodic :

$$\forall(\underline{\mathbf{x}}^-; \underline{\mathbf{x}}^+) \in (\partial\Omega^-; \partial\Omega^+), \quad \underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}^-) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}^-) = -\underline{\mathbf{P}}(\underline{\mathbf{x}}^+) \cdot \underline{\mathbf{n}}(\underline{\mathbf{x}}^+) \quad (3.8)$$

Our computational homogenization calculations will rely on the periodic finite element available in the Zset finite element package<sup>1</sup>, making it possible to prescribe mixed boundary conditions like in the tensile tests considered in the following. For that purpose, the macroscopic strain  $E_{11}$  is prescribed and all the macroscopic stress components  $\Sigma_{ij}$  are fixed to zero, except  $\Sigma_{11}$ .

A Newton algorithm is used to solve the global equilibrium equations based on the finite element method with a total Lagrangian formulation. An implicit Newton method is used to solve the system of local constitutive equations. Switching to an explicit Runge-Kutta scheme with automatic time-stepping is possible when the Newton scheme does not converge in the presence of strong instabilities. Full field finite element (FE) solutions are reported for the elastoplastic response of the three considered lattices.

For each cell, the steel volume fraction is 30%. Selected FE results are reported up to a macroscopic strain of 10% and the accumulated plastic strain (*epcum* variable) evolution is given for most relevant orientations.

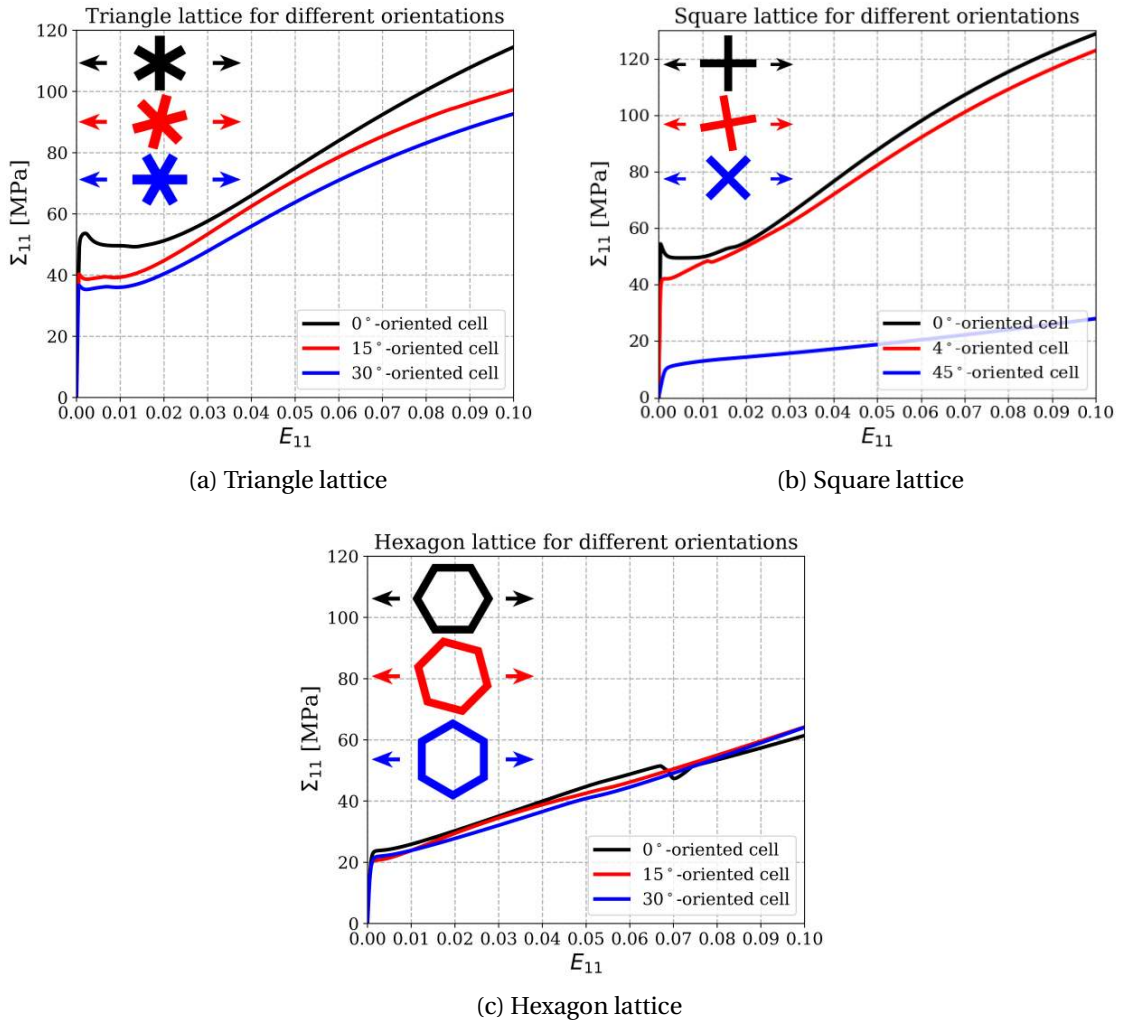


FIGURE 3.5 – Macroscopic stress-strain curve for studied lattices with Piobert-Lüders instability

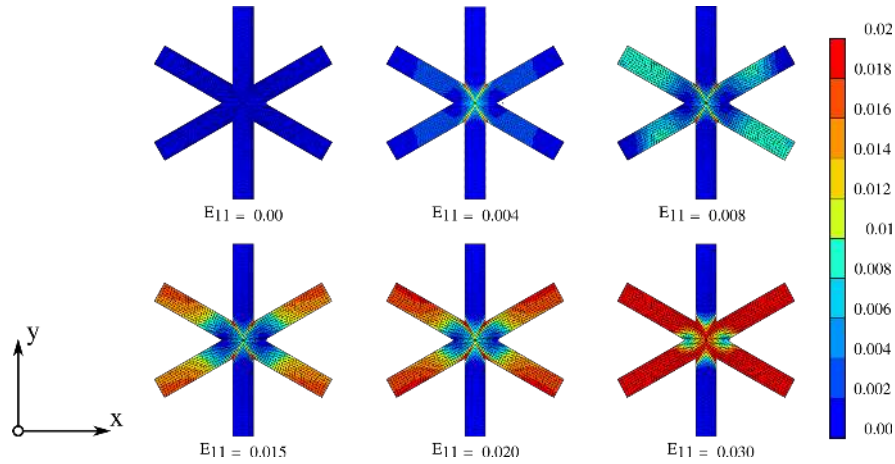


FIGURE 3.6 – Accumulated plastic strain maps in the triangle lattice 0°-oriented unit cell.

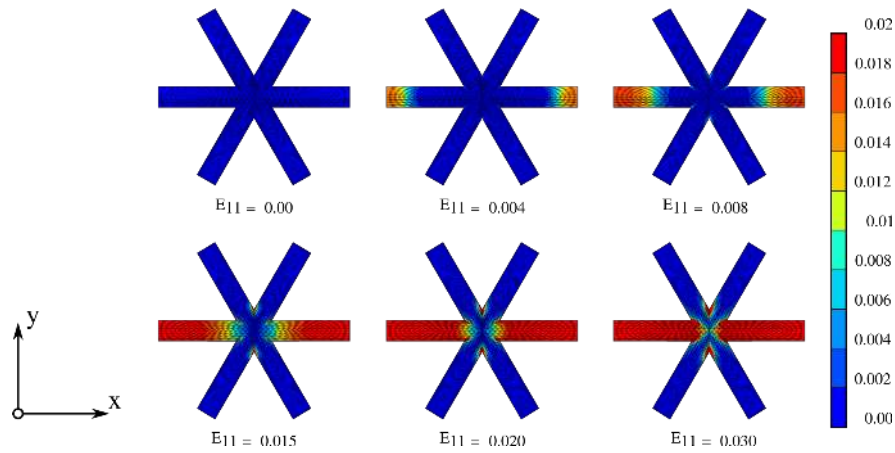


FIGURE 3.7 – Accumulated plastic strain maps in the triangle lattice 30°-oriented unit cell.

### 3.3.2 Triangle lattice

The macroscopic mechanical response of the triangle lattice has a global shape similar for all loading direction orientations, see Figure 3.5a. Stress levels differ depending on the orientation, from a plateau stress at 50 MPa for 0° to 35 MPa for 30°. The response exhibits an initial stiff and linear behavior corresponding to the elastic regime of the material. The stress reaches a first maximum value, a peak stress, when plastic strain localization starts. Then stress slowly decreases to reach a plateau, indicating that the propagation of plastic strain in the struts of the lattice has begun. Finally a hardening behavior takes place after the instability has finally crossed the whole structure. For the orientation 0°, the peak-plateau stress phenomenon is sharper. Besides, the triangle lattice is the only lattice to exhibit a difference of level stress for the plateau depending on the orientation of the lattice to the loading.

The difference of stress level and the local instability which occur for the three tensile tests can be explained through the analysis of the propagation of Piobert-Lüders instabilities through the triangle lattice. Figures 3.6 and 3.7 represent the accumulated plastic

1. <http://www.zset-software.com/>



strain for the triangle cell for two relevant orientations,  $0^\circ$  and  $30^\circ$ . Plastic localization initiates in the middle of the struts of the triangle. This nucleation depends on the orientation. For orientation  $0^\circ$ , plastic deformation starts in the two most loaded struts at the same time. For the other configurations, plastic deformation begins, first, only in the best oriented strut with respect to the loading direction of the cell. Then, as the macroscopic loading increases, the plastic instability propagates along the struts symmetrically, see Figure 3.7.

Because of the high-connectivity of the cell, the struts are mainly loaded in tension thus promoting the propagation of Piobert-Lüders bands. Whatever the loading direction, there are always struts subjected to tension. This results in a macroscopic behavior which exhibits a peak-plateau stress as the instability propagates throughout the lattice. The isotropic behavior of the triangle lattice is verified in the elastic domain while it is lost when plastic instabilities appear. The higher level of stress for the  $0^\circ$ -oriented triangle cell is due to the quantity of material that undergoes plasticity in the lattice. For this orientation in the end, 4 struts are plastic (see Figure 3.6) while for the  $30^\circ$ -oriented cell there are only 2 (see Figure 3.7).

### 3.3.3 Square lattice

Square lattice behaves very differently from the triangle lattice and both its linear and non-linear behaviors are strongly anisotropic. From the macroscopic stress-strain curves of the square lattice in Figure 3.5b, two extreme mechanical responses can be identified. The first one, corresponding to the orientation  $0^\circ$ , is close to the localization-propagation behavior with a peak and a plateau stress. In contrast, the second one for orientation  $45^\circ$ , relies on the elastic then plastic bending of the struts and no peak nor plateau stresses are observed.

Therefore, the analysis of the square lattice is divided into three parts : stretching-dominated regime when struts are less than  $5^\circ$  misoriented with respect to the loading direction and a bending-dominated regime from  $5^\circ$  to  $45^\circ$ .

#### Stretching-dominated regime for $0^\circ$

Cell walls are exactly aligned with the loading direction. No mechanism is active in the lattice, neither bending of the walls nor plastic hinges. Conditions are the closest to a tension test on a single plate made of material undergoing Piobert-Lüders instability in Figure 3.3 and 3.4. Three zones are identified from the macroscopic stress-strain curve in Figure 3.5b :

*Zone 1* : Stress peak. The initial response of the lattice is linear until the yield stress

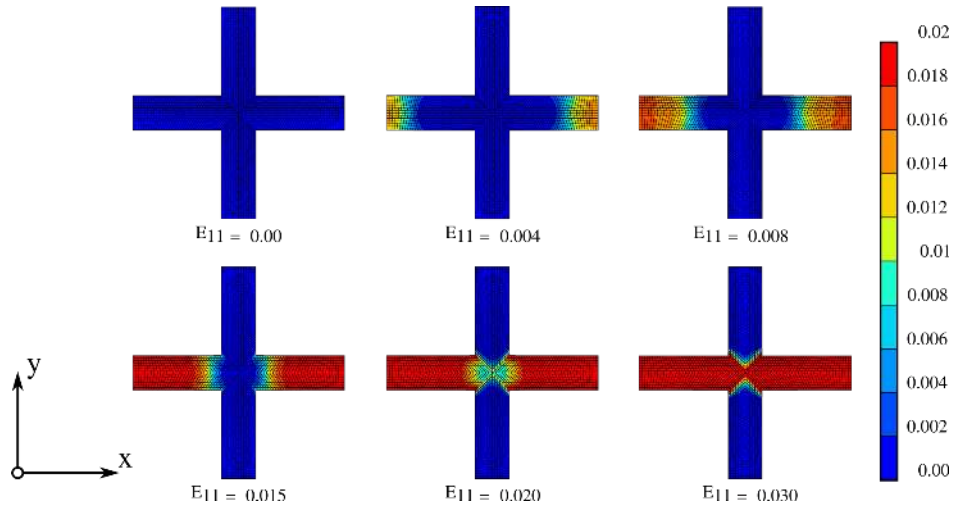


FIGURE 3.8 – Accumulated plastic strain maps in the square lattice  $0^\circ$ -oriented unit cell.

is overcome while plastic strain localizes in the thickness of the strut. Unlike the plate in tension, no defect is needed to initiate the localization. Stress concentrations in the lattice are enough to trigger the localization in the loaded struts.

*Zone 2* : Stress plateau. The peak stress at 55 MPa is followed by a plateau at a stress level of 50 MPa corresponding to the plateau stress value for the triangle lattice at  $0^\circ$ . The plateau has a length of 0.02 macroscopic strain.

*Zone 3* : Hardening behavior of the lattice. After the Lüders instability has propagated through the horizontal struts of the square lattice, the lattice undergoes a hardening behavior following the constitutive model.

Figure 3.8 represents the accumulated plastic strain for the square cell at  $0^\circ$ . Localized plasticity initiates (zone 1) in the middle of the strut in tension into a single band. Then, it propagates along this strut (zone 2) until the whole strut is plastic and it reaches the central joint (zone 3). The localization does not take the shape of an inclined band as in the case of a sample in tension. The transverse struts of the lattice connected with periodic boundary conditions prevent the strut with plastic localization to accommodate the macroscopic deformation. None of the two inclined possible bands is favored so they both coexist.

### Stretching-bending regime for $4^\circ$

The unit cell is now slightly rotated from the tensile loading direction. The strut oriented at  $4^\circ$  is loaded in both tension and bending. The macroscopic behavior of the  $4^\circ$ -configuration in Figure 3.5b is compared to the 3 steps of  $0^\circ$ -configuration.

*Zone 1* : Elastic bending of the struts. The FE analysis captures the elastic bending of each strut. The effective Young modulus depends on the orientation of the strut with

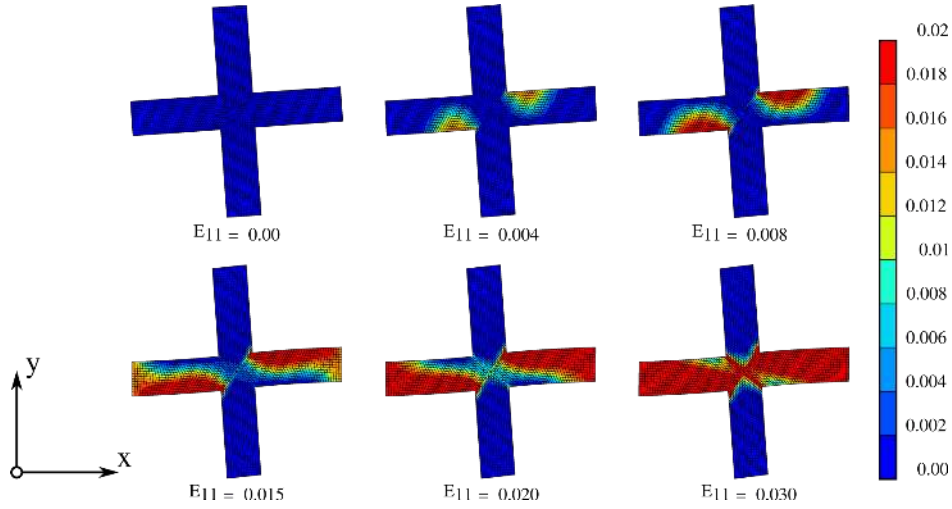


FIGURE 3.9 – Accumulated plastic strain maps in the square lattice  $4^\circ$ -oriented unit cell.

respect to the loading direction, which shows the anisotropy of the square lattice in elastic regime. An analytical expression is given by [GIBSON et ASHBY \[1999\]](#). Compared to the  $0^\circ$ -oriented cell, there is no peak in this case. Because the strut is bent, stress along the strut depends on the lever arm from the end of the strut. This is unlike tension where the stress is uniform until plasticity occurs.

*Zone 2* : Plastic bending of the struts. Plasticity propagates in the struts of the cell and elastic bending becomes plastic bending. As a result of the variable stress, the stress plateau is replaced by an increasing stress until 0.12 macroscopic strain.

*Zone 3* : Hardening behavior of the lattice. As for the  $0^\circ$ -oriented lattice, the lattice undergoes a hardening behavior after a local instability marking the end of the propagation phase.

The accumulated plastic strain maps of the square cell oriented at  $4^\circ$  is represented in Figure 3.9. While struts undergo elastic bending (zone 1), plasticity starts early in the corners at the joints where stress concentration is maximum on the side in tension. From there, localized plasticity propagates towards the border in tension of the bent struts. Plastic instability propagates along the half strut under tension (zone 2) until it is fully plastic. When the band reaches one end of the strut, it continues in the second half which has not yet fully reached plasticity (zone 3).

### **Bending-dominated regime for $45^\circ$**

In the case of the square cell oriented at  $45^\circ$ , the macroscopic behavior of the lattice is two-fold (see Figure 3.5b). First, the response is linear with an effective Young modulus lower than for other orientations. Then, the lattice enters the elastoplastic regime and hardening takes place.

The accumulated plastic strain maps of the square cell oriented at  $45^\circ$  are represented

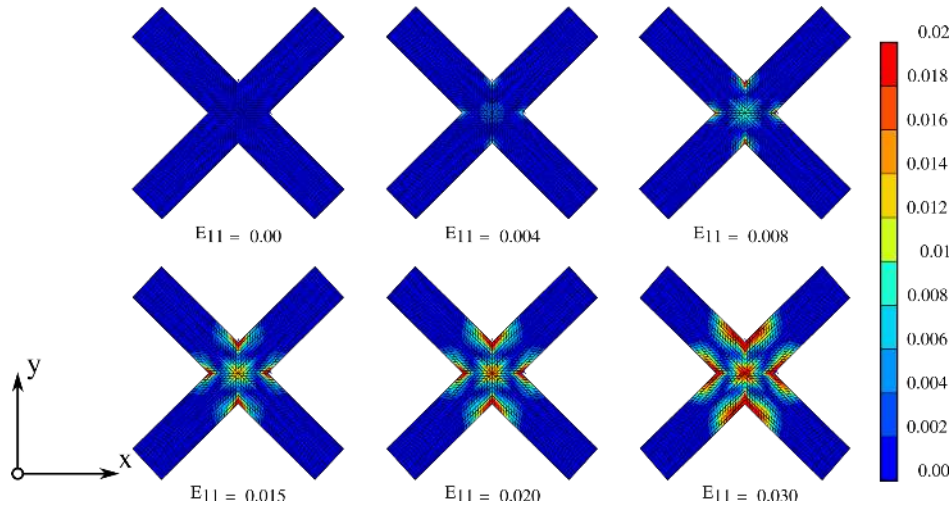


FIGURE 3.10 – Accumulated plastic strain maps of the square lattice 45°-oriented unit cell.

in Figure 3.10. While struts undergo elastic bending, plasticity initiates early in the corners at the joints where stress concentration is maximum. From there, localized plastic strain spreads but is still confined in the joints. Plasticity never propagates through the struts. Neither a peak nor a plateau can be seen on the macroscopic stress-strain curve. As the Young modulus increases when the struts tend to align with the loading direction, the plastic behavior of the square lattice evolves gradually from the 45°-oriented cell to the 5°-oriented one.

The orientation of the square lattice modifies its mechanical behavior from stretching-dominated to bending-dominated but it also inhibits the propagation of Piobert-Lüders instabilities. In stretch-dominated configuration, the square cell exhibits a propagative behavior for plastic instabilities following the peak-plateau stress response observed for the triangle lattice. On the contrary, the bending-dominated configurations exhibit a hardening behavior without propagation of plastic instabilities.

### 3.3.4 Hexagonal lattice

The in-plane isotropic behavior of the hexagon cell in elasticity is verified while the behavior with plastic instabilities becomes anisotropic. Because of the low connectivity of the hexagon cell, this lattice acts like a mechanism, *i.e.* it is bending-dominated. After an isotropic linear response of the material, deformation becomes plastic. The global behavior of the hexagon lattice depends very little on the orientation. The macroscopic stress-strain curves for 3 relevant orientations in Figure 3.5c differ only slightly in the plastic domain.

The behavior is characteristic of bending-dominated lattices. For the 0°-oriented cell, a stress drop is observed at 0.07 macroscopic strain. It is caused by Lüders localization in the single stretched strut. No stress plateau is observed.

It is found that no propagation of the Piobert-Lüders instability can be observed in

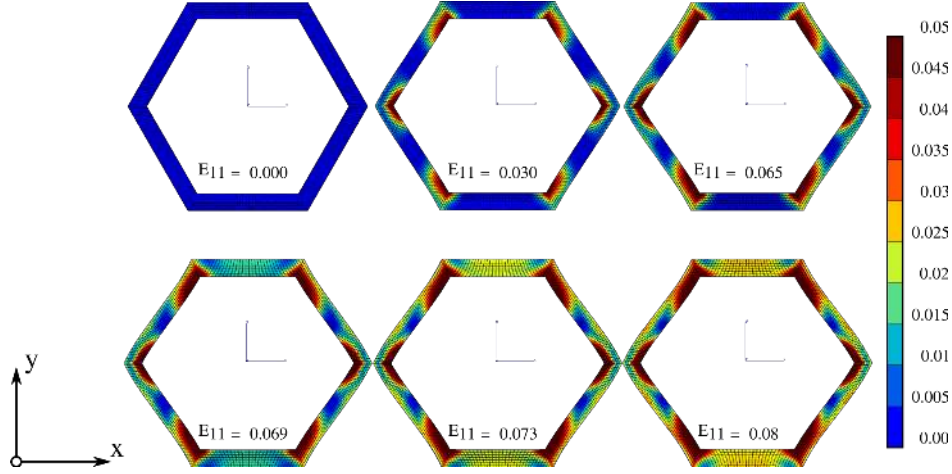


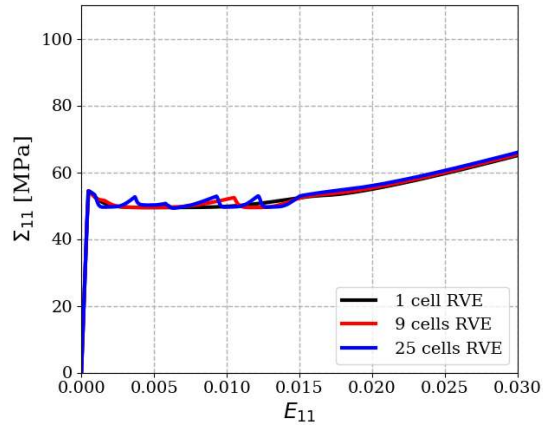
FIGURE 3.11 – Accumulated plastic strain maps of the hexagon lattice  $0^\circ$ -oriented unit cell.

the hexagon lattice whatever the direction of loading, except for the  $0^\circ$ -orientation (see Figure 3.11). For this orientation, some struts are aligned with the tensile direction and a Piobert-Lüders band can form. This occurs at the same overall stress level of 55 MPa as for the square and triangle lattices. However the propagation remains limited, see Figure 3.11, so that no extended plateau is observed on the overall curve. Due to low connectivity, the inner mechanism, inducing the bending-dominated behavior of the hexagon, does not activate the propagation of Piobert-Lüders instabilities regardless of the orientation.

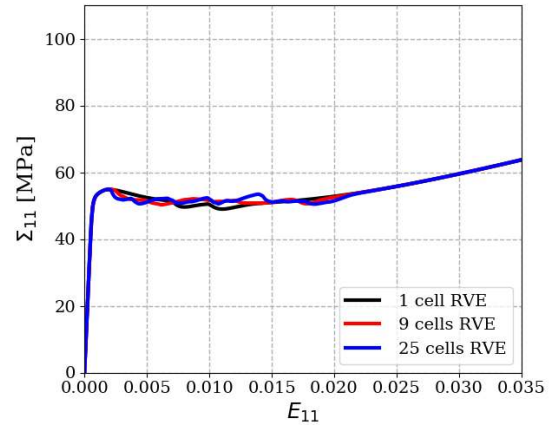
A two-fold behavior, propagative or not propagative, has been identified for 2D periodic lattices characterized by their either stretch- or bending-dominated mechanical behavior. Moreover, for each lattice discrepancies appear in the plastic behavior instabilities due to different orientations. This validates that plastic instabilities can be modified using both architecture and orientation. The propagative behavior of Piobert-Lüders bands can be altered depending on the 2D lattice structure and loading direction. The propagation of Piobert-Lüders bands along the struts of the lattice is found to take place mainly in stretch-dominated lattices provided the struts are properly oriented with respect to the loading.

### 3.4 The role of the number of unit cells

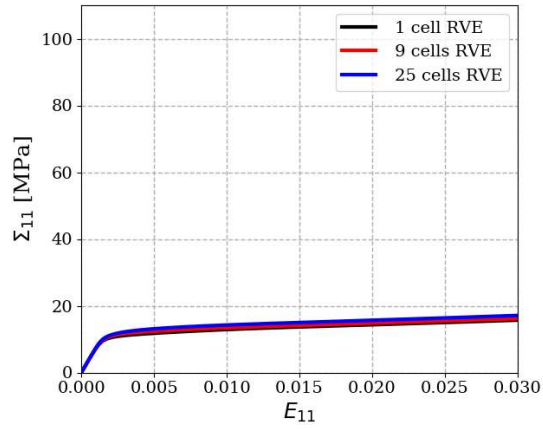
It is well-known that the analysis of the stability of periodic structures cannot be limited to the study of a single unit cell. This is due to the fact that instability modes can emerge, exhibiting a wavelength larger than the unit cell size (SCHRAAD et TRIANTAFYLIDIS [1997]; TRIANTAFYLIDIS et BARDENHAGEN [1996]). It is necessary to examine a larger volume element (VE) composed of more than one primitive unit cell. It means that the periodic boundary conditions (PBC) are no more imposed on a single unit cell but on the



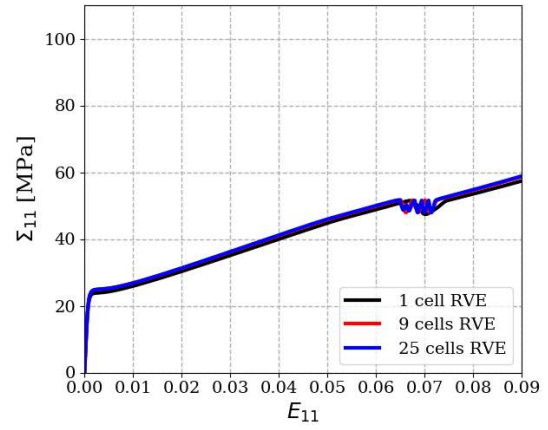
(a) Square lattice oriented at  $0^\circ$



(b) Triangular lattice oriented at  $0^\circ$



(c) Square lattice oriented at  $45^\circ$



(d) Hexagonal lattice oriented at  $0^\circ$

FIGURE 3.12 – Macroscopic behavior of RVE with increasing number of cells

boundary of the larger volume element. Simulations of the previous section were carried out again for VE sizes of  $3 \times 3$  and  $5 \times 5$  cells, named respectively 9-cell RVE and 25-cell RVE in the following. In Figure 3.12 the macroscopic curves are plotted for the square lattice with the orientations  $0^\circ$  (a) and  $45^\circ$  (c), for the  $0^\circ$ -oriented triangle (b) and hexagon (d) lattices.

For bending-dominated lattices as well as the  $45^\circ$ -oriented square and hexagon, no discrepancy is observed between the one-cell and multiple cell VE responses (see Figure 3.13 and 3.14). In the case of propagation of instabilities during the loading of the lattice (stretched-dominated or square  $0^\circ$ -oriented), differences can be observed only when instabilities cross the whole lattice (Figures 3.15 and 3.16). During the phase of instability propagation, localized plasticity occurs in the struts in tension. Then two possible patterns of localization exist : as in Figure 3.16 at  $E_{11} = 0.003$  where the five struts of a single column undergo plastic deformation or in Figure 3.16 at  $E_{11} = 0.0045$  where the plastically deforming struts are distributed on two columns. This cell to cell propagating behavior also occurs for the hexagon cell oriented at  $0^\circ$  in Figure 3.19 in the horizontal struts. Macroscopically, the number of columns in the RVE, for example 5 for the 25-cell RVE, matches the number of stress drops on the macroscopic curve of Figure 3.12 (d) which corresponds to the sequential localization of the stretched struts in each column. Once the plastic instabilities have propagated through the whole lattice structure, the global behavior is identical whatever the size of the RVE. The same conclusions are drawn for the triangle and hexagon lattices both also simulated with 9 cell and 25 cell RVE which are respectively stretched-dominated and bending-dominated. The global behaviors of these lattices are reported in Figure 3.12 (b) and (d). The accumulated plastic strain maps are reported in Figure 3.17, 3.18 and 3.19.

Piobert-Lüders instabilities in periodic media are found to be non-propagative for bending-dominated lattices. Each cell undergoes the same mode of plastic strain localization. On the contrary, stretched-dominated lattices exhibit propagating localization through the lattice while two neighboring cells do not undergo the same plastic strain localization during the propagation stage. Moreover in those last lattices, several modes of localization exist involving one or more columns of struts perpendicular to the loading direction. Changing the definition of the RVE changes the instability propagation mode. A primitive RVE does not capture all possible modes of localization for material instabilities. New modes with two columns of tensile struts involved in the propagation of instabilities are highlighted with higher number of cells in the RVE. By increasing the size of the RVE, constraints on the cells are relaxed compared to the primitive cell RVE.



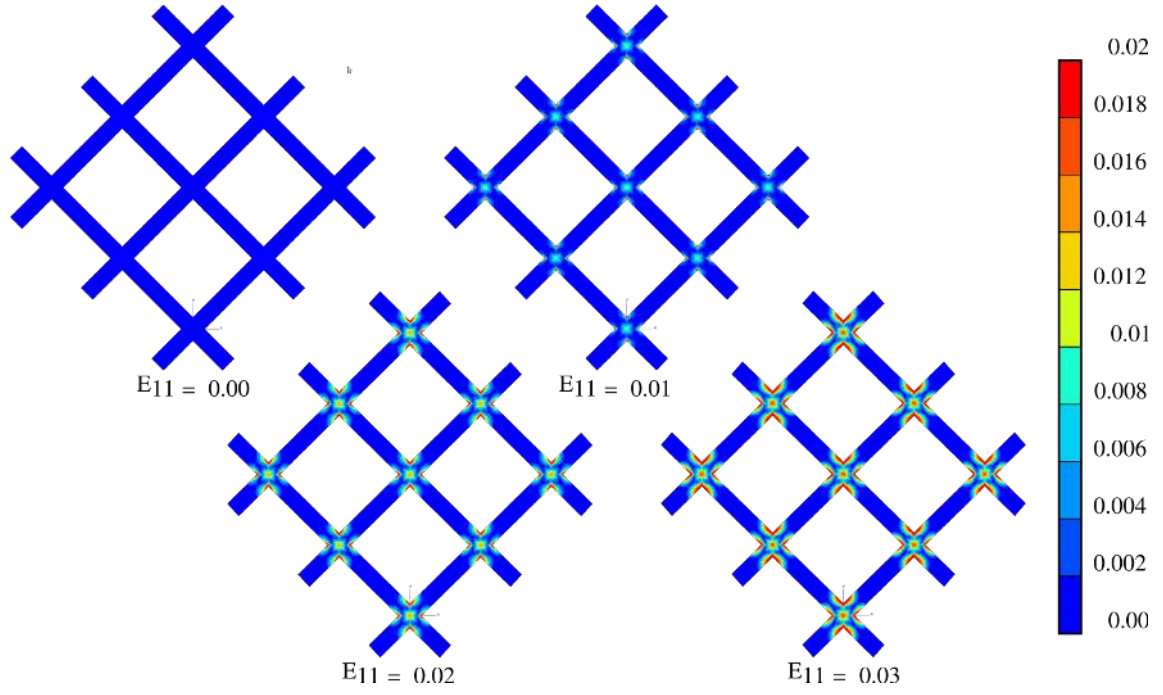


FIGURE 3.13 – Plastic strain maps in a 9-cell 45°-oriented square lattice.

