



HAL
open science

Dynamique hors d'équilibre d'un gaz de Bosons unidimensionnel étudiée via la mesure spatialement résolue de la distribution des quasiparticules

Léa Dubois

► **To cite this version:**

Léa Dubois. Dynamique hors d'équilibre d'un gaz de Bosons unidimensionnel étudiée via la mesure spatialement résolue de la distribution des quasiparticules. Optique [physics.optics]. Université Paris-Saclay, 2024. Français. NNT : 2024UPASP066 . tel-04749900

HAL Id: tel-04749900

<https://pastel.hal.science/tel-04749900v1>

Submitted on 23 Oct 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Dynamique hors équilibre d'un gaz de Bosons
1D étudiée via la mesure spatialement résolue de
la distribution de rapidités

*Out of equilibrium dynamics of a one-dimensional Bose gas studied
using a spatially resolved measurement of the rapidity distribution*

Thèse de doctorat de l'Université Paris-Saclay

École doctorale n° 572, Ondes et Matières (EDOM)

Spécialité de doctorat : Physique

Graduate School : Physique, Référent : Faculté des Sciences d'Orsay

Thèse préparée au **Laboratoire Charles Fabry**
(Université Paris-Saclay, CRNS, Institut d'Optique Graduate School),
sous la direction d'**Isabelle BOUCHOULE**, Directrice de recherche.

Thèse soutenue à PALAISEAU, le 20 septembre 2024, par

Léa DUBOIS

Composition du Jury

Membres du jury avec voix délibérative

Nicolas PAVLOFF Professeur, LPTMS	Président
Frédéric CHEVY Professeur, École Normale Supérieure	Rapporteur
Romain DUBESSY Maître de Conférences, LPL	Rapporteur
Juliette BILLY Maîtresse de Conférences, LCAR	Examinatrice

Membre du jury sans voix délibérative

Jérôme DUBAIL Chargé de Recherche, CESQ	Membre invité
---	---------------

ACRONYMES

- CCD** Charge Coupled Device. 85, 86, 88, 97, 103–105
- DMD** Dispositif de Micromiroirs Digitaux. v, 99–106, 108, 110–112, 134, 141, 142, 162, 173
- DO** Densité Optique. 67, 68, 80, 86–88, 106, 119
- ETH** Hypothèse de Thermalisation des États propres. 35, 36
- GETH** Hypothèse de Thermalisation des États propres Généralisée. 36, 37
- GGE** Ensemble de Gibbs Généralisé. 37, 39, 98, 140
- GHD** Hydrodynamique Généralisée. iv, vii, 5, 33, 34, 40–45, 134, 136, 137, 139, 140, 142–144, 146–152, 154, 155, 159–161, 164, 166, 167, 169, 170, 172, 173, 175–177, 179, 180
- GP** Gross-Pitaevskii. iv, vii, 27, 33, 34, 41, 43–45, 55, 116, 119, 120, 125, 139, 144, 145, 165, 174
- GPE** Équation de Gross-Pitaevskii. 26, 44, 166
- LCF** Laboratoire Charles Fabry. 1, 9, 18, 64, 90, 91, 99, 101
- LDA** Approximation de Densité Locale. 10, 34, 38, 39, 90, 96, 98, 140, 141, 148
- LL** Lieb Liniger. 9–11, 13, 18, 21, 23, 31, 32, 36, 41, 43, 47–50, 54, 55, 60, 73, 99, 141, 166
- NLSE** Équation de Schrödinger Non-Linéaire. 55–57, 60
- ON** Ouverture Numérique. 104, 109
- PMO** Piège Magnéto-Optique. 66, 67, 69
- PSF** fonction d'étalement du point. 104, 105

qBEC quasi-condensat de Bose Einstein. 9, 17, 20, 22, 24–26, 32, 38, 41, 44, 48, 64, 80, 89, 95, 142, 145, 148, 149, 154, 172, 173, 180

RF Radio Fréquence. 65, 68, 83, 174, 175

TF Thomas-Fermi. 42, 80, 116, 120, 121, 123–129, 131–133

TABLE DES MATIÈRES

Acronymes	i
Remerciements	1
Introduction	3
I Théorie	7
1 Éléments théoriques	9
1.1 Gaz de bosons unidimensionnels	10
1.1.1 Hamiltonien de Lieb-Liniger	10
1.1.2 États propres du système	10
1.1.2.1 Système à deux particules	10
1.1.2.2 Système à N particules	13
1.1.2.3 Excitations élémentaires	15
1.1.3 Limite thermodynamique et distribution de rapidités	15
1.1.3.1 Distribution de rapidités et facteur d'occupation	15
1.1.3.2 État fondamental	17
1.1.3.3 Thermodynamique Yang-Yang	18
1.1.3.4 Accès expérimental à la distribution de rapidités	20
1.2 Régime asymptotique	22
1.2.1 Gaz de Bose idéal	23
1.2.2 Gaz de Fermi idéal ou régime de Tonks-Girardeau	25
1.2.3 Régime de quasi-condensat de Bose-Einstein	25
1.3 Théorie linéarisée	26
1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii	26

1.3.2	Transformation de Bogoliubov pour un système homogène	27
1.3.3	Fluctuations de densité et de phase	28
1.3.3.1	Fluctuations de densité	29
1.3.3.2	Fluctuations de phase	29
1.3.3.3	Fonction de corrélation à un corps	30
2	Théorie Hydrodynamique Généralisée	33
2.1	Relaxation de systèmes quantiques isolés	34
2.1.1	Systèmes chaotiques et ensemble de Gibbs	35
2.1.2	Systèmes intégrables et ensemble de Gibbs généralisé	36
2.2	Équations hydrodynamiques pour un système chaotique	37
2.3	Équations hydrodynamiques pour un système intégrable	38
2.3.1	Distribution de rapidités spatialement résolue	38
2.3.2	Équation Hydrodynamique Généralisée	39
2.4	Limite Gross-Pitaevskii	41
2.4.1	Les équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps	41
2.4.2	Description du système à l'état fondamental	42
2.4.3	Des équations GHD aux équations GP dépendantes du temps	43
3	Projets théoriques	47
3.1	Relaxation des phonons pour un système intégrable	47
3.1.1	Représentation du système en termes de fermions	48
3.1.2	Représentation du système en termes de phonons	49
3.1.3	Relaxation du système	50
3.1.4	Exemple pour un état initial particulier	52
3.2	Équation de Schrödinger Non Linéaire et distribution de rapidités	55
3.2.1	Construction des constantes de diffusion inverse	56
3.2.2	Lien avec la distribution de rapidités	57
II	Expérience de puce atomique	61
4	Présentation de l'expérience	63
4.1	Dispositif expérimental	64
4.1.1	La puce atomique	64
4.1.2	Contrôleur et séquenceur	65
4.1.3	Présentation des différentes étapes pour la production d'un gaz de Bose 1D	66
4.1.4	Système lasers	69
4.2	Piégeage dans le guide modulé	70
4.2.1	Principe de piégeage magnétique par un fil	70
4.2.2	Piégeage transverse	72

4.2.2.1	Problème de rugosité	72
4.2.2.2	Mesure de la fréquence transverse	73
4.2.3	Piégeage longitudinal	73
4.2.3.1	Découplage des confinements transverses et longitudinaux	74
4.2.3.2	Piégeage harmonique	75
4.2.3.3	Champ magnétique résiduel	77
4.2.3.4	Mesure de la fréquence longitudinale	77
4.2.3.5	Piégeage quartique	78
4.2.3.6	Réalisation expérimentale d'un piège quartique	79
4.2.3.7	Instabilités du piège quartique	80
4.3	Stabilité de l'expérience	81
4.3.1	Sensibilité aux bruits magnétiques extérieurs	81
4.3.2	Régime permanent	82
4.3.3	Détérioration de la puce	83
5	Techniques d'analyse	85
5.1	Système d'imagerie	85
5.1.1	Imagerie par absorption après temps de vol	86
5.1.2	Imagerie par absorption <i>in situ</i>	87
5.1.3	Défauts d'imagerie	88
5.2	Thermométrie	89
5.2.1	Température Yang-Yang	90
5.2.1.1	Principe de mesure	90
5.2.1.2	Prise en compte de la population des états transverses	90
5.2.2	Thermométrie par étude des ondulations de densités	91
5.2.2.1	Spectre de puissance des ondulations de densité	91
5.2.2.2	Quasi-condensat homogène	93
5.2.2.3	Cas des petits vecteurs d'ondes	94
5.2.2.4	Cas des grands vecteurs d'ondes	95
5.2.2.5	Quasi-condensat non-homogène	96
5.2.2.6	Mesures expérimentales	96
5.2.2.7	Commentaire sur les mesures de températures	98
6	Mise en place d'un outil de sélection spatial	99
6.1	Principe de sélection	100
6.2	Mise en place expérimentale	101
6.2.1	Contrôle du DMD	101
6.2.2	Montage optique	101
6.2.3	Mise au point	103
6.2.4	Imagerie sur les atomes	105
6.3	Caractérisation de la sélection	106

6.3.1	Estimation de la puissance nécessaire	106
6.3.2	Mesure de la puissance nécessaire	108
6.3.3	Imagerie par fluorescence	109
6.3.4	Limitations	110
III	Résultats expérimentaux	113
7	Expansion longitudinale d'un gaz de Bose 1D	115
7.1	Expansion longitudinale	116
7.1.1	Protocole expérimental	116
7.1.2	Compensation de la gravité	117
7.2	Profil de densité d'un gaz dans un piège harmonique	118
7.2.1	Équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps	119
7.2.2	Équations d'état	120
7.2.3	Solutions analytiques homothétiques des équations Gross-Pitaevskii dans un piège harmonique	121
7.2.3.1	Facteur d'échelle	121
7.2.3.2	Solutions analytiques homothétiques	122
7.2.3.3	Évolution temporelle du facteur d'échelle	123
7.2.4	Régimes particuliers	124
7.2.4.1	Régime asymptotique à temps longs	124
7.2.4.2	Régime à temps courts	124
7.2.5	Régime de cross-over	124
7.2.5.1	Méthodes numériques	124
7.2.5.2	Caractérisation de l'évolution du profil	125
7.2.6	Analyse des données expérimentales	126
7.2.7	Limites expérimentales	127
7.3	Fluctuations de phases d'un gaz dans un piège harmonique	129
7.3.1	Hypothèse de suivi adiabatique	129
7.3.2	Cas des petits vecteurs d'ondes	130
7.3.3	Validation de l'hypothèse du suivi adiabatique	131
7.3.4	Mesures expérimentales et perspectives	132
7.4	Évolutions des fluctuations de phase d'une tranche de gaz initialement homogène	133
7.4.1	Protocole expérimental	134
7.4.2	Résultats expérimentaux et perspectives	135
8	Sonde locale de la distribution de rapidités	139
8.1	Protocole expérimental	141
8.2	Mesures sur un système à l'équilibre	141
8.3	Dynamique d'expansion : comportements attendus	143
8.3.1	Comportement hydrodynamique	143

8.3.2	Comparaison aux équations hydrodynamiques GP	145
8.4	Comparaison aux équations GHD	146
8.4.1	Régime asymptotique	146
8.4.2	Hypothèse d'un système thermique sur une tranche	146
8.4.3	Hypothèse thermique sur différentes tranches	148
8.4.4	Au-delà de l'hypothèse thermique	151
8.5	Effet du processus de sélection	153
8.5.1	Effet de l'intensité du faisceau de sélection	153
8.5.2	Autres précisions	154
8.6	Systèmes hors équilibres	155
8.6.1	Protocole de cisaillement	155
8.6.2	Mesures expérimentales	155
9	Protocole de partitionnement	159
9.1	Introduction	159
9.2	Protocole expérimental	161
9.3	Comportement hydrodynamique	162
9.4	Comparaison aux équations hydrodynamiques quantiques	164
9.4.1	Prédictions théoriques	164
9.4.2	Comparaison avec les données expérimentales	165
9.4.3	Déviations du régime champ classique	166
9.5	Limite de l'hypothèse thermique	167
9.5.1	Méthodes numériques	167
9.5.2	Ajustement des données expérimentales	168
9.6	Au-delà de l'hypothèse thermique	169
9.7	Asymétrie de la distribution de rapidités locale	172
9.7.1	Distribution de rapidités localement asymétrique	172
9.7.2	Protocole expérimental	173
9.7.3	Asymétrie des profils	174
9.7.4	Comparaisons aux simulations GHD	175
9.7.4.1	Méthodes numériques	175
9.7.4.2	Simulations GHD	176
	Conclusion	179

REMERCIEMENTS

Ce manuscrit résume les résultats scientifiques obtenus après trois années de travail. Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenue et ont contribué à cet accomplissement.

Je tiens tout d'abord à remercier les rapporteurs et les examinateurs de ma thèse : Frédéric Chevy, Romain Dubessy, Nicolas Pavloff et Juliette Billy, qui ont consacré une part significative de leur temps à la lecture attentive de ce manuscrit.

J'ai réalisé cette thèse [Laboratoire Charles Fabry](#) : je remercie chaleureusement son directeur Patrick Georges pour son accueil et sa disponibilité tout au long de ma thèse.

En commençant à rédiger ces remerciements, la première personne qui m'est venue à l'esprit a naturellement été Isabelle Bouchoule, responsable de l'équipe Puce, qui m'a encadrée tout au long de ma thèse. Je me rends compte de la chance que j'ai eue de t'avoir en tant que directrice de thèse, j'ai appris énormément grâce à ta patience et ton excellence scientifique ! Mais plus que ça, tu as été d'une bienveillance exceptionnelle (et désormais, je sais ~~quelle~~ ~~erde~~ quel boot utiliser pour border la grand-voile d'un voilier) !

Je remercie aussi tous les stagiaires qui sont venus travailler avec nous et qui ont ajouté leur pierre à l'édifice : Adria Blanc, Ayoub Hadi, Emmanuel Salib, Léopaul Barbier et Yasser Bezzaz. Merci aussi aux anciens doctorants de l'équipe que j'ai peu ou pas connu, mais qui, grâce à leurs manuscrits de thèse respectifs, m'ont beaucoup aidé à comprendre le fonctionnement de l'expérience.

Toujours dans l'équipe Puce du [LCF](#), j'ai une pensée toute particulière pour Guillaume Thémèze qui nous a rejoint lorsque j'étais en fin de première année de thèse et qui est, au moment où j'écris ces remerciements, en troisième année de thèse. Tu as toujours été d'une gentillesse et d'une patience extrême envers moi. J'ai beaucoup apprécié travailler avec toi et te souhaite le meilleur pour la suite. Bon courage pour la fin de ta thèse !

Enfin, ce manuscrit présente des résultats issus d'une collaboration fructueuse avec Jérôme Dubail, chargé de recherche au CESQ à Strasbourg. Je te remercie pour les multiples

REMERCIEMENTS

discussions qui m'ont permis d'avoir une meilleure compréhension de la physique des gaz 1D. Merci pour m'avoir fait visiter ton laboratoire, j'espère continuer à collaborer avec toi dans la suite!

Plus généralement, je tiens à remercier l'ensemble des membres du groupe Gaz Quantique. Je pense d'abord aux chercheurs permanents – Alain, Chris, David, Denis, Marc, Thomas B., Thomas C. et Vincent – qui contribuent à entretenir une très bonne dynamique au sein du groupe. Merci Marc pour avoir assisté à une répétition pour la soutenance. J'ai une pensée aussi à l'ensemble des stagiaires, doctorants et post-doctorants que j'ai pu rencontrer : Alfred, Antoine, Charlie, Clothilde, Félix, Gaëtan, Géraud, Guillaume, JP, Jean-Philippe, Lucas, Mai, Maxime, Mona, Niranjan, Paul, Quentin, Romaric, Roy, Ruy, Sanghyeop, Sara, Sayali, Victor, Xudong, Yukun, Ziyad... L'ambiance au sein du groupe a été très agréable, et j'ai passé trois très belles années à discuter plus ou moins de sciences avec vous!

Je tiens ensuite à remercier l'ensemble des ingénieurs de recherches, des techniciens (infrastructures, mécaniques, électroniques, ...) et du personnel administratif (accueil, achats, missions, reprographie), d'une performance sans égale et sans qui les résultats présentés ici n'auraient pu être obtenus. J'ai une pensée toute particulière pour Florence Nogrette qui a réfléchi en amont à la réalisation expérimentale de l'outil de sélection spatial et qui nous a aidés à l'implémentation de cet outil.

Au cours de ma thèse, j'ai eu l'opportunité d'effectuer une mission d'enseignement à l'École Normale Supérieure Paris-Saclay. Je tiens à remercier chaleureusement les personnes qui m'ont accueillie et intégrée à l'équipe pédagogique. Je pense notamment à Arnaud le Diffon, Frédéric Moulin, Laure Quivy, Leonardo Mazza, Mathieu Langer et Patrice Hello. Réaliser ces enseignements a été un véritable plaisir, rendu possible par la qualité de l'organisation! Un grand merci également à Arnaud le Diffon et Léa Lachaud pour m'avoir offert l'opportunité d'encadrer les TP dans le cadre de la préparation aux Olympiades Internationales de Physique.

Tout au long de ma thèse, j'ai pu bénéficier de soutiens extérieurs, dans les bons moments comme dans les moins bons. Je pense en particulier à mes amis de l'ENS, à Geoffroy, Vincent, Rémy, Raphaël et Zélie, à Laurent pour ses soirées Corg[ENS], à Céline et Marie-Charlotte et nos repas hebdomadaires pour parler théâtre, quiche et iprof, à Rosemonde et Alex (et Rym'elle) pour les soirées jeux à la maison ou encore aux "chimistes" pour les apéros du vendredi soir (et du samedi quelques fois) : Alix, Aurélien, Damien, Héloïse, Laora, Maëliiss, Margaux, Nastasia, Pierre. Je pense bien sûr à JX mon colocataire pendant ces trois années de thèse, à nos longues discussions du soir et à nos nombreuses sorties cinéma, théâtre ou tout simplement ballades à Paris! Je remercie ma famille, qui m'a toujours soutenue dans mon parcours scolaire / universitaire. J'ai une pensée particulière pour mes parents, mes frères et mes grands-parents. Enfin, merci Iñigo, merci pour tout.

INTRODUCTION

Mon sujet de thèse s’inscrit dans le domaine des atomes froids. Un gaz d’atomes froids est un système composé de quelques dizaines à quelques millions d’atomes de très basse température telle que les propriétés quantiques y soient exacerbées. L’intérêt de l’étude des gaz d’atomes ultra-froids réside dans le fait qu’ils constituent des plateformes idéales pour mieux comprendre la physique quantique à N corps [1]. Ces systèmes sont utilisés par exemple pour la métrologie [2] ou encore dans le cadre de développement de processeurs quantiques digitaux [3]. Un autre enjeu majeur concerne l’utilisation de ces systèmes comme des plateformes de simulations quantiques à N corps [4]. La complexité de ces systèmes étant exponentielle avec le nombre de particules N , la résolution numérique de tels systèmes par des ordinateurs classiques devient rapidement irréaliste. Ainsi, l’utilisation de plateformes expérimentales de réalisation de systèmes à N corps permet de sonder la physique qui n’est pas encore accessible théoriquement et numériquement. Les systèmes unidimensionnels sont particulièrement intéressants comme plateforme de simulation quantique puisqu’il existe de nombreux modèles théoriques et numériques permettant de caractériser ces systèmes et de tester ces plateformes. L’étude de ces systèmes à dimension réduite permet aussi une meilleure compréhension de la physique de matériaux tels que les fils quantiques supraconducteurs [5], les chaînes de spins magnétiques ou encore les réseaux 1D de jonctions Josephson.

Ainsi, en contrôlant la géométrie du potentiel de piégeage, il est possible expérimentalement de geler les degrés de libertés afin d’étudier des systèmes à dimension réduite et notamment des systèmes unidimensionnels (1D) : les atomes ne peuvent alors se déplacer que selon la direction longitudinale. Cela inclut des gaz de bosons [6, 7, 8, 9, 10], des gaz de fermions [11, 12, 13] ou même des mélanges de composants [14]. Pour réaliser de tels systèmes expérimentalement, les atomes sont placés dans des pièges très confinant transversalement, que ce soit des pièges magnétiques produits par micro structures [15] ou bien des réseaux optiques de tubes 1D [7]. Dans l’expérience de puce atomique du Laboratoire Charles Fabry, des atomes de Rubidium ^{87}Rb sont piégés dans un potentiel magnétique produit par des fils traversés par des courants et déposés sur une puce atomique.

La contrainte de dimensionnalité apporte à ces systèmes des propriétés uniques. Par exemple, les fluctuations à température nulle sont exacerbées en dimension réduite et détruisent l'ordre à longue portée : la présence de condensation de Bose-Einstein n'a pas lieu pour des gaz de Bosons en 1D ou 2D [16, 17].

Une autre propriété tout à fait remarquable est que certains systèmes 1D sont dits intégrables. En mécanique classique, un système à N degrés de liberté est intégrable si ce dernier présente N quantités conservées, soit N intégrales premières du mouvement. Le système explore alors une région limitée dans l'espace des phases, contrairement aux systèmes non intégrables (ergodiques). La notion d'intégrabilité pour des systèmes quantiques est plus difficile à appréhender et reste sujet à débat : elle fait entre autre intervenir la notion de charges locales conservées [18]. Pour un système intégrable, la notion de relaxation est aussi très particulière : contrairement aux systèmes ergodiques, le système ne relaxe pas vers un état thermique, c'est-à-dire un état décrit par un ensemble de Gibbs.

Mon sujet de thèse se concentre sur l'étude de gaz 1D à un composant bosonique avec interactions de contact répulsives, un système quantique intégrable [19, 20] étudié pour la première fois en 1960 par Lieb et Liniger [21, 22] et décrit par l'Hamiltonien qui porte désormais leurs noms. Ici, la notion d'intégrabilité est au cœur de la compréhension de ce système. Du fait de son caractère intégrable, les états propres du modèle de Lieb Liniger peuvent être obtenus analytiquement et prennent la forme de l'ansatz de Bethe. Les états propres sont indicés par des quantités appelées rapidités, pouvant être considérées comme les vitesses de quasi-particules à durée de vue infinie. À la limite thermodynamique émerge la notion de distribution de rapidités, une fonction alors conservée au cours de la dynamique et qui caractérise l'état relaxé du système. Contrairement à un système ergodique dont l'état relaxé est thermique, c'est-à-dire caractérisé par quelques grandeurs macroscopiques (nombre d'atomes N , impulsion totale P et énergie totale E), l'état relaxé de ce système intégrable est plus complexe car caractérisé par une fonction, la distribution de rapidités.

La notion de distribution de rapidités étant centrale pour la caractérisation des gaz de bosons 1D, nous avons sondé expérimentalement cette distribution au cours de ma thèse. Plus précisément, nous avons mesuré la distribution de rapidités spatialement résolue définie pour des systèmes inhomogènes présentant des variations spatiales à grandes longueurs d'onde. Nous avons aussi voulu caractériser les dynamiques hors équilibres de nos systèmes. Pour cela, nous avons utilisé la théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD), une théorie émergente ayant pour objectif d'appréhender la dynamique des systèmes quantiques intégrables par une approche hydrodynamique [23], utilisant la notion de distribution de rapidité spatialement résolue.

Ce mémoire présente les différents résultats obtenus au cours de ma thèse sur la caractérisation de gaz de Bose 1D à l'équilibre et hors-équilibre, au travers de la mesure de la distribution de rapidités spatialement résolue. Il se divise en **9 Chapitres**, regroupés en **3 Parties** différentes :

- Une première partie introduit les différents éléments théoriques. Elle est elle-même décomposée en trois chapitres. Le **Chapitre 1** présente la physique des gaz de Bose 1D où le modèle de Lieb-Liniger et la notion de distribution de rapidités sont introduits. Le **Chapitre 2** se concentre sur la théorie [Hydrodynamique Généralisée](#), une nouvelle approche hydrodynamique dont l’objectif est de caractériser les dynamiques hors équilibres de systèmes intégrables. Enfin, le **Chapitre 3** présente deux projets théoriques auxquels j’ai contribué. Le premier projet a consisté à caractériser l’état relaxé d’un système présentant initialement des excitations phononiques [24]. Le second projet fait le lien entre les rapidités et d’autres quantités conservées qui peuvent être construites dans la limite champ classique [25].
- La deuxième partie présente l’expérience de puce atomique du Laboratoire Charles Fabry. Pour cela le **Chapitre 4** présente l’expérience et les différentes étapes permettant de produire des gaz de Bosons 1D. Le **Chapitre 5** détaille les techniques expérimentales pour analyser et caractériser les gaz de Bosons 1D produits : les protocoles d’imagerie ainsi que les mesures de température y sont présentées. Le **Chapitre 6** présente l’implémentation et la caractérisation d’un outil de sélection spatial, utilisé pour sonder localement la distribution de rapidités et pour produire des situations hors équilibres.
- La dernière partie détaille les différents résultats expérimentaux au cours de ma thèse. Le **Chapitre 7** présente la caractérisation d’expansions longitudinales de gaz de Bose 1D grâce aux mesures de l’évolution des profils de densité et des fluctuations de phase. Le **Chapitre 8** présente les résultats liés à la mesure de la distribution de rapidités [26]. Ces mesures ont été réalisées sur des gaz à l’équilibre et hors-équilibre. Enfin, le **Chapitre 9** détaille les résultats obtenus en réalisant un protocole de partitionnement, c’est-à-dire en étudiant la déformation de bord entre deux régions voisines de densité initialement homogènes et différentes. Cette caractérisation s’est notamment fait au travers de la mesure de distribution de rapidités spatialement résolue.

———— PREMIÈRE PARTIE ————

THÉORIE

ÉLÉMENTS THÉORIQUES

Sommaire

1.1 Gaz de bosons unidimensionnels	10
1.1.1 Hamiltonien de Lieb-Liniger	10
1.1.2 États propres du système	10
1.1.3 Limite thermodynamique et distribution de rapidités	15
1.2 Régime asymptotique	22
1.2.1 Gaz de Bose idéal	23
1.2.2 Gaz de Fermi idéal ou régime de Tonks-Girardeau	25
1.2.3 Régime de quasi-condensat de Bose-Einstein	25
1.3 Théorie linéarisée	26
1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii	26
1.3.2 Transformation de Bogoliubov pour un système homogène	27
1.3.3 Fluctuations de densité et de phase	28

Ce chapitre introduit les différents outils théoriques qui seront utilisés dans le reste de ce manuscrit. Afin de décrire la physique de gaz de bosons unidimensionnels, une première partie présente l'Hamiltonien de [Lieb Liniger \(LL\)](#) ainsi que la forme exacte des états propres. La notion de distribution de rapidités, quantité accessible expérimentalement, émerge alors comme fonction permettant de décrire l'état relaxé du système à la limite thermodynamique. Les propriétés des gaz de bosons sont exposées : différents régimes des gaz de Bose unidimensionnels sont introduits avec leurs propriétés particulières et les fonctions de corrélations associées. Une part plus importante est dédiée au traitement du régime appelé [quasi-condensat de Bose Einstein \(qBEC\)](#) qui est le régime sondé par l'expérience de puce atomique du [Laboratoire Charles Fabry \(LCF\)](#). Pour cela, la théorie linéarisée de Bogoliubov est introduite.

1.1 Gaz de bosons unidimensionnels

Dans cette première partie, les systèmes étudiés sont considérés homogènes. Comme on le verra dans la suite, l'étude d'un système inhomogène variant sur des échelles de longueurs grandes peut se ramener à l'étude d'un système homogène *via* l'[Approximation de Densité Locale \(LDA\)](#).

1.1.1 Hamiltonien de Lieb-Liniger

Le système considéré est un ensemble de N bosons avec des interactions de contact répulsives placés dans une boîte unidimensionnelle (1D) de taille L aux conditions aux limites périodiques. Ce système est décrit par l'Hamiltonien de [Lieb Liniger \(LL\)](#),

$$\hat{H}_{\text{LL}} = \sum_{i=1}^N \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g \sum_{j>i} \delta(x_i - x_j) \right], \quad (1.1)$$

qui se réécrit en seconde quantification

$$\hat{H}_{\text{LL}} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_0^L dx \hat{\psi}^\dagger(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{\psi}(x) + \frac{g}{2} \int_0^L dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x) \quad (1.2)$$

avec $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^\dagger$ les opérateurs champs annihilation et création vérifiant les relations de commutations bosoniques $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = \delta(x - x')$ et $[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] = [\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')] = 0$. Ici, m est la masse des particules et $g > 0$ le paramètre de répulsion 1D. Dans le cas où le confinement transverse est un potentiel harmonique de pulsation $\omega_\perp = \omega_y = \omega_z$, le paramètre d'interaction se réécrit en fonction de la longueur de diffusion 3D a tel que $g \simeq 2a\hbar\omega_\perp$ [27]. Lorsque le paramètre d'interaction est tel que $g \rightarrow \infty$, le gaz décrit est dans le régime appelé régime de Tonks-Girardeau ou gaz de bosons à cœur dur : on peut alors montrer que le système est similaire pour certaines observables à celui d'un gaz de fermions sans spin et sans interactions [28, 29].

Comme d'autres systèmes 1D, le modèle de LL est très particulier puisqu'il est intégrable. La fonction d'onde des états propres prend une forme analytique obtenue pour la première fois par Lieb et Liniger en 1963 [21, 22]. La suite de cette partie développe la forme de ces solutions tout en faisant émerger la notion de rapidités et de distribution de rapidités à la limite thermodynamique.

1.1.2 États propres du système

1.1.2.1 Système à deux particules

L'étude du système restreint à 2 particules (de positions respectives x_1 et x_2) est instructive pour comprendre la construction des états propres. En utilisant comme variables le centre de masse $X = (x_1 + x_2)/2$, la distance relative entre les deux particules $Y = x_1 - x_2$ et en se

plaçant dans le référentiel de centre de masse, l'Hamiltonien de LL se réécrit

$$\hat{H}_{\text{LL}} = -\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + g\delta(Y) \quad (1.3)$$

avec $\tilde{m} = m/2$ la masse réduite du système. La fonction d'onde propre $\tilde{\varphi}$ d'énergie propre associée $E > 0$ est continue en $Y = 0$ et est solution de l'équation

$$-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial Y^2} + g\delta(Y)\tilde{\varphi} = E\tilde{\varphi}. \quad (1.4)$$

Le système étant composé de particules bosoniques, on cherche une solution symétrique que l'on écrit sous la forme

$$\tilde{\varphi}(Y) = \sin\left(\frac{\tilde{m}}{\hbar}\theta|Y| + \frac{\Phi}{2}\right), \quad (1.5)$$

avec Φ une phase à déterminer. En réinjectant Eq.(1.5) dans Eq.(1.4), on obtient l'énergie propre de l'état lié $E = \tilde{m}\theta^2/2$. La dérivée de la fonction d'onde n'est pas continue en $Y = 0$. Le potentiel étant infini en $Y = 0$, la phase Φ est obtenue en intégrant l'Eq.(1.4) entre $\pm\epsilon$

$$-\frac{\hbar^2}{2\tilde{m}} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dY \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial Y^2} + g \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dY \delta(Y)\tilde{\varphi} = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} dY \tilde{\varphi} \quad (1.6)$$

et en faisant tendre ϵ vers 0,

$$\tilde{\varphi}'(0^+) - \tilde{\varphi}'(0^-) = \frac{\tilde{m}g}{\hbar^2} \tilde{\varphi}(0). \quad (1.7)$$

En utilisant la forme de la fonction d'onde donnée par l'Eq.(1.5), la phase s'écrit

$$\tan\left(\frac{\Phi}{2}\right) = \frac{\hbar}{g}\theta. \quad (1.8)$$

Considérons quelques cas particuliers. Si le terme de répulsion est très grand $g \rightarrow \infty$, on a alors $\Phi \rightarrow 0$ et $\tilde{\varphi}(0) = 0$. Cette situation représentée sur la Fig.1.1(a), à ceci près que la fonction d'onde est symétrique, est similaire à un système présentant un comportement fermionique où deux particules ne peuvent pas être localisées en une même position (principe d'exclusion de Pauli). On retrouve le comportement prédit par Girardeau pour un système à N particules [29]. À l'inverse, lorsque $g \rightarrow 0$, le terme de phase $\Phi \rightarrow \pi/2$ et la dérivée de la fonction tend à être continue en $Y = 0$.

Maintenant, afin de généraliser aux cas à N particules, on se replace dans le référentiel du laboratoire et on travaille avec les variables x_1, x_2 . Dans ce référentiel, la condition de raccordement de la fonction d'onde en $x_1 = x_2$ s'écrit pour la fonction d'onde à deux particules $\varphi(x_1 < x_2) = \langle 0|\hat{\psi}(x_1)\hat{\psi}(x_2)|\varphi\rangle$

$$\lim_{x_2 \rightarrow x_1^+, x_1 < x_2} \left[\frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_2} - \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{m}{\hbar^2} g \varphi(x_1, x_2) \right] = 0. \quad (1.9)$$

La fonction d'onde étant symétrique, l'équation de raccordement Eq.(1.9) est aussi correcte

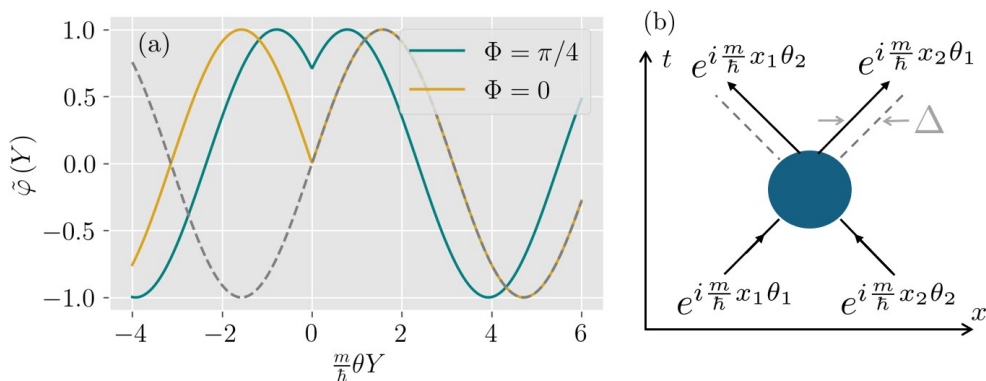


FIGURE 1.1 – (a) Les profils colorés correspondent à la fonction d’onde à deux particules $\tilde{\varphi}$ dans le référentiel du centre de masse pour différentes valeurs de Φ . Pour $\Phi = 0$, la fonction d’onde est similaire à celle attendue pour un système de deux fermions sans interaction et sans spin à l’asymétrie près (courbe grise pointillée) – (b) Diagramme adapté de [23] schématisant le processus de diffusion de deux particules bosoniques avec interaction de contact répulsive en une dimension, ainsi que le décalage en position $\pm\Delta$ associé.

en permutant x_1 et x_2 , ce qui permet d’obtenir la condition de rattachement pour $\varphi(x_2 < x_1)$. Finalement, la fonction d’onde s’écrit

$$\varphi_{\{\theta_1, \theta_2\}}(x_1 < x_2) = A_{12}e^{i\frac{m}{\hbar}(x_1\theta_1 + x_2\theta_2)} + A_{21}e^{i\frac{m}{\hbar}(x_1\theta_2 + x_2\theta_1)}, \quad (1.10)$$

d’énergie propre $E = m(\theta_1^2 + \theta_2^2)/2$ et d’impulsion totale $P = m(\theta_1 + \theta_2)$. La fonction d’onde pour $x_1 > x_2$ s’obtient en permutant x_1 avec x_2 dans Eq.(1.10). Les termes exponentiels $e^{i\frac{m}{\hbar}(x_1\theta_1 + x_2\theta_2)}$ et $e^{i\frac{m}{\hbar}(x_1\theta_2 + x_2\theta_1)}$ correspondent aux paires de particules entrantes et sortantes d’un processus de diffusion à deux corps [23]. Le rapport de leur amplitude respective est directement relié au terme de phase donné par Eq.(1.8)

$$e^{i\Phi(\theta_2 - \theta_1)} = -\frac{A_{21}}{A_{12}} = \frac{\theta_1 - \theta_2 - i\frac{g}{\hbar}}{\theta_2 - \theta_1 - i\frac{g}{\hbar}} \Rightarrow \Phi(\theta) = 2\arctan\left(\frac{\hbar\theta}{g}\right). \quad (1.11)$$

Une quantité importante à introduire pour la suite est la dérivée de la phase Φ , appelée par la suite décalage collisionnel

$$\Delta(\theta) = \frac{\hbar}{m} \frac{d\Phi}{d\theta} = \frac{2c}{c^2 + \left(\frac{m}{\hbar}\theta\right)^2}, \quad c = \frac{mg}{\hbar^2}. \quad (1.12)$$

Cette quantité est reliée au processus de collision de paquets d’ondes. En effet, revenons au problème à deux particules dans le référentiel du centre de masse. Les deux particules sont à une position Y l’une de l’autre. On construit un paquet d’onde à partir de l’état stationnaire tel que

$$\varphi(Y, t) = \frac{\tilde{m}}{\hbar} \int d\theta C(\theta) \sin\left(\frac{\tilde{m}}{\hbar}\theta|Y| + \Phi(\theta)\right) e^{-i\frac{\tilde{m}}{2\hbar}\theta^2 t} \quad (1.13)$$

avec $C(\theta)$ piqué en θ_0 . En utilisant l’approximation de la phase stationnaire, la position

relative des particules est donnée par

$$|Y| + \underbrace{\frac{\hbar}{\tilde{m}} \frac{d\Phi}{d\theta}}_{\Delta(\theta_0)} \Big|_{\theta_0} \pm \theta_0 t = 0 \quad (1.14)$$

L'Eq.(1.14) décrit le processus de collision où, par rapport la collision n'a pas d'effet, la position des particules change instantanément de position $\Delta Y = -\Delta(\theta_0)$, comme représenté sur la Fig.1.1(b).

1.1.2.2 Système à N particules

Pour le système à 2 particules, les états propres sont indicés par deux quantités homogènes à des vitesses $\theta_{1/2}$, $|\varphi\rangle = |\theta_1, \theta_2\rangle$. Ces solutions peuvent être généralisées pour un système à N particules où les états propres de l'Hamiltonien de LL sont indicés par N quantités $\{\theta_i\}_{i \in [1, N]}$ appelées rapidités $|\varphi\rangle = |\theta_1, \dots, \theta_N\rangle$. La fonction d'onde à N corps associée, dans la région où $x_1 < \dots < x_N$ s'écrit sous la forme de l'Ansatz de Bethe

$$\varphi_{\{\theta_i\}}(x_1 < \dots < x_N) = \langle 0 | \hat{\psi}(x_1) \dots \hat{\psi}(x_N) | \theta_1, \dots, \theta_N \rangle = \sum_{\sigma} A_{\sigma} e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_{j=1}^N x_j \theta_{\sigma(j)}} \quad (1.15)$$

en sommant sur les $N!$ permutations σ et avec A_{σ} les amplitudes reliées au processus de diffusion à N corps [21, 20, 19]. En considérant les permutations σ et σ_j égale à σ à une transposition près (c'est-à-dire $\sigma_j(j) = \sigma(j+1)$, $\sigma_j(j+1) = \sigma(j)$ et $\sigma_j(i) = \sigma(i)$ pour $i \neq j, j+1$), on a

$$\frac{A_{\sigma_j}}{A_{\sigma}} = -e^{i\Phi(\theta_{\sigma(j)} - \theta_{\sigma(j+1)})}, \quad (1.16)$$

avec la phase $\Phi(\theta)$ donnée par Eq.(1.8). Ainsi, comme toute permutation peut se décomposer en produit de transposition, les processus de diffusion à N corps se décomposent en un produit de processus de diffusion deux corps : cette propriété est intrinsèquement reliée à l'intégrabilité du système [30]. La fonction d'onde se réécrit

$$\varphi_{\{\theta_i\}}(x_1 < \dots < x_N) = \mathcal{B}_{\{\theta_i\}}^{(N)} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \left[\prod_{1 \leq a < b \leq N} e^{i \frac{1}{2} \Phi(\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)})} \right] e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_{j=1}^N x_j \theta_{\sigma(j)}} \quad (1.17)$$

avec $(-1)^{\sigma}$ la signature de la permutation σ et $\mathcal{B}_{\{\theta_i\}}^{(N)}$ le coefficient de normalisation [30, 31]. Dans les autres régions, la fonction d'onde s'obtient en permutant x_i avec x_j . L'énergie et l'impulsion associées s'écrivent

$$E = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^N \theta_i^2, \quad P = m \sum_{i=1}^N \theta_i. \quad (1.18)$$

L'Eq.(1.17) peut se réécrire [31]

$$\varphi_{\{\theta_i\}}(x_1 < \dots < x_N) = \mathcal{C}_{\{\theta_i\}}^{(N)} \sum_{\sigma} (-1)^{\sigma} \prod_{1 \leq a < b \leq N} \underbrace{\left[\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)} - i \frac{g}{\hbar} \right]}_{(1)} e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_{j=1}^N x_j \theta_{\sigma(j)}}. \quad (1.19)$$

Dans le cas particulier où $g \rightarrow \infty$, le terme (1) de l'Eq.(1.19) devient constant, la fonction d'onde est alors proportionnelle à un déterminant de Slater. Autrement dit, elle est similaire à la fonction d'onde d'un gaz de fermions libres sans spin (à un facteur de symétrisation près $A = \prod_{a < b} \text{sgn}(x_b - x_a)$)[29].

De même, l'Eq.(1.17) peut aussi se réécrire

$$\varphi_{\{\theta_i\}}(x_1 < \dots < x_N) = \mathcal{D}_{\{\theta_i\}}^{(N)} \sum_{\sigma} \prod_{1 \leq a < b \leq N} \underbrace{\left[1 + \frac{i \frac{g}{\hbar}}{\theta_{\sigma(a)} - \theta_{\sigma(b)}} \right]}_{(1)} e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_{j=1}^N x_j \theta_{\sigma(j)}}. \quad (1.20)$$

Dans le cas particulier où $g \rightarrow 0$, le système est alors similaire à un gaz de bosons sans interaction.

Puisqu'elles indiquent les états propres de l'hamiltonien, les rapidités peuvent être vues comme étant les vitesses de quasi-particules à durée de vie infinie. Elles ne correspondent en aucun cas aux vitesses des vraies particules du système.

La condition aux limites étant périodique, la fonction d'onde vérifie l'égalité

$$\varphi_{\{\theta_i\}}(x_1, \dots, x_{N-1}, L) = \varphi_{\{\theta_i\}}(0, x_1, \dots, x_{N-1}), \quad (1.21)$$

ce qui permet d'obtenir les équations de Bethe

$$\frac{2\pi}{L} I_i = \frac{m}{\hbar} \theta_i + \frac{m}{\hbar} \sum_{j \neq i}^N \frac{2}{L} \arctan \left(\frac{\hbar \theta_j - \theta_i}{g} \right) = \frac{m}{\hbar} \theta_i + \frac{m}{\hbar} \sum_{j \neq i}^N \frac{1}{L} \Phi(\theta_j - \theta_i). \quad (1.22)$$

I_i est entier (resp. demi-entier) si N est impair (resp. pair). On peut ainsi faire le lien entre les rapidités $\{\theta_i\}$ et les nombres entiers ou demi-entiers associés à un système de N fermions sans interactions, sans spin et de vecteur d'onde $K_i = I_i 2\pi/L$. Dans la suite, les $\{I_i\}$ seront appelés nombres fermioniques.

Cas particuliers :

- Dans l'état fondamental, la distribution des fermions est une mer de Fermi (voir Fig.1.2(a))

$$I_i = \left\{ -\frac{N-1}{2}, \dots, \frac{N-1}{2} \right\}, \quad (1.23)$$

- Dans le régime de fortes interactions, c'est-à-dire $g \rightarrow \infty$, le lien entre les rapidités et les nombres fermioniques est plus simple puisque $K_i = I_i 2\pi/L = \theta_i m/\hbar$. Dans ce cas, l'énergie du système peut s'écrire $E = 1/(2m) \sum_i \theta_i^2 = \hbar^2/(2m) \sum_i K_i^2$. En dehors du régime de forte interaction, cette égalité est fautive.

1.1.2.3 Excitations élémentaires

À partir de l'état fondamental décrit ci-dessus, les excitations élémentaires ont été étudiées par Lieb [22]. Ces dernières sont divisées en deux espèces :

- Les excitations de Type 1 qui correspondent à prendre un fermion associé à un nombre fermionique du bord de la mer de Fermi de vecteur d'onde $K_N L / (2\pi) = I_N = (N - 1) / 2$ et lui associer un vecteur d'onde $K' > K$, c'est-à-dire un nombre $I > I_N$, voir Fig.1.2(b). Pour de petits K la relation de dispersion attendue est linéaire. Dans le cas d'interaction faible, c'est-à-dire $g \rightarrow 0$, la relation de dispersion associée à ces excitations correspond à celle obtenue avec la théorie de Bogoliubov, voir Fig.1.2(c). Cette théorie est introduite plus en détail à la Section 1.3.2.
- Les excitations de Type 2 qui correspondent à des excitations de type particule-trou : il s'agit prendre une quasi-particule associée à un vecteur d'onde $K_i L / (2\pi) = I_i$ et de lui associer un vecteur d'onde $KL / 2\pi = (N - 1) / 2$, c'est-à-dire un nombre I_{N+1} . La relation de dispersion associée présente elle aussi un comportement phononique pour des petits vecteurs d'onde. Dans le cas d'un système à interaction faible ($g \rightarrow 0$) la relation de dispersion obtenue correspond à un comportement de solitons sombres [32, 33].

De façon générale, un état excité est produit à partir d'une combinaison de différentes excitations élémentaires exposées ci-dessus. Une fois les nombres fermioniques du système $\{I_i\}$ connus, les rapidités peuvent être retrouvées grâce aux équations de Bethe Eq.(1.22).

1.1.3 Limite thermodynamique et distribution de rapidités

1.1.3.1 Distribution de rapidités et facteur d'occupation

À la limite thermodynamique, le nombre de particules $N \rightarrow \infty$, la taille du système $L \rightarrow \infty$ et la densité associée $n = N/L$ reste fixée et finie. Un état propre est alors caractérisé par un nombre infini de rapidités $|\{\theta_i\}_{i \in N}\rangle_{N \in \mathbb{N}}$. On peut introduire la grandeur $\Pi(\theta)$ telle que

$$\Pi(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \delta(\theta - \theta_i). \quad (1.24)$$

Autrement dit, $\Pi(\theta) \delta\theta$ est le nombre de rapidités présent dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$. On a alors

$$N = \int d\theta \Pi(\theta), P = m \int d\theta \theta \Pi(\theta) \text{ et } E = \frac{1}{2} m \int d\theta \theta^2 \Pi(\theta). \quad (1.25)$$

La quantité intensive associée ρ est appelée distribution de rapidités

$$\rho(\theta) = \frac{\Pi(\theta)}{L}. \quad (1.26)$$

La densité n est le moment d'ordre 0 de ρ , l'impulsion par unité de longueur le moment d'ordre 1 et l'énergie par unité de longueur le moment d'ordre 2. De par sa construction, la distribution de rapidités est conservée quelque soit la dynamique du système. Dans cette

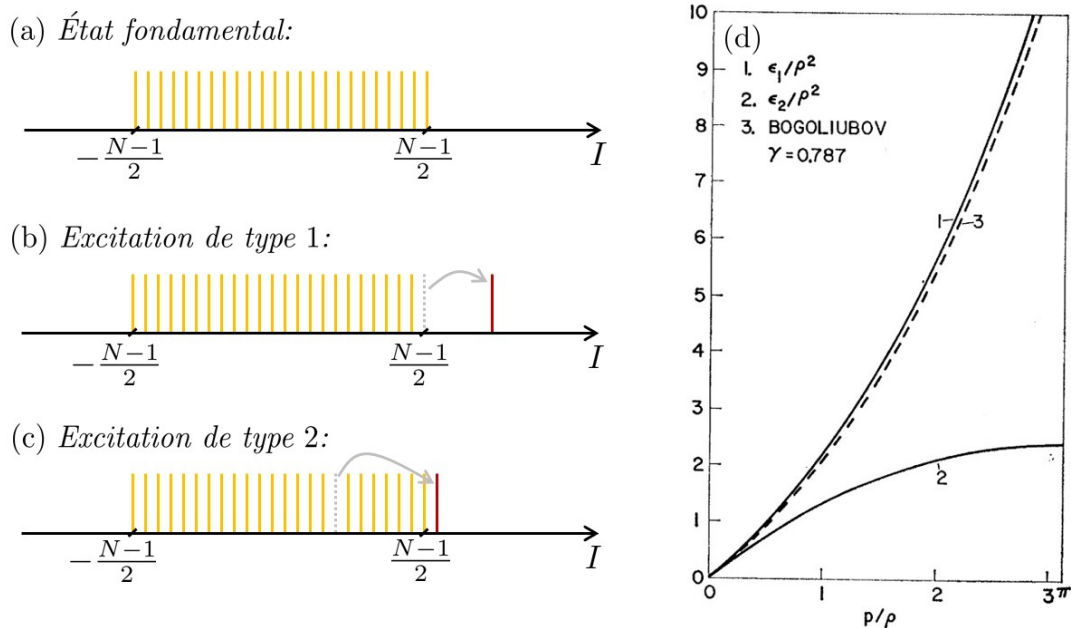


FIGURE 1.2 – (a) Distribution des nombres fermioniques attendue à l'état fondamental pour N particules. Cette distribution est similaire à celle d'une mer de Fermi – (b) Déformation de la mer de Fermi en présence d'une excitation élémentaire de Type 1 – (c) Déformation de la mer de Fermi en présence d'une excitation élémentaire de Type 2 – (d) Relations de dispersion extraites de [22]. La courbe 1 correspond à la relation de dispersion reliée aux excitations de Type 1 et est en accord avec celle obtenue dans le cadre de la théorie de Bogoliubov (courbe 2). La courbe 3 est la relation de dispersion reliée aux excitations de Type 2.

limite thermodynamique, les équations de Bethe se réécrivent

$$\frac{2\pi}{L}I(\theta) = \frac{m}{\hbar}\theta + \int d\theta' \Phi(\theta - \theta')\rho(\theta'). \quad (1.27)$$

Une quantité importante à introduire pour la suite est la grandeur ρ_s appelée densité d'état et définie comme

$$\rho_s(\theta) = \frac{1}{L} \frac{dI}{d\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{m}{\hbar} + \frac{1}{2\pi} \frac{m}{\hbar} \int d\theta' \Delta(\theta - \theta') \rho(\theta') \quad (1.28)$$

avec $\Delta(\theta)$ le décalage collisionnel donné par Eq.(1.12). Cette quantité fait le lien entre le nombre de rapidités dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$ avec le nombre de fermions dans l'intervalle $[I(\theta), I(\theta) + \delta I(\theta)]$, comme représenté sur la Fig.1.3. Autrement dit, $\rho_s(\theta)$ correspond au nombre maximum de rapidités que l'on peut placer dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$.

Comme ρ peut être vue comme une densité de quasi-particules, $\rho_s = \rho + \rho_h$ avec ρ_h la densité de trous.

Dans la suite, il sera plus pratique de décrire les propriétés thermodynamiques ou bien la dynamique des systèmes grâce au facteur d'occupation $\nu_{[\rho]}$, une fonctionnelle de la distribution

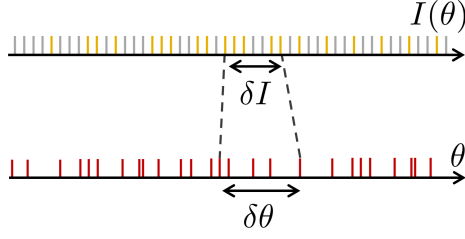


FIGURE 1.3 – L'ensemble des rapidités présentes dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$ correspond à un ensemble de nombres fermioniques placés dans l'intervalle $[I, I + \delta I]$ d'après Eq.(1.27). La densité d'états ρ_s est définie comme $\delta I \simeq L\rho_s(\theta)\delta\theta$.

de rapidités ρ définit comme

$$\nu_{[\rho]}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{\rho(\theta) + \rho_h(\theta)} = \frac{\rho(\theta)}{\rho_s(\theta)}, \quad (1.29)$$

le facteur d'occupation est ainsi une fonction comprise entre 0 et 1. Pour l'état fondamental, $\nu(\theta) = 1$.

1.1.3.2 État fondamental

Pour l'état fondamental, $\rho_h(\theta) = 0$. Le facteur d'occupation vaut $\nu(\theta) = 1$ si $\theta \in [-\theta^*, \theta^*]$ et 0 sinon (avec θ^* une fonction de la densité). Dans ce cas précis, la distribution de rapidités peut être obtenue en utilisant les équations constitutives de Lieb [21]. Cette distribution ne dépend que d'un paramètre sans dimension appelé paramètre de Lieb

$$\gamma = \frac{mg}{\hbar^2 n}, \quad (1.30)$$

avec g le paramètre d'interaction 1D et n la densité du système. En fonction de ce paramètre, deux régimes limites apparaissent :

- Le régime de Tonks-Girardeau, appelé régime de sphères dures ou encore régime de fortes interactions. Il s'agit du système pour lequel $\gamma \rightarrow \infty$, c'est-à-dire pour $g \rightarrow \infty$ et de façon non-intuitive pour une densité tendant à être nulle. Comme nous l'avons déjà précisé dans la Section 1.1.2.2, dans le régime de fortes interactions, la distribution de rapidités ressemble à une mer de Fermi. Des exemples de tels profils sont représentés sur la Fig. 1.4(a).
- Lorsque le paramètre γ diminue, la distribution de rapidités se déforme. On obtient dans le cas inverse le régime d'interaction faible, aussi appelé régime de **quasi-condensat de Bose Einstein (qBEC)** où $\gamma \ll 1$. Dans le cas limite $\gamma \rightarrow 0$ la forme de la distribution attendue est un demi-cercle de largeur $\Delta_\theta = 4\sqrt{gn/m}$,

$$\rho(\theta) = \frac{n}{\pi c} \sqrt{1 - \left(\frac{\theta}{2c}\right)^2} \text{ avec } c = \sqrt{\frac{gn}{m}}, \text{ la vitesse du son.} \quad (1.31)$$

Pour des γ proches de 0 mais non nuls, la distribution de rapidités est proche d'un demi-cercle, mais présente une discontinuité aux bords, comme on peut le voir sur le profil bleu de la Fig. 1.4(b). L'expérience de puce atomique du LCF sonde les propriétés physiques des gaz de bosons dans ce régime. La plupart des résultats de cette thèse ont été obtenus pour des $\gamma \sim 0.5 \cdot 10^{-2}$.

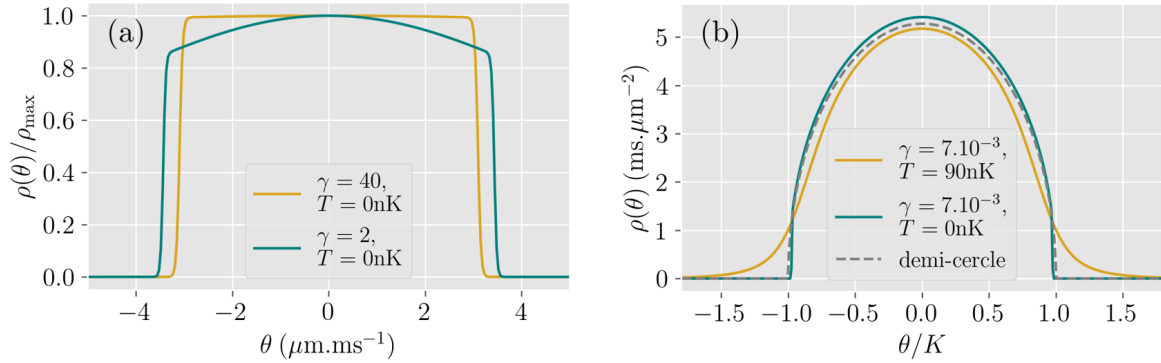


FIGURE 1.4 – Quelques distributions de rapidités sont représentées pour différents paramètres de Lieb γ et différentes températures T . Les profils obtenus à l'état fondamental sont tracés en utilisant les équations constitutives de Lieb [21]. (a) Distribution de rapidités à l'état fondamental dans le régime de Tonks-Girardeau. Pour des γ très grands, la distribution de rapidités tend à être une mer de Fermi. Lorsque γ diminue, la mer de Fermi commence à se déformer - (b) Distribution de rapidités dans le régime de faible interaction, $\gamma \ll 1$. La fonction attendue à l'état fondamental pour $\gamma \rightarrow 0$ est le demi-cercle représenté en gris pointillé. La distribution attendue à entropie nulle pour un γ petit mais non nul est tracé en bleu. On voit l'apparition d'une discontinuité aux extrémités de la fonction. Finalement, la distribution attendue au-delà de l'état fondamental est représentée en jaune, remarquable par l'apparition d'ailes aux extrémités de la distribution.

1.1.3.3 Thermodynamique Yang-Yang

En toute généralité, le gaz de LL étant intégrable, il n'est pas nécessairement décrit par un état à l'équilibre thermique. Dans la suite, la Section 2.1.2 présente une façon générale de décrire l'état relaxé de tels systèmes. Néanmoins, il se trouve que beaucoup de nos résultats sont en partie expliqués par un système décrit par un ensemble de Gibbs¹.

Le papier de Yang-Yang (1969) [34] répond à la problématique suivante : comment calculer la distribution de rapidités pour un ensemble thermique à température non nulle ? Pour répondre à cette question, il est essentiel de calculer l'entropie du système appelée dans la suite entropie de Yang Yang et notée S_{YY} . Pour calculer cette entropie, il faut comprendre qu'au-delà de l'état fondamental, différents micro-états $|\{\theta_i\}_{i \in [1, N]}\rangle_{N \in \mathbb{N}}$ peuvent correspondre à une même distribution de rapidités $\rho(\theta)$: on parle alors de macro-états. En ce sens, l'entropie de Yang Yang peut se construire à partir des deux quantités suivantes :

1. Par exemple, la présence d'états excités transverses peuplés, l'utilisation d'un potentiel longitudinal pour piéger les atomes peuvent entraîner une brisure de l'intégrabilité du système.

- $L\rho(\theta)\delta\theta$: le nombre de rapidités dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$,
- $L(\rho_s(\theta) - \rho(\theta))\delta\theta = L\rho_h(\theta)\delta\theta$: le nombre de trous dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$.

Ainsi, il existe un nombre Ω de configurations qui correspond au nombre de possibilités de placer $L\rho(\theta)\delta\theta$ rapidités dans l'intervalle $[\theta, \theta + \delta\theta]$:

$$\Omega(\theta) = \frac{[L\rho(\theta)\delta\theta]!}{[L\rho_s(\theta)\delta\theta]! [L(\rho_s(\theta) - \rho(\theta))\delta\theta]!}. \quad (1.32)$$

Le nombre total de micro-états correspondant à un même macro-état $\rho(\theta)$ est alors le produit de Ω obtenu pour toutes les cellules $[\theta, \theta + \delta\theta]$. L'entropie de Yang Yang est égale à $S_{YY} = \hbar/m \int k_B/L \ln \Omega d\theta$. En utilisant $\log(n!) =_{n \gg 1} n \log(n) + n + o(n)$, on obtient

$$S_{YY}[\rho] = k_B \frac{\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} (\rho_s \log(\rho_s) - \rho \log(\rho) - (\rho_s - \rho) \log(\rho_s - \rho)) d\theta. \quad (1.33)$$

En faisant l'hypothèse que le système est bien décrit par un ensemble thermique, l'entropie de Yang Yang peut alors être maximisée à énergie E et nombre d'atomes N fixés. Pour cela, on introduit les paramètres de Lagrange $1/T$ et μ/T : on maximise la fonction

$$k_B S_{YY}[\rho] - \left[\frac{E}{T} - \frac{\mu}{T} N \right]. \quad (1.34)$$

par rapport à ρ avec $S_{YY}[\rho]$ l'entropie de Yang-Yang. Le nombre d'atomes N et l'énergie E correspondant respectivement aux moments d'ordre 0 et 2 de la distribution de rapidités, on introduit la fonction $f_{YY}(\theta) = \frac{L}{T} \left(\frac{m\theta^2}{2} - \mu \right)$. La condition de maximisation de l'Eq.(1.34) se réécrit

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[k_B S_{YY}[\rho] - \int d\theta \rho(\theta) f_{YY}(\theta) \right] = 0, \quad (1.35)$$

puisque

$$\int f_{YY}(\theta) \rho(\theta) d\theta = \frac{L}{T} \int \rho(\theta) \frac{m\theta^2}{2} d\theta - \mu \frac{L}{T} \int \rho(\theta) d\theta = \frac{E}{T} - \frac{\mu}{T} N, \quad (1.36)$$

À partir de cette maximisation on obtient

$$f_{YY}(\theta) = k_B \ln \left(\frac{1 - \nu}{\nu} \right) - \frac{\hbar}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta' - \theta) \ln(1 - \nu). \quad (1.37)$$

On introduit la fonction $e(\theta)$ définie comme

$$\frac{\rho_h}{\rho} = e^{\beta e(\theta)}, \beta = \frac{1}{k_B T} \Rightarrow \nu(\theta) = \frac{1}{1 + e^{\beta e(\theta)}}. \quad (1.38)$$

En injectant Eq.(1.38) dans Eq.(1.37), on obtient

$$e(\theta) = \frac{1}{2} m \theta^2 - \mu - \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta' - \theta) \ln \left(1 + e^{-\beta e(\theta')} \right) \quad (1.39)$$

L'Eq.(1.39) peut être résolue de façon itérative. Le facteur d'occupation $\nu(\theta)$ peut être obtenu

en utilisant Eq.(1.38). Enfin, la distribution de rapidité $\rho(\theta)$ peut être reconstruite en utilisant Eq.(1.28). Un exemple de telle fonction est représentée en jaune sur la Fig.1.4(b). Dans le régime proche du qBEC et à température non nulle, les discontinuités de la dérivée de la distribution de rapidités observées dans l'état fondamental disparaissent au détriment de l'apparition d'ailes. On peut aussi reconstruire les quantités caractéristiques du système telles que la densité $n = \int d\theta \rho(\theta)$ ou bien la pression [34]

$$\mathcal{P} = -T k_B \frac{m}{\hbar} \int \frac{d\theta}{2\pi} \ln(1 - \nu_{[\rho]}). \quad (1.40)$$

Cette maximisation permet de reconstruire des distributions de rapidités dites thermiques, avec pour seules contraintes le nombre d'atomes et l'énergie totale qui sont des quantités locales conservées. Comme cela va être introduit dans le Chapitre 2, le système étant intégrable, ce dernier présente en toute généralité une infinité de quantités conservées. Par exemple, les moments de la distribution de rapidités $\int d\theta \theta^i \rho(\theta)$ avec $i \in [1, N]_{N \in \mathbb{N}}$ sont des quantités conservées. Ainsi, une façon permettant de construire des distributions de rapidités non thermiques est de remplacer la fonction f_{YY} par une fonction avec plus de degrés de liberté $f = a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4 + \dots$ afin de maximiser l'entropie de Yang-Yang avec comme quantités conservées l'ensemble des moments de la distribution de rapidités. Le système est ici paramétré par la fonction $f(\theta)$. De façon similaire, la distribution de rapidité $\rho(\theta)$ permet de paramétrer le système.

1.1.3.4 Accès expérimental à la distribution de rapidités

Une particularité essentielle à avoir en tête pour la suite est qu'il est possible d'avoir accès expérimentalement à la distribution de rapidités. En effet, la distribution de rapidités est homothétique au profil de densité asymptotique d'un gaz après une expansion longitudinale [35, 36, 37].

Considérons un système de N bosons avec des interactions de contact répulsives placés dans une boîte de taille L . Soit un état quantique $|\psi\rangle$ du système. On se restreint au secteur où $x_1 < \dots < x_N$. Cet état quantique peut se décomposer sur la base des états propres de \hat{H}_{LL} . La fonction d'onde associée à cet état s'écrit alors

$$\psi(x_1 < \dots < x_N, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d\theta_1 \dots d\theta_N f(\theta_1, \dots, \theta_N) \varphi_{\{\theta_i\}}(x_1 < \dots < x_N) \quad (1.41)$$

avec $\int d\theta_1 \dots d\theta_N |f(\theta_1, \dots, \theta_N)|^2 = 1$. Le coefficient $|f(\theta_1, \dots, \theta_N)|^2$ correspond à la probabilité de décrire le système à N particules par les N rapidités $\theta_1, \dots, \theta_N$. La distribution ρ s'obtient à partir de la fonction f ,

$$\rho(\theta) = \frac{N}{L} \int d\theta_2 \dots d\theta_N |f(\theta, \theta_2, \dots, \theta_N)|^2. \quad (1.42)$$

En réinjectant la forme de $\varphi_{\{\theta_i\}}$ donnée par l'Eq.(1.17),

$$\psi(x_1 < \dots < x_N, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{N!}} \int d\theta_1 \dots d\theta_N f(\theta_1, \dots, \theta_N) \mathcal{B}_{\{\theta_i\}}^{(N)} \sum_{\sigma} \mathcal{A}_{\sigma} e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_j x_j \theta_{\sigma(j)}}. \quad (1.43)$$

avec

$$\mathcal{A}_{\sigma} = (-1)^{\sigma} e^{i \sum_{a < b} \frac{1}{2} \Phi(\theta_{\sigma(b)} - \theta_{\sigma(a)})} \quad (1.44)$$

où Φ est le terme de diffusion à deux corps défini par l'Eq.(1.11). Pour un nombre de particule N fixé mais avec $L \rightarrow \infty$, le coefficient $\mathcal{B}_{\{\theta_i\}}^{(N)} \rightarrow_{L \rightarrow \infty} \mathcal{B}_{\infty}^{(N)} = \sqrt{N!/(2\pi)^N}$ ne dépend plus que du nombre de particules.

Étudier l'expansion longitudinale de cet état revient à regarder la dynamique de ce système obtenue grâce à l'Hamiltonien de LL. Après un temps d'expansion t ,

$$\psi(x_1 < \dots < x_N, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^N} \sum_{\sigma} \int d\theta_1 \dots d\theta_N \underbrace{f(\theta_1, \dots, \theta_N)}_{(1)} \mathcal{A}_{\sigma} \underbrace{e^{i \frac{m}{\hbar} \sum_j x_j \theta_{\sigma(j)} - \frac{1}{2} \theta_{\sigma(j)}^2 t}}_{(2)}. \quad (1.45)$$

On pose dans la suite $\Theta = \frac{m}{\hbar} [x_j \theta_{\sigma(j)} - \frac{1}{2} \theta_{\sigma(j)}^2 t]$. Pour des temps d'expansion suffisamment longs, le terme de phase (2) oscille très vite par rapport aux autres termes de l'intégrale. On peut alors faire une approximation de phase stationnaire en supposant que la principale contribution dans l'intégrale de l'Eq.(1.45) est l'intégrande calculée pour la rapidité $\theta_{\sigma(j)}^* = x_j/t$ telle que $d\Theta/d\theta_{\sigma(j)}(\theta_{\sigma(j)}^*) = 0$ [35]. Comme $x_1 < \dots < x_N$, alors $\theta_{\sigma(1)}^* < \dots < \theta_{\sigma(N)}^*$ impliquant que la seule permutation à prendre en compte est l'identité $\sigma \equiv \mathbb{I}$. Dans chaque secteur (en permutant $x_i \leftrightarrow x_j$), une seule permutation sera à prendre en compte du fait de l'approximation de la phase stationnaire : la somme peut alors être réduite à chaque fois à un seul terme. Ici, en supposant que le terme (1) varie lentement pour des valeurs proches de $\theta_j^* = x_j/t$, il est alors considéré constant avec pour valeur celle obtenue avec θ_j^* et est sorti de l'intégrale. Finalement, la fonction d'onde s'écrit pour des temps d'expansion très grands

$$\psi(x_1 < \dots < x_N, t \rightarrow \infty) \propto f(x_1/t, \dots, x_N/t) e^{i \sum_{a < b} \frac{1}{2} \Phi(x_b/t - x_a/t)} e^{i \frac{m}{2\hbar t} \sum_j x_j^2} e^{i\pi N/4}. \quad (1.46)$$

Le profil de densité correspondant $n(x, t \rightarrow \infty) = N \int dx_2 \dots dx_N |\psi(x < x_2 < \dots < x_N, t \rightarrow \infty)|^2$ s'écrit alors

$$n(x, t \rightarrow \infty) = \frac{mL}{\hbar t} \rho\left(\frac{x}{t}\right) \quad (1.47)$$

avec ρ la distribution de rapidités. Ainsi, le profil de densité après un temps d'expansion suffisamment long devient homothétique à la distribution de rapidités, ce qui rend cette quantité accessible expérimentalement comme représenté sur la Fig.1.5.

La distribution des vitesses asymptotiques s'obtient à partir de la transformée de Fourier de l'Eq.(1.46),

$$\tilde{\psi}(v_1 < \dots < v_N, t \rightarrow \infty) \propto f(v_1, \dots, v_N) e^{i \sum_{a < b} \Phi(v_b - v_a)}. \quad (1.48)$$

La distribution des vitesses $n(v) = N \int dv_2 \dots dv_N |\tilde{\psi}|^2$ correspond directement à la distribution

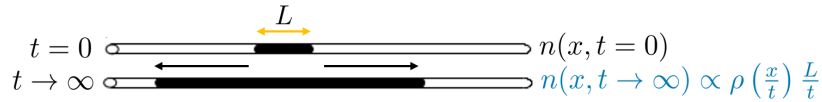


FIGURE 1.5 – Schéma représentant un protocole de mesure expérimentale de la distribution de rapidités. Un gaz de bosons de N particules et initialement de taille L réalise une expansion longitudinale. Le profil de densité converge alors vers une fonction homothétique à la distribution de rapidités.

de rapidités [36]

$$\tilde{n}(v) = \rho(v). \quad (1.49)$$

La distribution de rapidités a déjà été obtenue expérimentalement par cette méthode, en mesurant la distribution de vitesse après un long temps d'expansion longitudinal [38]. Le gaz étudié se trouvait dans la limite du régime de Tonks-Girardeau, où les interactions sont très fortes ($\gamma = 4.2 - 8.5$). De telles mesures ont été réalisées pendant ma thèse avec ce protocole pour des gaz placés dans le régime **qBEC**, voir les Chapitres 4 et 5 pour plus de détails.

En résumé

- Le système de N bosons avec interactions de contact répulsives placés dans une boîte de taille L est un système tout à fait particulier, car intégrable. Les états propres de l'Hamiltonien s'écrivent sous la forme de l'Ansatz de Bethe et sont indicés par N quantités homogènes à des vitesses appelées rapidités.
- À la limite thermodynamique, la notion de distribution de rapidités peut être définie. On sait calculer la distribution de rapidités dans l'état fondamental et dans des états correspondant à des ensembles de Gibbs.
- La distribution de rapidité est une quantité conservée au cours de la dynamique.
- La distribution de rapidités est une quantité mesurable expérimentalement : il s'agit de la distribution de vitesse après une expansion longitudinale et est homothétique au profil de densité lorsque le gaz réalise une expansion longitudinale.

1.2 Régimes asymptotiques du gaz de Lieb-Liniger

Les gaz de bosons 1D présentent une très grande variété de régimes physiques. Par exemple, à l'état fondamental, on a pu décrire un régime dans lequel les particules bosoniques ont un comportement similaire à des fermions sans spins et sans interactions (régime de Tonks Girardeau) et un régime d'interactions faibles **qBEC**. À l'équilibre thermodynamique, en plus du paramètre de Lieb $\gamma = mg/(\hbar^2 n)$, les propriétés du système dépendent de la température T et du paramètre adimensionné associé

$$t = \frac{k_B T}{E_g} \quad (1.50)$$

avec E_g l'énergie caractéristique déduite de l'Hamiltonien de LL,

$$E_g = \frac{\hbar^2}{2m\ell_g^2}, \quad \ell_g = \frac{\hbar^2}{mg}. \quad (1.51)$$

Ces différents régimes, présentés sur la Fig.1.6 ont déjà été largement étudiés (voir par exemple les revues [39, 23, 40]). Cette partie présente les principales propriétés de ces régimes. Il est important de préciser que les transitions entre les différents régimes étudiées sont des transitions molles et ne correspondent pas à des transitions de phase.

Ces régimes sont historiquement caractérisés par la fonction normalisée de corrélation à 2 corps qui est la probabilité normalisée de détecter une particule simultanément en x et en x' [41]. Autrement dit, en considérant un système unidimensionnel homogène de densité n décrit par l'opérateur champ bosonique $\hat{\psi}(x)$, la fonction de corrélation à deux corps s'écrit

$$g^{(2)}(x, x') = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(x') \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(x') \rangle}{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \rangle \langle \hat{\psi}^\dagger(x') \hat{\psi}(x') \rangle}. \quad (1.52)$$

Le système étant ici supposé homogène, la fonction de corrélation est invariante par translation et ne dépend que de $|x - x'|$. Elle peut donc se réécrire

$$g^{(2)}(x) = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}^\dagger(0) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}(0) \rangle}{n^2}. \quad (1.53)$$

En particulier, le paramètre $g^{(2)}(0)$ permet de différencier les différents régimes. Ce paramètre a pu être mesuré expérimentalement pour un gaz de Bose 1D par une méthode de photo-association [42]. La fonction $g^{(2)}(x)$ est directement liée aux fluctuations de densité : la corrélation moyenne entre la densité en un point x et un point 0 s'écrit

$$\langle \hat{n}(x) \hat{n}(0) \rangle = \langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(0) \hat{\psi}(0) \rangle. \quad (1.54)$$

En utilisant la relation de commutation sur les opérateurs champs bosoniques et en introduisant l'opérateur fluctuations de densité $\delta\hat{n}(x) = \hat{n}(x) - \langle \hat{n} \rangle$, il est alors possible de relier les fluctuations avec $g^{(2)}$,

$$\langle \delta\hat{n}(x) \delta\hat{n}(0) \rangle = n\delta(x) + n^2 \left(g^{(2)}(x) - 1 \right). \quad (1.55)$$

Ce lien a été utilisé pour extraire expérimentalement la fonction de corrélation dans plusieurs expériences [43, 44, 10].

1.2.1 Gaz de Bose idéal

À température suffisamment importante, c'est-à-dire $\gamma^{3/2}t \gg 1$ et $t \gg 1$, les interactions entre atomes deviennent négligeables et le gaz se comporte comme un gaz de Bose idéal avec

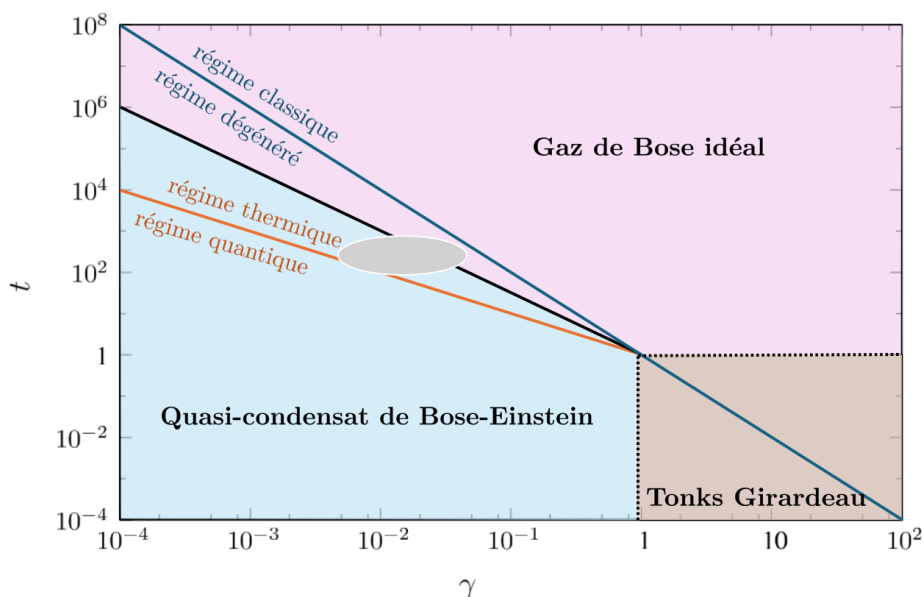


FIGURE 1.6 – Les trois régimes principaux (gaz de Bose idéal, gaz de Tonks Girardeau et qBEC) sont représentés par des zones de couleurs différentes en fonction des deux paramètres adimensionnés γ et t . La courbe noire correspond à $\gamma^{3/2}t = 1$ et délimite le régime de gaz de Bose idéal à celui de qBEC. Il est important de noter qu’il ne s’agit pas de transition de phase (interdite en 1D) mais d’un cross-over entre les régimes asymptotiques. La courbe bleue correspond à $\gamma^2t = 1$, la courbe orange à $\gamma t = 1$. La zone grise délimite la gamme de paramètres (γ, t) des gaz de bosons étudiés expérimentalement au pendant ma thèse. Figure adaptée de [39].

la population des états d’énergie associés au mode k suivant la statistique de Bose-Einstein,

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right)} - 1}. \quad (1.56)$$

L’équation d’état s’obtient en sommant sur la population de tous les modes afin d’obtenir la densité

$$n(\mu, T) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} g_{1/2} \left(e^{\frac{\mu}{k_B T}} \right), \quad g_n(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x^i}{i^n}, \quad (1.57)$$

avec la longueur thermique de De Broglie $\lambda_{\text{dB}} = \hbar \sqrt{2\pi / (mk_B T)}$. Ce régime correspond à la zone rose de la Fig.1.6.

