



HAL
open science

Optimisation topologique sous incertitudes géométriques aléatoires et épistémiques

Florian Noal

► **To cite this version:**

Florian Noal. Optimisation topologique sous incertitudes géométriques aléatoires et épistémiques. Sciences de l'ingénieur [physics]. École Nationale Supérieure des Arts et Métiers, 2025. Français. ⟨NNT: 2025ENAME031⟩. ⟨tel-05371059⟩

HAL Id: tel-05371059

<https://pastel.hal.science/tel-05371059v1>

Submitted on 18 Nov 2025

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

ECOLE DOCTORALE SCIENCES ET METIERS DE L'INGENIEUR
Laboratoire de Conception Fabrication Commande (LCFC) — Campus de Metz

THESE

Présentée par : Florian NOAL

Soutenue le : 22 Mai 2025

Pour obtenir le Doctorat délivré par

L'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers

Spécialité : Génie Industriel

Optimisation topologique sous incertitudes géométriques aléatoires et épistémiques

Thèse dirigée par : PR DANTAN Jean-Yves

et co-encadrée par : MCF ETIENNE Alain et MCF GARDAN Julien

| | | | Jury |
|---------------------|--|--|--------------|
| M. Marco MONTEMURRO | Professeur des Universités, I2M, Université de Bordeaux, ENSAM | | Président |
| M. Nabil ANWER | Professeur des Universités, LURPA, ENS Paris-Saclay | | Rapporteur |
| M. Frédéric VIGNAT | Professeur des Universités, G-SCOP, Grenoble INP | | Rapporteur |
| M. Jean-Yves DANTAN | Professeur des Universités, LCFC, ENSAM | | Directeur |
| M. Alain ETIENNE | Maître de conférences, LCFC, ENSAM | | Co-encadrant |
| M. Julien GARDAN | Maître de conférences, ESTP | | Co-encadrant |
| Mme Cecile MATTRAND | Maîtresse de conférences, Institut Pascal, SIGMA Clermont | | Examinatrice |

Parce que nous sommes des ingénieurs, croit-on donc que la beauté ne nous préoccupe pas dans nos constructions et qu'en même temps que nous faisons solide et durable, nous ne nous efforçons pas de faire élégant ?

Gustave Eiffel

Remerciements

Cette longue aventure, qu'eût été la thèse, fut rendue possible par l'implication de nombreuses personnes. Je les remercie avec une grande chaleur et je m'excuse sincèrement pour un éventuel oubli.

Tout d'abord, j'aimerais remercier Azzeddine SOULAÏMANI et Patrick TERRIAULT, professeurs à l'ÉTS pour leur soutien, leur bienveillance lors de mon passage au Québec. La transmission de vos connaissances et de vos savoirs a participé grandement à la réussite de ma thèse, j'ai été heureux de vous avoir rencontrés et de vous avoir vu exercer vos métiers avec passions. En écrivant ces lignes, j'ai aussi des pensées toutes affectueuses pour Sébastien GIRARD, l'Homme le plus bienveillant du Canada, pour vrai! Dont les goûts en musiques sont inégalables. Malheureusement, Bo77as a perdu son sasu :/

Je tiens également à remercier mes encadrants de stage chez PSA, Rémy BOMPOINT et Laurant GENEST, qui, outre le fait de m'avoir apporté une expérience professionnelle à la fois passionnante et plaisante, m'ont guidé et incité à faire une thèse, à raison. Sans vous, je ne serais pas allé aussi loin!

Je veux aussi souligner l'importance du travail fourni par mes encadrants au LCFC, Jean-Yves DANTAN et Alain ETIENNE, qui malgré un emploi du temps fortement contraint, ont toujours su consacrer le temps nécessaire pour m'aiguiller, m'apporter leurs précieuses lumières au travers des nombreuses discussions scientifiquement enrichissantes et le plus important et, surtout, leur confiance.

Les fruits qui vous sont présentés n'auraient pas la même saveur sans les échanges fructueux et fertiles que j'ai eu au cours de ma thèse avec les membres de mon CSI : Marco MONTEMURRO et Pascal LAFOND, je leur adresse des remerciements chaleureux.

Ma thèse est une pièce du puzzle qu'est RobusAM, et je suis reconnaissant des différentes réflexions scientifiques et du travail qui a été accompli avec tous les collaborateurs du projet, Julien GARDAN, Laurent LANGLOIS, Pascal LAFOND, Pierre-Antoine ADRA-GNA et Shyam PULICKAN.

Je désire aussi remercier les rapporteurs, examinateur et examinatrice pour avoir évalué cette thèse, ainsi que de leurs conseils de grande valeur, en particulier ceux de Frédéric VIGNAT.

Jérôme MONELLE et Mireille BOF, pour qui Linux n'a plus de secrets, merci d'avoir installé et configuré la première vraie station de travail au LCFC;) Ma thèse a été rendue possible par l'implication de l'équipe de Cassiopée : Boris PIOTROWSKI, Théophile GROSS et surtout Camille BURTON, qui a beaucoup fait pour réussir à rendre compatible le multiprocessing Python avec Cassiopée.

Sans oublier les amis et amies doctorant et doctorantes pour tous les bons moments passés ensemble. À M. canon, alias Simon FAYS (il vend aussi de très belles Dinkys). Au capitaine de vaisseau le plus célèbre des Antilles : Amir(al). À Abdoul, le meilleur physiocrate de France, à n'en pas douter ! À Manuel, plus connu sous le nom d'*el bailarín*. À Vincent, cuisinier hors pair ! À Ming, Quentin, Wahb, Jelena, Maryam, Renjie, Akhil, Juan et Maria. À ma première bestie Tian et son clan Yan et Anna (qui, je le prédis, sera vétérinaire pour toutou). À Aya qui au fil du temps est devenue une vraie confidente et bestie.