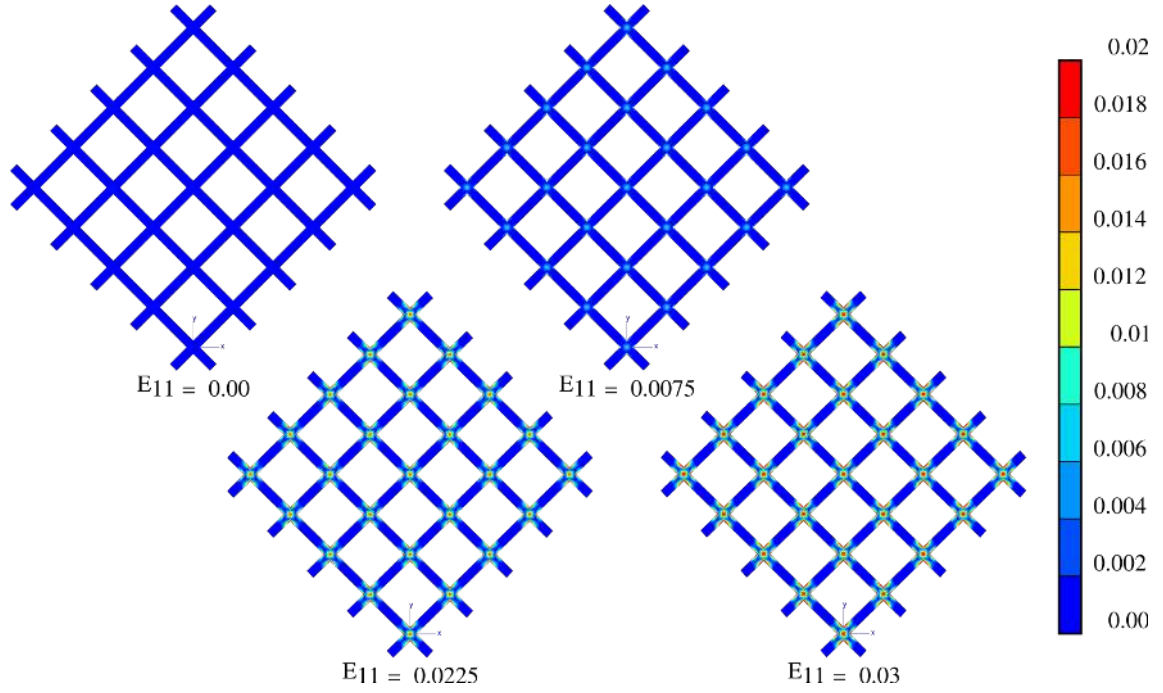
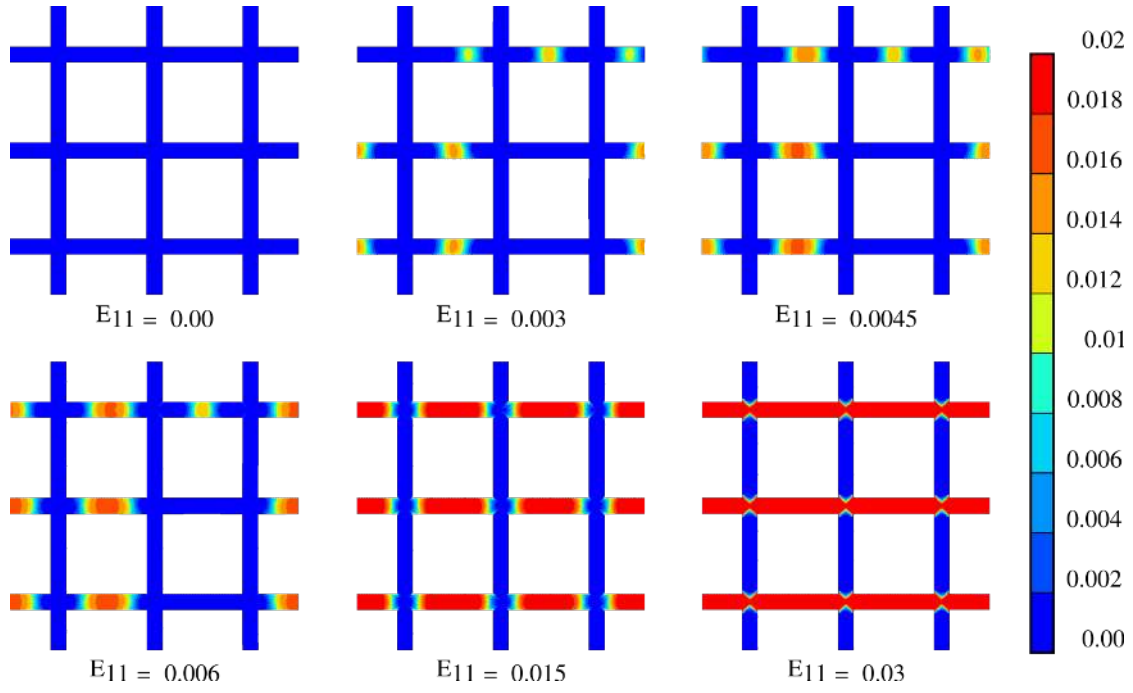
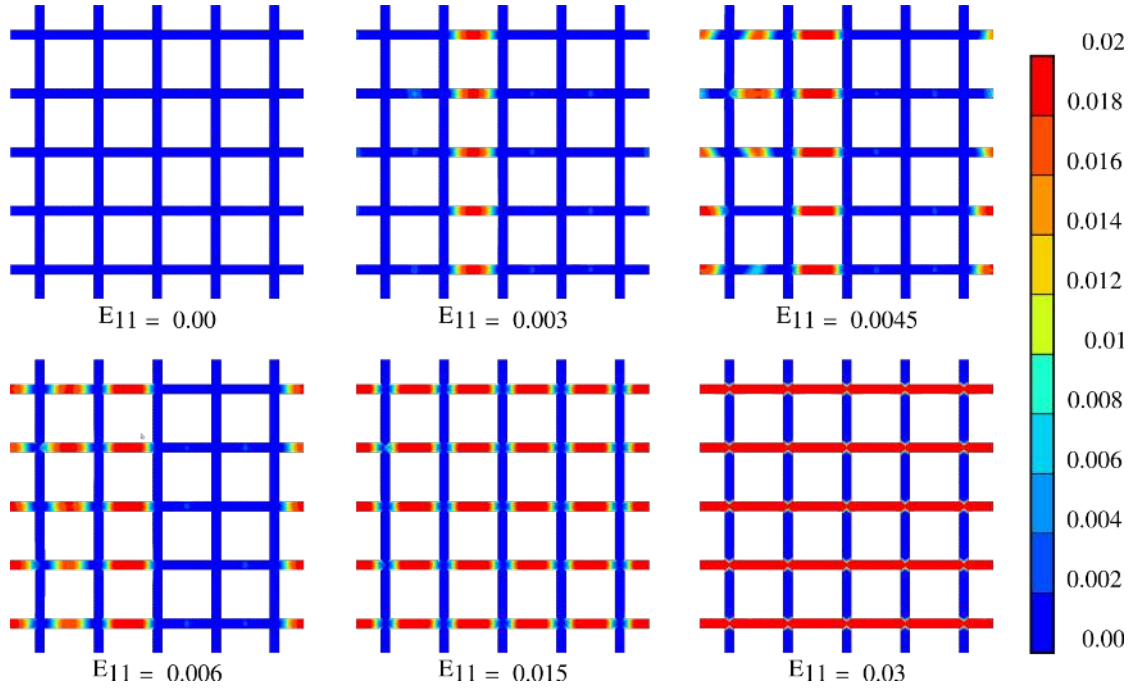


FIGURE 3.14 – Plastic strain maps in a 25-cell 45°-oriented square lattice.


 FIGURE 3.15 – Plastic strain maps in a 9-cell  $0^\circ$ -oriented square lattice.

 FIGURE 3.16 – Plastic strain maps in a 25-cell  $0^\circ$ -oriented square lattice.

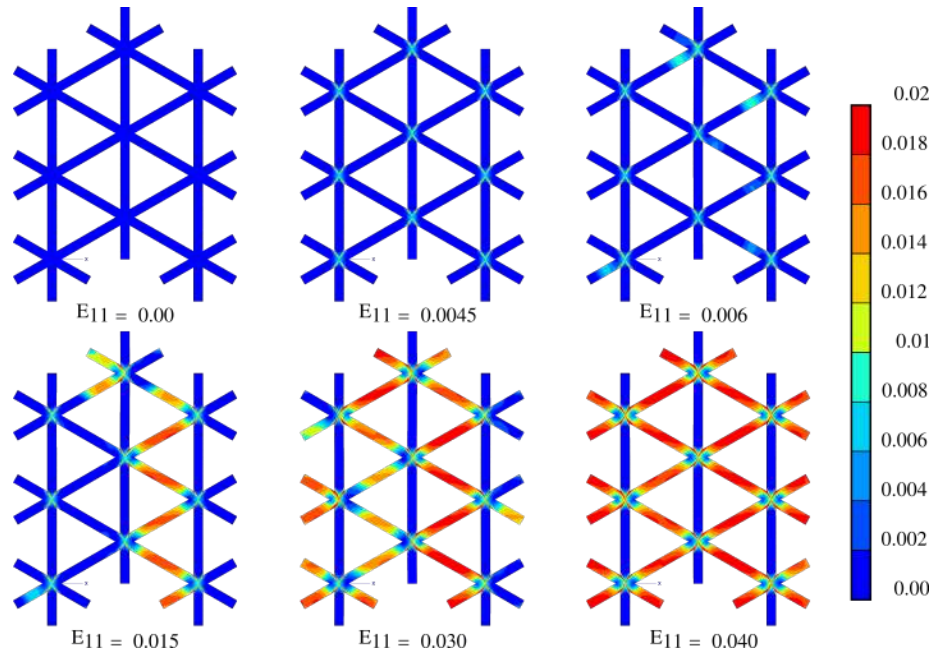


FIGURE 3.17 – Plastic strain maps in a 9-cell  $0^\circ$ -oriented triangle lattice.

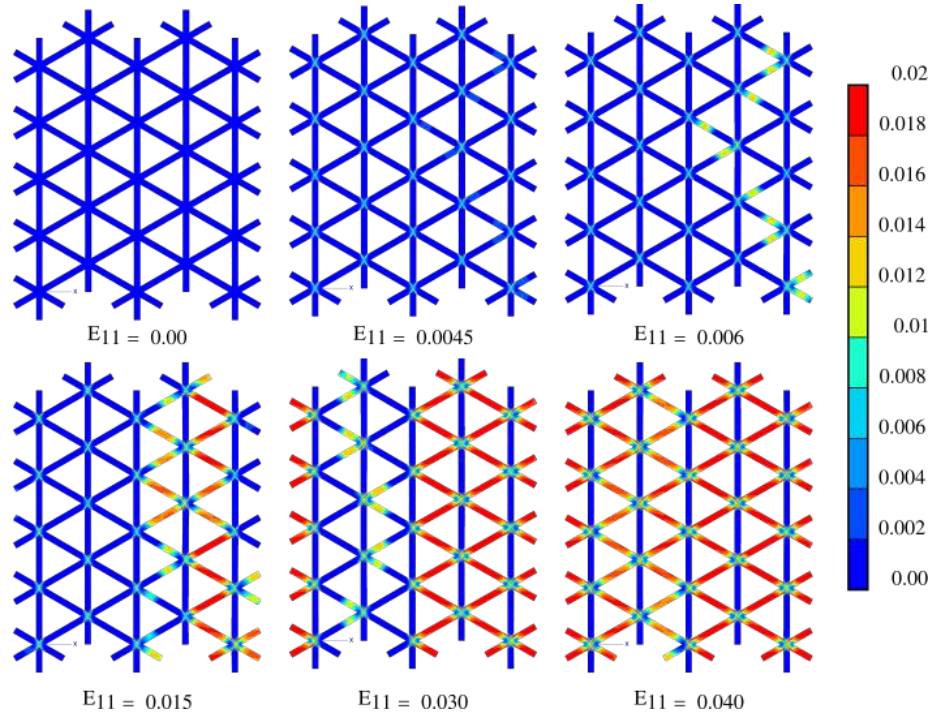
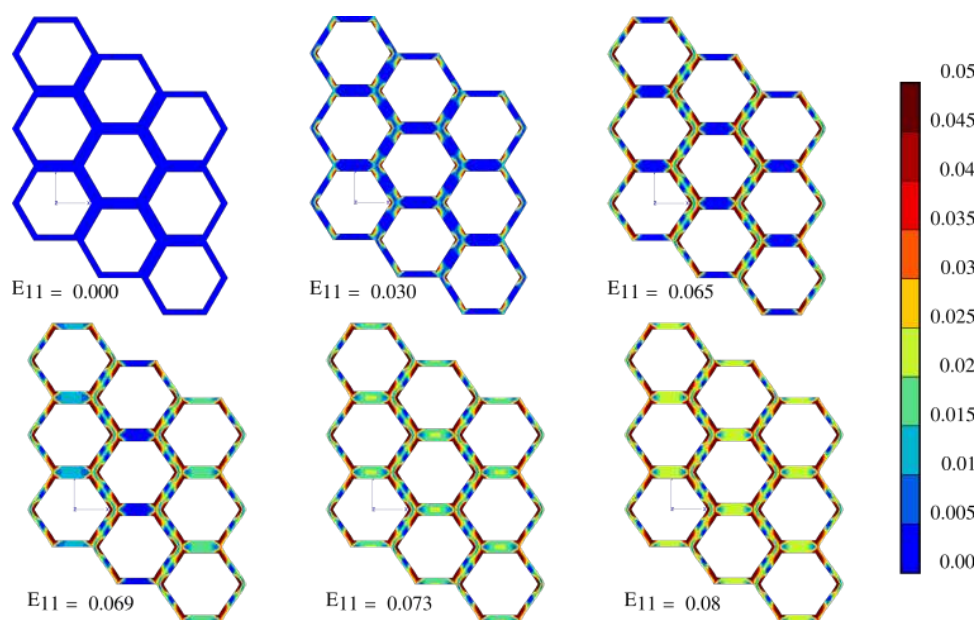


FIGURE 3.18 – Plastic strain maps in a 25-cell  $0^\circ$ -oriented triangle lattice.

FIGURE 3.19 – Plastic strain maps in a 9-cell  $0^\circ$ -oriented hexagon lattice.

### 3.5 Experimental analysis

A comparison between the numerical model and experimental results is proposed in this section. The two specific types of lattice behavior, namely bending-dominated and stretch-dominated, with propagating material instabilities have been tested in tension. In order to understand the propagation of Piobert–Lüders bands in those lattices, different specimens have been architected by laser cutting of steel sheets. The three same geometries as for the numerical study are chosen : the triangle, square and hexagon. Those lattices are representative of the mechanical behavior of the archetypal bending- and stretch-dominated behaviors. The dimensions of the samples are limited by two opposite constraints. On the one hand, the number of cells must be large enough to allow for a description of the transmission of local to global instabilities. On the other hand, strain field measurements are necessary for quantitative analysis of the structural response at the strut level. Due to these experimental constraints, a relative density equal to 50% has been retained. Struts have to be thick enough to track the localization by means of Digital Image Correlation (DIC).

The total number of cells is limited to ensure that observations of global and local strain fields are simultaneously possible. The specimens used for the experiments are shown in Figure 3.20. Finally, the relevant dimensions for the samples are the total width of 2 cm and the total length of 8 cm. The thickness of the specimens is 1 mm. For the square cell, the thickness of a strut is 1.5 mm and its length 3.45 mm. For the triangle cell, the thickness of a strut is 1.5 mm and its length 5.3 mm. For the hexagon cell, the thickness of a strut is 1.8 mm and its length 2.8 mm. Figure 3.21 shows the sample at the end of the experiment.

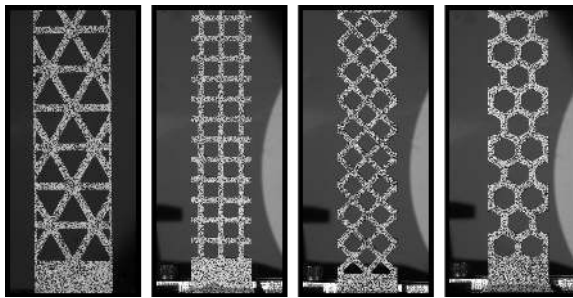


FIGURE 3.20 – Speckled architected samples for experimental comparison

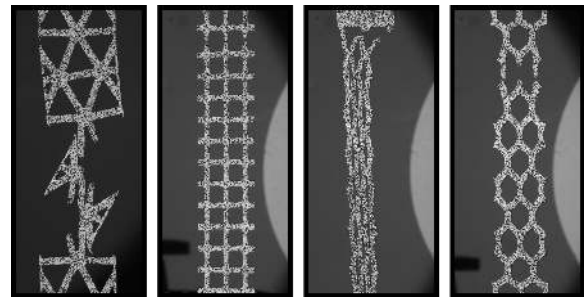


FIGURE 3.21 – Speckled architected samples broken after testing

The investigated material is an ARMCO low carbon steel alloy. ARMCO steel is known to be very sensitive to static strain ageing. It exhibits the Piobert-Lüders phenomenon. The table 3.3 provides the chemical composition of the experimented material for additional elements to a 99.85% Fe base.



	C	Mn	P	S	Cr	Cu	N	Ni
Chemical comp. [%]	0.02	0.050	0.004	0.0027	0.017	0.007	0.005	0.016

TABLEAU 3.3 – Chemical composition of ARMCO steel provided by the steel manufacturer.

### 3.5.1 Digital Image Correlation

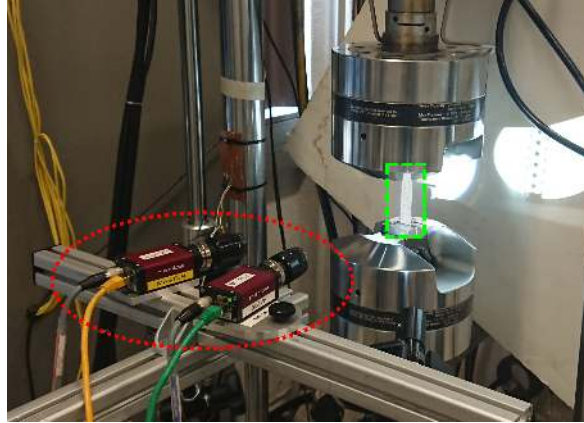


FIGURE 3.22 – Experimental set-up for digital image correlation. In red : cameras system, in green : tensile specimen.

Experiments are conducted on a MTS-10t servo-hydraulic tensile machine. The load cell measuring range is 0 – 100 kN. No extensometer was used due to the heterogeneous architecture of the samples. Digital Image Correlation (DIC) displacement field measurements were performed instead.

The main features of the DIC Set-up are : Dual camera system : 4.1 Mpixels each (Manta G419) with a maximum frequency acquisition of 27 images/second in high resolution and correlation software VIC-3D. The experimental set-up is shown in Figure 3.22.

The full-field surface displacement of the sample is computed from a random pattern tracked during the experiment. A subset is a collection of pixels values identified on the undeformed sample. The unique grayscale pattern associated to this subset is its signature. The correlation algorithm tracked this subset on every image of deformed sample taken during the experiment. Identification is made using a criterion of maximum similarity with the reference image. Another possible strategy is updating the reference image by the  $n - 1$  image. The random pattern is obtained by spraying painting on the specimen surface.

Measurement uncertainty is evaluated by correlating two repeatedly acquired images without rigid body motion. The error on the strain field is mainly due to the numerical noise of the cameras. The minimum in strain between two images must be more than the strain resolution calculated this way.

### 3.5.2 Experimental results

#### Identification.

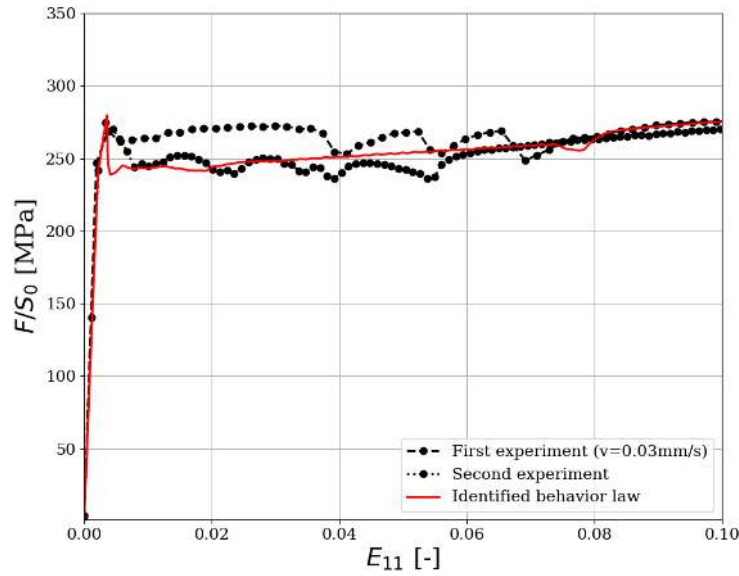


FIGURE 3.23 – Tensile test response of a sheet material with propagation of plastic instabilities and comparison with the identified model of Section 3.2. The strain rate for the two experiments is the same and is set to  $3.75 \cdot 10^{-4}$ .

Figure 3.23 shows the tensile response of the plain strip of steel subsequently analysed in Figure 3.24. The effect of the propagation of plastic instabilities is clearly identifiable on this curve through the peak and plateau stress. The identification of parameters for the model is delicate. Three features are important to reproduce in this study. Since we are interested in the propagation of instabilities, it is important to model properly the peak and the entire plateau stress. The two experimental curves obtained in the same conditions highlight the complexity of identifying a single set of parameters. We focused on capturing the strain of the peak and the rough stress level of the plateau as well as its length. The after-plateau behavior is easily identifiable. The identified parameters are given in table 3.4.

$R_0$ (MPa)	$Q_1$ (MPa)	$b_1$	$Q_2$ (MPa)	$b_2$	$Q_3$ (MPa)	$b_3$
259	360	33	-360	55	30	2000

TABLEAU 3.4 – Experimentally Identified parameters for the phenomenological plasticity model

Numerically, this set of parameters which fits with the experiments introduces a premature necking after the end of the plateau. This is due to the stress level of the peak which is too close from the stress level plateau. However, this effect is of no concern for the features to be analysed in the following.



### Piobert-Lüders instability propagation in the sheet material.

A reference test has been performed for the initial sheet material, i.e. without any inner architecture. The objective is to characterize the Piobert-Lüders bands in the bulk material. Strain localization is found to occur at one end of the sample in tension in the form of two symmetrical bands as shown in Figure 3.24 (b). Then, the two bands propagate all along the sample and reach the other end. Figure 3.24 (c) shows that after the passage of the band the strain level is about 10%. In the band front, the strain level ranges between 5% and 6%. The band front width is between 8 mm where the two bands crossed and 12 mm at the largest. Once it passes the middle of the specimen, the front band is not clearly defined any more and strain levels spread from 7% to 14%.

Curves on the left-hand side in Figure 3.24 represent the Green-Lagrange strain component in the tensile direction,  $e_1$ , along the three lines defined in Figure 3.24 (a). It gives access to the local strain and especially in the band of localization. Line 3 in Figure 3.24 (c) confirms that plastic instability travels between 5% and 8% (strain levels from the front to the tail of the band). Figure 3.24 (d) shows that when propagation ends the strain in the specimen is not perfectly uniform.

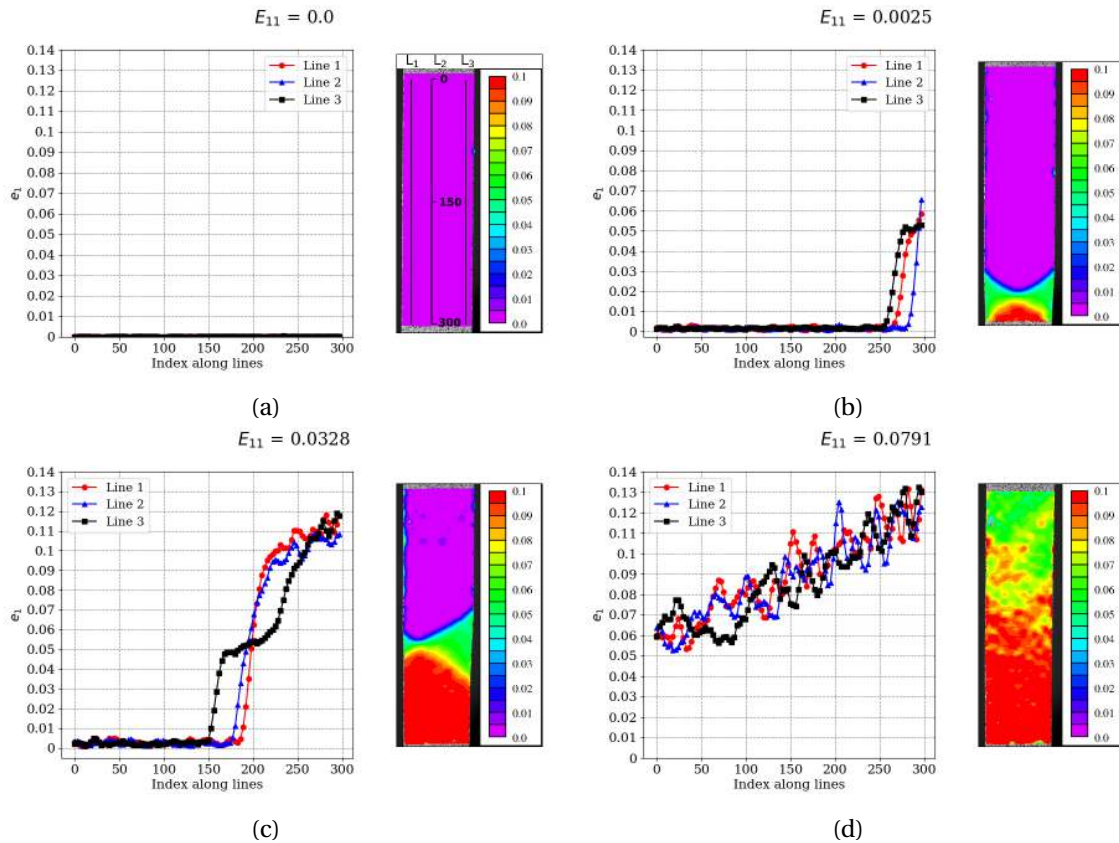


FIGURE 3.24 – Bulk sheet in tension with propagation of Piobert-Lüders instability with digital image correlation results. On the right-hand side is represented the strain  $e_1$  in the tensile direction for three different lines defined on Figure (a). On the left-hand side is represented the map obtained by DIC of  $e_1$ , the Green-Lagrange strain component in the vertical direction.

The tensile curve for the architected samples is given in Figure 3.25. The macroscopic

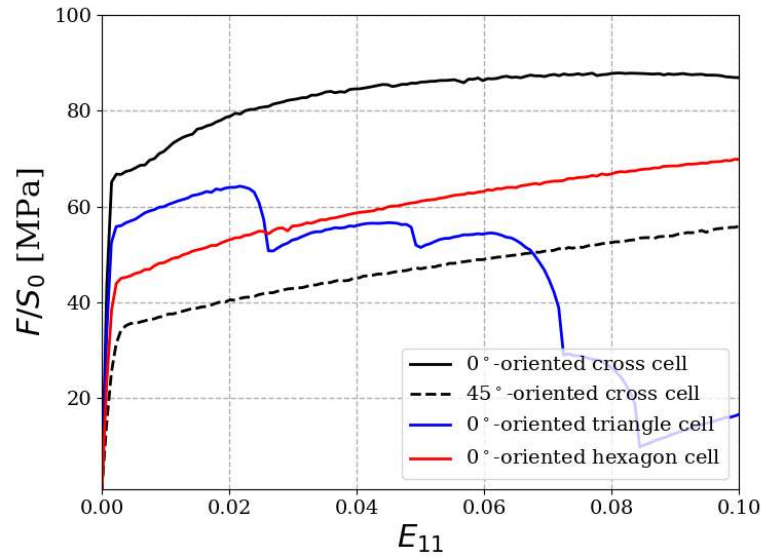


FIGURE 3.25 – Experimental stress-strain curves of architected samples.

pic strain  $E_{11}$  is computed as the machine displacement divided by the initial length of the sample, 8 cm. The nominal Boussinesq stress  $\Sigma_{11}$  is calculated from the force divided by the total initial section,  $S_0 = 1 \times 15$  mm. This definition of the macroscopic Boussinesq stress component  $\Sigma_{11} = F/S_0$  will be used also in the following for the tests on architected sheets. This definition for the strain does not take into account the architecture since it is not possible to define a unique section along an architected sample.

### Stretch-dominated behavior for a square lattice oriented at $0^\circ$ .

In the case of the square at  $0^\circ$ , localized plasticity starts in the middle of the struts under tension. During this regime, the activation of plasticity in each strut occurs in a random way until they all reach the same level of accumulated plastic strain, see Figure 3.26 (a) and (b). After plasticity has been activated in all the struts, Piobert-Lüders bands propagate along the vertical struts in tension until accumulated plastic strain value of 0.06 is reached in every strut, as shown in Figure 3.26 (c). The results on this  $0^\circ$ -oriented square lattice specimen show that, in stretch-dominated lattices, plasticity initiates first in the struts in a random manner, i.e. all struts do not become plastic at the same time. Material instabilities are globally propagating through the lattice. Locally, the propagation of plastic instability in single struts is not easily visible. This is likely due to the width of the localization band front being larger than the struts.

In addition, side effects can be observed in snaps of Figure 3.26 (c), struts in the middle column behave differently from that the ones on the edges. In the middle, plasticity propagates through the nodes of the lattice while for the ones on the edges plastic strain increases up to 10%. Finally, strain equalizes in all struts. Moreover, in a strut the localized plastic strain does not have sufficient space to propagate as a band. The localization zone

occupies one half of the strut. This effect can be modified by designing cells with longer struts.

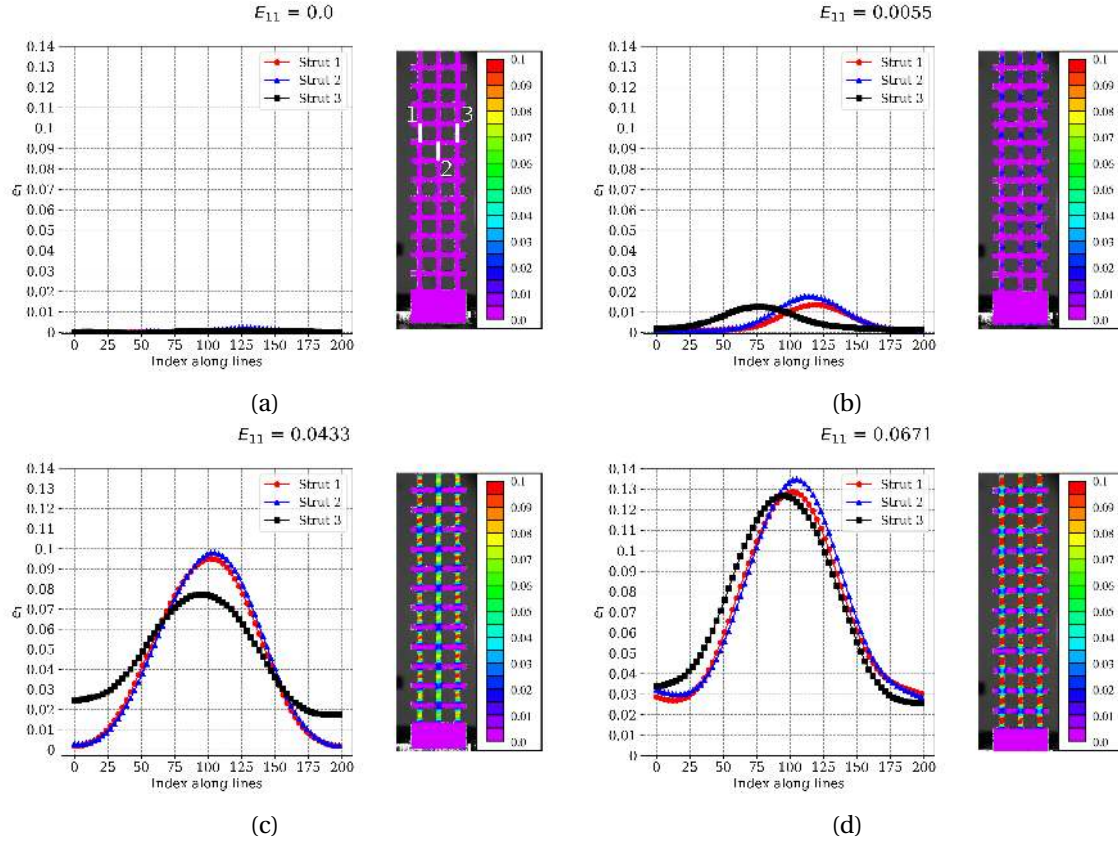


FIGURE 3.26 – Architected sample with  $0^\circ$ -oriented square architecture loaded in tension. On the left-hand side is the strain in the loading direction for three different struts represented in (a). On the right-hand side is the map of  $e_1$ , the Green-Lagrange strain component in the vertical direction, computed from image correlation measurements.

### Bending-dominated behavior for a square lattice oriented at $45^\circ$ .

In the case of the square at  $45^\circ$ , plasticity localizes in the nodes of the lattice. In contrast to the  $0^\circ$ -oriented lattice, there is no random localization regime. We observe essentially the same distribution of strain along three different struts and also on the strain maps on the right side in every strut. No global band propagation at the scale of the lattice can be observed. The level of strain rises in the same way in all cells at the same time. It demonstrates that for a bending-dominated lattice, there is no material instability propagation through the lattice. Plasticity develops in all cells at the same time. Edge effects are less significant than for the specimen with  $0^\circ$ -oriented lattice. Figure 3.21 shows a comparison between specimens before tension and after failure. It also underlines the limitations of such testing. On the square oriented at  $45^\circ$ , cells that break do not undergo the same boundary conditions than those in the middle of the sample. Those cells have some struts that are not connected. For the hexagon, cells on the edge have only one neighboring cell, thus their deformation is different from the ones in the middle of the

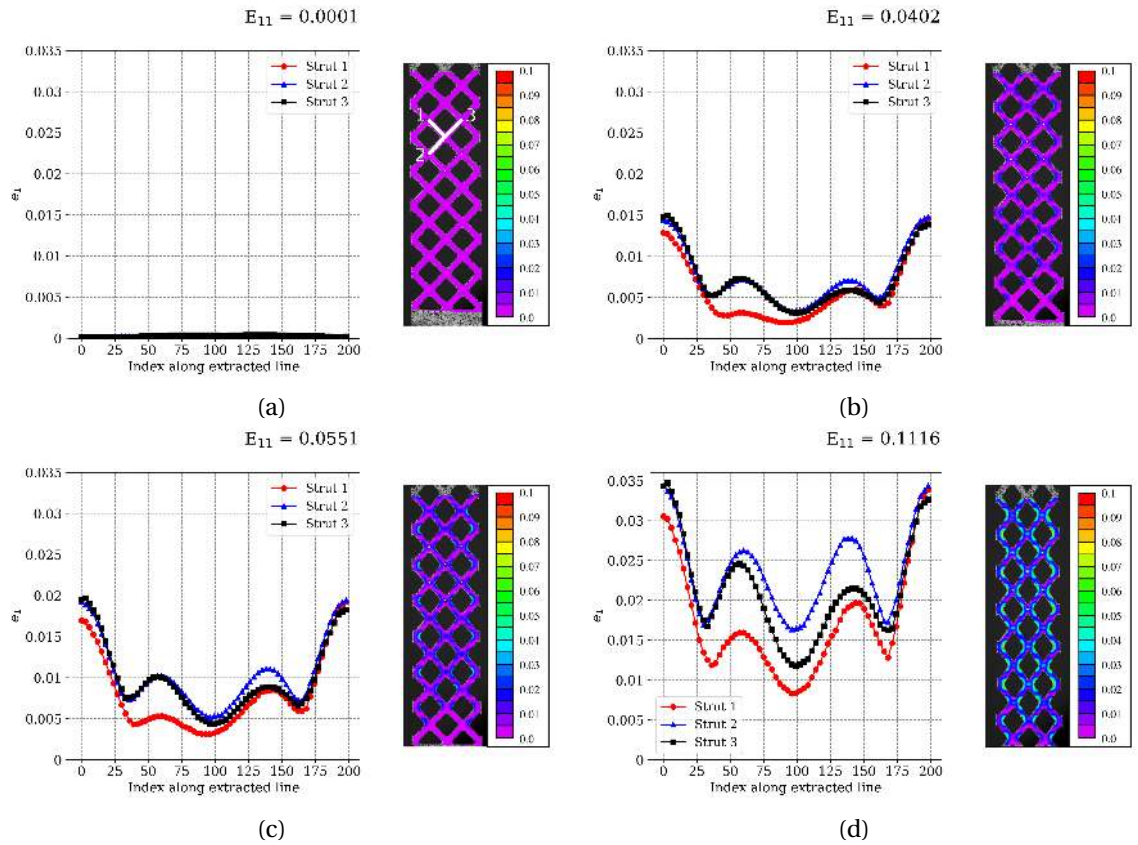


FIGURE 3.27 – Architected sample with 45°-oriented square architecture loaded in tension. On the left-hand side is the strain in the loading direction for three different struts represented in (a). On the right-hand side is the map of  $e_1$ , the Green-Lagrange strain component in the vertical direction, computed from image correlation measurements.

sample. For a more complete analysis, it would be necessary to consider larger samples by adding more cells in the specimen. In the case of the triangle lattice, premature failure of some struts modifies the connectivity of the lattice, and, consequently the mechanical behavior and the propagation of instabilities.

The question of the number of cells that are necessary in both X and Y directions to estimate quasi-perfect periodic boundary conditions remains open.

### 3.5.3 Finite element modeling of the experiments

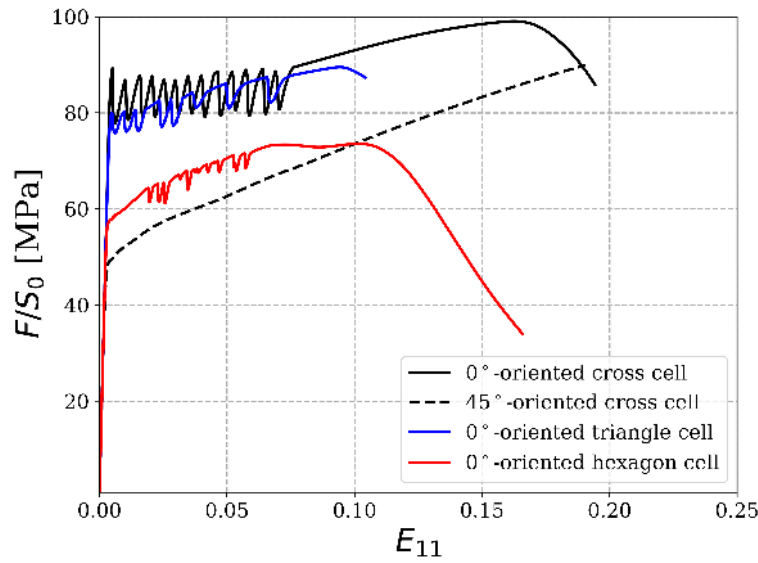


FIGURE 3.28 – Simulation of the architected samples : stress-strain curves

From the identification of the parameters we can simulate the experiments on the architected samples. The calculations are performed within the large deformation framework with quadratic triangle elements with reduced integration (6 nodes and 3 Gauss points). Finite element meshes of the 4 samples of Figure 3.20 were built and used for the simulation of their structural behavior in tension. Numerical samples are 3D. Figure 3.28 shows the mechanical tensile response of the 4 tested architected samples : triangle, hexagon, square loaded at  $0^\circ$  and square loaded at  $45^\circ$ . The ranking of the 4 architectures is found to be in good agreement with the experimental curves of Figure 3.25. From the strongest to the weakest responses, we observe : the  $0^\circ$ -oriented square lattice, the triangle lattice, the hexagon lattice and the  $45^\circ$ -oriented square lattice. The simulation results overestimate the stress levels for all 4 architected, by 15 to 20%. In the Figure 3.25, the initial apparent Young modulus is found to differ for all four lattices. However, in the numerical model the Young moduli are almost identical. These quantitative discrepancies may be due to earlier activation of plasticity in the architected samples compare to the bulk material due to geometrical imperfection or effects induced by the laser cutting process.