Dans ce régime, $g^{(2)}(0) \simeq 2$, les particules ont tendance à se regrouper (*bunching* en anglais) : une particule a deux fois plus de chance de se trouver à la position d’une autre particule que d’en être éloignée. Cet effet a été observé expérimentalement en mesurant un excès de fluctuations de densité lié à ce phénomène de regroupement [43]. Le gaz de Bose idéal peut être divisé en deux sous régimes :

- $\gamma^2 t \gg 1$: le gaz est dans le régime classique, il est alors bien décrit par une statistique

de Maxwell-Boltzmann, la population $\langle n_k \rangle \ll 1$ et vaut

$$\langle n_k \rangle = e^{-\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)} \Rightarrow n(\mu, T) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} e^{\left(\frac{\mu}{k_B T}\right)}. \quad (1.58)$$

— $\gamma^2 t \ll 1$: les états d'énergie $E \ll k_B T$ sont largement peuplés et leur population prend la forme

$$\langle n_k \rangle = \frac{k_B T}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu} \Rightarrow n(\mu, T) = \frac{k_B T}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2\mu}}. \quad (1.59)$$

1.2.2 Gaz de Fermi idéal ou régime de Tonks-Girardeau

Dans la limite de fortes interactions, c'est-à-dire pour $\gamma \gg 1$ et $t \ll 1$, le gaz entre dans le régime de Tonks-Girardeau [28, 29] : il s'agit de la zone grise de la Fig.1.6. Comme déjà expliqué dans la Section 1.1.3.2, le système a dans ce régime les mêmes propriétés thermodynamiques pour certaines observables qu'un gaz de Fermi idéal : ce mapping conserve l'énergie. Ainsi, l'équation d'état s'obtient en utilisant la statistique de Fermi-Dirac pour la population des états d'énergies associés aux modes k ,

$$\langle n_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu\right)} + 1} \Rightarrow n(\mu, T) = -\frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} g_{1/2}\left(-e^{\frac{\mu}{k_B T}}\right). \quad (1.60)$$

Dans ce régime, $g^{(2)}(0) \rightarrow 0$ puisque les particules se comportent comme des sphères dures et reproduisent le principe d'exclusion de Pauli (on parle d'*antibunching* en anglais). Cette diminution de $g^{(2)}(0)$ pour un gaz en interaction forte a aussi été observée expérimentalement [42, 44].

1.2.3 Régime de quasi-condensat de Bose-Einstein

Lorsque $\gamma^{3/2} t \ll 1$ et $\gamma \ll 1$ (correspondant à la zone bleue de la Fig.1.6), le système est dans un régime dans lequel les interactions entre atomes ne sont plus négligeables. Le groupement bosonique est alors supprimé. Cependant, contrairement à un gaz 3D, les fluctuations de phase restent présentes et empêchent un ordre à longue portée : c'est pourquoi on parle de **quasi-condensat de Bose Einstein (qBEC)**. À l'instar du gaz de Bose idéal, on peut distinguer deux sous-régimes : à température assez élevée telles que $\gamma t \gg 1$, les fluctuations de phase sont d'ordre thermique. Ce n'est plus le cas pour des systèmes à faibles températures où $\gamma t \ll 1$: dans ce cas, les fluctuations de phase quantiques deviennent dominantes.

Dans le régime qBEC, l'équation d'état ne dépend plus de la température,

$$n(\mu) \simeq \frac{\mu}{g} \quad (1.61)$$

et les interactions empêchant l'effet de regroupement lié au caractère bosonique des particules, la fonction de corrélation à deux corps en 0 vaut $g^{(2)}(0) \simeq 1$ (il s'agit de la fonction de corrélation que l'on attendrait pour un condensat de Bose-Einstein en 3D). Cet effet

d'interaction a été observé expérimentalement grâce aux mesures de fluctuations de densité sous-Poissoniennes [10].

Expérimentalement, les systèmes étudiés dans les chapitres suivants ont pour paramètres $\gamma = 5.10^{-3} - 7.10^{-2}$ et $t = 250 - 1250$. Comme on le voit sur la Fig.1.6, les gaz étudiés sont situés au niveau du cross-over entre le gaz de Bose idéal dégénéré et le qBEC. Le centre des nuages atomiques sont quant à eux bien décrits par le régime de qBEC. C'est pourquoi la partie suivante se concentre plus spécifiquement sur le régime de qBEC.

1.3 Théorie linéarisée pour le régime de quasi-condensat

Dans le régime de qBEC, du fait de la quasi-suppression de fluctuations de densité, il est possible de décrire le système avec le protocole de Bogoliubov. Certains résultats des Chapitres3, 4 et 5 ont été obtenus en s'appuyant sur ce cadre théorique. Nous en exposons ici les idées principales.

1.3.1 Équation de Gross-Pitaevskii

Dans l'ensemble grand canonique, l'hamiltonien d'un gaz de bosons en dimension d avec interactions de contact répulsives en présence d'un potentiel $V(\mathbf{r})$ s'écrit

$$\hat{H} = \int d^d r \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} + \frac{g}{2} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + V(\mathbf{r}) - \mu \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) \quad (1.62)$$

avec μ le potentiel chimique. En dimension $d \geq 3$, le système peut atteindre un régime de condensation bien décrit par un champ classique. Dans ce cas, l'opérateur champ peut être réécrit $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \psi_0(\mathbf{r}) - \delta\hat{\psi}(\mathbf{r})$ où ψ_0 est un champ complexe décrivant la partie condensée du système et $\delta\hat{\psi}$ un opérateur champ quantique décrivant les fluctuations thermiques et quantiques du système, $|\delta\hat{\psi}| \ll \psi_0$ [45]. En réinjectant ce terme dans Eq.(1.62) et à partir du terme d'ordre 0, on obtient l'Équation de Gross-Pitaevskii (GPE) indépendante du temps [46, 47],

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} + V(\mathbf{r}) + g|\psi_0|^2 \right) \psi_0 = \mu \psi_0 \quad (1.63)$$

Dans notre cas, du fait que les gaz de bosons en dimension $d = 1$ ne puissent pas condenser, cette méthode ne peut pas être utilisée. Notamment, les fluctuations de phases empêchent la présence d'ordre à longue portée. Néanmoins, elle peut être adaptée au régime quasi-condensat où les fluctuations de densités sont très faibles [48]. Pour cela, l'opérateur champ quantique peut être réécrit en représentation dans l'espace des phases (aussi appelée représentation de Madelung)

$$\hat{\psi}(x) = \sqrt{\hat{n}(x)} e^{i\hat{\theta}(x)}, \hat{n}(x) = \langle \hat{n}(x) \rangle + \delta\hat{n}(x) = n(x) + \delta\hat{n}(x) \quad (1.64)$$

où $\delta\hat{n}$ représente les fluctuations de densités. Les opérateurs $\delta\hat{n}$ et $\hat{\theta}$ sont conjugués : $[\delta\hat{n}(x), \delta\hat{n}(x')] = [\hat{\theta}(x), \hat{\theta}(x')] = 0$ et $[\delta\hat{n}(x), \hat{\theta}(x')] = i\delta(x - x')$. Dans le régime quasi-condensat, $|\delta\hat{n}| \ll n$, $|\partial_x \hat{\theta}| \ll n$. En réinjectant Eq.(1.64) dans Eq.(1.62) et en développant l'hamiltonien à l'ordre

3 en $\delta\hat{n}$ et $\partial_x\hat{\theta}$ [48],

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3, \quad (1.65)$$

l'hamiltonien H_0 permettant de retrouver l'équation de Gross-Pitaevskii indépendante du temps Eq.(1.63) mais portant cette fois-ci sur la densité moyenne n ,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 + V(x) + gn(x)\right)\sqrt{n(x)} = \mu\sqrt{n(x)}. \quad (1.66)$$

1.3.2 Transformation de Bogoliubov pour un système homogène

On se limite désormais à un système homogène de densité n de taille ℓ . Pour le profil de densité obtenu avec l'ordre 0 Eq.(1.66), le terme d'ordre 1 est nul dans Eq.(1.65), les excitations au-delà du fondamental sont décrites par le terme d'ordre 2 [48]. C'est ce terme qui va être étudié dans le reste de cette section. L'hamiltonien à l'ordre 2 s'écrit

$$\hat{H}_2 = \frac{\hbar^2}{m} \int dx \left[\underbrace{\frac{1}{8n} \left(\frac{\partial}{\partial x} \delta\hat{n} \right)^2}_{(1)} + \frac{n}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\theta} \right)^2 \right] + \frac{g}{2} \int dx \delta\hat{n}^2. \quad (1.67)$$

En décomposant les observables $\delta\hat{n}$ et $\hat{\theta}$ en série de Fourier,

$$\begin{cases} \hat{\theta}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k>0} \hat{\theta}_{k,1} \cos(kx) + \hat{\theta}_{k,2} \sin(kx) \\ \delta\hat{n}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sum_{k>0} \delta\hat{n}_{k,1} \cos(kx) + \delta\hat{n}_{k,2} \sin(kx), \end{cases} \quad (1.68)$$

l'hamiltonien se réécrit $\hat{H}_2 = \sum_k (\hat{H}_{k,1} + \hat{H}_{k,2})$ avec

$$\hat{H}_{k,i} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} n \hat{\theta}_{k,i}^2 + \left(\frac{g}{2} + \frac{\hbar^2 k^2}{8mn} \right) \delta\hat{n}_{k,i}^2. \quad (1.69)$$

On peut alors définir les énergies caractéristiques

$$\epsilon_k = \sqrt{E_k(E_k + 2gn)}, \text{ avec } E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (1.70)$$

ainsi que les opérateurs réduits (aussi appelés opérateurs quadratures)

$$\hat{x}_k = f_k^{-1} \frac{1}{\sqrt{2n}} \delta\hat{n}_k, \quad \hat{p}_k = f_k \sqrt{2n} \hat{\theta}_k \text{ avec } f_k = \left[\frac{E_k}{E_k + 2gn} \right]^{\frac{1}{4}}, \quad (1.71)$$

ce qui permet de réécrire l'hamiltonien

$$\hat{H}_k = \frac{\epsilon_k}{2} (\hat{x}_k^2 + \hat{p}_k^2). \quad (1.72)$$

On reconnaît notamment l'énergie ϵ_k du mode k et les quadratures associées \hat{x}_k et \hat{p}_k . On dé-

fini naturellement l'opérateur $\hat{a}_k = (\hat{x}_k + i\hat{p}_k)/\sqrt{2}$ permettant de diagonaliser l'Hamiltonien

$$\hat{H}_2 = \sum_k \hat{H}_k = \epsilon_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.73)$$

avec $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle$ la population du mode k de Bogoliubov. Finalement, les opérateurs $\hat{\theta}_k$ et $\delta\hat{n}_k$ s'écrivent en fonction des opérateurs $\hat{a}_k^{(\dagger)}$

$$\begin{aligned} \delta\hat{n}_k &= \sqrt{n} f_k \left(\hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_k \right) \\ \hat{\theta}_k &= \frac{i}{2\sqrt{n}} f_k^{-1} \left(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k \right) \end{aligned} \quad (1.74)$$

La relation de dispersion correspond à l'Eq.(1.70), que l'on peut réécrire en fonction du potentiel chimique donné par Eq.(1.61), $\epsilon_k = \sqrt{E_k(E_k + 2\mu)}$. Cette relation de dispersion est représentée Fig.1.7. Il est pertinent d'introduire la longueur caractéristique $\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{m\mu}}$ appelée longueur de cicatrisation (*healing length* en anglais) qui permet de séparer deux régimes caractéristiques :

- $k\xi \gg 1 \Rightarrow \epsilon_k \simeq E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, les excitations sont celles de particules libres, la relation de dispersion est parabolique.
- $k\xi \ll 1 \Rightarrow \epsilon_k \simeq \hbar\omega_k = \hbar ck$ avec $c = \sqrt{\frac{gn}{m}}$ la vitesse du son. La relation de dispersion est alors linéaire, les énergies sont associées à des excitations collectives appelées phonons. Cela revient à négliger la contribution du terme (1) de l'hamiltonien Eq.(1.67). Dans la suite, on se restreindra à l'étude des modes phononiques (les résultats obtenus dans le Chapitre 2 ou dans la sous-section suivante sont obtenus dans le cadre de cette approximation).

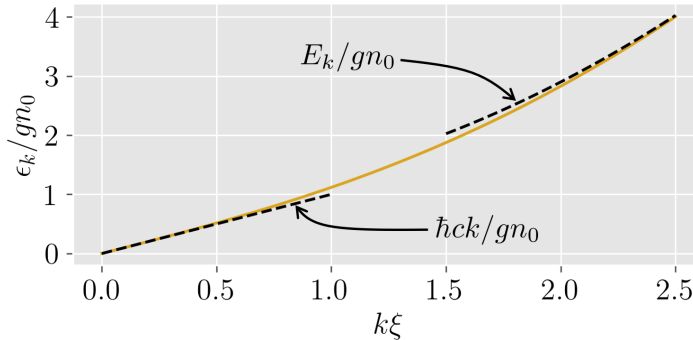


FIGURE 1.7 – La relation de dispersion obtenue Eq.(1.70) est représentée ici en fonction de $k\xi$. Les deux régimes limites (particules libres et phonons) sont aussi tracés en noir pointillé.

1.3.3 Fluctuations de densité et de phase

Dans cette partie, on s'intéresse aux fluctuations de densité et de phase des modes phononiques, c'est-à-dire pour $k\xi \ll 1$. Dans ce cas, $|f_k|^2 \simeq \frac{\hbar k}{2mc}$ et $\epsilon_k = \hbar ck$. De plus, on suppose que le système est bien décrit par un ensemble thermique.

1.3.3.1 Fluctuations de densité

En utilisant Eq.(1.74), les fluctuations de densité s'écrivent

$$\langle |\delta n_k|^2 \rangle = n \frac{\hbar k}{mc} \left(\frac{1}{2} + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \right) = \frac{n \hbar k}{2 mc} \frac{1}{\tanh \left(\frac{\beta}{2} \hbar c k \right)} \quad (1.75)$$

avec la population d'un mode k donnée par la distribution de Bose-Einstein, $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}$. Il est alors possible de retrouver deux cas limites en définissant la longueur thermique caractéristique des phonons

$$l_T = \frac{\hbar c}{k_B T} = \frac{\lambda_{dB}^2}{2\pi \xi} \quad (1.76)$$

avec $\lambda_{dB} = \sqrt{\frac{2\pi \hbar^2}{mk_B T}}$ la longueur d'onde thermique de Broglie.

Les fluctuations de densité sont dites thermiques : la température du système est élevée telle que pour les modes k considérés, $\hbar c k \ll k_B T$, c'est-à-dire $k \ll 1/l_T$. Dans ce cas, $1/2 + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \simeq \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \simeq \frac{k_B T}{\hbar c k}$,

$$\langle |\delta n_k|^2 \rangle = \frac{k_B T}{g}. \quad (1.77)$$

Ce résultat peut être retrouvé en utilisant le théorème d'équirépartition, l'hamiltonien décrivant les modes phononiques étant quadratique, voir Eq.(1.69).

Les fluctuations de densité sont dites quantiques : les modes de Bogoliubov étant peu peuplés, les fluctuations sont dominées par des fluctuations liées à l'état fondamental : $1/l_T \ll k$. Dans ce cas, $1/2 + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \simeq 1/2$,

$$\langle |\delta n_k|^2 \rangle = \frac{n \hbar k}{2 mc} \quad (1.78)$$

Comme les fluctuations de densité peuvent être reliées au facteur de corrélation à 2 corps avec l'Eq.(1.55), les fluctuations de densité ont été mesurées expérimentalement pour des gaz de bosons dans ce régime et ont notamment permis de voir dans le sous-régime où les fluctuations sont dominées par des effets quantiques une fluctuation de densité sous-Poissonienne [10]. Ce manuscrit ne présente pas de mesures de fluctuations de densité, néanmoins de telles données seraient un bon complément aux résultats présentés dans la Section 7.4.

1.3.3.2 Fluctuations de phase

On ne s'intéresse qu'aux modes phononiques vérifiant $k \xi \ll 1$, $|f_k^-|^2 \simeq \frac{2mc}{\hbar k}$ et $\epsilon_k = \hbar c k$, on a finalement en utilisant Eq.(1.74),

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{1}{n} \frac{mc}{\hbar k} \left(\frac{1}{2} + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \right) = \frac{1}{2n} \frac{mc}{\hbar k} \frac{1}{\tanh \left(\frac{\beta}{2} \hbar c k \right)} \quad (1.79)$$

avec la population d'un mode k donnée par la distribution de Bose-Einstein. De la même manière que pour le calcul des fluctuations de densité, il est possible de différencier deux régimes limites.

La température du système est grande telle que $\hbar ck \ll k_B T$: dans ce cas,

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{mk_B T}{n\hbar^2 k^2}. \quad (1.80)$$

On retrouve bien le théorème d'équirépartition.

La température du système est petite telle que $\hbar ck \gg k_B T$: dans ce cas,

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{1}{2n} \frac{mc}{\hbar k}. \quad (1.81)$$

1.3.3.3 Fonction de corrélation à un corps

À l'instar des fluctuations de densité qui peuvent être reliées à la fonction de corrélation à 2 corps, les fluctuations de phase peuvent être reliées à la fonction de corrélation à 1 corps normalisée définie comme

$$g^{(1)}(x, x') = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x') \rangle}{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \rangle \langle \hat{\psi}(x') \rangle} \quad (1.82)$$

avec $\hat{\psi}$ l'opérateur champ bosonique. Comme le système est ici supposé homogène de densité n , $g^{(1)}(x, x')$ est invariant par translation et ne dépend donc que de $|x - x'|$ de telles sortes que

$$g^{(1)}(x) = \frac{\langle \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(0) \rangle}{n}. \quad (1.83)$$

En utilisant la représentation de Madelung de l'opérateur champ et en négligeant les fluctuations de densité, la fonction de corrélation à 1 corps se réécrit

$$g^{(1)}(x) = \langle e^{i[\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]} \rangle. \quad (1.84)$$

Puisque l'Hamiltonien \hat{H}_2 est quadratique en $\hat{\theta}$, le théorème de Wick peut alors être appliqué. L'Eq(1.84) se réécrit

$$g^{(1)}(x) = e^{-\frac{1}{2} \langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle}, \quad (1.85)$$

En utilisant Eq.(1.68), on obtient

$$\langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle = \frac{4}{\ell} \sum_{k>0} \langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle [1 - \cos(kx)], \quad (1.86)$$

que l'on peut réécrire à la limite thermodynamique sous la forme d'une intégrale,

$$\langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle = 4 \int_0^\infty \frac{dk}{2\pi} \langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle [1 - \cos(kx)]. \quad (1.87)$$

On peut alors dissocier deux cas :

- **la température du système est élevée**, $\hbar ck \ll k_B T$ ou autrement dit $k \ll 1/l_T$ avec l_T la longueur thermique caractéristique des phonons. Dans ce cas $\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle$ est donné par Eq.(1.80). En faisant le changement de variable $K = kx$ et en utilisant les méthodes d'analyse complexe,

$$\langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle = \frac{2}{\pi} \frac{mk_B T}{n\hbar^2} |x| \int_0^{+\infty} dK \frac{1 - \cos(K)}{K^2} = \frac{mk_B T}{\hbar^2 n} |x|. \quad (1.88)$$

La fonction de corrélation à 1 corps s'écrit alors

$$g^{(1)}(x) = e^{-\frac{|x|}{l_c}}, \quad (1.89)$$

avec $l_c = 2n\hbar^2/(mk_B T)$ la longueur de corrélation. Pour des paramètres classiques pour les gaz de bosons préparés expérimentalement ($T = 100\text{nK}$, $n = 40\mu\text{m}^{-1}$), la longueur de corrélation est de l'ordre du $\sim \mu\text{m}$. La fonction de corrélation est exponentiellement décroissante, l'ordre à longue portée est tué par la présence de fluctuations de phase, d'où l'absence de condensation.

- **La température du système est faible**, $k \gg 1/l_T$. Dans ce cas $\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle$ est donné par Eq.(1.81). En faisant le changement de variable $K = kx$ et en utilisant les méthodes d'analyse complexe,

$$\langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi n} \frac{mc}{\hbar} \int_{x/l_T}^{x/\xi} dK \frac{1 - \cos(K)}{K} \quad (1.90)$$

Dans le cas où $\xi \ll x \ll l_T$, l'intégrale peut être évaluée entre 0 et $+\infty$, d'où

$$\langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle = \frac{1}{\pi n} \frac{mc}{\hbar} \left[\ln \left(\frac{x}{\xi} \right) + C \right] \quad (1.91)$$

avec C une constante. Finalement, la fonction de corrélation à 1 corps s'écrit

$$g^{(1)}(x) \propto \left(\frac{x}{\xi} \right)^{-\frac{1}{2\pi} \sqrt{\gamma}} \quad (1.92)$$

avec γ le paramètre de [Lieb Liniger](#). Au lieu d'une décroissance exponentielle attendue pour des fluctuations thermiques, la décroissance ici est plus lente, car algébrique. Dans ce cas, à $T = 0$ les corrélations sont présentes à longue portée.

De façon générale, c'est-à-dire sans se restreindre à l'étude des modes phononiques et sans négliger les fluctuations de phase thermique ou quantique, la fonction de corrélation à 1 corps a pu être obtenue avec la théorie de Bogoliubov et s'écrit [48]

$$\ln \left(g^{(1)}(x) \right) = -\frac{1}{\pi n} \int_0^\infty dk \left[\frac{1}{2} [(f_k^+)^2 + (f_k^-)^2] \langle a_k^\dagger a_k \rangle + \left[\frac{1}{2} (f_k^+ - f_k^-) \right]^2 \right] (1 - \cos(kx)) \quad (1.93)$$

avec $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ donnée par la distribution de Bose-Einstein.

Expérimentalement, les gaz 1D dans le régime quasi-condensat sont préparés à des températures telles que cela rend négligeable l'apport des fluctuations de phase quantiques. Les fluctuations de phase sont alors bien décrites par Eq.(1.80). Néanmoins, les résultats obtenus et décrits dans la Section 7.4 ont été analysés avec la prise en compte des fluctuations de phase quantiques qui ne sont alors plus négligeables.

En résumé

- À l'équilibre thermodynamique, les gaz de Bose 1D présentent des régimes physiques variés dépendant du paramètre de Lieb Liniger γ et de la température T et peuvent être identifiés en considérant la fonction de corrélation à 2 corps $g^{(2)}(0)$. Les trois régimes principaux sont le régime de gaz de Bose idéal ($g^{(2)}(0) \simeq 2$), le régime à forte interaction, également connu sous le nom de régime de Tonks-Girardeau ($g^{(2)}(0) \simeq 0$) et le régime de **quasi-condensat de Bose Einstein** ($g^{(2)}(0) \simeq 1$).
- Le régime de **quasi-condensat de Bose Einstein** est bien décrit dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. La diagonalisation de l'Hamiltonien par linéarisation permet d'obtenir la relation de dispersion pour les excitations qui est linéaire pour des petits modes k et quadratiques pour les grands modes.
- Dans ce cadre, on peut calculer les fluctuations de densité et de phase. La fonction de corrélation à 1 corps est reliée aux fluctuations de phase. Les corrélations diminuent exponentiellement pour T finie et de façon algébrique pour $T = 0$.

THÉORIE HYDRODYNAMIQUE GÉNÉRALISÉE

Sommaire

2.1 Relaxation de systèmes quantiques isolés	34
2.1.1 Systèmes chaotiques et ensemble de Gibbs	35
2.1.2 Systèmes intégrables et ensemble de Gibbs généralisé	36
2.2 Équations hydrodynamiques pour un système chaotique	37
2.3 Équations hydrodynamiques pour un système intégrable	38
2.3.1 Distribution de rapidités spatialement résolue	38
2.3.2 Équation Hydrodynamique Généralisée	39
2.4 Limite Gross-Pitaevskii	41
2.4.1 Les équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps	41
2.4.2 Description du système à l'état fondamental	42
2.4.3 Des équations GHD aux équations GP dépendantes du temps	43

Jusqu'à présent, nous avons présenté les propriétés des gaz de Bosons 1D à l'état stationnaire. Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique de ces systèmes. Ce chapitre introduit une approche hydrodynamique émergente spécialement construite pour les systèmes intégrables : il s'agit de la théorie [Hydrodynamique Généralisée \(GHD\)](#). De nombreuses revues présentent cette théorie de façon très détaillée, voir par exemple [49, 23, 50, 51]. Cette partie introduit les notions principales de cette théorie.

Comme toute approche hydrodynamique, la théorie hydrodynamique consiste à étudier la dynamique à grande échelle (*coarse grained dynamics* en anglais) du système. On parle aussi d'échelle d'Euler. L'idée est la suivante : pour un système de taille L , l'espace-temps est divisé en cellules de tailles $\ell \times \tau$.

- Comme représenté sur la Fig.2.1, la taille ℓ est choisie telle que $L \gg \ell \gg l_c$ avec l_c la distance inter-particule, la longueur microscopique caractéristique du système. La densité peut être supposée uniforme dans la cellule. Cela revient à faire une [Approximation de Densité Locale](#).
- Le temps τ est choisi de sorte qu'il soit beaucoup plus grand que le temps caractéristique de relaxation.

Ainsi, on suppose que dans chaque cellule de l'espace temps, le système est dans un état relaxé. La notion de relaxation est ainsi au cœur de la construction de théories hydrodynamiques. Néanmoins, cette notion est loin d'être un concept évident pour des systèmes quantiques isolés, qu'ils soient chaotiques ou intégrables. La partie suivante détaille la notion de relaxation dans ces systèmes.

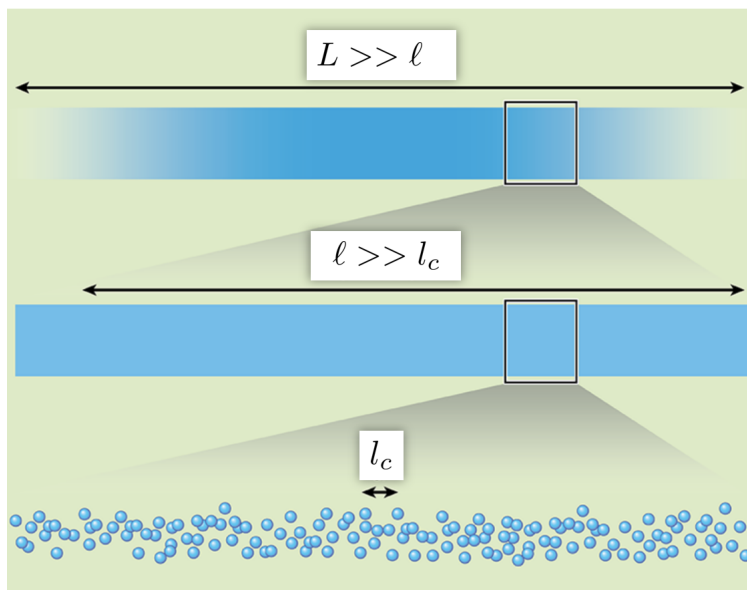


FIGURE 2.1 – Représentation de l’hypothèse hydrodynamique. Les cellules de fluide considérées sont de taille ℓ avec $L \gg \ell \gg l_c$. Le système dans ces cellules de fluides est considéré homogène et dans un état relaxé à tout temps. Figure adaptée de [52].

Ce chapitre introduit les notions de relaxation pour les systèmes quantiques isolés, qu'ils soient chaotiques ou intégrables. Dans les deux cas, les approches hydrodynamiques y sont présentées : dans le cas de systèmes intégrables, la théorie [Hydrodynamique Généralisée](#) est particulièrement adaptée. Enfin, la dernière partie fait le lien entre les équations [GHD](#) et les équations hydrodynamiques obtenues à partir des équations [Gross-Pitaevskii](#) dépendantes du temps.

2.1 Relaxation de systèmes quantiques isolés

Un système isolé est caractérisé par l'absence de couplage avec son environnement. L'évolution d'un état quantique $|\varphi\rangle$ est alors unitaire et déterminée par l'Hamiltonien \hat{H} , telle qu'à

un instant t , dans le cas où \hat{H} est indépendant du temps,

$$|\varphi\rangle(t) = e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} |\varphi\rangle. \quad (2.1)$$

Les questions ici posées sont les suivantes : est-ce qu'un phénomène de relaxation est présent, c'est-à-dire est-ce que pour une observable \hat{A} , $\langle \hat{A} \rangle \rightarrow_{t \rightarrow \infty} \langle \hat{A} \rangle_\infty$? De plus, comment caractériser cette relaxation dans le cas d'un système chaotique ou intégrable?

En toute généralité, il n'y a pas forcément de relaxation du système vis-à-vis d'une observable [53, 50]. Néanmoins, on s'attend à ce qu'il y ait une relaxation vis-à-vis d'observables locales, c'est-à-dire pour des observables agissant sur un sous-espace du système. Pour un système chaotique, cette affirmation correspond à l'[Hypothèse de Thermalisation des États propres \(ETH\)](#), pendant quantique de l'approximation ergodique en physique classique. Ce principe est introduit dans la partie suivante.

2.1.1 Systèmes chaotiques et ensemble de Gibbs

Soit un système d'impulsion totale nulle avec un nombre N de particules. L'état quantique est supposé piqué en énergie E , c'est-à-dire construit comme une superposition d'états propres $|E_i\rangle$ d'énergie propre $E_i \in [E - \Delta, E + \Delta]$ avec $\Delta/E \ll 1$. Après une dynamique de temps t , cet état quantique s'écrit $|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i |E_i\rangle \exp(-iE_i t/\hbar)$ avec $c_i = \langle E_i | \psi(0) \rangle$. Pour une observable \hat{A} , la valeur moyenne associée vaut

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \sum_{i,j} c_i c_j^* \langle E_j | \hat{A} | E_i \rangle e^{-\frac{it}{\hbar}(E_i - E_j)}. \quad (2.2)$$

On suppose que les termes croisés proportionnels à $\langle E_i | \hat{A} | E_j \rangle_{j \neq i}$ sont petits devant les termes diagonaux. Pour un temps long $t \rightarrow \infty$, les termes $e^{-i(E_i - E_j)t/\hbar}$ se déphasent et s'annulent : la contribution due aux termes croisés est négligeable,

$$\langle \hat{A} \rangle(t \rightarrow \infty) = \langle \hat{A} \rangle_\infty \simeq |c_i|^2 \langle E_i | \hat{A} | E_i \rangle. \quad (2.3)$$

L'[Hypothèse de Thermalisation des États propres \(ETH\)](#) est la suivante : les termes diagonaux $\langle E_i | \hat{A} | E_i \rangle$ sont une fonction lisse de l'énergie [54, 55, 56, 57]. Autrement dit,

$$\langle E_i | \hat{A} | E_i \rangle = f(E_i). \quad (2.4)$$

Ainsi, en injectant Eq.(2.4) dans Eq.(2.3) et en utilisant le fait que l'état soit piqué en E ,

$$\langle \hat{A} \rangle_\infty = f(E) \sum_i |c_i|^2 = f(E). \quad (2.5)$$

La valeur moyenne de l'observable \hat{A} est alors indépendante des coefficients $\{c_i\}$, c'est-à-dire des détails de l'état quantique initial considéré : elle ne dépend que de l'énergie du système.

Intéressons-nous désormais à la description du système relaxé en termes de matrice densité.

N'importe quel ensemble diagonal piqué autour de l'énergie E permet de décrire l'état relaxé du système total. C'est le cas par exemple de la matrice densité $|E_i\rangle\langle E_i|$ avec $E_i \simeq E$. Un autre ensemble décrivant le système est l'ensemble de Gibbs avec

$$\rho_{\text{GE}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{GE}}} e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})} \quad (2.6)$$

où $\mathcal{Z}_{\text{GE}} = \text{Tr}(\exp(-\beta\hat{H}))$ est la fonction de partition. Les paramètres de Lagrange (β, μ) sont choisis pour que $\langle \hat{H} \rangle = \text{Tr}(\rho_{\text{GE}}\hat{H}) = E$ et $\langle \hat{N} \rangle = \text{Tr}(\rho_{\text{GE}}\hat{N}) = N$.

L'équivalence qu'il y a entre ces différents ensembles n'est plus correcte localement. Le système total de taille L peut se décomposer en sous-systèmes de taille $\delta x \ll L$. En utilisant l'ETH, chaque sous-système centré en x est caractérisé par son énergie $e(x)\delta x$ et son nombre d'atomes $n(x)\delta x$ avec

$$E = \int dx e(x) \text{ et } N = \int dx n(x). \quad (2.7)$$

Dans ce cas, le seul ensemble pertinent pour décrire le système localement est l'ensemble de Gibbs puisque la matrice densité du système total peut se factoriser en un produit de sous-ensembles de Gibbs $\rho_{\text{GE}} = \prod \tilde{\rho}_{\text{GE}}(x)$ en utilisant Eq.(2.7).

2.1.2 Systèmes intégrables et ensemble de Gibbs généralisé

Pour un système chaotique, les seules quantités locales conservées sont le nombre d'atomes et l'énergie (voir Eq.(2.7)) ainsi que l'impulsion totale $P = \int dx p(x)$. Au contraire, les systèmes intégrables présentent une infinité de quantités (aussi appelées charges) locales conservées $\hat{Q}_i = \int dx \hat{q}_i(x)$. Pour les gaz de LL, on peut construire de telles quantités en utilisant la distribution de rapidités. Par exemple, les moments d'ordre i de la distribution

$$\langle \hat{Q}_i \rangle = \int d\theta \theta^i \rho(\theta) \quad (2.8)$$

sont des quantités locales conservées. En particulier, $\langle \hat{Q}_0 \rangle = N$, $\langle \hat{Q}_1 \rangle = P$ et $\langle \hat{Q}_2 \rangle = E$.

On peut alors faire un raisonnement similaire à celui utilisé pour les systèmes chaotiques. Soit un état quantique $|\varphi\rangle = \sum_{\{\theta_i\}} c_{\{\theta_i\}} |\{\theta_i\}\rangle$ piqué autour d'une certaine distribution de rapidité $\rho(\theta)$. Après un temps suffisamment long, la valeur moyenne d'une observable \hat{A} vaut

$$\langle \hat{A} \rangle_{\infty} = \sum_{\{\theta_i\}} |c_{\{\theta_i\}}|^2 \langle \{\theta_i\} | \hat{A} | \{\theta_i\} \rangle. \quad (2.9)$$

On fait une **Hyptohèse de Thermalisation des États propres** généralisée aux systèmes intégrables (**GETH**) : la valeur moyenne $\langle \{\theta_i\} | \hat{A} | \{\theta_i\} \rangle_{\infty} = f[\rho]$ est une fonctionnelle de la distribution de rapidités. On a alors

$$\langle \hat{A} \rangle_{\infty} = f[\rho]. \quad (2.10)$$

Tout ensemble diagonal piqué autour de la distribution de rapidités permet de décrire le

système total (en prenant par exemple comme matrice densité $|\{\theta_i\}\rangle\langle\{\theta_i\}|$ avec $\{\theta_i\}$ un micro état associé à la distribution de rapidités $\rho(\theta)$). Par construction analogue à l'ensemble de Gibbs, un autre ensemble décrivant le système est l'**Ensemble de Gibbs Généralisé (GGE)** avec

$$\hat{\rho}_{\text{GGE}} = \frac{1}{\mathcal{Z}_{\text{GGE}}} e^{-\sum_i \lambda_i \hat{Q}_i} \quad (2.11)$$

avec $\mathcal{Z}_{\text{GGE}} = \text{Tr} \left[\exp(-\sum_i \lambda_i \hat{Q}_i) \right]$ et les $\{\lambda_i\}$ les multiplicateurs de Lagrange. Localement, en utilisant **GETH**, un sous-système est caractérisé par l'ensemble des $q_i(x)\delta x$. Puisqu'il est factorisable, le **GGE** est le bon ensemble qui permet de décrire localement le système. Ainsi, le système est paramétré par les $\{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ et de façon équivalente par les valeurs moyennes $\{\langle \hat{Q}_i \rangle\}_{i \in \mathbb{N}}$ ou par la distribution de rapidités $\rho(\theta)$.

Une interprétation physique mettant en évidence la pertinence d'utiliser une telle description est de dire que pour un sous-système de taille $\ell \ll L$ avec L la taille du système total, le reste du système agit comme un réservoir de rapidités. Le sous-système relaxe vers un **GGE**. Un système décrit par un **GETH** n'a pour l'instant pas été observé expérimentalement.

Maintenant que la notion de relaxation locale pour un système quantique chaotique ou intégrable a du sens, l'approche hydrodynamique peut être introduite.

2.2 Équations hydrodynamiques pour un système chaotique

Pour un système chaotique, les équations hydrodynamiques sont obtenues en faisant l'approximation que le fluide est localement dans un état relaxé, donc décrit par un état thermique d'après ce qui précède. La conservation du nombre d'atomes $N = \int n(x, t) dx$, de l'impulsion $P = \int p(x, t) dx$ et de l'énergie $E = \int e(x, t) dx$ totale du système donnent lieu à 3 équations de continuité,

$$\begin{aligned} \partial_t q_N + \partial_x j_N &= 0 \\ \partial_t q_P + \partial_x j_P &= 0 \\ \partial_t q_E + \partial_x j_E &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

où $q_N = n(x, t)$, $q_P = p(x, t)$ et $q_E = e(x, t)$ sont les charges locales et $j_{N/P/E}(x, t)$ les courants associés. La complexité du problème réside dans l'obtention des courants $j_{N/P/E}(x, t)$. À l'échelle d'Euler (ou limite hydrodynamique d'Euler), c'est-à-dire pour des variations de densité de très grandes longueurs d'onde, ces courants ne dépendent que des charges $j(x, t) = f[q_N(x, t), q_P(x, t), q_E(x, t)]$, les dépendances des dérivées $\partial_x^{(i)} q_{N/P/E}(x, t)$ sont négligées. Dans cette limite, on retrouve les équations d'Euler connues

$$\begin{aligned} \partial_t n + \partial_x (nv) &= 0 \\ \partial_t (np) + \partial_x (vnp + \mathcal{P}) &= 0 \\ \partial_t \left(n \frac{mv^2}{2} + ne \right) + \partial_x \left(v \left[n \frac{mv^2}{2} + ne \right] + n\mathcal{P} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

avec \mathcal{P} la pression et v la vitesse du fluide. Ces équations Eq.(2.13) prédisent parfois l'apparition de chocs lorsque la limite hydrodynamique d'Euler n'est plus vérifiée, les échelles spatiales de dynamique deviennent très petites. Il faut alors modifier la forme des courants en rajoutant des termes de diffusion de type Navier-Stokes pour régulariser le problème [58]. Cette approche n'est plus forcément valable pour des systèmes intégrables.

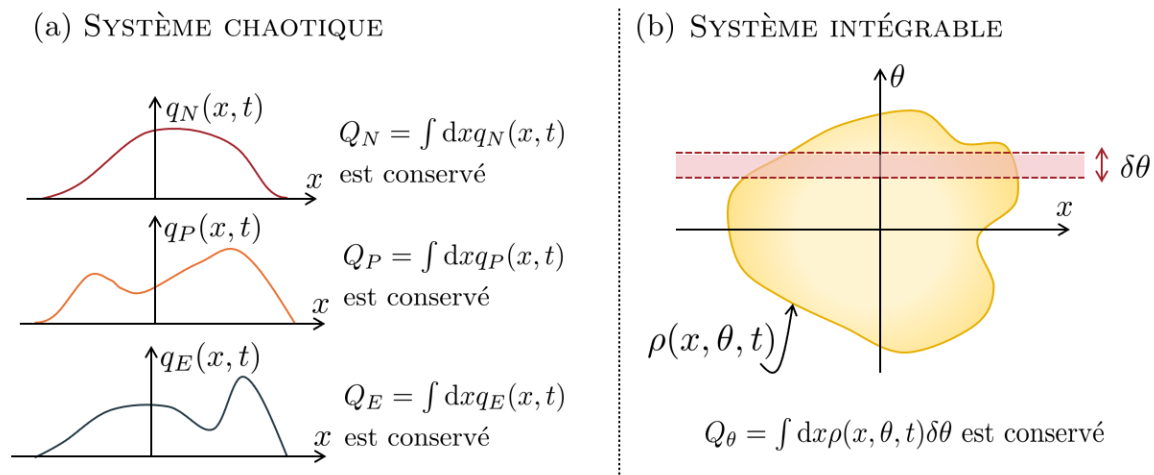


FIGURE 2.2 – (a) Pour un système chaotique, seules quelques charges sont conservées au cours de la dynamique – (b) Pour un système intégrable, une infinité de charges sont conservées et sont définies à partir de la distribution de rapidités spatialement résolue telles que $Q_\theta = \int dx \rho(x, \theta, t) \delta\theta$.

2.3 Équations hydrodynamiques pour un système intégrable

2.3.1 Distribution de rapidités spatialement résolue

Avant de présenter les équations hydrodynamiques pour les systèmes intégrables, il est tout d'abord important d'introduire la notion de distribution de rapidités spatialement résolue. Un système homogène est caractérisé par sa distribution de rapidité $\rho(\theta)$. On considère ici un système qui n'est pas homogène, la densité linéaire du gaz est notée $n(x)$ avec $n_0 = n(0)$.

À l'équilibre, l'**Approximation de Densité Locale (LDA)** (*Local Density Approximation* en anglais) peut être utilisée si le potentiel longitudinal et la densité linéaire varient lentement devant les longueurs caractéristiques microscopiques telles que la longueur de corrélation l_c , de l'ordre du μm pour les systèmes étudiés expérimentalement.

On peut alors diviser le système en sous-système de taille δx tel que pour une cellule $[x, x + \delta x]$, $l_c \ll \delta x \ll n(x)/\partial_x n(x)$. Dans ce cas, on peut alors supposer que la densité est homogène dans chaque sous-système. Notamment, on peut définir un potentiel chimique local

$$\mu(x) = \mu(0) - V_{\parallel}(x). \quad (2.14)$$

Si le nuage atomique considéré est purement 1D dans le régime de **qBEC**, l'équation d'état

pour un système homogène est donnée $\mu = gn$. Ainsi, pour un système inhomogène,

$$\mu(x) = gn(x) = gn_0 - V_{\parallel}(x). \quad (2.15)$$

Connaissant l'équation d'état, la densité à $x = 0$ et la forme du potentiel longitudinal $V_{\parallel}(x)$, on peut en déduire le profil de densité $n(x)$.

À partir de la LDA, la notion de distribution de rapidité spatialement résolue peut alors être définie. Ainsi, dans chaque sous-système $[x, x + \delta x]$ on peut définir une distribution de rapidités locale $\rho(x, \theta)$.

Prenons l'exemple d'un gaz à l'équilibre dans un potentiel longitudinal $V_{\parallel}(x)$ bien décrit par un ensemble thermique. Dans la cellule de fluide centrée en $x = 0$, la distribution de rapidités associée $\rho(0, \theta)$ est paramétrée par la température T et le potentiel chimique μ_0 . Pour toute autre cellule centrée en x , la distribution de rapidités $\rho(x, \theta)$ est alors paramétrée par la température T et le potentiel chimique local $\mu(x)$, voir Eq.(2.14). Une telle distribution est représentée sur la Fig.2.3.

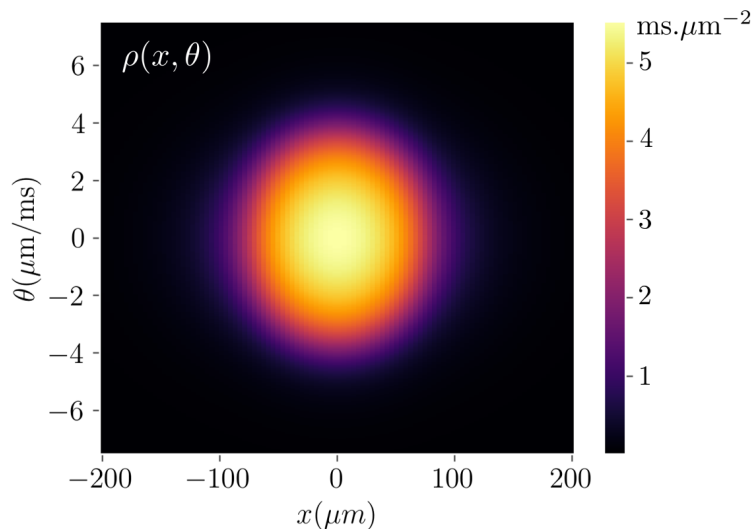


FIGURE 2.3 – Distribution de rapidités spatialement résolue $\rho(x, \theta)$ correspond à un gaz 1D de bosons avec $\gamma = 7.10^{-3}$. Le nuage atomique est placé dans un potentiel longitudinal harmonique $V_{\parallel} = 1/2m\omega_{\parallel}^2x^2$ avec $f_{\parallel} = \omega_{\parallel}/(2\pi) = 5\text{Hz}$. Le système est supposé thermique avec $T = 100\text{nK}$ et $\mu_0/k_B = 50\text{nK}$.

2.3.2 Équation Hydrodynamique Généralisée

Le système étudié est ici intégrable. On suppose qu'il est localement dans un état relaxé donc localement décrit par un GGE. Il possède alors une infinité de quantités locales conservées. Une façon de les construire est donnée par Eq.(2.8).

Une autre façon permettant de construire des charges locales conservées est d'introduire la notion de distribution de rapidités localement résolue $\rho(x, \theta, t)$. Pour un système paramétré par la distribution de rapidité $\rho(\theta)$, il est possible d'introduire la quantité locale $\rho(x, \theta, t)$ telle

que

$$\rho(\theta) = \int dx \rho(x, \theta, t). \quad (2.16)$$

Ainsi, comme on peut le voir sur la Fig.2.2(b), l'intégrale de $\rho(x, \theta, t)$ sur une tranche de taille $\delta\theta$

$$Q_\theta = \int dx \rho(x, \theta, t) \delta\theta \quad (2.17)$$

est une quantité conservée quasi locale pour $\hbar/(mL) \ll \delta\theta \ll \Delta\theta$ avec $\Delta\theta$ l'échelle caractéristique de variation de $\rho(\theta)$ et $\hbar/(mL)$ avec L l'échelle caractéristique des variations spatiales du système.

Cette conservation peut être aussi reliée à une équation de continuité portant sur la distribution de rapidités,

$$\partial_t \rho(x, \theta, t) + \partial_x (j_{[\rho]}(x, \theta, t)) = 0. \quad (2.18)$$

La complexité du problème réside dans l'obtention de l'expression du courant. Ce dernier peut prendre la forme $j_{[\rho]}(x, \theta, t) = v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) \rho(x, \theta, t)$ avec $v_{[\rho]}^{\text{eff}}$ appelée vitesse effective, une fonctionnelle de la distribution de rapidités. Cette fonction a été obtenue en 2016 [59, 60] et s'écrit

$$v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) = \theta - \frac{m}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\theta' \underbrace{\Delta (\theta - \theta')}_{(1)} \underbrace{[v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) - v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta')]}_{(2)} \rho(x, \theta', t) \quad (2.19)$$

où Δ est le décalage en diffusion défini Eq.1.12. Une interprétation physique de ce résultat consiste à considérer le terme (1) comme décalage en position lié à un processus de diffusion à deux corps. Le terme (2) correspond aux taux de processus de diffusion par unité de temps. Cette équation est appelée équation **Hydrodynamique Généralisée (GHD)** et a été obtenue pour la première fois en 2016 [59, 60]. Les Eq.(2.19) et (2.18) sont obtenues à l'échelle d'Euler. Au-delà de cette approximation, d'autres termes sont à prendre en compte (effets de diffusion) [61].

En présence d'un potentiel $V_{\parallel}(x)$ qui varie lentement à l'échelle d'une cellule de fluide mésoscopique, l'équation se réécrit [62]

$$\partial_t \rho(x, \theta, t) + \partial_x \left(v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta) \rho(x, \theta, t) \right) = \frac{\partial_x V_{\parallel}(x)}{m} \partial_\theta \rho(x, \theta, t). \quad (2.20)$$

L'équation **GHD** peut se réécrire sous une forme convective en utilisant le facteur d'occupation $\nu_{[\rho]}$ Eq.(1.29)

$$\partial_t \nu_{[\rho]} + v_{[\rho]}^{\text{eff}} \partial_x \nu_{[\rho]} = \frac{\partial_x V_{\parallel}(x)}{m} \partial_\theta \nu_{[\rho]}. \quad (2.21)$$

La valeur du facteur d'occupation est conservée le long de la trajectoire. Pour retrouver cette équation à partir d'Eq.(2.20), on utilise Eq.(1.12) pour montrer que ρ_s est aussi solution d'Eq.(2.20). Le facteur d'occupation étant défini comme le rapport ρ/ρ_s , on retrouve Eq.(2.21). Ainsi, à partir d'un facteur d'occupation à $t = 0$, on peut résoudre les équations **GHD** numériquement pour reconstruire à tout temps la distribution de rapidités et les quantités souhaités. Par exemple, $n(x, t) = \int d\theta \rho(x, \theta, t)$.

Un test important de la théorie **GHD** a été d'étudier expérimentalement la dynamique d'un gaz de **Lieb Liniger** après le passage brusque d'un piège longitudinal en double puits à un piège harmonique. La dynamique observée expérimentalement est fidèle aux prédictions **GHD** alors que la théorie hydrodynamique pour les systèmes chaotiques échoue à reproduire les résultats expérimentaux [63].

2.4 Limite Gross-Pitaevskii

On s'intéresse ici aux équations **GHD** en absence de potentiel dans la limite où $T \rightarrow 0$ et $\gamma \rightarrow 0$. Dans ce régime, la dynamique du gaz peut être localement bien décrite à partir des équations hydrodynamiques issues des équations **Gross-Pitaevskii (GP)** permettent de prédire correctement la dynamique du système. On cherche à montrer ici que dans ces conditions, les équations **GHD** redonnent bien dans certaines situations les équations hydrodynamiques dérivées des équations **GP**.

2.4.1 Les équations **Gross-Pitaevskii** dépendantes du temps

Dans le régime **qBEC**, la dynamique d'un gaz de **LL** à l'état fondamental peut être donnée dans certains cas par l'équation de **GP** dépendante du temps. Cette équation est obtenue en utilisant l'équation du mouvement d'Heisenberg,

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = [\hat{\psi}, \hat{H}]. \quad (2.22)$$

En négligeant la nature quantique du système, on obtient

$$i\hbar \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) + g|\psi(x, t)|^2 \right) \psi(x, t). \quad (2.23)$$

Cette équation est utilisée pour calculer numériquement l'évolution temporelle du champ classique.

En réécrivant la fonction d'onde sous la forme de Madelung $\psi(x, t) = \sqrt{n(x, t)}e^{i\theta(x, t)}$ et en injectant cette forme dans Eq.(2.23), on obtient les équations appelées équations quantiques hydrodynamiques [64, 65],

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial n}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{m} \frac{\partial}{\partial x} \left(n \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \\ \hbar \frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2} \right) - V(x) - gn \end{aligned} \quad (2.24)$$

En définissant la vitesse du fluide

$$v = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (2.25)$$

la pression

$$\mathcal{P} = gn^2 \quad (2.26)$$

et le terme de pression quantique

$$\mathcal{P}_Q = \frac{\hbar^2}{2m} \sqrt{n} \frac{\partial^2 \sqrt{n}}{\partial x^2}, \quad (2.27)$$

les équations Eq.(2.24) peuvent se réécrire sous une forme plus commune,

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (vn) &= 0 \\ m \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{\mathcal{P} + \mathcal{P}_Q}{n} + V(x) \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

où l'on reconnaît l'équation de continuité reliée à la conservation du nombre d'atomes et l'équation d'Euler. En absence de potentiel $V(x) = 0$, dans le cas où le système est à l'équilibre ($\partial_t n(x, t) = v(x, t) = 0$) et la pression quantique négligée (régime de [Thomas-Fermi \(TF\)](#) 1D), on retrouve l'équation d'état Eq.(1.61)

$$ng = \mu. \quad (2.29)$$

En effet, dans le cas où les interactions entre atomes sont relativement fortes, les variations de densités deviennent faibles et le terme de pression quantique (proportionnel à \hbar^2) est alors négligeable [66].

On cherche maintenant à retrouver les Eq.(2.28) à partir des équations [GHD](#) Eq.(2.21).

2.4.2 Description du système à l'état fondamental

Considérons un système dans l'état fondamental avec γ quelconque pour le moment. Pour toute position x , le facteur d'occupation $\nu(x, \theta)$ ne peut prendre que deux valeurs : 0 ou 1. On cherche alors à étudier la dynamique de ce système dans le cas particulier où, à l'instant $t = 0$, le facteur d'occupation est paramétrisé par les fonctions $\theta^-(x, 0)$ et $\theta^+(x, 0)$, $\theta^-(x, 0) < \theta^+(x, 0)$ telles que

$$\nu(x, \theta, 0) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [\theta^-(x, 0), \theta^+(x, 0)] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.30)$$

Le facteur d'occupation prend initialement la forme d'une mer de Fermi. Comme le facteur d'occupation est solution de l'équation $\partial_t \nu + v_{\text{eff}}^{[\nu]} \partial_x \nu = 0$, la valeur de ν est conservée le long des trajectoires. Ainsi, pour tout temps t ,

$$\nu(x, \theta, t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta \in [\theta^-(x, t), \theta^+(x, t)] \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.31)$$

où $\theta^+(x, t)$ correspond au bord supérieur de la mer de Fermi et $\theta^-(x, t)$ au bord inférieur de la mer de Fermi, Fig.2.4. Finalement, étudier la dynamique du facteur d'occupation revient à caractériser la déformation des contours supérieurs et inférieurs $\theta^\pm(t)$. Ainsi l'Eq.(2.31) peut

être réduite en deux équations portant sur $\theta^\pm(x, t)$ [67],

$$\begin{cases} \partial_t \theta^+ + v_{\text{eff}}(\theta^+) \partial_x \theta^+ = 0 \\ \partial_t \theta^- + v_{\text{eff}}(\theta^-) \partial_x \theta^- = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

avec $v_{\text{eff}}(\theta^\pm(x, t))$ la vitesse effective de la rapidité θ^\pm avec un facteur d'occupation qui s'écrit sous la forme donnée par Eq.(2.31), Fig.2.4 : $v_{\text{eff}}(\theta^\pm(x, t))$ est naturellement une fonction de $\theta^+(x, t)$ et $\theta^-(x, t)$.

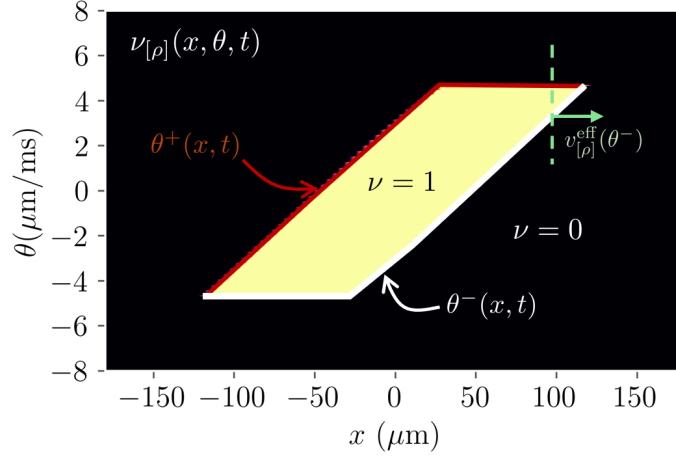


FIGURE 2.4 – Facteur d’occupation obtenu après un temps t d’évolution en résolvant numériquement les équations GHD. Le gaz de LL est à l’état fondamental avec $\gamma \rightarrow 0$. Initialement, le facteur d’occupation est rectangulaire et homogène. Le facteur d’occupation est une mer de Fermi délimitée par les bords $\theta^\pm(x, t)$: les zones noires correspondent à $\nu = 0$, la zone jaune à $\nu = 1$.

2.4.3 Des équations GHD aux équations GP dépendantes du temps

Désormais on se restreint au cas où le paramètre de Lieb Liniger $\gamma \rightarrow 0$. Pour un couple $(\theta^+, \theta^-)/2$, la distribution de rapidités associée est un demi-cercle centré en $v = (\theta^- + \theta^+)$, la vitesse du barycentre des rapidités. Plus précisément, la distribution de rapidités se réécrit

$$\rho(\theta) = \frac{n}{2\pi c^2} \sqrt{-(\theta - \theta^-)(\theta - \theta^+)} \quad (2.33)$$

avec $c = \sqrt{gn/m}$ la vitesse du son et n la densité du gaz qui vérifie

$$n = \int d\theta \rho(\theta) = n \frac{(\theta^+ - \theta^-)^2}{16c^2}. \quad (2.34)$$

Dans la limite $\gamma \rightarrow 0$, la vitesse efficace au niveau des bords de la mer de Fermi peut être retrouvé par des arguments simples. Considérons tout d’abord le cas particulier où la vitesse du centre de masse est nulle : le barycentre des rapidités est nul, c’est-à-dire $\theta^+ = -\theta^-$. En

toute généralité (quelque soit la valeur de γ), la vitesse de propagation sur les bords est la vitesse du son $\pm c = \pm\sqrt{gn/m}$. Or, pour $\gamma \rightarrow 0$ et $T \rightarrow 0$, les bords de Fermi correspondent aux rapidités $\theta^\pm = \pm 2c$ [21]. D'où $v_{\text{eff}}(\theta^\pm) = \theta^\pm/2$. Si la vitesse du centre de masse n'est pas nulle (c'est-à-dire $\theta^- \neq -\theta^+$) alors la vitesse effective est translatée par rapport à celle du centre de masse v , $v_{\text{eff}}(\theta^\pm) = v \pm c$ avec cette fois-ci $c = \sqrt{gn/m} = (\theta^+ - \theta^-)/4$ et $v = (\theta^+ + \theta^-)/2$, ce qui permet d'obtenir

$$v_{\text{eff}}(\theta^+) = \frac{3}{4}\theta^+ + \frac{1}{4}\theta^- \text{ et } v_{\text{eff}}(\theta^-) = \frac{3}{4}\theta^- + \frac{1}{4}\theta^+. \quad (2.35)$$

En réinjectant Eq.(2.35) dans les équations différentielles portant sur $\theta^\pm(x, t)$ et en utilisant les relations $\theta^+(x, t) - \theta^-(x, t) = 4\sqrt{gn(x, t)/m}$ et $v(x, t) = (\theta^+(x, t) + \theta^-(x, t))/2$, les équations Eq.(2.32) se réécrivent

$$\begin{cases} \partial_t n(x, t) + \partial_x (v(x, t)n(x, t)) & = 0 \\ \partial_t v(x, t) + v(x, t)\partial_x v(x, t) & = -\frac{g}{m}\partial_x n(x, t). \end{cases} \quad (2.36)$$

On retrouve les équations hydrodynamiques Eq.(2.28) obtenues avec la théorie GPE en négligeant le terme de pression quantique [67, 68, 69] : la première relation est l'équation de continuité liée à la conservation du nombre d'atomes et la seconde relation, l'équation d'Euler.

La correspondance entre ces deux modèles (d'un côté les équations GP dépendantes du temps avec terme de pression quantique négligée, de l'autre équation GHD à $T = 0$ et régime qBEC) n'est correcte que si le système considéré en termes de facteur d'occupation correspond à une seule mer de Fermi. Cette correspondance n'est plus valable pour des conditions initiales différentes pour lesquelles les dynamiques observées sont loin d'être décrites localement par un ensemble thermique. C'est le cas par exemple d'un système initialement constitué de deux pics de densité séparés, c'est-à-dire de deux mers de Fermi distinctes en termes de facteur d'occupation [70] : les deux prédictions hydrodynamiques sont très différentes.

En résumé

- Un système quantique isolé intégrable relaxe vis-à-vis d'observables locales.
- Pour un système chaotique, le système relaxé est localement bien décrit par un ensemble de Gibbs paramétré par la densité $\langle \hat{n} \rangle$ et l'énergie par atome $\langle \hat{e} \rangle$.
- Pour un système intégrable, le système relaxé est localement bien décrit par un ensemble de Gibbs généralisé paramétré par la distribution de rapidités $\rho(\theta)$.
- Pour un système aux variations spatiales lentes et de grande échelle, on peut introduire la notion de distribution de rapidités spatialement résolue $\rho(x, \theta)$.
- L'évolution de $\rho(x, \theta)$ est donnée par les équations [Hydrodynamique Généralisée](#), donnée ici à l'échelle d'Euler.
- Les équations [GHD](#) permettent de retrouver à l'état fondamental et pour $\gamma \rightarrow 0$ les équations obtenues à partir des équations de [Gross-Pitaevskii](#) dépendantes du temps en négligeant le terme de pression quantique.

PROJETS THÉORIQUES

Sommaire

3.1 Relaxation des phonons pour un système intégrable	47
3.1.1 Représentation du système en termes de fermions	48
3.1.2 Représentation du système en termes de phonons	49
3.1.3 Relaxation du système	50
3.1.4 Exemple pour un état initial particulier	52
3.2 Équation de Schrödinger Non Linéaire et distribution de rapidités 55	
3.2.1 Construction des constantes de diffusion inverse	56
3.2.2 Lien avec la distribution de rapidités	57

Ce chapitre présente deux projets théoriques différents auxquels j’ai contribué au cours de ma thèse et pour lesquels la notion de distribution de rapidités est centrale. Le premier projet s’est intéressé à caractériser l’état relaxé d’un gaz de [Lieb Liniger \(LL\)](#) initialement gaussien en termes de phonons. Le second projet a permis de refaire le lien entre la distribution de rapidités d’un gaz de [LL](#) avec des quantités conservées construites dans la limite classique en utilisant les techniques de diffusion inverse.

3.1 Relaxation des phonons pour un système intégrable

Cette première partie présente les résultats liés à une étude théorique et numérique menée en collaboration avec Isabelle Bouchoule, Jérôme Dubail et Dimitri Gangardt [24]. Nous nous sommes intéressés à caractériser l’état relaxé d’un gaz de [Lieb Liniger \(LL\)](#) préparé initialement dans un état hors équilibre qui est gaussien en termes de phonons : la matrice densité est à l’état initial une exponentielle d’un opérateur quadratique en termes d’opérateurs créations et annihilations de phonons.

La notion de phonon, correspondant à des excitations collectives, émerge naturellement lorsque l'on traite de systèmes présentant des excitations de faibles énergies et grandes longueurs d'onde : c'est le cas de la théorie des liquides de Luttinger [71, 72], la théorie de Bogoliubov pour les condensats de Bose-Einstein [65] ou pour les quasi-condensats de Bose-Einstein (qBEC) [48] sont des théories qui rendent compte de ces oscillations collectives. Pour un gaz de LL, cette description en termes de phonons a été utilisée pour analyser la dynamique à temps court induite par des expériences de variation rapide du paramètre d'interaction 1D [73] ou par une variation rapide de la forme du potentiel longitudinal [74].

Cependant, les phonons ne sont pas les véritables états propres du système. Ainsi, la durée de vie des phonons est finie [75, 76, 77] et la distribution des phonons n'est pas conservée au cours du temps. Si le système considéré est chaotique, la distribution doit relaxer vers un équilibre thermique. Dans notre cas, le système considéré étant intégrable, l'état relaxé est caractérisé par tout ensemble piqué autour de la distribution de rapidités.

En utilisant la correspondance entre les états propres exacts de l'hamiltonien de LL et ceux d'un gaz de fermions libres sans spin, ainsi qu'en développant des techniques de bosonisation [78], nous avons cherché à caractériser complètement l'état relaxé du gaz. Nous avons notamment obtenu la population des phonons associée.

Ma contribution au sein de ce projet a été de caractériser numériquement l'état relaxé d'un système initialement préparé dans des conditions spécifiques, une étude qui est détaillée dans la Section 3.1.4.

3.1.1 Représentation du système en termes de fermions

On s'intéresse à un système homogène de taille L avec N particules : on note $n_0 = N/L$. Dans la suite, on prendra $m = \hbar = 1$. Le système étudié est caractérisé par l'Hamiltonien de LL où les états propres sont indicés par les rapidités $\{\theta_i\}_{i \in [1, N]}$. On introduit l'opérateur fluctuations de densité $\delta\hat{n}(x) = \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x) - n_0$ et l'opérateur densité de courant $\hat{J}(x) = (i/2)[(\partial_x\hat{\psi}^\dagger)\hat{\psi} - \hat{\psi}^\dagger\partial_x\hat{\psi}]$.

La notion de rapidités $\{\theta_i\}$ est directement reliée à la notion de nombres fermioniques $\{I_i\}$, comme introduit dans la Section 1.1.2.2. Excepté pour $\gamma \rightarrow \infty$, il est important de noter que cette bijection ne conserve pas l'énergie, $E = 1/2 \sum_i \theta_i^2 \neq 1/2 \sum_i (I_i 2\pi/L)^2$. À l'état fondamental, $I_i \in \{-(N-1)/2, \dots, (N-1)/2\}$: il s'agit d'une mer de Fermi. Au-delà de l'état fondamental, il est naturel d'introduire les opérateurs créations / annihilations de fermions de Bethe $\hat{b}_{I_i}^\dagger / \hat{b}_{I_i}$ qui créent / enlèvent un fermion associé au nombre I_i . Les états de faibles énergies correspondent à une déformation des bords de la mer de Fermi : il est de fait pertinent de définir les opérateurs fermioniques droites (D) et gauches (G)

$$\hat{c}_{D,n}^\dagger = \hat{b}_{\frac{N}{2}+n}^\dagger \text{ et } \hat{c}_{G,n}^\dagger = \hat{b}_{-\frac{N}{2}-n}^\dagger. \quad (3.1)$$

À partir de l'état fondamental $|0\rangle$, on peut construire des états de faible énergie composés

d'excitations particules/trous tels que, par exemple

$$|\varphi\rangle = \prod_{i=1}^q \hat{c}_{D,n_i}^\dagger \hat{c}_{D,m_i} |0\rangle \quad (3.2)$$

avec $q \ll n_0$ et $|n_i|, |m_i| \ll N$. Cet état a pour énergie $E = \sum_{i=1}^q [e(n_i) - e(m_i)]$ avec les énergies $e(n)$ données par la relation de dispersion

$$e(n) = c \frac{2\pi n}{L} + \left(\frac{2\pi n}{L} \right)^2 \frac{1}{2m^*} + o\left(\frac{1}{L^3} \right), \quad (3.3)$$

avec $m^* = 1 + (n_0/c)\partial_{n_0}c$ la masse effective [79].

3.1.2 Représentation du système en termes de phonons

À faible température, il est aussi habituel de considérer les excitations de faibles énergies et de grandes longueurs d'ondes comme étant des phonons, des ondes sonores se déplaçant vers la gauche (G) ou la droite (D) du système. La densité de courant associée à ces phonons s'écrit

$$\hat{J}_{D/G}(x) = \frac{1}{2} \left(c\delta\hat{n}(x) \pm \hat{J}(x) \right) \quad (3.4)$$

et les modes de Fourier $\hat{a}_{D/G,n}^\dagger$ correspondant

$$\hat{J}_{D/G}(x) = \frac{c\sqrt{K}}{L} \sum_n \sqrt{n} \left(e^{-i\frac{2\pi nx}{L}} \hat{a}_{D/G,n}^\dagger + e^{i\frac{2\pi nx}{L}} \hat{a}_{D/G,n} \right), \quad (3.5)$$

où $K = \pi n_0/c$ est appelé paramètre de Luttinger. Il se trouve que les modes de Fourier se réécrivent en fonction des $\hat{c}_{D,\ell}^\dagger, \hat{c}_{D,\ell}$ tels que [80]

$$\hat{a}_{D,n}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_\ell \hat{c}_{D,n+\ell}^\dagger \hat{c}_{D,\ell}. \quad (3.6)$$

À partir des techniques de bosonisation, on montre que les $\hat{a}_{D,n}$ et $\hat{a}_{D,n}^\dagger$ satisfont les relations de commutations bosoniques, $[\hat{a}_{D,n}, \hat{a}_{D,n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$. De même, $[\hat{a}_{G,n}, \hat{a}_{G,n'}^\dagger] = \delta_{n,n'}$.

Pour des temps assez courts tels que les termes non-linéaires de la relation de dispersion des modes fermioniques sont négligées, l'Hamiltonien de LL peut se réécrire en fonction des opérateurs phononiques et prend la forme de l'Hamiltonien de liquide de Luttinger [81]

$$\hat{H} \simeq c \frac{2\pi}{L} \sum_n n \left(\hat{a}_{D,n}^\dagger \hat{a}_{D,n} + \hat{a}_{G,n}^\dagger \hat{a}_{G,n} \right). \quad (3.7)$$

Cette description permet de prédire les propriétés d'équilibre ainsi que la dynamique à temps court. Elle est par exemple en accord avec les dynamiques hors-équilibre à temps court obtenues expérimentalement : elle décrit la dynamique induite par le changement rapide de la force des interactions [73], l'effet de la modulation temporelle des forces d'interaction [82] ou

encore la dynamique suite au dédoublement d'un gaz 1D [83, 84]. Les états initiaux produits dans ces expériences sont des états gaussiens en termes d'opérateurs phononiques : ils peuvent complètement être caractérisés par les fonctions de corrélations à 1 et 2 points des courants associés aux phonons, elles-mêmes paramétrées par des fonctions $f_{D/G}(x)$ et $g_{D/G,D/G}(x, y)$,

$$\langle \hat{J}_{D/G}(x) \rangle_0 = c \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \partial_x f_{D/G}(x) \quad (3.8)$$

$$\langle \hat{J}_{D/G}(x) \hat{J}_{D/G}(y) \rangle_0^c = c^2 \frac{K}{(2\pi)^2} \partial_x \partial_y g_{D/G,D/G}(x, y), \quad (3.9)$$

où $\langle \hat{J}(x) \hat{J}(y) \rangle^c = \langle \hat{J}(x) \hat{J}(y) \rangle - \langle \hat{J}(x) \rangle \langle \hat{J}(y) \rangle$. Les fonctions de corrélations d'ordre supérieures sont déduites en utilisant le théorème de Wick.

3.1.3 Relaxation du système

Les modes phononiques ne sont pas les états propres exacts de l'Hamiltonien de LL, ils ne sont donc pas les bonnes quantités à étudier pour des dynamiques à temps longs. Pour des temps de dynamique $t > \hbar m^* (L/(2\pi))^2$, les termes quadratiques de la relation de dispersion Eq.(3.3) ne sont plus négligeables. Pour un système non-intégrable, on s'attendrait à ce que le système relaxe vers un équilibre thermique, quel que soit l'état initial, où la population des modes phononiques est donnée par une distribution de Bose-Einstein. Le système étant décrit par l'Hamiltonien de LL, le système est intégrable. Le phénomène de relaxation est toujours présent, mais l'état relaxé contient plus d'informations sur l'état initial. Comme déjà indiqué dans la Section 2.1.2, il est possible de décrire l'état relaxé par tout ensemble assez piqué autour de la distribution de rapidités, voir Section 2.1.2. Ici, on choisit une matrice densité gaussienne en terme des fermions de Bethe [85, 86]

$$\hat{\rho}_{\text{st}} \propto e^{\sum_n \lambda_n \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n} \quad (3.10)$$

avec $\langle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n \rangle$ les quantités conservées et λ_n les multiplicateurs de Lagrange tels que l'ensemble soit bien piqué autour de la distribution de rapidités. Pour un état initial de faible énergie, le calcul des $\langle \hat{b}_n^\dagger \hat{b}_n \rangle$ se réduit aux calculs des termes $\langle \hat{c}_{D/G,n}^\dagger \hat{c}_{D/G,n} \rangle$. Ces quantités peuvent être extraites en inversant l'Eq.(3.6) en utilisant les techniques de bosonisations [78].

Dans la suite, on ne se concentrera que sur les phonons se propageant sur la droite (D). La technique de bosonisation introduit le champ chiral

$$\hat{\varphi}_D(x) = -i \sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(e^{i \frac{2\pi n x}{L}} \hat{a}_{D,n} - e^{-i \frac{2\pi n x}{L}} \hat{a}_{D,n}^\dagger \right) \quad (3.11)$$

directement relié aux courants associés aux phonons puisque

$$\hat{J}_D(x) = c \frac{\sqrt{K}}{2\pi} \partial_x \hat{\varphi}_D(x). \quad (3.12)$$

Ce champ est aussi relié aux fonctions d'ondes fermioniques $\hat{c}_D^\dagger(x) = (1/\sqrt{L}) \sum_n \exp(-i2\pi xn/L) \hat{c}_{D,n}^\dagger$ via l'identité de bosonisation $\hat{c}_D^\dagger(x) =: 1/\sqrt{L} \exp(-i\hat{\varphi}_D(x)) : , : \dots$ correspondant à l'ordre normal [78]. On peut définir la fonction

$$G_D(x) = \frac{1}{L} \int dy \langle \hat{c}_D^\dagger \left(y + \frac{x}{2} \right) \hat{c}_D \left(y - \frac{x}{2} \right) \rangle \quad (3.13)$$

qui peut se réécrire en fonction de la population des modes fermioniques

$$G_D(x) = \frac{1}{L} \sum_n e^{-i\frac{2\pi nx}{L}} \langle \hat{c}_{D,n}^\dagger \hat{c}_{D,n} \rangle. \quad (3.14)$$

Cette quantité est ainsi indépendante du temps, elle peut être évaluée à l'instant initial. L'Eq.(3.12) permet d'obtenir à partir des Eq.(3.8) et (3.9) $\langle \hat{\varphi}_D(x) \rangle_0 = f_D(x)$ et $\langle \hat{\varphi}_D(x) \hat{\varphi}_D(y) \rangle_0^c = g_{DD}(x, y)$. Puisque l'état initial est gaussien en termes de phonons, le théorème de Wick peut être appliqué sur $\hat{\varphi}_D(x)$ ce qui permet d'obtenir

$$\langle \hat{c}_D^\dagger(x) \hat{c}_D(y) \rangle_0 = \frac{1}{L} e^{-i(f_D(x) - f_D(y))} e^{g_{DD}(x,y) - \frac{1}{2}g_{DD}^{\text{reg}}(x) - \frac{1}{2}g_{DD}^{\text{reg}}(y)} \quad (3.15)$$

avec $g_{DD}^{\text{reg}}(x) = \lim_{z \rightarrow x} [g_{DD}(x, z) + \log(2\pi(z-x)/(iL))]$. En injectant Eq.(3.15) dans Eq.(3.13) et en inversant Eq.(3.14) on peut en déduire la population des modes fermioniques. On utilise Eq.(3.6) et le théorème de Wick sur la matrice densité gaussienne Eq.(3.10) (les termes $\langle \hat{c}_{D,n}^\dagger \hat{c}_{D,n'} \rangle$ avec $n \neq n'$ sont supposés négligeables après relaxation). La population des modes phononiques ainsi que les corrélations des courants associés s'écrivent,

$$\text{Tr} \left(\hat{\rho}_{\text{st}} \hat{a}_{D,n}^\dagger \hat{a}_{D,n} \right) = \langle \hat{a}_{D,n}^\dagger \hat{a}_{D,n} \rangle_\infty = \frac{1}{n} \sum_m \langle \hat{c}_{D,m+n}^\dagger \hat{c}_{D,m+n} \rangle \left(1 - \langle \hat{c}_{D,m}^\dagger \hat{c}_{D,m} \rangle \right), \quad (3.16)$$

$$\langle \hat{J}_D(x) \hat{J}_D(y) \rangle_\infty = -Kc^2 G_D(x-y) G_D(y-x), \quad \langle \hat{J}_D(x) \rangle_\infty = 0. \quad (3.17)$$

Dans le cas d'un système initialement invariant par translation, $f_D(x) = 0$ et $g_{DD}(x, y) = g(x-y)$, $g_{DD}^{\text{reg}}(0) = 0$. Dans ce cas,

$$\langle \hat{J}_D(x) \hat{J}_D(y) \rangle_0 = -\frac{n_0 c}{4\pi} \partial_x^2 g(x-y), \quad (3.18)$$

$$\langle \hat{J}_D(x) \hat{J}_D(y) \rangle_\infty = \pi \frac{n_0 c}{L^2} e^{2g(x-y)}. \quad (3.19)$$

La population des phonons évolue en toute généralité, excepté si g vérifie l'équation différentielle $\partial_x^2 g = -(2\pi/L)^2 \exp(2g)$: dans ce cas, la distribution de population des phonons est thermique,

$$g(x-y) = -\log \left[\frac{2\beta c}{iL} \sinh \left(\frac{\pi}{\beta c} (x-y) \right) \right] \quad (3.20)$$

avec $\beta = 1/(k_B T)$.