La vie à Metz aurait été bien plus difficile sans vous, un gros bisou à la Comète et à ses adorables maman et papa, Jo et JB, à Patricia et au diabolin de Willy, aux bonnes pâtes Christopher et Sully(van!).

J'ajoute avec un grand plaisir un petit mot pour tous les copains vélivoles du club de Chambley, dont je remercie l'investissement et les moments de partage, cumulus après cumulus (y'a pas de trou bleu à Chambley, c'est une infox). Philippe I, II et III, Gilles I et Gilles II, les Davids, Thierry, 20100 et Nico, un immense merci !

Enfin, je remercie du fond du cœur ma famille et ma maman que je chéris, qui sans leurs soutiens aussi affectifs que financiers ne m'auraient pas permis d'en arriver jusqu'ici ; et à ma petite Yuki, qui ne comprendra absolument pas ces mots, mais qui est une véritable bénédiction.

À présent, il est temps de tourner la page, *to everything there is a season, and a time for every purpose under the heaven, ...*

Résumé

La fabrication additive est un procédé de fabrication innovant permettant de fabriquer des pièces aux formes complexes. Toutefois, à cause des effets des incertitudes, ce procédé de fabrication manque de répétabilité. Les pièces produites affichent *ipso facto* des imperfections géométriques. Le but de cette thèse est d'intégrer les informations venues du procédé dans le processus de conception. C'est pourquoi une approche basée sur l'optimisation topologique a été développée. L'optimisation topologique permet de guider le concepteur en fournissant des topologies aux formes complexes et optimisées vis-à-vis de critères de performance. La formulation est modifiée pour atténuer les effets des incertitudes aléatoires et épistémiques. Pour atténuer les effets des imperfections géométriques avec l'optimisation topologique, plusieurs nouveautés sont développées. Tout d'abord, des taxonomies dédiées à l'optimisation topologique robuste sous des imperfections géométriques, à la caractérisation des incertitudes et des problèmes d'optimisation robuste sont développés. De plus, un cadre méthodologique est développé et est appliqué. Puis, un modèle caractérisant les écarts géométriques en fonction des motifs géométriques est utilisé et est analysé aux cas déterministes et à un modèle de la littérature. Enfin, une méthode permettant d'atténuer les effets des incertitudes épistémiques est spécialement développée pour l'optimisation topologique robuste, permettant au concepteur de choisir entre une conception optimiste ou pessimiste en fonction de l'exactitude des modèles et du contexte du projet. Les travaux se sont révélés efficaces dans l'atténuation des effets des imperfections géométriques lors du processus de conception pour la robustesse.

Mots clés : optimisation topologique, incertitudes aléatoires, incertitudes épistémiques, conception pour la robustesse, fabrication additive.

Abstract

Additive manufacturing is an innovative manufacturing process enabling the production of parts with complex geometries. However, due to the effects of uncertainties, this process lacks repeatability. Consequently, the produced parts inherently exhibit geometric imperfections. The aim of this thesis is to integrate process-related information into the design workflow. To achieve this, a topology optimisation approach was developed. Topology optimisation assists designers by providing complex and performance-optimised geometries. The formulation has been modified to mitigate the effects of both aleatory and epistemic uncertainties. To address the impact of geometric imperfections in topology optimisation, several innovations were introduced. First, dedicated taxonomies for robust topology optimisation under geometric imperfections, uncertainty characterisation, and robust optimisation problems are developed. Moreover, a comprehensive methodological framework was conceived and applied. Subsequently, a model characterising geometric deviations as a function of local geometric features is compared against deterministic cases and a reference model from the literature. Finally, a method specifically designed to reduce the effects of epistemic uncertainties in robust topology optimisation is developed. This method allows the designer to adopt an optimistic or pessimistic approach depending on the accuracy of the models and the project context. The proposed work has proven effective in mitigating the impact of geometric imperfections during the design process for robustness.

Keywords: topology optimisation, aleatory uncertainties, epistemic uncertainties, design for robustness, additive manufacturing.

Table des matières

| | |
|---|--------------|
| Glossaire | xxv |
| Acronymes | xxxix |
| Introduction | 1 |
| Contexte et présentation du projet | 2 |
| Questions et problématique de recherche | 6 |
| Méthodologie de recherche suivie | 7 |
| 1 Analyse de la gestion des incertitudes lors de la phase de conception | 9 |
| 1.1 Le cycle de vie d'un produit fabriqué additivement | 10 |
| 1.1.1 Introduction aux procédés de fabrication additive | 11 |
| 1.1.2 Caractérisation du processus de fabrication | 15 |
| 1.1.3 Incertitudes sur les performances d'un produit fabriqué additive- ment | 19 |
| 1.2 Considération des incertitudes lors de la phase de conception | 23 |
| 1.2.1 Vérification des modèles numériques sous incertitudes | 24 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1.2.2 | Représentation et modélisation mathématique des incertitudes . . . | 33 |
| 1.3 | L'optimisation topologique comme outil d'aide à la conception | 38 |
| 1.3.1 | Ce que peut faire l'optimisation topologique | 39 |
| 1.3.2 | Les méthodes : choix d'un descripteur topologique | 49 |
| 1.4 | L'optimisation topologique sous incertitudes | 58 |
| 1.4.1 | Optimisation robuste et simulation de Monte Carlo | 59 |
| 1.4.2 | Atténuation des effets des incertitudes en optimisation topologique | 62 |
| 1.5 | Bilan : conception robuste pour la fabrication additive | 73 |
| 2 | Optimisation topologique robuste sous imperfections géométriques | 75 |
| 2.1 | Cadre méthodologique | 76 |
| 2.2 | Taxonomie des incertitudes et des problèmes de conception robuste . . . | 78 |
| 2.2.1 | Caractérisation des incertitudes | 78 |
| 2.2.2 | Niveaux de robustesse | 82 |
| 2.3 | Optimisation topologique robuste sous incertitude aléatoire et épistémique | 85 |
| 2.3.1 | Optimisation topologique robuste sous incertitudes aléatoires . . . | 85 |
| 2.3.2 | Optimisation topologique robuste sous incertitudes épistémiques . | 89 |
| 2.4 | Modélisation des imperfections géométriques | 97 |
| 2.4.1 | Altération de l'hyperparamètre η | 97 |
| 2.4.2 | Modélisation naïve des imperfections | 98 |
| 2.4.3 | Modélisation des imperfections des modes statistiques | 100 |
| 2.5 | Modélisation orientée objet pour l'optimisation topologique robuste . . . | 106 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2.6 | Bilan | 115 |
| 3 | Analyse des performances des modèles et des méthodes | 117 |
| 3.1 | Étude des problèmes (2.17) et (2.20) | 118 |
| 3.1.1 | Résultats sans incertitude et comparaison d’algorithmes d’optimisation | 118 |
| 3.1.2 | Analyse du modèle altérant η | 121 |
| 3.1.3 | Analyse du modèle naïf | 128 |
| 3.2 | Vérification du modèle d’imperfections géométriques statistique | 132 |
| 3.2.1 | Résultats du paramétrage nominal | 132 |
| 3.2.2 | Étude de la répétabilité | 135 |
| 3.2.3 | Sensibilités des topologies optimisées au poids de la fonction objectif | 141 |
| 3.2.4 | Sensibilités des topologies optimisées aux paramètres du modèle statistique | 143 |
| 3.3 | Atténuation des effets des incertitudes épistémiques | 147 |
| 3.4 | Bilan | 152 |
| | Conclusions et perspectives | 155 |
| | Bibliographie | 170 |
| | Annexe | 171 |
| A | Diagramme de définition de bloc | 171 |
| B | Diagramme d’activité sans incertitudes | 173 |