For each stretched- or bending-dominated architectures, the observed behavior of plastic instabilities is in accordance with the numerical predictions. For the  $0^\circ$ -oriented square cell and the triangle cell, we observe the plateau stress even though it is less pronounced in the experiment. The numerous drops in the simulation correspond to the localization/propagation phenomenon in each strut of the lattice. In the case of the  $0^\circ$ -oriented square cell, localization occurs in each row of the strips one after another. In contrast, in the  $45^\circ$ -oriented square and the hexagon samples there is no macroscopic manifestation of the propagation of plastic instabilities as predicted by the periodic FE model. The hexagon simulation in Figure 3.28 highlights load drops not visible in the experiment. In the simulation, those drops are the results of a plastic localization in the struts oriented in the direction of the loading.

The decrease of the stress after more than 10% overall straining in the simulation curves of Figure 3.28 is due to premature necking of the struts, which differs from the experiment. However, this premature necking after the end of the stress plateau or after the propagation of plastic instabilities does not impact the understanding of the propagation modes of instabilities.

The plastic strain maps of Figures 3.29 and 3.30 show comparisons between the experiments and simulation for  $e_1$ , the Green-Lagrange strain component in the tensile direction. They confirm the different scenarios of Piobert-Lüders band propagation between stretch- and bending-dominated lattices, deduced from the computational homogenization analysis. In the two stretch-dominated lattices, we observe propagation of strain localization bands at the two scales : the scale of each unit cell and the scale of the whole lattice structure. The propagation of a macroscopic horizontal localization band is clearly visible on the left side of Figure 3.29. This is also the case in the experiment, see the right side of Figure 3.29, but to a lesser extent, meaning that several horizontal bands are observed experimentally instead of a single one. This may explain the absence of marked serrations on the experimental loading curve in contrast to the idealized simulation. No such propagating behavior is observed for the hexagon lattice of Figure 3.30.

In bending-dominated structures, plasticity initiates in all cells simultaneously and similarly in each cell, i.e. the strain field is almost periodic. In the simulation of Figure 3.30 (left), strain localization phenomena are observed in some struts in tension. This explains the few stress drops in the red curve of Figure 3.28.

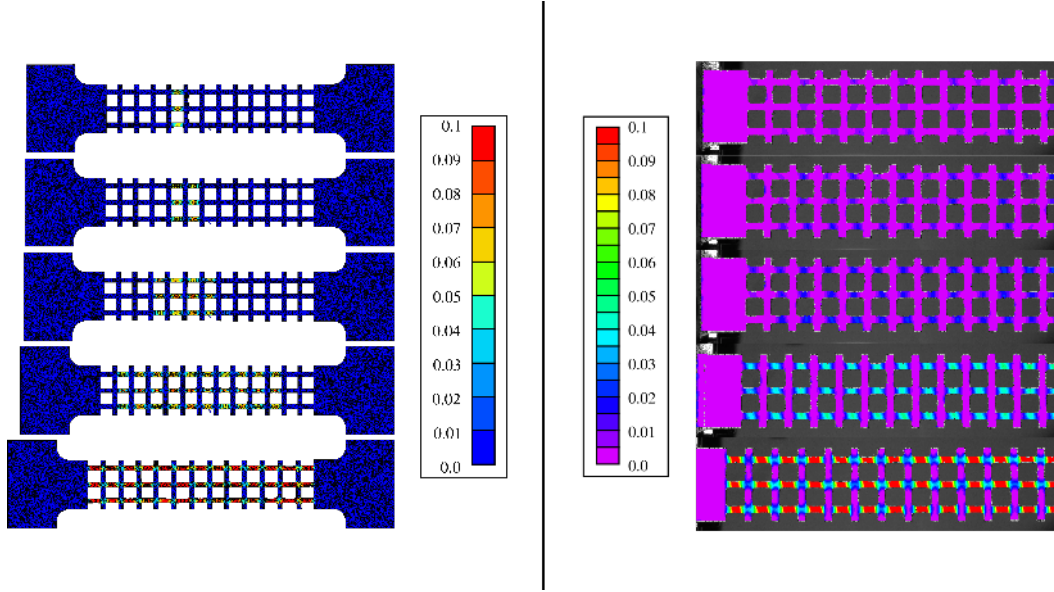


FIGURE 3.29 –  $e_1$  strain maps in the tensile direction for the  $0^\circ$ -oriented square lattice with comparison of the simulation on the left to the experiment on the right.

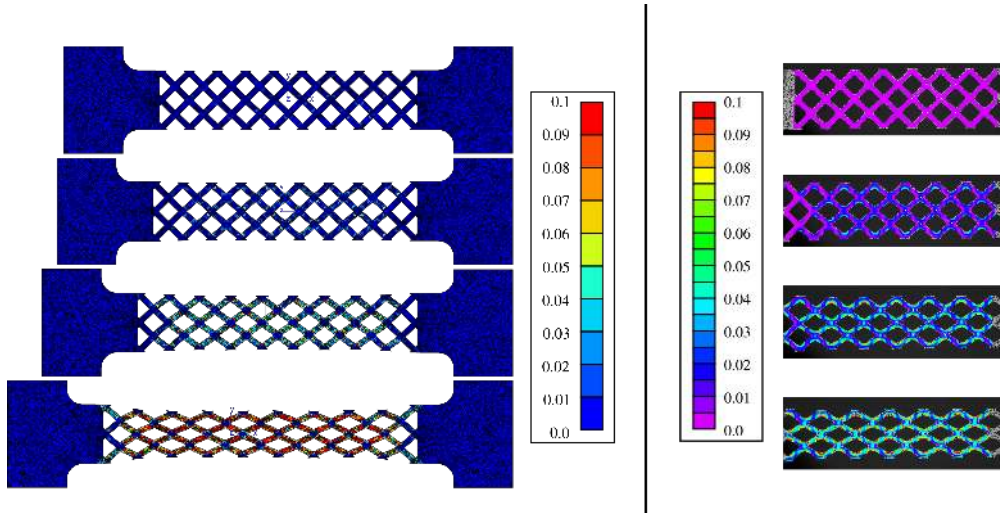


FIGURE 3.30 –  $e_1$  strain maps in the tensile direction for the  $45^\circ$ -oriented square cell with comparison of the simulation on the left to the experiment on the right.

### 3.6 Discussion

We characterized the development of material instabilities in architected material depending on the geometrical features of the lattice, both numerically and experimentally. This study deals only with basic geometries which tessellate the plane in a periodic and regular manner. Graded microstructures should also be considered, combining bending- and stretch-dominated lattices with slowly varying evolution of the geometry in the sample. Another important issue is to understand the mechanisms that drive localization in the struts for stretch-dominated lattices and in the nodes for bending-dominated lattices in order to take advantage of very localized or diffused plasticity in lattices.

Computational homogenization using periodic boundary conditions has been shown



to be an appropriate tool to investigate the development of instabilities in architected materials. However, we have seen that the choice of the number of primitive cells in the unit cell raise several issues during the propagation of instabilities, and could lead to missing localization modes due to the constraining effect of periodic boundary conditions.

There is a dependence of the number of predicted instability modes on the number of cells in the unit cell. As explained by [VIGLIOTTI et collab. \[2014\]](#) dealing with the buckling of lattices, increasing the volume element size, i.e. increasing the cell number, leads to an increase of possible buckled configurations. They also analyzed the effect of the unit cell size on the homogenized model. Similar effects are expected in the case of material instabilities like Piobert-Lüders banding. [AL KOTOB et collab. \[2017\]](#) proposed a systematic method for the analysis of elastoplastic instabilities. This method perturbs the periodic boundary conditions and makes it possible to compute elementary modes of localization. In [GONG et collab. \[2005\]](#), the authors present a method based on Bloch waves developed by Triantafyllidis and co-workers to discuss the RVE size necessary to capture the buckling modes of a periodic column. [COMBESCURE et ELLIOTT \[2017\]](#) reported different equilibrium configurations of honeycombs subjected to bi-axial compression computed on different volume element sizes. Using Bloch wave theory, they report the identification of modes involving a higher number of cells in the VE. It is necessary to identify the minimal number of cells to capture the most relevant instability modes for the structural behavior. The previous methods were applied mainly to geometric instabilities. The case of material instabilities associated with the softening constitutive branch is different in nature, but the present work shows that the problem can be tackled by means of periodic nonlinear homogenization provided that a large enough number of primitive cells are considered.

[GEERS et collab. \[2010\]](#) addressed the main issues of multi-scale computational homogenization. They presented computational homogenization of emerging and evolving localization bands as an open issue to be tackled. First-order and second-order computational homogenization schemes present several limitations in the presence of localization. Localization causes ill-posedness of the boundary value problem on the representative RVE and questions the assumption of scale separation in continuous homogenization. Classical homogenization cannot be used beyond the onset of strain localization. [COENEN et collab. \[2012\]](#) developed a computational homogenization-localization framework and overcame the violation of the separation of scale by enriching the macro-scale continuum with a displacement discontinuity. The case of static strain ageing instabilities is different in the sense that the softening branch is followed by subsequent hardening restoring the well-posedness of the boundary value problem. These issues were discussed in ([MAZIÈRE et FOREST \[2015\]](#); [REZAEI HAJIDEHI et STUPKIEWICZ \[2017\]](#)) where a regularization method based on gradient and micromorphic model enhancement was proposed to regularize the localization problem. The subsequent hardening is responsible for the band front propagation in contrast to continuing localization or damage in static bands.

The issues about the size of the unit cell impact the mechanical behavior only during the phase of instabilities propagation. After this transition, the behavior for all numbers of unit cells is the same.

The experiments presented in this paper confirmed the predictions of the numerical models based on periodic homogenization on the one hand and on the full field simulation of the actual samples. In stretch-dominated lattices, the formation of Piobert-Lüders bands in some struts trigger the formation of a (or several) macroscopic band(s) that propagate through the whole sample. In bending-dominated lattices, no macroscopic propagative band emerges.

According to the last snaps of Figure 3.26(d) and Figure 3.27(d) that represent the strain maps just before the failure of each specimen, additional conclusions can be drawn. For the  $0^\circ$ -oriented and the  $45^\circ$ -oriented square lattices, the macroscopic strains at fracture respectively are 0.067 and 0.112 whereas the maximum local strain values in the Y direction are 0.13 and 0.035. The non-propagating behavior of bending-dominated may be explained by the fact that the local strain level is not high enough to trigger the propagation of the Piobert-Lüders band in the struts. In Figure 3.24(d), the band has a strain level of 0.05 during its propagation. In other terms, the structure fails before the Lüders strain has been reached at the nodes of the lattice. On the one hand, stretch-dominated lattices experience higher plastic strain levels in the struts even at low macroscopic deformation, while, on the other hand, bending-dominated lattices undergo much larger macroscopic deformation without high levels of local plastic strain. Thus, one can choose bending-dominated structures for applications at large deformations or stretched-dominated structures if a stiff behavior is wanted.

Results are calling for improvements to enhance the precision in the tracking of propagation of material instabilities in lattices with higher number of cells and larger strut cross section. Moreover, side/edge effects in the form of free-standing struts in the square lattice for instance are significant in the experimental results. There is a competition between the size of the unit cell, large enough to be tracked with DIC and the number of cells in the specimen in order to neglect the edge effects. Next samples should integrate more cells. It is essential that boundary conditions should be well defined and side effects reduced to a minimum.

### 3.7 Concluding remarks

The uniaxial tensile response of 2D lattice with propagation of plastic instabilities known as Piobert-Lüders bands has been analyzed for 4 geometries : triangle, square at  $0^\circ$  and  $45^\circ$  and hexagon lattices. We have demonstrated that the tensile response of each lattice depends on its either stretch- or bending-dominated behavior. It is then possible to control the initiation and the propagation of material instabilities through architectures.

For bending-dominated structures, the macroscopic strain-stress curve is characterized by 2 regimes : (i) initial linear elastic regime and (ii) plastic strain starting in the plastic hinges of the lattice. It does not exhibit any peak or plateau stress. Plasticity initiates at the same time, at all nodes and in the same manner. Then, it spreads still identically from the plastic hinges. A single cell RVE is sufficient to simulate this behavior. Those lattices do not propagate instabilities except for the orientation that aligns one strut with the loading direction. It is the case for the hexagon oriented at  $0^\circ$ . In this case, the aligned struts can be stretched. A plastic band propagates in each well-oriented strut of the lattice.

For stretch-dominated lattices, the macroscopic stress-strain curve is characterized by 3 regimes : (i) initial linear elastic regime, (ii) peak and plateau stress as a result of the initiation and propagation of Piobert-Lüders bands in the main stretched struts and (iii) post-propagation hardening behavior with increasing plastic strain. Between two neighboring cells, localization and propagation of plastic instabilities is different during the second regime. The behavior of plastic instabilities depends on the lattice geometry during its initiation and propagation. Once all cells are plastic (iii), the behavior becomes identical in each unit cell of the whole lattice. It is therefore necessary to have a volume element larger than a single primitive cell in order to observe the propagative behavior from cell to cell. The triangle cell enhances the possibility to control the level of stress for the propagation of plastic instability, i.e. the stress level of the plateau. This stretched-dominated lattice allows to tune this stress level thanks to the orientation of the lattice to the loading direction. The more struts can undergo plastic instability, the higher the stress plateau is.

Experimental testing on ARMCO steel specimens architected by laser cutting essentially confirmed the periodic homogenization predictions. In bending-dominated lattices plasticity develops at the nodes and no further propagation of bands was observed. In stretch-dominated lattices plasticity develops in the struts into propagating bands. Features of the band propagation, peak and stress, plateau in the structure could not be well identified on the stress-strain curves due to important side effects and experimental imperfections.

Finally, those remarks seem to confirm that a well-chosen lattice architecture and orientation can control the initiation and the propagation of Piobert-Lüders bands for a given mechanical load. The choice of the architectures can be made to respond to a specific objective. The two different behaviors of plastic instabilities in bending-dominated or stretch-dominated lattices and the possibility to combine those two in a single structure open the path to materials instability-based architected materials.

## Acknowledgments

This study was funded by Agence Nationale de la Recherche through the ANR ALMA-RIS project (grant no. ANR-16-CE08-0001). The support of the Centre des Matériaux for conducting the experiments is gratefully acknowledged. Thanks are due in particular to

Stéphanie Dang and Abdennour Meddour from Mines ParisTech.

### 3.8 Conclusion

Cette étude des instabilités plastiques de type Piobert-Lüders dans les milieux architecturés met évidence l'interaction entre l'architecture et la propagation des instabilités. En fonction du caractère *bending-dominated* ou *stretch-dominated* des architectures, deux types de comportement pour les instabilités plastiques ont été identifiés, respectivement non-propagatif et propagatif. Les deux comportements ont été validés numériquement et expérimentalement. Ces premières observations montrent la possibilité de matériaux dont l'architecture et son orientation permettraient de maîtriser l'initiation et la propagation d'instabilités plastiques.

D'un point de vue pratique, cette étude préliminaire a permis d'identifier les voies d'améliorations possibles dans l'étude expérimentale et numérique des matériaux architecturés. Concernant le choix des architectures, les trois architectures triangle, carré et hexagone peuvent être conservées et complétées par la cellule Kagome qui présente un mécanisme de déformation périodique différent de la cellule hexagonale. Sur le plan expérimental, la méthode de capture des instabilités plastiques par corrélation d'images offre des résultats très satisfaisants. Cependant, le modèle d'éprouvette actuel est sensible aux effets de bords et aux ruptures de barres prématurées. Les modèles suivants seront modifiés afin de réduire ces phénomènes. Numériquement, nous avons validé le modèle de comportement avec localisation dans un milieu périodique ainsi qu'une bonne corrélation avec les expériences. Toutes ces remarques ont servi de base de réflexion pour les travaux présentés dans le chapitre suivant qui concerne l'étude des Alliages à Mémoire de Forme architecturés.

### 3.9 Références

- AL KOTOB, M., S. FOREST, M. MAZIÈRE, C. COMBESURE et T. ROSE. 2017, «Méthode systématique de prévision de bifurcations élastoplastiques pour différentes formulation en transformats finies», URL <https://hal-mines-paristech.archives-ouvertes.fr/hal-01815858>. 71
- ALONSO, I. Q. et N. A. FLECK. 2007, «Damage tolerance of an elastic-brittle diamond-celled honeycomb», *Scripta Materialia*, vol. 56, n° 8, doi :<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2006.12.027>, p. 693 – 696, ISSN 1359-6462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646207000152>. 41
- ASHBY, M. 2006, «The properties of foams and lattices», *Philosophical Transactions of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 364, n° 1838, doi :[10.1098/rsta.2005.1678](https://doi.org/10.1098/rsta.2005.1678), p. 15–30. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rsta.2005.1678>. 40
- ASHBY, M. 2013, «Designing architected materials», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, doi :<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.04.033>, p. 4 – 7, ISSN 1359-6462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359646212002965>, architected Materials. 40
- ASHBY, M. et Y. BRÉCHET. 2003, «Designing hybrid materials», *Acta Materialia*, vol. 51, n° 19, doi :[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(03\)00441-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(03)00441-5), p. 5801 – 5821, ISSN 1359-6454. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645403004415>, the Golden Jubilee Issue. Selected topics in Materials Science and Engineering Past, Present and Future. 40
- AUFFRAY, N., J. DIRRENBERGER et G. ROSI. 2015, «A complete description of bi-dimensional anisotropic strain-gradient elasticity», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 69-70, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2015.04.036>, p. 195 – 206, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768315002577>. 43
- BALLARIN, V., M. SOLER, A. PERLADE, X. LEMOINE et S. FOREST. 2009, «Mechanisms and modeling of bake-hardening steels : Part i. uniaxial tension», *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 40, n° 6, doi :[10.1007/s11661-009-9813-5](https://doi.org/10.1007/s11661-009-9813-5), p. 1367–1374, ISSN 1543-1940. URL <https://doi.org/10.1007/s11661-009-9813-5>. 45
- BESSON, J., G. CAILLETAUD et J.-L. C. S. FOREST. 2009, *Mécanique non linéaire des matériaux*, doi :[10.1007/978-90-481-3356-7](https://doi.org/10.1007/978-90-481-3356-7). 44
- BONFANTI, A. et A. BHASKAR. 2018, «Elastoplastic response and recoil of honeycomb lattices», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 71, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ejmech.2018.04.011>. 42

- 10.1016/j.euromechsol.2017.12.003, p. 77 – 88, ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753817301122>. 41
- BONFANTI, A., A. BHASKAR et M. ASHBY. 2016, «Plastic deformation of cellular materials», dans *Reference Module in Materials Science and Materials Engineering*, Elsevier, ISBN 978-0-12-803581-8, doi :<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803581-8.03009-5>. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780128035818030095>. 41
- BOUAZIZ, O., Y. BRÉCHET et J. EMBURY. 2008, «Heterogeneous and architected materials : A possible strategy for design of structural materials», *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, n° 1-2, doi :10.1002/adem.200700289, p. 24–36. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adem.200700289>. 40
- BRÉCHET, Y. 2013, «Chapter 1 architected materials : An alternative to microstructure control for structural materials design? a possible playground for bio-inspiration?», dans *Materials Design Inspired by Nature : Function Through Inner Architecture*, The Royal Society of Chemistry, ISBN 978-1-84973-553-7, p. 1–16, doi :10.1039/9781849737555-00001. URL <http://dx.doi.org/10.1039/9781849737555-00001>. 40
- BRÉCHET, Y. et J. EMBURY. 2013, «Architected materials : Expanding materials space», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, doi :<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.038>, p. 1 – 3, ISSN 1359-6462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135964621200499X>, architected Materials. 40
- COENEN, E., V. KOUZNETSOVA et M. GEERS. 2012, «Multi-scale continuous–discontinuous framework for computational-homogenization–localization», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 60, n° 8, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2012.04.002>, p. 1486 – 1507, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509612000749>. 71
- COMBESCURE, C. et R. ELLIOTT. 2017, «Hierarchical honeycomb material design and optimization : Beyond linearized behavior», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 115, doi :10.1016/j.ijsolstr.2017.03.011. 40, 71
- CÔTÉ, F., V. DESHPANDE, N. A. FLECK et A. EVANS. 2006, «The compressive and shear responses of corrugated and diamond lattice materials», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 43, n° 20, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2005.07.045>, p. 6220 – 6242, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768305004919>. 40
- DELL'ISOLA, F., P. SEPPECHER, J. J. ALIBERT, T. LEKSZYCKI, R. GRYGORUK, M. PAWLKOWSKI, D. STEIGMANN, I. GIORGIO, U. ANDREAUS, E. TURCO, M. GOŁASZEWSKI,

- N. RIZZI, C. BOUTIN, V. A. EREMEYEV, A. MISRA, L. PLACIDI, E. BARCHIESI, L. GRECO, M. CUOMO, A. CAZZANI, A. D. CORTE, A. BATTISTA, D. SCERRATO, I. Z. EREMEEVA, Y. RAHALI, J.-F. GANGHOFFER, W. MÜLLER, G. GANZOSCH, M. SPAGNUOLO, A. PFAFF, K. BARCZ, K. HOSCHKE, J. NEGGERS et F. HILD. 2018, «Pantographic metamaterials : an example of mathematically driven design and of its technological challenges», *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, doi :10.1007/s00161-018-0689-8, ISSN 1432-0959. URL <https://doi.org/10.1007/s00161-018-0689-8>. 40
- DESHPANDE, V., M. ASHBY et N. A. FLECK. 2001, «Foam topology : bending versus stretching dominated architectures», *Acta Materialia*, vol. 49, n° 6, doi :[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(00\)00379-7](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(00)00379-7), p. 1035 – 1040, ISSN 1359-6454. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645400003797>. 42, 43
- DOGUI, A. et F. SIDOROFF. 1986, «Rhéologie anisotrope en grandes déformations, rhéologie des matériaux anisotropes», *Ed. C. Huet, D. Bourguoin, S. Richemond, Cepadues Toulouse*, p. 69–78. 44
- FLECK, N. A. et X. QIU. 2007, «The damage tolerance of elastic–brittle, two-dimensional isotropic lattices», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, n° 3, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.08.004>, p. 562 – 588, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509606001359>. 41
- GEERS, M., V. KOUZNETSOVA et W. BREKELMANS. 2010, «Multi-scale computational homogenization : Trends and challenges», *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 234, n° 7, doi :<https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.08.077>, p. 2175 – 2182, ISSN 0377-0427. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042709005536>, fourth International Conference on Advanced Computational Methods in ENgineering (ACOMEN 2008). 71
- GIBSON, J. et M. ASHBY. 1999, «Cellular solids : Structures and properties», *Cambridge University Press*. 41, 52
- GONG, L., S. KYRIAKIDES et N. TRIANTAFYLIDIS. 2005, «On the stability of kelvin cell foams under compressive loads», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 53, n° 4, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2004.10.007>, p. 771 – 794, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509604001899>. 71
- GUOMING, H., W. HUI, Z. YOULIN et B. WUJUN. 2006, «A large deformation model for the elastic moduli of two-dimensional cellular materials», *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, vol. 21, n° 2, p. 154. 41
- HALLAI, J. F. et S. KYRIAKIDES. 2011, «On the effect of lüders bands on the bending of steel tubes. part i : Experiments», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 48, n° 24,



- doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2011.06.024>, p. 3275 – 3284, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768311002472>. 41
- HE, Y., Y. ZHOU, Z. LIU et K. LIEW. 2018, «Buckling and pattern transformation of modified periodic lattice structures», *Extreme Mechanics Letters*, vol. 22, doi :<https://doi.org/10.1016/j.eml.2018.05.011>, p. 112 – 121, ISSN 2352-4316. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352431618300841>. 41
- KYRIAKIDES, S., A. OK et E. CORONA. 2008, «Localization and propagation of curvature under pure bending in steel tubes with lüders bands», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, n° 10, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2008.01.013>, p. 3074 – 3087, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768308000255>. 41
- LADÈVÈZE, P. 1980, «Sur la théorie de la plasticité en grandes déformations», *ENS-Cachan-LMT Internal Report*, vol. 0, n° 9. 44
- LATTURE, R. M., M. R. BEGLEY et F. W. ZOK. 2018, «Design and mechanical properties of elastically isotropic trusses», *Journal of Materials Research*, vol. 33, n° 3, doi :10.1557/jmr.2018.2, p. 249–263. 40
- LÜDERS, W. 1860, «Über die äusserung der elasticität an stahlartigen eisenstäben und stahlstäben, und über eine beim biegen solcher stäbe beobachtete molecularbewegung.», *Dinglers Polytech J5*, 18–22. 41
- MARAIS, A., M. MAZIÈRE, S. FOREST, A. PARROT et P. L. DELLIOU. 2012, «Identification of a strain-aging model accounting for lüders behavior in a c-mn steel», *Philosophical Magazine*, vol. 92, n° 28-30, doi :10.1080/14786435.2012.699687, p. 3589–3617. 46
- MAZIÈRE, M. et S. FOREST. 2015, «Strain gradient plasticity modeling and finite element simulation of lüders band formation and propagation», *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, vol. 27, n° 1, doi :10.1007/s00161-013-0331-8, p. 83–104, ISSN 1432-0959. URL <https://doi.org/10.1007/s00161-013-0331-8>. 46, 71
- NASSAR, H., Q.-C. HE et N. AUFRAY. 2016, «A generalized theory of elastodynamic homogenization for periodic media», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 84, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2016.01.022>, p. 139 – 146, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768316000445>. 40
- NIKNAM, H. et A. AKBARZADEH. 2018, «In-plane and out-of-plane buckling of architected cellular plates : Numerical and experimental study», *Composite Structures*, vol. 206, doi :<https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.08.026>, p. 739 – 749, ISSN 0263-8223. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263822318321809>. 41

- ONAL, E., J. E. FRITH, M. JURG, X. WU et A. MOLOTNIKOV. 2018, «Mechanical properties and in vitro behavior of additively manufactured and functionally graded ti6al4v porous scaffolds», *Metals*, vol. 8, n° 4, doi :10.3390/met8040200, ISSN 2075-4701. URL <https://www.mdpi.com/2075-4701/8/4/200>. 40
- PIOBERT, G. 1842, «Expérience sur la pénétration des projectiles dans le fer forgé.», *Mémoire de l'Artillerie* 505. 41
- PONCELET, M., A. SOMERA, C. MOREL, C. JAILIN et N. AUFFRAY. 2018, «An experimental evidence of the failure of cauchy elasticity for the overall modeling of a non-centro-symmetric lattice under static loading», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 147, doi :https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.028, p. 223 – 237, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318302221>. 40
- REZAAE HAJIDEHI, M. et S. STUPKIEWICZ. 2017, «Gradient-enhanced model and its micromorphic regularization for simulation of lüders-like bands in shape memory alloys», *International Journal of Solids and Structures*, doi :10.1016/j.ijsolstr.2017.11.021. 71
- ROSI, G. et N. AUFFRAY. 2019, «Continuum modelling of frequency dependent acoustic beam focussing and steering in hexagonal lattices», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 77, doi :https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.103803, p. 103 803, ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753818309859>. 40
- ROSI, G., L. PLACIDI et N. AUFFRAY. 2018, «On the validity range of strain-gradient elasticity : A mixed static-dynamic identification procedure», *European Journal of Mechanics - A/Solids*, vol. 69, doi :https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2017.12.005, p. 179 – 191, ISSN 0997-7538. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0997753817305880>. 40
- SCHRAAD, M. W. et N. TRIANTAFYLIDIS. 1997, «Scale Effects in Media With Periodic and Nearly Periodic Microstructures, Part I : Macroscopic Properties», *Journal of Applied Mechanics*, vol. 64, n° 4, doi :10.1115/1.2788979, p. 751–762, ISSN 0021-8936. URL <https://doi.org/10.1115/1.2788979>. 54
- TANKASALA, H., V. DESHPANDE et N. A. FLECK. 2017, «Tensile response of elastoplastic lattices at finite strain», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 109, doi : https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.02.002, p. 307 – 330, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616307967>. 41, 43
- TRIANAFYLIDIS, N. et S. BARDENHAGEN. 1996, «The influence of scale size on the stability of periodic solids and the role of associated higher order gradient continuum models», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 44, n° 11, doi :

- [https://doi.org/10.1016/0022-5096\(96\)00047-6](https://doi.org/10.1016/0022-5096(96)00047-6), p. 1891 – 1928, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022509696000476>. 54
- TSUKAHARA, H. et T. IUNG. 1998, «Finite element simulation of the piobert-lüders behavior in an uniaxial tensile test», *Materials Science and Engineering : A*, vol. 248, n° 1, doi : [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(97\)00857-5](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(97)00857-5), p. 304 – 308, ISSN 0921-5093. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0921509397008575>. 45
- TURCO, E., A. MISRA, M. PAWLIKOWSKI, F. DELL'ISOLA et F. HILD. 2018, «Enhanced piola-hencky discrete models for pantographic sheets with pivots without deformation energy : Numerics and experiments», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 147, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.015>, p. 94 – 109, ISSN 0020-7683. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768318302002>. 40
- VIGLIOTTI, A., V. S. DESHPANDE et D. PASINI. 2014, «Non linear constitutive models for lattice materials», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 64, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2013.10.015>, p. 44 – 60, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509613002238>. 71
- WANG, A.-J. et D. MCDOWELL. 2004, «In-plane stiffness and yield strength of periodic metal honeycombs», *Journal of engineering materials and technology*, vol. 126, p. 137 – 156. 41
- WANG, A.-J. et D. MCDOWELL. 2005, «Yield surfaces of various periodic metal honeycombs at intermediate relative density», *International Journal of Plasticity*, vol. 21, n° 2, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2003.12.002>, p. 285 – 320, ISSN 0749-6419. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641904000026>. 41
- ZOK, F. W., R. M. LATTURE et M. R. BEGLEY. 2016, «Periodic truss structures», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 96, doi :<https://doi.org/10.1016/j.jmps.2016.07.007>, p. 184 – 203, ISSN 0022-5096. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509615300983>. 40

# Chapitre 4

## SUPERÉLASTICITÉ DANS LES MILIEUX ARCHITECTURÉS

### Sommaire

---

<b>4.1 Alliage à mémoire de forme, superélasticité et loi de comportement . . .</b>	<b>85</b>
4.1.1 Essai de traction sur une éprouvette en NiTi . . . . .	85
4.1.2 Identification de la loi de comportement . . . . .	86
<b>4.2 Etude expérimentale de matériaux superélastiques architecturés . . . .</b>	<b>90</b>
4.2.1 Choix des architectures . . . . .	90
4.2.2 Architecture triangulaire . . . . .	91
4.2.3 Architecture hexagonale . . . . .	94
4.2.4 Architecture Kagome . . . . .	99
4.2.5 Conclusion sur les expériences AMF architecturés . . . . .	103
<b>4.3 Modélisation d'instabilités matérielles dans un milieu périodique fini .</b>	<b>104</b>
4.3.1 Architecture triangulaire . . . . .	105
4.3.2 Architecture hexagonale . . . . .	107
4.3.3 Architecture Kagome . . . . .	111
4.3.4 Conclusion sur le comportement des éprouvettes simulées. . . . .	118
<b>4.4 Modélisation d'un milieu périodique infini en présence d'instabilités matérielles de type pseudo-élastique . . . . .</b>	<b>119</b>
4.4.1 Définition des conditions périodiques . . . . .	119
4.4.2 Architecture triangulaire . . . . .	120
4.4.3 Architecture hexagonale . . . . .	123
4.4.4 Architecture Kagome . . . . .	123
<b>4.5 Discussion sur la superélasticité dans les réseaux architecturés. Point de vue expérimental et numérique. . . . .</b>	<b>128</b>
4.5.1 Discussion sur la modélisation numérique (milieu fini et infini) . .	128
4.5.2 Localisation matérielle et structurelle : description de l'"effet Péli- can" . . . . .	128

4.5.3	Isotropie élastique et anisotropie plastique . . . . .	129
<b>4.6</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>130</b>
<b>4.7</b>	<b>Références . . . . .</b>	<b>131</b>

---

Les architectures sélectionnées dans le chapitre 3 (triangulaire, carrée et hexagonale) répondaient au besoin d'étudier le comportement intrinsèque des architectures divisées en deux catégories, dominée par la traction/compression ou dominée par la flexion, en présence d'instabilités matérielles. Des travaux sur les instabilités de type Piobert-Lüders, on conserve les architectures triangulaire et hexagonale pour les raisons citées dans le chapitre 3. Les structures treillis sont également à la base des métamatériaux mécaniques [ASHBY et BRÉCHET \[2003\]](#); [BOUAZIZ et collab. \[2008\]](#); [BRÉCHET \[2013\]](#); [BRÉCHET et EMBURY \[2013\]](#). Parmi l'ensemble des possibilités d'architectures, la cellule de Kagome est autrement intéressante pour trois raisons d'après [AYAS et collab. \[2018\]](#) : une isotropie dans le plan et dans le domaine élastique, des modules d'élasticité (module d'Young) spécifiques élevés et des besoins énergétiques limités pour l'activation. Cette dernière caractéristique est démontrée dans le travail [WICKS et GUEST \[2004\]](#) qui a comparé le niveau d'énergie pour l'activation des structures triangulaires et hexagonales avec le réseau de Kagome. L'actionnement se fait par l'extension ou le raccourcissement de la longueur d'une barre actionnée dans le treillis. De plus, la déformation se propage le long d'une ligne dans la direction de la barre déformée. Les matériaux en treillis avec des moyens d'actionnement ont reçu beaucoup d'attention en tant que solutions pour la conception de structures adaptatives où la modification de la longueur d'un membre du treillis conduit à un changement de forme macroscopique conséquent. Par exemple, la réponse à l'actionnement d'un treillis infini de Kagome en 2D a été étudiée dans le domaine linéaire et non linéaire par [LEUNG et GUEST \[2007\]](#). En considérant de grands déplacements, ils ont montré que les instabilités géométriques pouvaient détériorer la réponse mécanique du réseau. Enfin, le treillis de Kagome présente une tolérance remarquable à l'endommagement comme l'expliquent [FLECK et QIU \[2007\]](#); [TANKASALA et collab. \[2017\]](#). Comparée à d'autres architectures comme la cellule carrée ou triangulaire, la cellule Kagome présente une ténacité à la rupture plus élevée pour une densité faible et est relativement insensible aux fissures pour de grandes longueurs de fissures.

Cependant, la grande majorité des études menées sur la cellule Kagome sont le plus souvent limitées au domaine élastique linéaire. Le comportement superélastique des alliages à mémoire de forme (AMF) leur permet de subir une très grande déformation (plus de 5%) avec une récupération complète de leur forme initiale. La superélasticité est le résultat d'une transformation de phase entre deux phases solides, l'austénite et la martensite, induite par contrainte. Cette transformation de phase provoque macroscopiquement une déformation localisée sous forme de bandes qui se propagent le long de l'éprouvette à la manière du phénomène de Piobert-Lüders. La transformation de phase régissant le comportement des AMF et la plasticité de type Piobert-Lüders sont macroscopiquement très similaires ([HALLAI et KYRIAKIDES \[2013\]](#)). [VIARD et collab. \[2020\]](#) ont étudié, numériquement et expérimentalement, l'interaction entre le phénomène de Piobert-Lüders et des réseaux 2D pour différentes topologies. Ils ont montré plusieurs modes de localisation selon que le réseau est dominé par la flexion ou par la traction.

L'association d'un matériau AMF avec une architecture questionne l'effet de cette dernière sur le caractère superélastique. Cette problématique prolonge l'étude sur la plasticité de Piobert-Lüders en permettant d'étudier la décharge du milieu architecturé.