3.1.4 Exemple pour un état initial particulier

On s'intéresse ici à l'étude d'un cas spécifique où la situation initiale ne présente que des phonons thermiques se déplaçant vers la droite. En plus de cela, les phonons des modes k_0 sont déplacés tels que la matrice densité du système s'écrive $\hat{\rho} = \otimes_{k>0} \hat{\rho}_k$ avec

$$\hat{\rho}_k \propto e^{-\beta \hbar c k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k} \text{ si } k \neq k_0, \hat{\rho}_{k_0} \propto \hat{D}_{k_0}(\alpha) e^{-\beta \hbar c k_0 \hat{a}_{k_0}^\dagger \hat{a}_{k_0}} \hat{D}_{k_0}^\dagger(\alpha) \quad (3.21)$$

où $\hat{D}_{k_0}(\alpha) = \exp[i(\alpha \hat{a}_{k_0}^\dagger + \alpha \hat{a}_{k_0})]$ est l'opérateur déplacement. La population initiale des phonons s'écrit

$$\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle = \frac{1}{e^{\beta \hbar c k} - 1} + \delta_{k,k_0} |\alpha|^2 \text{ si } k > 0, 0 \text{ sinon,} \quad (3.22)$$

et avec $\beta = 1/(k_B T)$. Cet état correspond à avoir $f_D = A \cos(k_0 x)$ avec $A = \sqrt{2\pi/(Lk_0)} 2|\alpha|$ et g_{DD} donné par Eq.(3.20). Une illustration représentée sur la Fig.3.1 donne une idée du phénomène de relaxation attendu.

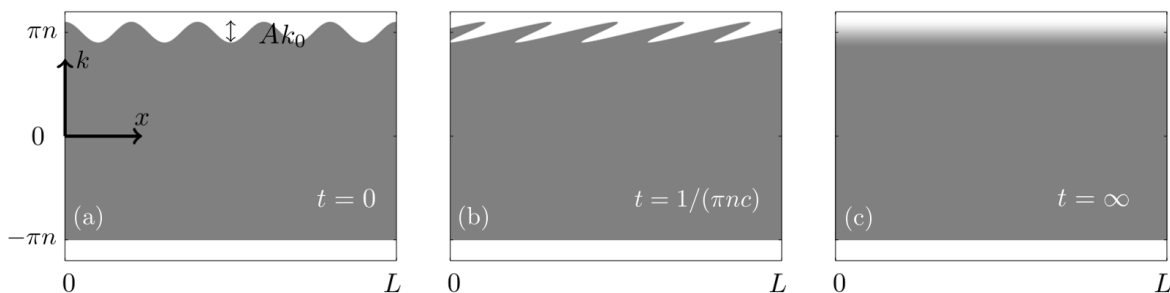


FIGURE 3.1 – Illustration de l'effet de la relaxation des phonons. Par souci de simplicité, le système considéré est dans le régime Tonks Girardeau, où la distribution de rapidités correspond à la distribution des modes fermioniques. À l'état fondamental, les fermions remplissent de façon homogène une région dans l'espace des phases représentée ici par une zone grise. Lorsque le nombre de phonons de mode k_0 déplacé est grand $A \gg 1$, cela revient à moduler en amplitude le bord supérieur de la distribution des rapidités (a). Pour $t > 0$, chaque point de l'espace des phases se déplace avec une vitesse $v_{\text{eff}}(x, k) = k$. Ainsi les modulations d'amplitude se déforment (b). Pour un temps de dynamique long, le système relaxe (c).

Dans ce cas particulier, la fonction G_D est obtenue par technique de bosonisation et s'écrit

$$G_D(x) = \frac{\pi}{\beta c \hbar} \frac{1}{\sinh\left(\frac{\pi x}{\beta c \hbar}\right)} J_0 \left[4|\alpha| \sqrt{\frac{2\pi}{Lk_0}} \sin\left(\frac{k_0}{2} x\right) \right] \quad (3.23)$$

avec J_0 la fonction de Bessel d'ordre 0. Les populations fermioniques $\langle \hat{c}_{D,n}^\dagger \hat{c}_{D,n} \rangle$, quantités conservées au cours du temps, peuvent être obtenues numériquement en utilisant Eq(3.13). De telles populations sont tracées sur la Fig.3.2(a)–(c) pour différentes valeurs de A . Pour de petits A on observe des plateaux sur la distribution de population des fermions qui sont directement reliés à la quantification des fermions. Lorsque A augmente, le nombre de plateaux augmente et le profil devient plus lisse jusqu'à obtenir la limite semi-classique où $\langle \hat{c}_{D,n}^\dagger \hat{c}_{D,n} \rangle = (1/\pi) \arccos(2\pi n/(ALk_0))$ [24]. Finalement, la population des modes phono-

niques après relaxation du système peut être déduite numériquement en utilisant l'Eq.(3.18) : les populations obtenues sont représentées sur la Fig.3.2(d)–(f). Le fait que la population des phonons ne corresponde pas à une distribution thermique symétrique vis-à-vis des phonons gauches et droites est une signature que l'état relaxé est non thermique. De plus, si on compare les populations avec celle correspondant à des phonons se propageant uniquement vers la droite et suivant une statistique de Bose-Einstein, on observe de légères différences. Des calculs exacts dans la limite du régime de Tonks-Girardeau ont été réalisés par Jérôme Dubail et sont en excellents accords avec les résultats numériques.

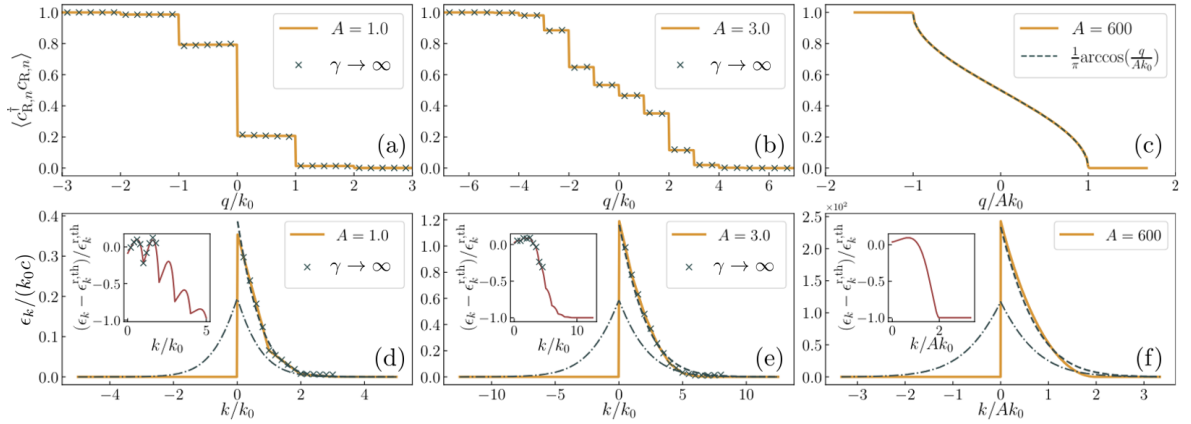


FIGURE 3.2 – Relaxations pour des situations initiales où un mode phononique k_0 est déplacé avec $f_D(x) = A \cos(k_0 x)$ pour différentes valeurs de A . Les figures (a) – (c) correspondent aux populations $\langle \hat{c}_{D,n}^\dagger \hat{c}_{D,n} \rangle$. Les figures (d) – (f) correspondent à l'énergie de chaque mode phononique $\epsilon_k = |k|c \langle \hat{a}_{D,n}^\dagger \hat{a}_{D,n} \rangle$ avec $k = 2\pi n/L$. Les courbes jaunes correspondent aux simulations numériques, les croix sont les résultats exacts dans la limite $\gamma \rightarrow \infty$. Les lignes semi-pointillées des figures (d) – (f) représentent les énergies attendues si le système avait relaxé dans un ensemble thermique. Les lignes pointillées sont les énergies $\epsilon_{D,k}^{\text{th}}$ attendues si le système avait relaxé dans un état où seuls les phonons droits suivent une statistique de Bose-Einstein. Les encarts présentent la différence $(\epsilon_k - \epsilon_{D,k}^{\text{th}})/\epsilon_{D,k}^{\text{th}}$.

Il est expérimentalement possible de produire de telles situations initiales. Par exemple, les atomes pourraient être placés pendant un temps τ dans un potentiel dynamique $V(x) = V_0 \cos(k_0 x - ckt)$ afin d'exciter seulement les phonons droits. Il serait alors possible d'avoir accès à la population des modes phononiques en mesurant les fluctuations de densités [43] $\delta \hat{n} = (1/c)(\hat{J}_D(x) + \hat{J}_G(x))$ et les fluctuations de phase proportionnelles au gradient du champ de vitesse, directement proportionnel au courant $\hat{J}(x) = \hat{J}_D(x) - \hat{J}_G(x)$ [87]. Pour sonder sélectivement les phonons droits, il faut sonder la dynamique, en utilisant par exemple des mesures dynamiques non destructives [88]. Une des perspectives suite à ces travaux recherche serait de mettre en place de tels protocoles expérimentaux.

En résumé

- Pour un système décrit par l'Hamiltonien de Lieb Liniger, une description en termes de phonons est pertinente pour étudier un état de basse énergie et à temps courts. Cependant, les modes phononiques ne sont pas les vrais états propres du système, la population des phonons n'est pas conservée en général.
- Pour un état initial gaussien en termes de phonons, il est possible de faire le lien entre la population des modes phononiques après relaxation avec les vraies quasi-particules à durée de vie infinie du système et en utilisant les techniques de bosonisation. L'état relaxé n'est pas gaussien en termes de phonons en général.
- Pour un système particulier initialement constitué de phonons thermiques se déplaçant vers la droite avec un mode k_0 déplacé, l'état relaxé n'est pas thermique.

3.2 Équation de Schrödinger Non Linéaire et distribution de rapidités

Le second projet théorique auquel j'ai participé avait pour objectif de faire le lien entre les quantités conservées du système quantique intégrable de LL avec celles du système classique correspondant. Ce projet a été mené en collaboration avec Isabelle Bouchoule et Yasser Bezzaz, stagiaire de M2 à l'époque.

Un système décrit par l'Hamiltonien de LL est un système dit intégrable, caractérisé par la distribution de rapidités, une quantité conservée au cours du temps [21]. Un cas asymptotique est le régime champ classique où le système est décrit par un champ complexe $\varphi(x)$ [48],

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g|\varphi|^2 \varphi. \quad (3.24)$$

avec le crochet de Poisson $\{\varphi(x), \varphi^*(x')\} = i/\hbar \delta(x - x')$ et $\{\varphi(x), \varphi(x')\} = 0$. On parle d'Équation de Schrödinger Non-Linéaire (NLSE) ou bien d'équation de Gross-Pitaevskii dépendante du temps.

La NLSE a permis de décrire des résultats expérimentaux dans le domaine des atomes froids [89] ou dans des expériences de propagation de la lumière dans des milieux non-linéaires [90, 91]. Ce système classique intégrable a été très largement étudié dans les années 1960 avec l'émergence d'outils mathématiques telle que la méthode de diffusion inverse [92]. Cette technique permet de construire un nombre infini de constantes du mouvement $\{\tau_\lambda\}$ qu'on appellera dans la suite constantes de diffusion inverse. Elles sont paramétrées par λ appelé paramètre spectral et homogène à une impulsion [93]. Le lien entre la distribution de rapidités et les $\{\tau_\lambda\}$ a déjà été mis en évidence, notamment en utilisant les techniques de diffusion inverse quantique (se basant entre autres sur la théorie de l'ansatz de Bethe) [94].

L'objectif de ce projet a été de retrouver de tels résultats avec une approche différente en utilisant un bagage mathématique réduit : l'idée est d'utiliser le fait que la distribution de rapidités peut être définie comme étant la distribution asymptotique des vitesses des particules du système après que ce dernier ait réalisé une expansion 1D. En effet, cette définition s'applique aussi à la limite champ classique : la notion d'expansion a du sens et la distribution de vitesse est directement reliée à la transformée de Fourier du champ φ . Les constantes de diffusions inverses τ_λ sont conservées au cours de la dynamique : elles peuvent être obtenues à tout temps pour un champ $\varphi(x, t)$ particulier. On peut en particulier choisir de les évaluer après l'expansion 1D. On a alors cherché à exprimer ces constantes en fonction du champ en impulsion $\psi(k) = \int_0^L dx \varphi(x) \exp(-ikx)/\sqrt{L}$ permettant de les relier à la distribution en impulsion $n(k) = L/(2\pi)|\psi(k)|^2$ qui n'est alors rien d'autre que la distribution de rapidités.

Pour arriver à faire le lien entre la distribution de rapidité et les constantes de diffusion inverse, deux méthodes ont été proposées [25] :

- La première méthode consiste à restreindre l'expansion dans une boîte de taille L beaucoup plus grande que la taille initiale du nuage atomique, voir Fig.3.3(a). L'utilisation de l'approximation de Markov est un point clef de la démonstration. La mise

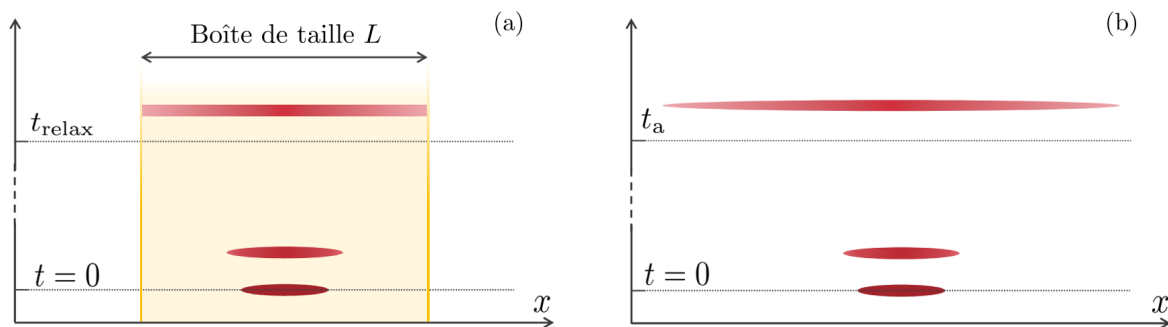


FIGURE 3.3 – Illustrations des deux protocoles permettant de faire le lien entre les constantes de diffusion inverse et la distribution de rapidités. (a) Le nuage de taille L_0 réalise une expansion 1D dans une boîte de taille $L \gg L_0$. Le système après relaxation $t > t_{\text{relax}}$ est alors étudié – (b) Dans une boîte de quantification $L \rightarrow \infty$, le même nuage atomique réalise une expansion 1D pendant un temps supérieur au temps asymptotique t_a où la distribution en impulsion a bien convergé vers la distribution de rapidités.

en équation de ce protocole a constitué le cœur du sujet de stage de master de Yasser Bessaz.

- La seconde méthode, celle sur laquelle j’ai travaillé, a consisté à étudier l’expansion dans l’espace libre dans une boîte de quantification $L \rightarrow \infty$, voir Fig.3.3(b). Les constantes τ_λ ont alors été obtenues avec une méthode similaire à celle permettant d’obtenir la formule de Landau-Zener [95].

La suite de cette partie détaille le second protocole illustré sur la Fig.3.3(b). Pour plus de simplicité, on pose dans la suite $m = \hbar = 1$.

3.2.1 Construction des constantes de diffusion inverse

La distribution de rapidités peut être reliée à la limite classique à des constantes construites à partir la méthode de diffusion inverse. L’équation non-linéaire NLSE correspond à la condition de compatibilité d’un problème de diffusion linéaire paramétré par λ dont les équations sont [96]

$$\begin{cases} \partial_x f(x, t) = U_\lambda(x, t)f(x, t), \\ \partial_t f(x, t) = V_\lambda(x, t)f(x, t), \end{cases} \quad (3.25)$$

avec f un vecteur colonne à deux composantes et U_λ, V_λ deux matrices 2×2 . Ces deux équations doivent être compatibles : $\partial_t \partial_x f(x, t) = \partial_x \partial_t f(x, t)$. Pour cela, les matrices U_λ et V_λ vérifient la relation

$$\partial_t U_\lambda - \partial_x V_\lambda + [U_\lambda, V_\lambda] = 0. \quad (3.26)$$

Ainsi, en définissant les matrices U_λ et V_λ comme

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} -i\frac{\lambda}{2} & \sqrt{g}\varphi^*(x, t) \\ \sqrt{g}\varphi(x, t) & i\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix} \text{ et } V_\lambda = \begin{pmatrix} ig|\varphi|^2 + \frac{i}{2}\lambda & -\sqrt{g}(i\partial_x \varphi^* + \lambda\varphi^*) \\ \sqrt{g}(i\partial_x \varphi - \lambda\varphi) & -(ig|\varphi|^2 + \frac{i}{2}\lambda) \end{pmatrix}, \quad (3.27)$$

le champ φ vérifie bien l’équation NLSE.

3.2. ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE ET DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS

Soit un champ $\varphi(x, t)$ solutions des équations NLSE Eq.(3.24) avec des conditions périodiques $\varphi(L/2) = \varphi(-L/2)$. Pour construire les constantes de diffusion inverse $\{\tau_\lambda\}$, on utilise la méthode de diffusion inverse et on introduit la matrice $T_\lambda(x, t)$, qui vérifie $T(-L/2) = \mathbb{I}_2$ et qui est solution de l'équation

$$\partial_x T_\lambda(x, t) = U_\lambda(x, t) T_\lambda(x, t) \quad (3.28)$$

La matrice $T_\lambda(L/2)$ est appelée matrice de monodromie. Comme φ est solution de l'équation NLSE, on peut montrer grâce à l'équation de comptabilité Eq.(3.26) que la trace de la matrice de monodromie est une constante du temps qui n'est rien d'autre que la constante de diffusion inverse [92, 94],

$$\tau_\lambda = \text{Tr} (T_\lambda(L/2)). \quad (3.29)$$

En utilisant Eq.(3.28), l'idée est de calculer la matrice de monodromie en fonction du champ avec $t \rightarrow \infty$ pour faire le lien entre les τ_λ et la distribution de rapidités.

3.2.2 Lien avec la distribution de rapidités

On considère un temps d'expansion très long : d'une part la distribution d'impulsion du système a convergé vers la distribution de rapidités $L|\psi_\infty(k)|^2/(2\pi) \simeq \Pi(k)$ (quantité extensive) à partir du temps t_a , d'autre part le temps d'expansion considéré est $t \gg t_a$ tel que la taille du système soit très grande devant celle à t_a . Entre le temps t_a et le temps t , les interactions entre particules sont négligeables, l'évolution est libre,

$$\varphi(x, t) \simeq_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_k \psi_\infty(k) e^{-i\frac{tk^2}{2}} e^{ikx} = \frac{\sqrt{L}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \psi_\infty(k) e^{i(\frac{t}{2}k^2 - kx)} \quad (3.30)$$

Comme $L \rightarrow \infty$, la somme peut être remplacée par une intégrale. Pour des grands temps d'expansion, la phase

$$\theta(k) = \frac{t}{2}k^2 - kx = \frac{x^2}{2t} - \frac{t}{2} \left(k - \frac{x}{t} \right)^2 \quad (3.31)$$

oscille rapidement devant $\psi_\infty(k)$. On fait alors une approximation de phase stationnaire en supposant que la principale contribution de ψ_∞ corresponde à $\psi_\infty(k^*)$ avec $k^* = x/t$ qui minimise $\theta(k)$ de l'Eq.(3.31). En intégrant le terme de phase, on obtient,

$$\varphi(x, t) \simeq \sqrt{\frac{L}{2\pi t}} e^{i\frac{x^2}{2t}} \psi_\infty \left(\frac{x}{t} \right). \quad (3.32)$$

On pourrait évaluer la trace de la matrice de monodromie à tout temps puisqu'elle est constante. On décide de calculer la matrice de monodromie à temps asymptotique $t \rightarrow \infty$ puisque la norme de la fonction d'onde est directement reliée à la distribution de rapidité. Comme $L \rightarrow \infty$, $T_\lambda(-\infty) = \mathbb{I}_2$ et $\tau_\lambda = \text{Tr} [T_\lambda(\infty)]$. La matrice de monodromie s'obtient en

résolvant Eq.3.28. Ici, on décide de changer de représentation en introduisant les opérateurs

$$T_0(x) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{x^2}{4t}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{x^2}{4t}} \end{pmatrix} = e^{-i\frac{x^2}{4t}\hat{\sigma}_z} \text{ et } \bar{T}_\lambda(x) = T_0(x)T_\lambda. \quad (3.33)$$

L'équation différentielle Eq.3.28 se réécrit $i\partial_x\bar{T}_\lambda = i\bar{U}_\lambda\bar{T}_\lambda$ avec

$$i\bar{U}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - \frac{x}{t}) & i\sqrt{\frac{gL}{2\pi t}}\psi^*(\frac{x}{t}) \\ i\sqrt{\frac{gL}{2\pi t}}\psi(\frac{x}{t}) & -\frac{1}{2}(\lambda - \frac{x}{t}) \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

La matrice $i\bar{U}_\lambda$, bien qu'elle soit non hermitienne, est similaire à l'Hamiltonien de Landau-Zener [97, 98]. L'Hamiltonien de Landau Zener correspond à un système à deux niveaux dépendant du temps τ

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} E_1(\tau) & H_{12} \\ H_{12}^* & E_2(\tau) \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

avec $\Delta E = E_2(\tau) - E_1(\tau) = \alpha(\tau - \tau_0)$ et H_{12} constant. L'objectif en étudiant ce système était initialement de comprendre la physique en présence de croisement de niveaux comme représenté sur la Fig.3.4. La probabilité qu'un état initialement de plus basse énergie passe dans l'état de plus haute énergie après le croisement (transition adiabatique) est donnée par la formule de Landau-Zener $P_d = \exp(-2\pi\Gamma)$ avec $\Gamma = -|H_{12}|^2/\alpha$ [95].

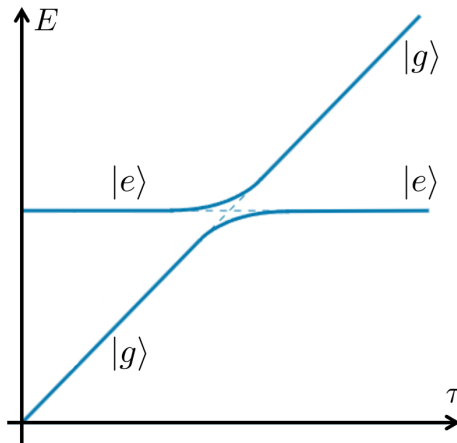


FIGURE 3.4 – Exemple des niveaux d'énergies propres du système en fonction du temps pour le modèle de Landau-Zener. En absence de terme de couplage, on observe un croisement des énergies propres (lignes pointillées). En présence de terme de couplage, le croisement est évité (lignes solides). La formule de Landau-Zerner correspond à la probabilité pour un état initialement dans l'état $|g\rangle$ d'être dans l'état $|g\rangle$ pour $t \rightarrow \infty$.

Un état $|\psi\rangle$ du système est solution de l'équation $i\partial_\tau|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$. Le temps τ est équivalent à la position x de notre problème de diffusion inverse, avec un croisement obtenu pour $x = \lambda t$, voir Eq.(3.34). Les méthodes de calculs permettant d'obtenir la formule de Landau-Zener ont été utilisées pour calculer la matrice de monodromie. Par simplicité, nous avons suivi la

3.2. ÉQUATION DE SCHRÖDINGER NON LINÉAIRE ET DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS

procédure détaillée dans [95].

Pour les calculs suivants, on change de représentation en posant $\tilde{T}_0 = e^{-(i/2)x\lambda\hat{\sigma}_z}$ et $\tilde{T}_\lambda = \tilde{T}_0^{-1}T_\lambda$. Les coefficients de la première colonne de \tilde{T}_λ sont notés a_1 et a_2 avec $a_1(-\infty) = 1$ et $a_2(-\infty) = 0$. On souhaite obtenir $a_1(\infty) = a_1^\infty$. En utilisant Eq.(3.34), ces coefficients vérifient les équations différentielles

$$\begin{cases} \partial_v a_1(v) = \sqrt{\frac{gL}{2\pi t}} e^{i[\lambda tv - \frac{v^2 t}{2}]} \varphi^*(v) a_2(v) \\ \partial_v a_2(v) = \sqrt{\frac{gL}{2\pi t}} e^{-i[\lambda tv - \frac{v^2 t}{2}]} \varphi(v) a_1(v) \end{cases} \quad (3.36)$$

avec $v = x/t$. Dans la suite, on écrit $\partial_v a_1 = \dot{a}_1$. Ces équations peuvent être découplées,

$$\ddot{a}_1 = t \left[i(\lambda - u) + \frac{1}{t} \frac{\varphi^*(u)'}{\varphi^*(u)} \right] \dot{a}_1 + t \frac{gL}{2\pi} |\varphi(v)|^2 a_1 \quad (3.37)$$

où $\varphi' = d\varphi/dv$. En divisant Eq(3.37) par $a_1 \times t(\lambda - v)$ et en intégrant le tout selon v ,

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ddot{a}_1}{a_1} \frac{dv}{t(\lambda - v)}}_{(1)} = i \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{a}_1}{a_1} dv}_{(2)} + \underbrace{\frac{gL}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(v)|^2 \frac{dv}{\lambda - v}}_{(3)} + \underbrace{\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{a}_1 \varphi^*(v)'}{a_1 \varphi^*(v)} \frac{dv}{\lambda - v}}_{(4)}. \quad (3.38)$$

Le terme (4) est négligé puisqu'il varie en $1/t$. Le terme (2) peut se récrire $i \int da_1/a_1$: comme $a_1(-\infty) = 1$, l'intégrale est égale à $i \ln(a_1^\infty)$. Finalement, en reprenant le développement de [95] les termes (1) et (3) sont calculés par analyse complexe en approchant l'axe réel par le bas dans le plan complexe. Pour le terme de gauche, on suppose que la fonction \ddot{a}_1/a_1 peut être prolongée dans le plan complexe, qu'elle n'a pas de pôles dans le plan complexe et tend vers 0 lorsque $|v| \rightarrow \infty$. En appliquant le théorème des résidus, ce terme est négligeable. Finalement, en utilisant le théorème de Sokhotski-Plemelj, on obtient

$$\ln(a_1^\infty) = g\pi\Pi(\lambda) - i g v.p. \left(\int dk \frac{\Pi(k)}{k - \lambda} \right) \quad (3.39)$$

avec v.p. la valeur principale de Cauchy. En prenant l'exponentielle d'Eq.(3.39) et en multipliant par $e^{-i\lambda L/2}$ pour repasser en représentation normale, on obtient le coefficient en haut à gauche de la matrice de monodromie. La constante de diffusion inverse τ_λ correspond à la trace de cette matrice. En utilisant le fait que les coefficients diagonaux de la matrice de monodromie sont conjugués, la constante de diffusion inverse s'écrit (en ajoutant les constantes m et \hbar)

$$\tau_\lambda = 2e^{\pi\Pi(\lambda)g\frac{m}{\hbar}} \cos \left[\frac{\lambda L}{2\hbar} + \frac{mg}{\hbar} v.p. \left(\int dk \frac{\Pi(k)}{k - \lambda} \right) \right]. \quad (3.40)$$

Il s'agit du résultat principal puisque le lien est directement fait entre un τ_λ et la distribution de rapidité extensive $\Pi(\lambda)$. Si les calculs d'intégrales avaient été faits en approchant dans le plan complexe l'axe réel par le haut, on aurait obtenu un coefficient $|a_1^\infty|^2 < 1$, ce qui est incompatible avec le fait que $\det(\tilde{T}_\lambda) = 1$ [93].

On voit que les τ_λ oscillent rapidement devant λ . Ces oscillations disparaissent si on considère la quantité moyennée à gros grains $\langle \tau_\lambda^2 \rangle_{g.g.}$, avec les cellules choisies de taille grande devant $1/L$, puisque

$$\langle \tau_\lambda^2 \rangle_{g.g.} = e^{2\pi\Pi(\lambda)g\frac{m}{\hbar}}. \quad (3.41)$$

Cette quantité ne dépend plus de la taille de la boîte de quantification considérée. Ce résultat est intéressant puisque, connaissant la forme du champ classique à un instant donné, la méthode de diffusion inverse permet de construire les constantes τ_λ : à partir d'Eq(3.41) l'obtention de la distribution de rapidité est alors directe.

En résumé

- La limite champ classique du gaz de [Lieb Liniger](#) correspond à l'[Équation de Schrödinger Non-Linéaire](#). Dans ce cadre, la théorie de diffusion inverse permet de construire un ensemble de quantités conservées.
- Une méthode permettant de faire le lien entre la distribution de rapidité et les quantités conservées issues de la théorie de diffusion inverse est d'utiliser la définition de la distribution de rapidités comme distribution en impulsion asymptotique des atomes après une expansion 1D. On retrouve alors un résultat connu.

———— DEUXIÈME PARTIE ————

EXPÉRIENCE DE PUCE ATOMIQUE

PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIENCE

Sommaire

4.1 Dispositif expérimental	64
4.1.1 La puce atomique	64
4.1.2 Contrôleur et séquenceur	65
4.1.3 Présentation des différentes étapes pour la production d'un gaz de Bose 1D	66
4.1.4 Système lasers	69
4.2 Piégeage dans le guide modulé	70
4.2.1 Principe de piégeage magnétique par un fil	70
4.2.2 Piégeage transverse	72
4.2.3 Piégeage longitudinal	73
4.3 Stabilité de l'expérience	81
4.3.1 Sensibilité aux bruits magnétiques extérieurs	81
4.3.2 Régime permanent	82
4.3.3 Détérioration de la puce	83

Pour produire expérimentalement des gaz de bosons unidimensionnels (1D), les degrés de libertés transverses du système doivent être gelés. Pour cela, tous les atomes doivent être placés transversalement dans l'état de plus basse énergie. Dans le cas particulier où le gaz est piégé transversalement dans un potentiel harmonique de pulsation $\omega_{\perp} = \omega_y = \omega_z$, il faut alors que la température T et le potentiel chimique μ du système soient tels que $k_B T, \mu \ll \hbar \omega_{\perp}$. Dans notre expérience, le régime 1D est atteint en produisant des pièges magnétiques par des courants traversants des fils déposés sur une puce atomique, ce qui permet d'obtenir des confinements transverses très forts.

Ce chapitre introduit le dispositif expérimental permettant de produire des gaz de bosons unidimensionnels. La première partie détaille de façon générale le fonctionnement de l'expé-

rience. La deuxième partie se concentre plus particulièrement sur le piège magnétique utilisé pour atteindre le régime 1D. Enfin, une discussion sur la stabilité de l'expérience est détaillée.

4.1 Présentation du dispositif expérimental

Cette partie introduit succinctement les principaux outils utilisés afin de préparer un nuage atomique dans le régime de [quasi-condensat de Bose Einstein \(qBEC\)](#) introduit dans la [Section 1.2.3](#).

4.1.1 La puce atomique

Dans notre expérience, les atomes sont piégés grâce à une puce atomique. Les puces atomiques ont été développées dans les années 90 avec comme idée de pouvoir intégrer des systèmes compacts et miniaturisés dans des expériences d'étude d'ondes de matière [99]. Il s'agit d'un circuit électronique imprimé sur une surface plane. Il est composé de micro-fils traversés par des courants afin de produire des champs magnétiques pour piéger les atomes [99, 100]. Après avoir réalisé les premières puces atomiques avec des fils aux géométries particulières [101, 102], les premiers condensats sur puce ont été obtenus en 2001 [103, 104] et deux ans après au [Laboratoire Charles Fabry \(LCF\)](#) [105].

En raison de sa capacité à produire des potentiels très confinant, la puce atomique est particulièrement bien adaptée à la préparation de systèmes unidimensionnels et plus particulièrement dans notre cas à la préparation de gaz de bosons unidimensionnels avec interactions de contact répulsives [106, 107]. La puce atomique n'est pas le seul moyen de produire un tel système. Le piégeage optique est une autre technique utilisée pour produire des géométries similaires. Un réseau optique 2D peut être utilisé pour obtenir un réseau 2D de tubes longitudinaux [7, 108, 109, 110]. Du fait du grand nombre de pièges parallèles produits, ce système est adapté à l'étude de gaz 1D très peu denses, car la densité peut être moyennée sur tous les tubes. Néanmoins, le fait que les systèmes de puce ne produisent qu'un seul tube rend cette technique intéressante puisqu'elle donne la possibilité d'avoir accès expérimentalement aux fluctuations du système [10, 111].

La [Fig. 4.1\(a\)](#) est une photo d'une puce similaire à celle que j'ai utilisée au cours de ma thèse placée sur sa monture. La puce et sa monture sont placées dans une enceinte à vide, à 45° par rapport à l'axe optique d'imagerie, voir [Fig. 4.1\(b\)](#). La puce a été conçue en collaboration avec Sophie Bouchoule, Alan Durnez et Abdelmounaim Harouri au Centre de Nanosciences et de Nanotechnologies (C2N). Le schéma de la [Fig. 4.1\(c\)](#) détaille les différentes couches de la puce. Elle est composée d'un substrat de Carbure de Silicium sur lequel est déposé le circuit électrique lui-même recouvert d'une couche de résine benzocyclobutène (BCB). La puce étant utilisée comme miroir dans le système optique utilisé pour imager le nuage atomique, cette couche de résine est aplanie avec la répétition d'étapes d'enduction centrifuge, de polymérisation et d'attaque plasma. Finalement, la puce est recouverte d'une fine couche d'or ($\sim 200\text{nm}$) par évaporation afin de pouvoir réfléchir la lumière à 780nm. La puce est soudée à l'Indium

sur une monture en cuivre.

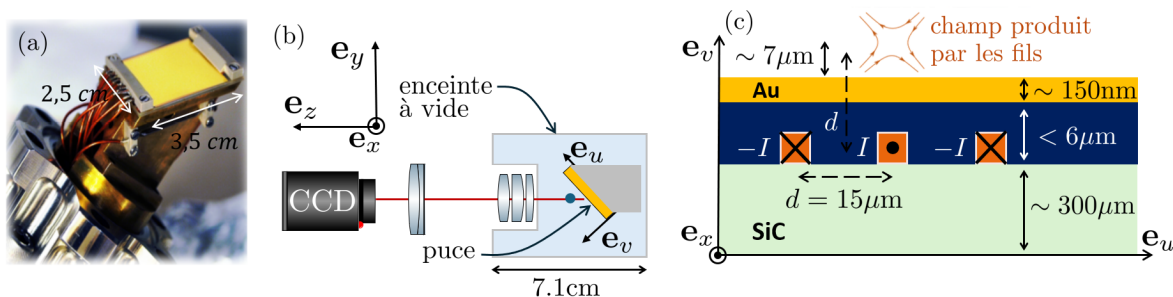


FIGURE 4.1 – (a) Photographie de la puce sur sa monture en cuivre, adaptée de [112] – (b) La puce et sa monture sont placées dans l’enceinte à vide. La puce est positionnée à 45° par rapport à l’axe du système optique d’imagerie. Le disque bleu correspond à la position des atomes piégés – (c) Schéma représentant les différentes couches qui constituent la puce atomique. La partie bleue correspond à la résine ajoutée par-dessus le circuit électrique.

Le circuit électrique, composé de fils de cuivre, est représenté sur la Fig.4.2(a). Les sorties en haut et en bas de la puce correspondent aux différentes connexions permettant d’alimenter les différents fils avec des courants. La Fig.4.2(b) est un zoom de la zone d’intérêt, c’est-à-dire de l’endroit où les atomes sont piégés par les potentiels magnétiques. On y voit plusieurs fils permettant de produire différents pièges intermédiaires afin de déplacer et de pré-refroidir les atomes. Le guide longitudinal permettant d’obtenir un gaz 1D est produit par 3 micro-fils colorés en jaune et parcourus par des courants $\pm I$ (il s’agit des fils schématisés sur la Fig.4.1(c)). Les atomes sont piégés à une distance $d = 15\mu\text{m}$ au-dessus des micro-fils, soit $8\mu\text{m}$ au-dessus de la puce. Il n’y a pas de différences majeures entre la puce atomique que j’ai utilisée au cours de ma thèse avec celle utilisée avant mon arrivée : la zone d’intérêt (Fig.4.2(b)) est identique, seule la position de quelques retours de fils a été modifiée pour être plus symétrique, pour minimiser la dissipation de chaleur et pour avoir le maximum de fils isolés les uns des autres, à comparer avec [113]¹.

4.1.2 Contrôleur et séquenceur

Pour automatiser l’expérience, des modules *National Instrument* produisant des signaux digitaux et analogiques permettent de contrôler les différents dispositifs électroniques. Un générateur de fonction [114] a été ajouté pour la production de signaux **Radio Fréquence (RF)** : ce signal passe dans le fil U et est utilisé dans le processus d’évaporation. Des atténuateurs **RF** ont été ajoutés pour limiter la puissance du signal produit.

Juste avant mon arrivée en thèse, le contrôle des modules *National Instrument* venaient d’être changé. Il se fait désormais avec les logiciels *Cicero* et *Atticus* développés au centre MIT pour atomes froids, par le laboratoire de Ketterle [115]. Il a été adapté par Isabelle Bouchoule à notre expérience : en plus d’inclure la programmation de la carte *National Instrument* génératrice de fonction dans *Cicero*, une surcouche logicielle (appelée *Spartacus*) a

1. Voir page 166

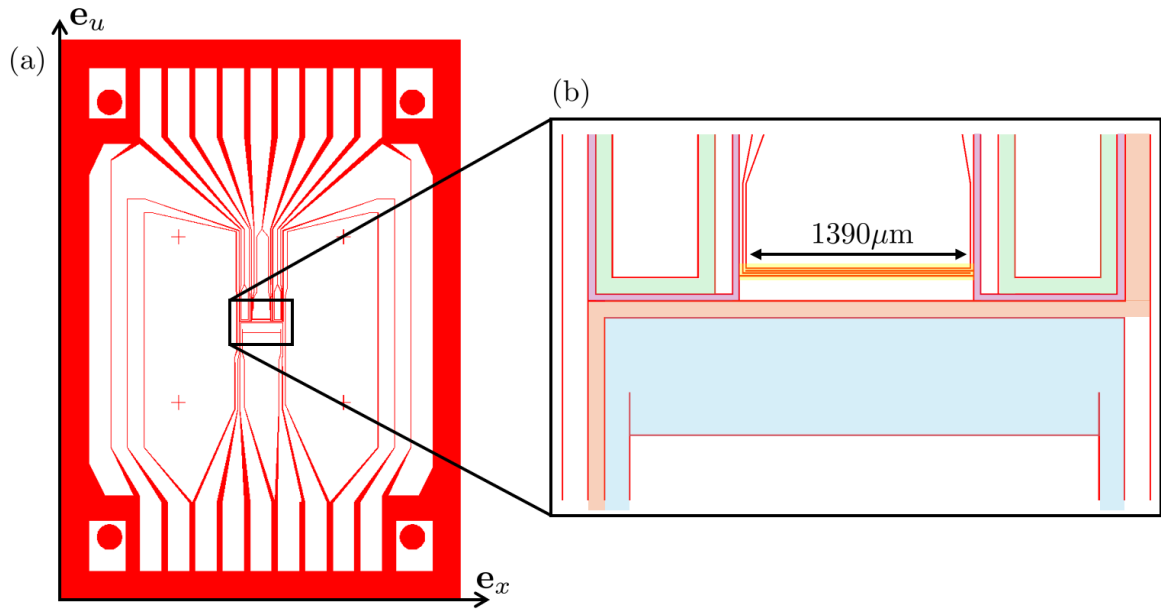


FIGURE 4.2 – (a) Schéma électrique des fils présents sur la puce – (b) Zoom sur la zone d'intérêt. Les fils bleu et orange (appelés respectivement fils U et Z) permettent la réalisation de pièges magnétiques intermédiaires. Les 3 micro-fils colorés en jaune permettent de produire le guide longitudinal. Les fils roses et verts (appelés respectivement fils d/d' et D/D') permettent de réaliser le confinement longitudinal.

été programmée pour le contrôle de *Cicero*, ce qui permet de lancer différents scripts. De plus, quelques modifications pratiques ont été apportées à *Cicero*.

4.1.3 Présentation des différentes étapes pour la production d'un gaz de Bose 1D

Les premiers mois de ma thèse ont consisté à remettre en marche l'expérience : j'ai notamment participé à l'optimisation des différentes étapes du cycle expérimental permettant de produire un gaz de Bose 1D. Cette partie liste les différentes étapes de cette séquence.

Un gaz de Rubidium est libéré par un dispositif appelé *dispenser* en anglais et qui permet de relâcher des atomes de Rubidium en présence de courant. Ce dispositif est placé directement dans l'enceinte à vide sur le côté de la monture de la puce. Le dispenser est traversé par un courant de 4.5A pendant 4.8s. Les atomes libérés sont ensuite piégés, ralentis et refroidis par un **Piège Magnéto-Optique (PMO)**, voir la Fig.4.3. Ce dernier est composé de 4 faisceaux lasers (dont deux réfléchis par la puce) ainsi que d'un quadrupôle magnétique produit par des bobines. Le gaz est à quelques mm de la puce.

Pour rapprocher les atomes de la puce, on passe d'un champ quadrupolaire produit par des bobines à un champ quadrupolaire produit par le fil U de la puce (fil bleu de la Fig.4.2) traversé par un courant variant de 3.6 à 1.5A. Le gaz est alors quelques centaines de μm de la puce.

Afin de refroidir les atomes piégés, **on forme une mélasse optique**, voir Fig.4.4(a).

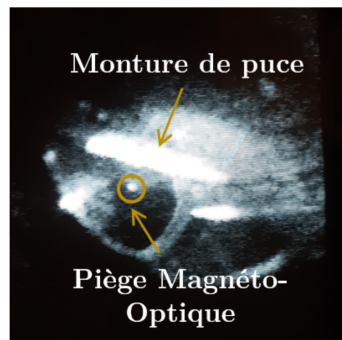


FIGURE 4.3 – Observation des photons diffusés par les atomes dans le PMO. Les photons sont collectés par une caméra placée en amont de l’enceinte à vide.

Un système d’imagerie provisoire est utilisé pour observer la mélasse : on souhaite obtenir l’image de gaz dont la taille est de l’ordre de quelques mm, ce qui n’est pas possible avec le système d’imagerie final dont le champ total est de l’ordre du mm. De plus, pour utiliser le système d’imagerie final correspondant à la Fig.4.1(b), il faut enlever une lentille escamotable ainsi qu’une lame séparatrice, ce qui prendrait trop de temps ici ($\sim 1s$). Le nuage atomique contient alors typiquement $\sim 6.10^6$ atomes à $\sim 10\mu K$.

Afin de placer un maximum d’atomes dans l’état $|F = 2, m_F = 2\rangle$, **une étape de pompage optique est réalisée** : les atomes sont illuminés par un faisceau polarisé circulairement σ^+ par rapport à l’axe de quantification (correspondant à la direction du champ magnétique) sur la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 2\rangle$, voir la Fig.4.6.

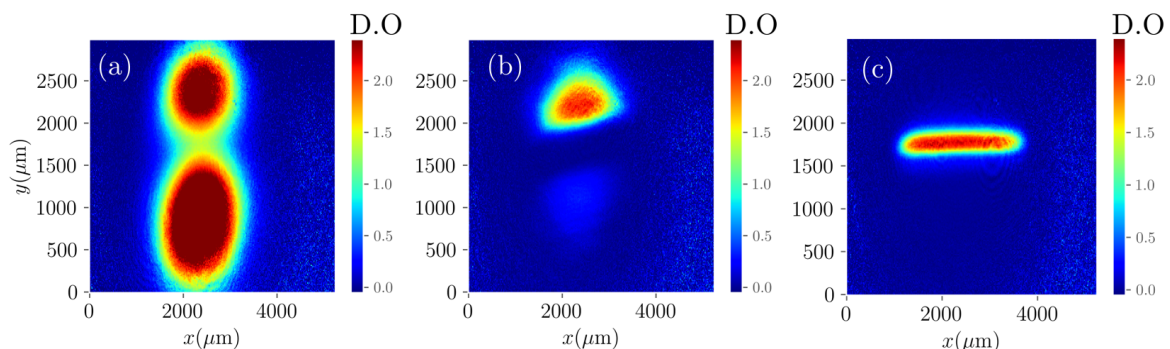


FIGURE 4.4 – Images 2D en Densité Optique (DO) de nuages atomiques à différents moments du cycle expérimental (a) Mélasse optique – (b) Atomes chargés dans le piège DC – (c) Gaz placé dans le piège DC comprimé. Les images sont prises avec un système d’imagerie provisoire.

Une fois les atomes placés dans l’état magnétique $m_F = 2$, on charge les atomes dans **un piège magnétique produit par des bobines et le fil Z** traversé par du courant continu (fil orange de la Fig.4.2(b)). Dans la suite, on parlera du piège magnétique DC. Un exemple de piège de chargement est représenté sur la Fig.4.4(b), avec $\simeq 5.10^6$ atomes. Une fois le chargement réalisé, le fil Z parcouru par un courant $I = 3A$ permet de confiner transversalement fortement les atomes afin d’augmenter la densité volumique, comme on le

voit sur la Fig.4.4(c) : une étape de refroidissement par évaporation **Radio Fréquence (RF)** est alors réalisée pendant $\simeq 2.3s$ [116]. Le gaz est à la fin de ce processus composé d'environ $\sim 2.5.10^5$ atomes à $\sim 1\mu K$. À partir de cette étape, les atomes sont imagés avec le système d'imagerie final représenté sur la Fig.4.1(b) : un exemple de tel gaz est représenté sur la Fig.4.5(a).

Une fois ce premier refroidissement réalisé, la position du minimum de potentiel est déplacée au niveau de la position du guide 1D. **Les atomes sont alors transférés du piège DC au guide 1D** produit par les 3 micro-fils parcourus par des courants alternatifs (fils jaunes de la Fig.4.2). Le champ magnétique transverse produit par des bobines externes et petit à petit coupé, les courants dans le fil Z diminuent progressivement et les courants dans les petits fils augmentent jusqu'à atteindre un courant d'environ 50mA. Pour optimiser ce transfert, on réalise pour tous ces courants 5 rampes linéaires successives de 50 à 60ms chacune. Enfin, on commence par mettre un courant de 0.5A dans les fils D et D' représentés en respectivement vert et bleu sur la Fig.4.2(b). Puis pendant les 5 rampes, ces courants sont modifiés afin de maintenir la position du centre de masse du gaz fixe. On obtient alors des gaz comportant autour de ~ 50000 atomes, voir par exemple la Fig.4.5(b).

Le chargement du guide 1D étant réalisé, **une dernière étape de refroidissement évaporatif** permet d'atteindre le régime 1D. Le nombre d'atomes est alors de $\sim 3000 \rightarrow 15000$ pour une température variant de $\sim 50 \rightarrow 200nK$. Un exemple de gaz 1D froid est représenté sur la Fig.4.5(c).

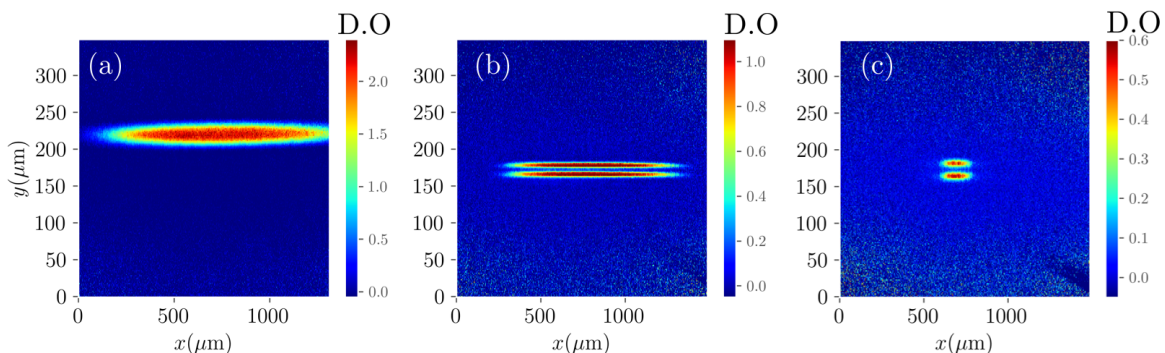


FIGURE 4.5 – Images 2D en **DO** de nuages atomiques dans différents pièges (a) Atomes dans le piège DC après refroidissement – (b) Atomes transférés du piège DC au piège AC – (c) Gaz 1D dans le piège AC obtenu après un processus de refroidissement par évaporation. Les images sont prises avec le système d'imagerie final.

Un cycle expérimental dure environ 15 secondes. Une description plus détaillée du cycle de préparation d'un nuage 1D peut être trouvée dans des thèses d'anciens doctorants et doctorantes ayant travaillé sur cette expérience (voir par exemple la thèse d'Aisling Johnson [117]).

Une nouvelle puce venait d'être installée dans l'enceinte à vide juste avant mon arrivée en thèse. Les premiers mois de ma thèse ont servis à remettre en marche l'expérience avec l'aide d'Isabelle Bouchoule. Chaque étape citée ci-dessus a été mise en place, programmée avec le

contrôleur puis optimisée.

4.1.4 Système lasers

Les différentes longueurs d'onde nécessaires pour l'expérience sont fournies par trois lasers, voir Fig.4.6 :

- Le laser maître1 est un laser à cavité étendue dont la conception a été faite au SYRTE [118]. Il est asservi en fréquence par spectroscopie par absorption saturée directement sur la transition atomique D2 du Rb, plus précisément sur le croisement entre les transitions $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$ et $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 3\rangle$ (ligne pointillée de la Fig.4.6). Il s'agit de la référence de fréquence pour les deux autres lasers ;
- Les atomes étudiés devant être dans l'état $|F = 2\rangle$, un repompeur est utilisé pour remplacer les atomes qui sont tombés dans l'état $|F = 1\rangle$ dans $|F = 2\rangle$. Ce faisceau doit être asservi à la fréquence correspondante à la transition $|5^2S_{1/2}, F = 1\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 2\rangle$: il doit y avoir un écart de fréquence de 6GHz par rapport à laser Maître1. Pour cela, une Diode à rétroaction répartie (DFB pour *Distributed FeedBack Diode* en anglais) est asservie en fréquence par rapport à la fréquence du laser maître1 : on récupère le battement en fréquence des deux lasers sur une photodiode rapide. Le signal de la photodiode est ensuite multiplié avec celui d'un oscillateur de référence à 6.6GHz : la composante basse fréquence est envoyée sur un compteur de fréquence. Pour avoir une puissance supérieure à 100mW, on utilise une diode Fabry Perot qui est injectée sur la DFB : il s'agit du faisceau repompeur ;
- Le laser maître2 est un laser à cavité étendu identique au laser maître1. De manière similaire que pour le repompeur, la fréquence de ce dernier est asservi en fréquence par battement obtenu avec le laser maître1. La plage d'asservissement de fréquence est de l'ordre de 120MHz autour de la transition $|5^2S_{1/2}, F = 2\rangle \rightarrow |5^2P_{3/2}, F' = 3\rangle$ (lignes rouges de la Fig.4.6). Le faisceau laser est amplifié par un amplificateur à semi-conducteur évasé (*Tapered Amplifier* en anglais) permettant d'obtenir une puissance de sortie $> 1W$. Ce faisceau est ensuite décomposé en plusieurs faisceaux contrôlés en intensité avec des cubes séparateurs de polarisation en aval de lames demi-onde et contrôlés en fréquence avec l'ajout de Modulateurs Acousto-Optiques. Tout cela permet de produire les faisceaux PMO, le pompage optique, l'imagerie par absorption et le faisceau de sélection.

De même que pour la partie précédente, une description plus détaillée des systèmes lasers peut être retrouvée dans les thèses des anciens doctorants ayant travaillé sur l'expérience (voir par exemple [117]).

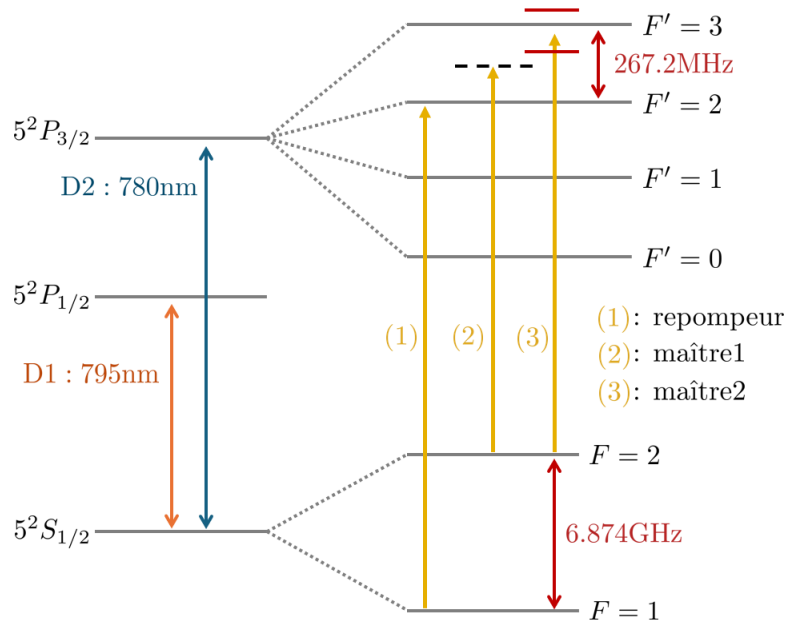


FIGURE 4.6 – Structure hyperfine (transitions D1 et D2) de l'atome de Rubidium ^{87}Rb . Les longueurs d'onde des différents lasers utilisés dans l'expérience sont représentés en jaune.

4.2 Piégeage dans le guide modulé

Pour les étapes préliminaires de refroidissement et de piégeage des atomes décrits dans la Section 4.1.3, il est possible de se référer aux thèses d'anciens doctorants ou doctorantes ayant travaillé sur l'expérience [105, 119, 112]. De plus, une revue expliquant le piégeage d'atomes froids par les puces atomiques peut aussi éclaircir certains points [120].

Cette partie se concentre sur la dernière étape de piégeage des atomes, c'est-à-dire la production du piège dans lequel les atomes atteignent le régime 1D. La compréhension de la manière dont est réalisé le guide longitudinal est importante ici car elle explique la faisabilité des protocoles utilisés dans les Chapitres 7, 8 et 9. Pour obtenir un gaz de bosons 1D, le potentiel de piégeage doit être très asymétrique. Par exemple, si le gaz est placé dans un potentiel longitudinalement et transversalement harmonique (de pulsations respectives $\omega_{\parallel} = \omega_x$ et $\omega_{\perp} = \omega_y = \omega_z$), il faut que $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$. Dans la suite, certains pièges étudiés seront longitudinalement quartiques, $V_{\parallel} = c_4 x^4$. Dans ce cas, il faut que les longueurs caractéristiques $l_{\parallel} = [\hbar/\sqrt{mc_4}]^{1/3}$ et $l_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ soient telles que $l_{\parallel} \gg l_{\perp}$. En plus de cela, les énergies caractéristiques des systèmes doivent être telles que $\mu, k_B T \ll \hbar\omega_{\perp}$. Les degrés de liberté transversalement sont alors gelés et la dynamique des atomes devient purement longitudinale [121].

4.2.1 Principe de piégeage magnétique par un fil

Considérons des atomes de Rubidium ^{87}Rb en présence d'un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. On suppose qu'ils sont placés dans le niveau Zeeman $|F, m_F\rangle$ où m_F correspond à la projection du

moment angulaire F sur l'axe de quantification choisi ici comme étant la direction du champ magnétique. Il y a couplage entre le champ magnétique et le moment dipolaire magnétique $\boldsymbol{\mu}$ des atomes. L'énergie d'interaction est donnée par l'expression

$$E(\mathbf{r}) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}) = g_F m_F \mu_B |\mathbf{B}(\mathbf{r})| \quad (4.1)$$

avec g_F le facteur de Landé et μ_B le magnéton de Bohr. Selon les signes de m_F et g_F , les atomes vont être attirés par un minimum ou un maximum du champ magnétique. Les équations de Maxwell interdisant la présence d'un maximum local de champ magnétique [122], on décide de placer les atomes dans l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$ pour lequel $g_F = 1/2$.

Si on considère un fil de longueur infinie traversé par un courant I , le champ produit à une distance r de ce dernier vaut

$$\mathbf{B}_I(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta, \quad (4.2)$$

avec \mathbf{e}_θ défini sur la Fig.4.7(a). Avec l'ajout d'un champ homogène $\mathbf{B}_\perp = B_\perp \mathbf{e}_y$, la norme du champ pour $\theta = \pi/2$ présente un minimum pour $y = \mu_0 I / (2\pi B_\perp)$, voir Fig.4.7(b). Comme le minimum est atteint pour une norme du champ nulle, la condition d'adiabacité

$$\left| \frac{d\mathbf{B}}{dt} \right| \frac{1}{|\mathbf{B}|} \ll \omega_L = \frac{\mu_B |\mathbf{B}|}{\hbar^2}, \quad (4.3)$$

n'est plus vérifiée entraînant des pertes de Majorana [123]. On ajoute alors un second champ magnétique homogène $\mathbf{B}_x = B_0 \mathbf{e}_x$ afin que le minimum de champ soit non nul, voir Fig.4.7(b). Ce principe de production de piège est utilisé dans une étape préliminaire de piégeage et de refroidissement avec le fil Z introduit par la Fig.4.2(b).

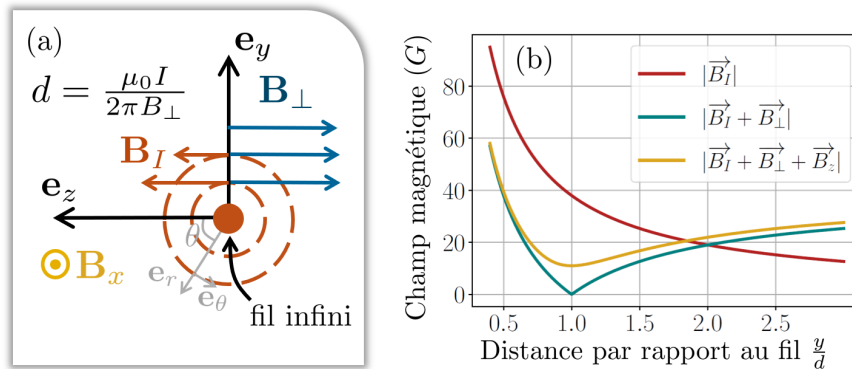


FIGURE 4.7 – (a) Représentation des différents champs magnétiques utilisés pour réaliser un piège magnétique – (b) Norme du champ magnétique total pour $z = 0$ avec différents champs utilisés.

4.2.2 Piégeage transverse

La production du piège transverse pour obtenir un gaz 1D est un peu différente puisque le piège est réalisé par 3 micro-fils présents sur la puce, voir Fig.4.2(c). On utilise toujours un champ magnétique homogène $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$, mais le champ homogène \mathbf{B}_\perp est supprimé. Le fil central est parcouru par un courant I . Les deux autres fils, parcourus par un courant de sens opposé $-I$ jouent un rôle similaire au champ transverse \mathbf{B}_\perp . On retrouve ainsi une situation similaire au cas d'un seul fil. Le champ magnétique produit par les fils s'écrit $B_u^\perp(u, v) \mathbf{e}_u + B_v^\perp(u, v) \mathbf{e}_v$ et le potentiel associé $V(u, v) = \mu_B \sqrt{B_0^2 + B_u^\perp(u, v)^2 + B_v^\perp(u, v)^2}$. Pour rappel, les axes \mathbf{e}_u et \mathbf{e}_v correspondent aux axes de la puce introduits sur la Fig.4.1(b) et (c). L'intérêt de ces pièges est que les atomes sont très proches des micro-fils (à une distance $d = 15 \mu\text{m}$ qui correspond à la distance entre deux fils), la fréquence de piégeage transverse s'écrit

$$f_\perp^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_B}{m B_0} \frac{\mu_0 I}{2\pi d^2}}. \quad (4.4)$$

La fréquence transverse est contrôlée expérimentalement par la valeur du champ B_0 et par le courant traversant les fils I . La valeur du champ B_0 ne peut pas être trop basse car nous sommes limités par la présence de bruit magnétique extérieur, comme expliqué dans la Section 4.3.1. Dans la suite, nous travaillons avec $B_0 = 3.36\text{G}$. De plus, les valeurs du courant I n'excèdent pas 1.5A du fait d'un trop fort chauffage par effet Joule. Finalement, les fréquences transverses accessibles les plus grandes sont de l'ordre de $\sim 100\text{kHz}$.

4.2.2.1 Problème de rugosité

Comme on peut le voir sur la Fig.4.8(a), les fils présentent de la rugosité à leur surface. Les lignes de courant ne sont alors plus totalement alignées par rapport à l'axe \mathbf{e}_x ce qui implique que le champ magnétique présente une composante selon cet axe $\delta B_x(x)$, voir Fig.4.8(b) par exemple [124, 125].

Pour s'affranchir de cet effet, les courants sont modulés $\pm I(t) = I \cos(\omega_M t)$ avec une pulsation $\omega_M = 2\pi \times 400\text{kHz}$ [126]. Le potentiel total s'écrit

$$V(u, v, x, t) = \mu_B \sqrt{(B_0 + \delta B_x(x) \cos(\omega_M t))^2 + (B_u^\perp(u, v) \cos(\omega_M t))^2 + (B_v^\perp(u, v) \cos(\omega_M t))^2}. \quad (4.5)$$

En faisant un développement limité par rapport à B_0 et en prenant la valeur moyenne du potentiel (qui est le potentiel réellement ressenti par les atomes), l'effet de rugosité des fils disparaît : en effet, la fréquence de modulation étant élevée, les atomes ne ressentent que le potentiel temporel moyen, avec en particulier $\langle \delta B_x(x, t) \rangle = 0$ puisqu'il s'agit d'une fonction périodique, voir les Fig.4.8(b) et (c). Le potentiel ressenti par les atomes s'écrit alors

$$\langle V(u, v) \rangle \simeq \mu_B B_0 \left(1 + \frac{\langle B_u^{\perp 2} \rangle + \langle B_v^{\perp 2} \rangle}{2B_0^2} \right). \quad (4.6)$$

À $15 \mu\text{m}$ au-dessus de la puce, le potentiel correspond localement à un piège harmonique

de fréquence transverse

$$f_{\perp} = \frac{f_{\perp}^{(0)}}{\sqrt{2}} \quad (4.7)$$

avec $f_{\perp}^{(0)}$ donnée par Eq.(4.4).

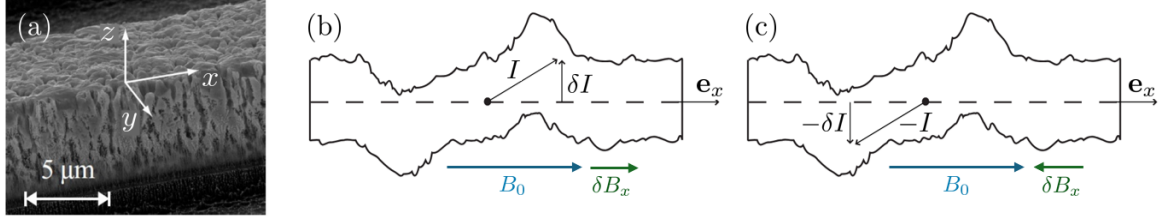


FIGURE 4.8 – (a) Image par microscopie électronique à balayage d’un micro-fil où les effets de rugosité et leur caractère aléatoire sont visibles. Image reprise de [112] – (b) et (c) Schémas illustrant le principe de modulation pour s’affranchir des effets de rugosité des micro-fils. Lorsque le courant est modulé, la composante du champ produit selon l’axe \mathbf{e}_x change de signe périodiquement, la valeur moyenne temporelle est donc nulle. Les figures (b) et (c) sont adaptées de [127]

4.2.2.2 Mesure de la fréquence transverse

Il est important de connaître précisément la valeur de la fréquence transverse du piège. En effet, le terme d’interactions effectives unidimensionnelles du modèle de Lieb Liniger, g , dépend de f_{\perp} .

Pour mesurer la fréquence transverse du piège, on prépare un gaz 1D dans le piège et on excite les modes transverse de respiration du nuage atomique. On s’attend à ce que les modes de respiration oscillent à une fréquence $f_e = 2f_{\perp}$ [128]. Pour cela, on module le courant $I_0(t) = I_0 \cos(2\pi f_a t)$ en amplitude avec une fréquence proche de f_e pendant quelques oscillations, voir Fig.4.9(a). Après différents temps d’attente t_{osc} , on mesure la taille transverse du nuage après un temps de vol $t_v = 8\text{ms}$ où les confinements longitudinaux et transverse sont coupés, voir Fig.4.9(b). On vérifie que les oscillations dipolaires ne sont pas excitées.

4.2.3 Piégeage longitudinal

Cette partie traite du confinement longitudinal des atomes. Ce dernier est réalisé par des champs magnétiques produits par 4 fils (appelés fils D , D' , d et d' sur la Fig.4.2(b)) traversés par les courants respectifs I_D , $I_{D'}$, I_d et $I_{d'}$ et placés d’une part et d’autres des trois micro-fils. Nous allons montrer dans un premier temps que les confinements transverse et longitudinaux sont découplés, une propriété très importante pour les expériences de cette thèse. Dans un second temps, nous présenterons la réalisation et la caractérisation des différentes géométries de potentiel utilisées dans cette thèse.

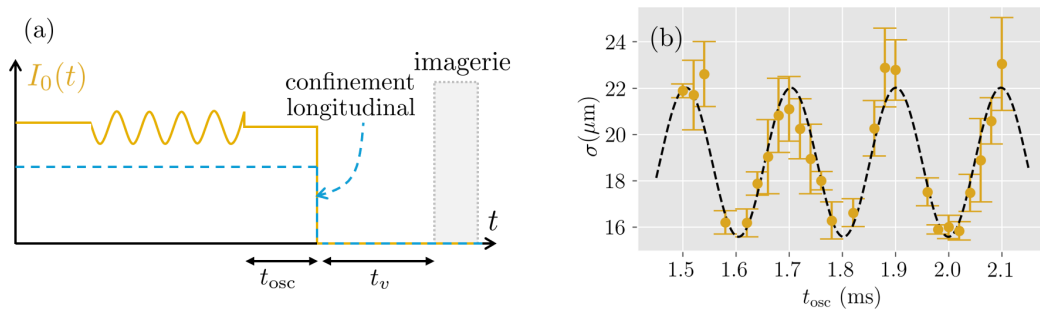


FIGURE 4.9 – (a) Schéma du protocole de mesure de fréquence transverse du piège. Le courant est modulé en amplitude, $I_0(t) = I_0 \cos(2\pi f_a t)$. Le gaz reste dans le piège pendant un temps t_{osc} puis les confinements longitudinaux et transverses sont coupés – (b) Mesures expérimentales de la taille transversale du nuage en fonction du temps d'attente t_{osc} dans le piège. Les données sont ajustées par une fonction cosinus avec $f_e = 5120 \pm 30\text{Hz}$, soit $f_{\perp} = f_e/2 = 2560 \pm 20\text{Hz}$.

4.2.3.1 Découplage des confinements transverses et longitudinaux

Un point très important pour le reste de cette thèse et qui va être justifié maintenant et le fait que le confinement transverse produit par les trois micro-fils est découplé du confinement longitudinal. En toute généralité, le champ magnétique produit par les 4 fils D, D', d, d' peut s'écrire

$$\mathbf{B}_{\parallel} = B_v^{\parallel}(v, x)\mathbf{e}_v + B_x^{\parallel}(v, x)\mathbf{e}_x, \quad (4.8)$$

la composante selon \mathbf{e}_u est nulle puisque le courant qui les parcourt est selon \mathbf{e}_u .

Pour rappel, le champ produit par les micro-fils s'écrit $\mathbf{B}_{\perp} = B_u^{\perp}(u, v) \cos(\omega_m t) \mathbf{e}_u + B_v^{\perp}(u, v) \cos(\omega_m t) \mathbf{e}_v$. En présence du champ homogène produit par les bobines $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_x$ et en supposant que $B_x^t = B_0 + B_x^{\parallel}$ est grand devant les autres composantes du champ magnétique total, le potentiel s'écrit

$$V = \mu_B B_x^t \left[1 + \frac{B_x^{\parallel}}{(B_x^t)^2} + \frac{1}{2(B_x^t)^2} \left(B_v^{\parallel} + B_v^{\perp} \cos(\omega_m t) \right)^2 + \frac{1}{2(B_x^t)^2} \left(B_u^{\perp} \cos(\omega_m t) \right)^2 \right]. \quad (4.9)$$

En prenant la valeur temporelle moyenne du potentiel, correspondant au potentiel effectif ressenti par les atomes au vu de la fréquence de modulation très élevée, on obtient

$$\langle V(u, v, x) \rangle = \mu_B B_x^t(v, x) \left[\underbrace{1}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{4} \left(\frac{\langle B_u^{\perp}(u, v) \rangle}{B_x^t(v, x)} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\langle B_v^{\perp}(u, v) \rangle}{B_x^t(v, x)} \right)^2}_{(2)} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{B_v^{\parallel}(v, x)}{B_x^t(v, x)} \right)^2}_{(3)} \right]. \quad (4.10)$$

Le champ magnétique homogène est choisi assez grand de telle sorte que $B_x^t(v, x) \simeq B_0$. Ainsi, le potentiel moyen peut être décomposé en 3 termes :

- Le premier terme (1) de l'Eq.(4.10) correspond au potentiel créé par le champ homogène de la bobine dans la limite où $B_x^t \simeq B_0$.

- Le terme (2) correspond au confinement transverse. Dans le cas où $B_x^t \simeq B_0$, ce terme ne dépend que des variables u et v . De plus, il ne fait pas intervenir les champs produits par les 4 fils.
- Le terme (3) correspond à la composante longitudinale et ne fait pas intervenir les champs produits par les micro-fils. La composante B_v^{\parallel} possède une dépendance en v qui peut affecter le confinement transverse, mais en réalité cette contribution est négligeable par rapport à celle issue du champ produit par les micro-fils.

En conclusion, du fait de la modulation des courants traversant les micro-fils, les contributions longitudinales et transverses du potentiel moyen sont indépendantes. Cette propriété est cruciale pour les expériences décrites dans les chapitres suivants, puisque l'on a souhaité modifier les propriétés des confinements longitudinaux sans modifier les propriétés du confinement transverses.

Ainsi, on peut réécrire le potentiel moyenné $\langle V \rangle = V_{\parallel}(x) + V_{\perp}(u, v)$ avec

$$V_{\parallel}(x) = \mu_B B_x^t \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B_v^{\parallel}}{B_x^t} \right)^2 \right] = \mu_B B_0 \left[1 + \frac{B_x^{\parallel}}{B_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{B_v^{\parallel}}{B_0} \right)^2 \right]. \quad (4.11)$$

4.2.3.2 Piégeage harmonique

La forme du potentiel longitudinal peut être estimée en utilisant Eq.(4.11) et en prenant en compte la disposition des fils sur la puce. Le piège localement harmonique est créé par les champs produits par les fils D et D' placés d'une part et d'autre des micro-fils, voir la Fig.4.10(a).

Commençons par évaluer la contribution au potentiel magnétique par le fil D , traversé par un courant I_D . Le champ produit s'écrit

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r} \mathbf{e}_{\theta} = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi L^2} \frac{1}{1 + 2\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 + \left(\frac{d}{L}\right)^2} (d\mathbf{e}_x - (L+x)\mathbf{e}_v) = B_x^D \mathbf{e}_x + B_v^D \mathbf{e}_v. \quad (4.12)$$

Parce que les atomes sont très proches de la puce ($d = 15\mu\text{m}$), la contribution du terme (d/L) est négligée. En faisant un développement limité à l'ordre 4, on obtient

$$B_x^D = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi L^2} d \left[1 - 2\frac{x}{L} + 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 4\left(\frac{x}{L}\right)^3 + 5\left(\frac{x}{L}\right)^4 + o\left(\frac{x}{L}\right)^4 \right] \quad (4.13)$$

et

$$B_v^D = -\frac{\mu_0 I_D}{2\pi L} \left[1 - \frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L}\right)^2 - \left(\frac{x}{L}\right)^3 + \left(\frac{x}{L}\right)^4 + o\left(\frac{x}{L}\right)^4 \right]. \quad (4.14)$$

Désormais, considérons la présence d'un second fil D' parcouru par un courant $I_{D'}$, Fig.4.10(b). On supposera dans la suite que $I_D = I_{D'} = I$ (utiliser deux courants différents permet juste de déplacer le minimum du champ magnétique). En raison des symétries du problème et en introduisant $B_v^{\parallel} = B_v^D + B_v^{D'}$, $B_x^{\parallel} = B_x^D + B_x^{D'}$, nous avons $B_v^{\parallel}(-x) = -B_v^{\parallel}(x)$

et $B_x^{\parallel}(-x) = B_x^{\parallel}(x)$. Ainsi

$$B_x^{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{\pi L^2} d \left[1 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right] \quad (4.15)$$

et

$$B_v^{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \left[\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right]. \quad (4.16)$$

En injectant Eq.(4.16) et Eq.(4.15) dans Eq.(4.11), on obtient à l'ordre 2

$$V_{\parallel}(x) = \underbrace{\mu_B B_0 + \frac{\mu_B \mu_0 I}{\pi L^2} d \left(1 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 \right)}_{\text{Contribution de } B_x^{\parallel}} + \underbrace{\frac{\mu_B}{2B_0} \left(\frac{\mu_0 I}{\pi L} \right)^2 \left(\frac{x}{L} \right)^2}_{\text{Contribution de } B_v^{\parallel}} = V_0 + \frac{1}{2} m \omega_{\parallel}^2 x^2 \quad (4.17)$$

avec

$$V_0 = \mu_B B_0 + \frac{\mu_B \mu_0 I}{\pi L^2} d \simeq \mu_B B_0 \quad (4.18)$$

car $B_0 \gg \mu_0 I d / (\pi L^2)$ avec les paramètres usuels et

$$\omega_{\parallel} = \underbrace{\sqrt{\frac{6d\mu_B\mu_0 I}{\pi L^4 m}}}_{\omega_{\parallel}^x} + \underbrace{\sqrt{\frac{\mu_B}{mB_0} \frac{\mu_0 I}{\pi L^2}}}_{\omega_{\parallel}^v}. \quad (4.19)$$

Pour des courants $I > 1\text{A}$, la contribution du terme B_x^{\parallel} dans l'expression de la pulsation longitudinale peut être négligée par rapport à la contribution de B_v^{\parallel} ($\omega_{\parallel}^v / \omega_{\parallel}^x > 5$). Dans ce cas

$$\omega_{\parallel} \simeq \sqrt{\frac{\mu_B}{mB_0} \frac{\mu_0 I}{\pi L^2}} \propto \frac{I}{\sqrt{B_0} L^2}. \quad (4.20)$$

Ainsi, au vu des dimensions caractéristiques de la puce et des fils, il est possible de réaliser des confinements de fréquences longitudinales $f_{\parallel} = \omega_{\parallel} / 2\pi$ allant jusqu'à $\sim 150\text{ Hz}$ pour des courants limités à $I_{\max} = 4\text{A}$ du fait d'un chauffage trop important.