| | | |
|---|---|-----|
| C | Diagramme d'activité avec incertitudes | 176 |
| D | Données supplémentaires pour la section 3.1 | 179 |
| E | Données supplémentaires pour la section 3.2 | 182 |

Liste des tableaux

| | | |
|-----|--|-----|
| 1.1 | Taxonomie des procédés en fabrication additive (FA), adaptée de [ISO, 2016, ISO/ASTM, 2021] | 12 |
| 1.2 | Lien entre performance et paramètres d'un procédé de fabrication additive (FA) par extrusion de matière, adapté de [Asadollahiyazdi, 2018] | 18 |
| 1.3 | Diagrammes utilisés pour représenter pour des systèmes incertains, synthétisées de [Choi, 2005]. | 29 |
| 1.4 | Méthodes populaires d'optimisation topologique (OT) et les descripteurs topologique associés. | 49 |
| 1.5 | Approches pour intégrer les imperfections géométriques en optimisation topologique robuste (OTR). | 72 |
| 2.1 | Classement des niveaux de conception robuste pour un modèle numérique, traduit de [Noal <i>et al.</i> , 2024a]. | 84 |
| 2.2 | Classement des niveaux de conception robuste pour le problème (1.30), traduit de [Noal <i>et al.</i> , 2024a]. | 84 |
| 3.1 | Soupleses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a, 3.6a, 3.2c et 3.7a. | 124 |
| 3.2 | Soupleses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a et 3.12a. | 130 |
| 3.3 | Soupleses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.16 et 3.17. | 134 |

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.4 | Souplesse [Nmm] des solutions montrées à la figure 3.25. | 145 |
| 3.5 | Soupleses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a et 3.16a et 3.30, traduit de [Noal <i>et al.</i> , 2024b]. | 151 |
| E.1 | Souplesse [Nmm] obtenue pour toutes les valeurs de k et avec les CO. . . | 183 |

Table des figures

| | | |
|------|--|----|
| I | Organisation du projet RobustAM. | 2 |
| II | Diagramme de Venn représentant les champs d'action de la thèse et leurs sections correspondantes. | 8 |
| 1.1 | Schématisation du procédé de fabrication additive (FA) par extrusion de matière, issue de [ISO, 2016]. | 13 |
| 1.2 | Schématisation du procédé de fabrication additive (FA) par dépôt de matière sous énergie concentrée, issue de [ISO, 2016]. | 14 |
| 1.3 | Diagramme <i>Ishikawa</i> des causes possibles menant à un problème de qualité, adapté de [Al-Meslemi, 2021]. | 15 |
| 1.4 | Conception avec intégration des connaissances métiers autour du produit, issue de [Skander <i>et al.</i> , 2008]. | 16 |
| 1.5 | Modèle aux trois maillons, issue de [Olson, 1997]. | 17 |
| 1.6 | Diagramme <i>Ishikawa</i> synthétisant le cycle de vie du produit sous incertitudes d'un procédé de fabrication additive (FA). | 22 |
| 1.7 | Réalisations du modèle numérique avec des incertitudes. | 26 |
| 1.8 | Détermination d'une conception robuste de type I. | 26 |
| 1.9 | Détermination d'une conception robuste de type II. | 27 |
| 1.10 | Détermination d'une conception robuste de type II et III. | 27 |