Plusieurs études ont exploré l'effet de la déformation inhomogène dans des géométries simples telles que des tubes en NiTi en traction, torsion et flexion [BECHLE et KYRIAKIDES \[2014\]](#); [JIANG et collab. \[2017\]](#); [REZAEI-HAJIDEHI et STUPKIEWICZ \[2021\]](#)). Par exemple, [BECHLE et KYRIAKIDES \[2014\]](#) précisent le modèle de localisation des déformations pour les tubes NiTi sous flexion. La transformation de phase se produit du côté de la traction de l'échantillon et s'organise en forme de diamant. [MACHADO et collab. \[2015\]](#) ont présenté une étude expérimentale et numérique de structures architecturées faites à partir d'un assemblage de tubes de NiTi. Deux empilements, triangulaire et carré sont comparés. Des essais de compression sont effectués sur ces échantillons architecturés superélastiques et comparés à une modélisation. Ce travail met en évidence une interaction entre l'architecture et les propriétés mécaniques effectives des matériaux cellulaires.

Ce chapitre s'attache à expérimenter et à modéliser le comportement des AMF au sein d'un milieu architecturé périodique. On cherche à comprendre comment la déformation inhomogène induite par une transformation de phase peut modifier le comportement macroscopique d'une structure treillis. Par exemple dans le cas de la cellule Kagome, l'architecture possède des propriétés d'actionnement particulières. On souhaite étudier la possibilité de tirer parti de la localisation des déformations dans les barres du réseau. Les objectifs de ce chapitre sont détaillés en quatre points :

1. Étudier l'interaction entre l'architecture et l'instabilité des matériaux.
2. Étudier l'anisotropie des architectures triangulaire, hexagonale et Kagome avec un comportement pseudo-élastique.
3. Mettre en évidence les zones du treillis qui influencent le comportement macroscopique.
4. Identifier des modes particuliers de localisation.

Ce chapitre est organisé comme suit : Dans une première partie, le comportement du matériau NiTi utilisé pour les expériences sera caractérisé sur une éprouvette pleine non architecturée. A cette occasion, la méthode de corrélation d'images permettant de capter la transformation de phase sera présentée succinctement. Le modèle matériau numérique sera identifié sur les mesures expérimentales afin de reproduire le comportement macroscopique hystérétique des AMF ainsi que la localisation et la propagation des instabilités matérielles.

Une deuxième section s'intéressera à l'étude numérique et expérimentale des AMF architecturés pour les architectures triangulaire, hexagonale et Kagome. Trois modèles seront utilisés : des éprouvettes physiques, ces-mêmes éprouvettes répliquées numériquement et enfin les architectures en milieu infini. A chaque fois, le comportement macroscopique sera comparé au comportement des instabilités dans l'architecture.



## 4.1 Alliage à mémoire de forme, superélasticité et loi de comportement

Le matériau superélastique choisi pour l'étude expérimentale est un alliage NiTi sous forme de plaques d'épaisseurs 0.5 mm et 1 mm. On mène une première série d'expériences afin de caractériser le comportement superélastique. Il est important d'identifier la hauteur en contrainte et la longueur en déformation des deux plateaux de transformations  $A > M$  et  $M > A$ . Les éprouvettes sont découpées par laser dans les plaques.

### 4.1.1 Essai de traction sur une éprouvette en NiTi

On réalise un essai de traction sur une éprouvette en alliage pseudo-élastique NiTi à sa température de superélasticité. La composition du matériau est 55,90% en masse de nickel et les températures de début et de fin de changement de phase sont  $A_s = -11^\circ\text{C}$  et  $A_f = 7^\circ\text{C}$ . Les indices "s" et "f" font référence à "start" et "finish". L'éprouvette en forme d'haltère a pour dimensions : longueur de 36 mm, largeur 6 mm et épaisseur 0.5 mm. Le taux de déformation est égal à  $2.10^{-4}\text{s}^{-1}$  afin d'éviter tout effet d'auto-échauffement.

Les essais sont réalisés sur une machine de traction servo-hydraulique MTS-10t avec des mors hydrauliques. La cellule de traction a une étendue de mesure entre 0 – 100 kN. L'utilisation d'un extensomètre pour mesurer la déformation est inutile à cause de l'hétérogénéité des architectures et du champ de déformation. Le champ de déformation est capturé à l'aide d'un système de corrélation d'images Digital Image Correlation (DIC). Les caractéristiques principales de l'outil de mesure DIC sont : un système de deux caméras 4,1 Mpixels (Manta G419) avec une fréquence d'acquisition maximale de 27 images/s pour une résolution de  $2048 \times 2048$  pixels et le logiciel de corrélation VIC-3D.

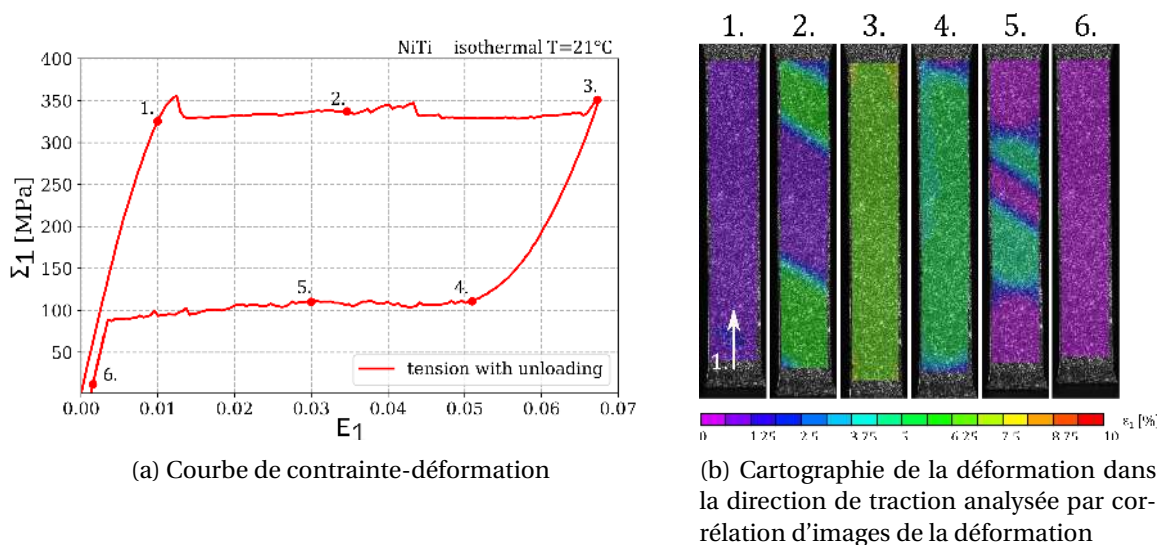


FIGURE 4.1 – Hystérésis de pseudo-élasticité lors d'un essai de traction avec décharge à la température de pseudo-élasticité, ici  $21^\circ\text{C}$ .

La figure 4.1a représente la courbe de contrainte-déformation de l'éprouvette soumise à un cycle de charge jusqu'au point 3 et de décharge jusqu'au point 6. La figure 4.1b illustre les points indiqués sur la courbe de comportement par le champ de déformation obtenu par corrélation d'images. La déformation  $E_1$  est calculée à partir du déplacement machine divisé par la longueur utile initiale de l'éprouvette. La contrainte  $\Sigma_1$  est calculée à partir de la force rapportée à la section utile de l'éprouvette.

Soumise un effort de traction, l'alliage superélastique NiTi subit un changement de phase de l'austénite vers la martensite qui se traduit sur la courbe de comportement macroscopique par un plateau de contrainte (points 1, 2 et 3 sur la figure 4.1a). Le changement de phase se produit à contrainte constante d'une valeur de  $\Sigma_{tr} = 325$  MPa et débute par un pic de contrainte (juste après le point 1) à 360 MPa. En même temps, la déformation se localise en deux bandes inclinées (Fig. 4.1b : image 2) qui se propagent le long de l'éprouvette (Fig. 4.1b : image 3). Le front de bande débute à 1,25% et se termine à 7,5% de déformation d'après l'échelle de couleurs de la corrélation d'images (Fig. 4.1b). Ces deux valeurs correspondent aux niveaux de déformation de début et de fin de plateau de la courbe de comportement (Fig. 4.1a). La déformation redevient homogène après que la bande de transformation a parcouru toute l'éprouvette. La phase martensitique est alors dans son domaine élastique. La déformation macroscopique du point 3 sur la courbe de comportement correspond à la déformation donnée par la corrélation d'images qui est alors homogène et aux alentours de 7% de déformation. Ensuite, l'éprouvette est déchargée. Sur la courbe de contrainte-déformation, on observe un comportement linéaire entre les points 3 et 4. Après le point 4, un nouveau plateau de contrainte se dessine à un niveau de contrainte plus faible,  $\Sigma_{tr} = 100$  MPa. Ce plateau indique le changement de phase, martensite vers austénite. Le plateau débute à 5% et se termine à 0,3% de déformation. Après la fin du plateau, l'éprouvette retrouve le comportement linéaire élastique de la phase austénitique. L'analyse DIC confirme que la déformation décroît d'abord de manière uniforme dans l'éprouvette (entre les points 3 et 4) pour atteindre une valeur de 5%. Ensuite de manière identique à la phase de chargement, deux bandes de localisation de la déformation traverse l'éprouvette entre les points 4 et 5. Au point 6, l'éprouvette est complètement déchargée. La réponse macroscopique en forme de boucle d'hystérésis (Fig. 4.1a) démontre que la transformation de phase est réversible.

#### 4.1.2 Identification de la loi de comportement

Nous venons de mettre en lumière l'effet superélastique sur une éprouvette de NiTi en traction avec décharge. A l'origine de cette propriété se trouve une transformation entre deux phases solides, l'austénite et la martensite qui peut être activée par un chargement mécanique ou thermique. La localisation et la propagation associée au changement de phase produit une déformation hétérogène dans le matériau. L'enjeu du modèle numérique que nous souhaitons utiliser est de reproduire la propriété pseudo-élastique

des AMF pour le comportement macroscopique mais également pour la localisation et la propagation de la transformation de phases. Le comportement macroscopique observé lors d'un essai de traction sur un échantillon en AMF est très similaire à celui de l'effet de Piobert-Lüders dans les aciers doux. Cependant, les phénomènes physiques régissant ces instabilités matérielles restent très différents. Le premier est lié à un changement de phase solide tandis que le second est relatif à la plasticité. Nous porterons notre choix sur un modèle phénoménologique en privilégiant la reproductibilité du phénomène macroscopique sans s'attarder sur la description physique du changement de phase.

Le modèle doit donc être capable de reproduire la localisation et la propagation de la déformation de transformation de phase, ainsi que la réversibilité de la déformation lors d'un cycle de charge-décharge. Afin de reproduire le caractère instable de la localisation, [ERICKSEN \[1975\]](#) met en évidence la nécessité d'utiliser un comportement local de type adoucissant-durcissant. Les travaux de [HALLAI et KYRIAKIDES \[2013\]](#) démontrent par l'expérience ce comportement pour un échantillon d'acier doux présentant de la plasticité de type Piobert-Lüders. Ce principe est mis en application dans les travaux de [SHAW et KYRIAKIDES \[1997\]](#) pour la modélisation d'un essai de traction sur un échantillon de NiTi. De nombreux modèles reprennent et adaptent ce comportement adoucissant-durcissant pour la modélisation de la localisation et de la propagation des instabilités matérielles. [BALLARIN et collab. \[2007\]](#); [MARAIS et collab. \[2012\]](#); [MAZIÈRE et FOREST \[2013\]](#) pour Piobert-Lüders ou [BADNAVA et collab. \[2015\]](#); [LEVITAS et OZSOY \[2009\]](#); [LEÓN BALDELLI et collab. \[2015\]](#) pour les AMF. Cependant, ces modèles ne reproduisent pas la réversibilité de la déformation. Les travaux de [JIANG et collab. \[2017\]](#) proposent l'étude de tube en NiTi en compression avec une loi de comportement pour reproduire le flambage et le comportement réversible du NiTi. Le modèle exploite pour cela une fonction d'écrouissage cinématique non linéaire pour décrire la déformation de transformation. Le caractère instable du matériau n'est alors pas pris en compte. Finalement, la loi de comportement phénoménologique proposée dans ces travaux modélise avec succès le caractère pseudo-élastique d'une éprouvette de NiTi en traction avec décharge.

Ce modèle phénoménologique est adapté au formalisme du logiciel de calculs éléments finis Zset et présenté plus en détail en annexe en petites et en grandes déformations. La fonction d'écrouissage cinématique est décrite par une fonction définie par morceaux qui permet de reproduire le comportement adoucissant-durcissant demandé pour modéliser la localisation et la propagation des instabilités matérielles. La loi proposée par [JIANG et collab. \[2017\]](#) et présentée ci-dessous est écrite en petites déformations. La variable  $\epsilon_e^t$  représente la déformation de transformation équivalente et  $\epsilon_{tr}$  le tenseur de déformation de transformation.

$$\underline{\mathbf{X}} = \left( h_0 \epsilon_e^t + (h_1 - h_0) \left[ \epsilon_e^t - \frac{1}{b} (1 - e^{-b \epsilon_e^t}) \right] + (h_2 - h_1) \times A_{potentiel} \right) \times \frac{2}{3} \frac{\epsilon_{tr}}{\sqrt{\epsilon_{tr} : \epsilon_{tr}}} \quad (4.1)$$

Le potentiel  $A_{potentiel}$  évolue en fonction de  $\epsilon_e^t$ .

$$A_{potentiel} = (h_2 - h_1) \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq \epsilon_e^t \leq \epsilon_a \\ (\epsilon_b - \epsilon_a) \left( \frac{\zeta^3}{4} + \frac{\zeta^2}{8} \right) & \text{si } \epsilon_a \leq \epsilon_e^t \leq \epsilon_b \\ \frac{3}{8}(\epsilon_b - \epsilon_a) + (\epsilon_e^t - \epsilon_b) & \text{si } \epsilon_b \leq \epsilon_e^t \\ \zeta = \frac{\epsilon_e^t - \epsilon_a}{\epsilon_b - \epsilon_a} \end{cases} \quad (4.2)$$

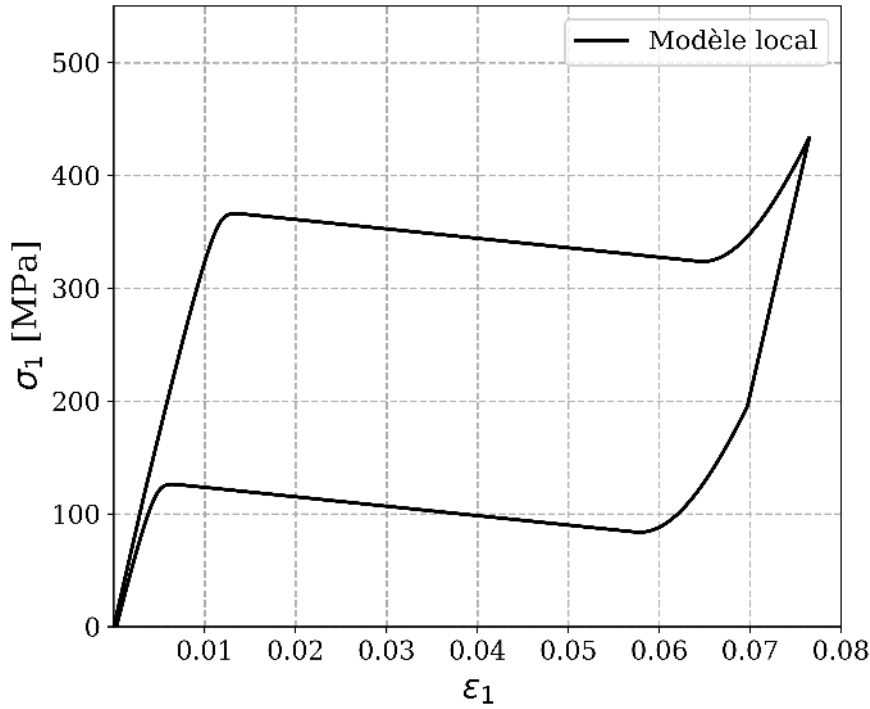


FIGURE 4.2 – Intégration locale sur un point de Gauss de la loi de comportement présentée.

La figure 4.2 représente la fonction utilisée pour décrire l'évolution de la variable d'écrouissage cinématique  $X$ . Les hypothèses prises pour aboutir à cette loi de comportement sont rappelées en dessous. Certaines sont héritées des travaux de [JIANG et collab. \[2017\]](#) et d'autres ont été ajoutées pour correspondre à notre cas d'étude.

1. La phase auténitique est un matériau isotrope linéaire élastique.
2. La déformation de transformation (notée  $\epsilon_{tr}$ ) est considérée comme une partie inélastique de la déformation et supposée isochore.
3. Le modèle est isotherme.
4. L'asymétrie de compression n'est pas décrite.

Le tableau suivant 4.1 récapitule les valeurs des paramètres du modèle pour reproduire un essai de traction avec décharge. L'identification consiste principalement à identifier des niveaux de contrainte et des longueurs de déformation équivalents pour les deux

plateaux entre l'expérience et la simulation.

E (GPa)	$\nu$	$R_0$ (MPa)	$b$	$h_0$ (GPa)	$h_1$ (GPa)	$h_2$ (MPa)	$\varepsilon_1$ (%)	$\varepsilon_2$ (%)
68.3	0.425	93.8	2500	1434	-9.751	78.55	2.7	3.3

TABLEAU 4.1 – Paramètres du modèle phénoménologique

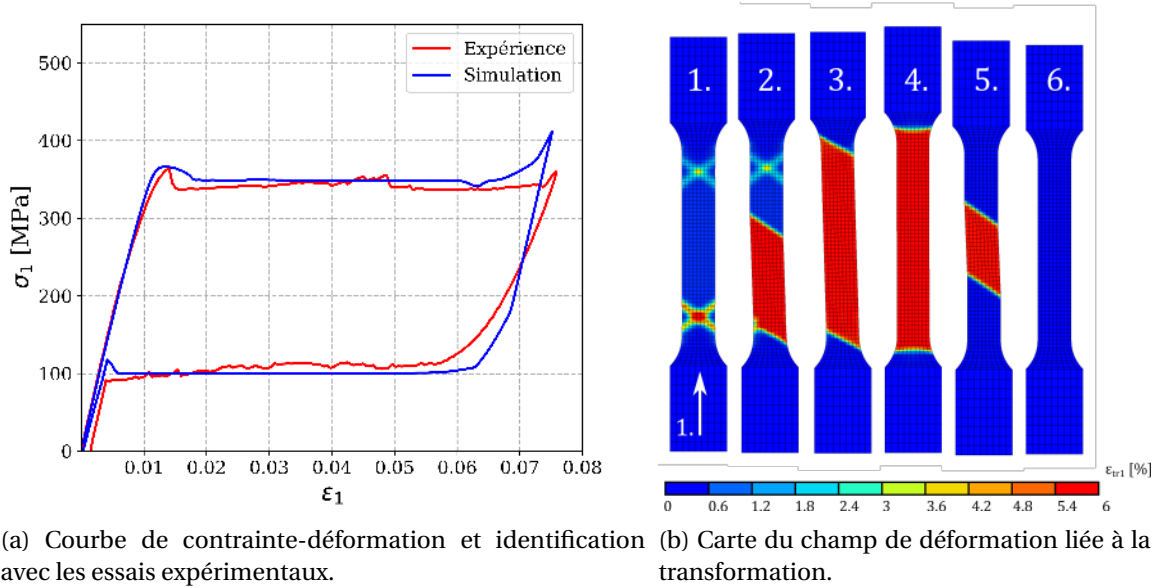


FIGURE 4.3 – Hystérésis de pseudo-élasticité d'un essai de traction numérique

La réponse macroscopique de la simulation numérique de l'essai de traction avec décharge est tracée en figure 4.3a. La cartographie du champ de déformation est montrée sur la figure 4.3b pour certains instants remarquables. La grandeur  $\varepsilon_{tr1}$  fait référence à la partie de la déformation liée à la transformation de phase dans la direction de traction qui est la direction principale de l'éprouvette. Dans la première phase, l'éprouvette se déforme de manière homogène dans le domaine d'élasticité de la phase austénitique (avant l'instant 1.). Ensuite, la contrainte atteint un maximum de  $\sigma_1 = 380$  MPa (instant 1.) pour retomber à  $\sigma_1 = 350$  MPa. Cette chute de contrainte correspond au moment de la localisation de l'instabilité matérielle que l'on peut voir sur la cartographie. A cet instant, la déformation se localise en deux endroits dans l'éprouvette ce qui a pour effet de décharger le reste de l'éprouvette. La différence de forme entre l'expérience et la simulation s'explique par le fait que dans le modèle numérique la localisation se fait d'abord selon les 2 modes symétriques de l'éprouvette. Cela donne 4 possibilités de bandes (2 inclinaisons et 2 endroits). Dans notre cas, nous n'introduisons pas de défaut dans le maillage pour faciliter la localisation. Le calcul favorise une des quatre bandes pour propager l'instabilité (instant 2.). Sur la courbe de contrainte (4.3a), on observe alors un plateau de contrainte pendant toute la propagation de la bande de déformation de transformation.

La bande inclinée de déformation provoque une inclinaison macroscopique de l'éprouvette (instant 3.) jusqu'à ce qu'elle soit propagée dans toute l'éprouvette (instant 4.). En effet, le mouvement latéral de l'éprouvette n'est pas contraint. A ce moment toute la zone utile de l'éprouvette se trouve dans la phase martensitique. Ensuite, on décharge l'éprouvette. L'éprouvette subit d'abord une diminution homogène de la déformation jusqu'à atteindre un plateau de contrainte de valeur  $\sigma_1 = 100\text{MPa}$ . Deux bandes amorcent la transformation inverse aux deux extrémités de l'éprouvette (instant 5.). Ce deuxième plateau de contrainte, plus bas que le premier, correspond à la transformation de la phase martensitique vers la phase austénitique. A la fin du plateau, les deux bandes se sont rejointes (instant 6.). Enfin, l'éprouvette retrouve un comportement élastique linéaire pour retourner à une déformation nulle et une contrainte nulle.

## 4.2 Etude expérimentale de matériaux superélastiques architecturés

### 4.2.1 Choix des architectures

Dans le cadre de ces travaux sur les instabilités matérielles dans les AMF, les trois architectures retenues pour étudier leur propagation dans les milieux périodiques sont : le triangle (Fig. 4.4a), l'hexagone (Fig. 4.4b) et la cellule Kagome (Fig. 4.4c et Fig. 4.4d). L'architecture carrée appartient aux deux catégories de treillis dominés par la flexion ou par la traction en fonction de la direction de sollicitation du réseau. Ces deux catégories sont déjà représentées par les architectures triangulaire et hexagonale. Les essais expérimentaux de VIARD et collab. [2020] démontrent que l'architecture carrée appartient bien aux deux catégories. Le comportement des instabilités dans la configuration dominée par la traction est similaire à celui de la plaque sans architecture et le comportement dans la configuration dominée par la flexion est similaire à celui de l'architecture hexagonale. Ainsi, nous ne l'étudierons pas dans cette étude sur la superélasticité.

Ces mêmes travaux ont montré que l'anisotropie pendant la propagation des instabilités matérielles de type Piobert-Lüders était faible. Les essais expérimentaux ne sont réalisés que dans une seule direction pour les deux architectures triangulaire et hexagonale. En revanche, l'architecture Kagome est étudiée dans deux directions perpendiculaires aux vues des symétries de la cellule.

Le montage expérimental est le même que celui réalisé pour l'éprouvette pleine décrite dans la section 4.1.1 avec un enregistrement vidéo des essais qui permettra une étude par corrélation d'images. Le protocole pour toutes les architectures est le même. Chaque éprouvette est soumise à un essai de traction avec décharge à température de super-élasticité afin de décrire l'effet d'hystérésis. A la fin du cycle, l'éprouvette est re-



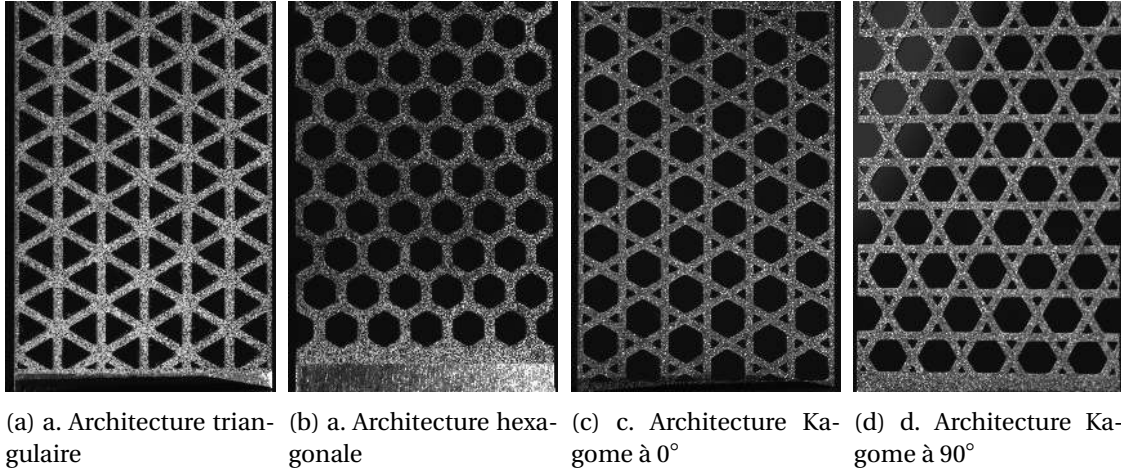


FIGURE 4.4 – Eprouvettes architecturées avec le moucheti pour la corrélation d’images.

chargée en augmentant la déformation macroscopique finale avant décharge. Cela est fait jusqu’à la rupture de l’éprouvette lorsqu’il n’est alors plus possible de recharger l’échantillon. Le chargement est contrôlé en déformation afin capturer le plateau de transformation qui se produit à contrainte constante. Le déchargement est asservi en effort afin de ne pas risquer le flambage de l’éprouvette en cas de déformation résiduelle. On pourrait s’attendre à tirer profit de l’effet super-élastique et observer une déformation réversible sur l’éprouvette complète. Cependant, l’architecture des échantillons rend le champ de déformation hétérogène qui s’ajoute aux hétérogénéités induites par la transformation de phase. Il devient alors complexe de prédire le comportement macroscopique de ces éprouvettes architecturées. Si un comportement de type plateau est observable, il est impossible de déterminer son niveau de déformation finale. Cela explique pourquoi on procède de manière incrémentale afin d’approcher la déformation macroscopique qui donne l’effet super-élastique maximal.

#### 4.2.2 Architecture triangulaire

La figure 4.5 représente les courbes de comportement macroscopiques de deux éprouvettes avec l’architecture triangulaire après deux cycles de charge-décharge chacune. La déformation macroscopique  $E_y$  est calculée comme le rapport du déplacement machine et de la longueur utile de l’éprouvette qui est définie comme la longueur de la zone architecturée sur l’éprouvette. La contrainte macroscopique  $\Sigma_y$  est définie comme le rapport de l’effort machine et de la section de l’éprouvette sans architecture. De cette manière, on ne privilégie pas une section de l’éprouvette en particulier et on utilise la même définition pour les quatre architectures. On souligne le fait que ce calcul d’homogénéisation sous-estime la contrainte réelle vue par les brins. Les figures 4.6 et 4.7 représentent les analyses par corrélation d’images du premier et du second cycle de l’éprouvette 1. Chaque image représente la carte des déformations dans le direction de traction  $\epsilon_y$  et est repérée par la déformation macroscopique  $E_y$  à cet instant. Cette dernière déformation



macroscopique est l'abscisse du graphique Fig. 4.5.

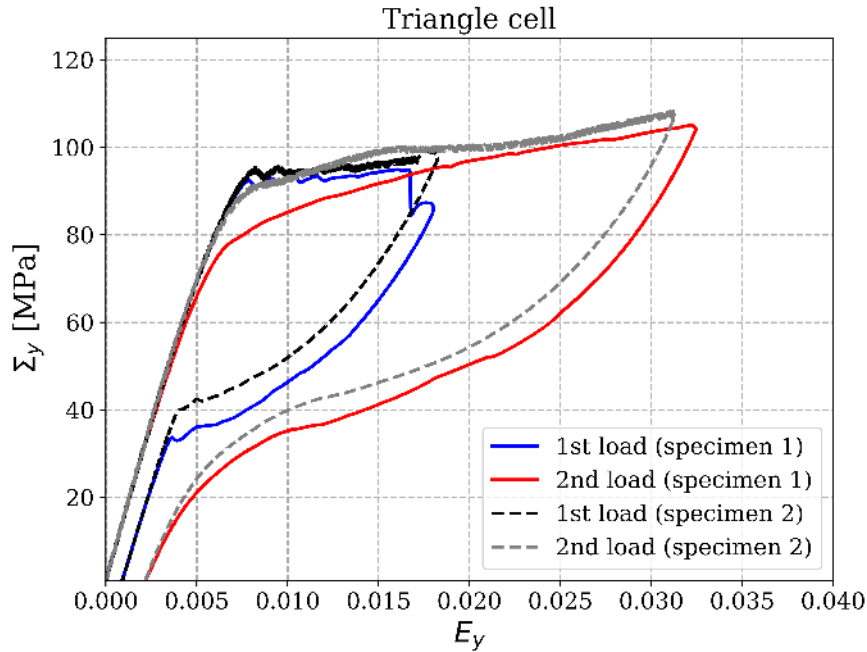


FIGURE 4.5 – Comportement macroscopique de la cellule triangulaire.

### Comparaison des deux premiers cycles de chargement.

On compare les deux premiers cycles de chargement de l'éprouvette 1 (les courbes rouge et bleue sur la figure 4.5). La première charge a lieu jusqu'à une déformation macroscopique  $E_y = 0,018$  et la deuxième jusqu'à  $E_y = 0,032$  pour des contraintes macroscopiques d'environ  $\Sigma_y = 200 \text{ MPa}$  et  $\Sigma_y = 210 \text{ MPa}$ , respectivement. Dans les deux cas, la courbe macroscopique présente lors de la charge une partie élastique linéaire suivie d'un plateau de contrainte et lors de la décharge une boucle d'hystérésis non linéaire dans une première partie pour terminer avec une portion de nouveau linéaire. On remarque que les transitions entre les comportements linéaires et non linéaires sont très nettes pour les premiers cycles, tandis que pour les seconds elles sont adoucies. En effet, le plateau est amorcé par un pic de contrainte comme dans le cas de la plaque non architecturée (4.1a). Ce pic de contrainte indique le début de la localisation de la transformation de phase dans le réseau.

D'autre part, à chaque fin de cycle une déformation résiduelle est présente, ce qui indique la présence de plasticité localement dans le réseau. Seule la phase martensitique est en mesure de plastifier. Certaines zones du réseau subissent donc des niveaux de contraintes bien supérieurs à la contrainte macroscopique. Il ne faut pas oublier que cette dernière est également sous-estimée par définition.

**Mise en relation du comportement macroscopique et de l'analyse DIC.**

Dans cette section, on met en relation les courbes macroscopiques du premier et du second cycle de la première éprouvette, respectivement les courbes bleue et rouge sur la figure 4.5 et leur analyse par corrélation d'images Fig. 4.6 et Fig. 4.7.

Le réseau subit d'abord la déformation élastique de la phase austénitique jusqu'à une déformation macroscopique de 0.005 (Fig. 4.6 : images 1 à 4). Les branches alignées avec la direction de traction se déforment en priorité, le niveau de déformation  $\varepsilon_y$  est compris entre 0,0075 et 0,015. On mesure un module d'Young de 14 GPa. Ensuite, la déformation se localise dans 5 branches en traction toutes alignées selon une droite inclinée (Fig. 4.6 image 5). La transformation  $A > M$  se poursuit de manière aléatoire dans le reste des branches en tension (Fig. 4.6 : images 5 à 9). Chaque barre en traction subit individuellement la localisation de la transformation de phase puis sa propagation. La courbe de comportement macroscopique est la somme des comportements de chaque cellule unitaire qui compose le réseau. Le plateau de contrainte observable à partir d'une déformation macroscopique  $E_y = 0,0075$  est à mettre en relation avec la localisation et la propagation du changement de phase dans les barres verticales. Ce plateau se produit à une contrainte macroscopique  $\Sigma_y = 95 \text{ MPa}$ . Une fois l'éprouvette déformée de  $E_y = 0,015$ , une majorité de branches ont localisé. Cependant toutes les cellules unitaires ne sont pas dans le même état de déformation locale. Certaines voient une déformation locale  $\varepsilon_y = 0,06$  quand d'autres non pas encore localisée. A la déformation macroscopique  $E_y = 0,017$ , une branche se brise dans la colonne la plus à droite de l'éprouvette (Fig. 4.6 : image 10). Sur la figure 4.5, on observe une chute de contrainte de 10 MPa pour la même déformation  $E_y$  sur la courbe bleue. A ce moment, on décharge l'éprouvette. Sur l'analyse par corrélation d'images, les niveaux de déformation locale diminuent simultanément entre les images 10 et 13. Toutes les barres en traction n'ont pas avec le même niveau de déformation au départ, les moins déformées voient une transformation de phase  $M > A$  plus courte. Sur l'image 13, il reste deux lignes de branches déformées qui se coupent sur la branchée cassée. C'est la conséquence de la redistribution des efforts. Sur la courbe contrainte-déformation (courbe bleue Fig. 4.5), on observe un comportement non linéaire entre  $E_y = 0,017$  et  $E_y = 0,003$ . Le comportement macroscopique ne laisse plus apparaître une phase linéaire puis un plateau de transformation  $M > A$ . On retrouve cependant pour les déformations macroscopiques inférieures à  $E_y = 0,003$ , la phase élastique linéaire de l'austénite avec le même module d'Young qu'à la charge. La transition entre la fin de transformation et le comportement élastique est nette comme lors de l'essai sur l'éprouvette pleine (Fig. 4.1a). On retrouve un comportement hystérétique avec une déformation macroscopique résiduelle de 0,001 (Fig. 4.6 : image 14).

Pour le deuxième cycle, après le comportement élastique de la phase austénitique, la transformation  $A > M$  se produit entre 0.005 et 0.032 en déformation et entre 150MPa et 210MPa en contrainte. On distingue un schéma de localisation privilégié pour les

branches alignées avec celle cassée (Fig. 4.7 :image 2). A la fin du plateau de contrainte, toutes les branches verticales sont dans la phase martensitique. A la différence du premier cycle, toutes les branches ont le même niveau de déformation locale de  $\varepsilon_y > 0,06$  (Fig. 4.7 :image 3). La présence de la branche cassée fait diminuer les niveaux de déformation locale dans toute la colonne. Lors de la décharge, la transformation de phase  $M > A$  se produit dans toutes les branches simultanément. Il est confirmé que le caractère aléatoire de la localisation de l'instabilité matérielle disparaît à la décharge. La dernière image de l'analyse par corrélation d'images (Fig. 4.7 :image 6) montre que le champ de déformation locale retrouve des niveaux proches de 0 où seules les barres verticales conservent une déformation locale entre 0,0225 et 0,001. La diminution simultanée des déformations locales dans l'ensemble des cellules du réseau est accentuée par rapport au premier cycle. Cela peut être une explication à la disparition du comportement élastique de la phase austénitique après la transformation  $M > A$  sur la courbe de contrainte-déformation (courbe rouge Fig. 4.5).

### Conclusion sur le comportement des instabilités dans le réseau triangulaire.

On observe bien un comportement hystérétique indiquant que l'architecture triangulaire conserve le comportement superélastique. Lors de la charge de l'éprouvette, on observe bien la localisation et la propagation du changement de phase  $A > M$  dans le réseau triangulaire d'après la réponse macroscopique. Les cartes de déformations obtenues par corrélation d'images précisent que la localisation se passe dans les branches du réseau en cascade. Cependant lors de la décharge, le plateau de transformation  $M > A$  n'existe plus. Sur les cartes de déformation, on observe alors que la transformation se produit dans toutes les branches en même temps.

### 4.2.3 Architecture hexagonale

La figure 4.8 représente les courbes de comportement macroscopiques de l'éprouvette avec l'architecture hexagonale pour trois cycles de charge-décharge. Les figures 4.9 et 4.10 représentent les analyses par corrélation d'images du premier et du troisième cycle de chargement. Les remarques faites pour l'architecture triangle concernant la définition de la déformation et de la contrainte macroscopique  $E_y$  et  $\Sigma_y$  restent valables.