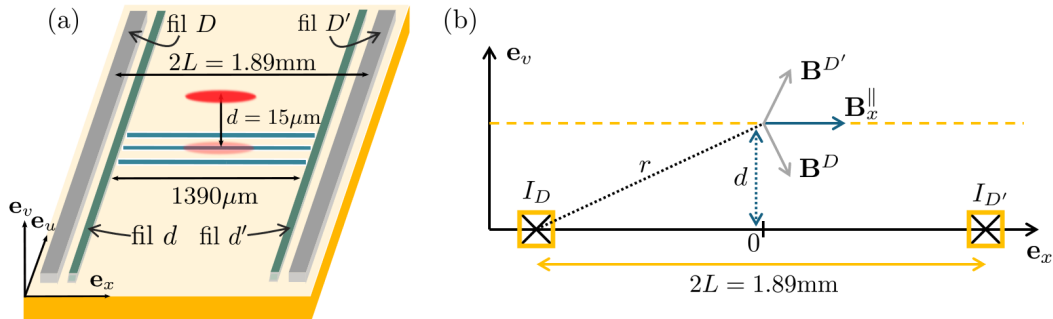


FIGURE 4.10 – (a) Schéma de la puce avec la représentation des trois micro-fils ainsi que des quatre fils D , D' , d et d' – (b) Coupe selon le plan $(0, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_v)$ avec la représentation des champs magnétiques produits en présence de courants traversant les fils D et D' .

Un calcul plus précis prenant en compte la géométrie exacte des fils (disposition sur la puce, épaisseur finie) se trouve en appendice de la thèse de Thibault Jacqmin [112]².

4.2.3.3 Champ magnétique résiduel

Depuis quelques années, il se trouve qu'un champ magnétique résiduel est présent, rendant les calculs menés dans la Section 4.2.3.2 ou dans [112] imprécis. Ce champ résiduel est de source inconnue, mais nous pensons qu'il pourrait être produit par des éléments magnétiques à l'intérieur du blindage magnétique, ou bien du blindage magnétique lui-même qui pourrait s'être magnétisé avec les années.

Un protocole simple de mise en évidence de la présence de ce champ magnétique résiduel consiste à placer les atomes dans un potentiel localement harmonique comme décrit dans la Section 4.2.3.2. Dans le cas où les courants dans les fils D et D' sont égaux et en absence de champ externe, la position du centre du nuage atomique ne devrait pas dépendre des valeurs de ces courants. Or, comme on peut le voir sur la Fig. 4.11, la position du centre dans notre cas est bien dépendante $I_D = I_{D'} = I$.

Pour essayer de caractériser ce champ, on peut faire l'hypothèse que ce dernier est homogène et dirigé selon la direction \mathbf{e}_v . Ainsi la composante totale du champ dans cette direction s'écrit $B_v = B_v^{\parallel} + B_v^0$ avec B_v^{\parallel} donnée par Eq.(4.16) et B_v^0 la composante résiduelle. La contribution de B_v au potentiel s'écrit alors

$$V_{\parallel}^v(x) = \frac{\mu_B}{2B_0} \left[(B_v^0)^2 + \left(\frac{\mu_0 I_D x}{\pi L L} \right)^2 + 2B_v^0 \frac{\mu_0 I_D x}{\pi L L} \right], \quad (4.21)$$

avec un minimum de potentiel se trouvant en position

$$x_0 = -\pi B_v^0 L^2 \frac{1}{\mu_0 I_D}, \quad (4.22)$$

qui dépend désormais bien du courant I_D . À partir de cette équation, il est possible d'extraire expérimentalement une valeur du champ magnétique résiduel : $B_v^0 = 68\text{mG}$, voir Fig. 4.11.

4.2.3.4 Mesure de la fréquence longitudinale

Pour mesurer la fréquence longitudinale du puits de potentiel supposé localement harmonique, le protocole suivant a été réalisé : un gaz d'atomes est initialement à l'équilibre, piégé par le potentiel magnétique avec $I_D = I_{D'} = I_0$. Le courant $I_{D'}$ est modifié de façon linéaire pendant un temps $\Delta t \sim 1/f_{\parallel}$ jusqu'à la valeur I_1 afin de déplacer le nuage. Puis le courant traversant le fil D' revient brusquement en un temps $t < 10\mu\text{s}$ à sa valeur d'origine I_0 afin que le centre de masse du nuage atomique se mette à osciller dans le piège à la fréquence f_{\parallel} , Fig. 4.12.

2. Voir page 151

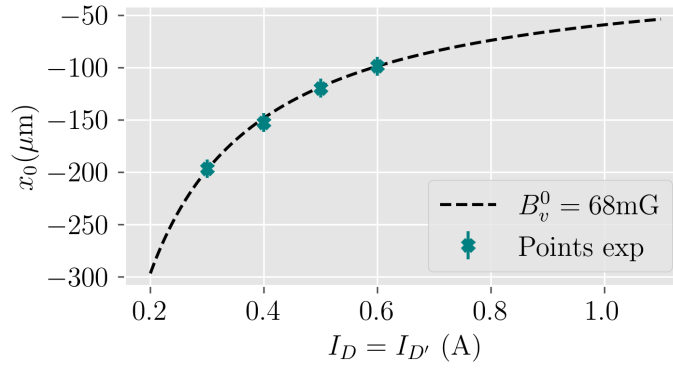


FIGURE 4.11 – Mesure de la position du centre du nuage atomique pour différents courants $I_D = I_{D'}$. Ces mesures permettent d’extraire une valeur du champ résiduel B_v^0 , voir Eq.(4.22) (courbe noire pointillée). La position $x_0 = 0\mu\text{m}$ correspond au centre des petits fils.

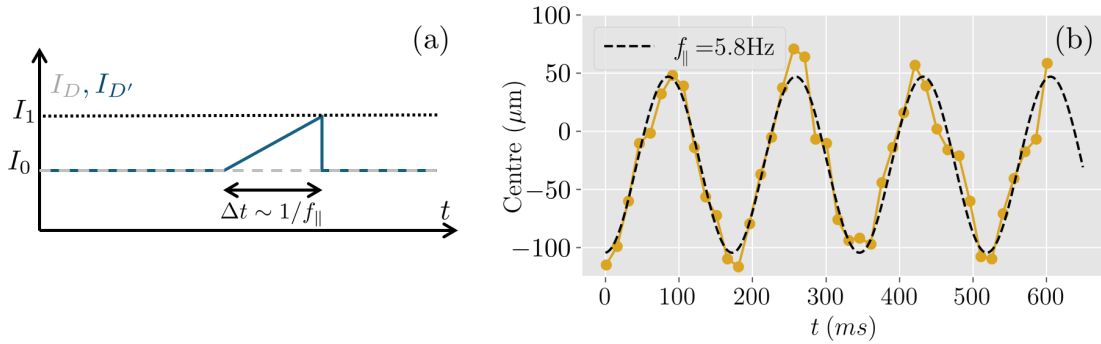


FIGURE 4.12 – (a) Évolution des courants dans les fils D et D' pour un protocole de mesure de fréquence longitudinale – (b) Oscillations du centre du gaz à la fréquence longitudinale du piège magnétique après $\Delta t = 200\text{ms}$ et en prenant $I_0 = 0.6\text{A}$ et $I_1 = 0.33\text{A}$. Ces oscillations sont ajustées par une fonction cosinus pour extraire la fréquence longitudinale f_{\parallel} .

4.2.3.5 Piégeage quartique

En ajoutant du courant dans deux autres fils d et d' placés aussi de part et d’autre des petits fils, il est possible de contrôler la forme des potentiels jusqu’à l’ordre 4, $V_{\parallel}(x) = \sum_{i=0}^4 a_i x^i$. Cette variabilité de la forme du potentiel a notamment été utilisée pour tester la théorie GHD en passant d’un potentiel en configuration double puits à un potentiel en configuration simple puits [63]. Durant ma thèse, je me suis intéressée plus particulièrement à un piège quartique, c’est-à-dire un potentiel qui s’écrit sous la forme $V_{\parallel}(x) = a_0 + a_4 x^4$. Les atomes piégés dans un potentiel quartique présentent un profil de densité quasi homogène sur une importante zone, ce qui explique son utilisation pour la mise en place du protocole décrit dans le Chapitre 9.

Les deux fils d et d' sont séparés d’une distance $2l = 1390\mu\text{m}$, comme représenté sur la Fig.4.10(a). Parcours par des courants identiques $I_d = I_{d'} = i$, le nouveau champ magnétique produit par les 4 fils est déduit des équations Eq.(4.16) et Eq.(4.15), avec

$$B_x^{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{\pi L^2} d \left[1 + 3 \left(\frac{x}{L} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{L} \right)^4 \right] + \frac{\mu_0 i}{\pi l^2} d \left[1 + 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 + 5 \left(\frac{x}{l} \right)^4 \right] \quad (4.23)$$

et

$$B_v^{\parallel} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \left[\frac{x}{L} + \left(\frac{x}{L} \right)^3 \right] + \frac{\mu_0 i}{\pi l} \left[\frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right], \quad (4.24)$$

ce qui permet d'obtenir l'expression du nouveau potentiel développé à l'ordre 4,

$$\begin{aligned} V_{\parallel}(x) = \mu_B B_0 + \frac{\mu_B \mu_0}{\pi} d \left[\frac{I}{L^2} + \frac{i}{l^2} + 3 \left(\frac{I}{L^4} + \frac{i}{l^4} \right) x^2 + 5 \left(\frac{I}{L^6} + \frac{i}{l^6} \right) x^4 \right] \\ + \frac{\mu_B}{B_0} \left(\frac{\mu_0}{\pi} \right)^2 \left[\left(\frac{I}{L^2} + \frac{i}{l^2} \right)^2 x^2 + 2 \left(\frac{I}{L^2} + \frac{i}{l^2} \right) \left(\frac{I}{L^4} + \frac{i}{l^4} \right) x^4 \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

En choisissant les courants i et I de façon pertinente, il est possible de supprimer le terme en x^2 et d'obtenir un potentiel longitudinal quartique de la forme $V_{\parallel}(x) = a_0 + a_4 x^4$.

Pour placer les atomes dans un piège quartique, on commence par les piéger dans un potentiel harmonique identique à celui présenté dans la partie précédente. Ceci est justifié par un simple souci de commodité, évitant de réajuster un grand nombre de paramètres expérimentaux afin d'optimiser la situation initiale. Puis, avant la dernière étape de refroidissement par évaporation, les atomes sont transférés du piège harmonique au piège quartique. On a d'abord pensé à réaliser ce transfert de façon adiabatique, de sorte que le nuage reste à l'équilibre. Cependant, le changement des courants de façon continu fait passer momentanément le potentiel dans une configuration anti-piégeante, amenant à une perte quasi-totale du nombre d'atomes dans le piège. Ainsi, on a décidé de faire le protocole inverse, c'est-à-dire passer d'un piège harmonique à un piège quartique de façon diabatique en réalisant un changement brutal de potentiel, rendant le transfert beaucoup plus rapide. Une fois le changement de potentiel réalisé, l'étape de refroidissement évaporatif permet alors de retrouver une situation d'équilibre.

4.2.3.6 Réalisation expérimentale d'un piège quartique

Comme pour la Section 4.2.3.2, les calculs menés dans la Section 4.2.3.5 sont peu précis du fait de la présence d'un champ magnétique résiduel, voir Section 4.2.3.3. Pour réaliser un piège quartique à partir de courants I_D et $I_{D'}$ fixés, seul un couple de courants I_d et $I_{d'}$ permet d'obtenir une telle situation. En absence de champ résiduel, on sait que pour un couple $I = I_D = I_{D'}$, les courants des fils d et d' doivent être égaux afin d'avoir un potentiel symétrique, ce qui réduit le nombre de paramètres à scanner. En présence d'un champ résiduel, le potentiel n'est plus symétrique. Ainsi, pour trouver expérimentalement les paramètres afin de piéger les atomes dans un piège quartique, on réalise le protocole suivant :

- Les courants I_D et $I_{D'}$ sont fixés.
- Pour un courant I_d fixé, on scanne le courant $I_{d'}$ afin de retrouver un profil de densité symétrique, correspond à un potentiel magnétique lui aussi symétrique. On refait cet ajustement pour différents courants I_d pour trouver la situation où le potentiel est quartique.
- Afin de changer la position ou la taille du piège quartique, on change les valeurs des courants I_D et $I_{D'}$.

Différents potentiels symétriques $V_{\parallel}(x) = a_2(x - x_c)^2 + a_4(x - x_c)^4$ obtenus pour différents couples $(I_d, I_{d'})$ sont représentés sur la Fig.4.13(a). La forme du potentiel est obtenue en piégeant un gaz dans le régime TF 1D (c'est-à-dire dans le régime de [quasi-condensat de Bose Einstein](#)) afin que le potentiel chimique s'écrive

$$\mu(x) = \mu_p - V_{\parallel}(x) = gn(x) \Rightarrow V_{\parallel}(x) = gn_p - gn(x). \quad (4.26)$$

On voit bien le passage d'un potentiel en forme de double puits (courbe orange) avec un coefficient $a_2 < 0$ à une situation pour laquelle $a_2 > 0$ (courbe noire). La transition se fait par une situation où $a_2 = 0$, c'est-à-dire un potentiel quartique.

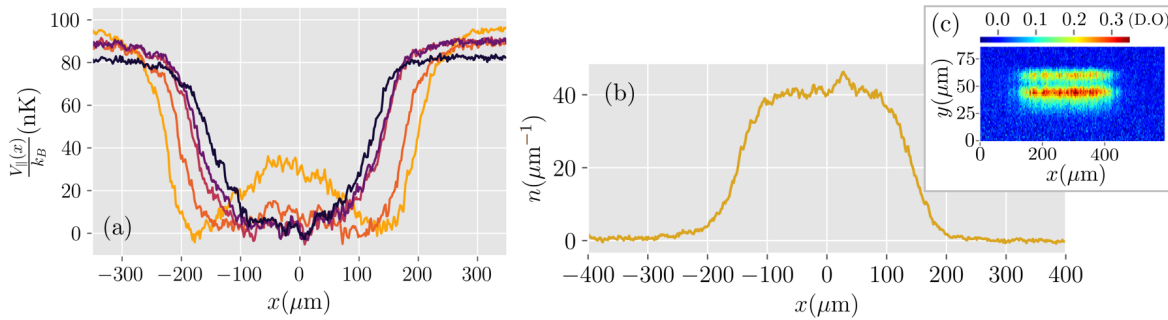


FIGURE 4.13 – (a) Potentiels longitudinaux obtenus à partir de profil de densité en utilisant Eq.(4.26) pour différents couples $(I_d, I_{d'})$, les courants I_D et $I_{D'}$ sont fixés – (b) Profil de densité linéaire du gaz dans un piège quartique. Au centre, la densité linéaire reste homogène à 10% près sur une zone de $200\mu\text{m}$. Ici, $I_D = 1.5\text{A}$, $I_{D'} = 1.5\text{A}$, $I_d = 1.145\text{A}$ et $I_{d'} = 1.050\text{A}$ – (c) Image 2D du nuage en [Densité Optique \(DO\)](#) placé dans un piège quartique après un temps de vol $t_v = 1\text{ms}$.

Un exemple de nuage atomique piégé dans un potentiel quartique est présenté Fig.4.13(b) et (c). On a vérifié que le nuage est bien à l'équilibre après la séquence de refroidissement : le profil de densité devient en effet stationnaire après un temps d'attente $t = 300\text{ms}$ du gaz dans le piège.

4.2.3.7 Instabilités du piège quartique

Nous nous sommes rendu compte que les courants fournis par les alimentations pouvaient dériver légèrement au cours du temps. Les potentiels harmoniques sont très peu sensibles à ces dérives δI qui sont de l'ordre du mA ($\delta I/I \sim 1\%$). Ce n'est cependant pas le cas pour des potentiels proches d'une situation quartique où une variation des courants de l'ordre du mA entraîne une forte asymétrie du potentiel. Ces dérives sont systématiques lors des 2 premières heures de fonctionnement de l'expérience. Sur le reste de la journée, elle présente un caractère aléatoire et souvent disparaissent. Un exemple de telle dérive est représenté Fig.4.14 : on voit la forme du potentiel longitudinal V_{\parallel} évoluer spontanément au cours du temps t . Entre $t = 0$ et $t = 2\text{h}$ la forme du potentiel change considérablement, passant d'une situation symétrique quasi-quartique à une forme fortement asymétrique. Cette modification est ici liée à une dérive d'un des courants de $\delta I \sim 8\text{mA}$ (c'est la variation de courant utilisée pour retrouver

une situation quartique). De plus, pendant les 1h30 suivantes, cette dérive est quasiment inexistante.

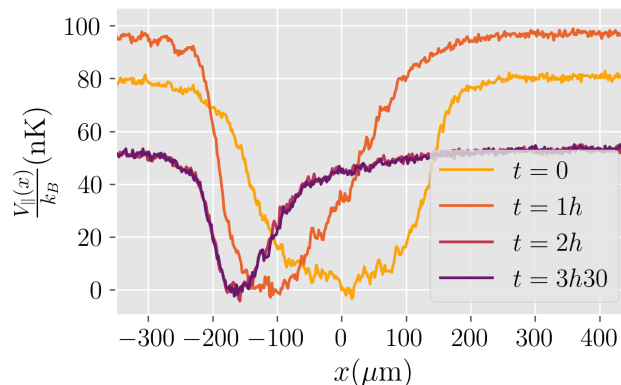


FIGURE 4.14 – Forme du potentiel longitudinal obtenu à partir d’Eq.(4.26) mesurée à différents moments de la journée pour un même jeu de courants.

La plupart des mesures avec un nuage atomique initialement dans un potentiel quartique ont été acquises sur des durées de temps relativement courtes pendant lesquelles on s’est assuré que les dérives des courants des alimentations étaient inexistantes. On pense dans le futur à changer les alimentations de courants par de nouvelles plus stables.

4.3 Stabilité de l’expérience

Les résultats des Chapitres 7, 8 et 9 ont été obtenus en moyennant des prises de données sur des temps longs (de l’ordre de la journée). Il a donc été important de vérifier et de caractériser la stabilité de l’expérience. Par exemple, la dérive lente et ponctuelle du piège quartique dégrade la stabilité de l’expérience. D’autres facteurs jouant sur cette stabilité ont été mis en avant et étudiés, ils sont explicités dans la partie suivante.

4.3.1 Sensibilité aux bruits magnétiques extérieurs

L’expérience, du fait de la production de potentiel magnétique par des courants traversant des fils, est très sensible à tout bruit magnétique (contrairement aux bobines, les fils présentent une inductance très faible). La présence de bruits magnétiques extérieurs se caractérise par deux principales conséquences sur l’expérience :

- Une durée de vie du nuage atomique dans un piège magnétique extrêmement réduit. Ce phénomène a lieu lorsque par exemple le bruit magnétique est présent en permanence et est composé de fréquences dans les MHz, voir Fig.4.15. Ce bruit entraîne une transition des atomes de l’état piégé $m_F = 2$ vers un état anti-piégé $m_F \leq 0$.
- Une grande fluctuation du nombre d’atomes d’une réalisation à une autre. Ce phénomène est plus lié à un bruit parasite intermittent. Cette situation est aussi pénible

puisque cela réduit considérablement la quantité de données exploitables. De plus, il est difficile de trouver la cause d'un bruit qui n'est pas tout le temps présent.

Néanmoins, des solutions ont été apportées pour réduire un maximum l'impact du bruit magnétique sur l'expérience :

- Certaines sources de bruits magnétiques ont été supprimées. Notamment, beaucoup de matériels électroniques relativement anciens (asservissements de température, écran d'ordinateur) ont été remplacés après s'être aperçu qu'ils produisaient du bruit magnétique nocif pour la stabilité de l'expérience. Sur la Fig.4.15, on peut voir les pics de tension mesurés aux bornes d'un fil de la puce en présence de bruit. L'utilisation d'alimentation à découpage a été réduite au maximum, car pouvant générer du bruit magnétique.
- L'expérience est aussi mieux protégée du bruit. En plus d'avoir les alimentations de courant des fils placées sur batteries, la plupart des câbles ont été blindés par de la maille métallique. Des filtres RC ont aussi été rajoutés pour filtrer le bruit de certains composants électroniques. Nous nous sommes de plus aperçus qu'augmenter la valeur du champ B_0 permettait de réduire la sensibilité du piège au bruit magnétique (cela revient à augmenter la fréquence des transitions de l'état piégé aux états anti-piégés).

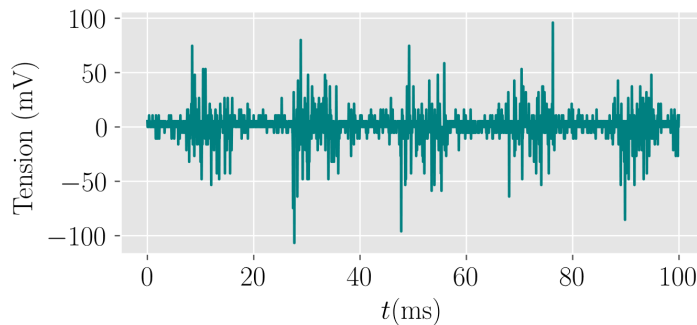


FIGURE 4.15 – Tension aux bornes du fil en Z de la puce. Les pics de tension observés correspondent à du bruit magnétique émit par un écran d'ordinateur présent dans la salle. Une étude spectrale a montré que ce bruit avait un pic de fréquence autour de 3MHz, correspondant à la fréquence de transition entre un état piégé et un état anti-piégé. Une fois l'écran d'ordinateur remplacé, le temps de vie du nuage atomique dans le piège a augmenté d'un facteur ~ 10 .

4.3.2 Régime permanent

Une fois l'expérience en fonctionnement, nous devons attendre un certain nombre de cycles (1 cycle $\simeq 15$ secondes) afin d'atteindre un régime permanent. Nous avons caractérisé différents éléments jouant sur le temps t_p nécessaire pour atteindre le régime permanent :

- Le dispenser qui libère le gaz de Rubidium dans l'enceinte à vide atteint un cycle de chauffage asymptotique au bout d'une quinzaine de cycles expérimentaux, ce qui prend $t_p \sim 15$ minutes, voir Fig.4.16(a).

- La puce atomique chauffe et se déforme légèrement après plusieurs cycles. Ce chauffage entraîne notamment un déplacement transverse de quelques μm du potentiel radial. Ce décalage est problématique notamment lorsque l'outil de sélection spatiale est utilisé, voir le Chapitre 6. Après un temps $t_p \sim 1$ à 2 heures, la position transverse du gaz ne bouge plus.
- Le champ magnétique B_0 produit par les bobines augmente légèrement au cours du temps. Cette variation entraîne notamment un changement de la fréquence RF f_{RF}^0 à résonance avec le fond du puits puisque $\hbar f_{RF}^0 = \mu_B B_0$. Cette variation est de l'ordre du mG ($\delta B/B_0 \sim 10^{-4}$). Ainsi, pour une fréquence RF fixe utilisée pour le processus de refroidissement évaporatif, le nombre d'atomes augmente, voir Fig. 4.16(b). Il faut attendre un temps $t_p \sim 4$ heures afin d'atteindre un régime permanent.

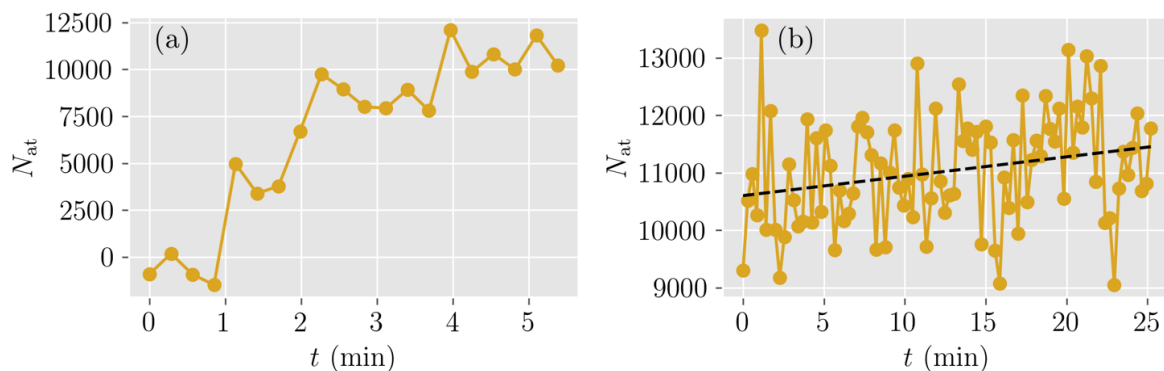


FIGURE 4.16 – (a) Nombre d'atomes mesurés au démarrage de l'expérience. On voit ici l'effet du dispenser qui chauffe de cycle en cycle et qui libère de plus en plus d'atomes – (b) Nombre d'atomes N_{at} mesurés 2h après le démarrage de l'expérience. N_{at} continue d'augmenter légèrement $\sim 35at/min$ (droite noire pointillée). Ces variations sont liées à une légère variation du champ B_0 .

Finalement, les données présentées dans la suite ont été acquises après un temps d'attente d'environ 4 heures, afin de s'assurer que le régime permanent du cycle expérimental soit atteint.

4.3.3 Détérioration de la puce

Au cours du temps, en présence de Rubidium, la couche d'or présente sur la surface de la puce peut se détériorer : les atomes de Rubidium s'adsorbent sur la surface d'or. D'une part, les atomes collés sur la surface de la puce réduisent la qualité du miroir d'or. De plus, des dipôles électriques apparaissent, entraînant un potentiel rugueux ressenti par les atomes piégés. Des essais de nettoyage de la puce atomique par chauffage et par éclairage UV pour désorber les atomes de Rubidium sur la surface d'or ont été réalisés par d'anciens doctorants sans succès.

Ce phénomène est relativement lent, mais entraîne le changement de la puce régulièrement, tous les 3 ans à peu près. Lors de la rédaction de ce manuscrit, la puce est en cours de remplacement, notamment du fait de la détérioration trop importante de la couche d'or. Le

potentiel créé par les dipôles atteignait des variations de potentiel ressenti par les atomes de l'ordre de $\sim 10\text{nK}$.

En résumé

- Le piégeage du gaz dans un potentiel magnétique produit par des courants traversant des micro-fils et déposés sur une puce atomique permet d'obtenir un fort confinement transverse, les atomes étant placés à $7\mu\text{m}$ au-dessus de la puce. En plus d'un refroidissement efficace, cela permet d'atteindre le régime 1D.
- La modulation du courant dans les 3 micro-fils permet de s'affranchir de l'effet de la rugosité des fils. De plus, le confinement transverse est complètement découplé du confinement longitudinal.
- Le confinement longitudinal est produit par 4 fils placés d'une part et d'autres des micro-fils. Le potentiel prend la forme localement d'un polynôme de degré 4. Dans la suite, nous travaillerons principalement avec un piège harmonique ou quartique.

TECHNIQUES D'ANALYSE

Sommaire

5.1	Système d'imagerie	85
5.1.1	Imagerie par absorption après temps de vol	86
5.1.2	Imagerie par absorption <i>in situ</i>	87
5.1.3	Défauts d'imagerie	88
5.2	Thermométrie	89
5.2.1	Température Yang-Yang	90
5.2.2	Thermométrie par étude des ondulations de densités	91

Ce chapitre introduit différentes techniques utilisées pour analyser et caractériser les gaz produits expérimentalement. La première partie détaille les méthodes d'imagerie permettant de reconstruire le profil de densité linéaire. La seconde partie présente les différentes méthodes utilisées pour extraire une température à partir des profils de densité linéaires.

5.1 Système d'imagerie

L'utilisation d'une CCD (*Charge Coupled Device* en anglais) à déplétion profonde et à capteurs éclairés par l'arrière, *backthined illuminated* (*PIXIX1024 BRX, Teledyne*) permet d'imager les atomes [129]. Le choix de cette caméra provient de sa bonne efficacité quantique de 99% pour une longueur d'onde de 780nm.

Afin d'images les atomes, des techniques d'imagerie par absorption sont utilisées. Elles permettent notamment d'extraire le profil de densité linéaire

$$n(x) = \int dydz n_{3D}(x, y, z) \tag{5.1}$$

avec n_{3D} la densité de particules.

5.1.1 Imagerie par absorption après temps de vol

Pour imager les atomes, le faisceau sonde d'intensité $I_0(x, z)$ arrive en se propageant selon l'axe vertical \mathbf{e}_y (voir Fig.5.1(a)), traverse le nuage atomique et est réfléchi sur l'axe \mathbf{e}_z par la puce afin d'être imagé par la caméra CCD. En traversant le gaz, une partie du faisceau est absorbée selon la loi de Beer-Lambert [130],

$$\frac{dI}{I} = -\sigma_0 n_{3D}(x, y, z) dy, \quad (5.2)$$

avec σ_0 la section efficace d'absorption et n_{3D} la densité de particules. En intégrant cette relation selon l'axe \mathbf{e}_y ,

$$I(x, z) = I_0(x, z) e^{-\sigma_0 n_{2D}(x, z)} = I_0(x, z) e^{-D(x, z)} \quad (5.3)$$

avec $n_{2D}(x, z)$ la densité de particule intégrée selon \mathbf{e}_y et D la **Densité Optique (DO)**. Après réflexion, l'intensité du faisceau dépend de la variable y , $I(x, z \rightarrow y)$. La densité optique est obtenue expérimentalement en mesurant le ratio I/I_0 . Pour cela, deux images consécutives sont prises : la première image d'absorption $\tilde{I}(x, y)$ en présence d'atomes puis, après un temps $t = 10\text{ms}$, une seconde image sans atome $\tilde{I}_0(x, y)$. Pour prendre en compte les fluctuations globales d'intensité entre les deux images, on mesure le nombre de photons $N^{(b)}$ et $N_0^{(b)}$ sur une zone sans atome identique aux deux images, tel que

$$\frac{I(x, y)}{I_0(x, y)} = \frac{\tilde{I}(x, y) N_0^{(b)}}{\tilde{I}_0(x, y) N^{(b)}} = e^{-D(x, y)}. \quad (5.4)$$

Pour un faisceau laser de polarisation circulaire σ^+ résonnant par rapport à la transition fermée $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_{F'} = 3\rangle$, la section efficace d'absorption s'écrit pour des atomes dans l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$ [131]

$$\sigma(I) = \sigma_0 \frac{1}{1 + I/I_{\text{sat}}} \quad (5.5)$$

avec la section efficace à la limite de faible intensité $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$ où $\lambda = 780,24\text{nm}$ est la longueur d'onde du laser et $I_{\text{sat}} = \Gamma\hbar\omega/(2\sigma_0)$ où $\Gamma = 2\pi \times 6.062\text{MHz}$ est le taux de désexcitation de la transition [132]. Pour réaliser une telle situation, on ajoute un champ magnétique $B = 8\text{G}$ selon l'axe \mathbf{e}_y , afin de fixer l'axe de quantification selon \mathbf{e}_y tel que la polarisation du faisceau soit bien σ^+ . Ce champ est établi pendant un temps de vol $t_v = 8\text{ms}$ où le nuage atomique tombe sous l'effet de la gravité, voir Fig.5.1(a). Pendant ce temps de vol, l'évolution du profil de densité moyen est négligée, il est alors identique à celui du nuage atomique initial.

À partir d'Eq.(5.5), on voit que la section efficace dépend de l'intensité : nous devrions alors remplacer σ_0 par $\sigma(I)$ dans Eq.(5.2). Dans la limite où $I/I_{\text{sat}} \rightarrow 0$, on retrouve $\sigma(I) \rightarrow \sigma_0$. Pour avoir un rapport signal sur bruit convenable, on fait alors un compromis en travaillant avec $I_0/I_{\text{sat}} \simeq 0.3$ tout en vérifiant que $I/I_0 \simeq 1$ tel que l'on puisse remplacer σ_0 par $\sigma(I_0)$

dans Eq.(5.2). Il est important de préciser que le modèle de Beer-Lambert ici présenté est un modèle à une particule. Il ne prend pas en compte des effets collectifs exacerbés pour des saturations et des densités atomiques élevées [133].

Le temps d'impulsion τ_p et l'intensité du faisceau I sont choisis de telle sorte à trouver un compromis entre un bon rapport signal sur bruit et une bonne résolution. La résolution est limitée par l'imagerie, mais aussi par le processus de diffusion des atomes. Ce dernier processus est caractérisé par le rayon de diffusion

$$\Delta r = \sqrt{\frac{N_{sc}}{3}} \frac{\hbar k}{m} \tau_p, \quad N_{sc} = \tau_p \frac{\Gamma}{2} \frac{I/I_{sat}}{1 + I/I_{sat}} \quad (5.6)$$

où N_{sc} est le nombre de photons diffusés. En pratique on utilise une intensité $I \simeq I_{sat}/3$ et $\tau_p \simeq 50\mu s$ afin que le rayon de diffusion $\Delta r \simeq 2.6\mu m$ soit de l'ordre de grandeur de la résolution optique du système d'imagerie, le nombre de photons diffusés est alors de $N_{sc} \simeq 230$.

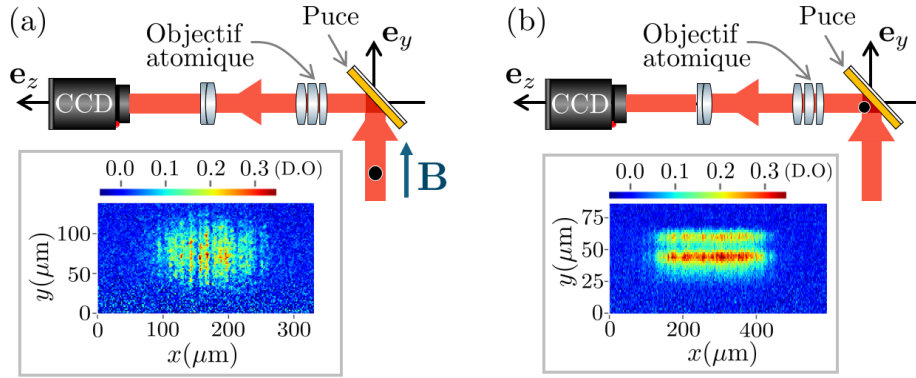


FIGURE 5.1 – (a) Système optique pour l'imagerie après un temps de vol $t_v = 8ms$ du gaz et l'application d'un fort champ magnétique B_0 – (b) Système d'imagerie pour l'observation du nuage atomique *in situ* avec un temps de décompression de $t_v = 1ms$. Dans les deux cas, le nuage atomique est représenté par un disque noir et un exemple de profil en Densité Optique est affiché.

5.1.2 Imagerie par absorption *in situ*

Il est aussi possible d'imager les atomes sans la mise en place de champ magnétique et sans temps de vol. On parlera dans la suite d'imagerie *in situ*. Cette fois-ci, puisque les atomes sont à $7\mu m$ de la puce, le gaz absorbe à la fois le faisceau incident et le faisceau réfléchi, on observe alors deux images du nuage, voir Fig.5.1(b). De plus, en l'absence de champ magnétique, la transition n'est plus fermée (les transitions $|F = 2, m_F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3, m_{F'} = 1, 2, 3\rangle$ sont toutes les trois possibles) et la valeur de la section efficace σ_0 se voit être modifiée. Le nombre d'atomes doit être calibré : pour cela, on compare les profils de densité linéaires issus de l'imagerie *in situ* $n_{is}(x)$ avec celui obtenu en appliquant le champ magnétique B , $n(x)$. Pour une densité linéaire ne dépassant pas les $60\mu m^{-1}$, le rapport des densités est linéaire et

calibré avec, dans notre cas,

$$n = \frac{1}{A} n_{is}, A = 0.75(3). \quad (5.7)$$

Il est parfois plus pratique d'utiliser l'imagerie *in situ*, les profils présentant un signal moins bruité avec des densités plus importantes et des fluctuations de densités moindre, comme expliqué dans la suite.

Notons que la loi de Beer-Lambert n'est vérifiée que pour des gaz suffisamment dilués. Dans le cas des gaz 1D étudiés, la densité atomique est souvent trop élevée pour que la loi de Beer-Lambert soit valable. En effet, la taille transverse du gaz étant plus petite que la taille du pixel dans le plan des atomes $\Delta = 1.77\mu\text{m}$, la densité linéaire est alors sous-estimée [134]. De plus, les couplages dipôle-dipôle des atomes et les processus de réabsorption ne sont plus négligeables [135]. Ainsi, pour imager correctement le gaz, on effectue même pour une imagerie *in situ* un temps de vol court ($t_v = 1\text{ms}$) pour pouvoir décompresser le gaz transversalement, rendant alors valable l'application de la loi de Beer-Lambert.

5.1.3 Défauts d'imagerie

Au cours de ma thèse, nous avons essayé de réduire au mieux les défauts d'imagerie que nous avons observés. Ceci fut très important d'autant plus que nous voulions extraire des signaux de faibles amplitudes et où ces effets devaient être limités au maximum.

Défauts de la caméra : nous avons observé des défauts directement reliés à la caméra. Tout d'abord, des motifs apparaissaient de façon imprévisible, voir un exemple sur la Fig.5.2(a). Nous pensons que ces motifs sont liés à un problème de lecture de la CCD. De plus, nous nous sommes rendus compte que l'offset de la caméra, c'est-à-dire le niveau de gris par pixel mesuré sans réception de photons, évoluait au cours du temps et pouvait changer significativement en quelques heures, voir Fig.5.2(c). Ces deux effets limitant la qualité des images, nous avons décidé de remplacer la caméra par une nouvelle du même modèle. Après remplacement, les deux effets cités ont disparu.

Défauts du système optique : nous avons observé d'autres effets liés au fait que les deux images brutes permettant de reconstruire la densité optique présentent des différences spatiales de profil d'intensité. La division des images laisse apparaître des franges comme représenté sur la Fig.5.2(a). On associe ces franges à des défauts d'imagerie. Ces défauts ne devraient pas être un problème, les deux images consécutives devraient bien se diviser. Cependant, des phénomènes d'interférence de type Fabry-Pérot peuvent être présents, causés par exemple par des défauts du traitement anti-reflet des optiques : cet effet est très sensible et le profil d'intensité peut varier entre les deux images. Cet effet peut être très important avec des fluctuations de densité optique effectives pouvant atteindre $\delta(DO) = 0.1$, ce qui rend compliqué l'étude précise des profils de densité linéaire : les gaz étudiés présentent des densités optiques maximales de l'ordre de ~ 0.5 .

On a tout d'abord essayé d'éliminer ces franges en utilisant une banque d'images de référence, une technique numérique bien connue [136] : les résultats furent peu concluants. Cependant, nous nous sommes rendu compte que ce phénomène dépendait du chemin optique

parcouru par le faisceau sonde. Nous avons alors désaxé ce dernier par rapport à l'axe optique afin de limiter la présence des franges avec succès.

Un défaut supplémentaire observé est la présence de photons résiduels sans faisceau sonde, voir Fig.5.2(b). Nous en avons déduit que ces photons proviennent de diffusion des faisceaux lasers, nous sommes arrivés en diminuer la présence de ces derniers en limitant le plus possible les accès optiques et les processus de diffusion, mais nous ne sommes pas arrivés à les enlever complètement.

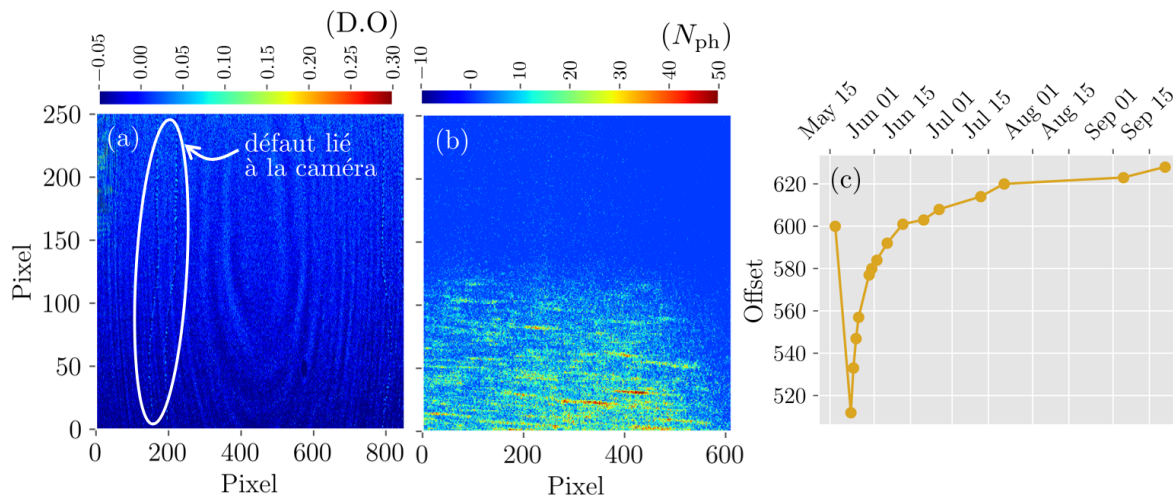


FIGURE 5.2 – (a) Densités optiques obtenues en divisant deux profils d'intensité successifs. L'image présente des franges d'interférences. Dans le cercle blanc les lignes observées sont liées à un défaut probablement électronique de la caméra – (b) Profil d'intensité reçu par la caméra en l'absence de faisceau sonde. On observe la présence de photons résiduels – (c) Offset de la caméra mesuré à différentes journées. La valeur de l'offset n'est pas constante et peut présenter des fluctuations rapides.

5.2 Thermométrie

Dans cette partie, on fait l'hypothèse que les gaz étudiés sont bien décrits par un ensemble thermique. Comme détaillé dans le Chapitre 2, cette description n'est pas nécessairement valable pour nos systèmes qui sont intégrables. Néanmoins, il se trouve que beaucoup de résultats sont en parti expliqués dans le cadre de cette hypothèse.

Cette partie introduit deux méthodes utilisées lors de ma thèse pour extraire une température des gaz étudiés : l'étude du profil *in situ* du nuage atomique et la caractérisation des fluctuations de phase du système.

Une autre méthode d'extraction de températures qui a été utilisée auparavant est l'extraction des fluctuations de densité. Cette méthode permet d'extraire une température du système quel que soit le régime qui le décrit [43, 10, 137]. Néanmoins, dans le régime qBEC, les fluctuations de densité sont très faibles, rendant leur mesure difficile.

5.2.1 Température Yang-Yang

5.2.1.1 Principe de mesure

Il est possible d'extraire une température du système en appliquant la thermodynamique Yang Yang introduite à la Section 1.1.3.3 et en utilisant la [Approximation de Densité Locale \(LDA\)](#) comme décrit dans la Section 2.3.1.

Pour un couple (μ, T) donné, la distribution de rapidités thermique $\rho_{\text{YY}}(\theta)$ peut être reconstruite ainsi que sa densité associée n_{YY} . Connaissant la forme du potentiel longitudinal $V_{\parallel}(x)$ et en utilisant la [LDA](#), on peut reconstruire pour toute position x la distribution de rapidités spatialement résolue $\rho(x, \theta)$ correspondant alors aux paramètres $(\mu(x) = \mu - V_{\parallel}(x), T(x) = T)$. À partir de $\rho_{\text{YY}}(x, \theta)$, on obtient la densité $n_{\text{YY}}(x, \mu, T) = \int d\theta \rho_{\text{YY}}(x, \theta)$ [9, 10, 138]. Les paramètres (μ, T) sont extraits en ajustant le profil de densité n_{YY} avec celui obtenu expérimentalement.

5.2.1.2 Prise en compte de la population des états transverses

Les nuages atomiques produits expérimentalement ne sont pas forcément parfaitement 1D : certains états transverses excités peuvent être peuplés. On suppose que la population des modes excités est néanmoins faible devant la population de l'état fondamental.

Un modèle simple pour prendre en compte les effets transverses 3D du nuage sur la forme du profil de densité est détaillée ci-dessous. Pour un état transverse associé à l'énergie $E_j = \hbar\omega_{\perp} (\frac{1}{2} + j)$, le potentiel chimique s'écrit [9]

$$\mu(j, x) = \mu(x) - j\hbar\omega_{\perp} \quad (5.8)$$

où $\mu(x) = \mu_0 - V_{\parallel}(x)$. On suppose que les atomes ne se trouvant pas dans l'état fondamental suivent une statistique de Bose-Einstein. Ainsi, en prenant en compte le fait que des états transverses excités peuvent être peuplés, le profil de densité modifié en prenant s'écrit

$$n(x, \mu, T) = n_{\text{YY}}(x, \mu, T) + \sum_{j=1}^{\infty} (j+1) n_{\text{TE}}(\mu(j, x), T) \quad (5.9)$$

où n_{TE} suit une distribution de Bose-Einstein, *i.e.*

$$n_{\text{TE}}(\mu(j, x), T) = \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}} g_{1/2} \left(\exp \frac{\mu(j, x)}{k_B T} \right), \quad g_{1/2}(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j^{1/2}}. \quad (5.10)$$

Ce modèle a été testé avec succès sur d'anciennes expériences menées au [Laboratoire Charles Fabry](#) pour caractériser la transition d'un gaz purement 1D à un gaz presque 3D [137].

Cette prise en compte des effets transverses n'est valable que pour $\hbar\omega_{\perp} \ll \mu$. Ainsi, pour des densités très grandes par exemple, il n'est pas possible d'utiliser ce modèle. Un exemple de tel ajustement est représenté sur la Fig. 5.3.

Du fait de l'utilisation de la [LDA](#), la connaissance de la forme du potentiel longitudinal

est alors importante. Notamment, de tels ajustements pour un potentiel quasi-quartique est compliqué, car la forme précise du piège n'est pas bien connue.

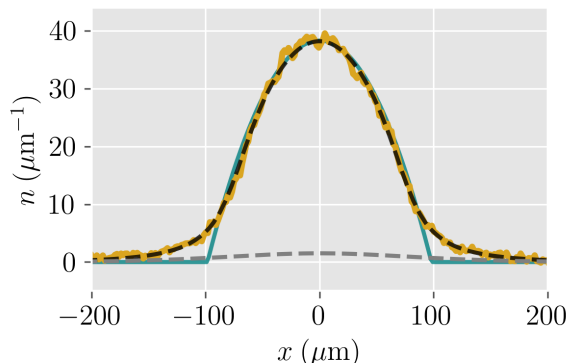


FIGURE 5.3 – La courbe jaune correspond au profil de densité linéaire expérimental d'un gaz placé dans un piège longitudinal harmonique de fréquence $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$. La courbe bleue est la parabole Thomas Fermi attendue à température nulle $n(x) = n(0) - (1/2g)m\omega_{\parallel}^2 x^2$. La partie centrale du nuage est en bon accord avec la parabole Thomas Fermi. L'ajustement en utilisant la thermodynamique Yang Yang et en prenant en compte les effets transverses est représenté en noire pointillée : $T_{YY} = 90\text{nK}$, $\mu/k_B = 45\text{nK}$. La courbe grise pointillée correspond à l'estimation de la population transverse : au total 6% des atomes sont dans des états transverses excités. Le profil expérimental est obtenu en moyennant une dizaine d'images.

5.2.2 Thermométrie par étude des ondulations de densités

Après un temps de vol t_v , les fluctuations de phase initiales donnent naissance à des fluctuations de densité, que j'appellerai dans la suite ondulations de densité (*density ripples* en anglais [139, 140, 87]).

De même que les mesures des profils *in situ* ou que les mesures de fluctuations de densité, les ondulations de densité permettent d'extraire une température du système : cet outil a largement été utilisé dans l'équipe de Vienne [141, 142, 74] ainsi qu'au sein du LCF [143, 73].

Comme les mesures de fluctuations de densité, ce protocole permet de sonder les températures des modes phononiques. Cependant, les ondulations de densité associées aux fluctuations de phase sont très importantes et sont de fait beaucoup plus simple à extraire expérimentalement.

5.2.2.1 Spectre de puissance des ondulations de densité

Le calcul du spectre de puissances des ondulations de densité peut être retrouvé dans [73] ou dans [113]. L'idée est de considérer un gaz 1D auquel le confinement transverse et longitudinal est enlevé. On cherche à estimer le spectre de puissance lié aux fluctuations de densité après un temps de vol t_v .

On commence par définir $\rho(k) = \int dx e^{ikx} \delta n(x, t_v)$ avec $\delta n(x, t_v) = n(x, t_v) - \langle n(x, t_v) \rangle$ les

fluctuations de densité après t_v . Le spectre de puissance s'écrit

$$\begin{aligned} \langle |\rho(k)|^2 \rangle &= \iint dx_1 dx_2 e^{ik(x_1-x_2)} \langle \delta n(x_1, t_v) \delta n(x_2, t_v) \rangle \\ &= \iint dx_1 dx_2 e^{ik(x_1-x_2)} \langle n(x_1, t_v) n(x_2, t_v) \rangle - \underbrace{\left| \int dx e^{ikx} \langle n(x, t_v) \rangle \right|^2}_{(1)}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

On suppose un temps de vol relativement court de sorte que $\langle n(x, t_v) \rangle \simeq \langle n(x, 0) \rangle$. Ainsi, ne regardant que l'effet des modes $k \gg 1/L$ avec L la taille longitudinale du nuage, la contribution de (1) dans Eq.(5.11) est négligée.

La densité linéaire $n(x, t) = \psi^\dagger(x, t) \psi(x, t)$ est obtenue en utilisant le propagateur de particule libre. On suppose que les interactions sont coupées pendant le temps de vol,

$$\psi(x, t_v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t_v}} \int d\tilde{x} e^{i\left(\frac{m(x-\tilde{x})^2}{2\hbar t_v}\right)} \psi(\tilde{x}, 0). \quad (5.12)$$

Dans la suite, on prend $m = \hbar = 1$ et on note $\psi_x = \psi(x, 0)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \langle n(x_1, t_v) n(x_2, t_v) \rangle &= \frac{1}{(2\pi t_v)^2} \iiint d\alpha d\beta d\gamma d\delta \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta \psi_\gamma^\dagger \psi_\delta \rangle e^{-i\frac{(x_1-\alpha)^2}{2t_v}} e^{i\frac{(x_1-\beta)^2}{2t_v}} e^{-i\frac{(x_2-\gamma)^2}{2t_v}} e^{i\frac{(x_2-\delta)^2}{2t_v}} \\ &= \frac{1}{(2\pi t_v)^2} \iiint d\alpha d\beta d\gamma d\delta \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_\beta \psi_\gamma^\dagger \psi_\delta \rangle e^{i\frac{\beta^2-\alpha^2}{2t_v}} e^{i\frac{\delta^2-\gamma^2}{2t_v}} e^{ix_1 \frac{\alpha-\beta}{t_v}} e^{ix_2 \frac{\gamma-\delta}{t_v}}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

On injecte Eq.(5.13) dans Eq.(5.11). En utilisant les relations

$$\int dx_1 e^{ix_1 \left(k + \frac{\alpha-\beta}{t_v}\right)} = 2\pi t_v \delta\left(k + \frac{\alpha-\beta}{t_v}\right) \text{ et } \int dx_2 e^{ix_2 \left(-k + \frac{\gamma-\delta}{t_v}\right)} = 2\pi t_v \delta\left(-k + \frac{\gamma-\delta}{t_v}\right), \quad (5.14)$$

l'équation suivante est obtenue,

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle = \iint d\alpha d\delta \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_{\alpha+kt_v} \psi_{\delta+kt_v}^\dagger \psi_\delta \rangle e^{\frac{i}{2t_v}(-\alpha^2 + (\alpha+kt_v)^2 + \delta^2 - (\delta+kt_v)^2)}. \quad (5.15)$$

En posant $\delta = X + \alpha$,

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle = \iint d\alpha dX e^{-ikX} \langle \psi_\alpha^\dagger \psi_{\alpha+kt_v} \psi_{\alpha+X+kt_v}^\dagger \psi_{\alpha+X} \rangle \quad (5.16)$$

Nous avons corrigé l'Eq.A7 de [73] : cette dernière avait une erreur de signe dans le terme exponentiel, ce qui n'avait pas d'impact pour le reste des calculs de [73] pour les systèmes invariants pour $x \leftrightarrow -x$.

5.2.2.2 Quasi-condensat homogène

Pour un gaz se trouvant dans le régime quasi-condensat, les fluctuations de densités initiales sont négligées. Ainsi, en utilisant la représentation de Madelung $\psi(x) = \sqrt{n(x)} \exp(i\theta(x))$, Eq.(5.16) se réécrit

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle = \iint d\alpha dX e^{-ikX} \sqrt{n(\alpha, 0) n(\alpha + kt_v, 0) n(\alpha + X + kt_v, 0) n(\alpha + X, 0)} \underbrace{\langle e^{-i(\theta(\alpha) - \theta(\alpha + kt_v) + \theta(\alpha + X + kt_v) - \theta(\alpha + X))} \rangle}_{(1)} \quad (5.17)$$

Le terme (1) de l'Eq.(5.17) peut être simplifié en utilisant le théorème de Wick : l'opérateur $\hat{\theta}$ est gaussien comme l'Hamiltonien est quadratique en $\hat{\theta}$ dans l'approximation de Bogoliubov. Nous avons alors

$$\langle e^{-i(\theta(\alpha) - \theta(\alpha + kt_v) + \theta(\alpha + X + kt_v) - \theta(\alpha + X))} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \langle [\theta(\alpha) - \theta(\alpha + kt_v) + \theta(\alpha + X + kt_v) - \theta(\alpha + X)]^2 \rangle}. \quad (5.18)$$

Cette équation se simplifie de nouveau dans le cas d'un système de densité homogène n_0 de taille ℓ , où il est utile de définir la quantité intensive $\tilde{\rho}(k)$

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle = \frac{1}{\ell} \langle |\rho(k)|^2 \rangle. \quad (5.19)$$

Cette quantité vérifie

$$\frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} = \int dX e^{-ikX} e^{-\frac{1}{2} \langle [\hat{\theta}(0) - \hat{\theta}(kt_v) + \hat{\theta}(X + kt_v) - \hat{\theta}(X)]^2 \rangle}. \quad (5.20)$$

Le spectre de puissance, après développement des termes de la phase peut s'écrire en fonction de la fonction de corrélation à un corps $g^{(1)}(x) = \langle \hat{\psi}^\dagger(0) \hat{\psi}(x) \rangle / n_0 \simeq e^{-\frac{1}{2} \langle [\hat{\theta}(x) - \hat{\theta}(0)]^2 \rangle} = e^{-\frac{|x|}{l_c}}$, avec $l_c = \frac{2\hbar n_0^2}{k_B T}$ comme obtenu dans la Section 1.3.3.3. Ainsi, en réintroduisant \hbar et m ,

$$\begin{aligned} \frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} &= \int dX e^{-ikX} \frac{g^{(1)}(\hbar kt_v/m)^2 g^{(1)}(X)^2}{g^{(1)}(X + \hbar kt_v/m) g^{(1)}(X - \hbar kt_v/m)} \\ &= \int dX \cos(kX) e^{-\frac{1}{l_c} (2|\hbar kt_v/m| + 2|X| - |X + \hbar kt_v/m| + |X - \hbar kt_v/m|)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

Cette intégrale peut être développée et calculée comme dans [139], ce qui donne

$$\frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} \simeq \frac{4kl_c}{k(4 + l_c^2 k^2)} - \frac{4e^{-\frac{2\hbar kt_v}{ml_c}} \left[kl_c \cos\left(\frac{\hbar k^2 t_v}{m}\right) + 2 \sin\left(\frac{\hbar k^2 t_v}{m}\right) \right]}{k(4 + l_c^2 k^2)}. \quad (5.22)$$

De par la dépendance de la longueur de corrélation $l_c = \frac{2\hbar^2 n_0}{mk_B T}$ avec la température, on voit qu'il est possible d'extraire une température par caractérisation du spectre de puissance des fluctuations de densité après un temps de vol t_v . Un exemple de spectre est tracé sur la Fig.5.4(a).

5.2.2.3 Cas des petits vecteurs d'ondes

En prenant un temps de vol t_v assez court tel que les vecteurs d'ondes sondés vérifient $\hbar kt_v/m \ll l_c$, l'exponentielle de l'Eq.(5.22) est approximée à la valeur 1. On va considérer des modes $k \simeq \sqrt{m/(\hbar t_v)}$, ce qui implique que $kl_c \gg 1$. Dans ce cadre l'Eq.(5.22) se réécrit

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle \simeq 4n_0 \frac{mk_B T}{\hbar k^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (5.23)$$

Cette expression peut aussi se retrouver en reprenant l'Eq.(5.20). Comme $\hbar kt_v/m \ll l_c$, les différences de phase n'apparaissent que pour points distants de $\hbar kt_v/m$, ces dernières sont petites et l'exponentielle peut être développée à l'ordre 2,

$$\frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} = \int dX e^{-ikX} \left[1 - \frac{1}{2} \langle |\hat{\theta}(0) - \hat{\theta}(kt_v \hbar/m) + \hat{\theta}(X + kt_v \hbar/m) - \hat{\theta}(X)|^2 \rangle \right]. \quad (5.24)$$

En développant cette équation, en enlevant toutes les contributions au mode $k = 0$ et en utilisant le fait que par invariance par translation (puisque le système homogène), $\langle \hat{\theta}(x_1) \hat{\theta}(x_2) \rangle$ ne dépend que de $x_1 - x_2$,

$$\frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} = 2 \int dX e^{-ikX} \langle \hat{\theta}(0) \hat{\theta}(X) \rangle - \int dX e^{-ikX} \langle \hat{\theta}(0) \hat{\theta}(X + \frac{kt_v \hbar}{m}) \rangle - \int dX e^{-ikX} \langle \hat{\theta}(0) \hat{\theta}(X - \frac{kt_v \hbar}{m}) \rangle. \quad (5.25)$$

Après plusieurs changements de variables, l'équation ci-dessus peut s'écrire en fonction de $\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle = \int dx e^{ikx} \langle \hat{\theta}(0) \hat{\theta}(x) \rangle$,

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle = 4n_0^2 \langle |\theta_k|^2 \rangle \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (5.26)$$

Dans le cas particulier où $\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle$ sont les quadratures de phase des modes phononiques de Bogoliubov dominés par les fluctuations thermiques, $\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{mk_B T}{n_0 \hbar k^2} = \frac{2}{l_c k^2}$ (voir Section 1.3.3.3), on retrouve Eq.(5.23). Un exemple de spectre est représenté Fig.5.4(a) (courbe bleue). En toutes généralités, il faut prendre en compte l'apport des fluctuations quantiques dans l'expression de $\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle$ qui s'écrit alors

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \frac{1}{n_0} \frac{mc}{\hbar k} \left(\frac{1}{2} + \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle \right) = \frac{1}{2n_0} \frac{mc}{\hbar k} \frac{1}{\tanh \left(\frac{\beta}{2} \hbar ck \right)} \quad (5.27)$$

obtenu dans la Section 1.3.3.3.

Dans ce régime, la densité spectrale des ondulations de densité à un certain vecteur d'onde k ne dépend que de $\langle |\theta_k|^2 \rangle$. Ce résultat a notamment été utilisé dans [73] pour analyser la dynamique des modes phononiques après une variation rapide du paramètre d'interaction g_{1D} .

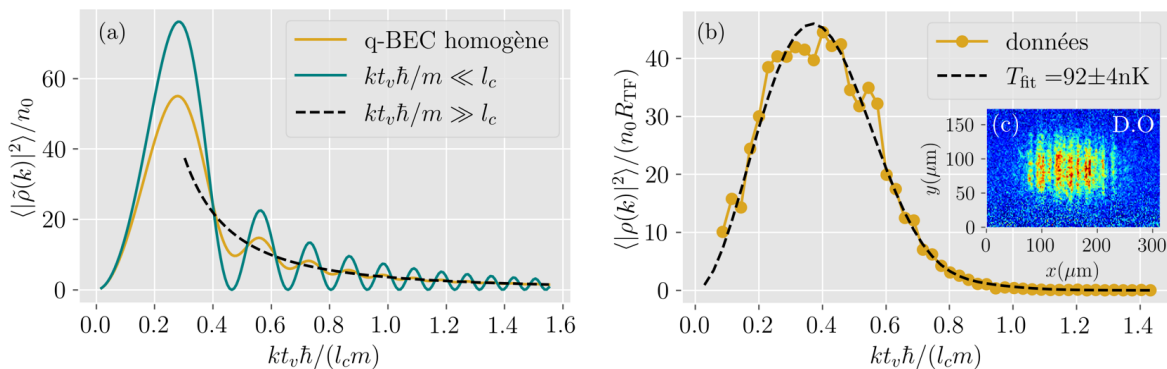


FIGURE 5.4 – (a) Comparaisons de densités spectrales des ondulations de densités attendues dans différents régimes pour un [quasi-condensat de Bose Einstein](#). La courbe jaune correspond au spectre attendu de façon générale Eq.(5.22). La courbe bleue est le spectre attendu pour des $kt_v \hbar / m \ll l_c$, voir Eq.(5.23). La courbe noire pointillée correspond au spectre attendu pour des $kt_v \hbar / m \gg l_c$, voir Eq.(5.29) – (b) La courbe jaune est la mesure expérimentale du spectre de puissance des ondulations de densité après un temps de vol $t_v = 8 \text{ ms}$ pour un nuage atomique placé dans un potentiel harmonique avec pour densité initiale pic $n_0 = 59 \mu\text{m}^{-1}$. Le spectre est moyenné sur un jeu de 50 images. La courbe pointillée noire correspond à l’ajustement des données expérimentales en utilisant Eq.(5.22) dans l’approximation de densité locale, Eq.(5.31). Le paramètre R_{TF} correspond au rayon Thomas-Fermi. La résolution optique est prise en compte, $\sigma = 2.3 \mu\text{m}$ – (c) Image 2D en densité optique d’un nuage atomique après $t_v = 8 \text{ ms}$ où les ondulations de densité sont bien visibles.

5.2.2.4 Cas des grands vecteurs d’ondes

On considère ici le cas des grands vecteurs d’ondes tels que $\hbar kt_v / m \gg l_c$. Le terme exponentiel de l’Eq.(5.22) tend vers 0, la densité spectrale prend la forme d’une Lorentzienne

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle \simeq \frac{l_c}{1 + \frac{1}{4} l_c^2 k^2}. \quad (5.28)$$

De nouveau, on peut retrouver ce résultat à partir de Eq.(5.21). Comme $kt_v \hbar / m \gg l_c$, $g^{(1)}(X + \hbar kt_v / m) \simeq g^{(1)}(X - \hbar kt_v / m) \simeq g^{(1)}(\hbar kt_v / m)$. On obtient ainsi

$$\frac{\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle}{n_0^2} = \int dX e^{-ikX} g^{(1)}(X)^2 = \int dX e^{-ikX} e^{-\frac{2|X|}{l_c}} = \frac{l_c}{1 + \frac{1}{4} l_c^2 k^2}. \quad (5.29)$$

En effet, Eq.(5.29) est la transformée de Fourier de $f(x) = e^{-a|x|}$. Par application du théorème des résidus, on peut montrer que cette fonction est une lorentzienne $g(k) = 2a / (k^2 + a^2)$, ce qui permet de retrouver le résultat souhaité. Un exemple de spectre est représenté Fig.5.4(a) (courbe noire pointillée).

5.2.2.5 Quasi-condensat non-homogène

Dans le cas d'un système non homogène de densité $n(x)$ et de taille ℓ , on peut reprendre l'expression Eq.(5.11) en faisant le changement de variable $u = x_2 - x$ avec $x = x_1$,

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle = \int dx \int du e^{iku} \langle \delta n(x, t_v) \delta n(x + u, t_v) \rangle. \quad (5.30)$$

Le terme $\langle \delta n(x, t_v) \delta n(x + u, t_v) \rangle$ a une contribution non négligeable pour des $u \ll \ell$ tant que l'on s'intéresse à des k tels que $k \gg 1/\ell$. On peut alors faire une LDA et écrire

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle = \int dx \langle |\tilde{\rho}_{n(x)}(k)|^2 \rangle \quad (5.31)$$

où $\langle |\tilde{\rho}_{n(x)}(k)|^2 \rangle$ correspond au spectre de puissance d'un nuage homogène de densité $n(x)$ (c'est une quantité intensive). Cette hypothèse a été testée avec succès en la comparant avec des calculs numériques en utilisant la théorie Bogoliubov (Eq.E7 de [73]).

5.2.2.6 Mesures expérimentales

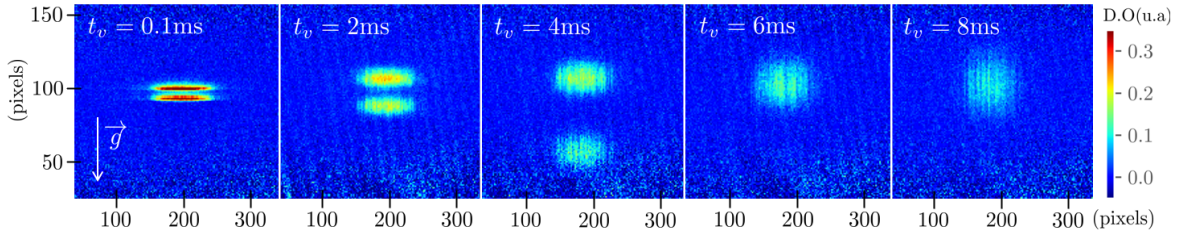


FIGURE 5.5 – Images 2D du profil de densité (en densités optiques) pour différents temps de vol t_v . Le nuage est en chute libre tandis que la réflexion reste alignée sur l'axe optique. La taille transverse augmente rapidement avec t_v du fait du fort confinement, $f_{\perp} = 2.56\text{KHz}$. À l'inverse, le profil longitudinal ne change pas au cours du temps de vol, $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$. Un pixel équivaut à $1.77\mu\text{m}$ dans le plan des atomes.

Pour extraire expérimentalement le spectre de puissance des ondulations de densité, on coupe le confinement longitudinal et transverse du potentiel où sont piégés les atomes afin que ces derniers chutent pendant un temps de vol $t_v = 8\text{ms}$, Fig.5.5. Pour chaque réalisation, on calcule $\rho(k)$ en effectuant une Transformée de Fourier Rapide (*Fast Fourier Transform*, *FFT* en anglais) des fluctuations de densité (en soustrayant le profil moyen). Le spectre de puissance est alors

$$\langle |\rho(k)|^2 \rangle_{\text{exp}} = \underbrace{\langle |\rho(k)|^2 \rangle}_{(1)} e^{-k^2 \sigma^2} + \underbrace{\langle |\rho_{\text{SN}}|^2 \rangle}_{(2)}. \quad (5.32)$$

avec $\langle |\rho(k)|^2 \rangle$ le spectre de puissance des ondulations de densité et où $\langle \rangle$ désigne le moyennage sur un grand nombre de réalisations (~ 50). Les autres termes sont explicités ci-dessous. Pour comparer au spectre théorique Eq.(5.31), il faut prendre en compte deux effets :

- Il est important expérimentalement de prendre en compte la résolution optique finie de

l'imagerie. On la modélise par une convolution du profil de densité par une gaussienne de type

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (5.33)$$

où σ est la résolution optique. Cela revient à multiplier le spectre de puissance par une gaussienne, d'où le terme (1) dans Eq.(5.32).

- le terme (2) correspond aux fluctuations de densité extraites des données liées non pas à des fluctuations, mais au bruit de grenaille optique. Ce spectre est la transformée de Fourier de

$$\langle \delta n(x)^2 \rangle = \left(\frac{\Delta^2}{\sigma(I)} \right)^2 \sum_y \left[\frac{1}{N_1(x, y)} + \frac{1}{N_2(x, y)} \right] \quad (5.34)$$

avec $\Delta = 1.77\mu\text{m}$ la taille d'un pixel de la caméra dans le plan des atomes, $\sigma(I)$ la section efficace de diffusion et $N_{1/2}(x, y)$ le nombre de photons reçus par la caméra au pixel de coordonnées x et y sur l'image 1/2.

Pendant le temps de vol, le gaz tombe en chute libre. L'image réfléchiée du gaz par la puce se déplace sur l'axe optique, Fig.5.6(a). Il faut alors translater la caméra selon l'axe optique pour pouvoir être au point sur la réflexion du gaz. Le protocole de mise au point utilisé est le suivant : on extrait le spectre de puissance des ondulations de densités pour différentes positions de la caméra et on cherche la position qui minimise σ . Comme on le voit sur la Fig.5.6(b), la résolution minimale mesurée vaut $\sigma = 2.3\mu\text{m}$. Elle est supérieure à celle historiquement mesurée lors de l'installation de l'objectif du système d'imagerie $\sigma_H = 0.8\mu\text{m}$ [119]. Cela s'explique par l'étalement transverse important du nuage lors du temps de vol ($\sim 100\mu\text{m}$), étalement beaucoup plus grand que la profondeur de champ du système d'imagerie ($\sim 5\mu\text{m}$). On s'attend alors à ce que la résolution optique mesurée σ soit plus grande que σ_H . Cet effet est plus fort pour des confinements transverses importants.

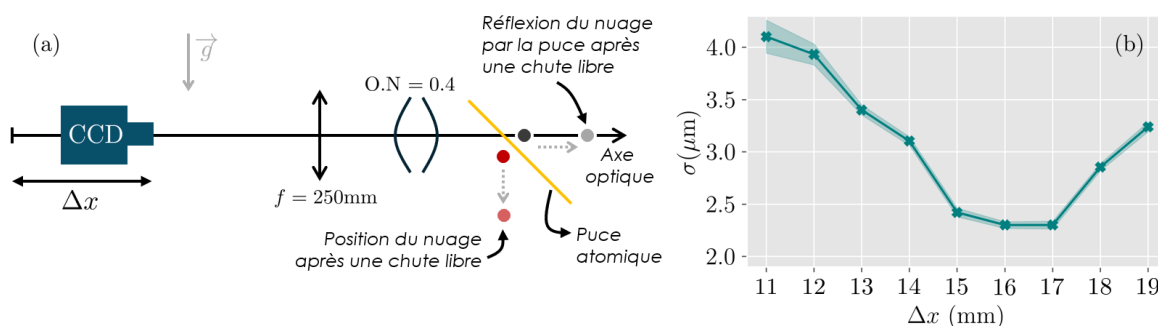


FIGURE 5.6 – (a) Initialement, la caméra est au point sur le gaz piégé à $7\mu\text{m}$ de la puce atomique. Lors de la chute libre du gaz, la réflexion du nuage par la puce reste alignée sur l'axe optique mais se déplace. La caméra CCD doit alors être translaturée pour être de nouveau au point sur la réflexion du nuage – (b) Résolution σ ajustée avec l'obtention du spectre de puissance des fluctuations de densité pour différentes positions de la caméra CCD Δx . La caméra est au point sur les atomes lorsque la résolution est minimale.

Une fois tous ces points pris en compte, la température du système peut être extraite

expérimentalement. C'est ce qui est fait Fig.5.4(b), où le spectre de puissance obtenu est ajusté par le spectre attendu avec Eq.(5.22) et en prenant en compte la limitation par la résolution optique. Dans ce cas particulier, la température obtenue est $T_{\text{fit}} = 92 \pm 4\text{nK}$.

5.2.2.7 Commentaire sur les mesures de températures

Dans ma thèse, les deux protocoles de thermométrie ont été utilisés. De façon systématique, les températures Yang Yang T_{YY} sont plus grandes que celles extraites des ondulations de densité : le rapport des températures est dépendant des conditions initiales et peut atteindre un facteur ~ 2 . Un comportement similaire avait déjà été remarqué par l'équipe dans le passé en comparant la température T_{YY} à celle déduite des fluctuations de densité *in situ*[144].

Les ondulations de densité comme les fluctuations de densité *in situ* sondent la température des phonons, ce qui n'est pas le cas de la thermodynamique Yang Yang qui sondent les excitations d'énergies plus grandes (les phonons sont principalement au centre du nuage bien décrit par la parabole Thomas-Fermi). Ces différences de température pourraient être liées au fait que le système n'est pas bien décrit par un ensemble de Gibbs, mais plutôt par un [Ensemble de Gibbs Généralisé](#) [144].

Dans cette thèse, nous allons voir que l'on a d'autres observables en désaccord avec l'hypothèse d'un système décrit par un ensemble thermique.

En résumé

- À partir d'image en absorption, on reconstruit le profil de densité atomique.
- Les fluctuations de phase d'un gaz donnent naissance à des fluctuations de densité après un temps de vol : elles sont appelées ondulations de densité. Il est possible d'extraire une température à partir de la mesure du spectre de puissance des ondulations.
- Dans le cas de petits temps de vol, la densité spectrale des ondulations pour un k donné est directement proportionnelle à $\langle |\theta_k|^2 \rangle$.
- L'[Approximation de Densité Locale](#) permet de prendre en compte les inhomogénéités du gaz.

MISE EN PLACE D’UN OUTIL DE SÉLECTION SPATIAL

Sommaire

6.1 Principe de sélection	100
6.2 Mise en place expérimentale	101
6.2.1 Contrôle du DMD	101
6.2.2 Montage optique	101
6.2.3 Mise au point	103
6.2.4 Imagerie sur les atomes	105
6.3 Caractérisation de la sélection	106
6.3.1 Estimation de la puissance nécessaire	106
6.3.2 Mesure de la puissance nécessaire	108
6.3.3 Imagerie par fluorescence	109
6.3.4 Limitations	110

La mise en place d’un outil de sélection spatial a été un projet expérimental important lors de ma thèse. L’objectif est d’être capable de retirer les atomes situés à des emplacements spécifiques du gaz. Cet outil à deux utilisations principales.

- Cet outil permet de sonder la distribution de rapidités spatialement résolue d’un gaz de [Lieb Liniger \(LL\)](#) à l’équilibre ou non. En effet, cet outil permet de sélectionner localement une zone du gaz. Le confinement longitudinal peut-être ensuite coupé afin de réaliser une expansion longitudinale de la zone sélectionnée, voir par exemple [Fig.6.1\(c\)](#). Le profil de densité asymptotique est alors homothétique à la distribution de rapidité spatialement résolue, comme détaillé dans la [Section1.1.3.4](#).
- Cet outil permet aussi de produire des situations hors équilibres. L’expérience de puce atomique du [LCF](#) a déjà permis d’étudier des dynamiques hors équilibres en changeant

rapidement le paramètre d'interaction g [73] ou en modifiant brusquement la forme du potentiel longitudinal [63]. À partir de situations à l'équilibre, l'outil de sélection spatial permet de retirer une zone du nuage atomique afin de produire un état hors équilibre. Par exemple, ce protocole permet de produire une situation similaire à celle du pendule de Newton comme on peut le voir sur la Fig.6.1(b).

Ce chapitre décrit la mise en place et la caractérisation de cet outil de sélection spatial.

6.1 Principe de sélection

Afin de faire une sélection du nuage atomique, nous avons décidé d'utiliser un faisceau lumineux proche résonance sur la transition cyclante hyperfine $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la ligne D2, voir Fig.4.6. Les atomes illuminés ressentent une pression de radiation liée au processus d'absorption et de réémission spontanée [145]. Après une quinzaine de cycles d'absorption-réémission, les atomes ne sont plus confinés, soit parce qu'ils sont descendus dans un état magnétique anti-piégé ou bien parce qu'ils ont reçu assez d'énergie pour quitter le puits de potentiel.

La sélection doit être spatialement résolue : le faisceau lumineux doit être façonné spatialement. Par exemple, dans le cas particulier où l'on souhaite sélectionner une zone $x \in [x_1, x_2]$ du nuage atomique, le profil d'intensité doit dans le plan des atomes prendre la forme

$$I(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [x_1, x_2] \\ I_0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (6.1)$$

Pour cela, on a utilisé un **Dispositif de Micromiroirs Digitaux (DMD)**, un modulateur spatial de lumière, dont on fait l'image dans le plan des atomes. Le **DMD** (*DLP7000 0.7XGA 2x LVDS Type A DMD, Texas Instrument*) est une matrice de 1024×768 micro-miroirs métalliques de $13.68\mu\text{m}$ de côté. Chaque micro-miroir peut être incliné selon deux positions symétriques ($\pm 12^\circ$) autour de sa diagonale, voir Fig.6.1(a). Le choix de l'angle de chaque micro-miroir permet de réfléchir ou non la lumière dans la bonne direction [146]. De cette manière, en inclinant les micro-miroirs de façon appropriée, il est possible d'illuminer les atomes avec un faisceau à géométrie contrôlée en faisant l'image du plan du **DMD** sur des atomes. Ce dispositif est très largement utilisé dans les expériences d'atomes froids. Il est aussi bien utilisé dans son plan de Fourier que par imagerie directe. Il permet de produire des potentiels à géométrie particulière [147, 148], des faisceaux d'intensité quasi homogènes [149], ou bien encore il permet d'adresser un site dans les microscopes atomiques à gaz quantiques [150, 151]. Dans notre cas, on a cherché à faire l'image directe du **DMD** sur le plan des atomes.