| | | |
|------|---|----|
| 1.11 | Taxonomie des incertitudes, traduite de [Thunnissen, 2005]. | 30 |
| 1.12 | Déroulement des activités de quantification de l'incertitude (QI) pour les processus de fabrication additive (FA), issue de [Mahadevan <i>et al.</i> , 2022]. | 32 |
| 1.13 | Deux approches pour représenter l'incertitude épistémique. | 35 |
| 1.14 | Diagramme <i>Isikawa</i> synthétisant le cycle de vie du produit et la caractérisation des incertitudes pour un procédé de fabrication additive (FA). | 37 |
| 1.15 | Configuration du problème d'élasticité linéaire. | 41 |
| 1.16 | Configuration d'un problème d'optimisation topologique (OT) en élasticité linéaire. | 46 |
| 1.17 | Flux en optimisation topologique (OT) et résumé de la section 1.3.1. . . | 47 |
| 1.18 | Nature de la frontière $\partial\Omega$ | 50 |
| 1.19 | Trois méthodes de cartographie du descripteur topologique, issue de [van Dijk <i>et al.</i> , 2013]. | 51 |
| 1.20 | Les filtres utilisés dans SIMP et leurs effets sur la topologie. | 53 |
| 1.21 | Taxonomie des méthodes pour propager ou atténuer les imperfections géométriques en optimisation topologique (OT). | 67 |
| 1.22 | Altération des pseudo-densités finales en passant par l'hyperparamètre η . | 67 |
| 2.1 | Synthèse et méthode de traitement des incertitudes, adapté de [Noal <i>et al.</i> , 2024a]. | 76 |
| 2.2 | Illustration du manque de connaissances et du manque d'informations. . | 80 |
| 2.3 | Diagramme de Venn représentant les différents types incertitudes, adapté de [Noal <i>et al.</i> , 2024a]. | 82 |
| 2.4 | Procédure de mise à jour pour une itération d'une fonction entachée d'incertitudes aléatoires. | 87 |

| | | |
|------|---|-----|
| 2.5 | Illustration des effets des incertitudes épistémiques sur une fonction. . . . | 91 |
| 2.6 | Fonctions de répartition empirique de quatre lois normales dont l'écart-type est borné entre 1 et 4. | 92 |
| 2.7 | Fonctions de répartition empirique du système incertain f de lois normales dont l'écart-type est borné entre 1 et 4. | 92 |
| 2.8 | Sélection des conceptions optimiste et pessimiste par notre approche. . . | 94 |
| 2.9 | Principe de la modélisation naïve des imperfections géométriques. | 99 |
| 2.10 | Exemple de motifs géométriques locaux et leurs valeurs d'asymétrie et d'écart-type associés. | 101 |
| 2.11 | Exemple de génération d'un type d'imperfection dont la taille est plus importante que l'élément. | 105 |
| 2.12 | Vu d'ensemble du diagramme de définition de bloc de la solution implémenté. | 107 |
| 2.13 | Détail des classes servant à décrire la topologie. | 109 |
| 2.14 | Détail des classes servant à décrire la topologie et leurs affectations par de l'incertitude. | 111 |
| 2.15 | Détail des classes servant à optimiser les descripteurs topologiques initiaux avec ou sans incertitude épistémique. | 112 |
| 2.16 | Détail des classes servant à calculer les gradients des contraintes ou de la fonction objectif robuste ou déterministe. | 113 |
| 2.17 | Aperçu du diagramme d'activité illustrant la première étape pour propager des incertitudes. | 114 |
| 3.1 | Configuration du cas d'étude en 2D, de l'espace de conception et des conditions aux limites. | 119 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.2 | Topologies optimisées obtenues sans incertitudes avec les CO (3.2c) et la MAM (3.2a). | 120 |
| 3.3 | Illustration d'un motif dit de charnière à un nœud indésirable en optimisation topologique (OT). | 121 |
| 3.4 | Courbes représentant \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération. | 123 |
| 3.5 | Topologies optimisées robustes obtenues par le modèle altérant η | 123 |
| 3.6 | Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$). | 124 |
| 3.7 | Topologie optimisée robuste obtenue avec la MAM et le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$). | 124 |
| 3.8 | Analyse des champs de pseudo-densités de la topologie 3.2a. | 126 |
| 3.9 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.6a. | 127 |
| 3.10 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.7a. | 127 |
| 3.11 | Topologie optimisée robuste obtenue avec le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$) et sans espace de non-conception. | 127 |
| 3.12 | Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle naïf. | 130 |
| 3.13 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour des indicateurs de la robustesse en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.12a. | 130 |
| 3.14 | Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle naïf et avec ou sans l'espace de non-conception. | 131 |
| 3.15 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle naïf. | 131 |
| 3.16 | Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et les paramètres nominaux du modèle statistique. | 134 |

| | | |
|------|---|-----|
| 3.17 | Topologie optimisée robuste obtenue avec la MAM et les paramètres nominaux du modèle statistique. | 134 |
| 3.18 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\hat{\text{mâx}}(\Upsilon)$ et $\hat{\text{mîn}}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération à <i>iso</i> graine aléatoire et obtenues avec les CO. . . . | 137 |
| 3.19 | Boîte à moustaches des valeurs de c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{\text{mâx}}(\Upsilon)$ et $\hat{\text{mîn}}$ avec 5 répétitions pour chaque taille d'échantillon avec la MAM à gauche et les CO à droite. | 138 |
| 3.20 | Moyenne (gauche) et entropie (droite) des conceptions de référence avec la MAM. | 139 |
| 3.21 | Moyenne (gauche) et entropie (droite) des conceptions de référence avec les CO. | 140 |
| 3.22 | Graphiques à bulles représentant les valeurs de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ en fonction de $\hat{m}_1(\Upsilon)$ avec l'aire des bulles représentant la valeur de la constante k . . . | 142 |
| 3.23 | Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO, les paramètres nominaux du modèle statistique et $k = 0.05$ | 143 |
| 3.24 | Écart moyen total produit par le modèle statistique, $s_{\Delta_{\text{stat}}}$, en fonction de la valeur de k | 144 |
| 3.25 | Topologies optimisées robustes obtenues avec les CO. | 145 |
| 3.26 | Juxtaposition de topologies optimisées robustes obtenues avec les CO. . . | 145 |
| 3.27 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25a à l'itération 249 (avant l'augmentation de β). | 148 |
| 3.28 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25b à l'itération 249 (avant l'augmentation de β). | 148 |
| 3.29 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25c à l'itération 249 (avant l'augmentation de β). | 148 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.30 | Topologies optimisées obtenues en atténuant les effets des incertitudes épistémiques, adaptée de [Noal <i>et al.</i> , 2024b]. | 151 |
| 3.31 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour l'estimation de l'écart-type en fonction de l'itération pour les topologies de la figure 3.30. | 152 |
| 3.32 | Valeurs de souplesse [Nmm] de \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération pour une topologie obtenue avec ou sans le <i>multiprocessing</i> | 154 |
| I | Méthode de quantification de l'incertitude (QI) envisagée pour l'optimisation topologique et la fabrication additive. | 157 |
| D.1 | Topologies optimisées obtenues avec les CO. | 180 |
| D.2 | Topologie optimisée obtenue avec la MAM. | 180 |
| D.3 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.5a. | 181 |
| E.1 | Topologies optimisées obtenues avec les CO. | 183 |
| E.2 | Topologie optimisée obtenue avec la MAM. | 183 |
| E.3 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{m}ax(\Upsilon)$ et $\hat{m}in(\Upsilon)$ en fonction de l'itération et obtenues avec les CO. | 184 |
| E.4 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{m}ax(\Upsilon)$ et $\hat{m}in(\Upsilon)$ en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.23a. | 185 |
| E.5 | Valeurs de souplesse [Nmm] pour des indicateurs de la robustesse en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.25c. | 186 |
| E.6 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique à l'itération 249 (avant l'augmentation de β) pour $k_{STD} = 0$ et $k_{Sk} = 0.4$ | 187 |
| E.7 | Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique à l'itération 249 (avant l'augmentation de β) pour $k_{STD} = 0$ et $k_{Sk} = 0.4$ | 187 |