### Comparaison des cycles de chargement.

Les trois courbes de la figure 4.8 sont les essais respectivement déchargés pour des valeurs de déformations macroscopiques égaux à  $E_y = 0,022$ ,  $E_y = 0,045$  et  $E_y = 0,077$ . Lors du dernier cycle, deux branches ont rompu avant la décharge ce qui explique les deux sauts de contrainte. La réponse macroscopique de l'architecture hexagonale lors de la charge présente une première zone élastique linéaire de module d'Young,  $E_h = 17,5 \text{ GPa}$ ,



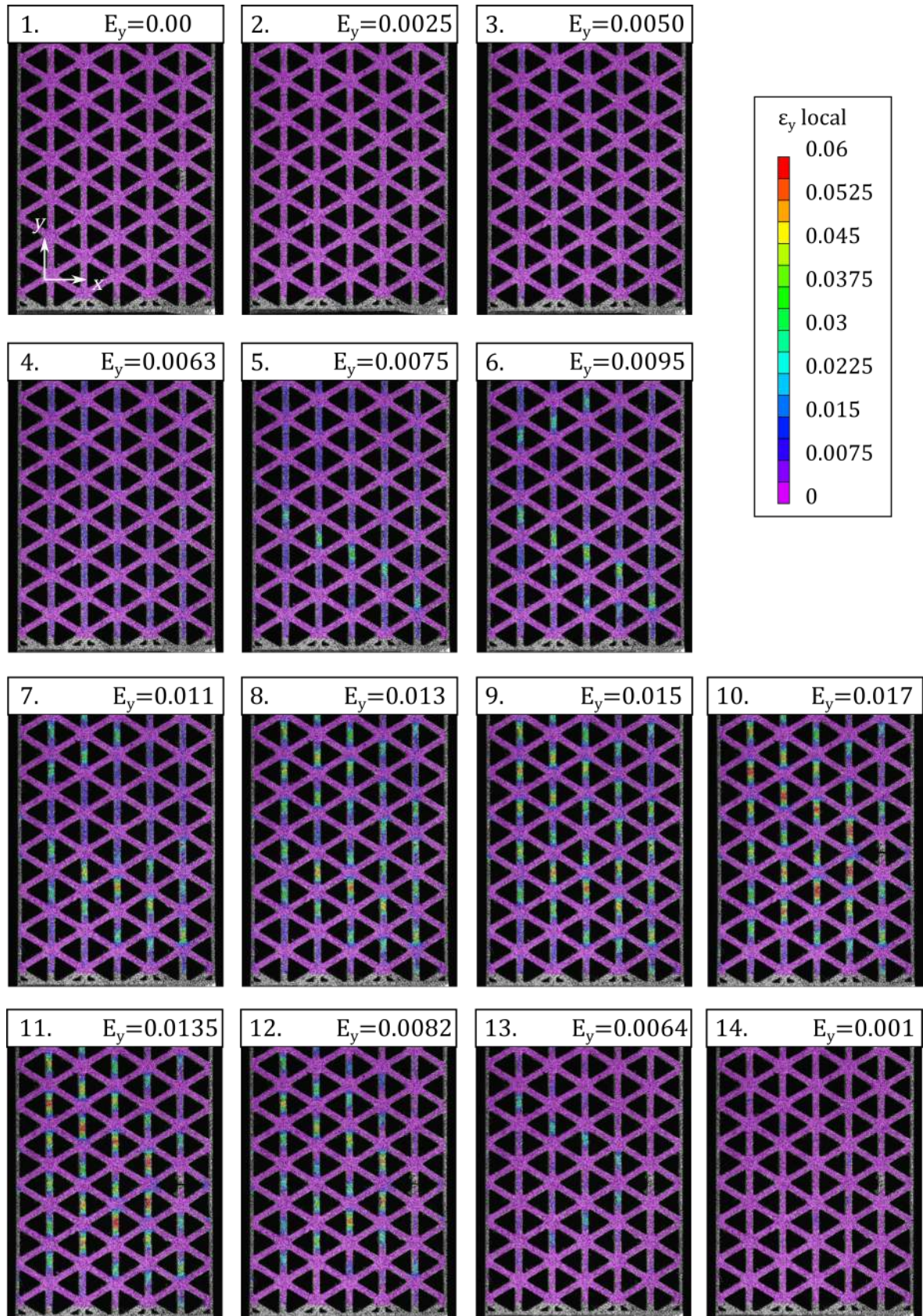


FIGURE 4.6 – Analyse par corrélation d’images de l’architecture triangulaire. Eprouvette 1 et cycle 1.



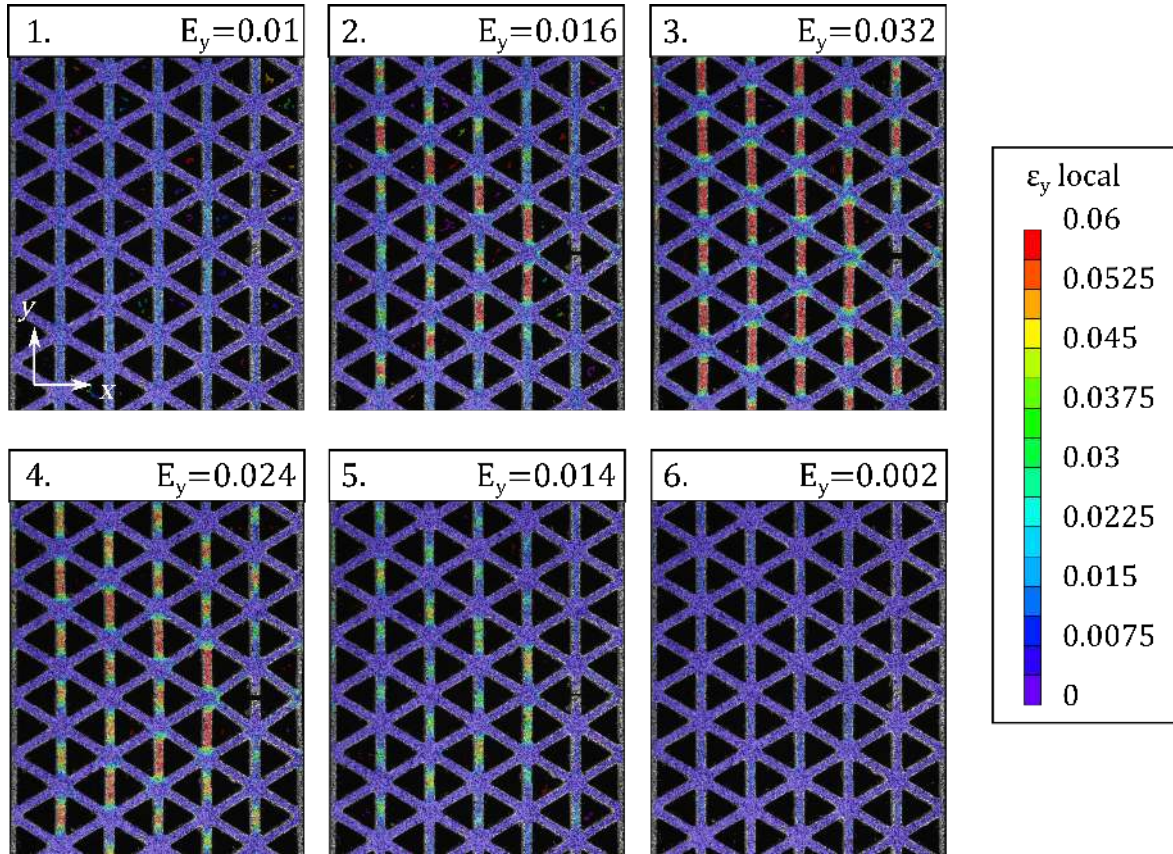


FIGURE 4.7 – Analyse par corrélation d'images de l'architecture triangulaire. Eprouvette 1 et cycle 2.

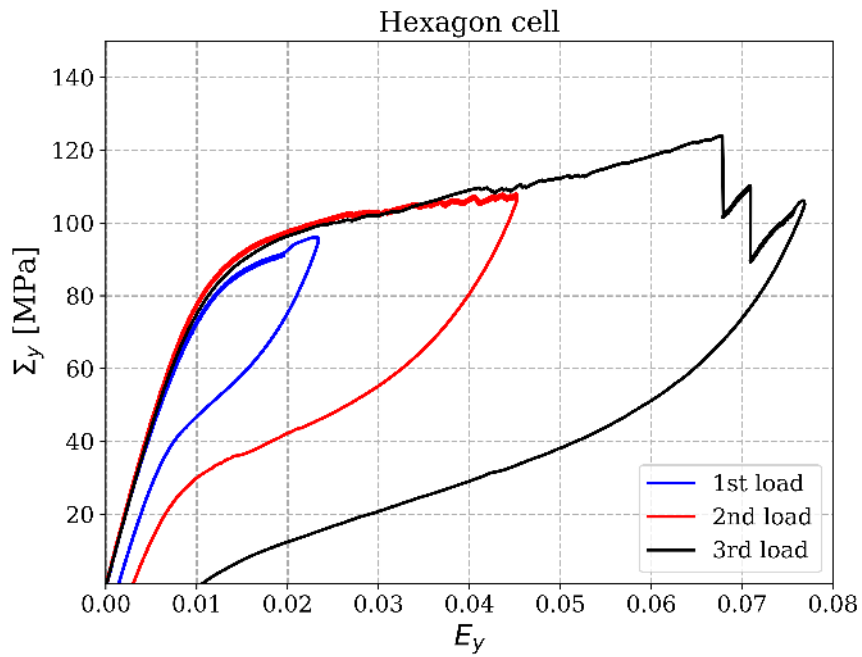


FIGURE 4.8 – Comportement macroscopique de la cellule hexagonale.

identique pour les trois cycles. Le comportement devient ensuite non linéaire, entre  $E_y = 0,01$  et  $E_y = 0,02$ , pour se prolonger par un plateau de contrainte incliné.

On rapproche ce comportement de type plateau au plateau de transformation  $A > M$  observé dans le cas d'un éprouvette pleine (Fig. 4.1a) et de l'architecture triangulaire (Fig. 4.5). Le début du plateau est évalué à une déformation macroscopique de  $E_y = 0,027$  et une contrainte macroscopique  $\Sigma_y = 200 \text{ MPa}$  pour les deux derniers cycles. Le premier n'atteint jamais ces niveaux de déformation et de contrainte. On remarque sur les courbes rouge et noire de la figure 4.8 des perturbations du niveau de contrainte macroscopique. Cela est caractéristique de la localisation d'une instabilité matérielle. Lors de la décharge, la boucle d'hystérésis présente une zone non linéaire de transition avant de retrouver un comportement linéaire élastique, au moins pour les deux premiers cycles. Le troisième ne fait pas apparaître de retour élastique en fin de décharge mais une déformation permanente plus importante que les deux premiers cycles. La déformation permanente une fois l'éprouvette complètement déchargée augmente avec le nombre de cycles précédents. Elle est de  $E_y = 0,0013$  pour le premier,  $E_y = 0,0029$  pour le second et  $E_y = 0,01$  pour le dernier.

Contrairement à l'architecture triangulaire, les transitions entre les phases linéaires d'élasticité et non linéaires de transformation de phase sont toujours progressives. On peut noter par exemple que le pic de contrainte en début de plateau n'existe plus. Cela peut être expliqué par le caractère *bending-dominated* du réseau hexagonal. Les branches sont sollicitées en flexion principalement, ce qui défavorise la localisation des instabilités matérielles.

### Mise en relation du comportement macroscopique et de l'analyse DIC.

La figure 4.9 représente l'analyse par corrélation d'images du premier cycle de chargement de l'éprouvette à architecture hexagonale. Pour les images 1 à 4, le champ de déformation local  $\epsilon_y$  reste inférieur à 0,03 sans que l'on puisse identifier une localisation de la déformation importante. On peut remarquer quelques hétérogénéités là où les branches inclinées par rapport à la direction de traction voient une déformation nettement plus importante (aux alentours de 0,025). Les deux images suivantes 5 et 6 correspondent à la décharge. Les niveaux de déformation diminuent de manière homogène dans toute l'éprouvette jusqu'à être nuls. Ces observations valident l'hypothèse selon laquelle il n'y a pas de manifestation des instabilités matérielles lors du premier chargement de l'éprouvette hexagonale. Le plateau de transformation pour l'architecture hexagonale existe pour des déformations supérieures à  $E_y = 0,02$ .

L'analyse par corrélation d'images du dernier cycle montre des niveaux de déformation plus importants, ce qui permet d'illustrer clairement les phénomènes observables sur la courbe de comportement macroscopique (Fig. 4.8) dans le cas de l'architecture hexagonale. Lors du chargement, le réseau se déforme d'abord de manière homogène

sans localisation. Ce comportement a lieu pour des niveaux de déformation macroscopiques inférieurs à  $E_y = 0,01$ .

La figure 4.10 représente l'analyse par corrélation d'images du troisième cycle. Pour les images 1 à 3, on retrouve le même champ de déformation que pour le premier cycle. Les branches obliques sont plus chargées que les branches verticales dans la direction de traction. Le réseau hexagonal exhibe un comportement dominé par la flexion. Ce comportement est identifié sur la courbe macroscopique Fig. 4.8 entre les déformations macroscopiques  $E_y = 0,01$  et  $E_y = 0,02$  par la transition non linéaire évoquée précédemment. L'image 4 capture le moment de la première localisation qui a lieu dans une branche en traction pure. Le niveau de déformation locale devient alors plus important dans ces branches. Entre les images 4 et 8, la localisation dans les branches verticales se poursuit jusqu'à ce que le réseau complet soit localisé. Cependant, les branches localisent toutes dans une même ligne avant de localiser dans une nouvelle ligne. On identifie un ordre de localisation particulier dans le caractère aléatoire de l'instabilité matérielle premier. En d'autres termes, on met en lumière l'influence de l'architecture sur ces instabilités. La comparaison des courbes macroscopiques avec l'analyse par corrélation d'image permet de relier les perturbations de contrainte à la localisation de la déformation dans les branches en traction. Aux instants illustrés par les images 9 et 10, les niveaux du champ de déformation continuent d'augmenter tout en conservant les mêmes hétérogénéités de la figure 8. L'image 11 marque le début de la décharge avec la rupture de plusieurs branches dans le réseau. Autour des branches brisées, la déformation locale retrouve immédiatement un niveau de déformation nulle. Lors de la décharge (images 12 à 14), toutes les cellules du réseau sont déchargées collectivement sans localisation de la transformation  $M > A$ . On ne retrouve pas sur la courbe noire Fig. 4.8 de perturbation de la contrainte.

### **Conclusion sur le comportement des instabilités dans l'architecture hexagonale.**

On observe toujours un comportement avec une boucle d'hystérésis, preuve de la superélasticité dans le réseau hexagonal. A l'instar des instabilités de plasticité de type Piobert-Lüders dans un réseau hexagonal, la réponse macroscopique de l'éprouvette hexagonale en matériau superélastique ne présente pas de plateau de contrainte. Lors de la charge et de la décharge, ce plateau de transformation disparaît. Au lieu d'un plateau, on observe lors de la charge un comportement durcissant d'abord lisse puis légèrement crenelé à partir d'une certaine valeur de déformation. Après avoir mis en relation les figures 4.8 et figures 4.10, il semble que ces perturbations de contrainte sur la courbe macroscopique indiquent la présence d'instabilités matérielles dans le réseau. La figure 4.10 met en évidence des localisations successives dans les branches en traction du réseau.



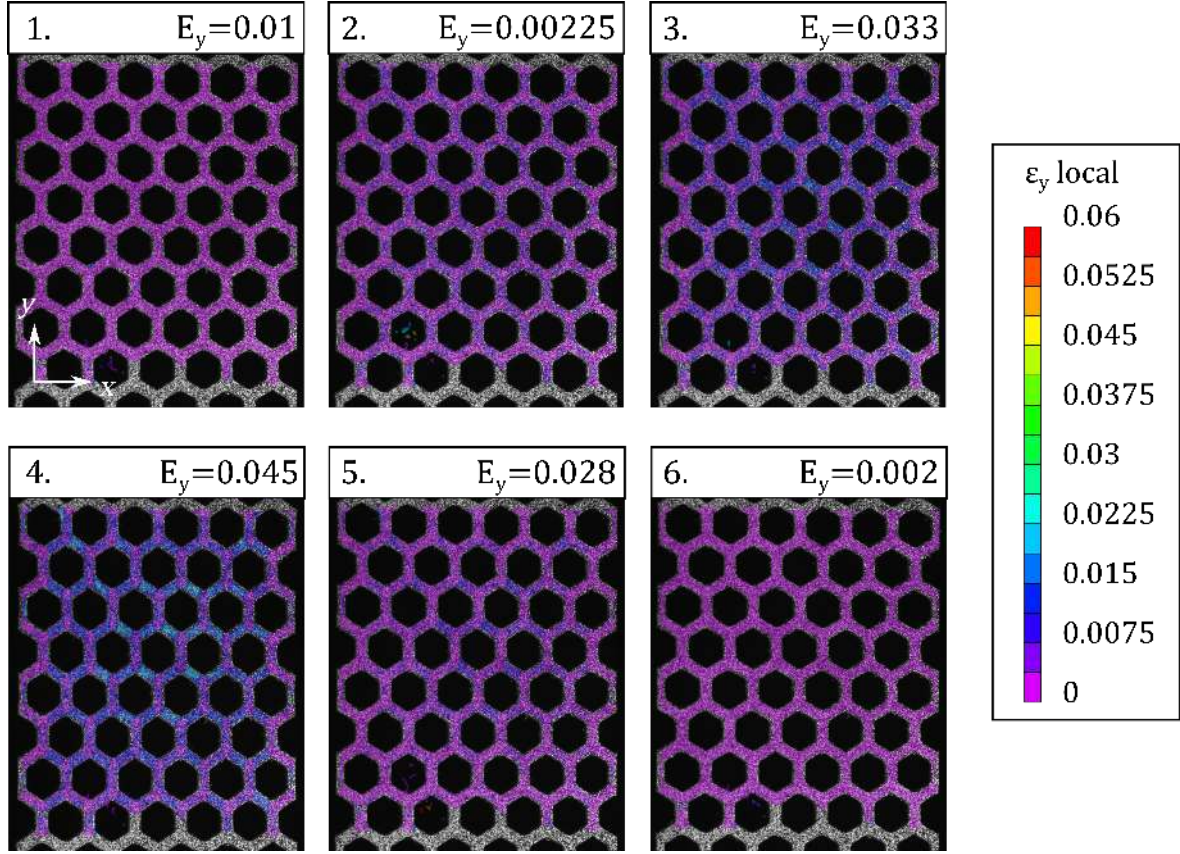


FIGURE 4.9 – Analyse par corrélation d’images de l’architecture hexagonale. Eprouvette 1 et cycle 1.

#### 4.2.4 Architecture Kagome

##### Comparaison du comportement macroscopique des deux orientations.

Les figures 4.11 et 4.12 représentent les comportements macroscopiques de l’architecture Kagome sollicitée en traction et orientée, respectivement, dans les directions  $0^\circ$  et  $90^\circ$  respectivement. Dans les deux cas, le premier échantillon subit d’abord un cycle jusqu’à une déformation  $E_y = 0,016$  puis un deuxième jusqu’à une déformation  $E_y = 0,033$ . Le deuxième échantillon quant à lui subit un seul cycle jusqu’à une déformation  $E_y = 0,033$ .

Les courbes de contrainte-déformation macroscopiques des deux orientations dessinent une boucle d’hystérésis de forme similaire. Les deux présentent un comportement linéaire élastique. Le module d’Young des deux orientations est identique et égal à 12,5 GPa. Le comportement élastique de l’orientation 0 persiste jusqu’à une déformation macroscopique  $E_y = 0,007$  tandis que pour l’orientation perpendiculaire, elle atteint une valeur de  $E_y = 0,01$ . La phase élastique est interrompue par un plateau de contrainte indiquant la transformation  $A > M$ . Pour la direction 0, il débute à une contrainte  $\Sigma_y = 90$  MPa, se termine à  $\Sigma_y = 99$  MPa et évolue entre les déformations macroscopiques  $E_y = 0,01$  et  $E_y = 0,0335$ . Pour la direction 90, il débute à une contrainte  $\Sigma_y = 110$  MPa, se termine à  $\Sigma_y = 120$  MPa et évolue entre les déformations macroscopiques  $E_y = 0,01$  et  $E_y = 0,0335$ . La différence de hauteur des deux plateaux met en lumière le caractère aniso-

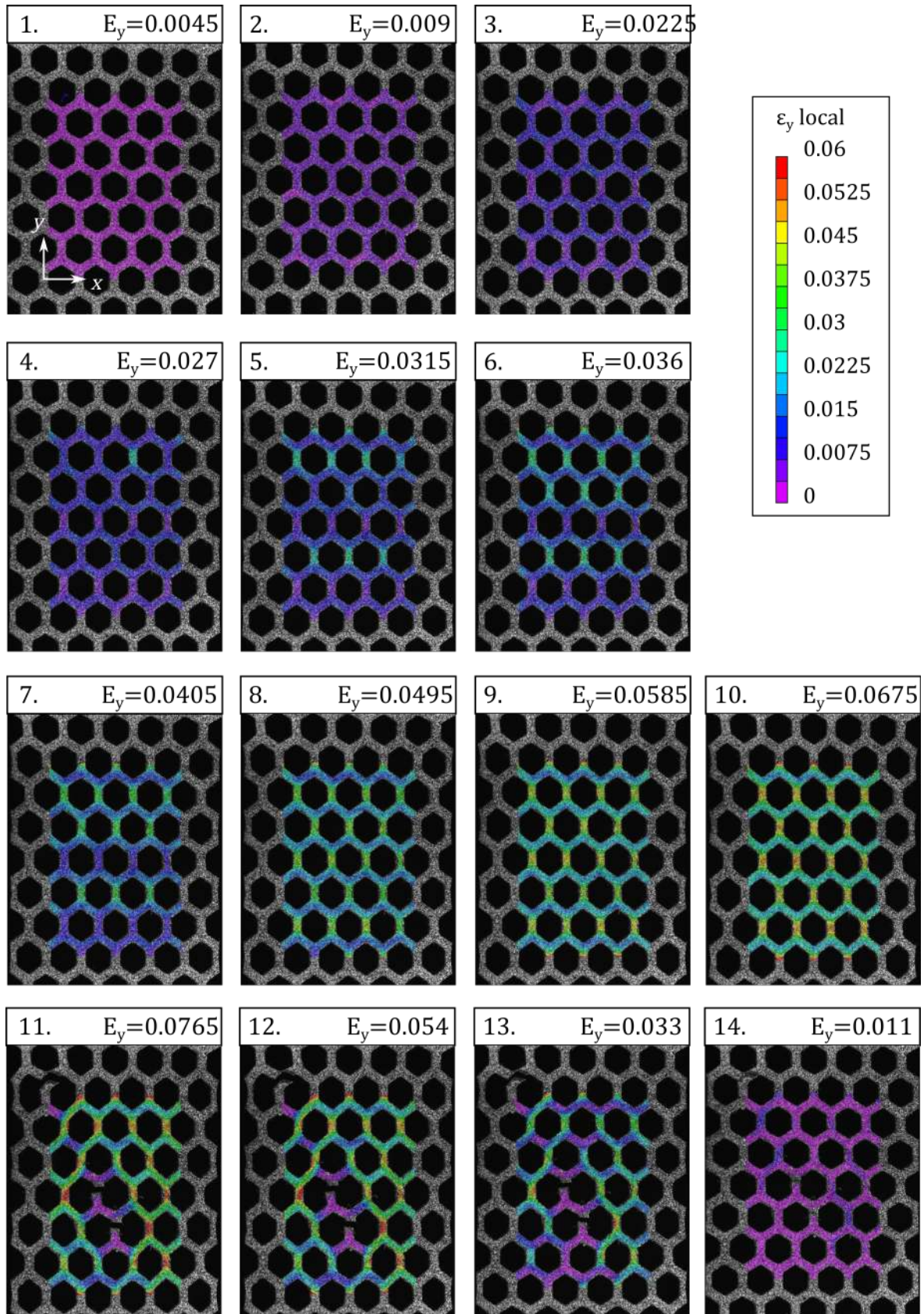


FIGURE 4.10 – Analyse par corrélation d’images de l’architecture hexagonale. Eprouvette 1 et cycle 3.

trope du réseau Kagome en présence de non linéarités matérielles. A la décharge, les deux orientations décrivent une boucle d'hystérésis non linéaire sans effet de plateau. La fin de cette boucle se termine par un comportement linéaire élastique de l'austénite (même module d'Young). Chaque cycle laisse apparaître une déformation macroscopique résiduelle qui augmente avec le nombre de cycles.

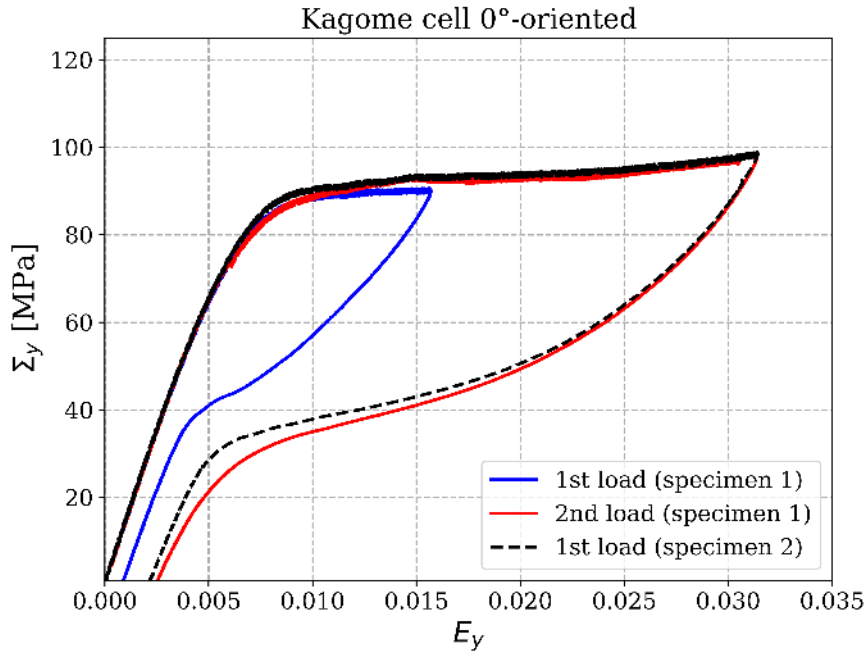


FIGURE 4.11 – Comportement macroscopique de la cellule Kagome dans la direction 0°.

#### Mise en relation du comportement macroscopique et de la DIC.

Les figures 4.13 et 4.14 présentent les analyses par corrélation d'images du deuxième cycle des deux premières éprouvettes dans les deux directions, 0 et 90 respectivement. Le champ local de déformation dans la direction de traction  $\epsilon_y$  est tracé. La sélection des images présentées dans les deux cas suit l'historique suivant :

1. Déformation macroscopique  $E_y = 0,5\%$ ;
2. Première localisation;
3. Etat de transformation  $A > M$  intermédiaire (sur le plateau);
4. Déformation macroscopique maximum;
5. Etat de transformation  $M > A$  intermédiaire (dans la boucle d'hystérésis basse);
6. Déchargement complet.

Les images 1 et 2 des deux figures 4.13 et 4.14 décrivent le champ de déformation pendant la phase élastique linéaire des éprouvettes. La déformation locale  $\epsilon_y$  n'est pas homogène et révèle les zones du réseau les plus sollicitées. Pour la direction 0°, on voit se



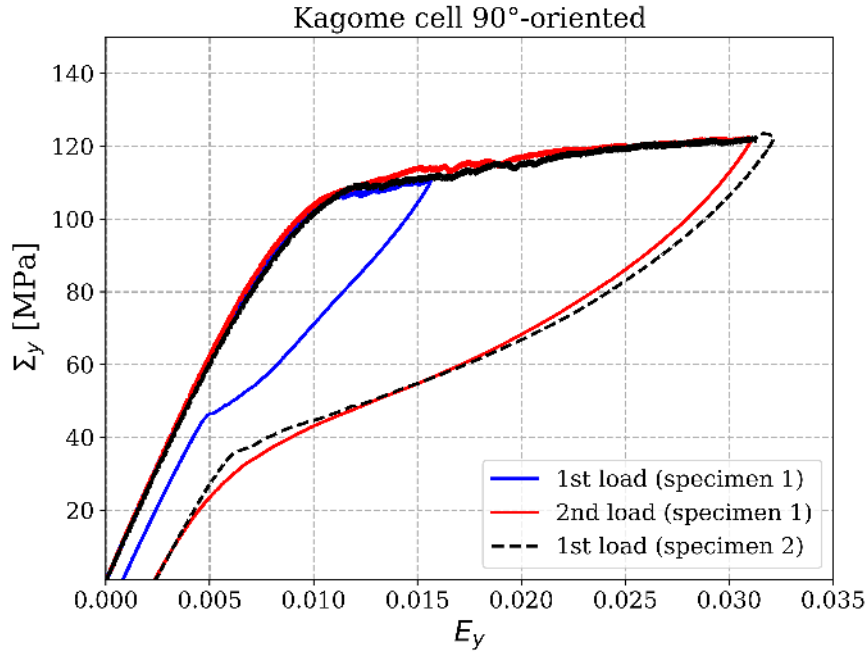


FIGURE 4.12 – Comportement macroscopique de la cellule Kagome dans la direction 90°.

déformer en priorité les barres verticales alignées avec la direction de traction. Pour la direction 90°, ces mêmes barres sont maintenant horizontales et ce sont les nœuds entre les barres horizontales qui se déforment. Toutes les cellules du réseau voient le même champ local de déformation. Les images 3 montrent que la localisation de la transformation se produit dans les zones déjà déformées lors de la phase élastique ; les barres verticales pour la direction 0° et les nœuds pour la direction 90°. Contrairement à la phase élastique, deux cellules ne présentent pas nécessairement le même champ de déformation  $\epsilon_y$ . L'instabilité matérielle se localise donc à l'échelle de la structure dans chaque cellule aléatoirement. Cette localisation structurale se propage dans le réseau jusqu'à ce que toutes les cellules voient le même champ local de déformation. Les images 4 illustrent cet état. Pour les deux configurations 0 et 90, les niveaux de déformations locales dépassent 0,06 mais la déformation macroscopique est juste supérieure à  $E_y = 0,0325$ .

Les images 5 et 6 montrent la décharge des éprouvettes. Toutes les cellules voient leur champ de déformation locale  $\epsilon_y$  évoluer de la même manière. Il n'y a pas de localisation à l'échelle de la structure lors de la transformation  $M > A$ . Les courbes de comportement macroscopiques ne montrent pas l'effet de plateau (Fig. 4.11 et Fig. 4.12). Les dernières images, Fig. 4.13 : 6 et Fig. 4.14 : 6, montrent une déformation locale presque partout nulle, excepté dans les zones ayant été les plus déformées (qui ont vu le passage de l'instabilité).

Nous avons mis en évidence le caractère anisotrope du réseau Kagome constitué d'un matériaux pseudo-élastique (AMF). La boucle d'hystérésis est dépendante de l'architecture et de son orientation. De plus, un effet de localisation et de propagation à l'échelle de la structure a été mis en lumière. L'architecture Kagome en AMF présente donc une localisation matérielle et structurale.

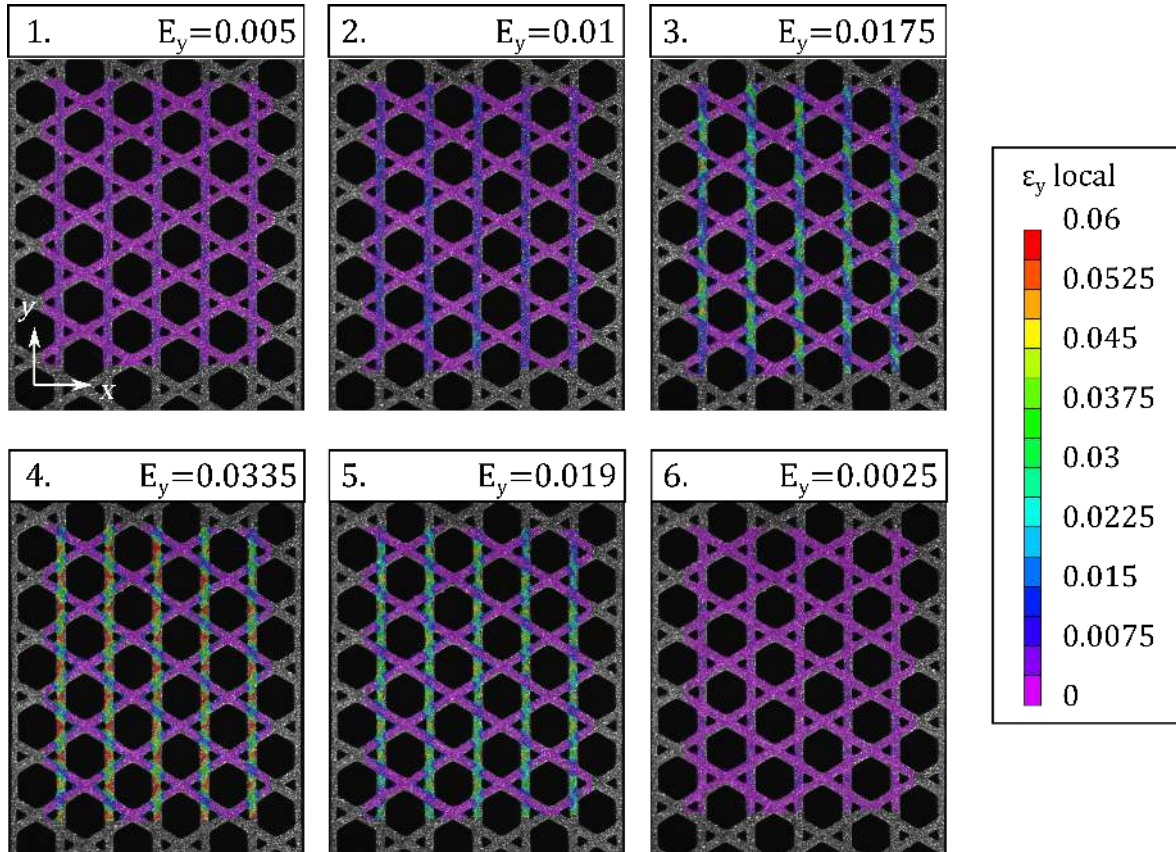


FIGURE 4.13 – Analyse par corrélation d'image de l'architecture Kagome orientée à 0. Epreuve 1 et cycle 2.

#### 4.2.5 Conclusion sur les expériences AMF architecturés

On utilise un alliage NiTi connu pour présenter des instabilités matérielles similaires à celles de Piobert-Lüders, auxquelles s'ajoute un effet superélastique identifiable par une boucle d'hystérésis sur la courbe de comportement macroscopique. Les plaques sont découpées par laser en forme d'éprouvettes avec trois architectures différentes : le triangle, l'hexagone et le Kagome qui sont testées en traction. L'analyse par corrélation d'images permet de mesurer localement le champ de déformation et ainsi d'observer les instabilités de localisation. Tout d'abord, l'effet superélastique est bien observé pour toutes les architectures. Le plateau de transformation  $A > M$  est conservé lors de la charge, ce qui n'est pas le cas du plateau de transformation inverse  $M > A$  lors de la décharge. Les courbes de comportement macroscopiques dessinent une forme de bec de pelican. À mesure des chargements de plus en plus importants, la déformation permanente augmente.