D'autres méthodes permettraient d'enlever des atomes : on peut notamment penser à un processus cohérent, en transférant, par transition Raman ou par pulse micro-ondes, les atomes de l'état piégé $|F = 2, m_F = 2\rangle$ à l'état anti-piégé $|F = 1, m_F = 1\rangle$. Par souci de simplicité, le protocole avec la pression de radiation a été choisi, la mise en place est détaillée dans la suite.

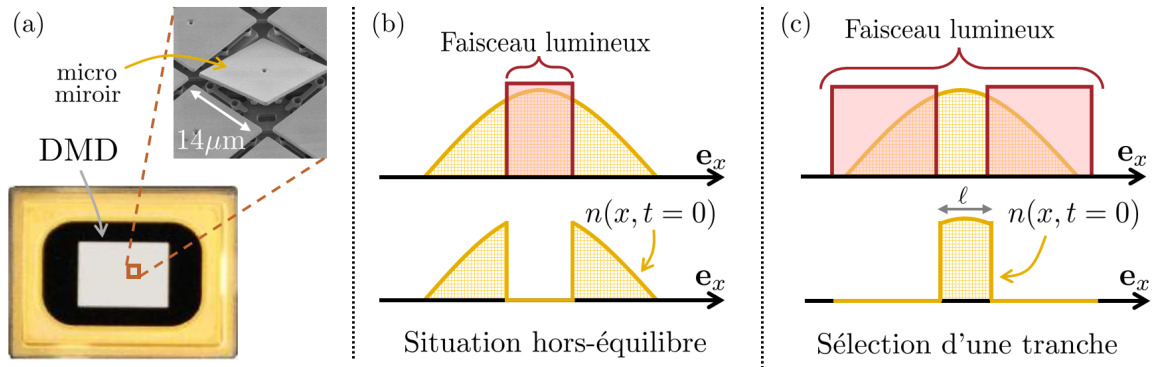


FIGURE 6.1 – (a) Image d'un DMD avec visualisation d'un micro-miroir incliné de 12° – (b) Exemple de production d'un état hors équilibre avec le principe de sélection – (c) Sélection d'une zone du gaz, en vue de la mesure de la distribution de rapidités localement résolue $\rho(x, t)$: après une expansion longitudinale de temps $t \rightarrow \infty$, le profil de densité converge vers $\rho(x/t)\ell/t$.

6.2 Mise en place expérimentale

6.2.1 Contrôle du DMD

La programmation pour le contrôle du DMD a été menée en étroite collaboration avec Isabelle Bouchoule et Florence Nogrette, ingénieure de recherche au LCF. Le DMD a été acheté intégré dans un module (*V7001-SuperSpeed*, *Vialux*) comprenant notamment les bibliothèques ALP-4 que nous avons utilisées pour le contrôle du système [152].

Pendant un cycle expérimental, nous avons besoin de changer plusieurs fois la configuration du DMD : par exemple, le gaz peut être illuminé une première fois pour produire une situation hors équilibre puis une seconde fois pour faire une mesure locale de la distribution de rapidités. Techniquement, l'ensemble des configurations du DMD sont chargées au début de chaque cycle. Pendant le cycle, un signal digital délivré par le séquenceur permet de changer de configuration : le temps entre la commande et la réponse des micro-miroirs est inférieur à $30\mu\text{s}$, ce qui est largement suffisant pour la réalisation des différents protocoles.

6.2.2 Montage optique

Le faisceau de sélection doit avoir une fréquence proche de la fréquence de la transition $F = 2 \rightarrow F' = 3$ de la raie D2 du Rb. Le faisceau sonde utilisé pour l'imagerie est déjà résonnant à cette transition. Ainsi, nous avons choisi de diviser le faisceau sonde en deux faisceaux par un cube séparateur de polarisation en aval d'une lame demi-onde $\lambda/2$. Le faisceau récupéré est le faisceau de sélection. Il est injecté dans une fibre optique avec de nouveau en amont de l'injection de la fibre une lame $\lambda/2$ et un cube séparateur de polarisation pour ajuster la puissance d'injection.

Au cours du cycle expérimental, il faut pouvoir bloquer le faisceau de sélection à tout moment. Pour cela, on utilise :

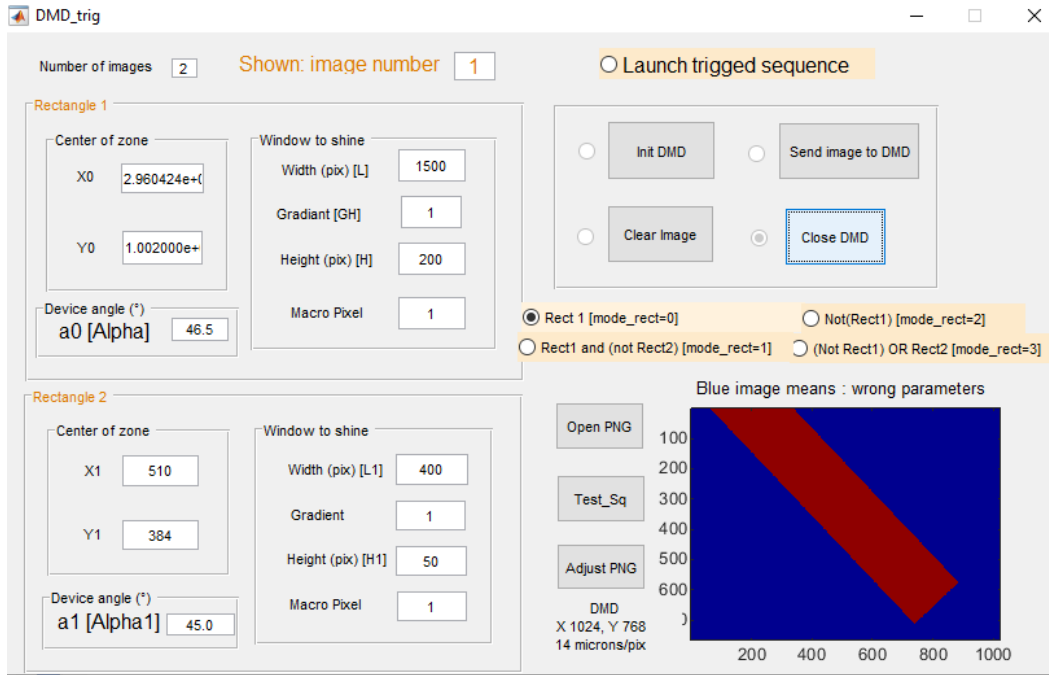


FIGURE 6.2 – Capture d'écran de l'interface graphique du programme de contrôle du DMD. l'image en bas à droite correspond à la configuration des micro-miroirs (la partie rouge correspond à la partie réfléchiée dans le système optique). Pendant un cycle expérimental, ce programme est contrôlé par le séquenceur.

- un cache mécanique contrôlé par un électroaimant (communément appelé clic-clac) et placé juste avant la fibre optique. Les temps d'ouverture et de fermeture de ce cache sont de l'ordre de $\simeq 500\mu\text{s}$;
- pour s'affranchir des délais d'ouverture et de fermeture du cache (on veut produire des courtes impulsions de l'ordre de quelques dizaines de μs), le faisceau de sélection peut aussi être coupé avec un modulateur acousto-optique placé en sortie de l'amplificateur évasé, c'est-à-dire en amont du faisceau sonde et du faisceau de sélection. Ainsi, quand le faisceau sonde est utilisé pour imager le gaz, il est important de s'assurer que le cache mécanique bloque le faisceau de sélection puisque le modulateur acousto-optique laisse passer la lumière.

Le faisceau en sortie de la fibre optique est mis en forme par le DMD. Ce dernier est imagé sur le plan des atomes avec le montage schématisé sur la Fig.6.3(a). Le faisceau réfléchi par le DMD est diffracté. On récupère l'ordre 0 de diffraction à l'aide d'un diaphragme, correspondant à 50% de la puissance totale incidente. Toutes les optiques ont été choisies avec un diamètre $d = 50\text{mm}$ afin de limiter les effets de diffraction. Les alignements ont été réalisés en alignant le faisceau façonné par le DMD avec le faisceau sonde.

En termes de grandissement, l'idée est de pouvoir illuminer tout le nuage atomique si besoin : en général, les nuages atomiques placés dans des pièges harmoniques avec les fréquences longitudinales les plus basses $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$ font une taille de $L \simeq 400\mu\text{m}$ de long. Le doublet (1) de la Fig.6.3(a) est choisi de focale $f_1 = 750\text{mm}$ tel que le faisceau réfléchi par l'entièreté

du **DMD** couvre dans le plan des atomes une zone $L_{\text{DMD}} = 600\mu\text{m}$: l'objectif des atomes est approximé ici par une lentille convergente simple de focal $f = 32\text{mm}$. Le grandissement théorique est de $G = f/f_1 = 0.043$.

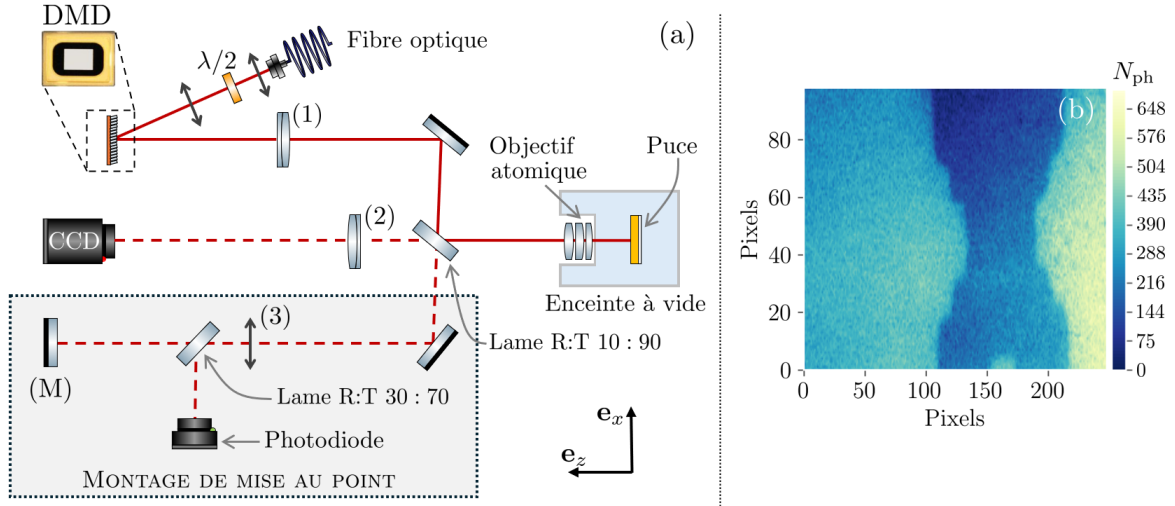


FIGURE 6.3 – (a) Schéma optique pour la mise au point de l'image du **DMD** sur le plan des atomes. Le faisceau laser en sortie de la fibre optique éclaire le **DMD**. Ce dernier est alors imagé dans le plan des atomes, à $7\mu\text{m}$ de la puce. La partie grisée est le système optique utilisé pour la mise au point et la mesure de puissance des faisceaux – (b) Image mise au point sur la **CCD** de l'objet placé à la surface du miroir (M).

6.2.3 Mise au point

Avec le montage utilisé, il n'est pas évident de conjuguer précisément le **DMD** avec le plan des atomes. La mise au point du **DMD** sur les atomes est réalisée de la manière suivante :

- La caméra **CCD** qui sert à imagier les atomes est conjuguée au plan des atomes grâce au doublet (2) de focale $f_2 = 250\text{mm}$. En réalité, on fait la mise au point sur la surface de la puce à $7\mu\text{m}$ des atomes¹. La mise au point est réalisée en translatant la **CCD** représentée sur la Fig.6.3(a).
- On ajoute au montage optique un système supplémentaire de mise au point comprenant notamment le miroir (M) et la lentille (3) de focale $f_3 = 250\text{mm}$ représentés par la zone grise sur la Fig.6.3(a). On souhaite conjuguer le miroir (M) avec la **CCD**. Pour cela, on scotche sur le miroir (M) une lettre imprimée puis on en fait l'image sur la caméra **CCD**. La Fig.6.3(b) est l'image de la lettre X sur la **CCD** une fois la mise au point réalisée en translatant le miroir (M).
- Finalement, on fait la mise au point de l'image du **DMD** sur la **CCD** après avoir été réfléchi par le miroir (M). Le **DMD** est alors conjugué au plan des atomes.

1. On aurait pu aussi faire la mise au point plus finement directement sur les atomes en minimisant la taille transverse du nuage obtenue avec une imagerie *in situ*.

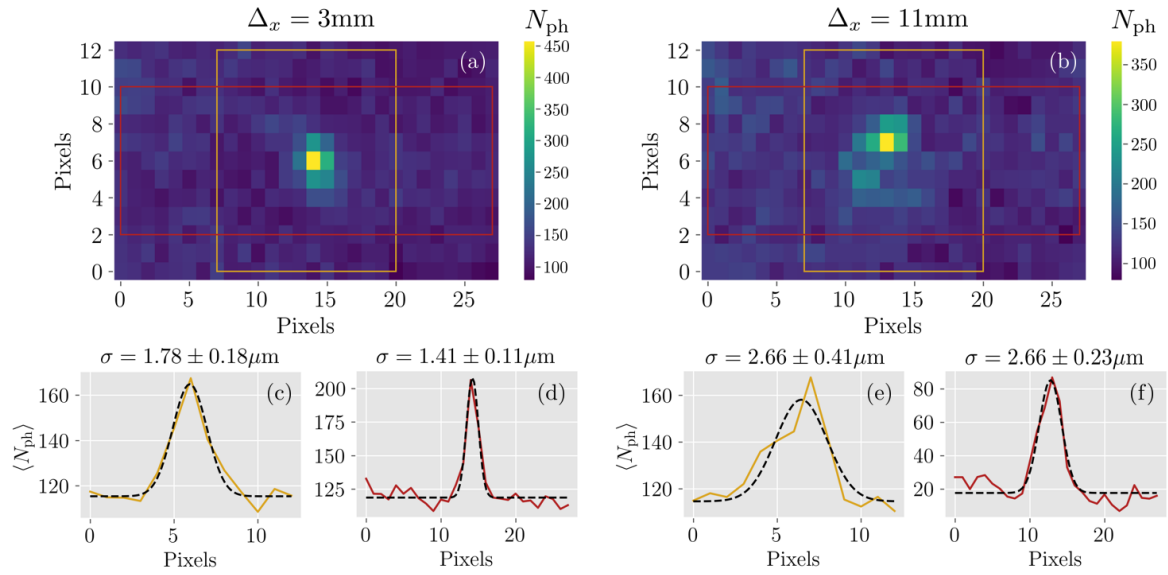


FIGURE 6.4 – (a), (b) Images sur la caméra CCD d'un point sur le DMD. La position de la lentille (1) est notée Δ_x – (c), (e) Coupes verticales correspondant aux photons collectés dans les cadres jaunes et moyennés sur le long de l'axe horizontal – (d), (f) Coupes horizontales correspondant aux photons collectés dans les cadres rouges et moyennés sur le long de l'axe vertical.

La mise au point du DMD sur la caméra CCD se fait en traduisant à l'aide d'un vernier la lentille (1) représentée sur la Fig.6.3(a) de focale $f_1 = 750\text{mm}$. Seul un pixel du DMD réfléchit la lumière dans la bonne direction afin de mesurer la *fonction d'étalement du point (PSF)* (*Point Spread Function* en anglais) du système optique. De tels profils sont représentés sur les Fig.6.4(a) et (b) avec Δ_x la position de la lentille (1) sur le vernier. La PSF est ajustée par une gaussienne de largeur σ longitudinalement et transversalement, voir Fig.6.4(c) à (f).

En changeant la position du vernier Δ_x , on a remarqué que le système présente un léger astigmatisme. On choisit la position Δ_x afin de minimiser longitudinalement la largeur σ de la gaussienne ajustée, c'est-à-dire pour une valeur $\Delta_x = 3\text{mm}$, voir Fig.6.5.

La résolution minimale est ici obtenue en faisant l'image du DMD sur la CCD, c'est-à-dire en passant par la lentille (2), avec une *Ouverture Numérique (ON)* de $ON = 0.20$. L'ON de l'objectif atomique étant bien plus grand $ON = 0.38$, on s'attend alors à une meilleure résolution puisque la résolution est inversement proportionnelle à l'ON, $\delta = 0.61\lambda/ON$.

Une fois la mise au point réalisée, une zone du DMD de 50×50 pixels est réfléchiée dans la bonne direction afin d'estimer la taille élargie des bords du rectangle imagé dans le plan des atomes. Cet élargissement est limité par les géométries des optiques et les ouvertures numériques des lentilles. De telles mesures sont représentées sur la Fig.6.6 où l'on étudie l'image du rectangle sur la caméra CCD, conjuguée au plan des atomes. Les bords sont ajustés par une fonction *erf* de largeur σ . Ici l'élargissement est de $1.6\mu\text{m}$ longitudinalement et $2\mu\text{m}$ transversalement. Il est à noter qu'en réalité, en utilisant le même argument que pour la PSF, lorsque le faisceau façonné par le DMD frappe les atomes, on s'attend à un élargissement

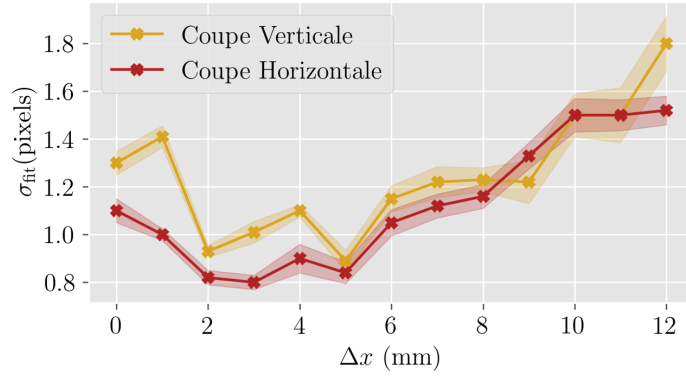


FIGURE 6.5 – Largeur des gaussiennes ajustée à partir des coupes verticales et horizontales pour des PSF obtenus pour différents Δ_x .

moindre du bord d'un rectangle, car ce dernier passe au travers de l'objectif atomique qui a une plus grande ouverture numérique que la lentille (3).

Enfin, une photodiode a été rajoutée au montage grâce à une lame semi-réfléchissante placée sur l'axe optique de la CCD afin de pouvoir optimiser l'injection de la fibre optique, voir la Fig.6.3(a).

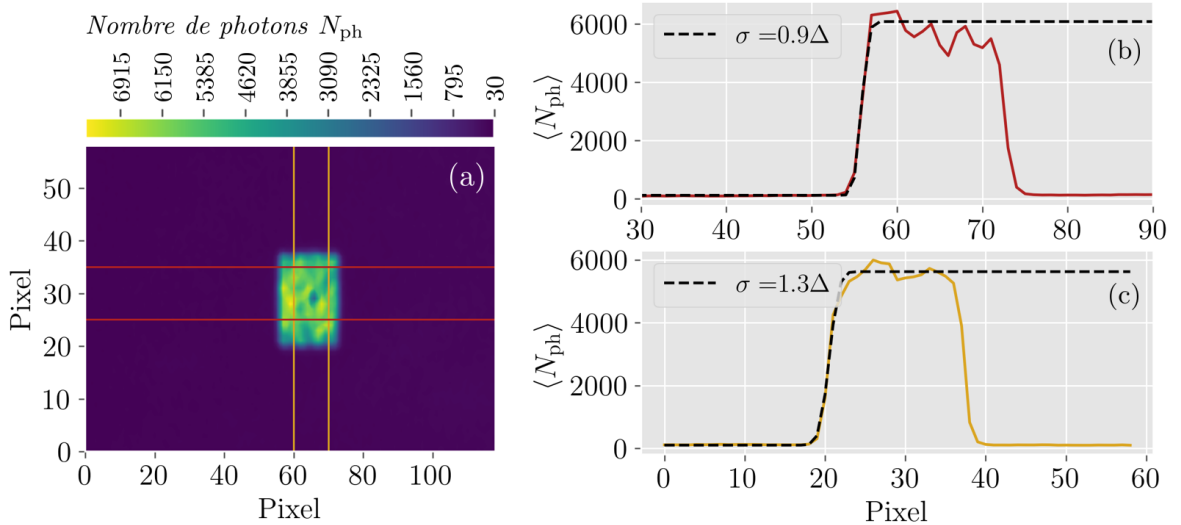


FIGURE 6.6 – (a) Image du DMD sur la caméra CCD. – Coupe horizontale (c) et verticale (b) où le nombre de photons est moyenné sur les zones représentées sur la Fig(a). Les bords sont ajustés par une fonction *erf* avec comme paramètre d'ajustement la largeur de la fonction σ .

6.2.4 Imagerie sur les atomes

Une fois les alignements et la mise au point réalisés, on peut regarder l'effet du faisceau DMD sur les atomes. Pour cela, il faut placer ce dernier correctement par rapport au gaz. Dans le plan des atomes, la taille transverse σ du faisceau DMD est choisie telle que $\sigma < 10\mu\text{m}$. Cette condition permet de s'assurer que le faisceau réfléchi par la puce n'illumine pas les atomes

(placés à $7\mu\text{m}$ de la surface de la puce) : cela permet d'éviter la présence d'interférences entre le faisceau direct et le faisceau réfléchi. On peut alors placer finement l'image du DMD sur les atomes. On scanne la position y définie sur la Fig.6.7(a) et on mesure le nombre d'atomes restant après un temps d'illumination $\tau_p = 30\mu\text{s}$. Comme on le voit sur la Fig.6.7(b), deux minima apparaissent, liés à l'illumination du gaz par le faisceau direct et par le faisceau réfléchi. Ce protocole permet de mesurer la distance des atomes à la surface de la puce, en bon accord avec les mesures à partir des images *in situ* où le gaz et sa réflexion sont imagées, voir par exemple la Fig.6.7(c).

Sur les Fig.6.7(c) et (d), on peut voir un exemple de sélection locale sur un gaz : les profils avant et après illumination y sont représentés. Le grandissement expérimental mesuré est $G_{\text{exp}} = 0.038(3)$.

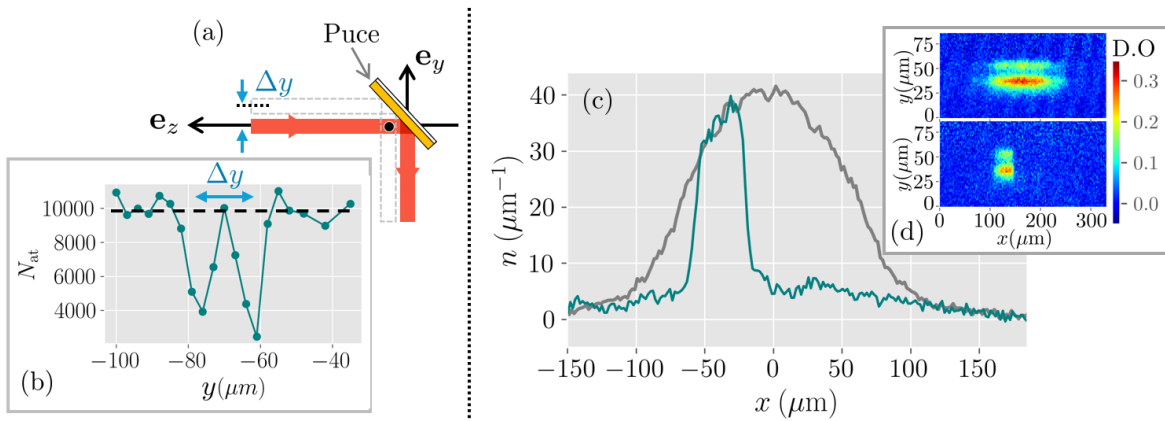


FIGURE 6.7 – (a) Le faisceau est caractérisé par sa position ϵ selon l'axe e_y . Si la taille de l'image du DMD dans le plan des atomes est suffisamment petite le long de l'axe e_y , les atomes représentés ici par un disque noir peuvent être poussés soit par le faisceau direct (traits rouges) ou soit par le faisceau réfléchi par la puce (traits gris pointillés) (b) Nombre d'atomes N_{at} restant dans le piège en fonction de la position ϵ du faisceau. Les mesures sont prises pour une image du DMD dans le plan des atomes faisant $600\mu\text{m}$ selon l'axe e_x et $\sigma = 5\mu\text{m}$ selon l'axe e_y – (c) Profil de densité sans et avec sélection. Comme la densité est mesurée 1ms après la sélection, on image encore quelques atomes dans la zone illuminée, hors du piège, mais absorbant néanmoins une partie du faisceau sonde – (d) Images 2D en DO avant et 1ms après la sélection.

6.3 Caractérisation de la sélection

6.3.1 Estimation de la puissance nécessaire

On souhaite estimer le nombre de photons diffusés par atome N_{sc} nécessaire pour expulser les atomes hors du piège. En étant illuminés par le faisceau de sélection, les atomes peuvent ou bien être transférés dans un état anti-piégé ou bien par pression de radiation recevoir une énergie supérieure à la profondeur du puits : dans les deux cas, ils ne sont plus piégés. On s'intéresse ici à l'effet de pression de radiation.

Lorsqu'un atome absorbe un photon se propageant selon la direction $-\mathbf{e}_z$, il reçoit une impulsion $\mathbf{p} = -\hbar k \mathbf{e}_z$ avec k le vecteur d'onde associé au photon. L'atome réémet alors un photon de même énergie de façon isotrope. Lorsque l'atome absorbe et réémet N_{sc} photons, l'énergie cinétique reçue par l'atome s'écrit

$$E_{\text{cin}} = \underbrace{\frac{1}{2m} (N_{\text{sc}} \hbar k)^2}_{(1)} + \underbrace{\frac{N_{\text{sc}}}{2m} (\hbar k)^2}_{(2)} \quad (6.2)$$

avec le terme (1) lié au processus d'absorption et le terme (2) lié au processus d'émission spontanée. Le nombre de photons diffusés étant grand $N_{\text{sc}} \gg 1$, le terme (2) peut être négligé. Pour que l'atome puisse quitter le piège, l'énergie cinétique E_{cin} reçue doit être supérieure à la profondeur du puits de potentiel ΔV . Ainsi,

$$N_{\text{sc}} = N_{\text{sc}}^{(\text{lim})} = \frac{1}{\hbar k} \sqrt{2m \Delta V}. \quad (6.3)$$

La profondeur du puits de potentiel a été estimée numériquement : $\Delta V/k_B = 35 \mu\text{K}$, ce qui correspond à avoir $N_{\text{sc}}^{(\text{lim})} = 15$ photons, voir Fig.6.8(a) et (b). On s'attend alors à ce que les atomes soient expulsés du piège si ces derniers diffusent quelques dizaines de photons.

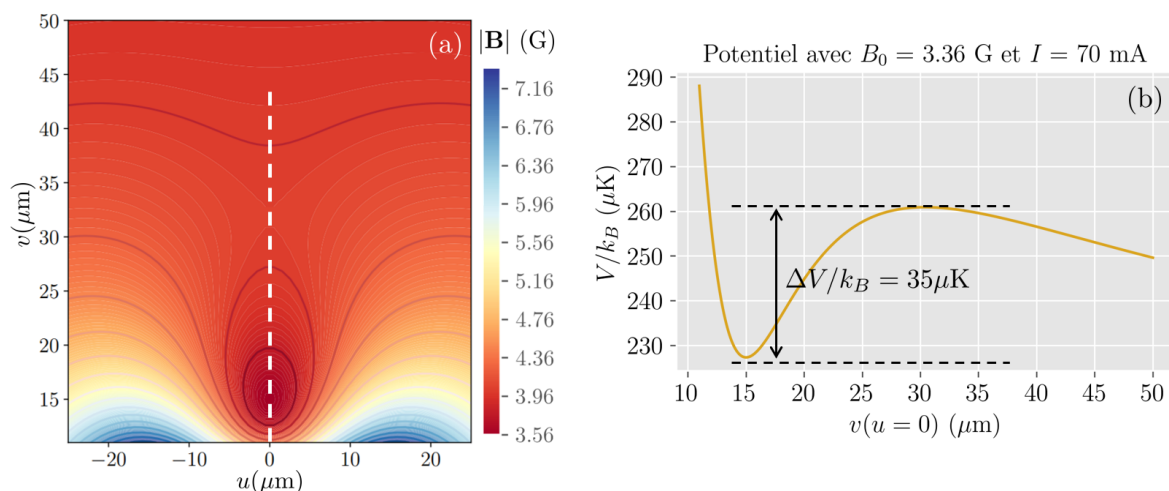


FIGURE 6.8 – (a) Estimation numérique de la norme du champ magnétique produit par un courant $I = \pm 70 \text{mA}$ traversant les trois micro-fils et en présence d'un champ magnétique homogène $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_x$ avec $B_0 = 3.36 \text{G}$ – (b) Norme du potentiel $V = \mu_B |\mathbf{B}|$ selon l'axe u (les traits pointillés de la figure (a) correspondent à la coupe réalisée ici). Le minimum de potentiel se trouve à $15 \mu\text{m}$ des fils comme attendu. La hauteur du puits de potentiel est de $\Delta V/k_B = 35 \mu\text{K}$.

Connaissant le nombre de photons diffusés N_{sc} , on peut alors essayer d'estimer l'intensité et le temps d'illumination nécessaire pour enlever tous les atomes. Le faisceau lumineux induit une transition de l'état $|F = 2, m_F = 2\rangle$ vers l'état $|F' = 3, m_{F'} = 3\rangle$. Cependant, le champ magnétique étant approximativement selon l'axe \mathbf{e}_x , la transition n'est pas exclusive puisque la polarisation du faisceau ne peut pas être polarisée σ^+ par rapport à l'axe \mathbf{e}_x .

Connaissant le champ magnétique, l'intensité et la polarisation du faisceau lumineux, on pourrait résoudre les équations de Bloch optiques afin de connaître à tout instant la population des sous-niveaux Zeeman. Ici, on utilise un modèle heuristique issu de [153] qui prend en compte la polarisation du faisceau, le champ magnétique et la structure des niveaux par un seul paramètre adimensionné α qui définit une intensité de saturation effective,

$$I_{\text{sat}}^{(\text{eff})} = \frac{I_{\text{sat}}}{\alpha}. \quad (6.4)$$

Le taux de photons diffusés s'écrit

$$\Gamma_{\text{sc}} = \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I_{\text{sat}}}{\alpha I}}{1 + \frac{I_{\text{sat}}}{\alpha I} + \left(\frac{2}{\Gamma} \delta\right)^2}, \quad (6.5)$$

avec $\Gamma = 2\pi \times 6.062\text{MHz}$ le taux de désexcitation de la transition [132] et δ le désaccord, ici $\delta = 0$ à résonance. Le nombre de photons diffusés par atomes est donné par $N_{\text{sc}} = \tau_p \Gamma_{\text{sc}}$ avec τ_p le temps d'illumination.

6.3.2 Mesure de la puissance nécessaire

Pour mesurer la puissance nécessaire pour éjecter les atomes du piège, on réalise le protocole suivant : on fixe le temps d'illumination τ_p et on illumine les atomes par un faisceau d'intensité I/I_{sat} au préalable calibré. On répète cette opération pour différentes intensités.

Il faut s'assurer que tous les atomes présents dans la zone illuminée ne sont plus piégés. En effet, si des atomes restent dans la zone illuminée, ils ont très probablement absorbé des photons ou interagit avec des atomes chauffés, leur état a donc été modifié. Dans certaines expériences réalisées au cours de ma thèse et détaillées dans les chapitres suivants, les zones sélectionnées sont petites comparées à la taille totale du gaz. Ainsi, si quelques atomes illuminés restent dans le piège, ils sont la conséquence d'un signal parasite important.

L'idée est de mesurer le nombre total d'atomes avant et après sélection. Pour cela, il est important de pouvoir mesurer précisément le nombre d'atomes après illumination. Pour faire cette mesure de façon précise, on ne peut pas imager le gaz directement après la sélection : en effet, des atomes qui ne sont plus piégés peuvent encore se trouver dans les environs et absorber des photons du faisceau sonde lors de l'imagerie. Ainsi, à la place, l'ensemble du gaz est illuminé par le faisceau de sélection et le nombre d'atomes est mesuré par imagerie après un temps d'attente de $\tau = 10\text{ms}$. De telles mesures sont représentées sur la Fig.6.9 où le faisceau de sélection est à résonance par rapport à la transition avec un temps d'illumination $\tau_p = 20\mu\text{s}$.

Nous avons beaucoup travaillé à ce que l'éclairement du DMD soit le plus homogène possible. En effet, nous avons été limités par la forme gaussienne du faisceau de sélection ainsi que par du speckle. Ceci est limitant puisqu'en présence d'un éclairement inhomogène, si l'on veut enlever tous les atomes sur une zone avec un éclairement inhomogène, certains atomes diffuseraient plus de photons que nécessaires. L'éclairement a été ajusté avec les lentilles en

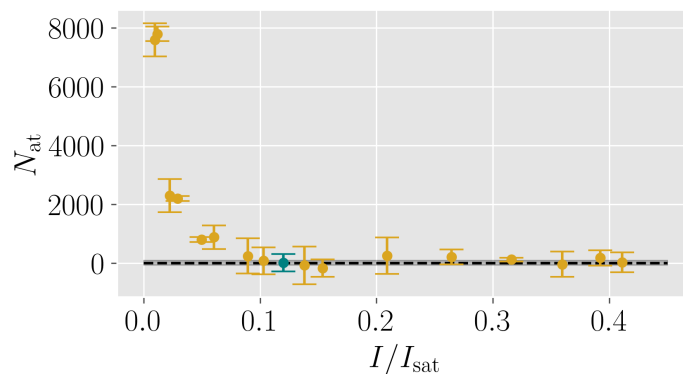


FIGURE 6.9 – Mesure de la puissance minimale nécessaire pour enlever tous les atomes du piège. Le point bleu correspond à l’intensité choisie, $I/I_{\text{sat}} = 0.12$. À partir de cette intensité, on a enlevé 99% des atomes.

sortie de la fibre optique (voir Fig.6.3(a)). Ici les lentilles utilisées sont de focales $f = 8\text{mm}$ (la plus proche de la fibre optique) et $f = 150\text{mm}$.

6.3.3 Imagerie par fluorescence

On cherche ici à estimer expérimentalement le nombre minimum de photons diffusés pour éjecter un atome du piège. Les mesures de cette partie ont été prises pour un faisceau de sélection à résonance avec la transition atomique.

Pour cela, on illumine la partie centrale du nuage par le faisceau de sélection. Dans le plan des atomes, il mesure $37\mu\text{m}$ de long et $7\mu\text{m}$ transversalement de sorte que seul le faisceau direct illumine les atomes. En reprenant les mesures décrites ci-dessus, on commence par mesurer la puissance nécessaire pour enlever la partie centrale du gaz. Dans ce cas particuliers, les paramètres obtenus sont les suivants : une intensité $I = 0.09I_{\text{sat}}$ et un temps d’illumination $\tau_p = 30\mu\text{s}$.

On a ensuite mesuré le nombre de photons diffusés pendant l’illumination du nuage. Pour cela, on regarde le signal de fluorescence que la caméra reçoit lorsque le nuage est éclairé. Un exemple de tel signal est représenté sur la Fig.6.10(b). Le nombre de photons reçu par la caméra correspond à 4.6% du nombre total de photons diffusés (en prenant en compte la présence de la lame semi-réfléchissante, l’ON de l’objectif des atomes et en supposant un diagramme d’émission isotrope). Ces mesures ont été répétées pour différents temps τ_p plus grands que le temps minimal utilisé pour enlever tous les atomes puisque le signal est alors trop faible pour être analysé. Connaissant le nombre d’atomes total dans la zone illuminée, on peut alors en déduire le nombre de photons diffusés par atome, voir Fig.6.10(c).

Le nombre de photons diffusés minimal mesuré est de l’ordre de la vingtaine, ce qui cohérent avec les estimations de la partie précédente. De plus, il est possible de comparer les mesures avec le modèle permettant d’écrire le taux de photons diffusés comme Eq.(6.5). On a alors réalisé un ajustement des données avec α comme paramètre libre (courbe noire de la Fig.6.10(b)). L’ajustement donne une valeur de $\alpha = 0.4$. La courbe noire a été obtenue

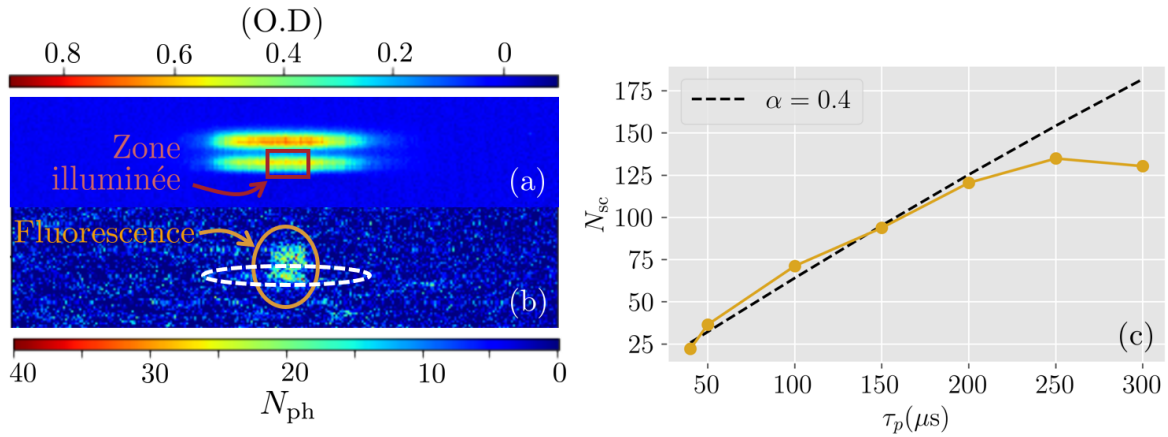


FIGURE 6.10 – (a) Image 2D *in situ* en densité optique du gaz que l'on souhaite étudier. La zone rouge est la zone qui va être illuminée par le faisceau façonné par le DMD – (b) Image 2D de fluorescence obtenue pendant l'illumination de la zone rouge présentée en (a). L'ellipse blanc correspond à l'emplacement des atomes – (c) La courbe jaune correspond aux mesures N_{sc} en fonction de τ_p . Pour des temps courts, les données sont comparées avec $N_{sc} = \tau_p \Gamma_{sc}$ où Γ_{sc} est donné par l'Eq.(6.5) avec $\alpha = 0.4$.

en prennent en compte le décalage Doppler lié à la vitesse de recul que reçoivent les atomes pendant l'illumination. Le nombre de photons diffusés après un temps τ_p d'illumination est alors donné par

$$N_{sc}(\tau_p) = \int_0^{\tau_p} dt \frac{\Gamma}{2} \frac{\frac{I}{\alpha I_{sat}}}{1 + \frac{I}{\alpha I_{sat}} + \left(\frac{2}{\Gamma} f_D(t)\right)^2} \quad (6.6)$$

avec $f_D(t) = N_{sc}(t) \hbar k^2 / m$ la fréquence liée au décalage Doppler des atomes puisque ces derniers ont déjà absorbé et rediffusé N_{sc} photons. Cet effet est néanmoins négligeable (à 5% près pour $\tau_p = 300 \mu s$).

On observe expérimentalement une saturation du nombre de photons diffusés par atomes après un temps d'illumination $\tau_p > 150 \mu s$. Cette saturation peut être expliquée par le fait que les atomes accélérés au cours de l'illumination finissent par se coller sur la puce. Le déplacement après un temps d'illumination $\tau_p > 150 \mu s$ vaut

$$\Delta z = \frac{\hbar k}{m} \tau_p N_{sc} > 9 \mu m \quad (6.7)$$

qui devient plus grand que la distance entre le centre du piège et la surface de la puce.

6.3.4 Limitations

Le processus de sélection peut être limité par différents processus physiques qui sont listés et discutés dans la suite.

les phénomènes de diffraction par le système optique, liés à la taille finie des optiques. En supposant que l'objectif atomique est l'objectif limitant, on estime que le bord présente un élargissement de $\sim 1 - 2 \mu m$, voir Fig.6.11(a). Le premier rebond se trouve à $1 \mu m$

du bord. De plus, si la puissance est choisie de telle sorte à ce que les atomes illuminés diffusent 15 photons, les atomes au niveau du premier rebond diffuseraient ~ 1 photon. Cet effet de bord devrait avoir un effet sur les dynamiques à court terme. Cependant, les protocoles étudiés considèrent des évolutions à long temps, où les phénomènes de bords sont alors négligeables.

Des photons du faisceau de sélection peuvent aussi être diffusés par certaines optiques et plus précisément par la puce atomique. Un tel phénomène a été observé lorsque l'entièreté du DMD est imagé dans le plan des atomes, voir Fig.6.11(b). Cette diffusion a été observée pour un éclairage à très forte intensité, très loin de l'intensité minimale utilisée pour enlever tous les atomes (avec deux ordres de grandeurs de différence). De plus, pour limiter ce processus de diffusion, on a réduit au maximum la taille transverse du faisceau de sélection : le nuage ayant une taille $\simeq 200\text{nm}$, avec un grandissement de $G_{\text{exp}} = 0.038$, il suffit d'utiliser une bande d'un micro-miroir de large pour illuminer le nuage atomique. On utilise expérimentalement 3 à 10 micro-miroirs.

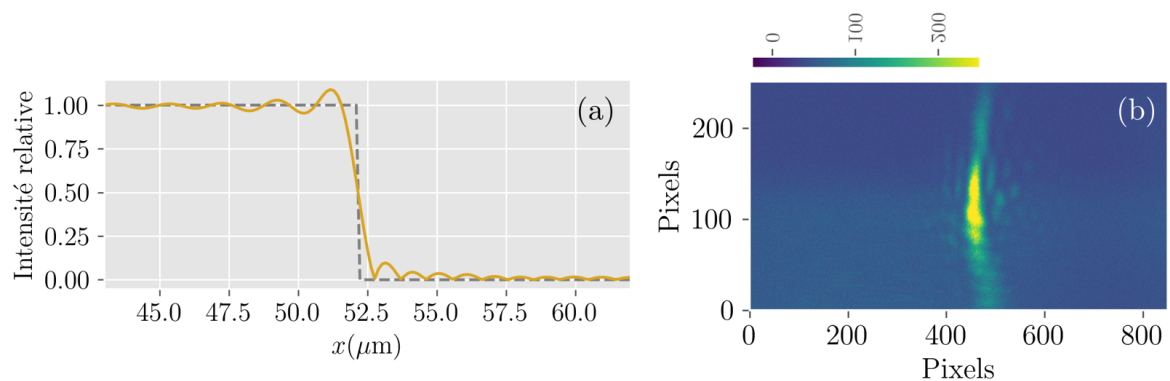


FIGURE 6.11 – (a) Estimation de la déformation du bord de l'image du DMD dans le plan des atomes dû à la taille finie de l'objectif atomique – (b) Photons reçus par la caméra d'imagerie et venant de processus de diffusion par la puce atomique.

La sélection peut aussi être limitée par les inhomogénéités d'intensité du faisceau de sélection : certaines zones du gaz seraient alors sur-illuminées afin de pouvoir enlever les atomes sur l'entièreté de la sélection. On a travaillé à homogénéiser le plus possible l'éclairage du DMD avec une intensité du faisceau d'éclairage variant de $\Delta I / \langle I \rangle = 50\%$ sur toute la zone du DMD.

Enfin, les photons diffusés par les atomes illuminés pourraient être réabsorbés par les atomes sélectionnés, entraînant alors un chauffage du gaz. Pour un temps d'illumination $\tau_p = 30\mu\text{s}$, le taux de photons diffusés minimum permettant d'enlever tous les atomes est tel que $\Gamma_{\text{sc}} = 2 \cdot 10^{-2} \times \Gamma$ avec $\Gamma = 2\pi \times 6.062\text{MHz}$. Comme $\Gamma_{\text{sc}} \ll \Gamma$, les photons diffusés sont principalement émis à la fréquence du laser. Ainsi, pour limiter le processus de réabsorption de photons diffusés, on peut désaccorder légèrement le faisceau éclairant le DMD tel que $f - f_0 = \delta$ avec f_0 la fréquence de la transition atomique. Nous avons désaccordé le laser de 15 MHz tout en augmentant l'intensité I telle que le taux de diffusion soit maintenu constant : les atomes illuminés diffusent le même nombre de photons qu'à résonance. Cependant, comme la fréquence de ces photons est celle du laser, il est beaucoup moins probable

qu'ils soient réabsorbés par les atomes restants. Néanmoins, expérimentalement, nous n'avons pas vu d'effets significatifs du désaccord sur le processus de sélection. Dans le futur, l'effet de réabsorption des photons est un phénomène que nous aimerions estimer.

Une façon de contrôler l'effet de la sélection sur les atomes restants est de comparer la température avant et après la sélection. Cette information peut en effet être extraite en étudiant les ondulations de densité. Les Fig.6.12(a) et (b) présentent de telles mesures. Les températures extraites sont similaires avant et après sélection. De plus, les tailles transverses après 8ms de temps de vol sont identiques avant et après sélection.

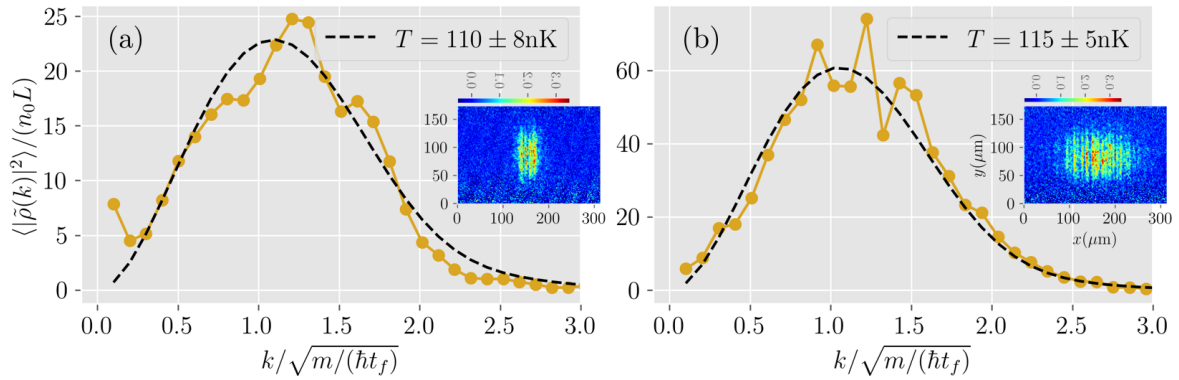


FIGURE 6.12 – Extraction de la température de gaz au travers de la mesure des ondulations de densité après un temps de vol $t_v = 8\text{ms}$. Les mesures ont été réalisées pour un nuage atomique initialement à l'équilibre dans un piège harmonique (a), puis sur un nuage atomique suivant le processus de sélection (b). Ici la zone centrale de taille $\ell = 50\mu\text{m}$ a été sélectionnée, le faisceau lumineux de sélection est désaccordé de $\delta = 15\text{MHz}$ par rapport à la transition atomique.

D'autres tests pour montrer que le processus de sélection ne modifie pas les caractéristiques de la partie sélectionnée utilisent les protocoles décrits dans le Chapitre 8 : ils sont détaillés dans la Section 8.5.

En résumé

- En imageant un **DMD** sur les atomes avec un laser proche de résonance, ils acquièrent une accélération liée à la pression de radiation et reçoivent une énergie plus grande que la profondeur de puits.
- Il a été estimé que les atomes sont expulsés hors du piège s'ils diffusent quelques dizaines de photons. Les mesures expérimentales sont cohérentes avec cette approximation.
- Il n'y a pas d'effets visibles sur les atomes restants.

———— TROISIÈME PARTIE ————

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

EXPANSION LONGITUDINALE D'UN GAZ DE BOSE 1D

Sommaire

7.1 Expansion longitudinale	116
7.1.1 Protocole expérimental	116
7.1.2 Compensation de la gravité	117
7.2 Profil de densité d'un gaz dans un piège harmonique	118
7.2.1 Équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps	119
7.2.2 Équations d'état	120
7.2.3 Solutions analytiques homothétiques des équations Gross-Pitaevskii dans un piège harmonique	121
7.2.4 Régimes particuliers	124
7.2.5 Régime de cross-over	124
7.2.6 Analyse des données expérimentales	126
7.2.7 Limites expérimentales	127
7.3 Fluctuations de phases d'un gaz dans un piège harmonique	129
7.3.1 Hypothèse de suivi adiabatique	129
7.3.2 Cas des petits vecteurs d'ondes	130
7.3.3 Validation de l'hypothèse du suivi adiabatique	131
7.3.4 Mesures expérimentales et perspectives	132
7.4 Évolutions des fluctuations de phase d'une tranche de gaz initia- lement homogène	133
7.4.1 Protocole expérimental	134
7.4.2 Résultats expérimentaux et perspectives	135

Une partie importante de ma thèse a été consacrée à sonder la distribution de rapidités spatialement résolue (voir les résultats des Chapitres 8 et 9). Pour cela, des protocoles d'expansion dans le guide 1D ont été utilisés comme détaillés dans la Section 1.1.3.4. Ainsi, en premier lieu, nous nous sommes intéressés à caractériser le processus d'expansion longitudinale d'un gaz de Bose 1D.

Ce chapitre introduit les études expérimentales d'expansions longitudinales de gaz de Bose 1D. La première partie de ce chapitre s'intéresse aux considérations expérimentales pour réaliser un tel protocole sur l'expérience de puce atomique. La deuxième partie décrit l'évolution du profil de densité prédite par les équations Gross-Pitaevskii (GP) pour différentes situations allant du régime de Thomas-Fermi (TF) dans la direction transverse (régime TF 3D) au régime de fort confinement longitudinal (régime TF 1D) où les degrés de libertés sont gelés transversalement. Ces prédictions ont été comparées avec les mesures expérimentales. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'évolution des fluctuations de phase dans le cas particulier du régime TF 1D. Ces fluctuations peuvent être extraites expérimentalement par la mesure du spectre de puissance des ondulations de densités, voir Section 5.2.2. Enfin, l'évolution des fluctuations de phase a aussi été étudiée au cours de l'expansion d'un nuage atomique initialement homogène de taille finie. Pour cela, l'outil de sélection présenté dans le Chapitre 6 a été utilisé afin de sélectionner une tranche d'un nuage atomique initialement à l'équilibre dans un piège harmonique. La taille de la tranche est suffisamment petite pour que la densité puisse être supposée homogène.

7.1 Expansion longitudinale

7.1.1 Protocole expérimental

Afin de pouvoir étudier expérimentalement les dynamiques d'expansion longitudinale, on réalise le protocole présenté sur la Fig. 7.1 :

- Le nuage atomique est initialement placé dans un potentiel magnétique de fréquence longitudinale $f_{\parallel} = 5.0$ ou 9.4 Hz selon les jeux de données et de fréquence transverse $f_{\perp} = 2.56$ kHz. À l'instant $\tau = 0$, le confinement longitudinal est coupé, $I_D = I_{D'} = 0$. La coupure se fait sur un temps t_{\parallel} fini afin d'éviter un pic de courant fourni par les alimentations observé pour une coupure de courant trop rapide. Néanmoins, le temps est choisi tel que $t_{\parallel} = 70 \mu s \ll 1/f_{\parallel}$ de sorte qu'il n'influe pas sur la dynamique longitudinale des atomes.
- L'expansion longitudinale a ensuite lieu pendant un temps τ . Puis le confinement transverse est coupé en annulant I_{\perp} . De nouveau, la coupure des courants est réalisée sur un temps fini t_{\perp} afin que l'alimentation en courant suive bien la commande. Ici, $t_{\perp} = 5 \mu s \ll 1/f_{\perp}$.
- Une image par absorption du nuage atomique est prise après un temps de vol t_v . Pour une mesure de profil de densité, $t_v = 1$ ms, voir Section 5.1.2. La caractérisation

des fluctuations de phase se fait par l'étude des ondulations de densité, auquel cas $t_v = 8\text{ms}$, voir Section 5.2.2.

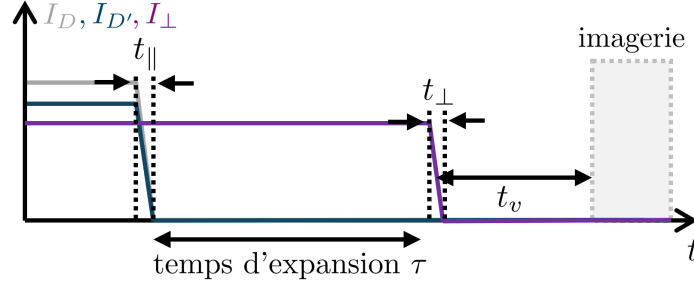


FIGURE 7.1 – Diagramme décrivant le protocole expérimental d'expansion longitudinale pendant un temps t pour un gaz atomique initialement à l'équilibre dans un piège magnétique. Le confinement longitudinal est contrôlé par les courants I_D et $I_{D'}$, le confinement transverse est contrôlé par le courant I_{\perp} .

Comme détaillé dans la Section 4.2.3.1, un tel protocole est facilement réalisable puisque, du fait de la modulation des courants transverses I_{\perp} , le potentiel longitudinal est découplé de celui transverse.

7.1.2 Compensation de la gravité

Lors du remplacement de la puce, la monture de la puce a été placée avec un léger angle par rapport à la direction \mathbf{e}_x perpendiculaire au champ de pesanteur de terrestre, voir Fig. 7.2(a). Cet angle avait été estimé expérimentalement de l'ordre de $\theta_{\text{exp}} \simeq 0.01\text{rad}$. Lorsque nous avons commencé à étudier la dynamique longitudinale du nuage, nous avons vu un effet direct de cet angle. En effet, la rotation de la monture de la puce ajoute une accélération résiduelle sur la dynamique des atomes, qui induit un déplacement de la position du centre du nuage atomique qui se déplace au cours de l'expansion. Grâce à la mesure du centre de masse du gaz à différents temps d'expansion, nous avons pu extraire une accélération a_0 en ajustant les données par une parabole $x_0(\tau) = 1/2a_0\tau^2 + v_0\tau$, voir Fig. 7.2(b) : cette accélération est directement reliée à l'angle θ_{eff} , $a_0 = \theta_{\text{eff}}g$. On mesure expérimentalement $\theta_{\text{eff}} = (2.1 \pm 0.3) \times 10^{-2}\text{rad}$, soit $\theta_{\text{eff}} = (1.15 \pm 0.17)^\circ$.

Pour compenser cet effet dû à la gravité, une première idée fut de pencher la table optique d'une hauteur $h = 5\text{cm}$ (la table mesurant 2.5m de long) afin d'annuler l'angle θ_{eff} en réalignant l'axe $\mathbf{e}_{x'}$ avec \mathbf{e}_x . Pour cela, nous avons ajusté la hauteur des pieds de la table (mis sous air comprimé). Cette méthode s'est trouvée être compliquée à mettre en place, la hauteur des pieds était peu maîtrisée rendant le protocole plutôt dangereux. Ainsi, nous avons décidé de changer de protocole et de compenser l'effet de gravité par un ajout de gradient de champ magnétique.

Le champ magnétique selon l'axe \mathbf{e}_x est produit par deux bobines rectangulaires de part et d'autre de l'enceinte à vide. En $x = 0$ (c'est-à-dire au centre entre les deux bobines), les champs produits par les deux bobines sont égaux : $B_x = B'_x = B_0$. Le gradient de champ

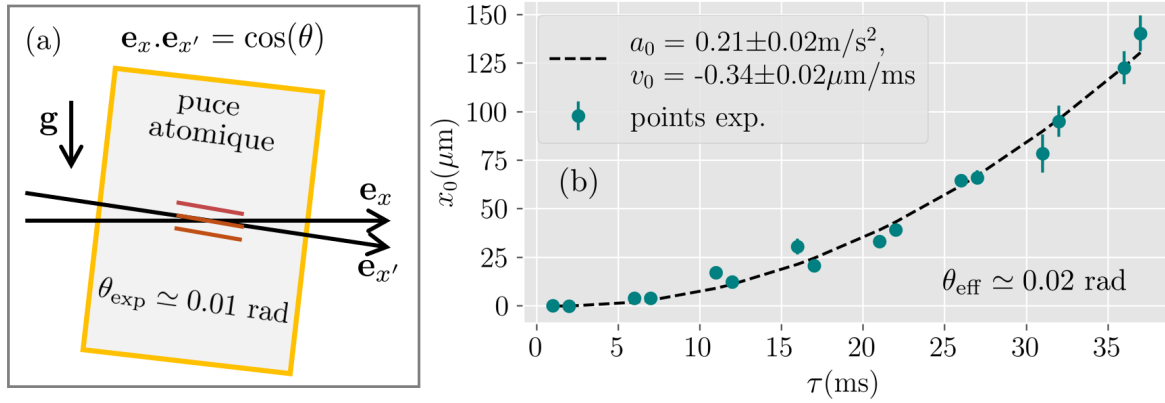


FIGURE 7.2 – (a) Position de la puce par rapport à la direction \mathbf{e}_x orthogonale au champ de pesanteur \mathbf{g} . Le guide longitudinal transverse est produit par les trois fils centraux (traits oranges) désaxés d'un angle θ par rapport à \mathbf{e}_x – (b) Position du centre du nuage atomique x_0 après un temps τ d'expansion longitudinale.

magnétique en $x = 0$ est alors nul. Pour produire un gradient b' non nul en $x = 0$, les champs magnétiques sont modifiés tels que $B_x = B_0 + \delta B$, $B'_x = B_0 - \delta B$. Autour de $x = 0$, le potentiel longitudinal s'écrit

$$V_{\parallel}(x) = \mu_B B_0 + \mu_B b' x + m a_0 x, \quad (7.1)$$

avec m la masse du Rubidium et a_0 l'accélération ressentie par les atomes causée par la mauvaise disposition de la monture de la puce. Il est ainsi possible de supprimer l'effet de la gravité par un gradient tel que

$$b' = -\frac{m a_0}{\mu_B} = -(7.1 \pm 0.7) \text{ mG} \cdot \text{mm}^{-1}, \quad (7.2)$$

en utilisant la valeur de l'accélération a_0 mesurée Fig.7.2(b). Expérimentalement, la gravité a été compensée pour une valeur $\delta B = 0.3\text{G}$. Les calculs numériques de productions de champ par des bobines carrées en configuration Helmholtz qui correspondent à notre situation expérimentale sont en accord avec la valeur de δB [154], puisque $b'_{\text{exp}} = -(8 \pm 1) \text{ mG} \cdot \text{mm}^{-1}$

Une fois l'effet de la gravité compensé, il a été possible de réaliser des expansions longitudinales. Un exemple d'évolution du nuage atomique est présenté Fig.7.3, la position du centre du profil est bien fixe.

7.2 Évolution du profil de densité d'un gaz placé dans un piège harmonique

On s'intéresse ici à l'étude de la dynamique d'un gaz de bosons initialement à l'équilibre dans un piège de type cigare. Le potentiel de piégeage s'écrit

$$V(\mathbf{r}) = m\omega_{\parallel}^2 x^2/2 + m\omega_{\perp}^2 \mathbf{r}_{\perp}^2/2 = V_{\parallel}(x) + V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}), \quad (7.3)$$

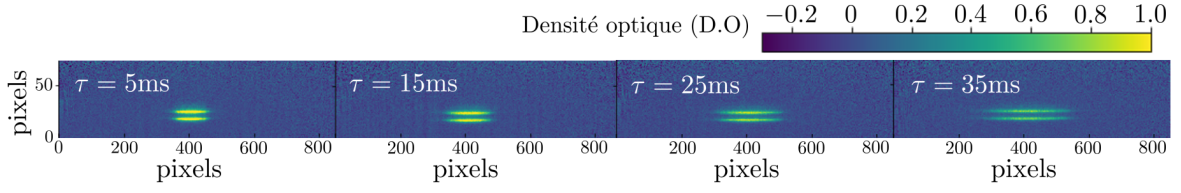


FIGURE 7.3 – **Densité Optique (DO)** pour un nuage atomique après différents temps τ d'expansion longitudinale. Les atomes sont ici initialement à l'équilibre dans un piège magnétique harmonique de fréquence transverse $f_{\perp} = 2.5\text{KHz}$ et $f_{\parallel} = 9.4\text{Hz}$.

avec V_{\parallel} la composante longitudinale, V_{\perp} la composante transverse et tel que $\omega_{\parallel} \ll \omega_{\perp}$. À l'instant $\tau = 0$, le confinement longitudinal est coupé, $V_{\parallel} = 0$. On étudie alors la dynamique du système.

7.2.1 Équations Gross-Pitaevskii dépendantes du temps

Le système étudié est bien décrit par les équations de **Gross-Pitaevskii (GP)** dépendantes du temps où tous les atomes sont représentés par une même fonction d'onde φ . En présence d'un potentiel $V(\mathbf{r})$, les équations **GP** s'écrivent pour un système à N atomes en 3 dimensions

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{r}) + g_{3D} N |\varphi|^2 \right] \varphi \quad (7.4)$$

avec $g_{3D} = 4\pi\hbar^2 a_{3D}/m$ le paramètre d'interaction 3D et a_{3D} la longueur de diffusion 3D. Dans un piège de type cigare décrit par Eq.(7.3) où $\omega_{\perp} \gg \omega_{\parallel}$, les temps caractéristiques associés à la dynamique transverse $\tau_{\perp} \propto \omega_{\perp}^{-1}$ sont beaucoup plus courts que les temps caractéristiques associés à la dynamique longitudinale $\tau_{\parallel} \propto \omega_{\parallel}^{-1}$. On fait alors l'hypothèse d'un suivi adiabatique transversalement : à tout instant, l'état transverse est dans la configuration de plus basse énergie. En particulier, les dynamiques transverses et longitudinales sont décorréelées et la fonction d'onde se réécrit

$$\varphi(\mathbf{r}, \tau) = \psi(x, \tau) \Phi[\mathbf{r}_{\perp}, n(x, \tau)]. \quad (7.5)$$

avec n la densité linéaire et Φ qui vérifie à tout temps τ

$$\mu(n) \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}_{\perp}} + V_{\perp}(\mathbf{r}_{\perp}) + g_{3D} n |\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n)|^2 \right] \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n). \quad (7.6)$$

En utilisant la relation de normalisation $\int d\mathbf{r}_{\perp} |\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n)|^2 = 1$, la densité linéaire s'écrit

$$n(x, \tau) = N \int d\mathbf{r}_{\perp} |\psi(x, \tau)|^2 |\Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n)|^2 = N |\psi(x, \tau)|^2. \quad (7.7)$$

L'équation Eq.(7.5) peut être injectée dans Eq.(7.4). Après avoir séparé les parties transverses

et longitudinales et en utilisant Eq.(7.7), on obtient

$$\left[i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - V_{\parallel} \right] \psi(x, \tau) \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n) = \underbrace{\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}_{\perp}} + V_{\perp} + g_{3D} n |\Phi|^2 \right]}_{(1)} \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n) \psi(x, \tau). \quad (7.8)$$

Le terme (1) d'Eq.(7.8) est égal à $\mu \Phi(\mathbf{r}_{\perp}, n)$ d'après Eq.(7.6). Enfin, en intégrant Eq.(7.8) par $\int d\mathbf{r}_{\perp} \Phi^*(\mathbf{r}_{\perp}, n)$, on obtient une équation GP 1D similaire à Eq.(2.23),

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \psi(x, \tau) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_{\parallel}(x) + \mu(n) \right] \psi(x, \tau). \quad (7.9)$$

Ainsi, de manière analogue aux calculs de la Section 2.4.1, en utilisant la relation de Madelung $\psi(x, \tau) = \sqrt{n(x, \tau)} e^{i\theta(x, \tau)}$, on dérive les équations hydrodynamiques (en négligeant le terme de pression quantique),

$$\begin{cases} \partial_{\tau} n + \partial_x (vn) = 0, \\ m \partial_{\tau} v + \partial_x \left[\frac{1}{2} m v^2 + \mu(n) + V_{\parallel}(x) \right] = 0, \end{cases} \quad (7.10)$$

avec $v = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial \theta}{\partial x}$.

Pour des temps $\tau < 0$, le système est à l'équilibre. À partir d'Eq.(7.10), on obtient la relation

$$\mu(n) + V_{\parallel}(x) = \mu(n_p) = \mu_p \quad (7.11)$$

Pour des temps $\tau > 0$, le potentiel est coupé, $V_{\parallel}(x) = 0$ et le profil de densité $n(x, t)$ vérifie les équations

$$\begin{cases} \partial_{\tau} n + \partial_x (vn) = 0, \\ m \partial_{\tau} v + \partial_x \left[\frac{1}{2} m v^2 + \mu(n) \right] = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

7.2.2 Équations d'état

À partir d'Eq.(7.6), le potentiel chimique a été calculé pour deux régimes particuliers [155] :

- La situation pour laquelle $a_{3D} n \gg 1$ (ou de façon analogue $\mu \gg \hbar \omega_{\perp}$) correspond au cas où de nombreuses configurations de l'oscillateur harmonique radial sont excitées ($|\Phi|^2$ est une parabole). Dans ce régime appelé régime **Thomas-Fermi (TF) 3D**,

$$\mu(n) = 2\hbar \omega_{\perp} \sqrt{a_{3D} n} \quad (7.13)$$

- La situation inverse où $a_{3D} n \ll 1$ (ou de façon analogue $\mu \ll \hbar \omega_{\perp}$). Dans ce cas, les solutions d'Eq.(7.6) s'approchent de l'état fondamental gaussien de l'oscillateur harmonique radial (régime **Thomas-Fermi 1D**),

$$\mu(n) = 2\hbar \omega_{\perp} a_{3D} n = gn. \quad (7.14)$$

Le régime TF 1D correspond à la situation traitée dans la Section 2.4.1.

Pour les régimes intermédiaires, il n'existe pas de formule analytique. Néanmoins, les calculs numériques ont permis de montrer que le potentiel chimique est bien approximé par l'expression [156]

$$\mu(n) = \hbar\omega_{\perp} (\sqrt{1 + 4na_{3D}} - 1), \quad (7.15)$$

qui vérifie bien les limites asymptotiques Eq.(7.14) et (7.13).

7.2.3 Solutions analytiques homothétiques des équations Gross-Pitaevskii dans un piège harmonique

7.2.3.1 Facteur d'échelle

À l'instant $\tau = 0$, le confinement longitudinal est coupé, $V_{\parallel}(x) = 0$. On cherche à trouver les formes des profils de densité $n(x, \tau)$ solutions d'Eq.(7.12). Dans certains cas particuliers, la densité peut prendre une forme homothétique,

$$n(x, \tau) = \frac{1}{\lambda(\tau)} n\left(\frac{x}{\lambda(\tau)}, 0\right) = \frac{1}{\lambda(\tau)} n_0\left(\frac{x}{\lambda(\tau)}\right), \quad (7.16)$$

avec n_0 le profil de densité initiale et $\lambda(\tau)$ le facteur d'échelle [157, 128]. À $\tau = 0$, $\lambda(0) = 1$, $\dot{\lambda}(0) = 0$ et $N = \int dx n(x, 0) = \int dx n_0(x)$.

En injectant la forme du profil de densité Eq.(7.16) dans $\partial_{\tau}n + \partial_x(vn) = 0$, le profil de vitesse s'écrit

$$v(x, \tau) = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x. \quad (7.17)$$

On a pour cela utilisé les égalités

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} = -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} n_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\dot{\lambda}}{\lambda^2} \frac{x}{\lambda} \dot{n}_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \quad (7.18)$$

et

$$\frac{\partial(nv)}{\partial x} = \frac{1}{\lambda} n_0\left(\frac{x}{\lambda}\right) \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{1}{\lambda^2} \dot{n}_0\left(\frac{x}{\lambda}\right). \quad (7.19)$$

Finalement, le profil de vitesse obtenu Eq.(7.17) injecté dans l'équation d'Euler $\partial_{\tau}v + v\partial_x v + 1/m\partial_x\mu = 0$ permet de relier le potentiel chimique avec le facteur d'échelle,

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = -m\frac{\ddot{\lambda}}{\lambda}x, \quad (7.20)$$

à $\tau = 0$, on a

$$\mu(x, \tau = 0) = \mu_0(x) = \mu_p - \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2 x^2. \quad (7.21)$$

donc Eq.(7.20) est bien vérifiée à $\tau = 0$. En règle générale, Eq.(7.20) n'est pas vérifiée pour tout τ . Dans la suite, on cherche à trouver une condition sur la forme de l'équation d'état pour laquelle Eq.(7.20) est vraie à tout temps.

7.2.3.2 Solutions analytiques homothétiques

On va ici s'intéresser à trouver une condition sur la forme de l'équation d'état reliant le potentiel chimique à la densité $\mu(n)$ permettant d'avoir une solution aux équations hydrodynamiques qui prend la forme d'Eq.(7.16). La dérivée du potentiel chimique peut se réécrire

$$\left. \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_x = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{n(x)} \left. \frac{\partial n}{\partial x} \right|_x = \frac{1}{\lambda^2} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{n(x)} \left. \frac{\partial n_0}{\partial x} \right|_{\frac{x}{\lambda}} = \frac{1}{\lambda^2} \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{n(x)} \underbrace{\left. \frac{\partial n_0}{\partial \mu_0} \right|_{\mu_0(\frac{x}{\lambda})}}_{(1)} \underbrace{\left. \frac{\partial \mu_0}{\partial x} \right|_{\frac{x}{\lambda}}}_{(2)}. \quad (7.22)$$

avec $\left. \frac{\partial \mu}{\partial x} \right|_x = \frac{\partial \mu}{\partial x}(x)$. En utilisant Eq.(7.21), le terme (2) se réécrit naturellement $-m\omega_{\parallel}^2 x / \lambda^2$. Enfin, comme $\mu_0(x/\lambda) = \mu(n_0(x/\lambda)) = \mu(\lambda n(x, \tau))$, le terme (1) se réécrit

$$\left. \frac{\partial n_0}{\partial \mu_0} \right|_{\mu_0(\frac{x}{\lambda})} = \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu_0(\frac{x}{\lambda})} = \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda n)}. \quad (7.23)$$

La dérivée du potentiel chimique prenant la forme d'Eq.(7.20), on obtient alors

$$-m \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} x = -m \frac{\omega_{\parallel}^2}{\lambda^4} \underbrace{\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_n \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda n)}}_{f(\lambda)} x, \quad (7.24)$$

avec $f(\lambda)$ un terme indépendant de la position x et donc indépendant de la densité n . La fonction f définie pour tout λ réel positif possède les propriétés suivantes :

— $f(1) = 1$. En effet, $f(1)$ s'écrit

$$f(1) = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{\lambda n} \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda n)} = 1, \quad (7.25)$$

— $f(\lambda_1 \lambda_2) = f(\lambda_1) f(\lambda_2)$. En effet

$$f(\lambda_1 \lambda_2) = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_n \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda_1 \lambda_2 n)} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_n \underbrace{\left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{\lambda_1 n} \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda_1 n)}}_{f(1)=1} \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(\lambda_2(\lambda_1 n))} = f(\lambda_1) f(\lambda_2). \quad (7.26)$$

Ainsi f doit être une fonction puissance pour respecter toutes ces conditions, $f(\lambda) = \lambda^{-\beta}$ avec β un réel. f calculé au point $\lambda = n_0/n$ avec n_0 fixe s'écrit alors

$$f\left(\frac{n_0}{n}\right) = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_n \left. \frac{\partial n}{\partial \mu} \right|_{\mu(n_0)} = n^\beta \Rightarrow \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_n = \left. \frac{\partial \mu}{\partial n} \right|_{n_0} n^\beta \quad (7.27)$$

avec $\partial \mu / \partial n(n_0)$ une constante. Cette égalité amène au résultat important de cette partie, c'est-à-dire que l'équation d'état $\mu(n)$ permettant d'avoir une solution des équations hydro-

dynamiques homothétiques doit prendre la forme

$$\mu(n) = an^\alpha + b \quad (7.28)$$

où a , b et α sont des réels. On conclut alors que des solutions de types homothétiques sont attendues dans les régimes particuliers suivants :

- Le régime de **TF** 1D car $\mu(n) = gn$. Dans ce cas, Eq.(7.28) est bien vérifiée avec $\alpha = 1$.
- Le régime de **TF** 3D puisque alors $\mu(n) = 2\hbar\omega_\perp\sqrt{a_{3D}n}$. Dans ce cas, Eq.(7.28) est bien vérifiée avec $\alpha = 1/2$.

7.2.3.3 Évolution temporelle du facteur d'échelle

On cherche désormais à trouver l'équation différentielle sur le facteur d'échelle $\lambda(\tau)$. Pour cela, on réinjecte l'équation d'état attendue Eq.(7.28) dans Eq.(7.20) en utilisant Eq.(7.16), ce qui donne

$$x \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} + \frac{a\alpha n_0 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1}}{m} \frac{\partial n_0}{\partial x} \Big|_{\frac{x}{\lambda}} = 0. \quad (7.29)$$

Le potentiel chimique $\mu(x)$ est connu à $\tau = 0$ et donné par Eq.(7.21) : cela permet d'obtenir n_0 et \dot{n}_0 grâce à l'équation d'état Eq.(7.28),

$$\begin{cases} n_0 \left(\frac{x}{\lambda}\right) &= \left[\frac{1}{a} \left(\mu_p - b - \frac{1}{2} m \omega_\parallel^2 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2 \right) \right]^{1/\alpha}, \\ \frac{\partial n_0}{\partial x} \Big|_{\frac{x}{\lambda}} &= -\frac{1}{a\alpha} m \omega_\parallel^2 \frac{x}{\lambda^2} n_0 \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{1-\alpha}, \end{cases} \quad (7.30)$$

ces résultats injectés dans Eq.(7.29) permettent de trouver l'équation différentielle dont λ est solution,

$$\ddot{\lambda} \lambda^{\alpha+1} = \omega_\parallel^2 \quad (7.31)$$

Les évolutions des facteurs d'échelle sont tracés Fig.7.4 pour les régimes particuliers **TF** 1D ($\alpha = 1$) et 3D ($\alpha = 0.5$).

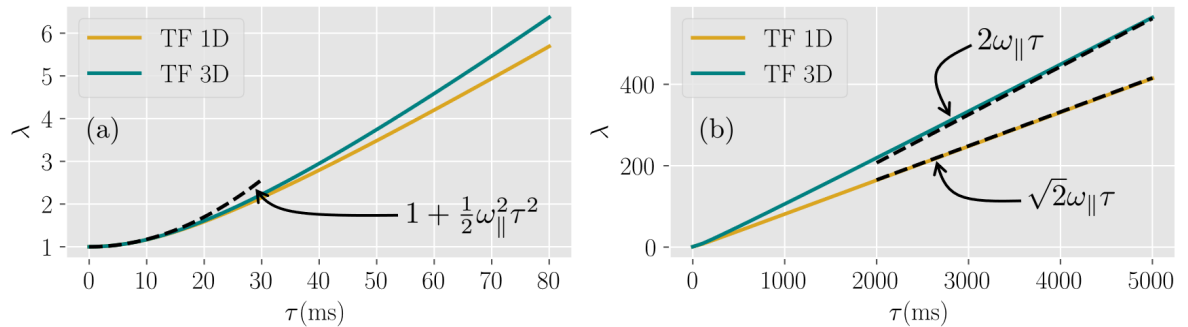


FIGURE 7.4 – Évolution du facteur d'échelle λ avec $\omega_\parallel = 2\pi \times 9.4\text{Hz}$ dans les régimes **TF** 1D (courbes jaunes) et **TF** 3D (courbes bleues) – (a) Évolution à temps court comparée à Eq.(7.34) (courbe noire pointillée) – (b) Évolution à temps longs comparée avec les comportements asymptotiques linéaires attendus pour les régimes **TF**1D et **TF**3D (courbes noires pointillées).