Glossaire

Ce glossaire contient des termes techniques et en donne des définitions ; ils proviennent soit de la littérature, soit de l’auteur de ce manuscrit. Les définitions provenant de la littérature sont souvent traduites de l’anglais vers le français, mais restent fidèles au sens donné dans la langue d’origine. Si nécessaire, les termes en anglais sont donnés en *italique* et entre parenthèse. Les traductions sont transcrites, le plus souvent, depuis la banque de données Termium [Gouvernement du Canada, 2024].

écart Différences géométriques mesurées ou quantifiées entre une pièce fabriquée ou modélisée et la pièce de référence (*deviation*) 20, 121, 155

étendue Différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur d’un échantillon, elle est aussi appelée gamme (*range*) 126

algorithme d’optimisation Algorithme modifiant les variables de décision afin de minimiser une fonction coût (ou fonction objectif) tout en respectant un jeu de contraintes (*optimiser*) 39, 78, 119, 155

ambiguïté Termes et expressions imprécis utilisés pendant une communication (au sens d’échange verbal) [Thunnissen, 2005] (*ambiguity*) 30

basée sur les densités Approche visant à cartographier une topologie par un champ de pseudo-densité, peu importe le descripteur topologique utilisé (*density-based*) 51, 106,

boîte de probabilité Représentation mathématique des incertitudes aléatoires et épistémiques. Les valeurs de probabilité d’une variable aléatoire prennent la forme d’un intervalle sur l’univers (*probability box*) 35

conception de référence Conception obtenue à la fin du processus d’optimisation topologique (*reference design*) 88, 121, 156

- conception pour X** Méthodes regroupant des approches permettant de considérer (au maximum) les informations du cycle de vie [Skander *et al.*, 2008] d'un produit ou d'un métier lors de la phase de conception [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 15–16], avec X désignant une phase du cycle de vie ou un métier (*design for X*) 4,
- condition aux limites** C'est une condition qui impose des valeurs que doivent satisfaire les solutions des équations aux dérivées ordinaires ou partielles sur une frontière donnée (*boundary condition*) 6, 40, 118
- condition initiale** Ces conditions décrivent l'état initial d'un phénomène ou système physique (*initial condition*) 6, 72, 80
- connaissance** La capacité des modèles mathématiques à reproduire avec exactitude le comportement de toutes activités, tous systèmes ou phénomènes, sur une période donnée (*knowledge*) 79
- erreurs de programmation** Erreurs ou bévues commises par un programmeur lors du développement d'un modèle mathématique [Thunnissen, 2005] (*programming errors*) 30
- erreurs d'approximation** Déficiences des modèles à traiter des phénomènes ou processus relativement bien compris [Thunnissen, 2005] (*approximation errors*) 30
- erreurs humaines** Erreurs et fautes commises par un ou plusieurs individus lors de la conception [Thunnissen, 2005] (*human errors*) 30
- erreurs numériques** Erreurs qui surviennent en raison d'une arithmétique de précision finie dans un modèle numérique [Thunnissen, 2005] (*numerical errors*) 30, 88, 135
- espace de conception** Aire ou volume choisit par le concepteur où de la matière peut être ajoutée et retirée librement. Par la suite, l'espace de conception sera désigné par Ω_{ec} , la figure 1.16 illustre les différents espaces pour l'optimisation topologique (*design space*) 39, 118
- exactitude** Étroitesse de l'accord entre le résultat d'une application et de l'ensemble vrai (*accuracy*) 11, 79, 135
- fabrication additive** Procédé d'assemblage de matériaux pour fabriquer des pièces à partir de données de modèle 3D, en général couche après couche, à l'inverse des méthodologies de fabrication soustractive et de fabrication mise en forme [ISO/ASTM, 2021] (*additive manufacturing*) 3, 10,
- fiabilité** La fiabilité est la capacité d'un appareil, d'un dispositif, d'un produit à accomplir sa fonction dans les conditions requises d'utilisation et pendant une **durée** déterminée [Lemaire, 2014] (*reliability*) 5, 24, 96

fidélité Différence entre la dispersion d'une application et la dispersion de l'ensemble vrai (*precision*) 48

fonction de densité de probabilité C'est une fonction qui décrit la répartition d'une variable aléatoire continue sur l'univers. Si elle est multipliée par un intervalle infinitésimal, elle renvoie la probabilité que la variable aléatoire tombe dans cet intervalle (*probability density function*) 34