L'étude expérimentale permet de conclure sur une interaction entre le changement de phase dans les AMF et l'architecture. Deux échelles de propagation sont décrites : la propagation de changement de phase à l'échelle de la cellule dans les branches orientées en traction et une propagation de cellule en cellule à l'échelle de la structure. Des observations similaires à la plasticité de Lüders sont faites. Les architectures *bending-dominated* inhibent le caractère propagatif des instabilités à l'échelle de la cellule et à

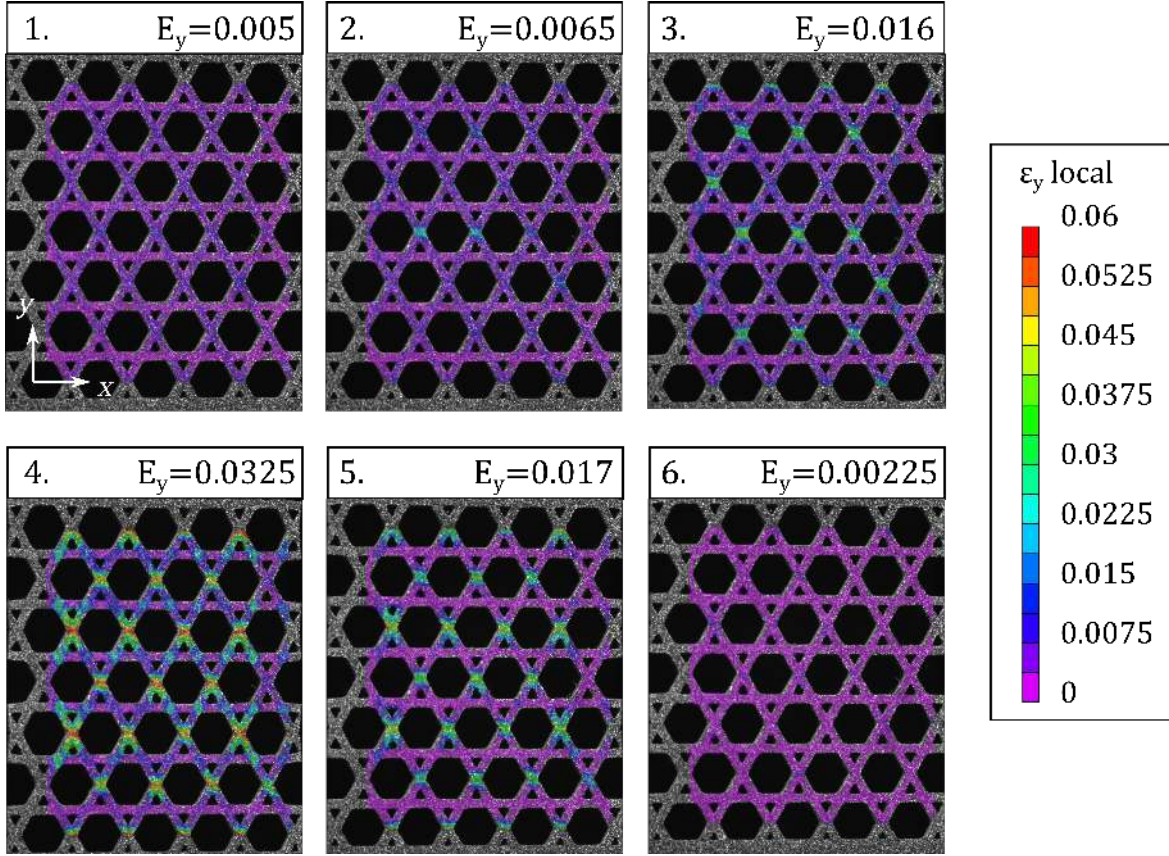


FIGURE 4.14 – Analyse par corrélation d'image de l'architecture Kagome orientée à 90. Eprouvette 1 et cycle 2.

l'échelle de la structure. Il en résulte que toutes les cellules subissent la même déformation à chaque instant. A l'inverse, les structures *stretch-dominated* offrent une possibilité de propagation à l'échelle de la cellule et de la structure. Lors de la charge, les instabilités apparaissent aléatoirement dans les cellules du réseau, c'est une propagation globale. De plus, à l'échelle de la cellule le changement de phase se propage dans les branches en traction. Il apparaît que, lors de la décharge et donc de la transformation inverse, la caractéristique globale des instabilités n'existe plus. Toutes les cellules voient leur niveau de déformation diminuer de manière identique. Ce comportement est relié à l'absence de plateau lors de la décharge.

### 4.3 Modélisation d'instabilités matérielles dans un milieu périodique fini

L'objet de cette partie est de confronter les résultats expérimentaux à un modèle numérique des éprouvettes architecturées superélastiques. On reprend les modèles volumiques des éprouvettes ayant servi lors de la découpe laser pour créer le maillage des quatre éprouvettes testées. Les différences entre les essais expérimentaux et numériques seront discutées à la fin de cette partie. D'autre part, les paramètres de la loi de comporte-

ment utilisée dans la modélisation numérique des éprouvettes architecturées ne sont pas modifiés. Les courbes issues de ces calculs sont donc des prévisions du comportement observé sur les éprouvettes réelles lors des expériences sans ajustement des paramètres matériau.

### 4.3.1 Architecture triangulaire

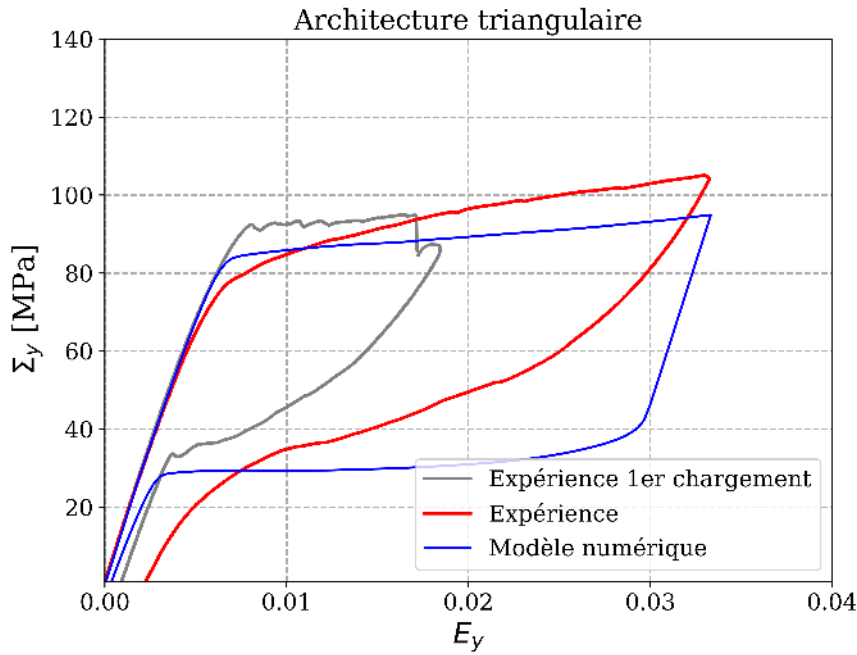


FIGURE 4.15 – Comparaison expérience et modélisation de l'éprouvette architecturée triangulaire.

Sur la figure 4.15, on représente le comportement macroscopique de l'éprouvette triangulaire testée expérimentalement (courbes grise et rouge) et numériquement (courbe bleue). Le comportement élastique de l'éprouvette est reproduit de manière identique avec le modèle numérique. On identifie le même module d'Young,  $E = 14,2$  GPa pour les trois courbes. Les deux courbes expérimentales du premier cycle (courbe grise) et de la modélisation (courbe rouge) dessinent le même début de plateau pour la transformation  $A > M$ . La comparaison des plateaux de transformation  $A > M$  expérimentaux (cycle 1 et 2) et numérique montre que les pentes sont identiques mais que le niveau de contrainte est inférieur de 10 MPa pour la modélisation. Lors de la décharge, la modélisation reproduit une phase linéaire puis un plateau pour la transformation  $M > A$ . Ce comportement n'est pas identifiable sur les expérience. Cependant, le niveau de contrainte macroscopique de fin de transformation  $M > A$  est identique ( $\Sigma_y = 30$  MPa) pour le premier cycle de l'expérience (courbe grise) et pour la modélisation.

Bien que les courbes de comportement macroscopiques soient comparables au moment du plateau de transformation, les scénari de localisation dans le réseau triangulaire ne le sont pas. En effet, la figure 4.16 met en évidence que l'instabilité matérielle se pro-



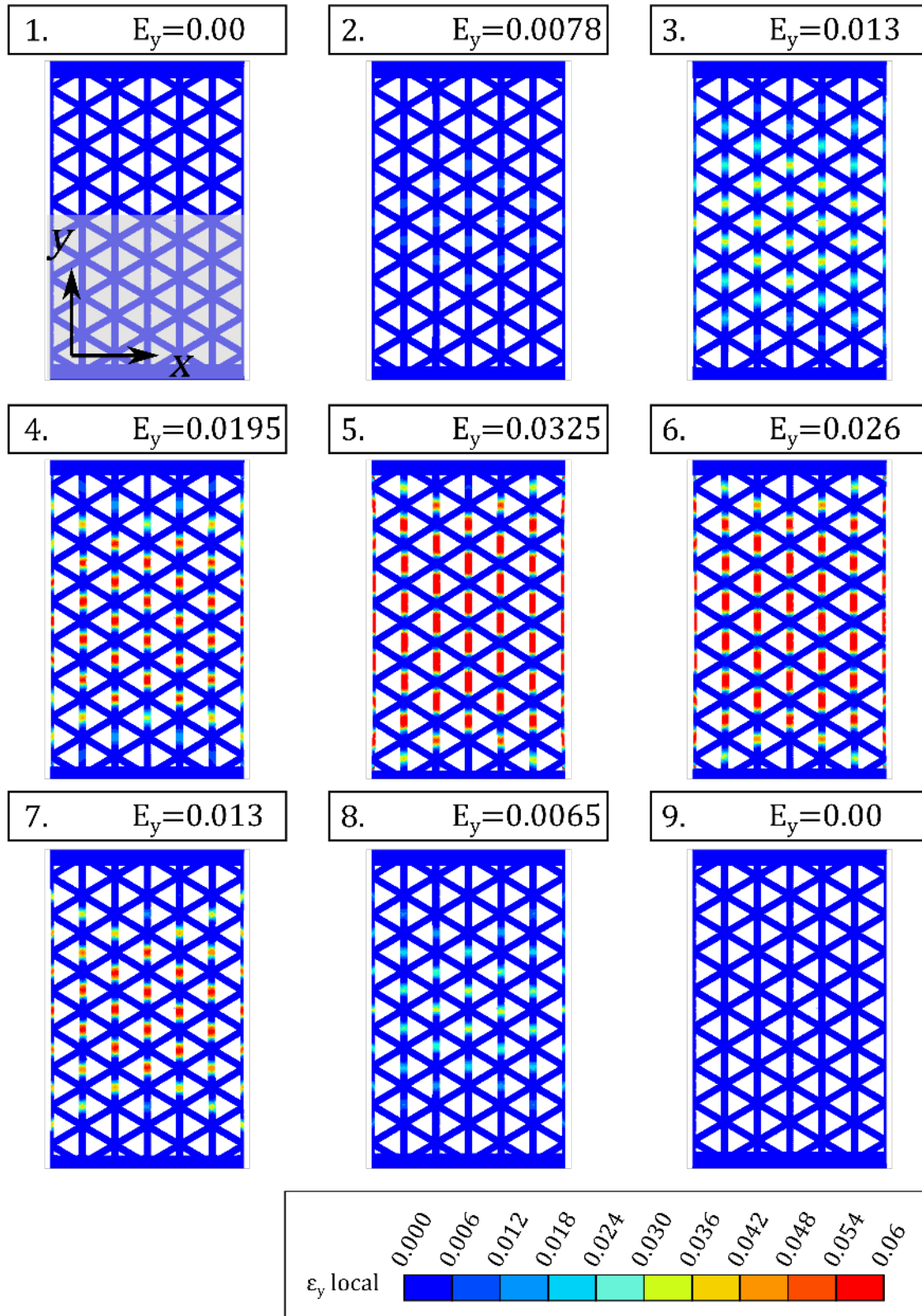


FIGURE 4.16 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture triangulaire simulée.

page des branches centrales du réseau vers les extrémités de l'éprouvette (4.16 : images 2 à 5). Le caractère aléatoire de la localisation identifiable sur la figure 4.6 (images 5, 6, 7) est effacé. Lorsque l'éprouvette est complètement chargée, les cartes de déformation expérimentales et numériques sont alors identiques (Fig. 4.16 : image 5). La transformation a eu lieu dans toutes les branches en traction. A la décharge, la transformation  $M > A$  se produit des extrémités de l'éprouvette vers le centre, dans les branches verticales. C'est le scénario inverse à la charge, les premières branches localisées sont les dernières à retrouver une phase austénitique.

### 4.3.2 Architecture hexagonale

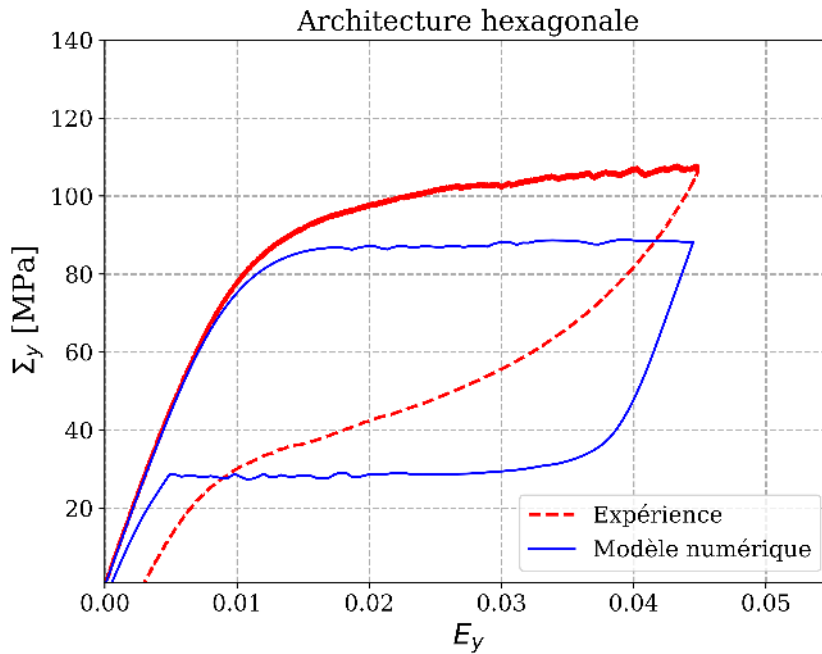


FIGURE 4.17 – Comparaison expérience et modélisation de l'éprouvette architecturée hexagonale

Les courbes macroscopiques expérimentale (bleue) et simulée (rouge) (Fig. 4.18) de l'éprouvette hexagonale sont comparables sur deux points. Le comportement élastique est correctement reproduit, on retrouve un module d'Young identique. Le plateau de contrainte est également présent à la charge dans les deux cas avec des niveaux de contraintes qui sont relativement proches. L'expérience donne  $\Sigma_y = 110 \text{ MPa}$ , la modélisation  $87 \text{ MPa}$ . Pour le reste, les deux courbes présentent des différences.

- Lors de la charge, le plateau débute plus tôt pour la modélisation  $E_y = 0,017$  contre  $E_y = 0,026$  pour l'expérience. De plus, le plateau de contrainte expérimentale est inclinée ce qui n'est pas le cas pour la simulation. Il semble que la modélisation ne reproduise pas un effet durcissant de l'expérience.
- A la décharge, la modélisation laisse apparaître un plateau de transformation  $M > A$  qui n'existe pas dans l'expérience.

- Le modèle de comportement ne prend pas en compte la plasticité de la phase martensitique, ce qui explique la déformation résiduelle nulle sur la courbe rouge. L'éprouvette réelle accumule une déformation résiduelle à chaque fin de cycle de chargement.

D'après les cartes de déformation (Fig. 4.18), on peut décrire trois phases pour le comportement du changement de phase dans le réseau hexagonal. Ces trois étapes débutent à la fin du domaine élastique de la phase austénitique (image 1) dès la première localisation (image 3). Elles peuvent être décrites comme suit :

1. **Première phase** (images 3 à 6) : L'éprouvette est en train d'être chargée. La transformation de phase a lieu dans le sens  $A > M$ . Le changement de phase localise aléatoirement dans les branches verticales du réseau. De plus, il apparaît que toutes les branches d'une même ligne localisent avant qu'une autre ligne ne prenne la suite (images 3, 4, 5 et 6). Pendant cette transition, deux cellules peuvent ne pas avoir la même déformation. La déformation macroscopique finale est  $E_y = 0,033$  (image 7) et toutes les lignes de branches verticales sont localisées sauf celles situées aux extrémités de l'éprouvette. Les cellules du réseau retrouvent un champ de déformation identique.
2. **Deuxième phase** (images 7 à 10) : L'éprouvette est toujours en charge. Maintenant, la localisation se produit dans les branches inclinées du réseau hexagonal. De la même manière que pour les lignes de localisation décrites dans la première phase, les branches qui localisent sont toutes alignées. Lorsque la déformation macroscopique atteint  $E_y = 0,0545$ , toutes les cellules centrales du réseau sont dans le même état de déformation.
3. **Troisième phase** (images 10 à 18) : L'éprouvette est maintenant en décharge. La transformation de phase se produit dans le sens  $M > A$ . Il n'y a pas d'ordre dans le type de branche qui localise la transformation inverse. Toutes les branches du réseau, verticales ou obliques, sont susceptibles de revenir à la phase austénitique (image 8 et 9). Lorsque l'éprouvette est complètement déchargée, toutes les cellules voient un champ de déformation nulle. On notera que les dernières branches à voir la transformation inverse ne sont pas les premières à avoir localisées (images 4 et 16).

Les scénari de localisation entre l'expérience 4.10 et la simulation 4.18 sont équivalents. La localisation à la charge est aléatoire et se produit en premier dans les branches en traction par rangées successives. L'expérience diffère ensuite de la modélisation alors que la localisation se poursuit dans les branches inclinées numériquement et qu'expérimentalement les niveaux de déformation augmentent de manière proportionnelle dans toutes les branches. Enfin, lors de la décharge avec la transformation inverse ( $M > A$ ), on retrouve le comportement collectif des cellules dans les deux cas.

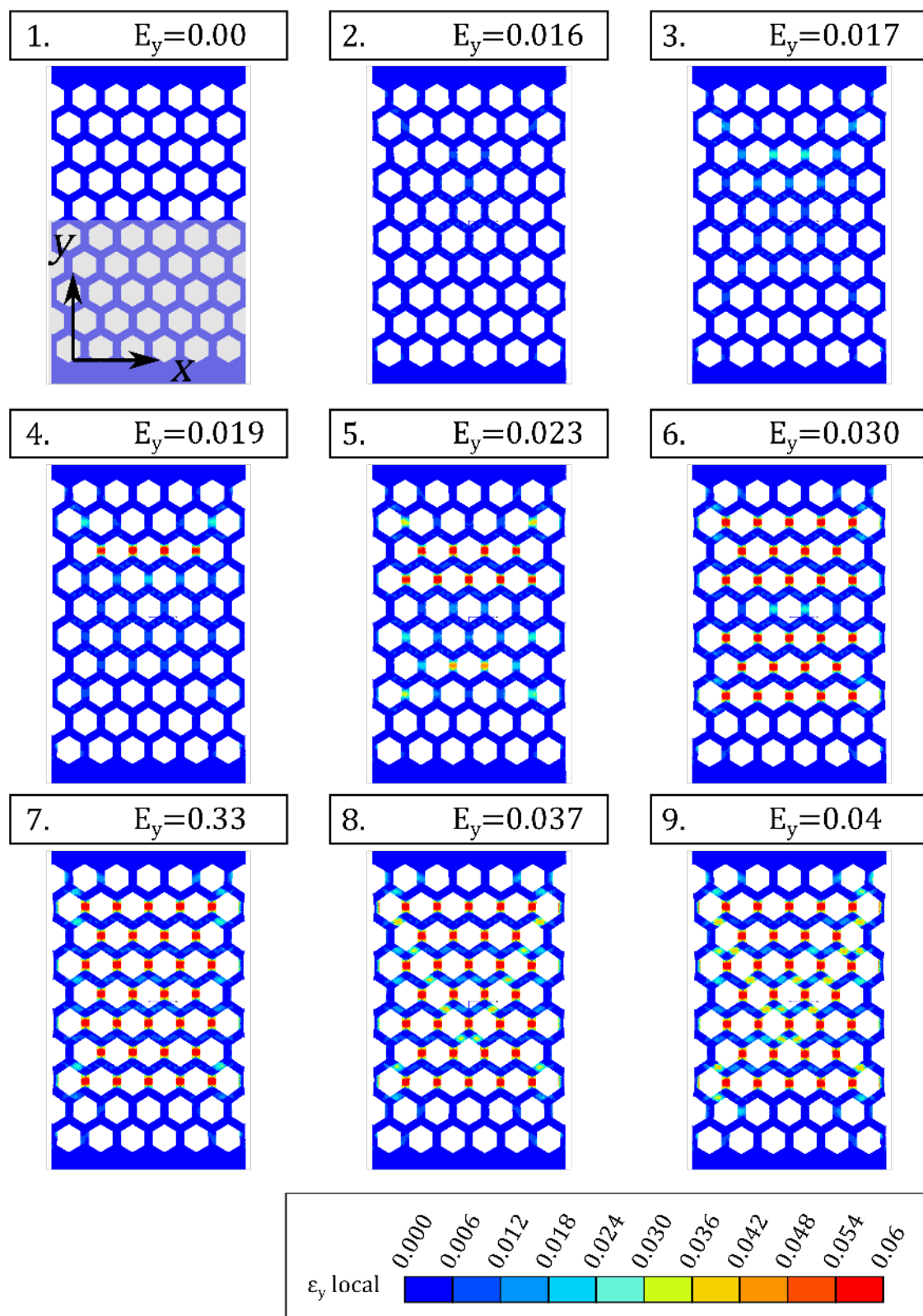


FIGURE 4.18 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture hexagonale. Première partie.

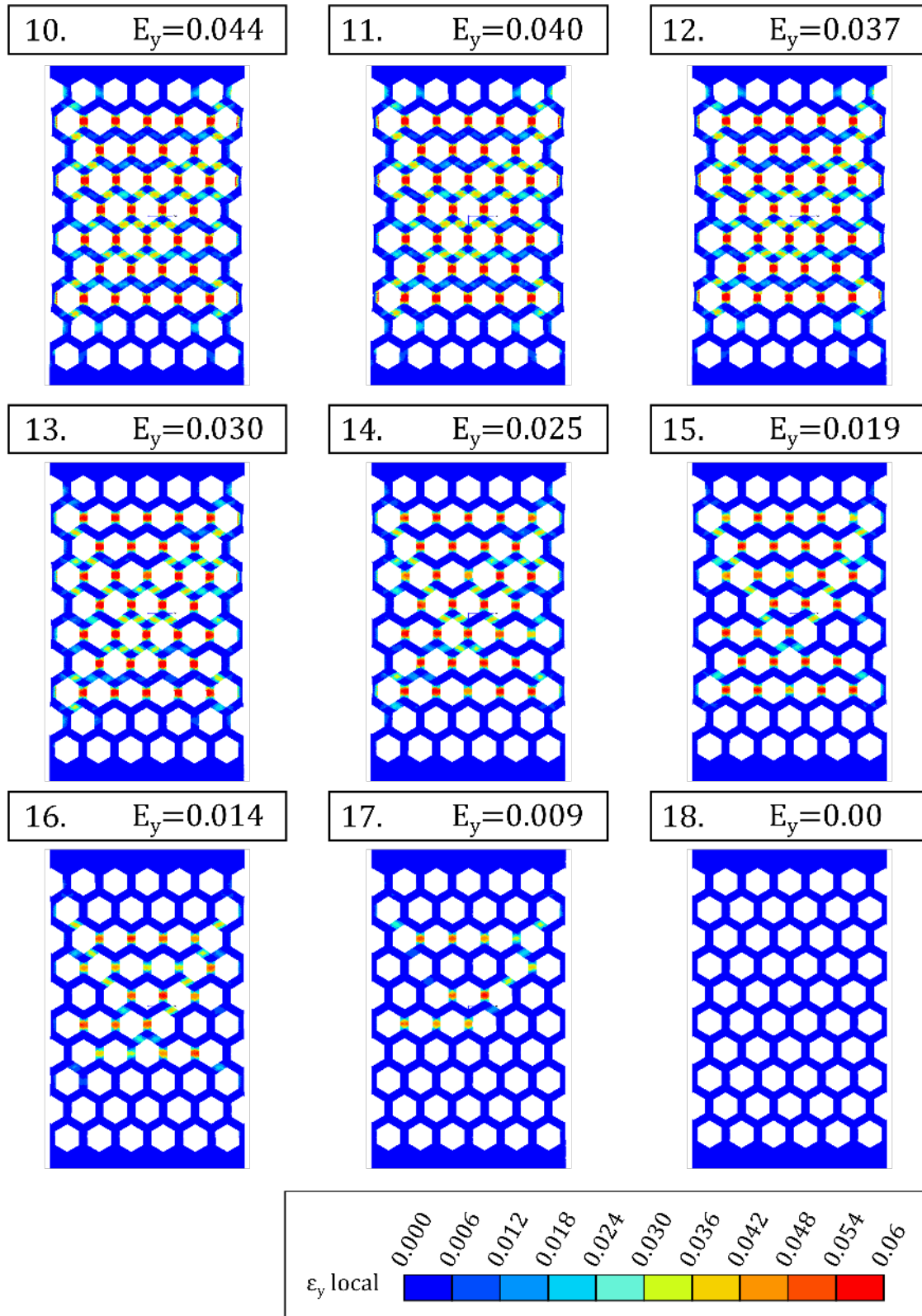


FIGURE 4.19 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture hexagonale. Deuxième partie.

### 4.3.3 Architecture Kagome

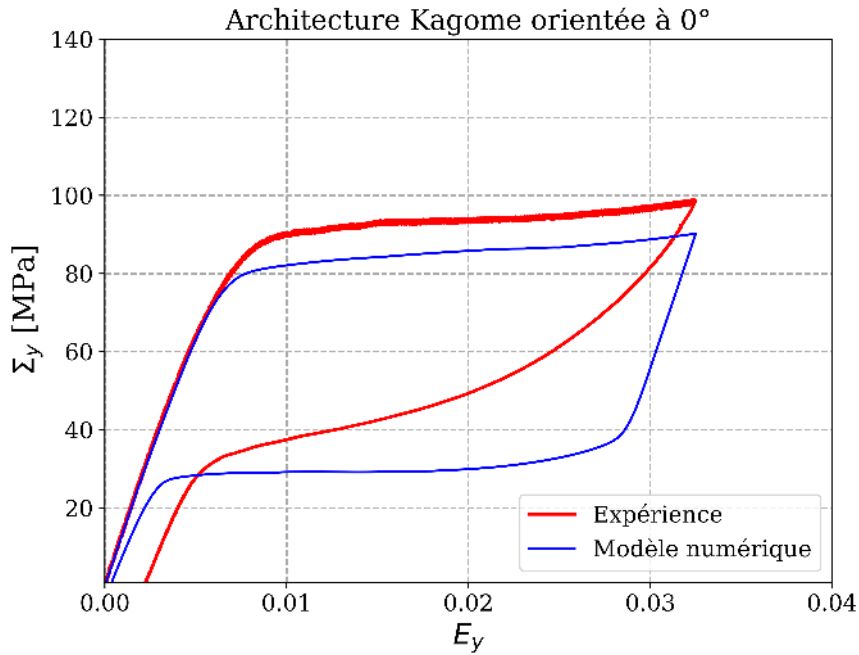


FIGURE 4.20 – Comparaison expérience et modélisation de l'éprouvette architecturée Kagome orientée à 0°.

Les figures 4.20 et 4.21 représentent le comportement macroscopique des deux éprouvettes à architecture Kagome orientées respectivement à 0° et 90° simulées avec la loi de comportement présentée en début de chapitre.

Le comportement élastique est identique pour les deux éprouvettes simulées dans les deux directions perpendiculaires ce qui confirme le caractère isotrope de l'architecture Kagome dans le domaine élastique. De plus, la modélisation numérique est en accord avec l'expérience. On trouve un module d'Young égale à  $E = 15 \text{ GPa}$ . Le domaine d'élasticité est plus grand pour l'architecture orientée à 90°. Le début du comportement inélastique peut être identifié juste avant une déformation macroscopique  $E_y = 0,01$  sur la figure 4.21. De nouveau, la simulation et l'expérience sont en accord. Pour les deux orientations, le plateau de transformation est similaire dans son allure entre l'expérience et la simulation. Dans le cas de la direction 0°, le plateau présente un début horizontal prolongé par un durcissement non-linéaire. La simulation reproduit cet effet avec un écart constant du niveau de contrainte macroscopique de  $\Delta\Sigma_y = 10 \text{ MPa}$  (Fig.4.20). L'allure du plateau de transformation dans la direction 90° présente une allure générale légèrement concave (Fig.4.21). Il n'y a pas de durcissement en fin de plateau. Le niveau de contrainte est d'ailleurs plus élevé que pour la direction 0°.

Le modèle numérique de l'éprouvette orientée à 90° présente bien un niveau de contrainte plus élevé que l'éprouvette orientée à 0°. Cependant de la même manière que pour cette dernière, la modélisation est en dessous du niveau de contrainte du plateau

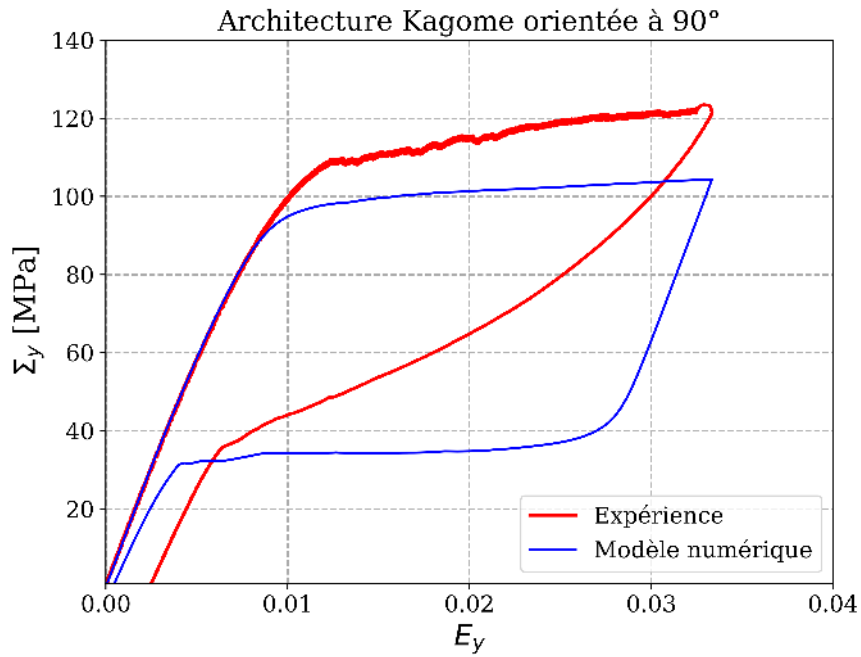


FIGURE 4.21 – Comparaison expérience et modélisation de l'éprouvette architecturée Kagome orientée à 90°.

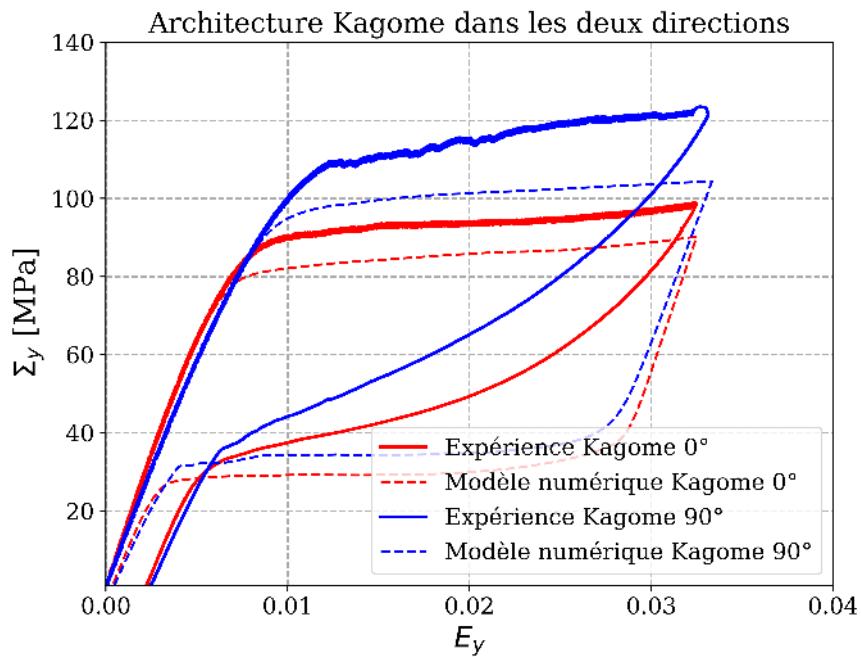


FIGURE 4.22 – Comparaison expérience et modélisation des deux éprouvettes architecturées Kagome orientée à 0° et 90° simulées.



identifié lors de l'expérience. Cette différence est de l'ordre de 20 MPa au maximum. Lors de la décharge, l'expérience et la modélisation divergent pour les deux orientations. L'expérience présente une boucle d'hystérésis sans plateau de transformation  $M > A$ . La forme de cette boucle évoque un bec de pélican. Au contraire, la modélisation fait apparaître un plateau de transformation pour les deux orientations. Le plateau de transformation  $M > A$  reprend l'allure du plateau de transformation  $A > M$ . A la fin de la décharge, la modélisation présente une déformation macroscopique nulle. Le modèle ne prend pas en compte la plasticité pour la phase martensitique, ni le taux de martensite résiduelle après décharge. Sur les courbes expérimentales, les éprouvettes présentent une déformation macroscopique irréversible identique pour les deux directions et égale à  $E_y = 0,0023$ .

Le modèle numérique de l'éprouvette superélastique architecturée Kagome réussit à reproduire le comportement élastique des deux orientations ainsi que l'effet de plateau qui apparaît lors de la charge avec la transformation de phase  $A > M$ . Cependant, la simulation fait apparaître un plateau lors de la décharge et de la transformation  $M > A$  qui n'est pas présent dans l'expérience. Cela est expliqué principalement par des phénomènes physiques internes au NiTi, non pris en compte dans le modèle matériau, comme la plasticité de la phase martensitique ou le taux de transformation inverse de la martensite vers l'austénite.

#### **Analyse des cartes de déformations simulées.**

Les cartes de la déformation locale associée à la transformation de phase donnent accès au comportement des instabilités dans la réseau Kagome. La figure 4.23 présente les résultats d'un cycle de charge et de décharge de l'éprouvette architecturée avec la cellule Kagome sollicitée dans la direction  $0^\circ$ . L'historique de l'essai sous forme d'image peut être décrit en trois phases :

1. **Première phase :** élasticité et apparition des instabilités (images 1 et 2). Le treillis est chargé et subit d'abord une déformation élastique sans instabilité. L'image 2 montre une déformation de transformation presque nulle dans toute l'éprouvette pour une déformation macroscopique  $E_y = 0,01$ . Les instabilités apparaissent dans les barres verticales, d'abord entre les nœuds du treillis. La déformation macroscopique vaut alors  $E_y = 0,015$  (image 3) et correspond sur la courbe macroscopique à une légère diminution du niveau de contrainte sur la courbe expérimentale.
2. **Deuxième phase :** effet de plateau de contrainte (images 3 à 5). L'éprouvette continue d'être chargée. La transformation de phase  $A > M$  s'intensifie dans les branches verticales et se propage aux nœuds de ces mêmes branches (image 4). Ce phénomène est d'abord limité uniquement aux cellules au centre du treillis, puis il se propage au reste du réseau. On observe un durcissement sur la courbe macroscopique à partir d'un niveau de déformation de  $E_y = 0,03$  ce qui correspond à la carte de

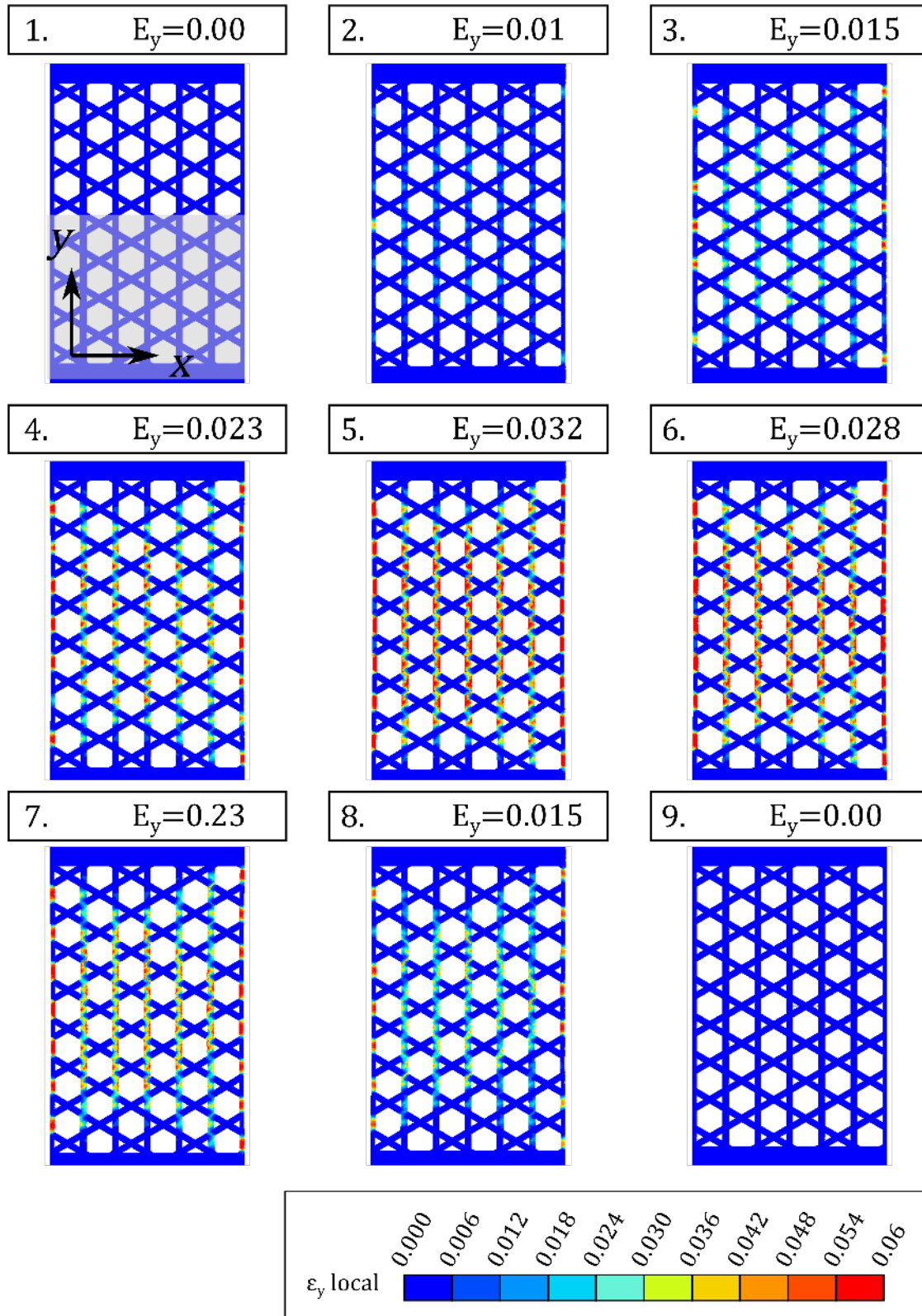


FIGURE 4.23 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture Kagome orientée à  $0^\circ$  simulée.