7.2.4 Régimes particuliers

7.2.4.1 Régime asymptotique à temps longs

Dans cette partie, on se restreint au cas où $\alpha > 0$. L'équation différentielle sur le facteur d'échelle Eq.(7.31) peut être intégrée. En utilisant les conditions initiales $\lambda(0) = 1$ et $\dot{\lambda}(0) = 0$, on obtient

$$\dot{\lambda}^2 = -\frac{2}{\alpha}\omega_{\parallel}^2\lambda^{-\alpha} + \frac{2}{\alpha}\omega_{\parallel}^2. \quad (7.32)$$

Pour des temps τ très grands, $\lambda^{-\alpha} \ll 1$. L'Eq(7.32) devient $\dot{\lambda} \simeq \sqrt{2/\alpha}\omega_{\parallel}$. Ceci implique $\lambda(\tau) = \sqrt{2/\alpha}\omega_{\parallel}\tau$. En particulier,

- dans le cas du régime TF 1D, $\lambda(\tau) = \sqrt{2}\omega_{\parallel}\tau$,
- dans le cas du régime TF 3D, $\lambda(\tau) = 2\omega_{\parallel}\tau$.

Comme le montre la Fig.7.4(b), ces comportements sont bien observés.

7.2.4.2 Régime à temps courts

À temps courts, on fait l'approximation que $\mu(x, \tau) \simeq \mu_0(x) = \mu_p - 1/2m\omega_{\parallel}^2x^2$. Le comportement à temps courts est alors indépendant de l'équation d'état $\mu(n)$. L'équation d'Euler en l'absence de potentiel s'écrit alors

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \omega_{\parallel}^2x \Rightarrow v(x, \tau) \simeq_{\tau \rightarrow 0} \omega_{\parallel}^2x\tau. \quad (7.33)$$

la forme du profil de vitesse peut être réinjectée dans Eq.(7.17). En intégrant la relation obtenue,

$$\lambda(\tau) = e^{\frac{1}{2}\omega_{\parallel}^2\tau^2} \simeq 1 + \frac{1}{2}\omega_{\parallel}^2\tau^2 + o(\tau^2). \quad (7.34)$$

Ainsi, comme on peut l'observer sur la Fig.7.4(a), l'évolution de λ est similaire à temps courts pour les deux régimes TF et colle avec le comportement attendu, voir Eq.(7.34).

7.2.5 Régime de cross-over

On cherche désormais à caractériser l'expansion longitudinale du système quand l'équation d'état est donnée par Eq.(7.15). Le potentiel chimique ne s'écrivant pas comme une puissance de la densité n , on ne s'attend pas à avoir un profil de densité homothétique au profil initial. Néanmoins, à temps courts, l'argument utilisé dans la Section.7.2.4.2 reste toujours valable, car il est indépendant de la forme de l'équation d'état. Ainsi, on s'attend à avoir une solution homothétique à temps courts avec $\lambda(\tau)$ donné par Eq.(7.34).

7.2.5.1 Méthodes numériques

Pour obtenir l'évolution du profil de densité au cours d'une expansion longitudinale pour n'importe quelle équation d'état, il faut résoudre numériquement les équations hydrodynamiques Eq.(7.12). En utilisant la méthode des éléments finis pour résoudre ces équations numériquement (Runge et Kutta d'ordre 4), on observe l'apparition d'instabilités numériques.

Pour régulariser ce problème, les simulations ont été réalisées à partir des équations GP sans négliger le terme de pression quantique.

7.2.5.2 Caractérisation de l'évolution du profil

Un exemple de solution numérique $n_{\text{sim}}(x, \tau)$ est représenté sur la Fig.7.5 pour un temps d'expansion $\tau = 25\text{ms}$. On voit de légères déviations par rapport à une solution de type homothétique (courbes noires pointillées). Néanmoins, ces déviations restent petites pour des temps d'expansions $\tau < 60\text{ms}$ correspondant aux temps sondés expérimentalement. Pour un facteur d'échelle $\lambda(\tau)$ ajusté à partir des simulations numériques (courbes noires pointillées de la Fig.7.5), l'écart-type

$$\sigma(\tau) = \frac{\sqrt{\int \left| \frac{1}{\lambda(\tau)} n_0\left(\frac{x}{\lambda(\tau)}\right) - n_{\text{sim}}(x, \tau) \right|^2 dx}}{\sqrt{\int [n_{\text{sim}}(x, \tau)]^2 dx}} \quad (7.35)$$

reste inférieur à 0.1 pour $\tau < 60\text{ms}$. C'est pourquoi on fera dans la suite l'hypothèse que la notion de facteur d'échelle reste valide même dans ce régime de cross-over TF 1D-3D.

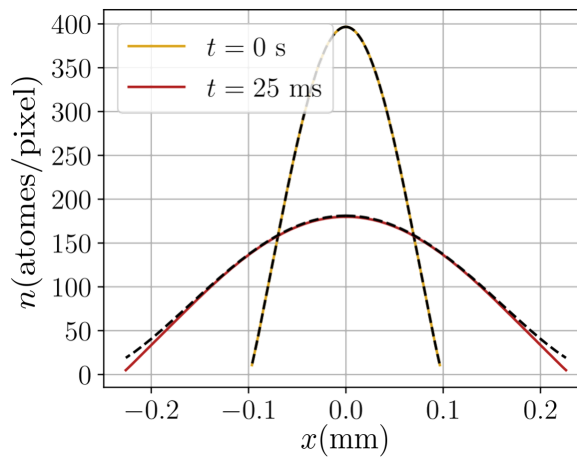


FIGURE 7.5 – Le profil de densité initial, à l'équilibre, est représenté en jaune ($\mu_p/\hbar\omega_{\perp} = 1.4$). Le profil numérique obtenu après résolution des équations hydrodynamiques et pour un temps d'expansion $t = 25\text{ms}$ est tracé en rouge. La courbe noire pointillée superposée correspond à un ajustement de la solution numérique en faisant l'approximation qu'il s'agit du profil initial à un facteur d'échelle λ près.

En résumé

- Les profils de densité solutions des équations hydrodynamiques prennent une forme homothétique si l'équation d'état s'écrit $\mu(n) = an^\alpha + b$. C'est notamment le cas pour le régime Thomas-Fermi 1D pour lequel $\mu(n)$ est proportionnel à n . Cette condition est aussi vérifiée pour le régime Thomas-Fermi 3D où $\mu(n)$ est proportionnel à \sqrt{n} . Le facteur d'échelle évolue de façon parabolique à des temps très courts (résultat universel indépendant de l'équation d'état) et linéairement asymptotiquement.
- Dans le régime de cross-over TF 1D/3D, on attend à avoir dans tous les cas une solution homothétique pour des petits temps d'expansion. Pour des temps plus longs, une étude numérique a montré que le profil de densité pouvait être approximé par une forme homothétique au profil initial.

7.2.6 Analyse des données expérimentales

L'étude de la dynamique du profil de densité a été faite sur un nuage atomique initialement à l'équilibre dans un potentiel harmonique de fréquence longitudinale $f_{\parallel} = 9.4\text{Hz}$ et transverse $f_{\perp} = 2.5\text{KHz}$. Un profil de densité est représenté sur la Fig.7.6(a) en jaune. Le profil de densité attendu à l'équilibre dans le piège harmonique est représenté en noir pointillé sur la Fig.7.6(a). Il est obtenu à partir de l'expression du potentiel chimique,

$$\mu(x) = \mu_p - \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2 x^2 = \hbar\omega_{\perp} \left[\sqrt{1 + 4n_0(x)a_{3D}} - 1 \right], \quad (7.36)$$

où $\mu_p/\hbar\omega_{\perp} = 1.4$. L'ajustement est très bon dans la zone centrale, les données expérimentales présentent des ailes supplémentaires dû à un effet d'entropie non nulle.

Après un temps d'expansion longitudinal τ , un facteur d'échelle λ est extrait en ajustant les profils expérimentaux par un profil de la forme

$$n(x, \tau) = \frac{1}{\lambda^{(m)}(\tau)} n_0 \left(\frac{x}{\lambda^{(m)}(\tau)} \right). \quad (7.37)$$

Afin de pouvoir extraire le profil de densité, on réalise après la coupure du confinement transverse un temps de vol $t_v = 1\text{ms}$, voir Section.5.1.2. Pendant ce temps de vol, on suppose que les interactions sont coupées. Après une expansion longitudinale d'un temps τ , il est important de prendre en compte la vitesse de l'expansion du système directement liée à $\dot{\lambda}(\tau)$. Comme les interactions sont coupées pendant le temps de vol, la vitesse d'expansion ne varie pas. Ainsi, le facteur d'échelle du profil de densité avant temps de vol $\lambda(\tau)$ s'obtient à partir de celui extrait après le temps de vol $\lambda^{(m)}(\tau)$ tel que

$$\lambda(\tau) = \lambda^{(m)}(\tau) - \dot{\lambda}(\tau)t_v \quad (7.38)$$

avec la dérivée du facteur d'échelle extraite expérimentalement

$$\dot{\lambda}(\tau) = \frac{\lambda(\tau + \delta\tau) - \lambda(\tau)}{\delta\tau}. \quad (7.39)$$

où $\delta\tau$ est la différence de temps entre deux temps de mesure successifs.

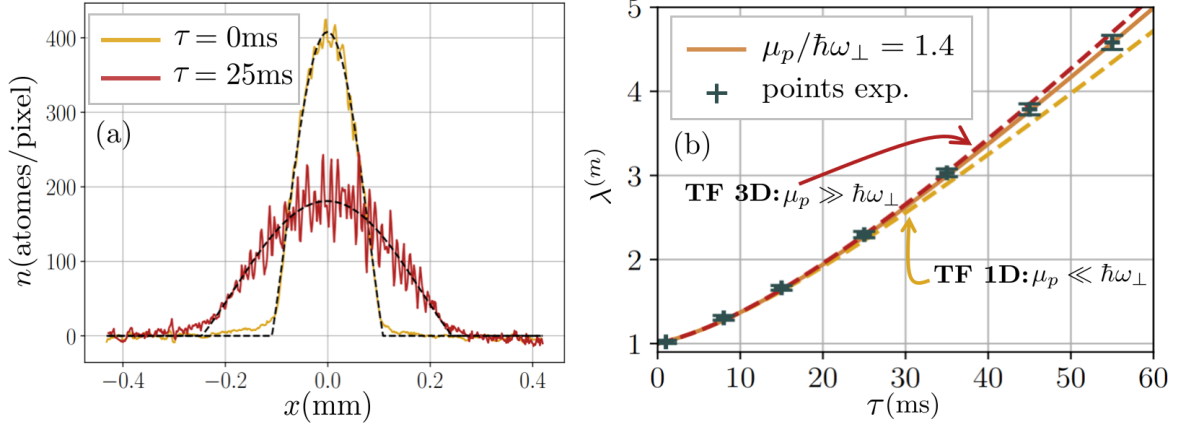


FIGURE 7.6 – (a) Un profil de densité à l'équilibre dans le piège longitudinal harmonique est représenté en jaune. Ce profil est ajusté par un profil $n_0(x)$ qui vérifie Eq.(7.36) (courbe noire pointillée). La courbe rouge correspond au profil de densité après une expansion longitudinale de $\tau = 25\text{ms}$. Un facteur d'échelle λ est extrait en ajustant le profil par une courbe homothétique à la densité initiale, voir Eq.(7.37) et (7.38) (courbe pointillée noire) – (b) Les points bleus correspondent aux facteurs d'échelle $\lambda(\tau)$ extraits expérimentalement. La courbe orange solide correspond aux résultats obtenus numériquement en résolvant les équations hydrodynamiques avec Eq.(7.15), $\mu_p/\hbar\omega_\perp = 1.4$ et en extrayant un facteur d'échelle. Les courbes pointillées sont les évolutions de λ attendues en résolvant Eq.(7.31) pour $\alpha = 1$ (régime TF 1D) et $\alpha = 1/2$ (régime TF 3D).

Les facteurs d'échelle extraits expérimentalement sont représentés sur la Fig.7.6(b). Les données sont en accord avec les $\lambda(\tau)$ obtenus en résolvant numériquement les équations hydrodynamiques avec Eq.(7.15) et $\mu_p/\hbar\omega_\perp = 1.40$ et en prenant en compte le temps de vol t_v .

7.2.7 Limites expérimentales

Les données de la Fig.7.6(b) ont été mesurées pour des temps d'expansion $\tau < 55\text{ms}$. La raison pour laquelle nous nous sommes restreints à $\tau < 50\text{ms}$ est dû à plusieurs facteurs. Cette partie décrit l'ensemble de ces effets :

- Le guide longitudinal est produit par 3 micro-fils ayant une longueur de $1390\mu\text{m}$, voir Fig.4.2. Cette taille finie limite ainsi les temps d'expansions accessibles expérimentalement. Nous nous sommes demandés quels étaient les effets de la longueur finie des fils sur le nuage et son expansion. Notamment, on a voulu savoir si les atomes rebondissaient sur les bords du piège ou non. La caméra d'imagerie étant centrée sur le centre des micro-fils et pouvant prendre une image sur $1400\mu\text{m}$ de long (c'est-à-dire la

taille des micro-fils), un protocole simple a été de compter le nombre d'atomes à partir des images en absorption pour différents temps d'expansion. Le nombre d'atomes est représenté en jaune Fig.7.7(a) : pour des temps $\tau < 120\text{ms}$, le nombre d'atomes reste constant, car l'étalement du nuage est de taille inférieure à la longueur du guide longitudinal et à la longueur maximale d'imagerie. Pour des temps supérieurs, le nombre d'atomes décroît. Ces mesures ont été comparées avec le nombre d'atomes estimés en supposant que le guide 1D est infini, que le système est initialement bien décrit par le régime TF 3D et en résolvant l'Eq.(7.31) avec $\alpha = 0.5$. En utilisant les paramètres expérimentaux ($f_{\parallel} = 5.4\text{Hz}$ et $n_0 = 120\text{at}/\mu\text{m}$), le nombre total d'atomes dans une zone de $1400\mu\text{m}$ autour du centre est tracée en noir sur la Fig.7.7(a). Le nombre d'atomes décroît plus lentement que pour les données expérimentales, ce qui laisse à penser que les atomes ne rebondissent pas près des bords des fils.

- Le champ B_0 est produit par deux bobines selon l'axe \mathbf{e}_x placées en configuration Helmholtz. Localement au niveau du centre des micro-fils, ce champ magnétique est bien homogène. Cette approximation n'est plus valable loin du centre. Cependant, cet effet est négligeable devant les autres sources limitantes. Dans une zone de $2000\mu\text{m}$ autour du centre des petits-fils, le champ B_0 varie de 2mG : cette variation est associée à une fréquence de piégeage longitudinale inférieure au Hz.
- Le système d'imagerie peut aussi présenter longitudinalement loin du centre des défauts liés au champ fini du système optique. Cet effet n'est plus négligeable pour une distance de part et d'autre du centre de $\pm 350\mu\text{m}$ d'après les mesures de Bess Fang [119]¹. Ainsi les étalements sont limités à une taille similaire, correspondant à un temps d'expansion de l'ordre de 60ms , voir Fig.7.7(b).

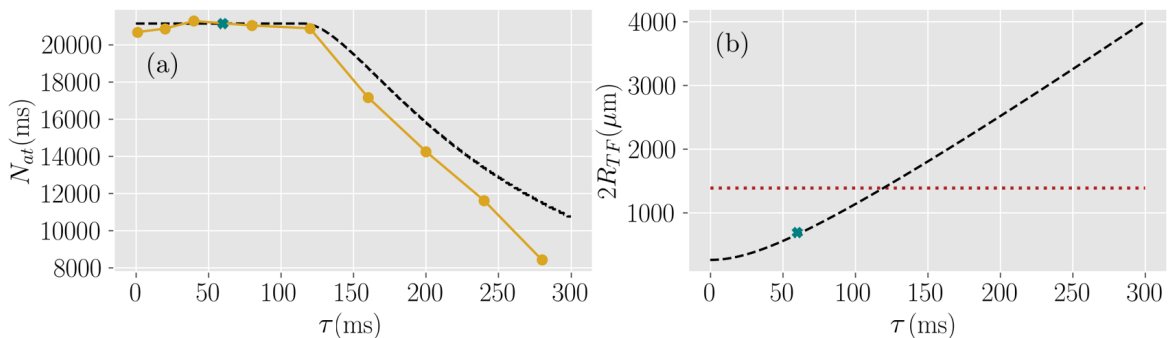


FIGURE 7.7 – (a) Le nombre d'atomes mesuré par la caméra pour différents temps d'expansion est représenté par les points jaunes. La courbe noire correspond au nombre d'atomes obtenus en résolvant l'équation Eq.(7.31) avec $\alpha = 0.5$, $f_{\parallel} = 5.4\text{ Hz}$ et $n_0 = 120\text{at}/\mu\text{m}$. Le point bleu représente la situation correspondant au temps $t = 60\text{ms}$ maximal sondé expérimentalement au vu des différentes limites techniques – (b) L'évolution de la taille de nuage après un temps d'expansion τ est tracée en noire. La ligne rouge pointillée correspond à la taille du guide longitudinal. Le temps expérimental $\tau = 60\text{ms}$ maximal utilisé expérimentalement est marqué par un point bleu.

1. mesures présentées page 150.

Ainsi, les effets décrits ci-dessus limitent les expansions à des tailles limites d'environ $800\mu\text{m}$, correspondant à des temps caractéristiques de l'ordre de 60ms (points bleus sur les Fig.7.7(a) et (b)). Ce temps dépend des profils à $\tau = 0$, pouvant être plus ou moins grands et denses selon la préparation du système.

En résumé

- L'évolution des profils de densité obtenue expérimentalement est en bon accord avec les simulations numériques réalisées dans le régime de cross-over.
- Les temps maximum d'expansion sondés sont de l'ordre de 60ms et sont limités par la taille du guide longitudinal et le champ du système optique.

7.3 Évolution des fluctuations de phase d'un gaz placé dans un piège harmonique

Lors de la dynamique d'expansion, les fluctuations de phase peuvent être sondées expérimentalement. En effet, après un temps de vol t_v , les fluctuations de phases initiales donnent lieu à des fluctuations de densité, appelées ondulations de densité. Le calcul du spectre de puissance des ondulations de densité est détaillé dans la Section 5.2.2. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de ces ondulations de densité pour un gaz initialement piégé dans un potentiel harmonique et réalisant une expansion longitudinale. Dans la suite, le gaz est supposé être dans le régime de TF 1D.

7.3.1 Évolution des fluctuations de phase dans l'hypothèse du suivi adiabatique

On considère dans toute la suite un système homogène de densité initiale $n(0) = n_0$. On souhaite estimer l'évolution des fluctuations de phase au cours d'une expansion longitudinale. À chaque instant τ de l'expansion, le système est décrit par un Hamiltonien $H(\tau)$ auquel on associe les modes de Bogoliubov introduit dans la Section 1.3.2, modes que l'on aurait pour un profil de densité $n(\tau)$. On s'intéresse à des modes k phononiques, c'est-à-dire d'énergie associée $\epsilon_k(\tau) = \hbar c(\tau)k$ avec $c(\tau) = \sqrt{\frac{gn(\tau)}{m}}$ la vitesse du son. De plus, la température du système est suffisamment élevée pour que $\epsilon(k) \ll k_B T$. À un instant τ donné, les fluctuations de phase du mode k $\langle |\theta_k|^2 \rangle^{(\tau)}$ sont proportionnelles à la population des modes de Bogoliubov $\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle^{(\tau)}$ telles que,

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle^{(\tau)} = \frac{mc(\tau)}{\hbar kn(\tau)} \langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle^{(\tau)}. \quad (7.40)$$

On peut introduire le facteur d'échelle $\lambda(\tau)$ tel que

$$n(\tau) = \frac{n(0)}{\lambda(\tau)}, \text{ d'ou } c(\tau) = \frac{c(0)}{\sqrt{\lambda(\tau)}}. \quad (7.41)$$

On fait alors l'hypothèse de suivi adiabatique. Dans le référentiel en expansion, la population des modes de Bogoliubov est conservée au cours du temps. Ainsi, dans le référentiel du laboratoire,

$$\langle \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \rangle^{(\tau)} = \langle \hat{a}_{\lambda(\tau)k}^\dagger \hat{a}_{\lambda(\tau)k} \rangle^{(0)}. \quad (7.42)$$

En injectant Eq.(7.42) et Eq.(7.41) dans Eq.(7.40), on en déduit

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle^{(\tau)} = \lambda(\tau)^{\frac{3}{2}} \langle |\theta_{\lambda(\tau)k}|^2 \rangle^{(0)}, \quad (7.43)$$

ce qui permet de relier les fluctuations de phase du mode k à un instant τ avec celles du mode $k\lambda(\tau)$ à l'instant initial.

7.3.2 Cas des petits vecteurs d'ondes

On fait ici l'approximation que les modes sondés k sont tels que $kt_v\hbar/m \ll l_c$ avec l_c la longueur de corrélation de la phase qui s'écrit pour une température T donnée $l_c = \frac{2\hbar^2 n}{mk_B T}$. Dans cette approximation, on a montré dans la Section 5.2.2.3 que la densité spectrale des ondulations de densité pour un mode k fixé s'écrit,

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle^{(\tau)} = 4n(\tau)^2 \langle |\theta_k|^2 \rangle^{(\tau)} \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (7.44)$$

D'autre part, comme $\hbar ck \ll k_B T$ et que l'hamiltonien du système est quadratique en θ_k , on peut utiliser le théorème de l'équirépartition de l'énergie ; À l'instant $\tau = 0$,

$$\langle |\hat{\theta}_k|^2 \rangle^{(0)} = \frac{mk_B T_0}{\hbar n(0)k^2} \Rightarrow \langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle^{(0)} = 4n(0)T_0 \frac{mk_B}{\hbar k^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (7.45)$$

Ainsi, en injectant Eq.(7.44) dans Eq.(7.43), et en utilisant les relations d'Eq.(7.41),

$$\langle |\tilde{\rho}(k)|^2 \rangle^{(\tau)} = 4n(\tau) \underbrace{\frac{T_0}{\lambda^{\frac{3}{2}}}}_{T(\tau)} \frac{mk_B}{\hbar k^2} \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (7.46)$$

Dans l'approximation du suivi adiabatique, tous les phonons restent à une même température qui évolue avec le temps d'expansion τ comme

$$T(\tau) = \frac{T_0}{\lambda(\tau)^{\frac{3}{2}}}. \quad (7.47)$$

Notons que la condition $kt_v\hbar/m \ll l_c$ reste toujours valable après un temps d'expansion τ puisque $l_c(\tau) \propto n(\tau)/T(\tau) = \sqrt{\lambda(\tau)}n(0)/T_0 > l_c(0)$.

Un résultat similaire peut être obtenu pour un gaz inhomogène initialement à l'équilibre dans un piège harmonique en utilisant les modes de Bogoliubov du gaz piégé [73].

7.3.3 Validation de l'hypothèse du suivi adiabatique

Les calculs menés dans la Section 7.3.1 utilisent l'approximation que les populations des modes de Bogoliubov sont conservés tout au long de la dynamique. C'est une hypothèse que l'on a cherchée à valider numériquement. Nous sommes repartis des équations hydrodynamiques Eq.(2.24) que nous avons linéarisées en prenant $\psi(x, \tau) = \sqrt{n + \delta n} e^{i(\theta_0 + \theta)}$ avec θ_0 relié au champ de vitesse $v = (\hbar/m)\partial_x\theta_0 = (\dot{\lambda}/\lambda)x$. L'évolution de δn et θ sont alors données par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned}\partial_\tau \delta n &= -\frac{1}{2}\partial_x \left(\delta n \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x \right) - \frac{\hbar^2}{2m} \partial_x (n \partial_x \theta), \\ \partial_\tau \theta &= -\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x \partial_x \theta - \frac{g}{\hbar} \delta n.\end{aligned}\tag{7.48}$$

Ces deux équations peuvent être simplifiées en faisant le changement de variable $y = x/\lambda$ et en introduisant les nouvelles fonctions $\tilde{\theta}(y, \tau) = \theta(y\lambda, \tau)$ et $\delta\tilde{n}(y, \tau) = \delta n(y\lambda, \tau)$,

$$\begin{aligned}\partial_\tau \delta\tilde{n} &= -\frac{\hbar}{m} \frac{n_0}{\lambda^2} \Delta_y \tilde{\theta}, \\ \partial_\tau \tilde{\theta} &= -\frac{g}{\lambda n_0} \delta\tilde{n}.\end{aligned}\tag{7.49}$$

Ces équations dérivent des équations d'Hamilton pour l'Hamiltonien

$$H(\tau) = \int dx \left[\frac{\hbar^2 n_0}{2m} \frac{1}{\lambda^2} \left(\partial_y \tilde{\theta} \right)^2 + \frac{g}{2\lambda} (\delta\tilde{n})^2 \right],\tag{7.50}$$

H dépend de τ *via* λ . Cet Hamiltonien est similaire, à des facteurs de λ près, à l'Hamiltonien obtenu à la Section 1.3.2 en se plaçant dans le régime phononique. Ainsi, en posant,

$$\omega_k = k \sqrt{\frac{gn_0}{m\lambda^3}}, \quad x_k = \left(\frac{gm\lambda}{n_0} \right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{\hbar k}} \delta\tilde{n}_k \quad \text{et} \quad p_k = \left(\frac{n_0}{gm\lambda} \right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\hbar k} \tilde{\theta}_k,\tag{7.51}$$

l'hamiltonien se réécrit $H = \sum_k (1/2) \hbar \omega_k (x_k^2 + p_k^2)$. On va alors chercher à tester l'hypothèse d'adiabaticité, c'est-à-dire de regarder si la population du mode k de Bogoliubov $\langle a_k^\dagger a_k \rangle = (1/2) (\langle x_k^2 \rangle + \langle p_k^2 \rangle)$ est conservée au cours du temps. Pour cela, on cherche à déterminer l'évolution des quadratures x_k et p_k définie par Eq.(7.51). En utilisant les équations Eq.(7.49), la dynamique des quadratures vérifie les équations

$$\begin{aligned}\partial_\tau x_k &= \omega_k p_k + \frac{1}{4} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} x_k, \\ \partial_\tau p_k &= -\omega_k x_k - \frac{1}{4} \frac{\dot{\lambda}}{\lambda} p_k.\end{aligned}\tag{7.52}$$

Le système se trouvant dans le régime TF 1D, le facteur d'échelle est solution de l'Eq.(7.31) avec $\alpha = 1$. À partir de ces deux équations Eq.(7.52), les dynamiques des quadratures d'un

mode k sont alors décrites par un ensemble de 4 équations différentielles

$$\begin{aligned}
 \ddot{\lambda} &= \omega_{\parallel}^2 \frac{1}{\lambda^2}, \\
 \partial_{\tau} \langle x_k^2 \rangle &= 2\omega_k \langle x_k p_k \rangle + \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} \langle x_k^2 \rangle, \\
 \partial_{\tau} \langle p_k^2 \rangle &= -2\omega_k \langle x_k p_k \rangle - \frac{\dot{\lambda}}{2\lambda} \langle p_k^2 \rangle, \\
 \partial_{\tau} \langle x_k p_k \rangle &= 2\omega_k (\langle p_k^2 \rangle - \langle x_k^2 \rangle).
 \end{aligned} \tag{7.53}$$

que l'on peut résoudre numériquement. Les conditions initiales sur le facteur d'échelle sont $\lambda(0) = 1$, $\dot{\lambda}(0) = 1$. Les conditions initiales sur les quadratures sont obtenues en faisant l'approximation que l'on étudie la dynamique des modes k tels que $k_B T \gg \hbar\omega_k$. Le théorème de l'équirépartition de l'énergie donne $\langle x_k^2 \rangle(0) = \langle p_k^2 \rangle(0) = k_B T / (\hbar\omega_k)$ et $\langle x_k p_k \rangle = 0$. Les évolutions des quadratures ainsi que des modes de Bogoliubov sont représentés Fig.7.8 pour les modes $n = 10$ et 5, ($k = 2\pi n/\ell$). Les quadratures et les populations des modes de Bogoliubov peuvent être considérées comme stationnaires, validant alors l'hypothèse d'expansion adiabatique.

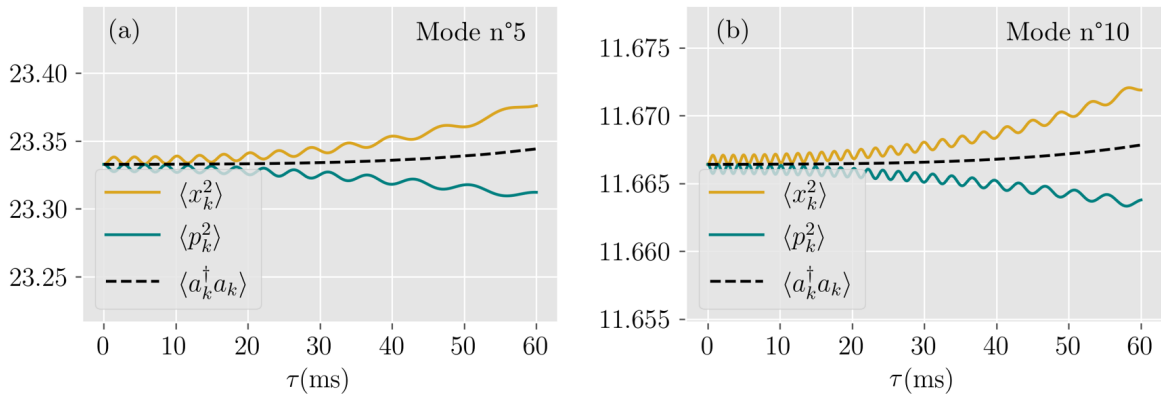


FIGURE 7.8 – Évolution des quadratures et de la population d'un mode k au cours d'une expansion longitudinale du nuage pendant un temps τ . Les simulations ont été réalisées pour $T = 100\text{nK}$, $n_0 = 50 \times 10^6 \mu\text{m}^{-1}$ et $\ell = 50\mu\text{m}$. (a) Les quadratures et la population du mode $n = 5$ dévient de moins de 0.05% – (b) Les quadratures et la population du mode $n = 10$ dévient de moins de 0.001%.

7.3.4 Mesures expérimentales et perspectives

Des mesures de températures ont été réalisées expérimentalement. Le gaz est préparé dans le régime TF 1D avec $\mu_p / (\hbar\omega_{\perp}) = 0.4$.

Les températures extraites expérimentalement à partir des ondulations de densité pour différents temps d'expansion avec les prédictions Eq.(7.47) sont représentées Fig.7.9 : les températures sont tracées en fonction du facteur d'échelle λ . La courbe est ajustée par une fonction $T = T_0/\lambda^{\nu}$ avec ν comme paramètre libre. On trouve $\nu = 1.55 \pm 0.12$ cohérent avec les prédictions théoriques obtenues Eq.(7.47).

7.4. ÉVOLUTIONS DES FLUCTUATIONS DE PHASE D'UNE TRANCHE DE GAZ INITIALEMENT HOMOGENÈME

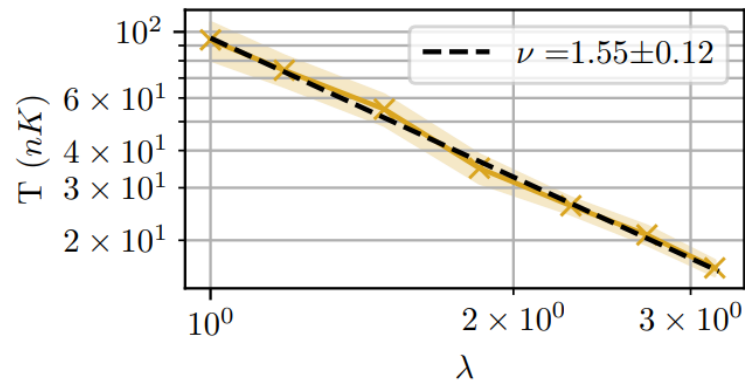


FIGURE 7.9 – Les points jaunes correspondent aux températures extraites à partir des ondulations de densité pour différentes valeurs de λ correspondant à différents temps d'expansion. Les données sont ajustées par une fonction $T = T_0/\lambda^\nu$ avec ν comme paramètre d'ajustement. On obtient ici $\nu = 1.55 \pm 0.12$ cohérent avec l'évolution attendue dans le cas des petits vecteurs d'ondes avec l'hypothèse de suivi adiabatique Eq.(7.47).

En résumé

- On étudie le cas d'un nuage atomique initialement à l'équilibre dans un piège longitudinal harmonique, dans le régime 1D [Thomas-Fermi](#). Si l'on fait l'hypothèse de suivi adiabatique, la température des modes phononiques au cours de l'expansion décroît selon $T = T_0/\lambda^{3/2}$ avec λ le facteur d'échelle.
- Dans les conditions de notre expérience, l'hypothèse de suivi adiabatique est valide. Les températures extraites à partir des ondulations de densité sont en bon accord avec les prédictions dans le cas des petits vecteurs d'onde.

7.4 Évolutions des fluctuations de phase d'une tranche de gaz initialement homogène

Nous nous sommes aussi intéressés à l'expansion d'un nuage initialement homogène s'éta-
lant sur une taille ℓ . Pour essayer de comprendre ce qu'il se passe pour ce système, il est
intéressant de raisonner en termes de distribution de rapidités spatialement résolue $\rho(x, \theta, \tau)$,
ou encore en termes de facteur d'occupation $\nu_{[\rho]}(x, \theta, \tau)$. À l'instant initial $\tau = 0$, pour un
système homogène, le facteur d'occupation est donné par

$$\nu_{[\rho]}(x, \theta, 0) = \begin{cases} \nu_0(\theta) & \text{si } |x| < \frac{\ell}{2}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (7.54)$$

Un exemple de telle fonction est représentée sur la Fig.7.10(a). La fonction $\nu_0(\theta)$ est représentée
sur la Fig.7.10(c) : on considère ici que la distribution de rapidité / le facteur d'occupation
est thermique avec $T/\mu = 2$.

Après une expansion longitudinale (sans confinement longitudinal, $V_{\parallel}(x) = 0$), le facteur

d'occupation évolue selon l'équation [GHD](#) que l'on rappelle ici,

$$\partial_x \nu_{[\rho]}(x, \theta, \tau) + v_{\text{eff}}[\rho](x, \theta, \tau) \partial_\tau \nu_{[\rho]}(x, \theta, \tau) = 0. \quad (7.55)$$

La Fig.7.10(b) est une reconstruction numérique du facteur d'occupation à $\tau = 20\text{ms}$ en résolvant les équations [GHD](#). En $x = 0$, les prédictions [GHD](#) indique que le facteur d'occupation est une mer de Fermi, le système est localement à entropie nulle (voir la courbe rouge pointillée de la Fig.7.10(c)).

Cet effet est très intéressant puisqu'il permettrait de sonder des systèmes à des températures très proches du zéro absolu. C'est pourquoi nous avons essayé d'observer un tel phénomène expérimentalement.

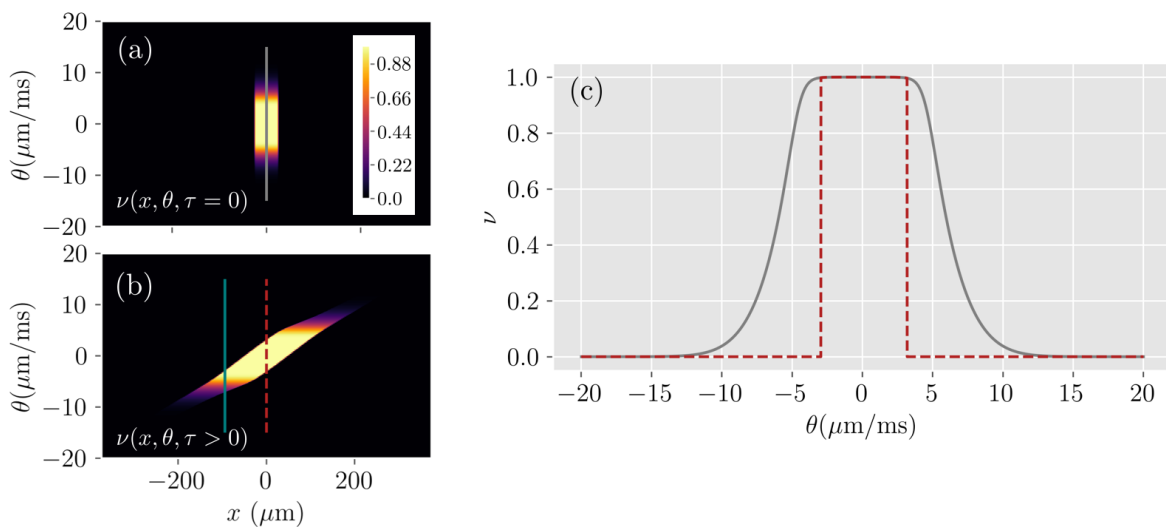


FIGURE 7.10 – (a) Facteur d'occupation à $\tau = 0$ initialement thermique avec $T/\mu = 2$ – (b) Facteur d'occupation à $\tau = 20\text{ms}$. La ligne verticale bleue correspond au centre de la position pour l'extraction de la température côté gauche. – (c) La courbe grise correspond au facteur d'occupation correspondant à la coupe de (a). La courbe rouge pointillée correspond au facteur d'occupation correspondant à la coupe (b).

7.4.1 Protocole expérimental

Pour réaliser les expansions d'un gaz initialement homogène de taille ℓ finie, nous avons utilisé l'outil de sélection spatial présenté dans le Chapitre6. Le nuage atomique est initialement à l'équilibre dans un piège harmonique transversal $\omega_\perp = 2\pi \times 2.56\text{kHz}$ et longitudinal $\omega_\parallel = 2\pi \times 5\text{Hz}$. Le [DMD](#) est imagé sur les atomes : seules les parties gauches et droites du gaz sont illuminées pendant un temps $\tau_p = 30\mu\text{s}$, voir Fig.7.11. Il ne reste alors que la partie centrale du nuage atomique que l'on considère quasi homogène de densité n_0 .

Une fois la préparation de la situation initiale réalisée, le confinement longitudinal est enlevé, le confinement transverse est lui maintenu : le gaz réalise alors une expansion longitudinale. Après un temps τ , le confinement transverse est coupé, on réalise un temps de

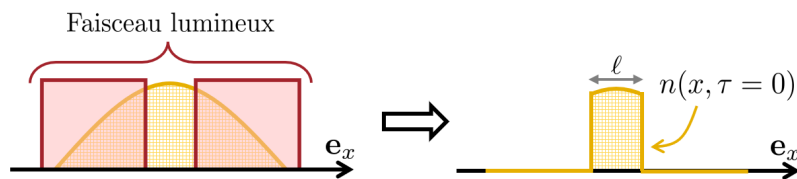


FIGURE 7.11 – Production d'un nuage homogène de taille ℓ . Le gaz est tout d'abord placé à l'équilibre dans un potentiel longitudinal harmonique. Les parties gauches et droites du nuage atomique sont illuminés $30\mu\text{s}$ par un faisceau pusher pour enlever les atomes du piège. Après la sélection, seule reste la partie centrale du gaz, de densité quasi-homogène.

vol $t_v = 8\text{ms}$, ce qui permet d'extraire une température du système à partir du spectre de puissance des ondulations de densité, comme présenté dans la Section 5.2.2.

7.4.2 Résultats expérimentaux et perspectives

La Fig. 7.12(a) présente les températures extraites à partir de données expérimentales pour différents temps d'expansion τ . Pour un même τ , des températures ont été extraites sur différentes zones :

- On extrait la température à partir du spectre de puissance des ondulations de densité en se limitant à une boîte de taille $\ell_C = 50\mu\text{m}$ centrée en $x = 0$ (courbe jaune de la Fig. 7.12(a)) ;
- On fait de même, mais avec une boîte de taille $\ell_C = 800\mu\text{m}$ centrée en $x = 0$ (courbe rouge de la Fig. 7.12(a)) ;
- On fait de même avec une boîte de taille $\ell_C = 100\mu\text{m}$ cette fois centrée en $x < 0$ (courbe bleue de la Fig. 7.12(a)). Plus précisément, le centre de la boîte est fixé à la position $x = -0.8\ell(\tau)/2$ avec $\ell(\tau)$ la taille mesurée du nuage atomique à l'instant τ .

Utilisant des petits temps de vol t_v , nous sommes dans l'approximation où $kt_v\hbar/m \ll \ell_C$, d'où

$$\langle |\tilde{\rho}_k|^2 \rangle = 4n_0^2 \langle |\theta_k|^2 \rangle \sin^2 \left(\frac{\hbar k^2 t_v}{2m} \right). \quad (7.56)$$

Pour des temps $\tau < 40\text{ms}$, les températures extraites vérifient $\hbar kc \ll k_B T$. Ceci implique $\langle |\theta_k|^2 \rangle = mk_B T / (\hbar k^2)$. Pour des temps $\tau > 40\text{ms}$, les températures extraites diminuent suffisamment pour que l'approximation $\hbar kc \ll k_B T$ ne soit plus valable. Il faut alors prendre en compte la contribution des fluctuations de point 0 : on a alors

$$\langle |\theta_k|^2 \rangle = \underbrace{\frac{1}{2n_0} \frac{mc}{\hbar k}}_{(1)} + \frac{1}{n_0} \frac{mc}{\hbar k} \langle a_k^\dagger a_k \rangle. \quad (7.57)$$

avec $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ la population du mode phononique k : on suppose que $\langle a_k^\dagger a_k \rangle$ suit une loi de Bose-Einstein. Le terme (1) correspond à l'apport du mode fondamental et n'est alors plus négligeable (la courbe bleue de la Fig. 7.12(b) correspond à la contribution du mode fondamental sur le spectre expérimental).

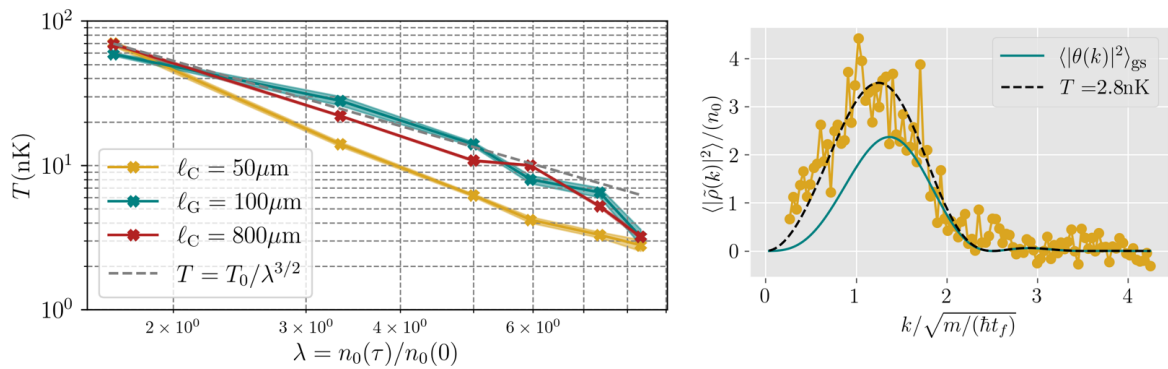


FIGURE 7.12 – (a) Températures extraites à partir du spectre de puissance des ondulations de densité pour différentes zones de sélection en utilisant les Eq.(7.56) et Eq.(7.57) – (b) Exemple de spectre de puissance obtenu pour $\tau = 60\text{ms}$ et $\ell = 50\mu\text{m}$. La courbe noire pointillée correspond à l’ajustement avec Eq.(7.57), T étant le seul paramètre libre. Le profil bleu correspond à la contribution de l’état fondamental.

Les températures extraites en se limitant à une petite région autour de la zone centrale sont pour $\tau \in [20, 50]\text{ms}$ plus froides que pour les autres sélections. Cela va dans le sens des prédictions [GHD](#).

Cependant, la différence pour $\tau = 60\text{ms}$ est beaucoup moins flagrante. D’une part, les mesures prises à ces temps-là sont assez bruitées du fait d’une densité atomique très faible. De plus, si on compare plus précisément les zones sélectionnées avec les simulations [GHD](#), on observe que pour ces temps-là, 80% du nuage est à entropie quasi-nulle.

Bien que très froide (autour de 2nK), la température de la zone centrale du nuage ne tend pas vers 0. Cela pourrait être dû à des limites associés au processus de sélection (des effets de bord notamment). Une autre possibilité serait que la taille initiale du nuage atomique pourrait expliquer ce phénomène (des calculs Bogoliubov vont dans ce sens). Des effets de diffusion pourraient expliquer les déviations de nos mesures avec les prédictions [GHD](#). En effet, au début de l’expansion longitudinale, les variations de densités spatiales sont très rapides au niveau des bords du nuage atomique, les prédictions à l’échelle d’Euler ne sont alors plus valables. Des termes de type Navier-Stokes à rajouter dans les équations [GHD](#) pourraient rendre compte de nos observations [\[61\]](#). Un projet futur pour tester ce phénomène serait par exemple de prendre des données pour des tailles de gaz initiales différentes.

Les premiers résultats sur l’évolution des fluctuations de phase pour un gaz homogène sont prometteuses. Une autre observable que l’on aimerait étudier dans le futur sont les fluctuations de densité. De même que pour les fluctuations de phase, on s’attend à ce que ces dernières soient supprimées au centre du nuage atomique en expansion.

7.4. ÉVOLUTIONS DES FLUCTUATIONS DE PHASE D'UNE TRANCHE DE GAZ INITIALEMENT HOMOGENÈ

En résumé

- Les équations [GHD](#) pour un système initialement homogène de taille finie ℓ prédisent qu'après une expansion dans le guide 1D, le centre du nuage atomique présente une entropie nulle.
- Des mesures préliminaires ont été réalisées expérimentalement et vont dans le sens de ces prédictions.

SONDE EXPÉRIMENTALE DE LA DISTRIBUTION DE RAPIDITÉS LOCALEMENT RÉSOLUE

Sommaire

8.1	Protocole expérimental	141
8.2	Mesures sur un système à l'équilibre	141
8.3	Dynamique d'expansion : comportements attendus	143
8.3.1	Comportement hydrodynamique	143
8.3.2	Comparaison aux équations hydrodynamiques GP	145
8.4	Comparaison aux équations GHD	146
8.4.1	Régime asymptotique	146
8.4.2	Hypothèse d'un système thermique sur une tranche	146
8.4.3	Hypothèse thermique sur différentes tranches	148
8.4.4	Au-delà de l'hypothèse thermique	151
8.5	Effet du processus de sélection	153
8.5.1	Effet de l'intensité du faisceau de sélection	153
8.5.2	Autres précisions	154
8.6	Systèmes hors équilibres	155
8.6.1	Protocole de cisaillement	155
8.6.2	Mesures expérimentales	155

Comme déjà expliqué dans les chapitres précédents, la compréhension des propriétés des gaz de bosons unidimensionnel (1D) avec interactions de contact répulsives est étroitement reliée à la notion de distribution de rapidités $\rho(\theta)$. Pour rappel, les états propres d'un système à N particules sont paramétrés par N rapidités $\{\theta_i\}_{i \in [1, N]}$ et prennent la forme de l'Ansatz de Bethe [20, 19]. Une autre façon plus intuitive de comprendre la notion de rapidités est de considérer ces dernières comme étant les vitesses de quasi-particules à durée de vie infinie qui évoluent dans le système [59, 158, 159]. Ici, on utilisera une autre définition déjà développée dans la Section 1.1.3.4 : les rapidités correspondent aux vitesses asymptotiques des atomes après une expansion 1D [35, 36, 37]. De même, la position asymptotique des particules après une expansion est directement reliée aux rapidités : après un temps d'expansion τ assez long, les interactions deviennent négligeables et les particules sont localisées à la position $x_j = \tau\theta_j$.

Cette dernière définition est particulièrement intéressante puisqu'elle est reliée à un protocole expérimental de mesure de la distribution de rapidités d'un système en réalisant une expansion 1D avant de mesurer la distribution de vitesse ou de densité. Des premières mesures utilisant ce protocole ont déjà été réalisées récemment pour des gaz 1D piégés dans des réseaux optiques 2D [38], voir aussi [160, 161, 162]. Il est important de préciser que dans toutes ces expériences, seule la distribution de rapidités *globale* est mesurée : il s'agit de la distribution de rapidités d'un nuage atomique 1D entier inhomogène. Dans ce chapitre, on s'intéresse à sonder la distribution de rapidités *locale* pour un gaz de bosons 1D inhomogène. Une autre particularité, bien que moins fondamentale, est que les premiers résultats concernent des gaz 1D dans un régime d'interaction forte. Nous nous intéressons ici à sonder cette distribution pour des gaz à faibles interactions. Toutefois, le protocole que nous avons utilisé s'applique à tout type de régime.

La notion de distribution de rapidités *locale* émerge naturellement lorsque l'on considère un nuage atomique à l'équilibre dans un potentiel longitudinal variant lentement : il est alors possible de faire une [Approximation de Densité Locale \(LDA\)](#) [163]. Avec cette approche, le gaz est décrit comme un fluide pouvant être décomposé en cellules de taille mésoscopique dans lesquelles le système est de densité homogène et dans un état relaxé. Pour les gaz 1D intégrables, l'état d'équilibre est localement décrit par un [Ensemble de Gibbs Généralisé \(GGE\)](#) (notion introduite dans la Section 2.1.2) ou de façon équivalente par sa distribution de rapidités [53, 164]. Cette description du système permet de définir une distribution de rapidités pour chaque cellule de fluide : la notion de distribution de rapidités *locale* $\rho(x, \theta)$ est alors bien définie. La notion de distribution de rapidités locale joue un rôle non seulement à l'équilibre, mais aussi pour caractériser la dynamique hors équilibre des gaz, tant que cette dynamique se produit à grandes échelles spatiales et temporelles. Elle est notamment au cœur de la théorie [Hydrodynamique Généralisée \(GHD\)](#), introduite dans la Section 2.3 [23].

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux concernant la mesure de distribution de rapidités localement résolue $\rho(x, \theta)$. Pour cela, l'outil de sélection spatial mis en place dans notre expérience et caractérisé dans le Chapitre 6 a été utilisé comme sonde locale de distribution de rapidités. De premières mesures dans un gaz à l'équilibre sont présentées, comme preuve de principe. De telles mesures ont aussi été réalisées pour des nuages hors équilibre,

où les distributions de rapidités locales sondées sont très différentes de celles attendues pour un équilibre thermique.

8.1 Protocole expérimental

Pour sonder expérimentalement la distribution de rapidités spatialement résolue, le protocole suivant est réalisé (voir la Fig.8.1(c)) :

- On commence par sélectionner une zone du nuage atomique de taille ℓ et centrée en x_0 : pour cela, on utilise l’outil de sélection spatial mis en place au cours de ma thèse. Pour rappel, on fait l’image d’un [Dispositif de Micromiroirs Digitaux \(DMD\)](#) au niveau du plan des atomes : par pression de radiation, il est possible d’enlever instantanément tous les atomes en dehors de la zone sélectionnée $[x_0 - \ell/2, x_0 + \ell/2]$: seuls restent les atomes dans la cellule sélectionnée, voir Fig.8.1(a). Le faisceau illumine les atomes pendant $30\mu\text{s}$ avec une intensité ajustée de sorte que $\sim 99\%$ des atomes ne soient plus piégés. Afin de limiter le processus de réabsorption de photons diffusés, le laser est désaccordé de 15MHz par rapport à la transition $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$ de la raie D2 du Rb.
- Une fois la sélection réalisée, le confinement longitudinal est coupé, le confinement transverse étant, lui, maintenu. Les atomes réalisent une expansion 1D pendant un temps τ et le profil de densité est imagé après un temps de vol $t_v = 1\text{ms}$, voir Fig.8.1(c).
- Le même protocole est réalisé pour des sélections centrées en différentes positions x_0 , voir Fig.8.1(b).

8.2 Mesures sur un système à l’équilibre

Le protocole décrit ci-dessus a été tout d’abord été réalisé sur un gaz initialement à l’équilibre. Les atomes sont placés dans un piège harmonique de fréquence transverse $f_{\perp} = 2.56\text{KHz}$ avec un paramètre de [Lieb Liniger](#) au centre du nuage qui vaut $\gamma = 0.6 \times 10^{-2}$. Le potentiel longitudinal est, lui aussi, harmonique de fréquence $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$. Un profil de densité est représenté sur la Fig.8.1(d). Une température et un potentiel chimique peuvent être extraits par un ajustement de ce profil en utilisant la thermodynamique Yang Yang et l’[Approximation de Densité Locale](#) : on obtient ici $T_{\text{YY}} = 90\text{nK}$ et $\mu_{\text{YY}} = 49\text{nK}$.

On réalise 7 sélections de même taille ℓ centrées en différentes positions x_0 , comme représenté sur la Fig.8.1(b). Un exemple d’expansion longitudinale d’une zone sélectionnée est représenté sur la Fig.8.4(a). Si le régime asymptotique est atteint, on s’attend à avoir

$$\frac{\tau}{\ell} n\left(\frac{x - x_0}{\tau}\right) = \rho\left(\frac{x - x_0}{\tau}\right). \quad (8.1)$$

L’ensemble de profils de densités obtenus après sélection et un temps d’expansion de $\tau = 40\text{ms}$ sont représentés sur la Fig.8.2(a). La quantité tracée correspond à $\tau n[(x - x_0)/\tau]/\ell$ et est comparée à la distribution de rapidités $\rho(x, \theta)$ obtenue numériquement en supposant que gaz

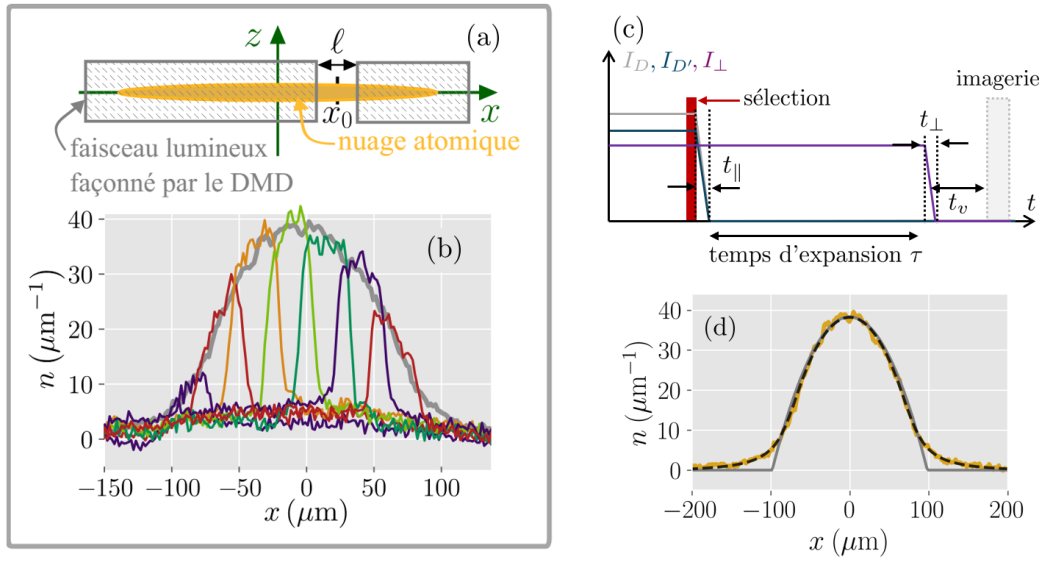


FIGURE 8.1 – (a) Principe de sélection d’une zone du nuage atomique, ici représenté par un cylindre jaune : ce dernier est illuminé par un faisceau lumineux façonné par le DMD – (b) Exemple de sélections pour un gaz initialement à l’équilibre : superposition entre le profil de densité du nuage atomique avant sélection (courbe grise) et ceux obtenus $\tau = 1$ ms après différentes sélections de taille $\ell = 37\mu\text{m}$ centrées en différents x_0 (courbes colorées) – (c) Diagrammes temporels résumant le protocole expérimental pour sonder la distribution de rapidités spatialement résolue. Pour ce protocole, $t_{\parallel} = 80\mu\text{s}$, $t_{\perp} = 10\mu\text{s}$ et $t_v = 1$ ms – (d) Le profil de densité d’un nuage atomique initialement à l’équilibre dans un piège harmonique avec $f_{\perp} = 2.6\text{KHz}$ et $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$ est représenté en jaune. La courbe grise correspond au profil de densité parabolique attendu à l’état fondamental dans le régime qBEC pour lequel l’équation d’état est donnée par $n(x) = [\mu - V_{\parallel}(x)]/g$. La courbe noire pointillée est obtenue par ajustement avec les données expérimentales en supposant que le système soit bien décrit par un ensemble thermique (on parle de thermodynamique Yang Yang, voir Section 5.2.1). Cet ajustement permet d’extraire une température $T_{YY} = 90\text{nK}$ et un potentiel chimique $\mu/k_B = 49\text{nK}$. On estime à $\simeq 7\%$ la population des atomes dans des états transverses excités, dont $\simeq 4\%$ au centre.

est à l’équilibre thermique et en utilisant les paramètres (T_{YY}, μ_{YY}) . La fonction $\rho(x, \theta)$ est représentée sur la Fig. 8.2(b).

Les résultats expérimentaux semblent cohérents avec les prédictions numériques. Une question importante est de savoir si le régime asymptotique est réellement atteint, c’est-à-dire si pour une zone centrée en x_0 , le profil de densité vérifie Eq.(8.1). Pour vérifier cela, on a besoin d’une théorie qui prédit la dynamique de notre système : on va dans la suite utiliser la théorie Hydrodynamique Généralisée (GHD) pour analyser nos résultats expérimentaux.

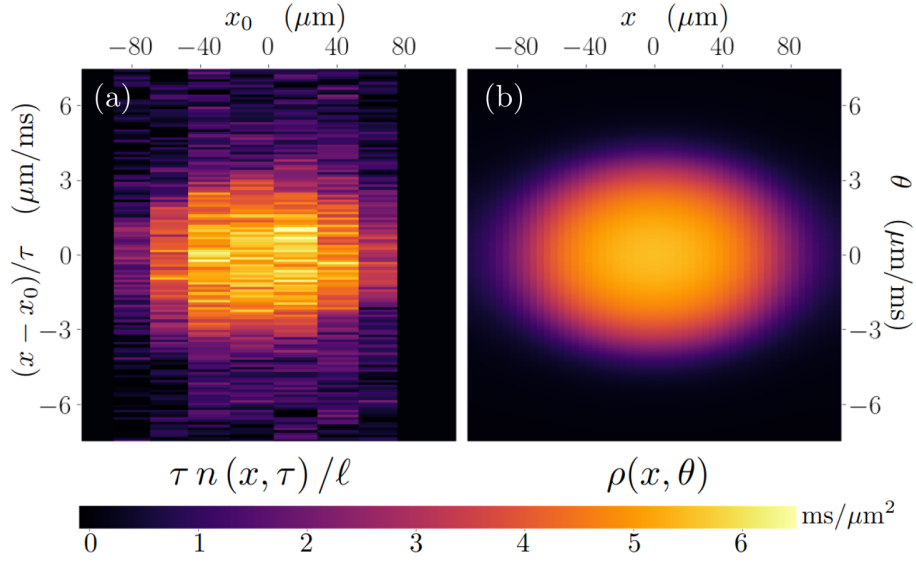


FIGURE 8.2 – (a) Profils de densités pour différents centres de sélection x_0 représentés sur la Fig.8.1(b). Les sélections sont de taille $\ell = 37\mu\text{m}$ et les profils obtenus après un temps d'expansion $\tau = 40\text{ms}$. Pour comparer les résultats à une distribution de rapidités, les profils de densités sont multipliés par le rapport τ/ℓ et sont tracés en fonction de $(x - x_0)/\tau$ – (b) Prédiction théorique de la distribution de rapidités spatialement résolue $\rho(x, \theta)$ à l'équilibre thermique dans un potentiel harmonique longitudinal avec $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$. La température T_{YY} et le potentiel chimique μ_{YY} utilisés sont eux obtenus à partir du profil *in situ*.

En résumé

- Nous avons mis en place une sonde locale de distribution de rapidités. Pour cela, un faisceau pousseur sélectionne une zone locale d'étude. Les atomes sélectionnés réalisent une expansion dans le guide 1D. Après un temps $\tau \rightarrow \infty$ d'expansion, le profil de densité devient homothétique à la distribution de rapidités locale.
- Ce protocole a été réalisé expérimentalement pour extraire la distribution de rapidité localement résolue sur un nuage atomique initialement à l'équilibre.

8.3 Dynamique d'expansion : comportements attendus

Pour savoir si le régime asymptotique des expansions longitudinales est atteint, nous avons besoin d'utiliser une théorie qui prédit la dynamique du système. On utilise l'approche hydrodynamique introduite dans le Chapitre2, l'[Hydrodynamique Généralisée \(GHD\)](#).

8.3.1 Comportement hydrodynamique

Au cours de la dynamique, l'évolution de la distribution de rapidités spatialement résolue peut être obtenue en utilisant les équations [GHD](#). Avec nos conditions initiales spécifiques

(une tranche homogène centrée en x_0 et de taille ℓ), nous avons

$$\begin{cases} \partial_\tau \rho(x, \theta, \tau) + \partial_x \left(v_{\text{eff}}^{[\rho]} \rho(x, \theta, \tau) \right) = 0 \\ \rho(x, \theta, 0) = \rho_0(\theta) \text{ si } |x - x_0| \leq \frac{\ell}{2}, 0 \text{ autrement.} \end{cases} \quad (8.2)$$

En faisant les changements de variable $\alpha = (x - x_0)/\ell$ et $\beta = \tau/\ell$, l'Eq.(8.2) se réécrit

$$\begin{cases} \partial_\beta \tilde{\rho}(\alpha, \theta, \beta) + \partial_\alpha \left(v_{\text{eff}}^{[\tilde{\rho}]} \tilde{\rho}(\alpha, \theta, \beta) \right) = 0 \\ \tilde{\rho}(\alpha, \theta, 0) = \rho_0(\theta) \text{ si } |\alpha| \leq \frac{1}{2}, 0 \text{ autrement.} \end{cases} \quad (8.3)$$

On voit que l'équation hydrodynamique Eq.(8.3) est indépendante de la taille initiale ℓ du système. La densité linéaire étant liée à la distribution de rapidités puisque $\tilde{n}(\alpha, \beta) = \int d\theta \tilde{\rho}(\alpha, \theta, \beta)$, elle doit alors, elle aussi, être indépendante de la taille initiale de sélection. Autrement dit, les profils de densité obtenus pour différents ℓ et τ mais tels que $\beta = \tau/\ell$ reste constant doivent être identiques si on les trace en fonction de $\alpha = (x - x_0)/\ell$. En toute généralité, pour de telles conditions initiales, ce comportement est attendu pour toute fonction solution d'équation de type hydrodynamique (sans terme de diffusion).

Ce comportement a été vérifié expérimentalement comme on peut le voir sur la Fig.8.3(a) : deux profils de densité tracés en fonction de α sont superposés. Ils sont obtenus pour différents ℓ et τ mais pour un même $\beta = 0.39\text{ms}/\mu\text{m}$. Les deux profils se superposent remarquablement bien.

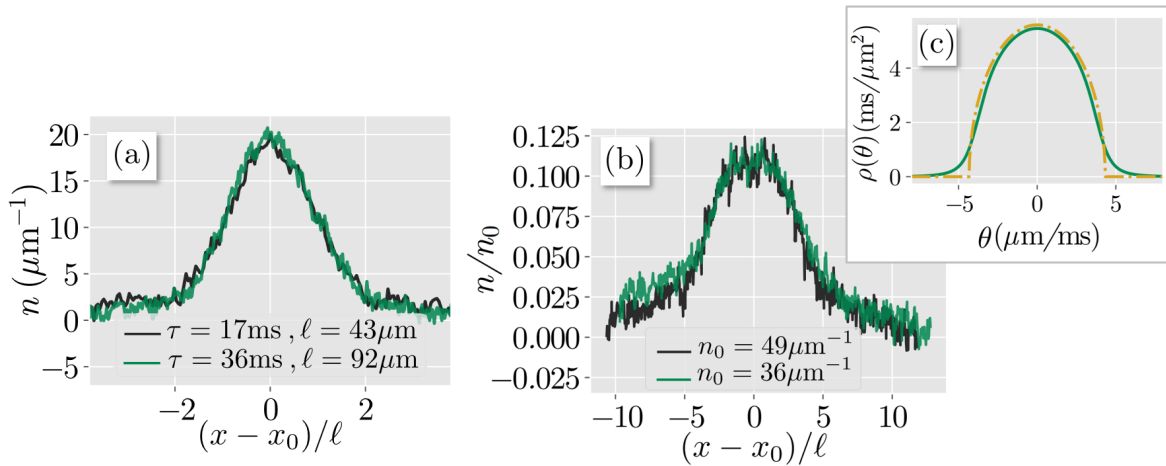


FIGURE 8.3 – (a) Vérification du comportement hydrodynamique attendu avec la forme des équations GHD. Deux profils de densité sont tracés en fonction de α pour un même $\beta = \tau/\ell = 0.39\text{ms}/\mu\text{m}$ – (b) Vérification du comportement hydrodynamique attendu avec les équations GP. Deux profils de densités sont tracés pour un même ratio $\eta = (\tau/\ell)\sqrt{gn_0/m} = 2.65$ avec $\ell = 37\mu\text{m}$, mais pour des densités initiales n_0 différentes. Pour cela, les sélections ont été faites pour différentes régions d'un même nuage – (c) Comparaison entre la distribution de rapidités en demi-cercle attendue dans la limite GP (courbe jaune pointillée) et la distribution de rapidité thermique calculée à partir de l'Ansatz de Bethe pour une température $T_{\Upsilon\Upsilon}$ et un potentiel chimique $\mu_{\Upsilon\Upsilon}$ extraits à partir du profil *in situ*.

8.3.2 Comparaison aux équations hydrodynamiques GP

Les gaz 1D étudiés sont dans le régime qBEC. Pour rappel de la Section SEC, à $T \rightarrow 0$, le système est paramétrisé par les bords supérieurs et inférieurs de la distribution de rapidités localement résolus $\theta^\pm(x, \tau)$. Pour caractériser l'évolution du gaz, il suffit donc de connaître l'évolution des θ^\pm ,

$$\partial_\tau \theta^\pm(x, \tau) + v_{\text{eff}}[\rho] (\theta^\pm(x, \tau)) \partial_x \theta^\pm(x, \tau) = 0. \quad (8.4)$$

Dans la limite qBEC où $\gamma \rightarrow 0$, comme détaillé dans la Section 2.4.1, Eq.(8.4) est équivalent aux équations obtenues à partir des équations GP en négligeant le terme de pression quantique,

$$\begin{cases} \partial_\tau n + \partial_x (vn) = 0 \\ \partial_\tau v + v \partial_x v = -\frac{g}{m} \partial_x n \end{cases} \quad (8.5)$$

avec n la densité et v la vitesse du fluide. La condition initiale correspond à avoir $v(x, 0) = 0$ et $n(x, 0) = n_0$ si $|x| < \ell/2$, $n(x, 0) = 0$ autrement. En faisant les changements de variable $\alpha = (x - x_0)/\ell$, $\beta = \tau/\ell$ et $\tilde{n} = n/n_0$, les équations Eq.(8.5) se réécrivent

$$\begin{cases} \partial_\beta \tilde{n} + \partial_\alpha (v \tilde{n}) = 0, \\ \partial_\beta v + v \partial_\alpha v = -\frac{gn_0}{m} \partial_\alpha \tilde{n}, \\ \tilde{n}(\alpha, \beta = 0) = 1 \text{ si } |\alpha| \leq \frac{1}{2}, 0 \text{ sinon,} \\ v(\alpha, \beta = 0) = 0. \end{cases} \quad (8.6)$$

De nouveau, la taille de la sélection ℓ ne rentre plus en compte dans le jeu d'équations présenté ci-dessus. Le seul paramètre qui apparaît est le rapport gn_0/m . La fonction adimensionnée \tilde{n} est alors une fonction de α, β et gn_0/m . le paramètre α étant déjà sans dimension, on a par analyse dimensionnelle

$$\tilde{n} = f \left(\alpha, \eta = \beta \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \right) \quad (8.7)$$

Ce résultat est attendu dans la limite $T \rightarrow 0$, ce qui n'est pas le cas dans notre expérience. Néanmoins, on attend à ce que le comportement donné par Eq.(8.7) reste valable au centre des profils de densité. En effet, l'effet d'entropie entraîne une déformation de la distribution de rapidité à ses bords : comme on le voit sur la Fig.8.3(c), le centre de la distribution de rapidités est semblable à la distribution de rapidités à entropie nulle, ici un demi-cercle. Comme les profils de densité après sélection et expansion longitudinale convergent vers la distribution de rapidités, on s'attend à ce que le centre soit en première approximation bien décrite à partir des équations Eq.(8.5).

Ce comportement a été testé expérimentalement comme on peut le voir sur la Fig.8.3(b) : deux profils de densité \tilde{n} y sont représentés en fonction de α . Les profils sont obtenus pour différentes temps d'expansion τ mais avec des densités initiales n_0 différentes telles que le rapport η soit constant. Pour cela, les sélections ont été réalisées sur un même nuage, mais à des positions x_0 différentes. Les centres des profils sont très similaires, le comportement attendu est bien observé. On observe de plus un accord remarquable même sur les bords des

profils, la raison de cet accord reste non élucidé.

8.4 Comparaison aux équations GHD

8.4.1 Régime asymptotique

Au vu des résultats, l'expansion des tranches est bien décrite par une approche hydrodynamique. On peut alors comparer les simulations GHD avec la distribution de rapidité spatialement résolue afin de savoir si le régime asymptotique est atteint ou non.

Les simulations sont réalisées en utilisant une distribution de rapidités thermique : on utilise les paramètres (T_{YY}, μ_{YY}) extraits à partir du profil de densité initial, voir Fig.8.1(d). Les prédictions numériques pour la zone centrale de sélection sont représentées sur la Fig.8.4(a) et superposées aux données expérimentales. La Fig.8.4(b) correspond au temps d'expansion $\tau = 50\text{ms}$. Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec les simulations.

La théorie GHD peut alors être utilisée pour analyser la convergence des profils de densité vis-à-vis de la distribution de rapidités. Pour $\tau = 50\text{ms}$, on trouve une déviation de $\sim 12\%$ au niveau de la partie centrale du profil, voir Fig.8.4(c). La Fig.8.4(d) représente l'écart-type σ entre les simulations et la distribution de rapidités,

$$\sigma(\tau) = \frac{\sqrt{\int |\frac{\tau}{\ell} n_{\text{GHD}}(\frac{x-x_0}{\tau}) - \rho(\frac{x-x_0}{\tau})|^2 dx}}{\sqrt{\int |\rho(\frac{x-x_0}{\tau})|^2 dx}} \quad (8.8)$$

avec n_{GHD} les profils obtenus à partir des simulations GHD et x_0 le centre de la sélection. Pour obtenir un écart-type 10 fois inférieur à celui obtenu pour $\tau = 50\text{ms}$, il faudrait attendre un temps d'environ 500ms, ce qui est irréaliste pour notre expérience. Ainsi, utiliser Eq.(8.1) pour déduire la distribution de rapidité à partir des profils donne seulement une idée approximative de cette dernière.

Cependant, on peut utiliser GHD a priori pour extraire la distribution de rapidités. C'est ce que l'on a essayé de faire, les résultats sont présentés dans les parties suivantes.

8.4.2 Hypothèse d'un système thermique sur une tranche

On a vu que le régime asymptotique lors des expansions longitudinales n'est pas complètement atteint expérimentalement. Pour une tranche centrée en x_0 , de taille ℓ et de densité homogène n , on souhaite alors extraire la distribution de rapidités associée $\rho(x_0, \theta)$ à partir des simulations GHD. Pour cela, on doit faire une hypothèse sur la forme de $\rho(x_0, \theta)$, afin de restreindre le nombre de paramètres d'ajustement : nous sommes en effet ici limités par les temps de calculs et le rapport signal sur bruit des données expérimentales.

En première approximation, nous avons fait le choix de supposer que la distribution de rapidités est thermique. Ce choix est porté principalement par deux raisons. D'une part, les profils à l'équilibre obtenus dans cette approximation correspondent remarquablement bien avec les profils expérimentaux, voir par exemple la Fig.8.1(d). De plus, il n'y a que deux

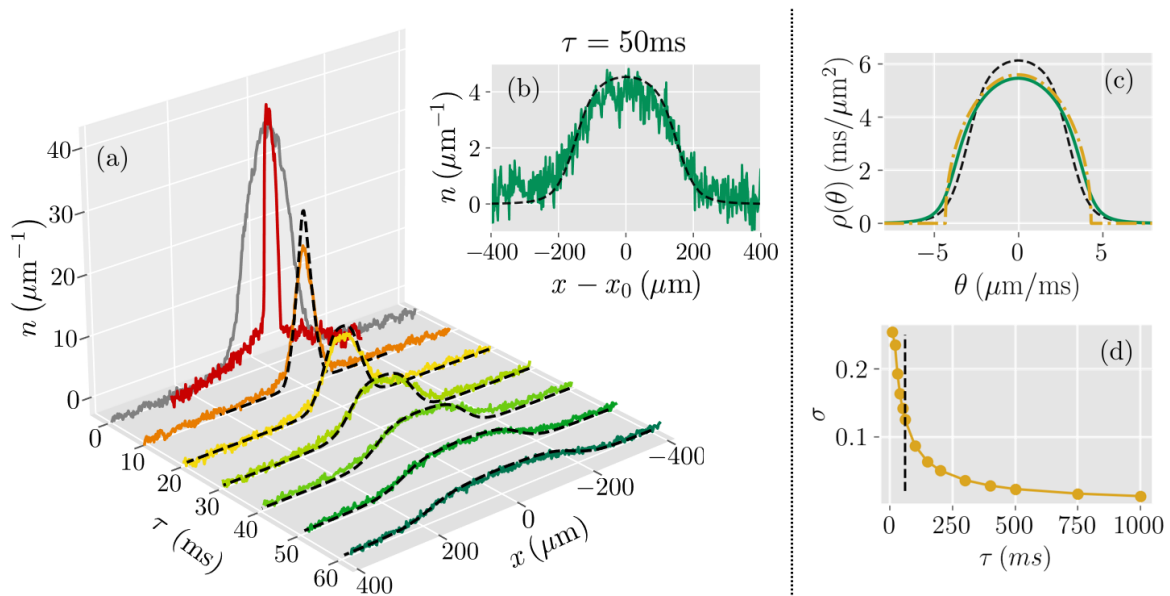


FIGURE 8.4 – (a) Expansion longitudinale de la tranche sélectionnée, ici centrée en $x_0 = 0\mu\text{m}$ et de taille $\ell = 37\mu\text{m}$. Le profil en gris correspond au profil de densité du gaz initial. Les profils de densité pour différents temps d’expansion sont représentés en couleurs. Les lignes noires pointillées correspondent aux simulations GHD pour une distribution de rapidités initialement thermique paramétrée par la température T_{YY} et un potentiel chimique $\mu(x_0) = \mu_0 = \mu_{YY}$ correspondant à ceux extraits à partir du profil de densité *in situ* – (b) Exemple du profil de densité obtenu après un temps $\tau = 50\text{ms}$ d’expansion (courbe bleue), superposé à la simulation GHD – (c) La courbe bleue correspond à la distribution de rapidités thermique avec T_{YY} et μ_{YY} . Par-dessus est superposé le profil remis à l’échelle $\tau n/\ell$ obtenu en utilisant les équations GHD après un temps d’expansion $\tau = 50\text{ms}$. La courbe jaune pointillée correspond à la distribution de rapidité attendue à l’état fondamental. – (d) Écart-type σ défini par Eq.(8.8) mesuré entre la distribution de rapidité et les simulations GHD en fonction du temps d’expansion τ . La ligne noire verticale correspond au temps d’expansion sondé expérimentalement.

paramètres d’ajustement : la température T et le potentiel chimique μ . Dans notre cas, pour une température T et une densité n donnée, le potentiel chimique n’a pas été un paramètre d’ajustement puisque les valeurs de l’équation d’état $n(\mu, T)$ ont été tabulées numériquement. Ainsi, la température est le seul paramètre d’ajustement.