hyperparamètre Est un paramètre qui n'est ni une composition d'une variable de décision ni un paramètre physique, mais qui influence le résultat de l'optimisation. Les valeurs de ces paramètres peuvent être difficiles d'accès par un utilisateur et ils ne sont pas nécessairement une entrée du processus d'optimisation topologique (*hyperparameter*) 39, 97, 126, 156

hétéroscédasticité Une séquence de variables aléatoires est hétéroscédastique si au moins deux variables aléatoires ont une valeur de variance différente (*heteroscedasticity*) 20

imperfection Différences géométriques observées entre une pièce fabriquée ou modélisée et la pièce de référence (*imperfection*) 20, 117, 155

incertitude La différence entre une valeur anticipée ou prédite et la valeur vraie [Thunnissen, 2005] (*uncertainty*) 3, 9, 75, 118, 155

incertitude aléatoire Variations inhérentes associées au système physique ou à l'environnement étudié [Thunnissen, 2005] (*aleatory uncertainty*) 30, 75, 117, 156

incertitude comportementale Incertitude dans la manière dont les individus ou les organisations agissent [Thunnissen, 2005] (*behavioral uncertainty*) 30

incertitude d'exigence Paramètres d'intérêt et déterminés par la partie prenante, indépendamment de l'ingénieur ou du concepteur [Thunnissen, 2005] (*requirement uncertainty*) 30

incertitude de conception Choix entre plusieurs possibilités sur lesquelles un ou plusieurs individus exercent un contrôle direct, mais n'ont pas encore pris de décision. Un exemple est le choix qu'a un ingénieur de sélectionner un composant donné parmi un ensemble de composants possibles [Thunnissen, 2005] (*design uncertainty*) 30

incertitude de modèles Précision d'un modèle mathématique pour décrire un système physique réel d'intérêt [Thunnissen, 2005] (*model uncertainty*) 17, 24, 30, 81, 135

- incertitude d'interaction** Incertitude découlant de l'interaction imprévue de nombreux événements et disciplines, dont chacun pourrait, en principe, être ou aurait dû être prévisible [Thunnissen, 2005] (*interaction uncertainty*) 30
- incertitude phénoménologique** Une incertitude qu'on ne peut pas imaginer. Elle est également référée comme étant des « inconnues inconnues » [Thunnissen, 2005] (*phenomenological uncertainty*) 30, 81, 154
- incertitude volitive** Incertitude quant à ce qu'un sujet décidera de lui-même [Thunnissen, 2005] (*volitional uncertainty*) 30
- incertitude épistémique** Tout manque de connaissances ou d'informations dans une phase ou une activité du processus de modélisation [Thunnissen, 2005] (*epistemic uncertainty*) 30, 75, 117, 155
- information** Toutes sources de données directes et significatives émanant des activités, des systèmes ou des phénomènes considérés, sur une période donnée (*intelligence*) 79, 158
- justesse** Étroitesse d'accord d'un indicateur de tendance centrale entre le résultat d'une application et de l'ensemble vrai (*trueness*) 48
- optimisation topologique** Méthodes ou implémentations numériques permettant de répondre à un problème de répartition de matière au sein d'un espace de conception, avec une ou des physiques, un ou plusieurs objectifs à optimiser et des contraintes (*topology optimisation*) [Allaire *et al.*, 2019] 5, 9, 155
- optimisation topologique robuste** Méthodes d'optimisation topologique où il est désiré d'atténuer les effets des incertitudes sur la performance de la topologie. Ces incertitudes émanent : des conditions aux limites, des conditions initiales, des lois de comportement et de la topologie. Généralement, la fonction objectif du problème est modifiée en une somme pondérée de la moyenne et de l'écart-type de ladite performance ; les contraintes du problème d'optimisation peuvent être changées sous la forme d'une probabilité de défaillance (*robust topology optimisation*) 9,
- paramètre physique** Scalaire quantifiant une propriété d'un phénomène, d'un corps ou d'une substance (*physical parameter*) 6, 31, 83, 156
- pseudo-densité** Variable caractérisant le niveau de remplissage d'un élément du maillage (*pseudo-density*) 52, 98, 125

pseudo-densité finale Pseudo-densité utilisée pour le calcul de la physique de la topologie si une cartographie basée sur les densités est employée (*final pseudo-density*) 54, 88, 128

quantification de l'incertitude La quantification de l'incertitude est le processus consistant à élaborer et à appliquer des modèles mathématiques pour fournir une estimation de l'incertitude dans les données empiriques ou les résultats de simulation [ASME, 2022] (*uncertainty quantification*) 20,

robustesse En contexte d'ingénierie, une conception robuste est une conception qui est déterminée les paramètres nominaux d'un produit ou d'un système tels que ses performances soient suffisamment insensibles à tout événement incertain qu'ils pourront rencontrer tout au long de leur cycle de vie [Lemaire, 2014] (*robustness*) 5, 24

répétabilité Degré de correspondance entre deux mesurages ou plus de la même propriété en utilisant le même équipement et dans le même environnement [ISO/ASTM, 2021] (*repeatability*) 4, 103

souplesse Indicateur de la rigidité d'une structure. Généralement, plus la souplesse est faible et plus la rigidité est importante [Allaire *et al.*, 2019] (*compliance*) 45, 120, 155

validation La validation est le processus qui détermine dans quelle mesure un modèle reflète les données empiriques dans le contexte de son utilisation [ASME, 2022] (*validation*) 20, 158

vérification La vérification est le processus qui établit l'exactitude mathématique du modèle numérique par rapport à une référence [ASME, 2022] (*verification*) 32, 158

Acronymes

Les pages qui suivent donnent les acronymes les plus utilisés dans ce manuscrit. Si nécessaire, les termes en anglais sont donnés en *italique*. Les traductions sont transcrites, le plus souvent, depuis la banque de données Termium [Gouvernement du Canada, 2024].