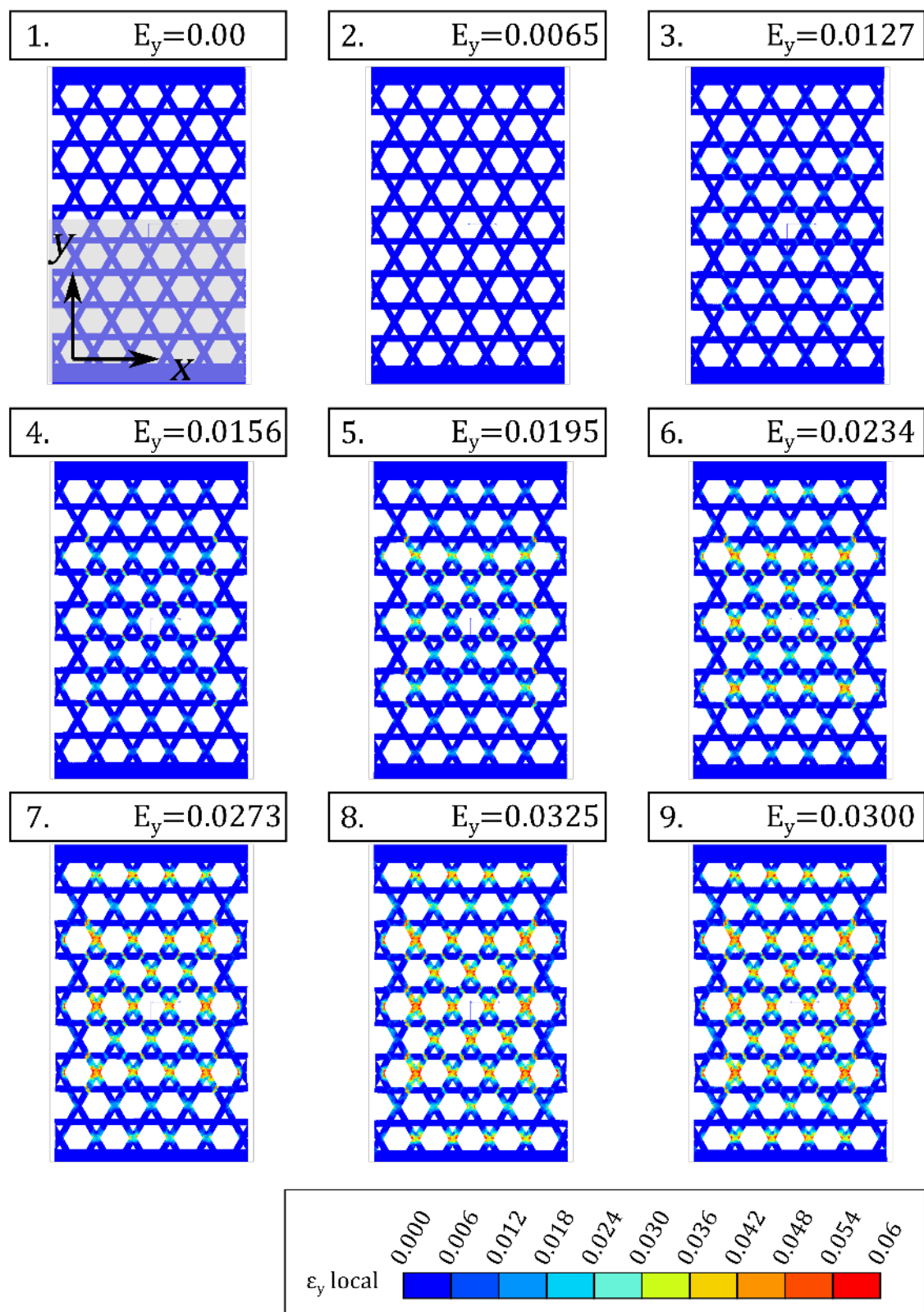


FIGURE 4.24 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture Kagome orientée à  $90^\circ$  simulée. Première partie.

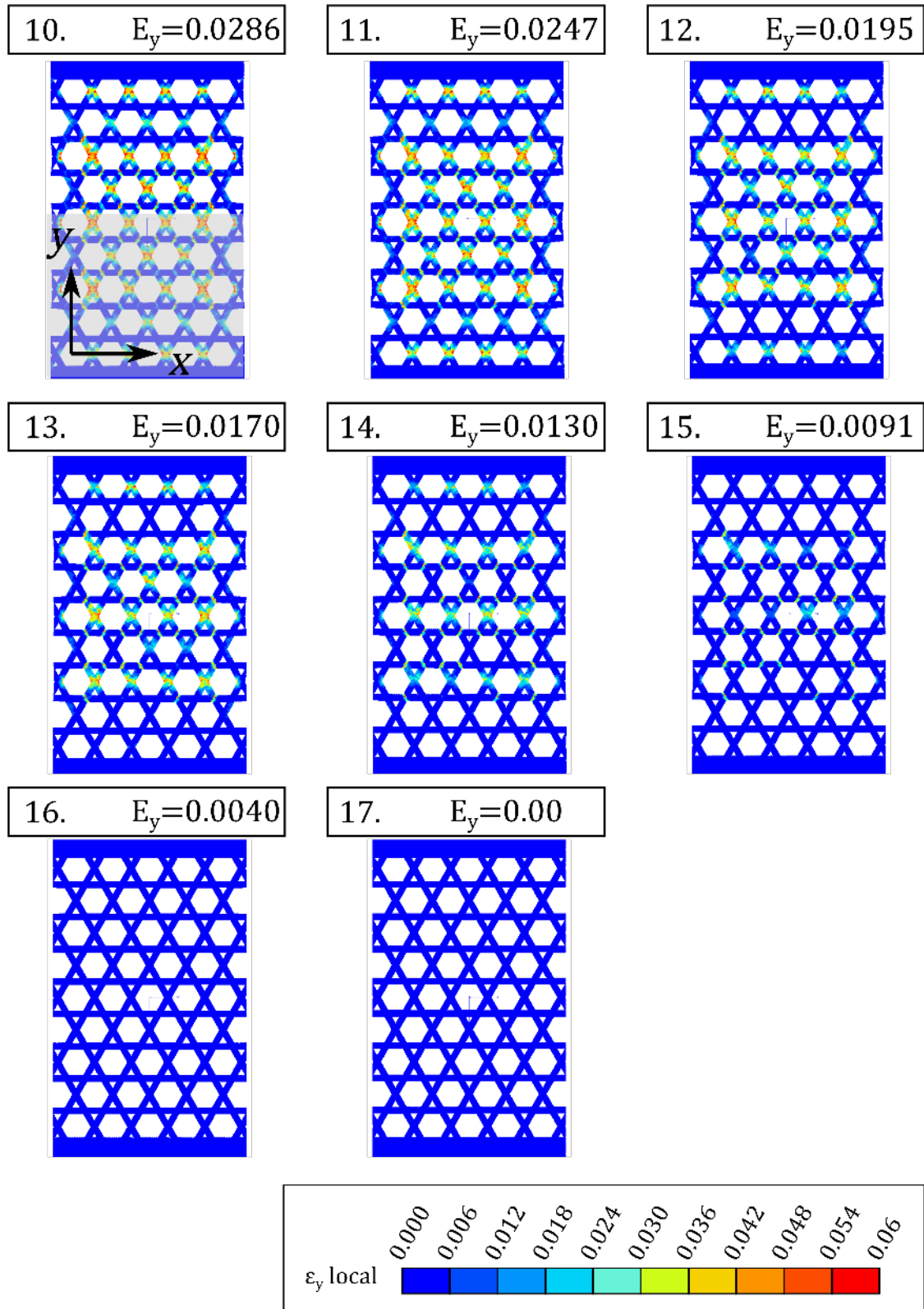


FIGURE 4.25 – Cartes de la déformation associée à la transformation de phase dans la direction  $y$  pour l'architecture Kagome orientée à  $90^\circ$  simulée. Deuxième partie.

déformation 5.

3. **Troisième phase :** Transformation inverse. L'éprouvette est maintenant déchargée. Le schéma de transformation  $M > A$  se produit dans les barres verticales du réseau simultanément dans les barres et dans les nœuds (images 7 et 8). A cela s'ajoute un effet de structure où les cellules proches des mors sont complètement déchargées en premier. En comparant les images 3 et 8 sélectionnées pour un niveau de déformation macroscopique équivalent, on observe des schémas de localisation très différents. L'image 3 correspond au début du plateau de transformation  $A > M$  tandis que l'image 8 correspond à la fin du plateau de transformation  $M > A$ . Lorsque l'éprouvette est complètement déchargée (image 9), les instabilités matérielles disparaissent du treillis.

La comparaison des figures 4.12 et 4.23 au moment où l'éprouvette est complètement chargée montre que l'expérience et la simulation laissent apparaître les mêmes zones activées par la transformation de phase, les barres verticales du réseau. Cependant, la propagation des instabilités au sein du réseau ne se produit pas de la même manière. Numériquement, le changement de phase lors du chargement se produit de manière diffuse et identique à l'ensemble des cellules simultanément. Lors de la décharge, la transformation de phase dans le réseau se propage des cellules extérieures vers les cellules intérieures. Expérimentalement, on observe lors de la charge une localisation du changement de phase de cellule en cellule jusqu'à ce que toutes les cellules voient le même état de déformation. Lors de la décharge, toutes les cellules voient la même diminution du niveau de déformation simultanément.

La figure 4.21 présente les résultats de l'éprouvette architecturée avec la cellule Kagome sollicitée dans la direction  $90^\circ$ . De manière similaire au treillis Kagome orienté à  $0^\circ$ , on peut décrire l'historique des cartes de déformation du treillis Kagome orienté à  $90^\circ$  en trois phases :

1. **Première phase :** Après une première phase élastique jusqu'à une déformation macroscopique  $E_y = 0,0156$ , les premières instabilités se localisent dans les nœuds du treillis avec des valeurs de déformation locale autour de  $\varepsilon_{tr11} = 0.024$  (voir image 4).
2. **Deuxième phase :** Ensuite, la localisation de la déformation s'accroît successivement dans des rangées de nœuds perpendiculaire à la direction de traction (voir images 4, 5 et 6) jusqu'à ce que tous les nœuds du réseau atteignent le même niveau de déformation de transformation (voir images 7, 8 et 9). Avec la charge qui augmente, la transformation de phase s'étend dans les branches voisines des nœuds localisés (image 10).
3. **Troisième phase :** L'éprouvette est maintenant en décharge. Entre les instants représentés sur les images 10 et 11, le niveau de déformation diminue dans tous les nœuds simultanément. Ensuite, la transformation  $M > A$  se complète par rangées de nœuds successives (voir images 11, 12, 13 et 14) jusqu'à ce qu'il ne reste plus

de phase martensitique dans le réseau. Le comportement de l'architecture Kagome dans cette direction est similaire à celui de l'architecture hexagonale. Les deux réseaux présentent une localisation sous forme de rangées de cellules, une à la fois, perpendiculaires à la direction de traction.

L'analyse des cartes de déformation associées à la transformation de phase met en lumière deux comportements de la transformation de phase dans le réseau Kagome. Le premier est une localisation simultanée de la déformation dans l'ensemble du réseau lors de la transformation  $A > M$ . Le deuxième est une localisation de la transformation inverse  $M > A$  de manière successive dans le réseau. La comparaison des figures 4.12 et 4.24 montre que ce sont bien les mêmes zones du treillis Kagome qui sont touchées par le changement de phase, à savoir les nœuds du réseau entre les barres horizontales. Cependant, le comportement des instabilités dans le réseau complet est mal reproduit. Lors de la charge, expérimentalement, on observe que l'instabilité se localise dans les cellules successivement, tandis que numériquement on calcule une localisation simultanée et croissante dans l'ensemble des cellules. Lors de la décharge, expérimentalement, on observe une décroissance diffuse du niveau de déformation dans toutes les cellules simultanément, tandis que numériquement l'instabilité disparaît des rangées de cellules successivement.

#### 4.3.4 Conclusion sur le comportement des éprouvettes simulées.

La modélisation numérique des trois architectures réussit à reproduire les zones activées par le changement de phase. En étudiant le comportement d'une cellule du treillis, on peut comparer modélisation numérique et essais expérimentaux. Cependant, le comportement des instabilités au sein du réseau complet est plus difficile à reproduire. On peut néanmoins identifier deux comportements distincts : une propagation des instabilités de cellules en cellules saccadée ou une propagation diffuse simultanée à l'ensemble du réseau. Ces comportements existent pour les deux sens de transformation  $A > M$  et  $M > A$ .

On peut synthétiser le phénomène de propagation des instabilités dans un réseau périodique en deux catégories : successif ou simultané.

	Expérimental		Numérique	
	Charge	Décharge	Charge	Décharge
Triangle	Successif	Successif	Successif	Successif
Hexagone	Successif	Simultané	Successif	Successif
Kagome 0°	Successif	Simultané	Simultané	Successif
Kagome 90°	Successif	Simultané	Simultané	Successif

TABLEAU 4.2 – Classification du comportement global des instabilités matérielles au sein d'un réseau périodique

Les écart observés entre le modèle numérique et l'expérience ont des origines variées



que nous allons passer en revue. Tout d'abord, comme évoqué au début du chapitre, les éprouvettes testées expérimentalement et simulées ont le même modèle géométrique de départ. Néanmoins lors de la réalisation par découpage laser des variations de la géométrie peuvent apparaître pour des raisons diverses (réglage du laser, mécanismes de guidage de la tête de découpe, positionnement de la plaque et planéité). De plus, cette méthode de fabrication modifie localement le matériau au passage du laser. Il est difficile d'estimer comment est altéré le matériau et dans quelle zone. Nous avons fait l'hypothèse que ces modifications restent négligeables dans le modèle numérique. D'autre part l'identification de la loi de comportement du matériau NiTi étant complexe, nous avons pris le soin de faire correspondre les critères les plus pertinents comme le module d'Young ou les niveaux des plateaux de transformation ainsi que leurs longueurs. Cependant, cette méthode reste qualitative. Le modèle de matériau ne prend pas en compte la plasticité de la martensite et on considère que toute la phase de martensite est transformée en austénite lors de la décharge (ce qui n'est pas nécessairement le cas). Enfin, les conditions aux limites nécessairement différentes entre l'expérience et la simulation. Notamment, les effets de bords dus aux conditions d'encastrement dans les mors de la machine de traction. Numériquement, il est facile d'imposer la direction de chargement dans l'axe de l'éprouvette. Lors de l'expérience, cet alignement entre l'éprouvette et la machine de traction est fait à l'aide d'une référence verticale. Toutes ces remarques mettent en lumière les sources d'écarts entre l'expérience et la modélisation numérique. Ce sont également des pistes afin de réduire l'écart entre les deux. Le modèle numérique est en quelque sorte une version idéale de l'essai expérimental qui peut être amélioré en fonction du degré d'erreur souhaité.

## **4.4 Modélisation d'un milieu périodique infini en présence d'instabilités matérielles de type pseudo-élastique**

### **4.4.1 Définition des conditions périodiques**

Dans cette section, on cherche à identifier le comportement homogénéisé des architectures en matériau superélastique sans être limité par les effets de bords imposé par le milieu fini des éprouvettes. Les architectures étudiées sont toutes périodiques. Comme pour l'étude sur les instabilités de Piobert-Lüders, il est possible de modéliser le milieu périodique grâce aux conditions aux limites périodiques. Le lecteur est renvoyé au chapitre précédant pour la définition de ces conditions aux limites.

Lors des essais numériques sur les cellules périodiques de chaque architecture deux grandeurs utilisées seront récurrentes :  $\mathbf{E}$  la déformation macroscopique et  $\Sigma$  la contrainte macroscopique. Le comportement des architectures superélastiques est identifié par homogénéisation périodique. Ces calculs numériques sont menés en utilisant les éléments

périodiques disponibles avec le logiciel d'élément fini Zset [MINES PARISTECH](#) et [NUMERICS](#). La caractérisation du comportement homogénéisé des architectures en matériau superélastique consiste à imposer une déformation  $E_{11}$  tout contraignant les contraintes macroscopiques  $\Sigma_{ij}$  nulles sauf  $\Sigma_{11}$ . Chaque géométrie est sollicitée dans les différentes directions en exploitant ces symétries. On reporte enfin le comportement macroscopique de la cellule ainsi que le champ de déformation liée à la transformation dans la direction de traction notée 1.

#### 4.4.2 Architecture triangulaire

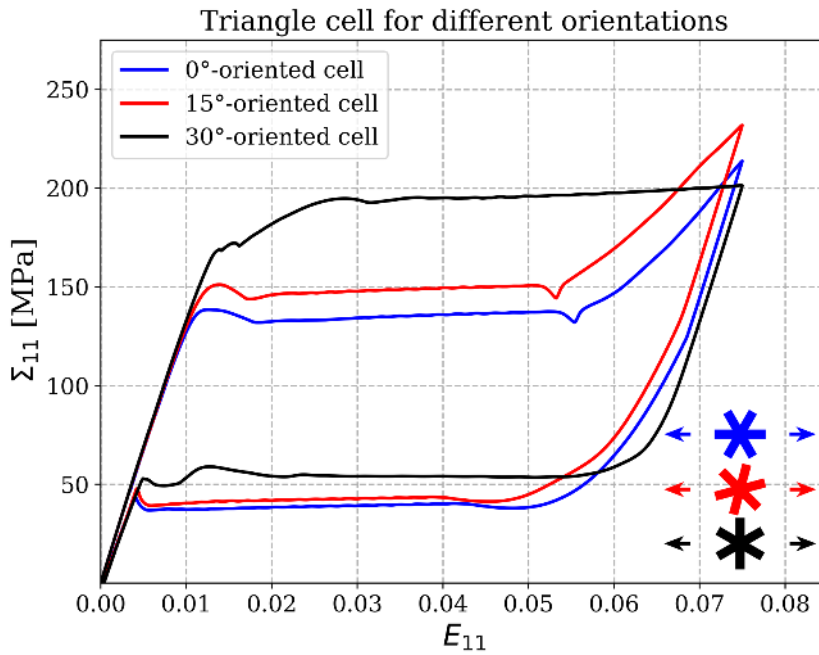


FIGURE 4.26 – Courbes de comportement macroscopique de la cellule triangulaire pour différentes orientations.

La figure 4.26 représente le comportement macroscopique de la cellule triangulaire pour les trois directions  $0^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $30^\circ$ . Dans les trois cas, on observe une boucle d'hystérésis délimitée par une première partie linéaire élastique (jusqu'à  $E_y = 0,01$ ), un premier plateau de transformation  $A > M$  (jusqu'à  $E_y = 0,07$ ), une deuxième partie linéaire (jusqu'à  $E_y = 0,06$ ) suivie d'un deuxième plateau pour la transformation  $M > A$ .

Le comportement élastique des trois orientations est indifférencié jusqu'à  $E_y = 0,01$ . On identifie un module d'Young unique  $E = 12,5 \text{ GPa}$ . Ensuite, on distingue deux groupes de comportement. Les cellules orientées à  $0^\circ$  et  $15^\circ$  présentent un plateau de contrainte après un pic. La hauteur de ce plateau varie entre  $135 \text{ MPa}$  pour la cellule à  $0^\circ$  et  $150 \text{ MPa}$  pour la cellule à  $15^\circ$ . La déformation macroscopique en fin de plateau est  $E_y = 0,055$  pour la cellule  $0^\circ$  et  $E_y = 0,0525$  pour la cellule  $15^\circ$ . A la fin du plateau, le comportement de ces deux cellules redevient durcissant jusqu'à une déformation  $E_y = 0,075$ . La cellule orientée

à 30° présente elle au contraire, un plateau de contrainte plus tardif et plus haut après une zone de transition non linéaire. La hauteur en contrainte de ce plateau est  $\Sigma_y = 200 \text{ MPa}$  et sa longueur en déformation  $E_y = 0,075$ . Pour la cellule orientée à 30°, on n'atteint pas la fin du plateau avant la décharge. La propagation de la transformation  $A > M$  n'est donc pas complète. Lorsque la déformation macroscopique atteint  $E_y = 0,075$ , on décharge les cellules. On retrouve alors un comportement identique pour les trois orientations. D'abord une phase élastique linéaire de la martensite puis le plateau de transformation  $M > A$ . Le niveau de contrainte des trois plateaux est compris entre 40 MPa et 55 MPa. A la fin de ce plateau, on retourne à l'origine par la phase élastique de l'austénite.

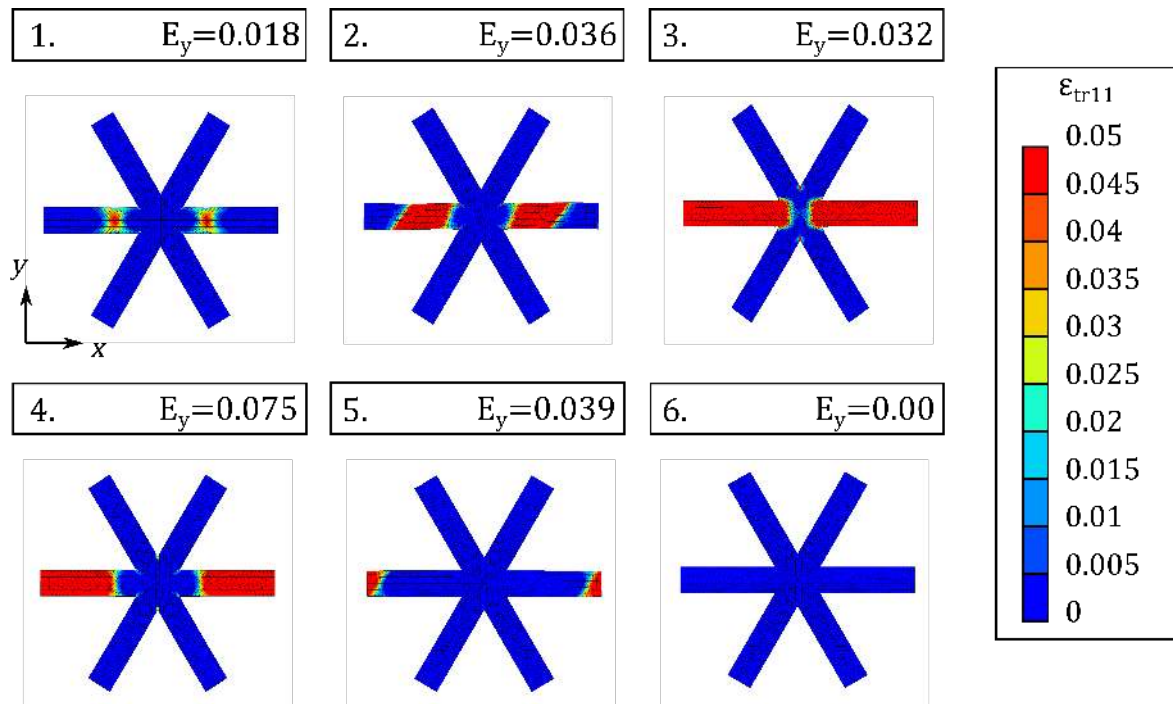
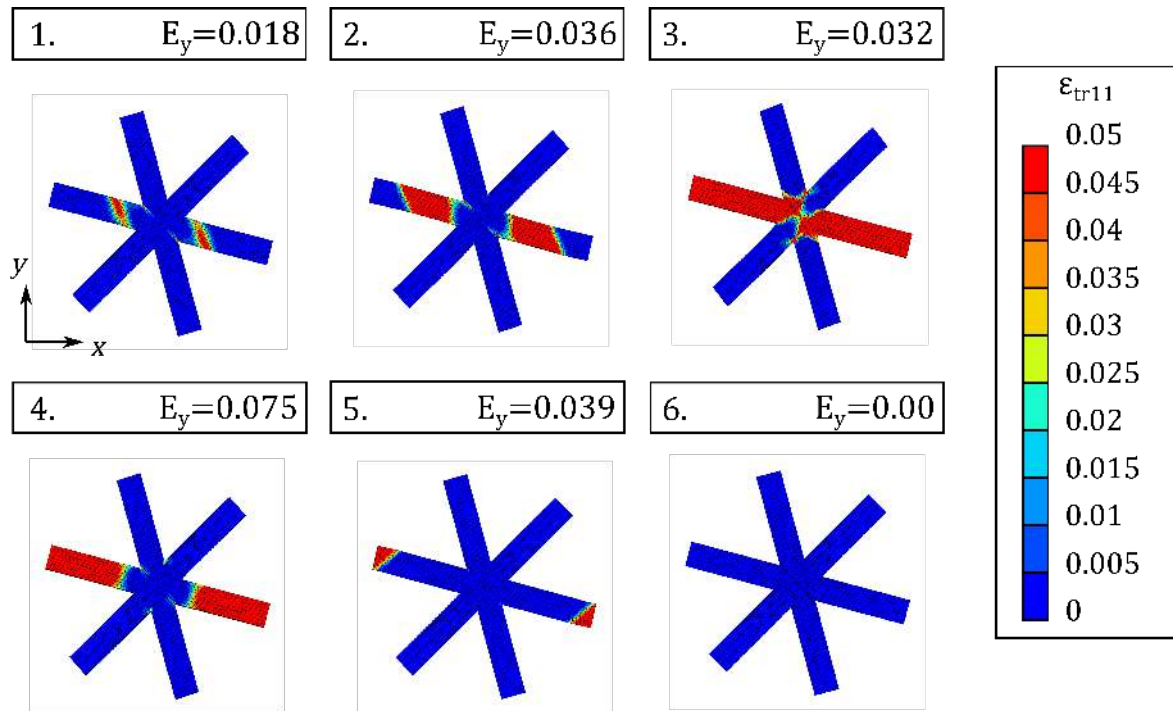
On montre donc qu'il existe deux comportements différents en fonction de l'orientation de la cellule à la direction de chargement. Le premier présente un plateau de transformation  $A > M$  complet et avec un niveau de contrainte inférieure. Le second présente un plateau de transformation incomplet et supérieur en contrainte.

Cette distinction introduite à partir des courbes de comportement macroscopique est vérifiée sur les cartes de déformations de transformation. Les figures 4.27, 4.28 et 4.29 représentent les cartes de déformation dans la direction de traction associée à la transformation de phase.

Pour les orientations 0° et 15°, l'image 1 montre la localisation de la transformation  $A > M$  dans la branche en traction de la cellule. Cette localisation prend la forme d'une bande inclinée proche du nœud de la cellule. Ensuite sur la figure 2, la bande de localisation se propage le long de la branche pour activer le changement de phase dans toute la branche (figure 3). La cellule est ensuite déchargée. La transformation  $M > A$  s'active à partir du centre de la cellule (figure 4) et se propage vers le milieu des branches en traction (figure 5). Les deux fronts de transformation  $A > M$  et  $M > A$  se propagent dans le même sens dans les branches, du centre vers le milieu. Lorsque la décharge est complète, la déformation  $\epsilon_{tr}$  est nulle dans toute la cellule (figure 6).

Pour l'orientation 30°, la localisation se produit d'abord dans le noeud de la cellule (figure 1). La localisation se produit dans les deux branches orientées à 30° par rapport à la direction X sous la forme de bandes inclinées (figure 2). On observe donc 4 fronts de bande qui se propagent le long de ces branches (figure 3). Lors de la décharge, la transformation  $M > A$  se propage dans le sens inverse de la transformation  $A > M$ , du dernier lieu de localisation vers le premier (figure 4). L'instabilité disparaît des branches (figure 5) avant que le noeud ne retourne à une déformation nulle (figure 6).

La transformation de phase dans toute la branche en traction explique pourquoi on observe un plateau complet de transformation pour les orientations 0° et 15°. Tandis que pour l'orientation 30°, les deux branches où se propagent le front de transformation simultanément empêchent de compléter le plateau de transformation pour une déformation macroscopique équivalente.


 FIGURE 4.27 – Carte de déformation de transformation pour la cellule triangle orientée à  $0^\circ$ 

 FIGURE 4.28 – Carte de déformation de transformation pour la cellule triangle orientée à  $15^\circ$  simulée

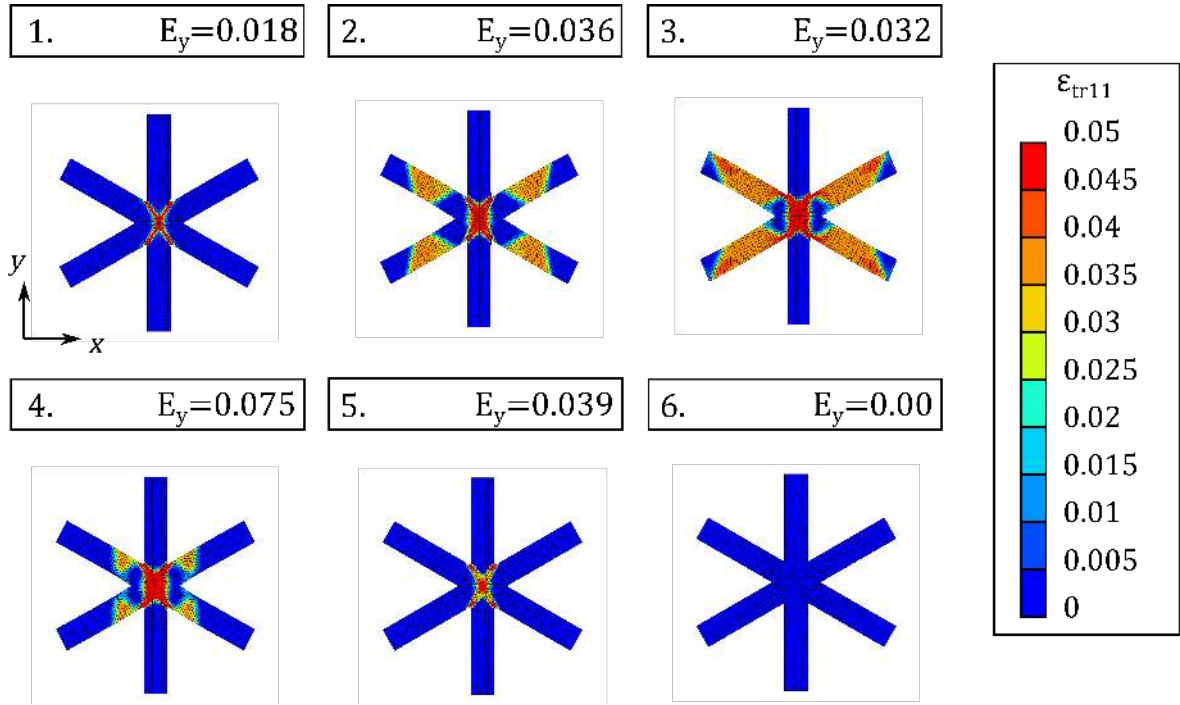


FIGURE 4.29 – Carte de déformation de transformation pour la cellule triangle orientée à 30° simulée

#### 4.4.3 Architecture hexagonale

Le comportement isotrope de la cellule hexagonale dans le domaine élastique linéaire est vérifié (Fig. 4.30). Les trois orientations de la cellule donne le même module d'Young jusqu'à une déformation macroscopique  $E_1 = 0,01$ . La boucle d'hystérésis est conservée mais ne présente ni plateau de transformation  $A > M$  à la charge, ni de transformation  $M > A$  lors de la décharge. On notera que le comportement macroscopique des trois orientations est similaire. L'absence de plateau de contrainte est un indice pour la non localisation et propagation du changement de phase. Il est nécessaire de confronter ce comportement aux cartes de déformation locale.

Sur les figures 4.31, 4.32 et 4.33, on identifie des séquences de localisation identiques. Le changement de phase ne se localise pas en une bande inclinée et ne se propage pas le long des branches du réseaux. A l'inverse, ce sont les nœuds qui localisent la déformation de transformation. Celle-ci se diffuse ensuite autour de ces nœuds. La faible connectivité du réseau hexagonal fait qu'il se comporte comme un mécanisme. Soumis à de la traction, par exemple, le réseau se déforme au niveau de ces nœuds. Les branches sont sollicitées en flexion principalement, ce qui ne permet pas la propagation des instabilités matérielles.

#### 4.4.4 Architecture Kagome

Le comportement macroscopique de la cellule Kagome orientée à 0° est représentée par la figure 4.34. Elle présente un hystérésis avec deux plateaux de transformation  $A > M$

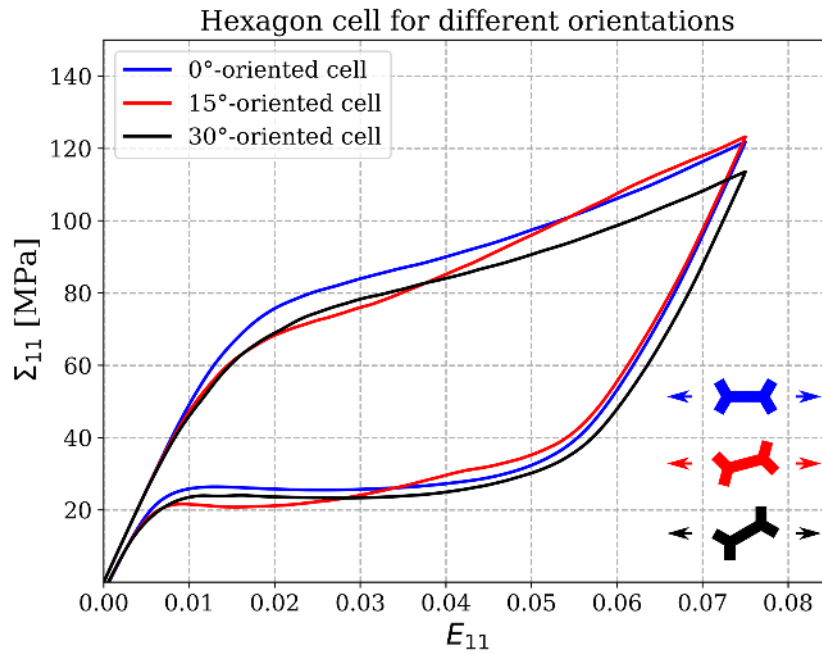


FIGURE 4.30 – Courbes de comportement macroscopique de la cellule hexagonale pour différentes orientations.