On a réalisé de tels ajustements sur le profil expérimental lié à la sélection centrale avec un temps d’expansion de $\tau = 40\text{ms}$. Pour chaque température, on en déduit le potentiel chimique tel que la densité pic obtenu correspondent à la densité pic du nuage initialement à l’équilibre n_0 . Il ne reste alors qu’un seul paramètre d’ajustement, la température, extraite en minimisant l’écart-type

$$\sigma(T) = \frac{\sqrt{\int |n(x - x_0) - n_{\text{GHD}}(x, T)|^2 dx}}{\sqrt{\int |n(x - x_0)|^2 dx}}. \quad (8.9)$$

avec $x_0 = 0\mu\text{m}$ dans notre cas.

Ici, la température ajustée est $T_{\text{fit}} = 230\text{nK}$, 2.5 fois plus grande que celle obtenue à partir du profil initial. Bien que les deux températures soient très différentes, les distributions de rapidités associées sont quant à elles relativement peu différentes, voir Fig.8.5(b). Cela peut être expliqué par le fait que, pour un système profondément **qBEC**, la distribution de rapidité est dominée par des effets d'interactions et ne dépend que peu de la température.

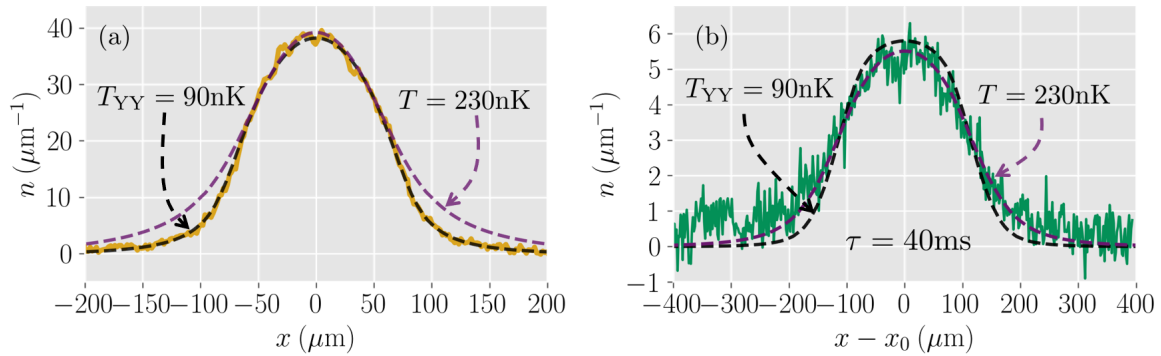


FIGURE 8.5 – (a) La courbe jaune est le profil de densité du nuage atomique initial, à l'équilibre dans le piège longitudinal harmonique. Un ajustement de ce profil avec la thermodynamique Yang Yang et la **LDA** permettent d'extraire la température T_{YY} (courbe noire pointillée). La courbe violette pointillée correspond au profil attendu avec ce même modèle avec $T_{\text{fit}} = 230\text{nK}$. – (b) La courbe verte est le profil de densité obtenu après sélection d'une tranche du gaz centrée en $x_0 = 0\mu\text{m}$ suivi d'une expansion longitudinale de $\tau = 40\text{ms}$. La simulation **GHD** pour T_{YY} est représentée en noir pointillé. La simulation **GHD** pour $T_{\text{fit}} = 230\text{nK}$ est représentée en violet pointillé.

Néanmoins, la température extraite au centre du profil n'est pas cohérente avec le profil de densité pour le gaz initialement à l'équilibre, voir Fig.8.5(a). Il est à préciser que les données ont été prises avec un gaz présentant une très faible population dans les états transverse excités (6% dont 4% au centre du gaz). Cette population transverse pourrait avoir un effet sur la forme des profils après expansion. On a considéré deux modèles différents pour caractériser cet effet : d'une part les atomes dans les états transverse évoluent comme un gaz de Bose idéal, d'autre part les atomes des états excités par collision retombent dans l'état fondamental en libérant une énergie $\hbar\omega_{\perp}$. Dans les deux cas, les différences observées sur les profils en expansion longitudinale sont négligeables et n'expliquent pas les différences observées sur la Fig.8.5(a).

8.4.3 Hypothèse thermique sur différentes tranches

De façon similaire à la Section précédente, une température spatialement résolue $T(x)$ peut être extraite à partir des données expérimentales. L'ensemble des résultats est représenté sur la Fig.8.6. Pour chaque sélection centrée en x_0 , une température peut être extraite en minimisant l'écart-type donné par Eq.(8.9) On observe que la température n'est pas constante selon la zone sélectionnée. Cette température est maximale au centre $T_{\text{fit}} = 270\text{nK}$, trois fois plus

grande que T_{YY} . La température diminue en s'éloignant du centre du nuage atomique jusqu'à atteindre une température proche de T_{YY} .

Les résultats suggèrent que le nuage atomique initial pourrait être décrit par un état localement à l'équilibre thermique. Ceci est étonnant puisqu'une telle situation ne correspond pas à un équilibre stationnaire. Pour caractériser la dynamique du système dans le piège longitudinal, on peut réaliser de nouvelles simulations GHD. La distribution de rapidités initiale est localement thermique avec une température spatialement dépendante en accord avec les résultats de la Fig.8.6.

Pour cela, on ajuste les points de la Fig.8.6(j) avec une fonction polynomiale $T_0 - a_2x^2 - a_4x^4$ telle que $T_0 = 274\text{nK}$, $a_2 = 0.0169\text{nK}\cdot\mu\text{m}^{-2}$ et $a_4 = 2.06 \times 10^{-6}\text{nK}\cdot\mu\text{m}^{-4}$. Afin d'éviter des températures négatives sur les bords du nuage, on remplace la température par T_{YY} quand elle est petite. Finalement,

$$T(x) = \max(T_{YY}, T_0 - a_2x^2 - a_4x^4). \quad (8.10)$$

On fait de même avec le potentiel chimique qui comme je le rappelle est fixé par rapport à une température de telle sorte à faire correspondre la densité obtenue avec la densité n_0 ,

$$\mu(x) = \max\left(\mu_{YY} - \frac{1}{2}m\omega_{\parallel}^2x^2, \mu_0 - b_2x^2 - b_4x^4\right), \quad (8.11)$$

avec $\mu_0/k_B = 55.3\text{nK}$, $b_2/k_B = 0.0061\text{nK}\cdot\mu\text{m}^{-2}$ et $b_4/k_B = 3.91 \times 10^{-8}\text{nK}\cdot\mu\text{m}^{-4}$. Ainsi, en chaque point x , la distribution de rapidités spatialement résolue est supposée thermique avec une température et un potentiel chimique donnés par les Eq.(8.10) et (8.11).

Par construction, le profil de densité obtenu à $t = 0$ est indiscernable de celui obtenu avec la thermodynamique Yang Yang où la distribution de rapidité est localement thermique avec une température indépendante de la position. Les deux profils de densité à $t = 0$ sont représentés sur la Fig.8.7. À partir de ces distributions, on peut alors simuler l'évolution du profil de densité en fonction en résolvant les équations GHD,

$$\partial_{\tau}\rho(x, \theta, \tau) + \partial_x \left[v_{[\rho]}^{\text{eff}}(\theta)\rho(x, \theta, \tau) \right] = \frac{\partial_x V_{\parallel}(x)}{m} \partial_{\theta}\rho(x, \theta, \tau) \quad (8.12)$$

avec $V_{\parallel} = 1/2m\omega_{\parallel}^2x^2$ puisque ici le potentiel longitudinal harmonique est maintenu au cours de la dynamique. Les résultats sont représentés sur la Fig.8.7. Même si la distribution de rapidité spatialement résolue $\rho(x, \theta, \tau)$ semble peu varier avec le temps, des oscillations de type respiration apparaissent au niveau du profil de densité. Au centre, on observe des variations de densité de l'ordre de $\simeq 20\%$, les oscillations sont de fréquences $f \simeq 2f_{\parallel}$. Pour précision, on s'attend dans le régime qBEC à avoir des oscillations des modes de respiration de fréquence $f = \sqrt{3}f_{\parallel}$ [165]. D'autres études mettent en évidence une superposition de modes de respiration [166]. Ces oscillations ne sont pas observées expérimentalement. La description de notre système par cet ansatz n'est donc pas valable.

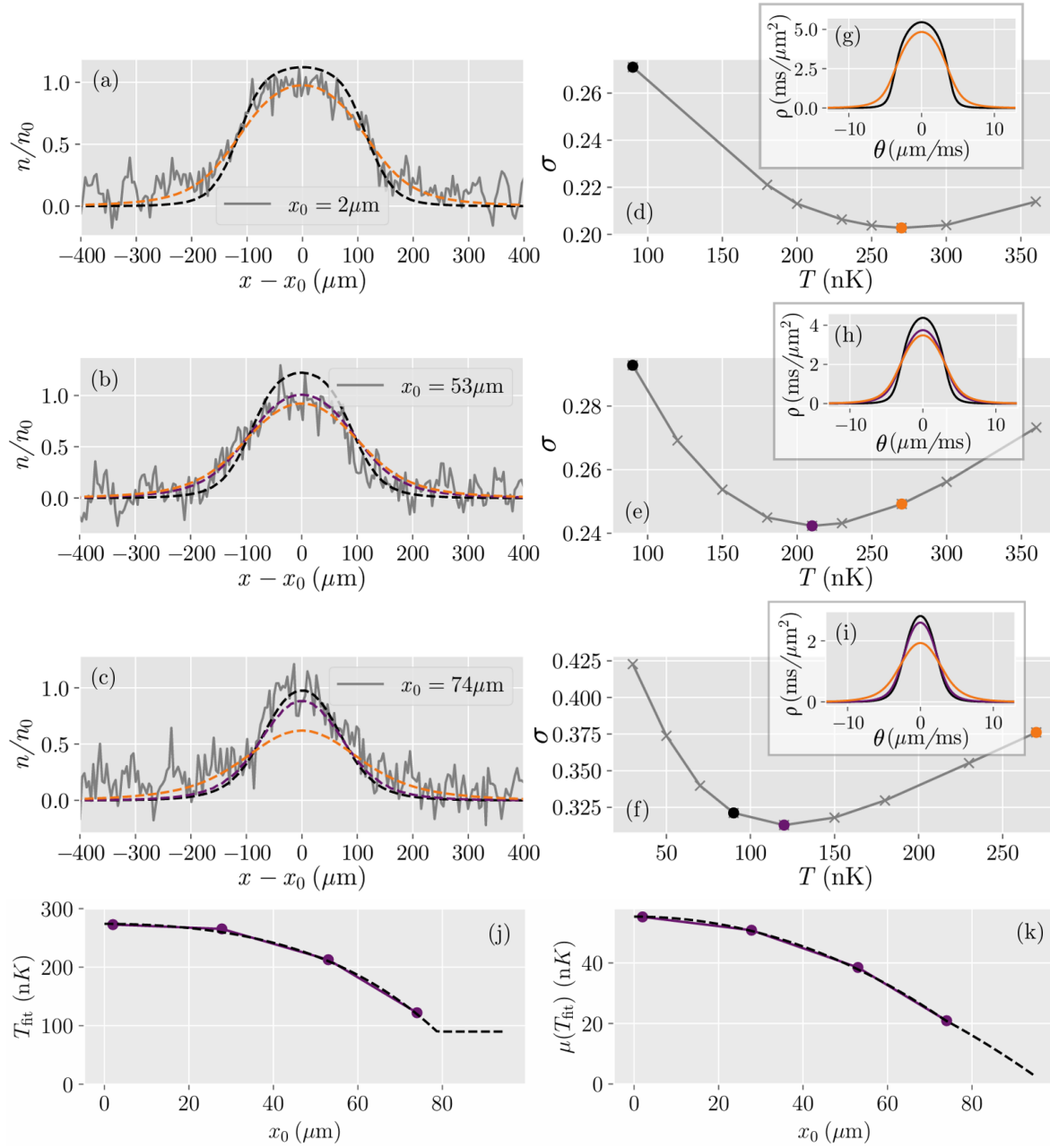


FIGURE 8.6 – (a) à (c) Les courbes grises correspondent aux profils de densité normalisés $n(x-x_0)/n_0$ après $\tau = 40\text{ms}$ pour différentes zones de sélection x_0 associées à des densités initiales n_0 différentes. Par-dessus sont superposées les simulations GHD obtenues pour différentes températures, données par l’abscisse des points de mêmes couleurs sur les graphes de droite – (d) à (f) Écart-types σ entre les profils de densité et les simulations GHD pour différentes températures – (g) à (i) Comparaisons entre les différentes distributions de rapidités utilisées pour les simulations GHD – (j), (k) Températures ajustées T_{fit} et potentiels associés $\mu(T_{\text{fit}})$ en fonction de la position de la sélection. À gauche, la courbe noire pointillée correspond à la fonction $T(x) = \max(T_{\text{YY}}, T_0 - a_2x^2 - a_4x^4)$ avec les paramètres spécifiés dans le corps du texte. La courbe noire pointillée de la figure de droite est donnée par la fonction $\mu(x) = \max(\mu_{\text{YY}} - m\omega^2x^2/2, \mu_0 - b_2x^2 - b_4x^4)$. Les paramètres sont spécifiés dans le corps du texte.

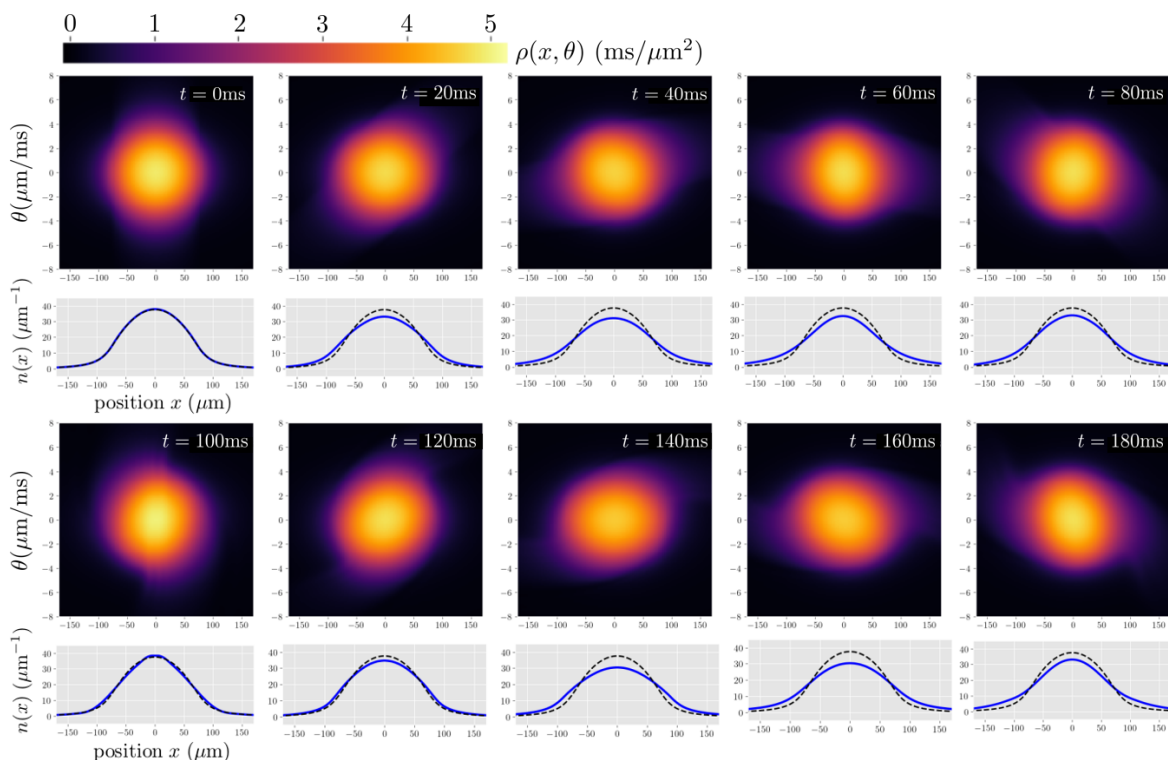


FIGURE 8.7 – Évolution de la distribution de rapidités spatialement résolue initialement thermique, mais avec une température dépendant de la position $T(x)$. Les courbes bleues correspondent aux profils de densité extraits à partir de la distribution de rapidités $n(x, \tau) = \int d\theta \rho(x, \theta, \tau)$. Les courbes noires pointillées sont les profils de densité pour une distribution de rapidités localement thermique avec $T(x) = T_{YY}$. Le graphe en haut à gauche correspond à l'état initial où les deux descriptions donnent des profils de densité identiques.

8.4.4 Au-delà de l'hypothèse thermique

Il pourrait ainsi y avoir un autre scénario qui pourrait expliquer les résultats expérimentaux et plus précisément les différences entre les températures extraites en ajustant les profils expérimentaux après expansion et la température Yang Yang T_{YY} .

Jusqu'à présent, nous avons fait l'hypothèse que le système était localement thermique. Or, en toute généralité, la distribution de rapidités pourrait être non thermique, tout en étant une solution stationnaire des équations GHD en présence du potentiel longitudinal donné par Eq.(8.12).

La contrainte de stationnarité est discutée ici. En présence d'un potentiel longitudinal $V(x)$, on cherche à construire des facteurs d'occupation $\nu(x, \theta)$ solutions de l'équation GHD stationnaire,

$$v_{\text{eff}} \partial_x \nu(x, \theta) = \partial_x V(x) \partial_\theta \nu(x, \theta). \quad (8.13)$$

On pose $\hbar = m = 1$. Prenons une fonction s définie sur $[0, 1]$ à valeur dans \mathbb{R} . On veut montrer

que, si pour tout x , $\nu(x)$ est tel que $s[\nu]$ vérifie

$$\frac{\theta^2}{2} + V(x) = \dot{s}[\nu(x, \theta)] + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') [s[\nu(x, \theta')] - \nu(x, \theta') \dot{s}[\nu(x, \theta')]] \quad (8.14)$$

avec $\dot{s} = ds/d\nu$ et

$$\Delta(\theta) = \frac{2g}{g^2 + \theta^2}, \quad (8.15)$$

alors ν est solution d'Eq.(8.13). On propose ici de faire une démonstration de cette affirmation.

Posons

$$f(x, \theta) = \frac{\theta^2}{2} + V(x). \quad (8.16)$$

Pour toute fonction h , on définit la fonction habillée associée h^{dr} telle que

$$h^{\text{dr}}(\theta) = h(\theta) + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \nu(\theta') h^{\text{dr}}(\theta'). \quad (8.17)$$

Notons que l'on peut facilement montrer que $v_{\text{eff}} = \theta^{\text{dr}}/1^{\text{dr}}$ [23]. Pour tout x on note $\nu(x, \theta)$ la fonction qui vérifie

$$f(x, \theta) = \dot{s}[\nu(x, \theta)] + \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') (s[\nu(x, \theta')] - \nu(x, \theta') \dot{s}[\nu(x, \theta')]). \quad (8.18)$$

En dérivant Eq.(8.18), on obtient

$$\partial_x f(x, \theta) = \partial_x \nu \dot{s}[\nu(x, \theta)] - \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') \nu(x, \theta') \ddot{s}[\nu(x, \theta')] \partial_x \nu(x, \theta'). \quad (8.19)$$

On reconnaît une équation similaire à Eq.(8.17) avec

$$\dot{s}[\nu(x, \theta)] \partial_x \nu = (\partial_x f)^{\text{dr}}. \quad (8.20)$$

On peut montrer de même que

$$\dot{s}[\nu(x, \theta)] \partial_\theta \nu = (\partial_\theta f)^{\text{dr}}. \quad (8.21)$$

Autrement dit, en utilisant Eq.(8.16) nous avons

$$v_{\text{eff}} (\partial_x f)^{\text{dr}} - \partial_x V(x) (\partial_\theta)^{\text{dr}} = 0 \quad (8.22)$$

puisque $(\partial_x f)^{\text{dr}} = \partial_x V(x) 1^{\text{dr}}$, $(\partial_\theta f)^{\text{dr}} = \theta^{\text{dr}}$ et $v_{\text{eff}} = \theta^{\text{dr}}/1^{\text{dr}}$. En utilisant les Eq.(8.20) et (8.20), on trouve que ν est bien solution de l'équation GHD stationnaire Eq.(8.13).

Par exemple, la fonction

$$s_{\text{th}}[\nu] = [\nu \ln(\nu) + (1 - \nu) \ln(1 - \nu)] T + \mu \quad (8.23)$$

vérifie bien Eq.(8.14) pour tout x . Elle correspond à une solution thermique qui est bien une

solution stationnaire, voir Section 1.1.3.3.

Des facteurs d'occupation ont été construits en utilisant ce protocole : nous avons choisi différents ansatz pour la fonction s comme

$$s[\nu] = a\nu \ln(\nu) + b(1 - \nu) \ln(1 - \nu) + \mu \quad (8.24)$$

avec a , b et μ les paramètres d'ajustement. Néanmoins, nous n'avons pas trouvé de paramètres tels que les distributions de rapidités associées soient en meilleur accord avec les données expérimentales. Le résultat est cependant intéressant et peut dans le futur être un outil pertinent pour la compréhension de systèmes stationnaires non thermiques.

8.5 Effet du processus de sélection

8.5.1 Effet de l'intensité du faisceau de sélection

Une autre explication au vu des résultats de la Section 8.4.2 pourrait être que le processus de sélection chauffe les atomes dans la zone sélectionnée. En effet, comme détaillé dans la Section 6.3.4, les atomes restants pourraient recevoir des photons de par les défauts des éléments optiques, ou alors par les photons diffusés par les atomes illuminés. Ces photons pourraient être absorbés et entraîner un chauffage du système. On a déjà vérifié que les températures extraites à partir des ondulations de densité étaient similaires avant et après sélection.

Un autre test a été réalisé à partir des profils de densité obtenus après expansion longitudinale. On fait une sélection de la partie centrale d'un nuage atomique initialement à l'équilibre. La sélection est de taille $\ell = 37\mu\text{m}$ et est réalisée en illuminant le reste des atomes pendant un temps $\tau_p = 30\mu\text{s}$ avec un faisceau désaccordé de 15MHz par rapport à la transition atomique. Les atomes sélectionnés réalisent une expansion longitudinale pendant $\tau = 40\text{ms}$ et le profil de densité est alors imagé. Les profils de densité obtenus pour différentes intensités I du faisceau de sélection sont tracés sur la Fig. 8.8. Les intensités de faisceau sont choisies de sortes à enlever tous les atomes dans les zones illuminées.

L'intensité varie d'un facteur ~ 2 , $I \in [1.9, 3.6]I_{\text{sat}}^{(0)}$ avec $I_{\text{sat}}^{(0)} = 16.6\text{W.m}^{-2}$ l'intensité de saturation à résonance. Le nombre de photons diffusés par atome, estimé en prenant en compte l'effet Doppler induit par l'accélération des atomes dans la zone illuminée, varie quant à lui d'un facteur ~ 1.6 (de 170 à 266). Ainsi, si un phénomène de chauffage dû à la sélection était présent, on s'attendrait à un élargissement des profils (au niveau des ailes des profils), ce qui n'est pas le cas ici. On ne voit pas d'effets du processus de sélection sur les profils de densité après expansion.

Des données similaires ont été réalisées avec des faisceaux lumineux à résonance : pour une variation du nombre de photons diffusés d'un facteur 4, les profils restent identiques.

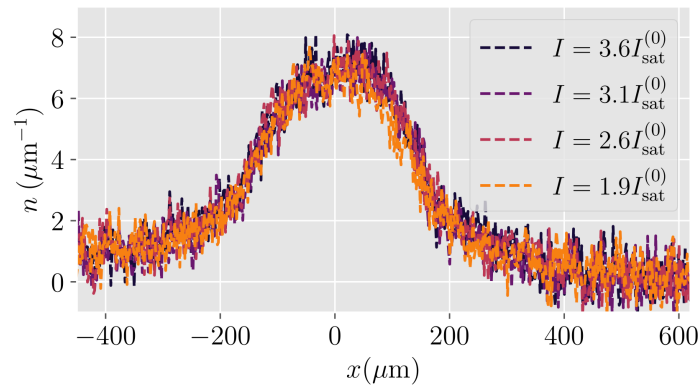


FIGURE 8.8 – Profils de densités obtenus en sélectionnant la zone centrale du gaz avec une même taille de sélection $\ell = 37\mu\text{m}$, mais des ratios d'intensité $I/I_{\text{sat}}^{(0)}$ différents avec $I_{\text{sat}}^{(0)}$ l'intensité de saturation à résonance et I l'intensité du faisceau de sélection. La sélection est suivie d'une expansion longitudinale de $\tau = 40\text{ms}$.

8.5.2 Autres précisions

Jusqu'à la rédaction de ce manuscrit, la forme des profils obtenus après un temps d'expansion dans le guide 1D (notamment l'apparition d'ailes) n'est pas tout à fait comprise. Nous avons longtemps essayé de trouver les facteurs / paramètres qui pouvaient modifier la forme des profils obtenus. Comme les profils semblent présenter des ailes plus importantes synonymes de chauffage, nous avons d'abord pensé à un processus de chauffage lié à la sélection. Cependant, les changements des paramètres d'intensité ou de temps d'impulsion n'influent pas sur la forme des ailes. Le seul paramètre qui change de façon conséquente la forme du profil après une expansion dans le guide 1D reste les paramètres de refroidissement par évaporation. Ceci est logique puisque le nuage est alors initialement plus ou moins froid.

En résumé

- Les expansions longitudinales permettant de sonder la distribution de rapidités sont en accord avec la théorie [GHD](#).
- Les prédictions en loi d'échelle à partir de la théorie champ classique décrivant un système [qBEC](#) à $T = 0$ sont en bon accord avec les données expérimentales.
- Les prédictions [GHD](#) semblent indiquer que le régime asymptotique n'est pas tout à fait atteint.
- L'extraction de la distribution de rapidités à partir de simulations [GHD](#) n'est pas évidente : elle nécessiterait un meilleur rapport signal sur bruit des données ainsi que des temps de calculs beaucoup plus longs.
- Des tests ont été réalisés sur l'influence du processus de sélection : rien ne semble indiquer un effet non négligeable du processus.

8.6 Mesure de distribution de rapidités locales pour des systèmes hors équilibre

Le protocole décrit dans la Section précédente permettant de sonder la distribution de rapidités spatialement résolue peut être directement utilisée pour l'étude de système hors équilibre. Ici, le faisceau de sélection est aussi utilisé pour produire les situations hors équilibres.

8.6.1 Protocole de cisaillement

Pour ce premier protocole décrit par le diagramme de la Fig.8.9(a), les atomes sont initialement piégés dans un piège longitudinal harmonique de fréquence $f_{\parallel} = 5\text{Hz}$. On utilise ensuite le faisceau de sélection pour enlever tous les atomes présents dans la région centrale $[-\ell_0/2, \ell_0/2]$ avec $\ell_0 = 70\mu\text{m}$.

Cette première sélection permet de produire une situation hors équilibre. Une telle situation est présentée sur les Fig.8.10(a) et (b). Avant sélection, le profil de densité est utilisé pour extraire une température $T_{YY} = 101\text{nK}$ et un potentiel chimique $\mu_{YY}/k_B = 50\text{nK}$. La distribution de rapidités thermique spatialement résolue correspondante est représentée sur la Fig.8.10(d). En terme de distribution de rapidités, le processus de sélection correspond simplement à avoir une distribution nulle dans la zone $[-\ell_0/2, \ell_0/2]$, voir Fig.8.10(e).

Une fois la première sélection réalisée, on coupe le confinement longitudinal et le gaz évolue librement dans le guide 1D pendant $\tau = 15\text{ms}$. Le profil de densité est représenté sur la Fig.8.10(c). Comme on le voit avec les simulations GHD, on observe un cisaillement de la distribution de rapidités, voir 8.10(f). Proche de $x = 0$, la distribution de rapidités locale développe une forme doublement piquée, alors très différente d'une distribution thermique. Le faisceau de sélection peut être utilisé pour sonder la distribution de rapidités spatialement résolue : pour cela, on sélectionne une zone $\ell = 35\mu\text{m}$ représentée sur la Fig.8.9(b) : les atomes réalisent une nouvelle expansion longitudinale pendant un temps $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$ au bout duquel on image les atomes.

8.6.2 Mesures expérimentales

Les résultats sont représentés sur la Fig.8.11 : le profil de densité après un temps d'expansion $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$ présente clairement une forme doublement piquée. Les profils sont légèrement asymétriques car la première sélection n'est pas parfaitement centrée en $x = 0$. Cette sélection non centrée a été prise en compte dans les simulations GHD. À partir de simulations GHD réalisées pour la première expansion longitudinale de temps $\tau = 15\text{ms}$, on superpose aux données la distribution de rapidités attendue : les profils y sont cohérents.

De plus, comme cela a été déjà discuté dans la Section 8.4.1, le régime asymptotique n'est pas complètement atteint, les profils de densité ne sont pas exactement homothétiques à la distribution de rapidités. On a alors comparé nos résultats avec les simulations GHD prenant en compte les deux sélections et les deux temps d'expansion longitudinale. Des tels profils

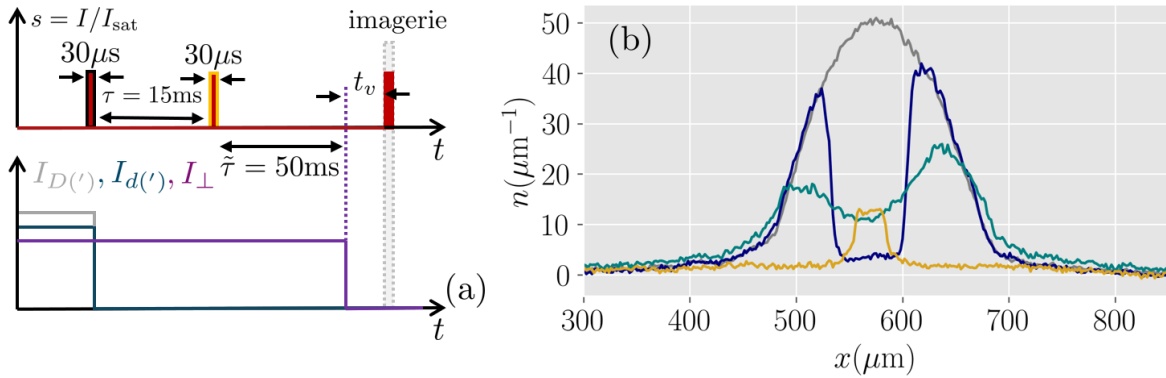


FIGURE 8.9 – (a) Diagrammes temporels représentant l'évolution des courants des fils produisant les potentiels magnétiques et les différentes impulsions lumineuses éclairant les atomes pour faire une sélection spatiale ou pour imager le nuage atomique – (b) Superposition des différents profils de densités. Le profil initial à l'équilibre est représenté par la courbe grise, celui 1ms après la sélection par la courbe bleu foncé. Les atomes réalisent une expansion dans le guide 1D. Après un temps d'expansion $\tau = 15\text{ms}$ (profil bleu clair), une seconde sélection est réalisée, voir le profil jaune.

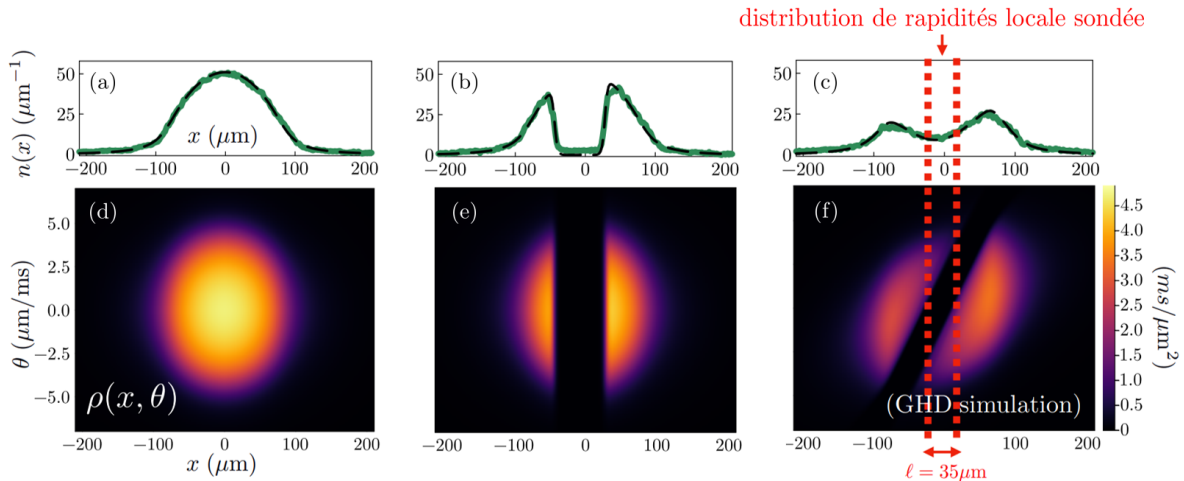


FIGURE 8.10 – Profils de densité initialement à l'équilibre (a), 1ms après la première sélection (b) et 15ms après une expansion dans le guide 1D (c). Les distributions de rapidités spatialement résolues correspondantes sont représentées (d) à (f). Les lignes pointillées rouges correspondent à la seconde sélection.

sont représentés sur la Fig.8.11 : les profils collent remarquablement bien aux données. De plus, on voit que pour ce protocole particulier, le régime asymptotique est quasiment atteint.

Ici, le fait que la mesure de distribution de rapidités soit locale est très importante. La distribution de rapidités globale $\int dx \rho(x, \theta)$ est conservée au cours de la dynamique en l'absence de potentiel et ne caractérise donc pas la dynamique du système. Le fait que l'on observe un profil doublement piqué est directement relié au fait que l'on réalise une mesure locale de la distribution de rapidités.

La sonde locale de distribution de rapidités mise en place dans notre expérience permet

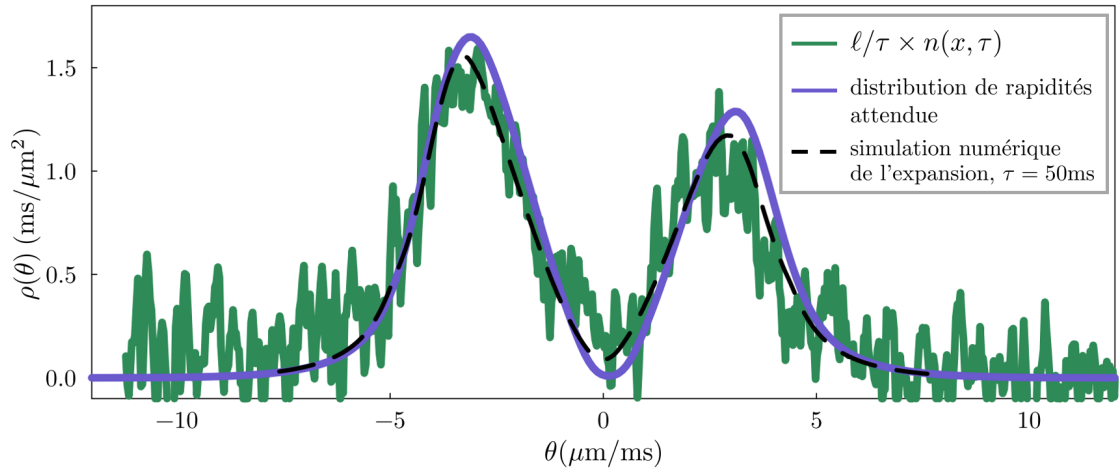


FIGURE 8.11 – La distribution de rapidité locale est obtenue en traçant $\tau n(x, \tau)/\ell$ pour une région de taille $\ell = 36\mu\text{m}$ après un temps d’expansion longitudinal $\tau = 50\text{ms}$. Le profil est doublement piqué et est en très bon accord avec les prédictions théoriques de la distribution de rapidité (courbe violette) en incluant les corrections liées au temps d’expansion fini (courbe noire pointillée).

ainsi une meilleure compréhension des gaz de Bose 1D. Cette sonde peut être utilisée pour caractériser d’autres dynamiques hors équilibres : par exemple, cet outil a permis d’étudier la déformation de bord entre régions voisines de densités différentes, voir les résultats du Chapitre suivant. Cet outil permettrait aussi de caractériser des états stationnaires non thermiques attendus pour un gaz de Bose 1D en présence de pertes [167].

En résumé

- La sonde de distribution de rapidités spatialement résolue peut être utilisée pour des protocoles hors équilibres.
- Pour cela, le faisceau de sélection spatial est aussi utilisé pour produire de telles situations.
- Un exemple de protocole hors équilibre est présenté ici : il s’agit d’un protocole de cisaillement où, localement, la distribution de rapidités doit être largement non thermique, présentant une forme doublement piquée. Une telle distribution est obtenue expérimentalement.

PROTOCOLE DE PARTITIONNEMENT

Sommaire

9.1 Introduction	159
9.2 Protocole expérimental	161
9.3 Comportement hydrodynamique	162
9.4 Comparaison aux équations hydrodynamiques quantiques	164
9.4.1 Prédications théoriques	164
9.4.2 Comparaison avec les données expérimentales	165
9.4.3 Déviations du régime champ classique	166
9.5 Limite de l'hypothèse thermique	167
9.5.1 Méthodes numériques	167
9.5.2 Ajustement des données expérimentales	168
9.6 Au-delà de l'hypothèse thermique	169
9.7 Asymétrie de la distribution de rapidités locale	172
9.7.1 Distribution de rapidités localement asymétrique	172
9.7.2 Protocole expérimental	173
9.7.3 Asymétrie des profils	174
9.7.4 Comparaisons aux simulations GHD	175

9.1 Introduction

L'étude de la dynamique hors équilibre des systèmes à N corps a fait l'objet d'une grande attention ces dernières années. Ceci est particulièrement vrai dans le contexte des systèmes quantiques, amenant à l'émergence de principes théoriques tels que la notion de thermalisation pour des systèmes isolés, et, pour le cas particulier des systèmes intégrables, la notion de thermalisation généralisée [168, 86]. Toujours pour les systèmes quantiques intégrables,

l'émergence d'outils théoriques tels que l'**Hydrodynamique Généralisée (GHD)** a permis une meilleure compréhension de ces systèmes. Néanmoins, la dynamique de systèmes reste cependant compliquée à étudier. Un exemple historique déjà cité de système quantique intégrable hors-équilibre est l'expérience du pendule de Newton qui a notamment amené à la construction de la théorie de l'**Hydrodynamique Généralisée (GHD)** [37, 169]. Un autre système plus simple, plus largement étudié et sur lequel nous allons nous concentrer dans ce chapitre, est le problème de Riemann [170, 171]. Ce problème consiste à considérer un nombre N de relations de conservations

$$\partial_\tau \mathbf{v}(\tau, x) + \partial_x (f(\mathbf{v}(\tau, x))) = 0 \quad (9.1)$$

avec \mathbf{v} un vecteur de dimension N . À cela s'ajoute la condition initiale particulière

$$\mathbf{v}(0, x) = \begin{cases} \mathbf{v}_0 & \text{si } x < x_0, \\ \mathbf{v}_1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Nous souhaitons étudier ici ce protocole de partitionnement. L'idée consiste à préparer initialement un système composé de deux régions voisines qui sont dans deux états d'équilibre différents, deux états stationnaires différents d'un même Hamiltonien. Grâce à ce déséquilibre initial, la paroi nette entre ces deux domaines peut alors se déformer et s'étaler [172]. On parle aussi de dynamique de parois de domaines (*Domain Wall Dynamics* en anglais) [49].

Ces protocoles de partitionnements ont été très largement étudiés pour différents systèmes : ils ont notamment bien été compris dans le cadre de théories sans interactions (voir par exemple [173, 159, 174]), de théories conformes des champs (voir par exemple [175, 176]) ou encore pour des systèmes de dimension quelconque [177, 178]. Finalement, dans les modèles quantiques intégrables et en interaction, la solution complète a été fournie par [60] pour les théories des champs, avec les exemples des modèles de Sinh-Gordon et de Lieb-Liniger, et dans [59] pour les chaînes quantiques, avec l'exemple de la chaîne d'Heisenberg anisotrope XXZ. Ces articles ont introduit la théorie **GHD** et résolu le problème de Riemann avec cette équation hydrodynamique. Une solution analytique exacte a été trouvée pour le système de chaîne quantique XXZ avec un état initial particulier [179], et une solution générale a été obtenue pour un gaz 1D de sphères dures (*hard rod gases* en anglais)[180].

En ce sens, nous avons trouvé particulièrement intéressante l'étude expérimentale de ce problème. Ce chapitre présente les résultats de cette étude. Plus précisément, nous avons étudié la déformation d'un bord d'un gaz de bosons 1D initialement de densité n_0 homogène et semi-infini. Le système est caractérisé par la distribution de rapidité spatialement résolue ρ qui vaut à l'instant initial

$$\rho(\tau = 0, x, \theta) = \begin{cases} \rho(\theta) & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \quad (9.3)$$

Le profil de densité vaut $n(\tau = 0, x) = \int d\theta \rho(\tau = 0, x, \theta) = n_0 H(x)$ avec $H(x)$ la fonction de Heavyside. Il est aussi possible de caractériser entièrement le système avec le facteur

d'occupation ν où

$$\nu(\tau = 0, x, \theta) = \begin{cases} \nu(\theta) & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (9.4)$$

Dans le formalisme de GHD à l'échelle d'Euler, cela revient à traiter un problème similaire au problème de Riemann puisque l'on cherche à résoudre l'équation GHD portant sur le facteur d'occupation $\nu(\tau, x, \theta)$

$$\partial_\tau \nu + v_{\text{eff}} \partial_x \nu = 0 \quad (9.5)$$

avec pour conditions initiales Eq.(9.4). Les équations (9.5) et (9.4) correspondent à une généralisation du problème de Riemann donné par les Eq.(9.1) et Eq.(9.2) puisque l'on passe d'un nombre fini à un nombre infini de relations de conservation.

La première partie de ce chapitre décrit la mise en place expérimentale du protocole de déformation de bord. Nous avons tout d'abord vérifié si un comportement hydrodynamique était bien observé. Les profils d'étalement ont été ensuite comparés avec les prédictions obtenues dans l'approximation de champ classique pour l'état fondamental, puis avec les prédictions obtenues avec GHD. Enfin, la dernière partie se concentre sur l'étude de la distribution de rapidités spatialement résolue au niveau de la déformation du bord.

9.2 Protocole expérimental

On souhaite ici préparer un nuage atomique homogène et semi-infini. Le système de piégeage magnétique actuel ne permet pas de créer une telle situation, un nuage atomique de densité homogène (il est à noter qu'un projet futur est d'installer un nouveau système optique afin de pouvoir piéger les atomes dans une boîte produite par un piège dipolaire optique). Néanmoins, il est quand même possible de placer le gaz de Rubidium dans un piège quartique aux paramètres choisis de façon pertinente, de sorte que le profil de densité linéaire puisse être approximé comme étant quasi homogène sur une zone d'intérêt relativement grande.

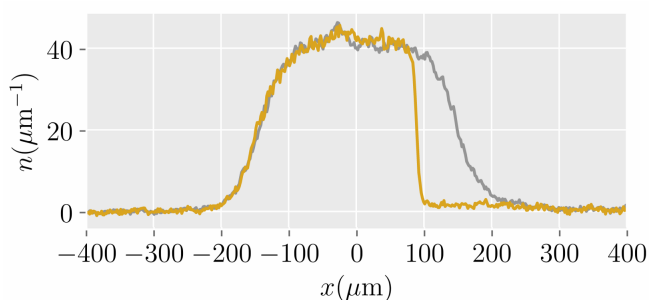


FIGURE 9.1 – Le profil de densité initialement à l'équilibre dans le piège quartique est représenté en gris. La courbe jaune correspond au profil de densité 1ms après la sélection.

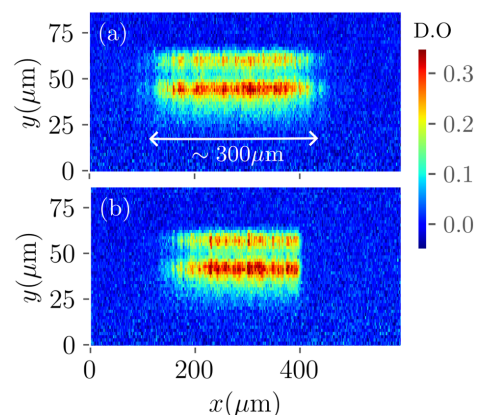


FIGURE 9.2 – Images 2D du profil de densité (en densités optiques) après 1ms de temps de vol avant (a) et après (b) la sélection.

Pour réaliser expérimentalement une situation similaire à celle décrite par Eq.(9.4), on réalise alors le protocole suivant :

- Les atomes sont placés dans un piège transversalement harmonique de fréquence $f_{\perp} = 2.56\text{kHz}$ et longitudinalement quartique. La réalisation d'un potentiel magnétique quartique est décrite dans la Section 4.2.3.5. Dans ce cas particulier, le champ homogène selon l'axe du guide longitudinal \mathbf{e}_x vaut $B_0 = 3.36\text{G}$ et les courants utilisés sont les suivants : $I_D = 1.400\text{A}$, $I_{D'} = 1.100\text{A}$, $I_d = 1.090\text{A}$ et $I_{d'} = 0.875\text{A}$. Un exemple de profil initial est représenté par la courbe grise sur la Fig.9.1, l'image 2D en densité optique y est représentée sur la Fig.9.2(a). Ces mesures ont montré que la densité linéaire du nuage reste constante à 10% près autour de la densité pic $n_0 = 41\mu\text{m}^{-1}$ sur une zone d'environ $\sim 250\mu\text{m}$.
- Pour créer un bord franc entre une région de densité homogène n_0 et une région de densité nulle, la partie gauche du nuage est retirée par l'outil de sélection spatial implémenté dans l'expérience, voir le Chapitre 6 pour plus de détails. La zone à enlever (ici la partie gauche du nuage) est illuminée $30\mu\text{s}$ par un faisceau lumineux façonné par le DMD et d'intensité $I = 0.14I_{\text{sat}}$. Le faisceau est désaccordé de 15MHz par rapport à la transition atomique pour limiter le processus de réabsorption de photon par les atomes se trouvant dans la zone non éclairée. Le nouveau profil est représenté sur la Fig.9.1 et présente une zone de $\sim 200\mu\text{m}$ où la densité linéaire est constante à 10% près autour de la densité pic. L'image 2D correspondante en densité optique y est représentée sur la Fig.9.2(b).

Une fois la situation initiale préparée, le confinement longitudinal est enlevé, les courants $I_D, I_{D'}, I_d$ et $I_{d'}$ sont mis à 0. Le confinement transverse est lui maintenu. La paroi initialement nette limitant la région de densité nulle de la région de densité non nulle va alors s'étaler et se déformer pendant un temps d'évolution noté dans la suite τ . C'est cette déformation que l'on va étudier par la suite.

Le système préparé n'étant pas un gaz homogène sur une taille infinie, il est important de déterminer combien de temps le système peut évoluer en restant bien décrit par un gaz homogène semi-infini. Pour cela, on regarde la densité pic du système n_0 après un temps d'évolution τ . Sur la Fig.9.3(a), les profils de densité de déformation du bord sont tracés pour différents temps d'évolution tandis que sur la Fig.9.3(b) les densités pics associées y sont représentées. On voit que la densité pic ne diminue pas en dessous de 95% de la densité pic initiale pour des temps d'étalement $\tau < 17\text{ms}$.

9.3 Comportement hydrodynamique

Supposons que $\nu_{[\rho]}(x, \theta, \tau)$ est une solution de l'équation hydrodynamique Eq.(9.5) avec pour condition initiale Eq.(9.4). Si on considère les changements de variable $x \rightarrow x' = \alpha x$ et $\tau \rightarrow \tau' = \alpha\tau$, $\nu_{[\rho]}(x', \theta, \tau')$ est aussi solution des équations hydrodynamiques avec les mêmes

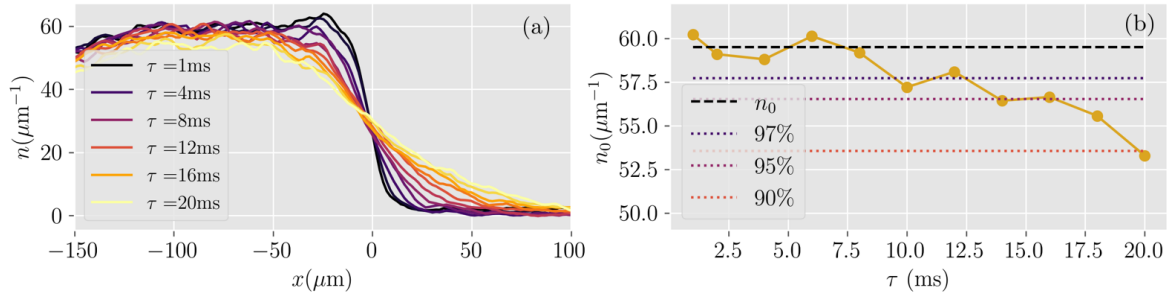


FIGURE 9.3 – (a) Différents profils de densité du bord déformé après un temps d'évolution pour un gaz où la densité initiale est quasi-homogène à $\sim 10\%$ près sur une zone de $\sim 200\mu\text{m}$. Les profils sont tracés pour différents temps d'évolution τ – (b) Densités pics obtenues en mesurant la densité moyennée sur $x \in [60, 80]\mu\text{m}$ pour différents temps d'évolution τ . Les lignes pointillées correspondent à un pourcentage de la densité pic à l'instant initial $\tau = 0$ ms.

conditions initiales. Si on suppose que la condition est unique [181],

$$\forall \alpha, \nu_{[\rho]}(x, \theta, \tau) = \nu_{[\rho]}(\alpha x, \theta, \alpha \tau) = \nu_{[\rho]}\left(\frac{x}{\tau}, \theta\right). \quad (9.6)$$

En particulier, le profil de déformation de bord s'écrit

$$n(x, t) = f_{[\rho]}\left(\frac{x}{\tau}\right) \quad (9.7)$$

avec $f_{[\rho]}$ une fonctionnelle de la distribution de rapidités ρ . Cette relation est générale et est valable pour tout système qui suit une loi hydrodynamique à l'échelle d'Euler.

Cette loi a été vérifiée expérimentalement en superposant les profils de densités de déformation de bords obtenus pour une même situation initiale, à des temps d'évolution différents τ et en fonction de x/τ . Les profils sont représentés sur la Fig.9.4 avec 3 temps d'évolution allant de $\tau = 10$ ms à $\tau = 18$ ms. Ces derniers se superposent très bien, montrant qu'à ces temps d'évolution, le système a bien un comportement balistique.

Cependant, il est important d'avoir en tête que le comportement hydrodynamique est attendu pour un temps d'évolution $\tau \in [\tau_m, \tau_M]$:

- Pour des temps $\tau > \tau_M$ trop grands, la modélisation de notre système par l'étude de la déformation d'un bord d'un gaz homogène semi-infini ne devient plus pertinente, la densité pic du nuage commence à devenir trop petite comparée à celle initiale comme représentée sur la Fig.9.3(b). Pour donner un ordre de grandeur, les dynamiques de déformation de bord ont été étudiées avec $\tau_M \sim 12 - 28$ ms, en ayant connaissance que le temps τ_M dépend du système initial (taille du nuage atomique, température...).
- Pour des temps $\tau < \tau_m$ trop petits, le comportement hydrodynamique n'est pas observé expérimentalement. Ceci peut s'expliquer par trois arguments complémentaires. D'une part, la méthode de sélection perturbe le système sur une taille de l'ordre du μm , voir Section6.3. Cet effet de bord est largement négligeable pour des temps τ

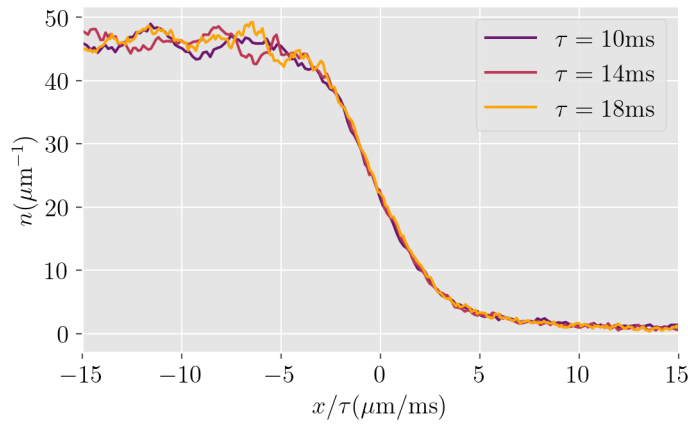


FIGURE 9.4 – Superposition de trois profils de densités de déformation de bord pour différents temps d'évolution τ . Les données sont tracées en fonction de x/τ . Le point $x = 0\mu\text{m}$ correspond à la position de la discontinuité en densité du profil à $\tau = 0\text{ms}$. Les profils remis à l'échelle sont similaires et sont donc en accord avec les équations hydrodynamiques prédisant une dynamique balistique.

longs : par exemple, le profil représenté sur la Fig.9.4 et correspondant à $\tau = 10\text{ms}$ s'étale sur une zone de taille d'environ $150\mu\text{m} \gg 1\mu\text{m}$. Cependant, pour des temps d'évolution relativement courts, cet effet n'est plus négligeable au vu de la petite zone d'étalement. D'autre part, la résolution optique du système optique supérieure à $1\mu\text{m}$ limite aussi l'analyse de déformation pour des temps courts. Enfin, les équations GHD ne prédisent la dynamique qu'à des échelles de temps et d'espace assez grandes, de telle sorte à ce que l'on ne s'attend pas à ce qu'elles décrivent la déformation du bord aux temps courts. Pour donner un ordre de grandeur, le comportement hydrodynamique est observé expérimentalement à partir d'un temps $\tau_m = 6 \pm 2\text{ms}$.

9.4 Comparaison aux équations hydrodynamiques quantiques

9.4.1 Prédictions théoriques

On s'intéresse au cas particulier d'un système pour lequel $\gamma \rightarrow 0$ et qui est à l'état fondamental. Pour cela, on reprend les résultats obtenus à la Section 2.4. Pour rappel, dans ce régime, le facteur d'occupation à une position x et un temps d'évolution τ donnés est une mer de Fermi de largeur $\Delta_\theta(x, \tau)$. Les équations GHD se simplifient alors en deux équations ne portant que sur les bords supérieurs et inférieurs de la mer de Fermi $\theta^+(x, \tau)$ et $\theta^-(x, \tau)$ tels que

$$\begin{cases} \partial_\tau \theta^+ + v_{\text{eff}}(\theta^+) \partial_x \theta^+ = 0 \\ \partial_\tau \theta^- + v_{\text{eff}}(\theta^-) \partial_x \theta^- = 0 \end{cases} \quad (9.8)$$

avec

$$\begin{cases} v_{\text{eff}}(\theta^+) = \frac{3}{4}\theta^+(x, \tau) + \frac{1}{4}\theta^-(x, \tau) \\ v_{\text{eff}}(\theta^-) = \frac{3}{4}\theta^-(x, \tau) + \frac{1}{4}\theta^+(x, \tau). \end{cases} \quad (9.9)$$

Ces équations permettent de retrouver les équations hydrodynamiques obtenues avec la théorie de champ classique (équations [Gross-Pitaevskii \(GP\)](#)) en négligeant le terme de pression quantique,

$$\begin{cases} \partial_\tau n + \partial_x(vn) & = 0 \\ \partial_\tau v + v\partial_x v - g\partial_x n & = 0, \end{cases} \quad (9.10)$$

où $v = 1/2(\theta^+ + \theta^-)$ est la vitesse du centre de masse, n la densité et g le paramètre d'interaction 1D.

Ici les bords de la mer de Fermi sont les rapidités $\theta^-(x, \tau)$ que l'on note dans la suite $\theta^*(x, \tau)$ et

$$\theta^+(x, \tau) = K_0 = 2\sqrt{\frac{gn_0}{m}} \quad (9.11)$$

En réécrivant la vitesse du centre de masse en fonction de K_0 et θ^* , on obtient

$$v_{\text{eff}}(\theta^*) = v_{\text{eff}}^* = \frac{K_0}{4} + \frac{3}{4}\theta^* \Rightarrow \theta^* = \frac{4}{3}v_{\text{eff}}^* - \frac{K_0}{3}, \quad (9.12)$$

ce qui permet d'en déduire la largeur de la mer de Fermi $\Delta_\theta(x, \tau)$ en une position x et à un instant τ comme introduit à la section [2.4](#),

$$\Delta_\theta(x, \tau) = K_0 - \theta^* = \frac{4}{3}K_0 - \frac{4}{3}v_{\text{eff}}^*(x, \tau). \quad (9.13)$$

Finalement, la densité $n(x, \tau) = n(x/\tau)$ est directement reliée à la largeur de la mer de Fermi comme le montre les Eq.([9.13](#)) et Eq.([9.11](#)). Avec $v_{\text{eff}}^* = x/\tau$, on obtient

$$n\left(\frac{x}{\tau}\right) = n_0 \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \frac{x}{\tau} \frac{1}{K_0} \right]^2, \quad K_0 = 2\sqrt{\frac{gn_0}{m}}. \quad (9.14)$$

Comme attendu, Eq.([9.14](#)) est bien solution des équations hydrodynamiques Eq.([9.10](#)). Ainsi, dans l'approximation champ classique, le profil de déformation de bord attendu est largement asymétrique puisqu'il prend la forme d'une parabole. De plus, il est intéressant d'observer qu'à $x/\tau = 0$, c'est-à-dire à l'endroit de la coupure, $n(0) = 4/9n_0 < 1/2n_0$. Nous avons en particulier $n(K_0) = 0$ et $n(-K_0/2) = n_0$.

9.4.2 Comparaison avec les données expérimentales

Les profils expérimentaux ici étudiés sont obtenus après un temps $\tau = 10\text{ms}$ de déformation. La première analyse remarquable est l'asymétrie des profils comme attendu d'après Eq([9.14](#)). La Fig.[9.5\(a\)](#) compare le profil $n(x/\tau)$ après le profil inversé associés $|n(-x/\tau) - n_0|$, les deux profils ne se superposent pas. En position $x/\tau = 0$, la densité mesurée est proche de $4/9n_0$. Sur la Fig.[9.5\(b\)](#) on compare alors le profil de déformation obtenu avec la parabole attendue dans le régime de champ classique, Eq.([9.14](#)). Les deux profils sont plutôt similaires, notamment la partie anguleuse à droite est bien observée expérimentalement. On voit néanmoins des déviations par rapport à la parabole attendue, notamment sur la partie gauche du profil, pouvant être expliqués par deux phénomènes : (i) le système étudié n'est pas dans son

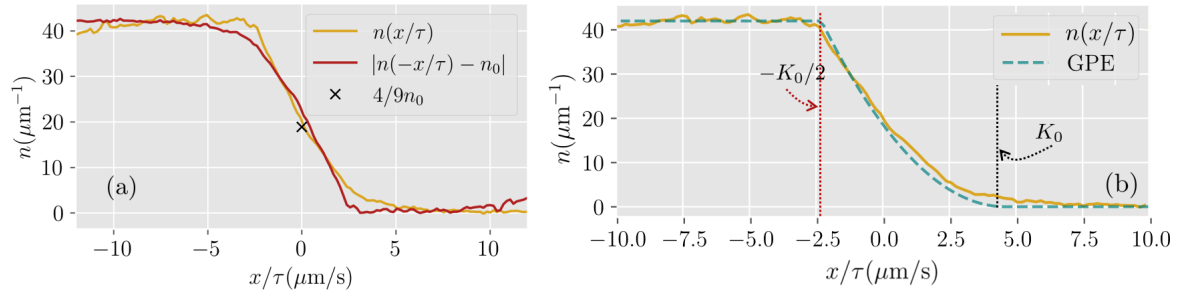


FIGURE 9.5 – (a) La courbe jaune est le profil de déformation de bord obtenu pour $\tau = 10\text{ms}$. La croix noire correspond à une densité $n = 4/9n_0$ attendue à $x/\tau = 0$ par le modèle GPE. Celle en rouge est identique à la courbe jaune, mais inversée, ce qui permet de mettre en avant l’asymétrie du profil – (b) La courbe jaune est le même profil que sur la figure de gauche. La courbe bleue pointillée correspond à la prédiction champ classique hydrodynamique, Eq.(9.14).

état fondamental, (ii) le système est caractérisé par un paramètre de Lieb Liniger γ petit, mais non nul. Dans la suite, les deux effets sont étudiés.

9.4.3 Déviations du régime champ classique

On compare les déformations de bords attendues dans les deux cas suivants :

- Le système est à l’état fondamental et le paramètre de Lieb Liniger $\gamma \rightarrow 0$: cela correspond au modèle champ classique avec un profil de déformation parabolique, Eq.(9.14).
- Le système est à l’état fondamental et le paramètre de Lieb Liniger est non nul $\gamma \neq 0$: les profils d’étalement sont obtenus en résolvant numériquement l’équation GHD.

Les profils obtenus à l’état fondamental pour un même potentiel chimique mais pour différents γ sont représentés sur la Fig.9.6. Pour de petits γ , on voit qu’il n’y a pas de déviations avec l’approximation champ classique. On rappelle que le paramètre de LL des données expérimentales vaut aux alentours de $\gamma = 0.5 \cdot 10^{-2}$. Pour observer une déviation visible, il faut travailler avec un $\gamma > 2$, soit une fréquence $f_{\perp} > 60\text{kHz}$. Pour des $\gamma \gg 1$ (régime Tonks-Girardeau), les profils de déformations sont des droites. En effet, en reprenant des arguments similaires pour retrouver Eq.(9.14) (mais adaptés au régime d’interactions fortes), on obtient dans la limite $\gamma \gg 1$

$$n\left(\frac{x}{\tau}\right) = \frac{n_0}{2} \left(1 - \frac{x}{\tau} \frac{1}{K'_0}\right), K'_0 = \frac{\hbar}{m} \pi n_0, \quad (9.15)$$

en accord avec les courbes de la Fig.9.6.

Dans la suite, on s’intéresse à étudier les déviations observées entre les prédictions champs classiques et les données expérimentales qui sont expliquées par le fait que le système étudié n’est pas dans son état fondamental.

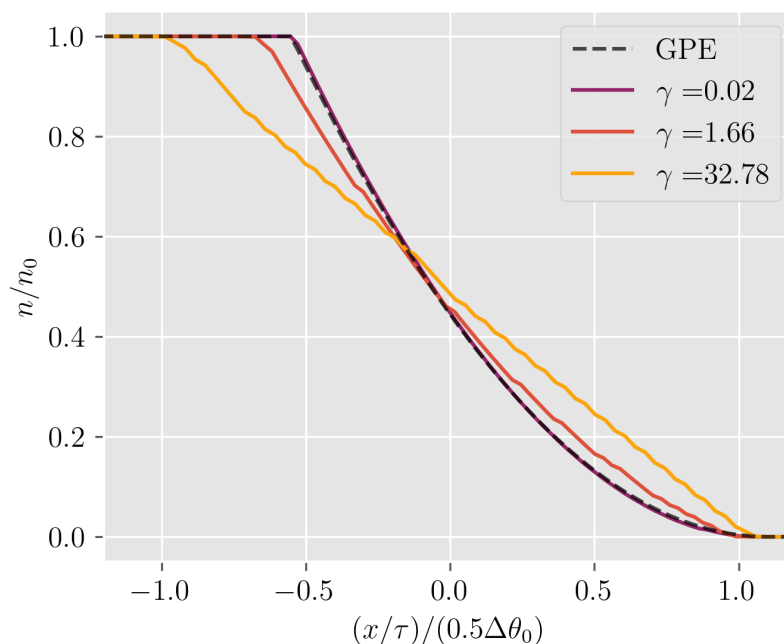


FIGURE 9.6 – Superposition du profil de déformation obtenu dans le régime de champ classique (courbe grise pointillée correspondant à Eq.(9.14)) avec ceux obtenus par les équations GHD à température T nulle mais des paramètres de Lieb Liniger γ non nuls (courbes colorées). Les profils sont tracés en fonction de $(x/\tau)/(0.5\Delta\theta_0)$ avec $\Delta\theta_0$ la largeur de la distribution de rapidités. Pour $\gamma \rightarrow 0$, $\Delta\theta_0 = 4c = 4\sqrt{gn_0/m}$ tandis que pour $\gamma \rightarrow \infty$, $\Delta\theta_0 = 2\pi n_0\hbar/m$.

9.5 Limite de l'hypothèse thermique

On fait ici l'hypothèse que le système est initialement bien décrit par un ensemble de Gibbs et est donc caractérisé à l'équilibre par une température T et un potentiel chimique μ . Il est important de préciser qu'il ne s'agit que d'une hypothèse, car en toute généralité le système à l'état initial est décrit par un ensemble de Gibbs Généralisé introduit dans la Section 2.1.2.

9.5.1 Méthodes numériques

Ici, par la symétrie du système initial, le calcul numérique de la dynamique du système est beaucoup plus simple que la résolution générale des équations GHD ou que de la résolution dans le cas de l'étude de la déformation d'un rectangle. En effet, le système étant décrit initialement par Eq.(9.4), la solution de l'équation Eq.(9.5) prend la forme

$$\nu(x/\tau, \theta) = \begin{cases} \nu(\theta) & \text{si } \frac{x}{\tau} < v_{\text{eff}}^{[\nu^*]}(\theta^*(x/\tau)), \\ 0 & \text{si } \frac{x}{\tau} > v_{\text{eff}}^{[\nu^*]}(\theta^*(x/\tau)) \end{cases} \quad (9.16)$$

avec $\theta^*(x/\tau)$ le bord du facteur d'occupation (voir Fig.9.7(a)) et $v_{\text{eff}}^{[\nu^*]}(\theta)$ la vitesse effective associée à la rapidité θ correspondant au facteur d'occupation tronqué ν^* du facteur d'occu-

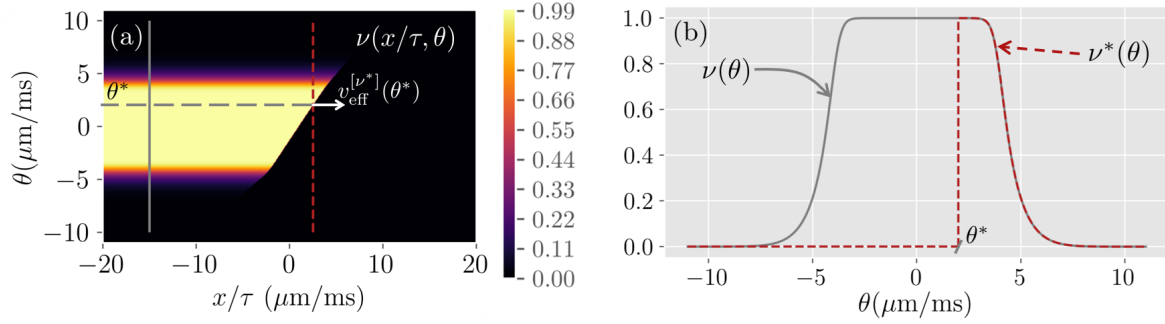


FIGURE 9.7 – (a) Facteur d’occupation $\nu(x/\tau, \theta)$ après un temps d’évolution τ . Pour reconstruire le profil de densité, il faut connaître la fonction de bord $\theta^*(x/\tau)$ en déterminant la vitesse efficace en tout point de ce bord $v_{\text{eff}}^{[\nu^*]}(\theta^*)$ – (b) Coupes de la figure (a) à x/τ fixé. La courbe grise correspond au facteur d’occupation initial $\nu(\theta)$. La courbe rouge correspond à $\nu^*(\theta)$ qui n’est rien d’autre que le facteur d’occupation initial tronqué.

pation tronqué ν^* tel que

$$\nu^*(\theta) = \begin{cases} \nu(\theta) & \text{si } \theta > \theta^*(x/\tau), \\ 0 & \text{si } \theta < \theta^*(x/\tau), \end{cases} \quad (9.17)$$

comme le montre la Fig.9.7(b). Connaissant le facteur d’occupation initial $\nu(\theta)$, l’ensemble des vitesses effectives $v_{\text{eff}}^{[\nu^*]}(\theta^*)$ peut être calculé, ce qui permet de reconstruire le profil de déformation de bord.

9.5.2 Ajustement des données expérimentales

On réalise un ajustement sur un des profils expérimentaux dans l’approximation où le système est initialement à l’équilibre thermodynamique. À priori, l’ajustement se fait sur deux paramètres, la température T et le potentiel chimique μ . Néanmoins, les valeurs de l’équation d’état $n(\mu, T)$ ayant été tabulées, pour une température T donnée, le potentiel chimique déduit est celui correspondant à la densité initiale du gaz n_0 . Ainsi, seule la température est ajustée : on obtient sur le profil de la Fig.9.8(a) une température $T_{\text{fit}} = 195\text{nK}$.

La forme exacte du potentiel initial n’étant pas très bien connue, il n’est ici pas possible d’extraire une température à partir du profil de densité du nuage atomique initialement à l’équilibre en utilisant la thermodynamique Yang Yang. Néanmoins, dans des pièges harmoniques, il est courant de préparer initialement des systèmes avec une température $T_{YY}/gn_0 \sim 2$. Ici, la température extraite de la déformation du bord est telle que $T_{\text{fit}}/gn_0 \simeq 2.8$. Si on regarde plus précisément la courbe d’ajustement, on s’aperçoit que la partie droite du nuage est moins bien ajustée que la partie gauche, voir Fig.9.8(a). Ainsi, on a décidé de séparer les profils d’étalement en deux et de réaliser un ajustement en température sur la partie gauche et sur la partie droite du bord, Fig.9.8(b). On s’aperçoit alors que les températures ajustées sont différentes, $T_G/T_D \sim 2.5$.

Ces ajustements ont été réalisés sur différents jeux de données avec des densités pics initiales, voir Fig.9.9. Le comportement est systématique, les températures ajustées sur la

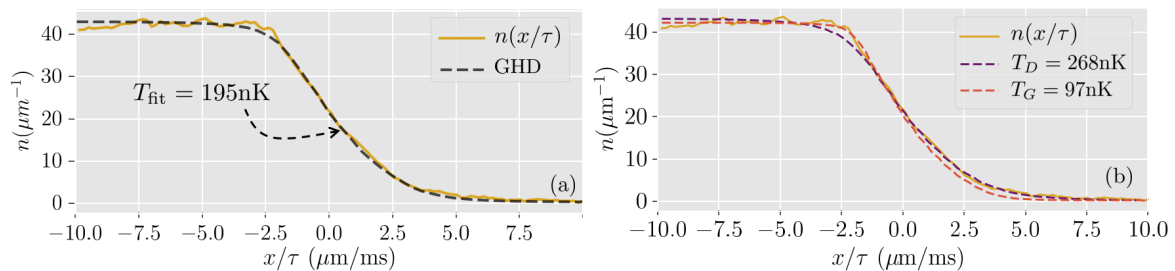


FIGURE 9.8 – (a) La courbe jaune est le profil de déformation de bord obtenu expérimentalement après $\tau = 10\text{ms}$ d'évolution. On y a superposé la courbe noire pointillée qui est le profil obtenu avec les équations GHD dans l'approximation thermique est pour lequel la température a été ajustée vis-à-vis du profil expérimental – (b) La courbe jaune est identique à celle de la figure (a). La courbe violette (resp. rose) correspond à l'ajustement obtenu par les équations GHD en ne considérant que la partie $x/\tau > 0$ (resp. $x/\tau < 0$) du profil.

partie droite du profil de bord sont inférieures à celles ajustées sur la partie gauche. Pour la densité initiale la plus faible, on atteint $T_D/gn_0 \sim 1$. Ces résultats semblent indiquer que le système initial n'est pas bien décrit par un ensemble de Gibbs.

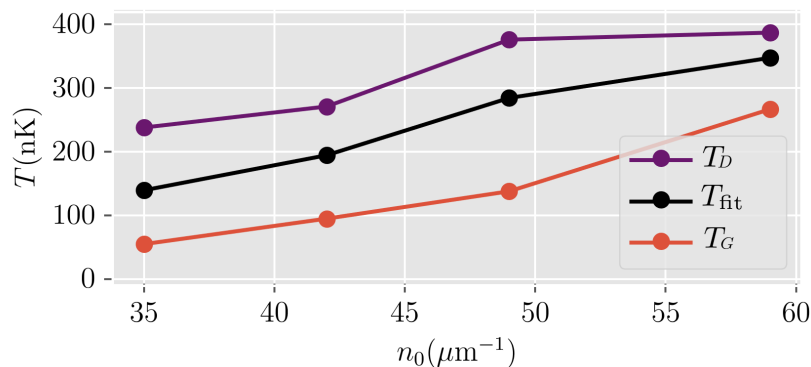


FIGURE 9.9 – Extraction de températures avec les équations GHD à partir des profils de déformation de bords. Les profils sont obtenus pour différentes situations initiales contrôlées expérimentalement par la densité pic initiale n_0 . La courbe noire correspond aux températures obtenues en ajustant tout le profil. La courbe rose (resp. violette) correspond aux températures ajustées en ne prenant en compte que la partie gauche (resp. droite) du profil. Les températures ajustées sont obtenues avec une précision de $\pm 10\text{nK}$ (optimisation non linéaire par méthode des moindres carrés).

9.6 Au-delà de l'hypothèse thermique

L'hypothèse d'un nuage atomique initialement décrit par un ensemble de Gibbs donne en première approximation des résultats comparables aux données expérimentales. Néanmoins, les analyses de la Section 9.5 laissent penser qu'une distribution de rapidités thermique ne peut pas expliquer la forme exacte du profil de densité obtenu. C'est pourquoi on a essayé de construire des distributions de rapidités non thermiques permettant d'obtenir des défor-

mations de bords plus en accord avec les données expérimentales. Ces calculs numériques ont principalement été réalisés par Isabelle Bouchoule.

Pour cela, le protocole suivant a été utilisé. On suppose qu'il existe une unique fonction s fonctionnelle de la distribution du facteur d'occupation $\nu(\theta)$ tel que $\nu(\theta)$ est la fonction qui vérifie

$$\frac{m\theta^2}{2} = s'(\nu(\theta)) + \frac{m}{\hbar} \int \frac{d\theta'}{2\pi} \Delta(\theta - \theta') [s(\nu(\theta')) - \nu(\theta')s'(\nu(\theta'))] \quad (9.18)$$

où

$$\Delta(\theta) = \frac{2c}{c^2 + \left(\frac{m}{\hbar}\theta\right)^2} \text{ avec } c = \frac{mg}{\hbar^2}. \quad (9.19)$$

Ce choix de paramétrisation découle de la Section 8.4.4 où l'on a cherché à construire des solutions stationnaires des équations GHD en présence d'un potentiel. Dans le cas particulier où le système est décrit par un ensemble de Gibbs, on a

$$s(\nu) = -k_B T [\nu \ln(\nu) + (1 - \nu) \ln(1 - \nu)] + \mu, \quad (9.20)$$

avec μ le potentiel chimique et T la température. Pour aller au-delà de l'approximation thermique, on cherche une fonction s qui s'écrive sous la forme

$$s(\nu) = -\mathcal{P}(1 - \nu) [\nu \ln(\nu) + (1 - \nu) \ln(1 - \nu)] + \mu \quad (9.21)$$

avec $\mathcal{P}(1 - \nu)$ un polynôme \mathcal{P} calculé au point $1 - \nu$. On retrouve le cas thermique pour \mathcal{P} un polynôme d'ordre 0. Pour des raisons de temps de calcul, on s'est limité à un polynôme de degré 1, $\mathcal{P}(x) = a + bx$ et on a cherché numériquement, pour un couple (a, b, μ) fixé la solution d'Eq.(9.18) de façon itérative. Une fois le facteur d'occupation obtenu, on en déduit directement le profil de déformation de bord, voir Section 9.5.1. On peut finalement réaliser un ajustement sur les données expérimentales afin d'obtenir les paramètres μ , a et b .

Un exemple d'un tel ajustement est représenté sur la Fig. 9.10(a). Le facteur d'occupation associé est tracé sur la Fig. 9.10(b) et est comparé avec le facteur d'occupation obtenu par ajustement en faisant l'approximation que le système est bien décrit par un ensemble thermique. Le facteur d'occupation obtenu avec cette paramétrisation est bien différent de celui obtenu dans l'hypothèse d'un système initialement thermique. De plus, les profils de densité obtenus à partir de cette paramétrisation sont en meilleur accord avec les profils expérimentaux : l'écart-type

$$\sigma = \sqrt{\frac{\int d\left(\frac{x}{\tau}\right) [n_{\text{exp}}\left(\frac{x}{\tau}\right) - n_\nu\left(\frac{x}{\tau}\right)]^2}{\int d\left(\frac{x}{\tau}\right) [n_{\text{exp}}\left(\frac{x}{\tau}\right)]^2}} \quad (9.22)$$

vaut 0.02 avec un ajustement à partir d'Eq.(9.21) et 0.03 avec un ajustement à partir d'Eq.(9.20) (cas thermique). En effet, lorsque l'on ajuste la partie droite et gauche des profils de déformation obtenus numériquement par une distribution thermique, les deux températures obtenues sont différentes avec $T_G^{(s)}/T_D^{(s)} = 1.9$, ce qui va dans le sens des résultats présentés sur la Fig. 9.9. Néanmoins, on ne retrouve pas pour autant les bons rapports ($T_G/T_D = 3.1$ avec les

données de la Fig.9.9).