Agence Nationale de Recherche (ANR) *French National Research Agency* 2

B-splines rationnelles non uniformes (NURBS) *Non-uniform rational basis spline* 49

basée sur les densités (BD) *density-based* 51, 83, 155, *voir* basée sur les densités

boîte de probabilité (p-boîte) *probability box* 35, 81, *voir* boîte de probabilité

composant alterable et mobile (MMC) *moving morphable component* 51, 108

conception pour la fabrication (DfM) *design for manufacturing* 4

conception pour la fiabilité (DfRe) *design for reliability* 5, 16

conception pour la robustesse (DfRo) *design for robustness* 5, 14, 16, 155

conception pour X (DfX) *design for X* 4, 9, 75, 156, *voir* conception pour X

conception robuste pour la fabrication additive (RobustAM) *robust design for additive manufacturing* 2

critères d’optimalité (CO) *optimality criteria* 87, 119, *voir* algorithme d’optimisation

diagramme de flux de données (DFD) *data flow diagram* 25

diagramme de paramètres (p-diagram) *parameter diagram* 25

Ecole Nationale Supérieure d’Arts et Métiers (ENSAM) 2

fabrication additive (FA) *additive manufacturing* 3, 9, 78, 120, 155, *voir* fabrication additive

fonction de densité de probabilité (FDP) *probability density function* 34, 90, *voir* fonction de densité de probabilité

- Grande Ecole d'Ingénieurs de la Construction (ESTP)** 2
- ICAM definition for function modelling (IDEF)** *ICAM definition for function modelling* 25
- Laboratoire de Conception Fabrication Commande (LCFC)** 2
- Laboratoire de Systèmes Mécaniques et Ingénierie Simultanée (LASMIS)** *Laboratory of Mechanical and Material Engineering* 2
- langage de modélisation de systèmes (SysML)** *systems modelling language* 28, 77, 156
- langage de modélisation unifié (UML)** *unified modelling language* 28
- matériau isotrope avec pénalisation (SIMP)** *solid isotropic material with penalisation* 49
- modèle graphique de processus pour la conception robuste (GRDPM)** *graphical robust design process model* 28
- méthode des asymptotes mobiles (MAM)** *method of moving asymptotes* 87, 118, voir algorithme d'optimisation
- méthode des surfaces de niveau (LSM)** *level set method* 50
- méthode des éléments finis (MEF)** *finite element method* 43, 86
- optimisation pour une conception robuste (RDO)** *robust design optimisation* 6, 59, 78, 149, 155
- optimisation pour une conception s'appuyant sur la fiabilité (RBDO)** *reliability-based design optimisation* 6, 59, 91, 155
- optimisation structurelle évolutive bidirectionnelle (BESO)** *bi-directional evolutionary structural optimisation* 49
- optimisation topologique (OT)** *topology optimisation* 5, 9, 83, 120, 155, voir optimisation topologique
- optimisation topologique robuste (OTR)** *robust topology optimisation* 6, 58, 75, 129, 156, voir optimisation topologique robuste
- programmation orientée objet (POO)** *object-oriented programming* 28, 106
- pseudo-densité (PD)** *pseudo-density* 52, 95, 120, voir pseudo-densité
- quantification de l'incertitude (QI)** *uncertainty quantification* 21, 158, voir quantification de l'incertitude

SIMP et NURBS pour l'optimisation topologique (SANTO) *SIMP and NURBS for topology optimisation* 50

simulation de Monte-Carlo (SMC) *Monte Carlo simulation* 61, 77, 121, 157

Université de Technologie de Troyes (UTT) 2

variable de décision (VD) *design variable* 5, 25, 78, 126

vide alterable et mobile (MMV) *moving morphable void* 49

Introduction

Contexte et présentation du projet

Partenaires, collaborateurs et commanditaire

Le présent manuscrit est un élément de réponse au projet de l'Agence Nationale de Recherche (ANR) : conception robuste pour la fabrication additive (RobustAM). Ce projet est développé en partenariat avec deux campus universitaires et deux laboratoires : l'Université de Technologie de Troyes (UTT) avec le Laboratoire de Systèmes Mécaniques et Ingénierie Simultanée (LASMIS); et le Laboratoire de Conception Fabrication Commande (LCFC) rattaché à l'Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers (ENSAM), dont l'auteur en est membre. La Grande Ecole d'Ingénieurs de la Construction (ESTP) est présente par l'intermédiaire de l'équipe encadrante. Sa réalisation est possible grâce à la participation l'ANR, qui prend en charge le financement sous le nom ANR-21-CE10-0005.