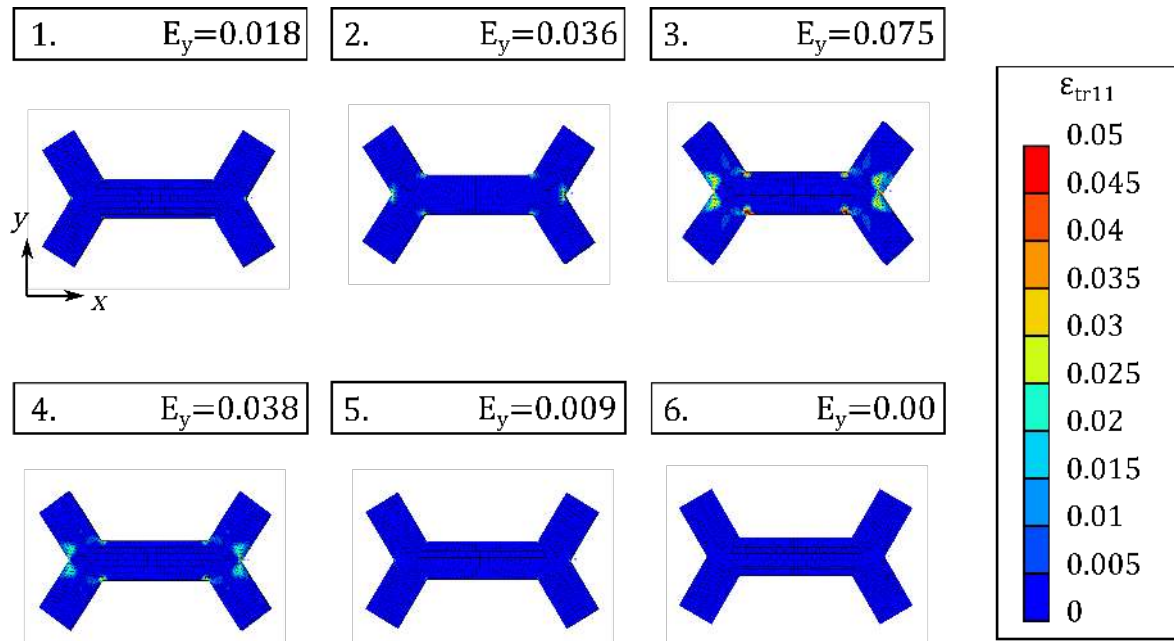


FIGURE 4.31 – Carte de déformation de transformation pour la cellule hexagonale orientée à 0°



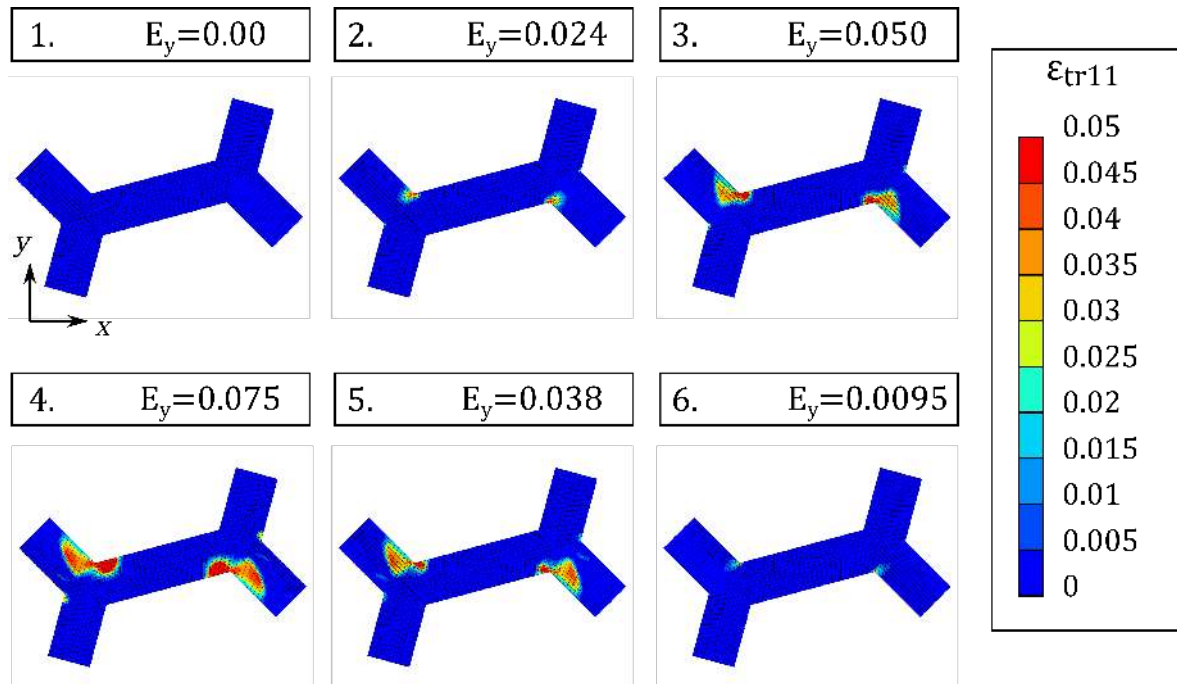


FIGURE 4.32 – Carte de déformation de transformation pour la cellule hexagonale orientée à 15°

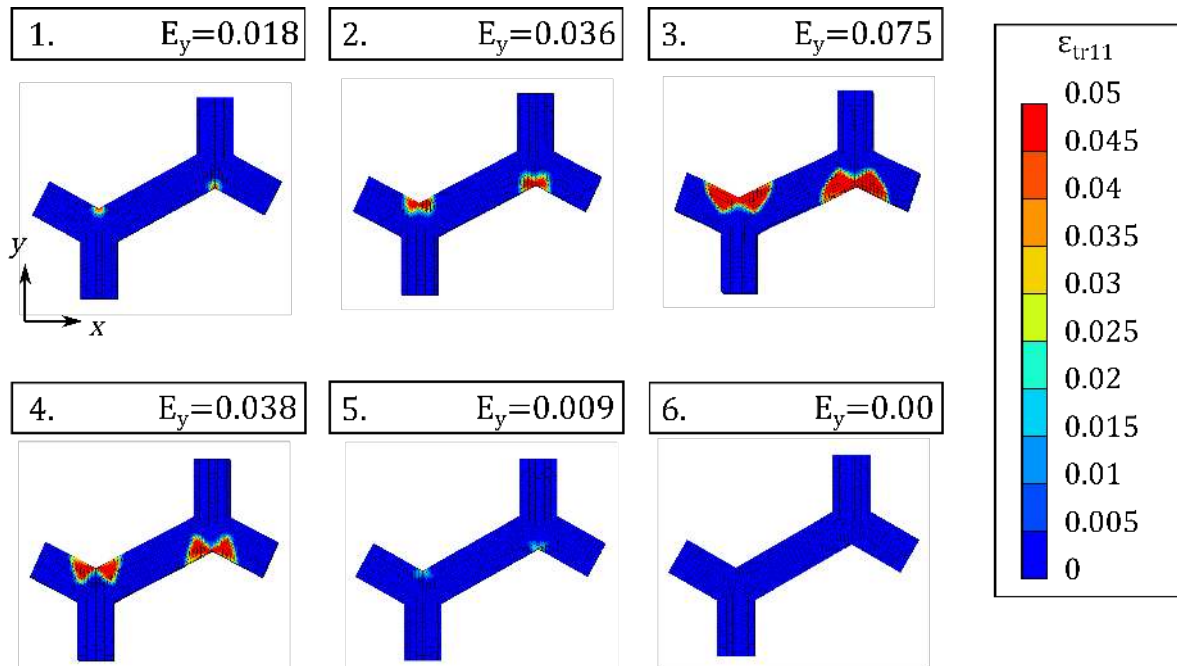


FIGURE 4.33 – Carte de déformation de transformation pour la cellule hexagonale orientée à 30°

lors de la charge à une contrainte de 125 MPa et  $M > A$  lors de la décharge à une contrainte de 40 MPa. Ces deux plateaux correspondent à la propagation du changement de phase dans les branches en traction (Fig. 4.35). La localisation se produit au centre de la cellule et deux bandes se propagent vers les noeuds lors de la transformation  $A > M$  (4.35 images 1, 2 et 3). A l'inverse lors de la transformation  $M > A$ , la propagation débute depuis les noeuds puis deux bandes se propagent pour se rejoindre au centre des branches en traction (4.35 images 4, 5 et 6). Contrairement aux courbes expérimentales, le comportement en forme de bec de pélican n'est pas reproduit.

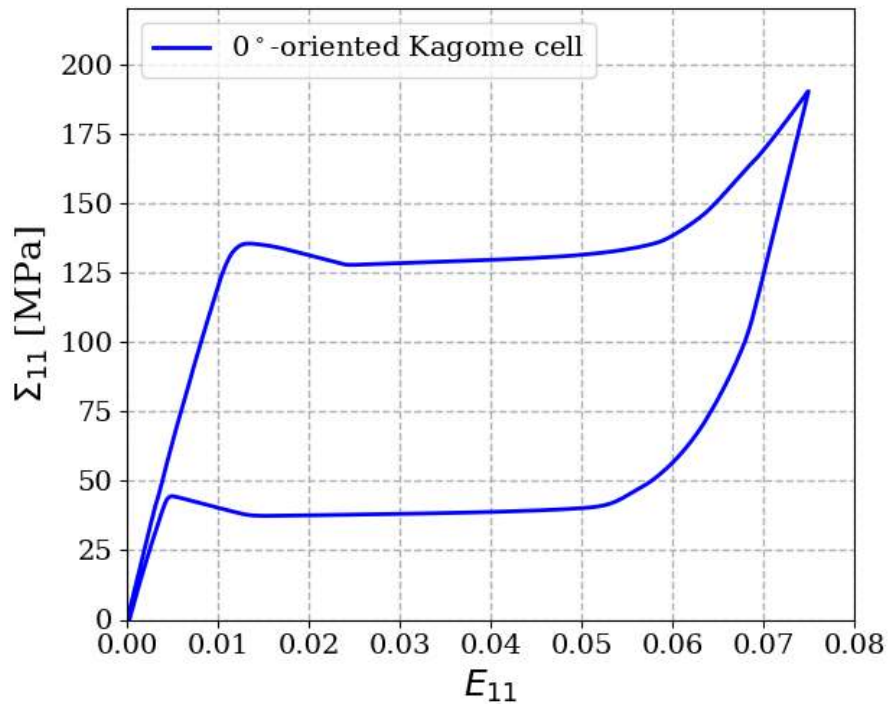


FIGURE 4.34 – Courbe de comportement macroscopique de la cellule Kagome pour l'orientation  $0^\circ$

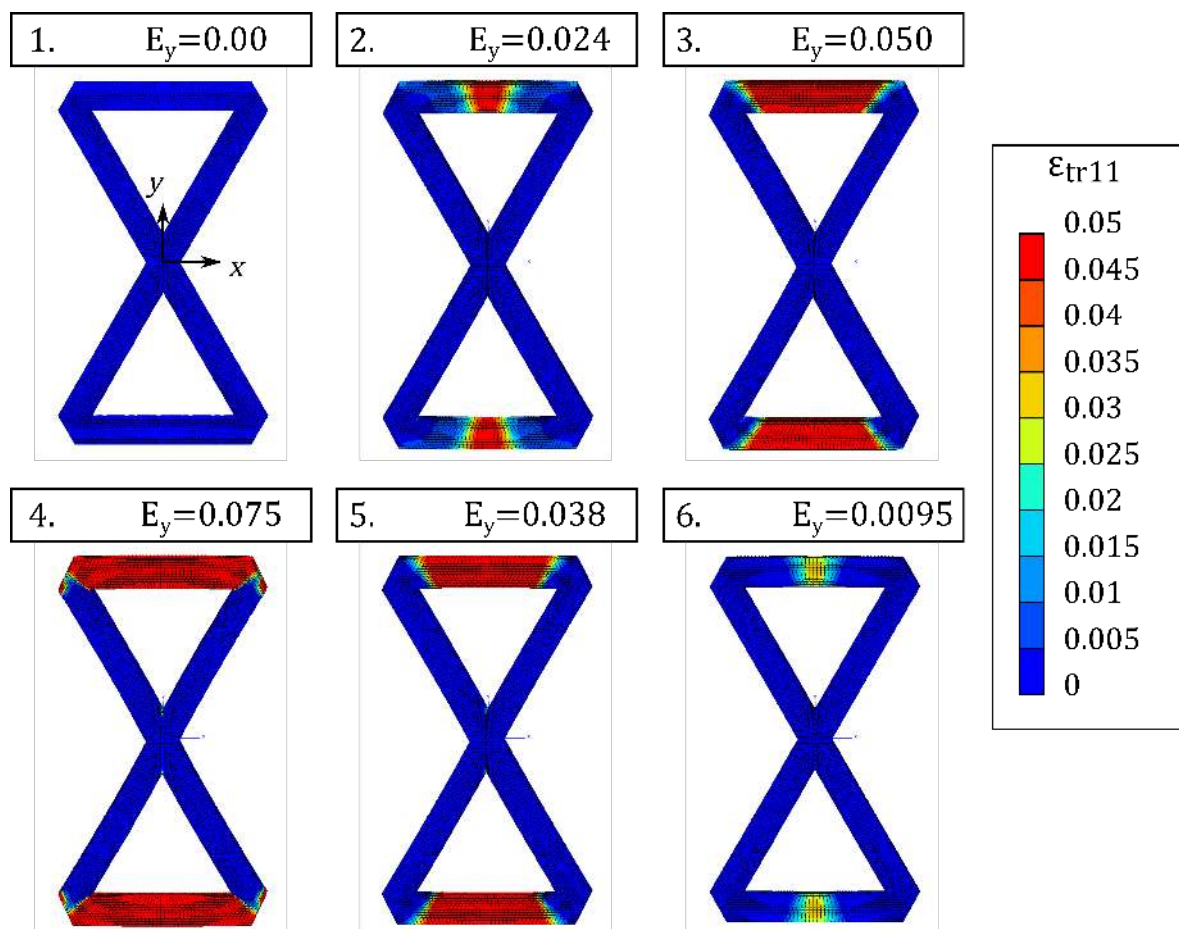


FIGURE 4.35 – Carte de déformation de transformation pour la cellule Kagome orientée à  $0^\circ$

## 4.5 Discussion sur la superélasticité dans les réseaux architecturés. Point de vue expérimental et numérique.

La transformation de phase dans les AMF architecturés montre un comportement similaire à la plasticité de type Piobert-Lüders. Ces deux instabilités matérielles présentent un caractère aléatoire dans leur localisation au sein d'un réseau architecturé périodique.

### 4.5.1 Discussion sur la modélisation numérique (milieu fini et infini)

La modélisation grâce aux conditions périodiques du changement de phase dans les architectures permet d'isoler une seule cellule et d'y observer le comportement des instabilités matérielles. Comme pour la plasticité de Piobert-Lüders et sur les éprouvettes AMF, on retrouve les deux comportements des instabilités matérielles déjà décrit : localisation avec propagation et localisation sans propagation. Les cellules triangulaire et Kagome présentent une localisation avec propagation. Le phénomène est observable sur les cartes de la déformation de transformation et se traduit par un plateau sur la courbe macroscopique. A noter que le plateau de transformation  $M > A$  lors de la décharge est bien plus marqué que sur les résultats des essais expérimentaux. La cellule hexagonale simulée avec les conditions périodiques possède un comportement non propagatif. En effet, aucun plateau de transformation n'est présent sur les courbes macroscopiques. Sur les cartes de déformation de transformation, le changement de phase se développe uniquement dans les noeuds sans jamais évoluer sur une localisation en bande dans les branches. Ce comportement diffère de celui observé expérimentalement et sur les éprouvettes numériques. Ces différences s'expliquent pour partie par des conditions aux limites différentes et des effets de bords éliminés dans le cas des conditions périodiques. Il serait intéressant d'observer le comportement des instabilités dans le cadre d'une modélisation avec conditions périodiques sur plusieurs cellules.

### 4.5.2 Localisation matérielle et structurelle : description de l'"effet Pélican"

JIANG et collab. [2017] ont abordé la question de la flexion des tubes NiTi pseudo-élastiques de manière expérimentale et numérique. En expérimentant la flexion d'un tube, ils ont observé une courbure uniforme dans le domaine élastique qui devient hétérogène dès que la transformation de phase débute. De plus, cette dernière observation correspond à un plateau de contrainte dans le comportement macroscopique. Ceci est vérifié à la fois pour chargement et le déchargement, c'est-à-dire pour la transformation de l'austénite en martensite et aussi pour la transformation inverse. La courbe complète de contrainte-déformation montre un comportement d'hystérésis avec un plateau de contrainte supérieur et un plateau inférieur. La courbure hétérogène est causée par la

localisation de la déformation dans des zones en forme de X espacées le long du tube. Dans le cas du réseau pseudo-élastique NiTi Kagome, une observation similaire peut être faite pour le chargement du réseau où le plateau de contrainte est lié à l'initiation et la propagation de la transformation de phase dans le réseau. Plus précisément, il y a d'abord une localisation dans la cellule unitaire puis de cellule à cellule à l'échelle du réseau. Il est intéressant de noter qu'une localisation similaire à deux échelles a été décrite pour les instabilités de Piobert-Lüders ([VIARD et collab. \[2020\]](#)).

Nous avons introduit l'"effet Pélican" pour décrire l'absence de plateau de transformation dans la partie décharge de l'hystérésis de pseudo-élasticité. Cet effet est exclusivement observé expérimentalement sur les figures 4.17, 4.15 et 4.22. Numériquement, cet effet disparaît sur les éprouvettes sans conditions périodiques au profit d'un plateau de transformation à contrainte constante. L'effet Pélican est à relier à la localisation structurelle. Lors de la décharge, la transformation inverse se produit de manière simultanée dans les éprouvettes ce qui empêche l'observation d'un plateau de contrainte. Sur les cartographies de la déformation de transformation, on observe une déformation décroissante de manière identique dans chaque cellule du réseau en même temps. Il n'y a alors plus de localisation structurelle. Cependant, l'effet Pélican est tout de même reproduit numériquement par notre modèle dans le cas de la cellule hexagonale avec conditions périodiques sur la figure 4.30. Dans ce cas, on observe sur les cartes de déformation une absence de localisation matérielle dans la cellule. Seules les rotules plastiques voient la transformation martensitique. L'effet Pélican est le signe d'une absence de localisation structurelle ou matérielle sur le retour de la boucle hystérétique super-élastique.

### 4.5.3 Isotropie élastique et anisotropie plastique

Dans les travaux de [VIARD et collab. \[2020\]](#), le comportement des instabilités plastiques de Piobert-Lüders a été étudié dans des architectures 2D. Pour les treillis dominés par la traction, ils ont montré que l'initiation et la propagation des instabilités matérielles dépendent de l'orientation du treillis par rapport à la direction de chargement. Le domaine élastique non linéaire est caractérisé par un comportement anisotrope pour le réseau de Kagome comme le montre la figure 4.22 représentant le comportement macroscopique en traction dans deux directions perpendiculaires. La nature anisotrope est justifiée par le plateau de contrainte qui est plus élevée en contrainte pour la direction 2 que pour la direction 1. Pour cette dernière, la localisation des déformations se produit dans les entretoises alignées avec la direction de la tension, ce qui permet à l'instabilité de se propager à l'échelle du matériau le long de cette même entretoise. Cependant, pour le matériau plein, ce phénomène conduit à un plateau de contrainte de la même manière que pour le comportement macroscopique de la direction 1. En revanche, pour la direction 2, la localisation se produit dans les nœuds à l'intersection de deux entretoises en forme de

croix reliant des entretoises horizontales. Ainsi, l'instabilité ne se propage pas dans ces entretoises horizontales et est même verrouillée dans le nœud. Lorsque la charge augmente, la transformation de phase se propage mais reste verrouillée au niveau du nœud jusqu'à ce que la contrainte locale soit suffisante pour activer la charnière pseudo-élastique représentée par les branches en forme de croix. Cela conduit à un plateau de contrainte plus incliné dans le comportement macroscopique.

## 4.6 Conclusion

Le comportement des instabilités matérielles liées au changement de phases (AMF) dans les milieux architecturés vérifie également la classification proposée dans le chapitre précédent. Nous avons montré que le comportement de ces instabilités dans les milieux périodiques dépendait du caractère *bending-dominated* ou *stretch-dominated* des architectures, respectivement non-propagatif ou propagatif. Le comportement hystérétique des AMF nous a imposé d'enrichir cette première classification en détaillant une propagation plus complexe des instabilités. D'abord car différente lors de la charge et de la décharge mais aussi dépendante de l'échelle d'observation. Ainsi, nous avons introduit une description des instabilités sur deux échelles : la première locale à l'échelle de la cellule et la deuxième globale à l'échelle de la structure. La propagation globale des instabilités pouvant être qualifiée de successive ou simultanée.

De plus, ces travaux se sont également appuyés sur une approche expérimentale. Les courbes macroscopiques expérimentales décrivent une forme en bec de pélican qui caractérise un plateau de transformation lors de la charge et une absence de plateau pour la transformation inverse lors de la décharge. La comparaison des expériences avec le modèle numérique a mis en lumière des différences dans le comportement global des instabilités.

Finalement, l'étude des AMF architecturés valide l'existence d'une interaction entre les instabilités matérielles et l'architecture. Ces observations ouvrent la voie à la possibilité d'un contrôle des instabilités par l'architecture voire à la conception d'un comportement structurel particulier grâce à des instabilités contrôlées.



## 4.7 Références

- ASHBY, M. et Y. BRÉCHET. 2003, «Designing hybrid materials», *Acta Materialia*, vol. 51, n° 19, doi :[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(03\)00441-5](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(03)00441-5), p. 5801 – 5821, ISSN 1359-6454. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645403004415>, the Golden Jubilee Issue. Selected topics in Materials Science and Engineering Past, Present and Future. 83
- AYAS, C., W. NELISSEN et C. TEKOGU. 2018, «2d lattice materials for low energy actuation», . 83
- BADNAVA, H., M. KADKHODAEI et M. MASHAYEKHI. 2015, «Modeling of unstable behaviors of shape memory alloys during localization and propagation of phase transformation using a gradient-enhanced model», *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, vol. 26, n° 18, p. 2531–2546. 87
- BALLARIN, V., M. SOLER, A. ERLADE, X. LEMOINE et S. FOREST. 2007, «Mechanisms and modeling of bake-hardening steels : Part i. uniaxial tension», *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 40, n° 8, doi :[10.1007/s11661-009-9813-5](https://doi.org/10.1007/s11661-009-9813-5), p. 1367–1374, ISSN 1543-1940. URL <https://doi.org/10.1007/s11661-009-9813-5>. 87
- BECHLE, N. J. et S. KYRIAKIDES. 2014, «Localization in niti tubes under bending», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 51, n° 5, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2013.11.023>, p. 967–980, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768313004666>. 84
- BOUAZIZ, O., Y. BRÉCHET et J. EMBURY. 2008, «Heterogeneous and architected materials : A possible strategy for design of structural materials», *Advanced Engineering Materials*, vol. 10, n° 1-2, doi :[10.1002/adem.200700289](https://doi.org/10.1002/adem.200700289), p. 24–36. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/adem.200700289>. 83
- BRÉCHET, Y. 2013, «Chapter 1 architected materials : An alternative to microstructure control for structural materials design? a possible playground for bio-inspiration?», dans *Materials Design Inspired by Nature : Function Through Inner Architecture*, The Royal Society of Chemistry, ISBN 978-1-84973-553-7, p. 1–16, doi :[10.1039/9781849737555-00001](https://doi.org/10.1039/9781849737555-00001). URL <http://dx.doi.org/10.1039/9781849737555-00001>. 83
- BRÉCHET, Y. et J. EMBURY. 2013, «Architected materials : Expanding materials space», *Scripta Materialia*, vol. 68, n° 1, doi :<https://doi.org/10.1016/j.scriptamat.2012.07.038>, p. 1 – 3, ISSN 1359-6462. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S135964621200499X>, architected Materials. 83
- ERICKSEN, J. 1975, «Equilibrium of bars», *J. Elasticity*, vol. 5, n° 191-201. 87

- FLECK, N. A. et X. QIU. 2007, «The damage tolerance of elastic–brittle, two-dimensional isotropic lattices», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 55, n° 3, doi : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2006.08.004>, p. 562–588, ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509606001359>. 83
- HALLAI, J. F. et S. KYRIAKIDES. 2013, «Underlying material response for lüders-like instabilities», *International Journal of Plasticity*, vol. 47, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2012.12.002>, p. 1–12, ISSN 0749-6419. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641912001854>. 83, 87
- JIANG, D., S. KYRIAKIDES, N. J. BECHLE et C. M. LANDIS. 2017, «Bending of pseudoe-  
lastic niti tubes», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 124, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2017.06.032>, p. 192–214, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768317303049>. 84, 87, 88, 128
- LEUNG, A. et S. GUEST. 2007, «Single member actuation of kagome lattice structures», *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, vol. 2, n° 2, p. 303–317. 83
- LEVITAS, V. I. et I. B. OZSOY. 2009, «Micromechanical modeling of stress-induced phase transformations. part 1. thermodynamics and kinetics of coupled interface propaga-  
tion and reorientation», *International Journal of Plasticity*, vol. 25, n° 2, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijplas.2008.02.004>, p. 239–280, ISSN 0749-6419. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0749641908000302>. 87
- LEÓN BALDELLI, A., C. MAURINI et K. PHAM. 2015, «A gradient approach for the ma-  
croscopic modeling of superelasticity in softening shape memory alloys», *Internatio-  
nal Journal of Solids and Structures*, vol. 52, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.09.009>, p. 45–55, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768314003564>. 87
- MACHADO, G., H. LOUCHE, T. ALONSO et D. FAVIER. 2015, «Superelastic cellular niti  
tube-based materials : Fabrication, experiments and modeling», *Materials Design  
(1980-2015)*, vol. 65, doi :<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2014.09.007>, p. 212–220,  
ISSN 0261-3069. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0261306914006967>. 84
- MARAIS, A., M. MAZIÈRE, S. FOREST, A. PARROT et P. LE DELLIOU. 2012, «Identification  
of a strain-aging model accounting for lüders behavior in a c-mn steel», *Philosophical  
magazine*, vol. 92, n° 28-30, p. 3589–3617. 87
- MAZIÈRE, M. et S. FOREST. 2013, «Strain gradient plasticity modeling and finite element  
simulation of lüders band formation and propagation», *Continuum Mechanics and  
Thermodynamics*, vol. 27(1-2), n° 83-104. 87

- MINES PARISTECH, O. et N. NUMERICS. «Zébulon : Non-linear finite element solver», URL <http://www.zset-software.com/>. 120
- REZAEI-HAJIDEHI, M. et S. STUPKIEWICZ. 2021, «Modelling of propagating instabilities in pseudoelastic niti tubes under combined tension–torsion : helical bands and apparent yield locus», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 221, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2020.09.011>, p. 130–149, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768320303498>, special Issue dedicated to papers from the International Union of Theoretical and Applied Mechanics 2019 Symposium on “Phase Transformations in Shape Memory Materials : Modeling and Applications”. 84
- SHAW, J. et S. KYRIAKIDES. 1997, «On the nucleation and propagation of phase transformation fronts in a niti alloy», *Acta Materialia*, vol. 45, n° 2, doi :[https://doi.org/10.1016/S1359-6454\(96\)00189-9](https://doi.org/10.1016/S1359-6454(96)00189-9), p. 683–700, ISSN 1359-6454. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1359645496001899>. 87
- TANKASALA, H., V. DESHPANDE et N. FLECK. 2017, «Tensile response of elastoplastic lattices at finite strain», *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 109, doi : <https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.02.002>, p. 307–330, ISSN 0022-5096. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022509616307967>. 83
- VIARD, A.-E., J. DIRRENBARGER et S. FOREST. 2020, «Propagating material instabilities in planar architected materials», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 202, n° 3, p. 532–551. 83, 90, 129
- WICKS, N. et S. GUEST. 2004, «Single member actuation in large repetitive truss structures», *International Journal of Solids and Structures*, vol. 41, n° 3, doi :<https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2003.09.029>, p. 965–978, ISSN 0020-7683. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0020768303005389>. 83



# Chapitre 5

## CONCLUSION

Les motivations de ce travail de thèse viennent de l'envie de développement de nouveaux matériaux augmentés de propriétés intrinsèques grâce au matériau superélastique. Les applications concernent des structures souples - capables de se déformer avec une grande amplitude de manière réversible - comme des absorbeurs de choc réutilisables ou encore des voilures aéronautiques à changement de forme. L'objectif général de cette thèse est de comprendre le comportement des instabilités matérielles dans les milieux architecturés 2D. Deux matériaux connus pour présenter des instabilités matérielles, l'acier ARMCO et le NiTi, sont utilisés pour créer des éprouvettes architecturées. Deux modèles de comportements pour ces deux matériaux sont identifiés afin de compléter l'étude expérimentale par une analyse numérique.

Les contributions de ce travail se résument à :

1. la mise en évidence d'une interaction entre les instabilités matérielles et l'architecture avec l'identification des deux comportements, propagatif et non-propagatif, des instabilités dépendant du caractère *bending-dominated* ou *stretch-dominated* du treillis.
2. la caractérisation de plusieurs niveaux de localisation des instabilités à l'échelle de la cellule et de la structure amenant à une description simultanée ou successive de la localisation dans les milieux architecturés.
3. la mise en oeuvre d'une méthode expérimentale probante pour l'étude des instabilités matérielles des réseaux architecturés 2D.

Ces conclusions de ces travaux sont surtout une démonstration de faisabilité de matériaux superélastiques architecturés. Cependant, ils appellent à approfondir et compléter certains aspects numérique et expérimentaux.

### Modélisation numérique

Dans le chapitre 4, le modèle de comportement du NiTi est suffisant pour reproduire la localisation et la propagation du changement de phase, ainsi que la réversibilité de la dé-

formation du fait de la superélasticité. Sur les courbes de comportement macroscopique obtenues numériquement, on n’observe aucune déformation permanente après déchargement puisque le modèle ne comprend pas de paramètre de plasticité. L’hypothèse a été faite que la phase martensitique ne sortait jamais du domaine élastique. Or, il est difficile d’obtenir le niveau de contrainte localement dans les architectures et de vérifier qu’il est toujours inférieur à la limite d’élasticité de la phase martensitique. Une possibilité pour affiner le modèle serait de prendre en compte la plasticité de la phase martensitique.

### Méthodes expérimentales

Dans le chapitre 3, les éprouvettes présentaient un nombre trop faible de cellules dans la largeur. Les résultats obtenus étaient entachés d’erreurs dues aux effets de bords importants. Dans le chapitre 4, des éprouvettes avec plus de cellules ont permis d’isoler les cellules centrales pour étudier les instabilités sans effet de bord. Le comportement des instabilités dans une cellule est obtenue avec les conditions périodiques. Seulement la comparaison avec le comportement des éprouvettes montre qu’il est nécessaire de considérer une cellule dans un réseau fini constitué de plusieurs cellules. Chaque cellule a un comportement individuel dépendant de sa position dans le réseau. Les compromis expérimentaux nous ont empêché d’étudier très précisément une cellule. Une étude expérimentale complémentaire serait de mesurer par corrélation d’image le comportement des instabilités dans une cellule isolée de l’éprouvette afin d’identifier précisément des niveaux de déformation locale et le comportement des instabilités.

Le moyen de mise en forme de l’éprouvette par découpe laser soulève un questionnement sur le traitement thermique du matériau à l’endroit des découpes. Une autre méthode par découpe jet d’eau par exemple permettrait de s’affranchir de cette question. De manière globale, de nombreux aspects n’ont pas pu être explorés dans l’idée d’une application future comme par exemple les effets du cyclage, les variations de composition du matériau ou encore les effets de taille comme le propose les travaux de [Xu et collab. \[2022\]](#).

### Architecture

Dans les chapitres 3 et 4, nous avons sélectionné seulement quelques géométries. Il reste à mettre au point une méthode afin d’explorer les architectures permettant d’exploiter le comportement superélastique des AMF. Plusieurs pistes de réflexion sont proposées ici :

1. Profiter, comme pour la cellule Kagome, d’une architecture présentant un mécanisme de déformation globale.
2. S’inspirer de bibliothèques d’architectures existantes, comme proposé dans [SCHU-](#)



[MACHER et collab. \[2018\]](#).

3. Proposer des architectures non périodiques, à gradient par exemple, qui pourraient être très performantes pour orienter la propagation.

## 5.1 Références

SCHUMACHER, C., S. MARSCHNER, M. GROSS et B. THOMASZEWSKI. 2018, «Mechanical characterization of structured sheet materials», *ACM Transactions on Graphics*, vol. 37, n° 4, p. 1–15. [136](#)

XU, A., M. SALEH et D. BHATTACHARYYA. 2022, «Deformation behaviour of hexagonal- and circular-patterned ni single-crystal 2d micor-lattices via in situ micro-tensile testing ang computational analysis», *Journal of Materials Science*, vol. 57, n° 17, p. 8276–8297. [136](#)



# RÉSUMÉS

## Résumé français

Sollicités en traction, les aciers à faible teneur en carbone présentent une déformation plastique inhomogène. Cette instabilité, appelée bande de Piobert-Lüders, crée des fronts de déformation localisés qui se propagent dans la structure. Les matériaux super-élastiques, comme le NiTi, se comportent également macroscopiquement de cette manière dans le domaine élastique. Jusqu'à présent, seules des géométries simples, tôles et tubes, ont été étudiées. Cette thèse se concentre sur les matériaux architecturés et plus particulièrement sur les structures en treillis qui peuvent être définies comme une tessellation de cellules unitaires distribuées périodiquement dans l'espace. Cette classe de matériaux avancés tire de nouvelles propriétés mécaniques de son architecture.

Nous étudions l'effet de l'architecture sur le comportement global de la structure entière. En particulier, comment les bandes interagissent avec un réseau et comment contrôler l'initiation et la propagation de la déformation localisée avec l'architecture. Un modèle de matériau élastoplastique est utilisé dans ce travail pour simuler la formation et la propagation des bandes de Piobert-Lüders. Le modèle prend également en compte un cadre de grande déformation pour l'élasto-plasticité avec des conditions aux limites périodiques afin de représenter le matériau architecturé. L'initiation et la propagation des instabilités du matériau dépendent de la géométrie et de l'orientation relative de la sollicitation. Deux comportements, propagatif et non-propagatif sont identifiés pour les bandes de localisation et mis en relation avec le type de la géométrie. Les instabilités matérielles affectent le comportement mécanique de la structure dans la mesure où elles sont régies par l'architecture. Ces conclusions ont été comparées à des essais expérimentaux sur des échantillons d'acier ARMCO et de NiTi découpés au laser et architecturés.

Le choix d'une architecture spécifique peut être fait dans le but de concentrer l'initiation de la plasticité dans une région spécifique et même d'éviter la plasticité d'une autre région, ouvrant ainsi la voie à des matériaux basés sur l'instabilité des matériaux.

## Résumé anglais

Under tension low carbon steels exhibit inhomogeneous plastic deformation. This instability called Piobert-Lüders banding creates fronts of localized strain that propagate in the structure. Superelastic materials, such as NiTi, also behave macroscopically in this way in the elastic domain. To date, only simple geometries, sheets and tubes, have been studied. This thesis focuses on architected materials and specifically lattice structures which can be defined as a tessellation of unit-cells periodically distributed in space. This class of advanced materials draws new mechanical properties from its architecture.

We investigate the effect of the architecture on the global behavior of the entire structure. Especially, how bands interact with a lattice and how to control initiation and propagation of localized strain with the architecture. An elastoplastic material model is used in this work to simulate the Piobert-Lüders band formation and propagation. The model also considers a large deformation framework for elasto-plasticity with periodic boundary conditions in order to represent the architected material. Initiation and propagation of material instabilities depend on the geometry and the relative orientation of the solicitation. Propagating and non-propagating behaviors are identified for the localization bands and related to the type of geometries. Material instabilities affect the mechanical behavior of the structure as far as they are governed by the architecture. Those conclusions have been compared to experimental testing on laser cut architected specimen of ARMCO steel and superelastic NiTi.

The choice of a specific architecture can be made with the objective of concentrating initiation of plasticity in specific region and even of avoiding plasticity from other region, hence paving the way to materials instability-based materials.