Nous pourrions poursuivre ce projet en regardant par exemple ce que l'on obtiendrait si on paramétrait la fonction s avec un polynôme P de degré supérieur à 1. Cependant, un point important que nous avons remarqué reste que la reconstruction du facteur d'occupation et la distribution de rapidités à partir d'un profil de déformation de bord est finalement assez complexe, puisque pour deux facteurs d'occupation remarquablement différents (comme ceux représentés sur la Fig.9.10(b)) il est possible d'obtenir des profils de déformations de bords très similaires (comme ceux représentés sur la Fig.9.10(a)). Ceci est d'autant plus compliqué que les données expérimentales présentent des défauts liés notamment au bruit de mesure.

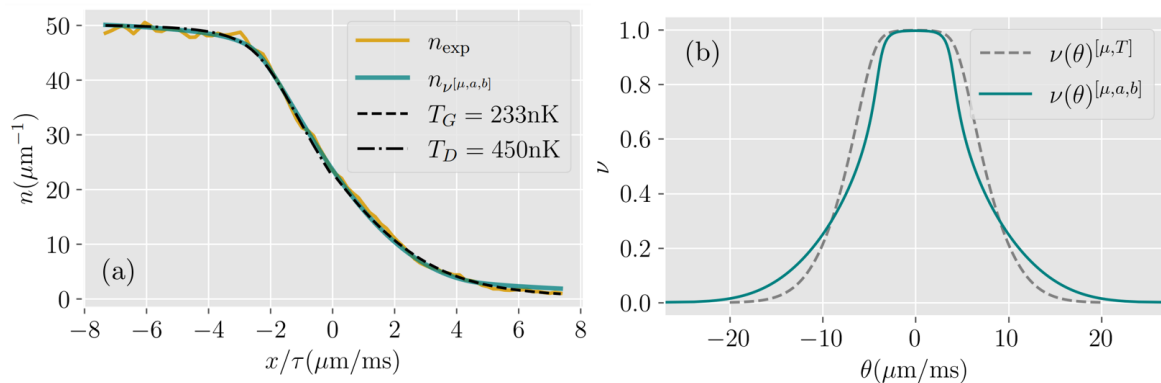


FIGURE 9.10 – (a) Superposition d'un profil de densité de déformation de bord (courbe jaune) avec le profil obtenu en utilisant le facteur d'occupation donné par Eq.(9.18) en ajustant les paramètres μ , a et b (courbe bleue). L'ajustement donne $a/k_B = 1292\text{nK}$, $b/k_B = 463\text{nK}$ et $\mu/k_B = 73\text{nK}$. Les courbes noires pointillées correspondent aux ajustements réalisés sur la partie gauche et droite de la courbe bleue en utilisant la fonction s de l'Eq.(9.20) (le système est décrit par un ensemble de Gibbs) – (b) Facteurs d'occupation obtenus avec ajustement des données expérimentales dans les deux cas suivants : en gris pointillé, le système est supposé initialement à l'équilibre thermique (l'ajustement donne $T = 292\text{nK}$ et $\mu/k_B = 63\text{nK}$), en bleu le système n'est plus supposé à l'équilibre thermodynamique, le facteur d'occupation est paramétrisé par la fonction s donnée par Eq.(9.21).

En résumé

- Le protocole de partitionnement a été étudié expérimentalement pour un gaz de bosons 1D dans le régime de [quasi-condensat de Bose Einstein](#) en regardant la déformation du bord du nuage atomique initialement homogène et semi-infini.
- La déformation du bord correspond à un comportement de type hydrodynamique (sans processus de diffusion) puisque cette dernière ne dépend que de x/τ où τ est le temps d'évolution.
- En première approximation, la déformation est en accord avec les résultats analytiques obtenus dans l'approximation de champ classique.
- Les déviations observées sont liées au fait que le système n'est pas dans son état fondamental. Ces déviations ont été étudiées dans le cadre de la théorie [GHD](#).
- En faisant l'hypothèse que le système est initialement à l'équilibre thermique, les températures extraites en étudiant localement la déformation du bord sont différentes, suggérant alors que cette approximation n'est pas correcte.
- Une paramétrisation spécifique a permis de construire des facteurs d'occupation au-delà de l'approximation thermique et permettant d'observer un meilleur ajustement des données expérimentales.

9.7 Asymétrie de la distribution de rapidités locale pour le protocole de partitionnement

9.7.1 Distribution de rapidités localement asymétrique

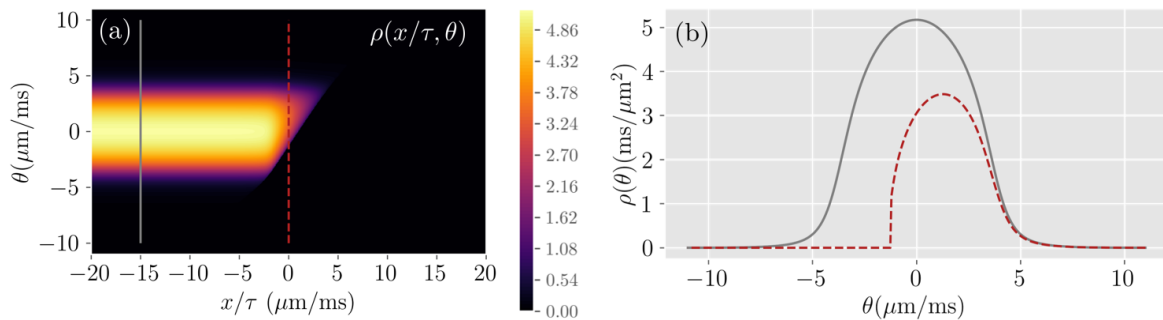


FIGURE 9.11 – (a) Distribution de rapidités $\rho(x/\tau, \theta)$ après un temps de déformation τ . – (b) Coupes de la figure (a) à x/τ fixé. La courbe grise correspond à la distribution de rapidité initiale qui est symétrique. La courbe rouge correspond à la distribution de rapidité après un temps de déformation τ en $x = 0 \mu\text{m}$. Le bord de gauche de cette distribution présente un bord raide attendu pour un système à l'état fondamental avec un γ proche de 0 (mais non nul).

Grâce à l'installation d'un outil de sélection spatiale, il est possible de sonder la distribution de rapidités localement résolue comme nous l'avons déjà présenté dans le Chapitre 6. Ici, dans notre cas particulier, le facteur d'occupation local $\nu(\theta, x = 0)$ et la distribution de rapidités

locale associée $\rho(\theta, x = 0)$ présentent des caractéristiques intéressantes. En effet, comme le montre les Fig.9.7 et 9.11, ces distributions sont asymétriques et de fait ne correspondent pas à ce qui serait attendu pour un système thermique. Plus précisément ρ et $\nu_{[\rho]}$ présentent un bord gauche raide. Dans le régime qBEC, si ρ et $\nu_{[\rho]}$ étaient symétriques tout en présentant cette particularité, cette distribution de rapidité et ce facteur d'occupation seraient associés à un système à l'état fondamental dans un régime caractérisé par un paramètre de Lieb-Liniger $\gamma \rightarrow 0$ mais non nul. Ce comportement ne dépend pas de la forme initiale de la distribution de rapidité et du facteur d'occupation associé. À l'inverse, les parties droites de ρ et $\nu_{[\rho]}$ ne présentent pas de discontinuités et sont sensibles aux conditions initiales du système.

Cette partie présente les mesures de distributions de rapidités locale au niveau du profil de bord déformé lors de la réalisation d'un protocole de partitionnement. Ces dernières ont été comparées à des simulations GHD réalisées conjointement par Guillaume Thémèze et Isabelle Bouchoule.

9.7.2 Protocole expérimental

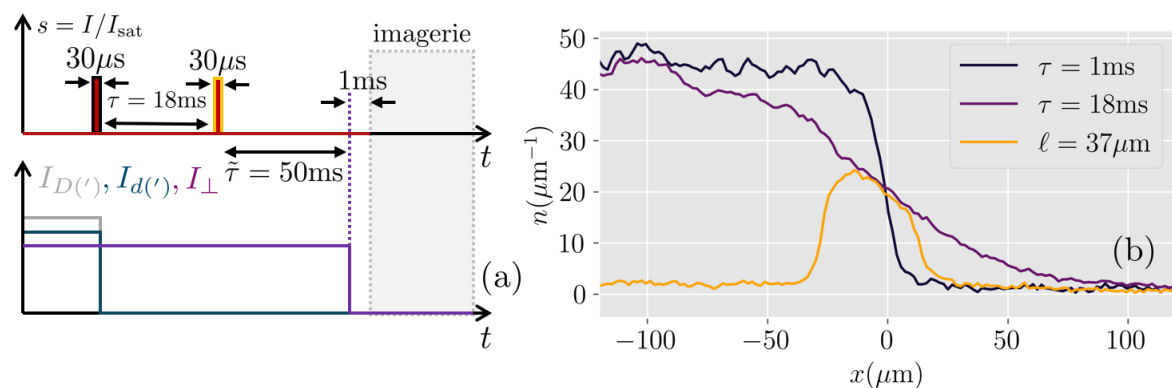


FIGURE 9.12 – (a) Diagrammes temporels correspondant au protocole présenté dans la Section 9.7.2. Le diagramme du bas correspond aux courants associés au piégeage longitudinal ($I_D, I_{D'}, I_d, I_{d'}$) et au piégeage transverse (I_{\perp}). Le diagramme du haut met en évidence les différentes illuminations des atomes par le faisceau façonné par le DMD. Une fois le protocole réalisé, l'imagerie des atomes par absorption est réalisée après un temps de vol de 1ms. – (b) La courbe noire représente le profil de densité 1ms après la première sélection. La courbe violette est le profil de déformation de bord obtenu après un temps d'évolution $\tau = 18$ ms. Le profil en jaune est celui obtenu $\tilde{\tau} = 1$ ms après la seconde sélection.

Pour sonder la forme de la distribution de rapidités localement au niveau de la déformation du bord, le protocole suivant est réalisé, Fig.9.12(a) :

- On commence par réaliser les différentes étapes du protocole décrit dans la Section 9.2, permettant d'observer la déformation d'un bord. Ici, le temps d'évolution choisi est $\tau = 18$ ms ou $\tau = 28$ ms selon le jeu de données.
- Pour sonder la distribution de rapidités, le faisceau lumineux façonné par le DMD illumine une nouvelle fois le nuage atomique pendant $30\mu\text{s}$ et permet de sélectionner

une zone de taille ℓ du profil de bord centrée en $x_0 = -5\mu\text{m}$, Fig.9.12(b).

- Une fois la seconde sélection réalisée, le nuage atomique effectue une expansion longitudinale pendant un temps $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$. Après ce temps $\tilde{\tau}$, le confinement transverse est supprimé. Après un temps de vol de 1ms (étant limité par les délais d'ouverture et de fermeture des caches mécaniques), le profil est mesuré par imagerie par absorption.

9.7.3 Asymétrie des profils

Le protocole décrit ci-dessus a été réalisé avec un premier jeu de données : Le gaz est initialement de densité homogène n_0 , on réalise une première expansion longitudinale pendant un temps $\tau = 18\text{ms}$. Puis, on réalise une sélection du nuage atomique de taille $\ell = 37\mu\text{m}$ avant de réaliser une seconde expansion longitudinale pendant un temps $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$. Le profil est représenté Fig.9.13(a). Lors de la seconde expansion longitudinale, la position du centre de masse se déplace : on compare le déplacement du centre de masse par rapport à sa position au moment de la sélection. D'après les équations hydrodynamiques dans l'approximation de champ classique, la vitesse du centre de masse s'écrit $v = 1/2(K_0 + \theta^*)$. En injectant Eq.(9.12), le déplacement attendu s'écrit

$$\Delta x = v\tau = \left(\frac{2}{3} \frac{x}{\tau} + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{gn_0}{m}} \right) \tau. \quad (9.23)$$

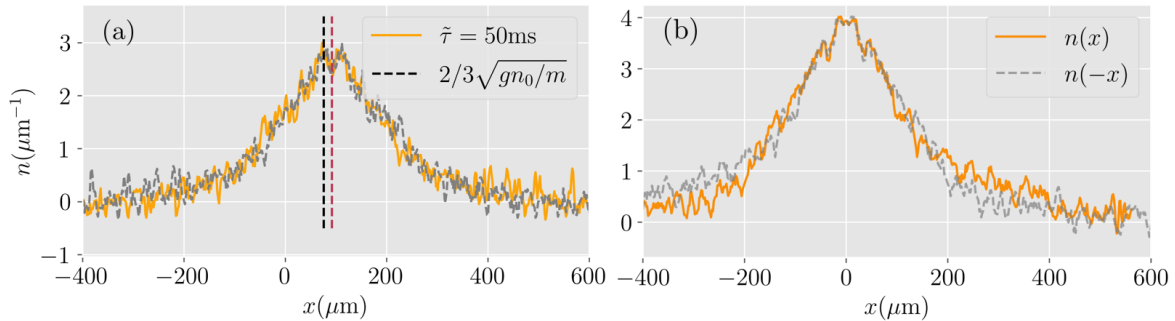


FIGURE 9.13 – (a) Profil de densité obtenu après une expansion longitudinale de $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$. La ligne noire correspond à la position du centre de masse attendue selon Eq.(9.23) Le centre de masse mesuré expérimentalement et correspondant à la ligne rose est déplacé de $15\mu\text{m}$ à droite de celui attendu avec les équations GP. Le profil en gris pointillé correspond au profil renversé et translaté $n(-x)$ et se superpose remarquablement bien au profil de densité $n(x)$ – (b) Profil similaire, mais avec un nuage atomique initialement plus chaud. Pour cela, la fréquence RF minimale pendant le processus de refroidissement évaporatif est modifiée. En superposant le profil de densité après le profil retournée, l'asymétrie du profil est sans équivoque.

Le déplacement observé expérimentalement est bien en accord avec celui attendu dans l'approximation de champ classique, voir Fig.9.13(a).

Comme on le voit sur la Fig.9.13(a), il est difficile de voir si le profil présente une légère asymétrie ou non. Pour mieux mettre en avant l'asymétrie du profil, un nouveau jeu de données

a été pris avec des paramètres différents ($n_0 = 47\mu\text{m}^{-1}$, $\tau = 28\text{ms}$, $\ell = 54\mu\text{m}$ et $\tilde{\tau} = 50\text{ms}$). L'idée ici a été de changer les paramètres de refroidissement évaporatif en augmentant la fréquence **Radio Fréquence (RF)** minimale afin de préparer un nuage atomique plus chaud. Ceci devrait exacerber l'asymétrie du profil obtenu puisqu'une seule partie de la distribution de rapidité est sensible à un effet de température, voir Fig.9.11(b). Le second profil est représenté Fig.9.13(b). Cette fois-ci, l'asymétrie est en effet bien visible.

9.7.4 Comparaisons aux simulations **GHD**

Malgré une asymétrie visible, il est clair que les profils présentés sur la Fig.9.13 sont loin de ressembler aux distributions de rapidités associées aux facteurs d'occupation tronqués représenté sur la Fig.9.11. Afin de réellement comparer les profils expérimentaux obtenus avec les distributions de rapidités attendues, il est important de prendre en compte deux éléments :

- La largeur ℓ de la seconde sélection n'étant pas très petite par rapport à la largeur du bord, il faut prendre en compte la dépendance en x de ρ . Cette inhomogénéité reliée à la taille finie de sélection modifie la forme de la distribution de rapidités globale et adoucit la discontinuité du régime asymptotique, rendant ainsi l'asymétrie moins prononcée.
- Le régime asymptotique ne devrait pas être complètement atteint comme décrit dans la Section 8.4.1. Il est donc crucial de comparer les profils en utilisant les équations **GHD** pour prendre en compte la durée $\tilde{\tau}$ finie d'expansion.

9.7.4.1 Méthodes numériques

Une nouvelle fois, il est possible de ne pas résoudre numériquement directement les équations **GHD**. Pour un gain de temps considérable, les simulations sont réalisées de la manière suivante :

- L'expansion longitudinale suite à la première sélection est traitée comme ce qui est présentée dans la Section 9.5.1, puisqu'il s'agit d'étudier la déformation d'un bord d'un gaz homogène semi-infini.
- Suite à la seconde sélection. Il faut alors tabuler initialement deux matrices $v_{\text{eff}}^+[\theta^+, \theta^-]$ et $v_{\text{eff}}^-[\theta^+, \theta^-]$, telle que, pour un couple (θ^+, θ^-) donné, v_{eff}^\pm soit la vitesse efficace pour la rapidité θ^\pm avec pour facteur d'occupation

$$\nu(\theta) = \begin{cases} \nu(\theta) & \text{si } \theta \in [\theta^-, \theta^+], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9.24)$$

Ainsi, pour chaque pas de temps $\delta\tau$, connaissant les bords supérieurs et inférieurs du facteur d'occupation $\theta^\pm(x, \tilde{\tau})$ et les vitesses efficaces associées, car initialement calculées, on en déduit directement $\theta^\pm(x, \tilde{\tau} + \delta\tau)$.

9.7.4.2 Simulations GHD

On peut alors comparer les profils expérimentaux avec les prédictions GHD. En première approximation, on a considéré que le nuage était initialement bien décrit par un ensemble de Gibbs. On a ainsi réalisé un ajustement des données expérimentales avec comme seul paramètre d'ajustement la température T , le potentiel chimique étant quant à lui fixé à partir de la densité initiale n_0 .

Les différentes simulations sont représentées Fig.9.14. On voit qu'il est important de prendre en compte les deux points cités dans la Section9.7.4, puisque les simulations GHD montrent que le régime asymptotique n'est pas tout à fait atteint (les densités pics entre les simulations hydrodynamiques et le régime asymptotique sont par exemple différentes à 10% près). De plus, le régime asymptotique attendu en prenant la taille finie de la sélection ℓ (ce qui correspondrait à la distribution de rapidités globale $\Pi(\theta)$) est significativement différente du régime asymptotique attendu pour une distribution de rapidité supposée homogène (indépendante de x) le long de la sélection de taille ℓ . Autrement dit,

$$\Pi(\theta) = \int_{x_0-\ell/2}^{x_0+\ell/2} \rho(x, \theta) dx \neq \ell \rho(x_0, \theta). \quad (9.25)$$

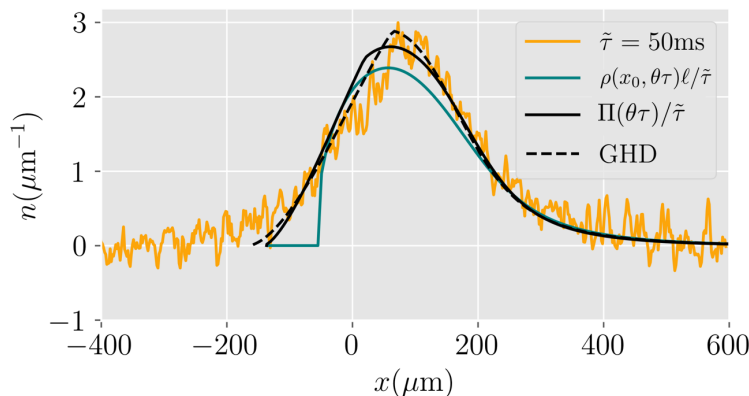


FIGURE 9.14 – Le profil jaune correspond à celui de la Fig.9.13. La courbe noire pointillée correspond aux simulations GHD en prenant en compte la dépendance spatiale de la distribution de rapidités dans la sélection de taille ℓ et dans l'approximation d'un nuage atomique initialement bien décrit pas un ensemble de Gibbs ($T = 300\text{nK}$, $\mu/k_B = 44\text{nK}$). La courbe bleue est le régime asymptotique attendu dans le cas où la distribution de rapidités est supposée constante et égale à celle en x_0 : on obtient alors naturellement un profil homothétique à la distribution de rapidités asymétrique tracée sur la Fig.9.11(b). La courbe solide noire correspond au régime asymptotique attendu avec les équations GHD en prenant en compte les variations spatiales de la distribution de rapidités autour de x_0 . Les profils sont obtenus en moyennant $\simeq 200$ images.

En prenant en compte ces deux aspects, le profil obtenu avec les équations GHD pour une température d'ajustement $T = 300\text{nK}$ est en accord avec le profil expérimental. On observe néanmoins une légère déviation au niveau de la partie gauche du profil. Un projet en cours,

en collaboration avec Andrew Urichuk et Jacopo De Nardis, est de regarder si ces déviations peuvent être expliquées pas un processus additionnel de diffusion [61].

En résumé

- Après avoir réalisé un protocole de partitionnement pour un gaz initialement homogène et semi-infini, la distribution de rapidités spatialement résolue a été sondée expérimentalement.
- Cette distribution de rapidités est particulière puisque présentant une forme non-symétrique. Un des bords de la distribution est de température nulle. Les profils mesurés expérimentalement présentent, eux aussi, une forme asymétrique et sont bien compris par les équations [GHD](#).

CONCLUSION

Lors de ces trois années de thèse, mes travaux de recherche se sont portés sur la caractérisation expérimentale des gaz de Bose 1D. Ce système peut être modélisé par l'Hamiltonien de Lieb-Liniger, un système dit intégrable, où, à la différence des systèmes non intégrables, l'état à l'équilibre de tels systèmes n'est pas thermique. Il est déterminé par la distribution de rapidité, une quantité conservée au cours de la dynamique qui caractérise l'état relaxé du système. Pour sonder cette distribution, on réalise une expansion du nuage atomique dans le guide 1D où le profil de densité tend à être homothétique à la distribution de rapidités.

Les 6 premiers mois de ma thèse ont été dédiés à la remise en marche de l'expérience de puce atomique permettant de produire des gaz de Bose 1D. Une fois l'expérience redevenue fonctionnelle, nous avons ainsi tout d'abord commencé par caractériser les expansions dans un guide 1D de ces gaz pour différentes conditions. Pour un gaz initialement placé dans un piège longitudinal, l'évolution du profil de densité a bien été comprise. De même, nous avons caractérisé l'évolution des fluctuations de phase dans le cadre de la théorie de Bogoliubov. Dans la même idée, de premiers résultats obtenus durant les derniers mois de ma thèse et concernant l'évolution des fluctuations de phase pour un gaz homogène de taille finie sont prometteurs et vont dans le sens de la production systèmes localement à entropie quasi-nulle.

Dans le cas d'un gaz de densité inhomogène présentant des variations spatiales et temporelles à grandes longueurs d'onde, la notion de distribution de rapidité spatialement résolue peut être définie. Cette quantité est au cœur de l'hydrodynamique généralisée, une théorie émergente conçue pour étudier la dynamique de système intégrable. Nous avons cherché à mesurer cette quantité en utilisant le protocole d'expansion 1D. Pour réaliser une mesure locale, une grande partie de ma thèse a consisté à mettre en place un outil de sélection spatial permettant de sélectionner une tranche d'un nuage atomique.

De telles mesures ont été réalisées pour un gaz initialement à l'équilibre. La comparaison des expansions 1D avec les simulations [GHD](#) montrent que le régime asymptotique n'est atteint qu'à 15% près. Nous avons essayé d'extraire la distribution de rapidités à partir de la théorie [GHD](#) sans réel succès cependant.

Une telle sonde a aussi été utilisée pour l'étude de dynamiques hors équilibres. L'outil de sélection spatial a permis, à partir de situations à l'équilibre, de produire différents états hors-équilibre. Nous avons pu sonder des distributions de rapidités exotiques et les résultats sont en bons accords avec les prédictions [GHD](#).

Finalement, nous avons étudié des protocoles de partitionnement, des systèmes qui sont à la base de la construction de la théorie [GHD](#). Nous nous sommes intéressés à caractériser le profil de déformation de bords de nos systèmes. La distribution de rapidité locale d'un tel système a aussi été sondé expérimentalement et de nouveau en accord avec les prédictions [GHD](#).

Un premier point sur lequel nous travaillons actuellement est d'essayer d'avoir une meilleure compréhension des dynamiques observées expérimentalement. Notamment, une piste que nous explorons est la mise en évidence des effets de diffusion (au-delà de l'échelle d'Euler) sur les dynamiques expérimentales.

Un autre point important qui serait très intéressant à étudier dans la suite serait de produire de façon contrôlée un état à l'équilibre non thermique. Cet état serait alors caractérisé par une distribution de rapidité non thermique. Par exemple, la présence de pertes à K -corps a pour conséquence de déformer de façon non triviale la distribution de rapidités [\[167\]](#). Dans le cas du régime de Tonks-Girardeau (régime de sphères dures), la présence des pertes entraîne pour la distribution de rapidités un développement d'ailes en $1/\theta^4$. De même, dans le régime de [quasi-condensat de Bose Einstein](#), une distribution de rapidités initialement thermique devient alors sous l'effet des pertes non thermique. En ce sens, l'expérience de puce atomique sur laquelle j'ai travaillé est en développement avec l'ajout d'un confinement optique longitudinal configurable au cours du temps. Ce projet est mené par Guillaume Thémèze et permettra d'avoir une meilleure contrôlabilité des systèmes étudiés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Immanuel Bloch, Jean Dalibard, and Wilhelm Zwerger. Many-body physics with ultracold gases. Reviews of Modern Physics, 80(3) :885–964, July 2008. ISSN 1539-0756. doi : 10.1103/revmodphys.80.885. URL <http://dx.doi.org/10.1103/RevModPhys.80.885>.
- [2] Vittorio Giovannetti, Seth Lloyd, and Lorenzo Maccone. Quantum metrology. Phys. Rev. Lett., 96 :010401, Jan 2006. doi : 10.1103/PhysRevLett.96.010401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.010401>.
- [3] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. Quantum Computation and Quantum Information : 10th Anniversary Edition. Cambridge University Press, 2010.
- [4] Richard P. Feynman. Simulating physics with computers. International Journal of Theoretical Physics, 21(6-7) :467–488, Jun 1982. doi : 10.1007/bf02650179.
- [5] K.Yu. Arutyunov, D.S. Golubev, and A.D. Zaikin. Superconductivity in one dimension. Physics Reports, 464(1–2) :1–70, July 2008. ISSN 0370-1573. doi : 10.1016/j.physrep.2008.04.009. URL <http://dx.doi.org/10.1016/j.physrep.2008.04.009>.
- [6] Immanuel Bloch and Immanuel. Ultracold quantum gases in optical lattices. Nat. Phys., 1 :23–30, 10 2005. doi : 10.1038/nphys138.
- [7] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss. Observation of a one-dimensional tonks-girardeau gas. Science, 305(5687) :1125–1128, 2004. doi : 10.1126/science.1100700. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1100700>.
- [8] Elmar Haller, Mattias Gustavsson, Manfred J. Mark, Johann G. Danzl, Russell Hart, Guido Pupillo, and Hanns-Christoph Nägerl. Realization of an excited, strongly correlated quantum gas phase. Science, 325(5945) :1224–1227, September 2009. ISSN 1095-9203. doi : 10.1126/science.1175850. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.1175850>.

- [9] A. H. van Amerongen, J. J. P. van Es, P. Wicke, K. V. Kheruntsyan, and N. J. van Druten. Yang-yang thermodynamics on an atom chip. *Phys. Rev. Lett.*, 100 :090402, Mar 2008. doi : 10.1103/PhysRevLett.100.090402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.100.090402>.
- [10] Thibaut Jacqmin, Julien Armijo, Tarik Berrada, Karen V. Kheruntsyan, and Isabelle Bouchoule. Sub-poissonian fluctuations in a 1d bose gas : From the quantum quasicondensate to the strongly interacting regime. *Phys. Rev. Lett.*, 106 :230405, Jun 2011. doi : 10.1103/PhysRevLett.106.230405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.230405>.
- [11] Xi-Wen Guan, Murray T. Batchelor, and Chaohong Lee. Fermi gases in one dimension : From bethe ansatz to experiments. *Rev. Mod. Phys.*, 85 :1633–1691, Nov 2013. doi : 10.1103/RevModPhys.85.1633. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.85.1633>.
- [12] Yean-an Liao, Ann Sophie C. Rittner, Tobias Paprotta, Wenhui Li, Guthrie B. Partridge, Randall G. Hulet, Stefan K. Baur, and Erich J. Mueller. Spin-imbalance in a one-dimensional fermi gas. *Nature*, 467(7315) :567–569, September 2010. ISSN 1476-4687. doi : 10.1038/nature09393. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nature09393>.
- [13] Henning Moritz, Thilo Stöferle, Kenneth Günter, Michael Köhl, and Tilman Esslinger. Confinement induced molecules in a 1d fermi gas. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :210401, Jun 2005. doi : 10.1103/PhysRevLett.94.210401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.210401>.
- [14] Guido Pagano, Marco Mancini, Giacomo Cappellini, Pietro Lombardi, Florian Schäfer, Hui Hu, Xia-Ji Liu, Jacopo Catani, Carlo Sias, Massimo Inguscio, and Leonardo Fallani. A one-dimensional liquid of fermions with tunable spin. *Nature Physics*, 10(3) :198–201, February 2014. ISSN 1745-2481. doi : 10.1038/nphys2878. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2878>.
- [15] J. Reichel and V. Vuletic. *Atom Chips*. John Wiley and Sons, 02 2011. ISBN 9783527633357.
- [16] N. D. Mermin and H. Wagner. Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one- or two-dimensional isotropic heisenberg models. *Phys. Rev. Lett.*, 17 :1133–1136, Nov 1966. doi : 10.1103/PhysRevLett.17.1133. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.17.1133>.
- [17] P. C. Hohenberg. Existence of long-range order in one and two dimensions. *Phys. Rev.*, 158 :383–386, Jun 1967. doi : 10.1103/PhysRev.158.383. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.158.383>.
- [18] Jean-Sébastien Caux and Jorn Mossel. Remarks on the notion of quantum integrability. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(02) :P02023, feb

2011. doi : 10.1088/1742-5468/2011/02/P02023. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2011/02/P02023>.
- [19] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, and A. G. Izergin. Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Cambridge, 1993. ISBN 978-0-511-62883-2. doi : 10.1017/CBO9780511628832.
- [20] Michel Gaudin and J.S. Caux. The bethe wavefunction. The Bethe Wavefunction, pages 1–322, 01 2012. doi : 10.1017/CBO9781107053885.
- [21] Elliott H. Lieb and Werner Liniger. Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state. Phys. Rev., 130 :1605–1616, May 1963. doi : 10.1103/PhysRev.130.1605. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1605>.
- [22] Elliott H. Lieb. Exact analysis of an interacting bose gas. ii. the excitation spectrum. Phys. Rev., 130 :1616–1624, May 1963. doi : 10.1103/PhysRev.130.1616. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.130.1616>.
- [23] Isabelle Bouchoule and Jérôme Dubail. Generalized hydrodynamics in the one-dimensional bose gas : theory and experiments. Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment, 2022(1) :014003, jan 2022. doi : 10.1088/1742-5468/ac3659. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/ac3659>.
- [24] Isabelle Bouchoule, Jérôme Dubail, Léa Dubois, and Dimitri M. Gangardt. Relaxation of phonons in the lieb-liniger gas by dynamical refermionization. Phys. Rev. Lett., 130 : 140401, Apr 2023. doi : 10.1103/PhysRevLett.130.140401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.130.140401>.
- [25] Yasser Bezzaz, Léa Dubois, and Isabelle Bouchoule. Rapidity distribution within the defocusing non-linear Schrödinger equation model. SciPost Phys. Core, 6 :064, 2023. doi : 10.21468/SciPostPhysCore.6.3.064. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhysCore.6.3.064>.
- [26] L. Dubois, G. Thémèze, F. Nogrette, J. Dubail, and I. Bouchoule. Probing the local rapidity distribution of a 1d bose gas, 2024. URL <https://arxiv.org/abs/2312.15344>.
- [27] M. Olshanii. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. Phys. Rev. Lett., 81 :938–941, Aug 1998. doi : 10.1103/PhysRevLett.81.938. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.938>.
- [28] Lewi Tonks. The complete equation of state of one, two and three-dimensional gases of hard elastic spheres. Phys. Rev., 50 :955–963, Nov 1936. doi : 10.1103/PhysRev.50.955. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.50.955>.

- [29] M. Girardeau. Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension. Journal of Mathematical Physics, 1(6) :516–523, 11 1960. ISSN 0022-2488. doi : 10.1063/1.1703687.
- [30] Fabio Franchini. An Introduction to Integrable Techniques for One-Dimensional Quantum Systems, volume 940. 09 2016. doi : 10.1007/978-3-319-48487-7.
- [31] B.M Wouters. The quench action approach to out-of-equilibrium quantum integrable models. Theses, Institute for Theoretical Physics Amsterdam (ITFA), October 2015. URL <https://hdl.handle.net/11245/1.486244>.
- [32] Masakatsu Ishikawa and Hajime Takayama. Solitons in a one-dimensional bose system with the repulsive delta-function interaction. Journal of the Physical Society of Japan, 49 :1242–1246, 1980. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:122386591>.
- [33] Tomasz Karpiuk, Tomasz Sowinski, Mariusz Gajda, Kazimierz Rzazewski, and Miroslaw Brewczyk. Correspondence between dark solitons and the type ii excitations of the lieb-liniger model. Phys. Rev. A, 91 :013621, Jan 2015. doi : 10.1103/PhysRevA.91.013621. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.91.013621>.
- [34] C. N. Yang and C. P. Yang. Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction. Journal of Mathematical Physics, 10(7) : 1115–1122, 07 1969. ISSN 0022-2488. doi : 10.1063/1.1664947. URL <https://doi.org/10.1063/1.1664947>.
- [35] D. Jukic, R. Pezer, T. Gasenzer, and H. Buljan. Free expansion of a lieb-liniger gas : Asymptotic form of the wave functions. Phys. Rev. A, 78 :053602, Nov 2008. doi : 10.1103/PhysRevA.78.053602. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.78.053602>.
- [36] A. S. Campbell, D. M. Gangardt, and K. V. Kheruntsyan. Sudden expansion of a one-dimensional bose gas from power-law traps. Phys. Rev. Lett., 114 :125302, Mar 2015. doi : 10.1103/PhysRevLett.114.125302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.114.125302>.
- [37] Jean-Sébastien Caux, Benjamin Doyon, Jérôme Dubail, Robert Konik, and Takato Yoshimura. Hydrodynamics of the interacting Bose gas in the Quantum Newton Cradle setup. SciPost Phys., 6 :070, 2019. doi : 10.21468/SciPostPhys.6.6.070. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.6.6.070>.
- [38] Joshua M. Wilson, Neel Malvania, Yuan Le, Yicheng Zhang, Marcos Rigol, and David S. Weiss. Observation of dynamical fermionization. Science, 367(6485) :1461–1464, 2020. doi : 10.1126/science.aaz0242. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.aaz0242>.

- [39] I. Bouchoule, N. J. van Druten, and C. I. Westbrook. Atom Chips and One-Dimensional Bose Gases, chapter 11, pages 331–363. John Wiley and Sons, Ltd, 2011. ISBN 9783527633357. doi : <https://doi.org/10.1002/9783527633357.ch11>. URL <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/9783527633357.ch11>.
- [40] M. L. Kerr, G. De Rosi, and K. V. Kheruntsyan. Analytic thermodynamic properties of the lieb-liniger gas, 2024.
- [41] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov. Pair correlations in a finite-temperature 1d bose gas. Phys. Rev. Lett., 91 :040403, Jul 2003. doi : 10.1103/PhysRevLett.91.040403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.040403>.
- [42] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss. Local pair correlations in one-dimensional bose gases. Phys. Rev. Lett., 95 :190406, Nov 2005. doi : 10.1103/PhysRevLett.95.190406. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.95.190406>.
- [43] J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Observations of density fluctuations in an elongated bose gas : Ideal gas and quasicondensate regimes. Phys. Rev. Lett., 96 :130403, Apr 2006. doi : 10.1103/PhysRevLett.96.130403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.96.130403>.
- [44] Torben Müller, Bruno Zimmermann, Jakob Meineke, Jean-Philippe Brantut, Tilman Esslinger, and Henning Moritz. Local observation of antibunching in a trapped fermi gas. Phys. Rev. Lett., 105 :040401, Jul 2010. doi : 10.1103/PhysRevLett.105.040401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.040401>.
- [45] N Bogoliubov. On the theory of superfluidity. J. Phys, 11(1) :23, 1947.
- [46] E. P. Gross. Structure of a quantized vortex in boson systems. Il Nuovo Cimento, 20 (3) :454–477, 1961. doi : 10.1007/bf02731494.
- [47] P.P Pitaevskii. Vortex lines in an imperfect bose gas. Journal of Experimental and Theoretical Physics, 13 :451–454, 1961.
- [48] Christophe Mora and Yvan Castin. Extension of bogoliubov theory to quasicondensates. Phys. Rev. A, 67 :053615, May 2003. doi : 10.1103/PhysRevA.67.053615. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.67.053615>.
- [49] Benjamin Doyon. Lecture notes on Generalised Hydrodynamics. SciPost Phys. Lect. Notes, page 18, 2020. doi : 10.21468/SciPostPhysLectNotes.18. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.18>.
- [50] Fabian H.L. Essler. A short introduction to generalized hydrodynamics. Physica A : Statistical Mechanics and its Applications, 631 :127572, 2023. ISSN 0378-4371. doi :

- <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127572>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0378437122003971>. Lecture Notes of the 15th International Summer School of Fundamental Problems in Statistical Physics.
- [51] Matthew L. Kerr and Karen V. Kheruntsyan. The theory of generalised hydrodynamics for the one-dimensional bose gas. AAPPS Bulletin, 33(1), October 2023. ISSN 2309-4710. doi : 10.1007/s43673-023-00095-2. URL <http://dx.doi.org/10.1007/s43673-023-00095-2>.
- [52] Jérôme Dubail. A more efficient way to describe interacting quantum particles in 1d. Physics, 9, 12 2016. doi : 10.1103/Physics.9.153.
- [53] Fabian H L Essler and Maurizio Fagotti. Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains. Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment, 2016(6) :064002, jun 2016. doi : 10.1088/1742-5468/2016/06/064002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2016/06/064002>.
- [54] J. M. Deutsch. Quantum statistical mechanics in a closed system. Phys. Rev. A, 43 : 2046–2049, Feb 1991. doi : 10.1103/PhysRevA.43.2046. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.43.2046>.
- [55] Mark Srednicki. Chaos and quantum thermalization. Phys. Rev. E, 50 :888–901, Aug 1994. doi : 10.1103/PhysRevE.50.888. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.50.888>.
- [56] Joshua M Deutsch. Eigenstate thermalization hypothesis. Reports on Progress in Physics, 81(8) :082001, jul 2018. doi : 10.1088/1361-6633/aac9f1. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1361-6633/aac9f1>.
- [57] NAVINDER SINGH. On the foundations of statistical mechanics : A brief review. Modern Physics Letters B, 27(06) :1330003, 2013. doi : 10.1142/S0217984913300032. URL <https://doi.org/10.1142/S0217984913300032>.
- [58] Jacopo De Nardis, Denis Bernard, and Benjamin Doyon. Diffusion in generalized hydrodynamics and quasiparticle scattering. SciPost Physics, 6(4), April 2019. ISSN 2542-4653. doi : 10.21468/scipostphys.6.4.049. URL <http://dx.doi.org/10.21468/SciPostPhys.6.4.049>.
- [59] Bruno Bertini, Mario Collura, Jacopo De Nardis, and Maurizio Fagotti. Transport in out-of-equilibrium xxz chains : Exact profiles of charges and currents. Phys. Rev. Lett., 117 :207201, Nov 2016. doi : 10.1103/PhysRevLett.117.207201. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.117.207201>.
- [60] Olalla A. Castro-Alvaredo, Benjamin Doyon, and Takato Yoshimura. Emergent hydrodynamics in integrable quantum systems out of equilibrium. Phys. Rev. X, 6 :041065,

- Dec 2016. doi : 10.1103/PhysRevX.6.041065. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.6.041065>.
- [61] Jacopo De Nardis, Denis Bernard, and Benjamin Doyon. Hydrodynamic diffusion in integrable systems. *Physical review letters*, 121 16 :160603, 2018. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:53235526>.
- [62] Benjamin Doyon and Takato Yoshimura. A note on generalized hydrodynamics : inhomogeneous fields and other concepts. *SciPost Phys.*, 2 :014, 2017. doi : 10.21468/SciPostPhys.2.2.014. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.2.2.014>.
- [63] M. Schemmer, I. Bouchoule, B. Doyon, and J. Dubail. Generalized hydrodynamics on an atom chip. *Phys. Rev. Lett.*, 122 :090601, Mar 2019. doi : 10.1103/PhysRevLett.122.090601. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.090601>.
- [64] Edward A. Spiegel. Fluid dynamical form of the linear and nonlinear schrödinger equations. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 1 :236–240, 1980. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:121071034>.
- [65] Lev Pitaevskii and Sandro Stringari. *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford University Press, 01 2016. ISBN 9780198758884. doi : 10.1093/acprof:oso/9780198758884.001.0001. URL <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198758884.001.0001>.
- [66] S. Stringari. Dynamics of bose-einstein condensed gases in highly deformed traps. *Phys. Rev. A*, 58 :2385–2388, Sep 1998. doi : 10.1103/PhysRevA.58.2385. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.58.2385>.
- [67] Benjamin Doyon, Jérôme Dubail, Robert Konik, and Takato Yoshimura. Large-scale description of interacting one-dimensional bose gases : Generalized hydrodynamics supersedes conventional hydrodynamics. *Phys. Rev. Lett.*, 119 :195301, Nov 2017. doi : 10.1103/PhysRevLett.119.195301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.119.195301>.
- [68] Eldad Bettelheim. The whitham approach to the $c \rightarrow 0$ limit of the lieb–liniger model and generalized hydrodynamics. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 53(20) :205204, apr 2020. doi : 10.1088/1751-8121/ab8676. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8121/ab8676>.
- [69] Frederik Møller, Philipp Schüttelkopf, Jörg Schmiedmayer, and Sebastian Erne. The whitham approach to generalized hydrodynamics, 2023.
- [70] Sebastiano Peotta and Massimiliano Di Ventra. Quantum shock waves and population inversion in collisions of ultracold atomic clouds. *Phys. Rev. A*, 89 :013621, Jan 2014. doi : 10.1103/PhysRevA.89.013621. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.89.013621>.

- [71] M A Cazalilla. Bosonizing one-dimensional cold atomic gases. Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics, 37(7) :S1, mar 2004. doi : 10.1088/0953-4075/37/7/051. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/37/7/051>.
- [72] M. A. Cazalilla, R. Citro, T. Giamarchi, E. Orignac, and M. Rigol. One dimensional bosons : From condensed matter systems to ultracold gases. Rev. Mod. Phys., 83 : 1405–1466, Dec 2011. doi : 10.1103/RevModPhys.83.1405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.83.1405>.
- [73] Max Schemmer, Aisling Johnson, and Isabelle Bouchoule. Monitoring squeezed collective modes of a one-dimensional bose gas after an interaction quench using density-ripple analysis. Phys. Rev. A, 98 :043604, Oct 2018. doi : 10.1103/PhysRevA.98.043604. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.98.043604>.
- [74] Federica Cataldini, Frederik Møller, Mohammadamin Tajik, João Sabino, Si-Cong Ji, Igor Mazets, Thomas Schweigler, Bernhard Rauer, and Jörg Schmiedmayer. Emergent pauli blocking in a weakly interacting bose gas. Phys. Rev. X, 12 :041032, Dec 2022. doi : 10.1103/PhysRevX.12.041032. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevX.12.041032>.
- [75] Zoran Ristivojevic and K. A. Matveev. Decay of bogoliubov quasiparticles in a nonideal one-dimensional bose gas. Phys. Rev. B, 89 :180507, May 2014. doi : 10.1103/PhysRevB.89.180507. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.180507>.
- [76] Zoran Ristivojevic and K. A. Matveev. Decay of bogoliubov excitations in one-dimensional bose gases. Phys. Rev. B, 94 :024506, Jul 2016. doi : 10.1103/PhysRevB.94.024506. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.94.024506>.
- [77] Amaury Micheli and Scott Robertson. Phonon decay in one-dimensional atomic bose quasicondensates via beliaev-landau damping. Phys. Rev. B, 106 :214528, Dec 2022. doi : 10.1103/PhysRevB.106.214528. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.106.214528>.
- [78] Jan von Delft and Herbert Schoeller. Bosonization for beginners — refermionization for experts. Annalen der Physik, 510(4) :225–305, November 1998. ISSN 1521-3889. doi : 10.1002/andp.19985100401. URL <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19985100401>.
- [79] Adilet Imambekov, Thomas L. Schmidt, and Leonid I. Glazman. One-dimensional quantum liquids : Beyond the luttinger liquid paradigm. Rev. Mod. Phys., 84 :1253–1306, Sep 2012. doi : 10.1103/RevModPhys.84.1253. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.84.1253>.
- [80] T. Giamarchi. Quantum Physics in One Dimension. International Series of Monographs on Physics. Clarendon Press, 2004. ISBN 9780198525004. URL <https://books.google.fr/books?id=1MwTDAAAQBAJ>.

-
- [81] Thierry Giamarchi. Quantum Physics in One Dimension. Oxford University Press, 12 2003. ISBN 9780198525004. doi : 10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001. URL <https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198525004.001.0001>.
- [82] J.-C. Jaskula, G. B. Partridge, M. Bonneau, R. Lopes, J. Ruaudel, D. Boiron, and C. I. Westbrook. Acoustic analog to the dynamical casimir effect in a bose-einstein condensate. Phys. Rev. Lett., 109 :220401, Nov 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.109.220401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.220401>.
- [83] T. Langen, R. Geiger, M. Kuhnert, B. Rauer, and J. Schmiedmayer. Local emergence of thermal correlations in an isolated quantum many-body system. Nature Physics, 9(10) :640–643, September 2013. ISSN 1745-2481. doi : 10.1038/nphys2739. URL <http://dx.doi.org/10.1038/nphys2739>.
- [84] Bernhard Rauer, Sebastian Erne, Thomas Schweigler, Federica Cataldini, Mohammadamin Tajik, and Jörg Schmiedmayer. Recurrences in an isolated quantum many-body system. Science, 360(6386) :307–310, April 2018. ISSN 1095-9203. doi : 10.1126/science.aan7938. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.aan7938>.
- [85] Marcos Rigol, Vanja Dunjko, Vladimir Yurovsky, and Maxim Olshanii. Relaxation in a completely integrable many-body quantum system : An ab initio study of the dynamics of the highly excited states of 1d lattice hard-core bosons. Phys. Rev. Lett., 98 :050405, Feb 2007. doi : 10.1103/PhysRevLett.98.050405. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.050405>.
- [86] Lev Vidmar and Marcos Rigol. Generalized gibbs ensemble in integrable lattice models. Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment, 2016(6) :064007, jun 2016. doi : 10.1088/1742-5468/2016/06/064007. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2016/06/064007>.
- [87] S. Manz, R. Bücker, T. Betz, Ch. Koller, S. Hofferberth, I. E. Mazets, A. Imambekov, E. Demler, A. Perrin, J. Schmiedmayer, and T. Schumm. Two-point density correlations of quasicondensates in free expansion. Phys. Rev. A, 81 :031610, Mar 2010. doi : 10.1103/PhysRevA.81.031610. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.81.031610>.
- [88] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle. Propagation of sound in a bose-einstein condensate. Phys. Rev. Lett., 79 :553–556, Jul 1997. doi : 10.1103/PhysRevLett.79.553. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.79.553>.
- [89] S. P. Cockburn, A. Negretti, N. P. Proukakis, and C. Henkel. Comparison between microscopic methods for finite-temperature bose gases. Phys. Rev. A, 83 :043619, Apr 2011. doi : 10.1103/PhysRevA.83.043619. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.043619>.

- [90] T. Bienaimé, M. Isoard, Q. Fontaine, A. Bramati, A. M. Kamchatnov, Q. Glorieux, and N. Pavloff. Quantitative analysis of shock wave dynamics in a fluid of light. *Phys. Rev. Lett.*, 126 :183901, May 2021. doi : 10.1103/PhysRevLett.126.183901. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.126.183901>.
- [91] François Copie, Pierre Suret, and Stéphane Randoux. Space–time observation of the dynamics of soliton collisions in a recirculating optical fiber loop. *Optics Communications*, 545 :129647, 2023. ISSN 0030-4018. doi : <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2023.129647>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401823003954>.
- [92] V. Korepin, A. Izergin, and N. Bogoliubov. Quantum inverse scattering method and correlation functions. *Journal of Soviet Mathematics*, 31, 02 1993. doi : 10.1007/BF02107233.
- [93] S. Novikov, S. V. Manakov, L. P. Pitaevsky, and V. E. Zakharov. *THEORY OF SOLITONS. THE INVERSE SCATTERING METHOD*. 1984.
- [94] Giuseppe Del Vecchio Del Vecchio, Alvis Bastianello, Andrea De Luca, and Giuseppe Mussardo. Exact out-of-equilibrium steady states in the semiclassical limit of the interacting Bose gas. *SciPost Phys.*, 9 :002, 2020. doi : 10.21468/SciPostPhys.9.1.002. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.9.1.002>.
- [95] Curt Wittig. The landau-zener formula. *The journal of physical chemistry. B*, 109 17 : 8428–30, 2005. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:42173145>.
- [96] Pierre Suret, Stéphane Randoux, Andrey Gelash, Dmitry Agafontsev, Benjamin Doyon, and Gennady El. Soliton gas : Theory, numerics, and experiments. *Phys. Rev. E*, 109 : 061001, Jun 2024. doi : 10.1103/PhysRevE.109.061001. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.109.061001>.
- [97] Clarence Zener. Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 137 (833) :696–702, 1932. ISSN 09501207. URL <http://www.jstor.org/stable/96038>.
- [98] LANDAU L. D. Zur theorie der energieubertragung ii. *Z. Sowjetunion*, 2 :46–51, 1932. URL <https://cir.nii.ac.jp/crid/1571980074879151104>.
- [99] Johannes Denschlag, Donatella Cassettari, and Jörg Schmiedmayer. Guiding neutral atoms with a wire. *Phys. Rev. Lett.*, 82 :2014–2017, Mar 1999. doi : 10.1103/PhysRevLett.82.2014. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.82.2014>.
- [100] J. Fortagh, A. Grossmann, C. Zimmermann, and T. W. Hänsch. Miniaturized wire trap for neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :5310–5313, Dec 1998. doi : 10.1103/PhysRevLett.81.5310. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.81.5310>.

-
- [101] Ron Folman, Peter Krüger, Donatella Cassettari, Björn Hessmo, Thomas Maier, and Jörg Schmiedmayer. Controlling cold atoms using nanofabricated surfaces : Atom chips. Phys. Rev. Lett., 84 :4749–4752, May 2000. doi : 10.1103/PhysRevLett.84.4749. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.84.4749>.
- [102] J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch. Atomic micromanipulation with magnetic surface traps. Phys. Rev. Lett., 83 :3398–3401, Oct 1999. doi : 10.1103/PhysRevLett.83.3398. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.83.3398>.
- [103] Wolfgang Hänsel, P Hommelhoff, Theodor Haensch, and Jakob Reichel. Bose–einstein condensation on a microelectronic chip. Nature, 413 :498–501, 11 2001. doi : 10.1038/35097032.
- [104] H. Ott, J. Fortagh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, and C. Zimmermann. Bose–einstein condensation in a surface microtrap. Phys. Rev. Lett., 87 :230401, Nov 2001. doi : 10.1103/PhysRevLett.87.230401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.230401>.
- [105] Christine Aussibal. Réalisation d’un condensat de Bose-Einstein sur une microstructure. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, November 2003. URL <https://pastel.hal.science/tel-00004429>.
- [106] T. Schumm, S. Hofferberth, L Mauritz Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, Israel Bar-Joseph, Jörg Schmiedmayer, and Peter Kruger. Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip. Nature Physics, 1 :57, 09 2005. doi : 10.1038/nphys125.
- [107] J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Experimental evidence for the breakdown of a hartree-fock approach in a weakly interacting bose gas. Phys. Rev. Lett., 97 :250403, Dec 2006. doi : 10.1103/PhysRevLett.97.250403. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.97.250403>.
- [108] B. Laburthe Tolra, K. M. O’Hara, J. H. Huckans, W. D. Phillips, S. L. Rolston, and J. V. Porto. Observation of reduced three-body recombination in a correlated 1d degenerate bose gas. Phys. Rev. Lett., 92 :190401, May 2004. doi : 10.1103/PhysRevLett.92.190401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.92.190401>.
- [109] Belén Paredes, Artur Widera, Valentin Murg, Olaf Mandel, Simon Fölling, Ignacio I. Ci-rac, Gora V. Shlyapnikov, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch. Tonks–girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice. Nature, 429 :277–281, 2004. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:4423003>.
- [110] Henning Moritz, Thilo Stöferle, Michael Köhl, and Tilman Esslinger. Exciting collective oscillations in a trapped 1d gas. Phys. Rev. Lett., 91 :250402, Dec 2003. doi : 10.1103/PhysRevLett.91.250402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.91.250402>.

- [111] H.-P. Stimming, N. J. Mauser, J. Schmiedmayer, and I. E. Mazets. Fluctuations and stochastic processes in one-dimensional many-body quantum systems. Phys. Rev. Lett., 105 :015301, Jul 2010. doi : 10.1103/PhysRevLett.105.015301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.015301>.
- [112] Thibaut Jacqmin. Probing correlations in a one-dimensional gas of bosons on an atom chip. Theses, Université Paris Sud - Paris XI, November 2012. URL <https://theses.hal.science/tel-00779447>.
- [113] Maximilian Schemmer. Out-of-equilibrium dynamics in 1D Bose gases. Theses, Université Paris Saclay (COmUE), March 2019. URL <https://pastel.hal.science/tel-02128579>.
- [114] PXI-5406 Specifications. National Instrument, 06 2024. URL <https://www.ni.com/docs/fr-FR/bundle/pxi-5406-specs/page/specs.html>.
- [115] Cicero Word Generator. MIT Center for Ultracold Atoms, 06 2008. URL <https://akeshet.github.io/Cicero-Word-Generator/Cicero%20Technical%20and%20User%20Manual.pdf>.
- [116] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell. Observation of bose-einstein condensation in a dilute atomic vapor. Science, 269(5221) : 198–201, 1995. doi : 10.1126/science.269.5221.198. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.269.5221.198>.
- [117] Aisling Johnson. One-dimensional Bose Gases on an Atom Chip : Correlations in Momentum Space and Theses, Université Paris Saclay (COmUE), December 2016. URL <https://pastel.hal.science/tel-01432392>.
- [118] X. Baillard, A. Gauguet, S. Bize, P. Lemonde, Ph. Laurent, A. Clairon, and P. Rosenbusch. Interference-filter-stabilized external-cavity diode lasers. Optics Communications, 266(2) :609–613, 2006. ISSN 0030-4018. doi : <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2006.05.011>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401806004561>.
- [119] Yiyuan Bess Fang. Equilibrium and Nonequilibrium Behaviours of 1D Bose Gases. Theses, Institut d’Optique Graduate School, October 2014. URL <https://pastel.hal.science/tel-01127046>.
- [120] József Fortágh and Claus Zimmermann. Magnetic microtraps for ultracold atoms. Rev. Mod. Phys., 79 :235–289, Feb 2007. doi : 10.1103/RevModPhys.79.235. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.79.235>.
- [121] P. Krüger, S. Hofferberth, I. E. Mazets, I. Lesanovsky, and J. Schmiedmayer. Weakly interacting bose gas in the one-dimensional limit. Phys. Rev. Lett., 105 :265302, Dec

2010. doi : 10.1103/PhysRevLett.105.265302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.265302>.
- [122] William H. Wing. Electrostatic trapping of neutral atomic particles. Phys. Rev. Lett., 45 :631–634, Aug 1980. doi : 10.1103/PhysRevLett.45.631. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.45.631>.
- [123] D. M. Brink and C. V. Sukumar. Majorana spin-flip transitions in a magnetic trap. Phys. Rev. A, 74 :035401, Sep 2006. doi : 10.1103/PhysRevA.74.035401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.74.035401>.
- [124] S Kraft, A Günther, H Ott, D Wharam, C Zimmermann, and J Fortágh. Anomalous longitudinal magnetic field near the surface of copper conductors. Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics, 35(21) :L469, oct 2002. doi : 10.1088/0953-4075/35/21/102. URL <https://dx.doi.org/10.1088/0953-4075/35/21/102>.
- [125] J. Estève, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect. Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms. Phys. Rev. A, 70 :043629, Oct 2004. doi : 10.1103/PhysRevA.70.043629. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.70.043629>.
- [126] J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Roughness suppression via rapid current modulation on an atom chip. Phys. Rev. Lett., 98 :263201, Jun 2007. doi : 10.1103/PhysRevLett.98.263201. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.98.263201>.
- [127] Jean-Baptiste Trebbia. Etude de gaz quantiques dégénérés quasi-unidimensionnels confinés par une m Theses, Université Paris Sud - Paris XI, October 2007. URL <https://pastel.hal.science/tel-00186656>.
- [128] Yu. Kagan, E. L. Surkov, and G. V. Shlyapnikov. Evolution of a bose-condensed gas under variations of the confining potential. Phys. Rev. A, 54 :R1753–R1756, Sep 1996. doi : 10.1103/PhysRevA.54.R1753. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.54.R1753>.
- [129] PIXIS 1024 Datasheet. Teledyne Princeton Instruments, 05 2020. URL https://www.princetoninstruments.com/wp-content/uploads/2020/05/PIXIS_1024_Datasheet-rebranded.pdf.
- [130] Beer. Bestimmung der absorption des rothen lichts in farbigen flüssigkeiten. Annalen der Physik, 162(5) :78–88, January 1852. doi : 10.1002/andp.18521620505.
- [131] H.J. Metcalf and Peter van der Straten. Laser cooling and trapping. Journal of the Optical Society of America B, 20, 05 2003. doi : 10.1364/JOSAB.20.000887.

- [132] B. Schultz, H. Ming, George Noble, and W. Wijngaarden. Measurement of the $rb\ d2$ transition linewidth at ultralow temperature. *The European Physical Journal D*, 48 : 171–176, 07 2008. doi : 10.1140/epjd/e2008-00109-0.
- [133] Romain Veyron, Vincent Mancois, Jean-Baptiste Gerent, Guillaume Baclet, Philippe Bouyer, and Simon Bernon. Quantitative absorption imaging : The role of incoherent multiple scattering in the saturating regime. *Phys. Rev. Res.*, 4 :033033, Jul 2022. doi : 10.1103/PhysRevResearch.4.033033. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevResearch.4.033033>.
- [134] A. Litvinov, P. Bataille, E. Maréchal, P. Pedri, O. Gorceix, M. Robert-de Saint-Vincent, and B. Laburthe-Tolra. Measuring densities of cold atomic clouds smaller than the resolution limit. *Phys. Rev. A*, 104 :033309, Sep 2021. doi : 10.1103/PhysRevA.104.033309. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.033309>.
- [135] J. Armijo, T. Jacqmin, K. V. Kheruntsyan, and I. Bouchoule. Probing three-body correlations in a quantum gas using the measurement of the third moment of density fluctuations. *Phys. Rev. Lett.*, 105 :230402, Nov 2010. doi : 10.1103/PhysRevLett.105.230402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.105.230402>.
- [136] C. F. Ockeloen, A. F. Tauschinsky, R. J. C. Spreeuw, and S. Whitlock. Detection of small atom numbers through image processing. *Physical Review A*, 82(6), December 2010. ISSN 1094-1622. doi : 10.1103/physreva.82.061606. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.82.061606>.
- [137] J. Armijo, T. Jacqmin, K. Kheruntsyan, and I. Bouchoule. Mapping out the quasicondensate transition through the dimensional crossover from one to three dimensions. *Phys. Rev. A*, 83 :021605, Feb 2011. doi : 10.1103/PhysRevA.83.021605. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.83.021605>.
- [138] Andreas Vogler, Ralf Labouvie, Felix Stubenrauch, Giovanni Barontini, Vera Guarrera, and Herwig Ott. Thermodynamics of strongly correlated one-dimensional bose gases. *Phys. Rev. A*, 88 :031603, Sep 2013. doi : 10.1103/PhysRevA.88.031603. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.88.031603>.
- [139] A. Imambekov, I. E. Mazets, D. S. Petrov, V. Gritsev, S. Manz, S. Hofferberth, T. Schumm, E. Demler, and J. Schmiedmayer. Density ripples in expanding low-dimensional gases as a probe of correlations. *Phys. Rev. A*, 80 :033604, Sep 2009. doi : 10.1103/PhysRevA.80.033604. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.80.033604>.
- [140] S. Dettmer, D. Hellweg, P. Ryytty, J. J. Arlt, W. Ertmer, K. Sengstock, D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, H. Kreutzmann, L. Santos, and M. Lewenstein. Observation of phase fluctuations in elongated bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :160406,

- Oct 2001. doi : 10.1103/PhysRevLett.87.160406. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.87.160406>.
- [141] B. Rauer, P. Grisins, I. E. Mazets, T. Schweigler, W. Rohringer, R. Geiger, T. Langen, and J. Schmiedmayer. Cooling of a one-dimensional bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 116 : 030402, Jan 2016. doi : 10.1103/PhysRevLett.116.030402. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.116.030402>.
- [142] Frederik Møller, Thomas Schweigler, Mohammadamin Tajik, João Sabino, Federica Cataldini, Si-Cong Ji, and Jörg Schmiedmayer. Thermometry of one-dimensional bose gases with neural networks. *Phys. Rev. A*, 104 :043305, Oct 2021. doi : 10.1103/PhysRevA.104.043305. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.104.043305>.
- [143] Max Schemmer and Isabelle Bouchoule. Cooling a bose gas by three-body losses. *Phys. Rev. Lett.*, 121 :200401, Nov 2018. doi : 10.1103/PhysRevLett.121.200401. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.200401>.
- [144] A. Johnson, S. S. Szigeti, M. Schemmer, and I. Bouchoule. Long-lived nonthermal states realized by atom losses in one-dimensional quasicondensates. *Phys. Rev. A*, 96 :013623, Jul 2017. doi : 10.1103/PhysRevA.96.013623. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.96.013623>.
- [145] R. J. Cook. Atomic motion in resonant radiation : An application of ehrenfest’s theorem. *Phys. Rev. A*, 20 :224–228, Jul 1979. doi : 10.1103/PhysRevA.20.224. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.20.224>.
- [146] DLP7000 DLP 0.7 XGA 2x LVDS Type A DMD. Texas Instrument, 8 2012. URL <https://www.ti.com/lit/ds/symlink/dlp7000.pdf>.
- [147] G. Gauthier, I. Lenton, N. McKay Parry, M. Baker, M. J. Davis, H. Rubinsztein-Dunlop, and T. W. Neely. Direct imaging of a digital-micromirror device for configurable microscopic optical potentials. *Optica*, 3(10) :1136–1143, Oct 2016. doi : 10.1364/OPTICA.3.001136. URL <https://opg.optica.org/optica/abstract.cfm?URI=optica-3-10-1136>.
- [148] J. L. Ville, T. Bienaimé, R. Saint-Jalm, L. Corman, M. Aidelsburger, L. Chomaz, K. Kleinlein, D. Perconte, S. Nascimbène, J. Dalibard, and J. Beugnon. Loading and compression of a single two-dimensional bose gas in an optical accordion. *Phys. Rev. A*, 95 :013632, Jan 2017. doi : 10.1103/PhysRevA.95.013632. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.95.013632>.
- [149] Jinyang Liang, Rudolph Kohn, Michael Becker, and Daniel Heinzen. 15 *Applied optics*, 48 :1955–62, 05 2009. doi : 10.1364/AO.48.001955.

- [150] Philipp M. Preiss, Ruichao Ma, M. Eric Tai, Alexander Lukin, Matthew Rispoli, Philip Zupancic, Yoav Lahini, Rajibul Islam, and Markus Greiner. Strongly correlated quantum walks in optical lattices. *Science*, 347(6227) :1229–1233, 2015. doi : 10.1126/science.1260364. URL <https://www.science.org/doi/abs/10.1126/science.1260364>.
- [151] Takeshi Fukuhara, Adrian Kantian, Manuel Endres, Marc Cheneau, Peter Schauß, Sebastian Hild, David Bellem, Ulrich Schollwöck, Thierry Giamarchi, Christian Gross, Immanuel Bloch, and Stefan Kuhr. Quantum dynamics of a single, mobile spin impurity. In *CLEO : 2013*, page QW3C.2. Optica Publishing Group, 2013. doi : 10.1364/CLEO_QELS.2013.QW3C.2. URL https://opg.optica.org/abstract.cfm?URI=CLEO_QELS-2013-QW3C.2.
- [152] SuperSpeed V-Modules. Vialux. URL https://www.ti.com/lit/ds/symlink/dlp7000.pdfhttps://www.vialux.de/Website/PDF/ALP/E_SuperSpeed%20V-Modules.pdf.
- [153] G. Reinaudi, T. Lahaye, Z. Wang, and D. Guéry-Odelin. Strong saturation absorption imaging of dense clouds of ultracold atoms. *Opt. Lett.*, 32(21) :3143–3145, Nov 2007. doi : 10.1364/OL.32.003143. URL <https://opg.optica.org/ol/abstract.cfm?URI=ol-32-21-3143>.
- [154] Andres Restrepo, Edinson Franco, Hector Cadavid, and Carlos Pinedo. A simple geomagnetic field compensation system for uniform magnetic field applications. *Revista Facultad de Ingeniería*, 2017 :65–71, 06 2017. doi : 10.17533/udea.redin.n83a09.
- [155] Chiara Menotti and Sandro Stringari. Collective oscillations of a one-dimensional trapped bose-einstein gas. *Phys. Rev. A*, 66 :043610, Oct 2002. doi : 10.1103/PhysRevA.66.043610. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.66.043610>.
- [156] J. N. Fuchs, X. Leyronas, and R. Combescot. Hydrodynamic modes of a one-dimensional trapped bose gas. *Phys. Rev. A*, 68 :043610, Oct 2003. doi : 10.1103/PhysRevA.68.043610. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.68.043610>.
- [157] Y. Castin and R. Dum. Bose-einstein condensates in time dependent traps. *Phys. Rev. Lett.*, 77 :5315–5319, Dec 1996. doi : 10.1103/PhysRevLett.77.5315. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.5315>.
- [158] Vir B. Bulchandani, Romain Vasseur, Christoph Karrasch, and Joel E. Moore. Bethe-boltzmann hydrodynamics and spin transport in the xxz chain. *Physical Review B*, 97 (4), January 2018. ISSN 2469-9969. doi : 10.1103/physrevb.97.045407. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.97.045407>.
- [159] Andrea De Luca, Jacopo Viti, Denis Bernard, and Benjamin Doyon. Nonequilibrium thermal transport in the quantum ising chain. *Phys. Rev. B*, 88 :134301, Oct 2013. doi : 10.1103/PhysRevB.88.134301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.88.134301>.

-
- [160] Neel Malvania, Yicheng Zhang, Yuan Le, Jerome Dubail, Marcos Rigol, and David S. Weiss. Generalized hydrodynamics in strongly interacting 1d bose gases. *Science*, 373 (6559) :1129–1133, September 2021. ISSN 1095-9203. doi : 10.1126/science.abf0147. URL <http://dx.doi.org/10.1126/science.abf0147>.
- [161] Kuan-Yu Li, Yicheng Zhang, Kangning Yang, Kuan-Yu Lin, Sarang Gopalakrishnan, Marcos Rigol, and Benjamin L. Lev. Rapidity and momentum distributions of one-dimensional dipolar quantum gases. *Phys. Rev. A*, 107 :L061302, Jun 2023. doi : 10.1103/PhysRevA.107.L061302. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.107.L061302>.
- [162] Yuan Le, Yicheng Zhang, Sarang Gopalakrishnan, Marcos Rigol, and David Weiss. Observation of hydrodynamization and local prethermalization in 1d bose gases. *Nature*, 618 :1–6, 05 2023. doi : 10.1038/s41586-023-05979-9.
- [163] V. Dunjko, V. Lorent, and M. Olshanii. Bosons in cigar-shaped traps : Thomas-fermi regime, tonks-girardeau regime, and in between. *Phys. Rev. Lett.*, 86 :5413–5416, Jun 2001. doi : 10.1103/PhysRevLett.86.5413. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.86.5413>.
- [164] Jean-Sébastien Caux and Robert M. Konik. Constructing the generalized gibbs ensemble after a quantum quench. *Phys. Rev. Lett.*, 109 :175301, Oct 2012. doi : 10.1103/PhysRevLett.109.175301. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.175301>.
- [165] Bess Fang, Giuseppe Carleo, Aisling Johnson, and Isabelle Bouchoule. Quench-induced breathing mode of one-dimensional bose gases. *Physical Review Letters*, 113(3), July 2014. ISSN 1079-7114. doi : 10.1103/physrevlett.113.035301. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.035301>.
- [166] Francis A. Bayocboc, Jr. and Karen V. Kheruntsyan. Frequency beating and damping of breathing oscillations of a harmonically trapped one-dimensional quasicondensate. *Comptes Rendus. Physique*, 24(S3) :15–38, May 2024. ISSN 1878-1535. doi : 10.5802/crphys.131. URL <http://dx.doi.org/10.5802/crphys.131>.
- [167] Isabelle Bouchoule, Benjamin Doyon, and Jerome Dubail. The effect of atom losses on the distribution of rapidities in the one-dimensional Bose gas. *SciPost Phys.*, 9 : 044, 2020. doi : 10.21468/SciPostPhys.9.4.044. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.9.4.044>.
- [168] Fabian H L Essler and Maurizio Fagotti. Quench dynamics and relaxation in isolated integrable quantum spin chains. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2016(6) :064002, jun 2016. doi : 10.1088/1742-5468/2016/06/064002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/2016/06/064002>.

- [169] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David Weiss. A quantum newton's cradle. *Nature*, 440 :900–3, 05 2006. doi : 10.1038/nature04693.
- [170] Bernhard Riemann. über die fortpflanzung ebener luftwellen von endlicher schwingungsweite. *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen*, 8 :43–66, 1860. URL <http://eudml.org/doc/135717>.
- [171] Alberto Bressan. *Hyperbolic Conservation Laws : An Illustrated Tutorial*, pages 157–245. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013. ISBN 978-3-642-32160-3. doi : 10.1007/978-3-642-32160-3_2. URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-32160-3_2.
- [172] Jacopo De Nardis and Miłosz Panfil. Edge singularities and quasilong-range order in nonequilibrium steady states. *Physical Review Letters*, 120(21), May 2018. ISSN 1079-7114. doi : 10.1103/physrevlett.120.217206. URL <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.120.217206>.
- [173] Mario Collura and Dragi Karevski. Quantum quench from a thermal tensor state : Boundary effects and generalized gibbs ensemble. *Phys. Rev. B*, 89 :214308, Jun 2014. doi : 10.1103/PhysRevB.89.214308. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.89.214308>.
- [174] Jean-Marie Stéphan. Return probability after a quench from a domain wall initial state in the spin-1/2 xxz chain. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2017(10) :103108, oct 2017. doi : 10.1088/1742-5468/aa8c19. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/aa8c19>.
- [175] Denis Bernard and Benjamin Doyon. Energy flow in non-equilibrium conformal field theory. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 45(36) :362001, August 2012. ISSN 1751-8121. doi : 10.1088/1751-8113/45/36/362001. URL <http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/45/36/362001>.
- [176] Jérôme Dubail, Jean-Marie Stéphan, Jacopo Viti, and Pasquale Calabrese. Conformal field theory for inhomogeneous one-dimensional quantum systems : the example of non-interacting Fermi gases. *SciPost Phys.*, 2 :002, 2017. doi : 10.21468/SciPostPhys.2.1.002. URL <https://scipost.org/10.21468/SciPostPhys.2.1.002>.
- [177] Benjamin Doyon, Andrew Lucas, Koenraad Schalm, and M J Bhaseen. Non-equilibrium steady states in the klein–gordon theory. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 48(9) :095002, feb 2015. doi : 10.1088/1751-8113/48/9/095002. URL <https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/48/9/095002>.
- [178] M. Bhaseen, Benjamin Doyon, Andrew Lucas, and Koenraad Schalm. Energy flow in quantum critical systems far from equilibrium (vol 11, pg 509, 2015). *Nature Physics*, 11 :879–879, 10 2015. doi : 10.1038/NPHYS3489.

[179] Mario Collura, Andrea De Luca, and Jacopo Viti. Analytic solution of the domain-wall nonequilibrium stationary state. *Phys. Rev. B*, 97 :081111, Feb 2018. doi : 10.1103/PhysRevB.97.081111. URL <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.97.081111>.

[180] Benjamin Doyon and Herbert Spohn. Dynamics of hard rods with initial domain wall state. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2017, 03 2017. doi : 10.1088/1742-5468/aa7abf.

[181] Alexandre J. Chorin, Jerrold E. Marsden, and Anthony Leonard. A mathematical introduction to fluid mechanics. 1979. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:119966220>.

Titre : Dynamique hors d'équilibre d'un gaz de Bosons unidimensionnel étudiée via la mesure spatialement résolue de la distribution des quasiparticules

Mots clés : Gaz quantique 1D, Dynamique hors-équilibre, Puce atomique

Résumé : Cette thèse présente des études théoriques et expérimentales sur la caractérisation de gaz de bosons unidimensionnels (1D). Pour produire de tels systèmes, un gaz de Rubidium est placé dans un piège magnétique très confinant transversalement, produit par une puce atomique. Contrairement aux systèmes thermodynamiques atteignant un équilibre caractérisé par quelques variables d'état (pression, température), ce système relaxe dans un état plus complexe décrit par une fonction appelée distribution de rapidités. Cette grandeur est accessible expérimentalement : la distribution de rapidités est la distribution asymptotique des vitesses des atomes après une expansion de ces derniers dans le guide 1D. Cette fonction peut aussi être extraite en étudiant la dynamique de l'expansion unidimensionnelle grâce à l'hydrodynamique généralisée, une théorie émergente suscitant beaucoup d'attentions, spécialement développée pour l'étude de ces systèmes. Une première étude détaillée dans ce manuscrit a été de caractériser les expansions longitudinales unidimensionnelles des gaz de bosons 1D. L'évolution des profils de densité ainsi que des fluctuations de phase ont été analysées et sont en accord avec les prédictions théoriques. Un deuxième projet a été la mise en place d'un outil de sélection spatial permettant à la fois de produire des situations hors équilibre ainsi qu'à sonder localement la distribution de rapidités. Ces mesures ont été réalisées sur des gaz à l'équilibre et hors-équilibre. Les mesures sont notamment cohérentes avec les prédictions de la théorie hydrodynamique généralisée.

Title : Out of equilibrium dynamics of a one-dimensional Bose gas studied using a spatially resolved measurement of the rapidity distribution

Keywords : 1D quantum gas, Out of equilibrium dynamics, Atom Chip

Abstract : This manuscript describes theoretical and experimental studies on characterizing one dimensional (1D) Bose gas. To produce such a system, a Rubidium gas is trapped in a very transversally confining magnetic potential produced by an atom chip. Contrary to thermodynamic systems reaching an equilibrium described by several macroscopic parameters (pressure, temperature), this system relaxes towards a more complex state described by a function called the rapidity distribution. This function can be accessed experimentally : the rapidity distribution corresponds to the asymptotic atomic velocity distribution after a 1D expansion of the atoms. This quantity can also be extracted by studying the 1D expansion with the Generalized Hydrodynamic, an emerging theory with a lot of interest recently, specially conceived for studying these systems. A first study detailed in this manuscript consisted in characterizing 1D expansion of the gas. The evolution of the density profile and the evolution of phase fluctuations were analyzed and found to be compatible with theoretical predictions. A second project involved adding a spatial selection tool to produce non-equilibrium situations and to locally probe the rapidity distribution of the system. These measurements were performed on initial equilibrium and out of equilibrium situations. They are well understood with the predictions of Generalized Hydrodynamics.