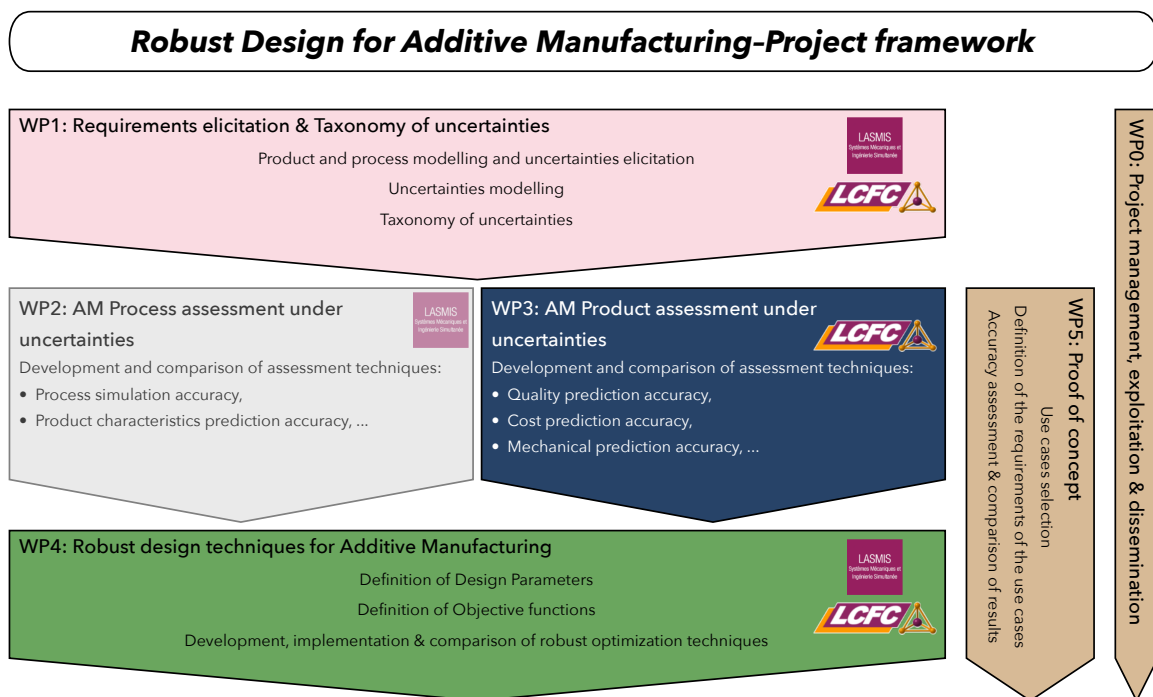


Figure I – Organisation du projet RobustAM.

La répartition des activités de recherche est divisée en cinq volets, avec notamment deux parties distinctes (voir la figure I) :

- L'une est focalisée sur la **conception**, elle dépend de l'axe « conception » du LCFC et l'actuel manuscrit est un livrable.
- L'autre sur le **procédé de fabrication additive (FA)** qui relève du LASMIS et du LCFC avec l'axe « fabrication ».

Spécifiquement, par rapport à la partie dédiée à la conception, ces lots de travail sont définis de la manière suivante :

- Le lot de travail WP1 a pour but de définir et d'éclaircir le concept d'**incertitudes** dans le contexte de la fabrication additive et de l'optimisation pour une conception robuste. Pour ce faire, une taxonomie des incertitudes doit être mise au point grâce à une revue approfondie de la littérature. Elle doit permettre de préciser comment les incertitudes sont modélisées et quantifiées et de considérer les incertitudes hétérogènes, c'est-à-dire de natures différentes. Enfin, ce lot doit aboutir au choix de cas d'études qui permettent de vérifier la méthodologie et les implémentations numériques.
- Les résultats attendus du WP3 sont de caractériser les performances du produit sous incertitudes. Cela doit passer par une évaluation des différents indicateurs de performance d'une pièce fabriquée additivement. Ces indicateurs de performances doivent être intégrés à la conception et leurs incertitudes évaluées à l'aide d'indicateurs dédiés.
- Le lot de travail WP4 vise à produire une solution robuste et optimisée. En ce sens, le problème d'optimisation doit être résolu en fonction des différentes sources et formes d'incertitudes.
- Le lot de travail WP5 entreprend de démontrer la faisabilité des méthodes proposées pour un cas d'application complexe. Le travail fourni est tenu d'utiliser un maximum de bibliothèque de type code ouvert et de proposer une solution logicielle qui soit partageable sur des plateformes pour code ouvert, comme : *pip*, *github*, *et cætera*.

Prologue

L'avènement de l'industrie du futur, dites 4.0, permet de mettre en avant des moyens de fabrication innovants comme les procédés de fabrication additive (FA) contemporains. La fabrication additive s'insère parfaitement dans certains besoins exprimés par

les entreprises. Ainsi, elle permet de fabriquer rapidement pièces et produits ; les concepteurs peuvent vérifier, tester la performance de leur conception et la valider à des stades précoces du processus de conception ; de fabriquer des pièces pour de petites séries ; ou bien d'effectuer des réparations [Gardan, 2015, Astolfi *et al.*, 2016]. Les évolutions techniques ont permis d'augmenter la qualité et les performances des pièces réalisées. Malgré cela, la répétabilité des pièces fabriquées n'est pas toujours garantie [Dantan *et al.*, 2017]. Ce manque de répétabilité peut causer des problèmes lors de l'assemblage de produits, ou résulter en des comportements mécaniques non désirés, p. ex. une rupture mécanique. Outre le manque de répétabilité, les procédés de FA ne sont pas exempts de contraintes de fabrication. Par exemple, pour limiter l'usage de matière ou limiter le temps de post-traitement, il est nécessaire de restreindre le nombre de support pour la fabrication [Brackett *et al.*, 2011]. Ces obstacles doivent être maîtrisés si les industriels veulent assurer leur compétitivité.

C'est pourquoi il est indispensable de mettre en œuvre diverses stratégies pour atténuer les comportements non souhaités et plus globalement d'intégrer des informations issues du procédé de fabrication à des stades précoces du processus de conception [Skander *et al.*, 2008]. L'une de ces stratégies est regroupée sous les acronymes de la conception pour X (DfX). Lors de la conception d'un produit ou d'une pièce, la conception pour X regroupe des méthodes génériques permettant de considérer les effets des choix techniques et les différentes phases du cycle de vie du produit ou des métiers impactés [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 15–16]. Dans le cas de la conception pour la fabrication (DfM), où le concepteur tient compte des contraintes des procédés de fabrication, il est possible de générer une série de règles métier [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 49–52] ou bien d'aborder la problématique grâce à des méthodes numériques d'optimisation [Zhu *et al.*, 2021]. Le travail présenté se retrouve dans ces stratégies, cependant seules les conséquences dues au manque de répétabilité des procédés de FA sont traitées. Ces approches regroupent de multiples pratiques et ce mémoire de thèse est limité aux techniques se basant sur l'optimisation.

D'après [Pahl *et al.*, 1996], la conception se déroule en quatre grandes phases : la **clarification des besoins**, où les tâches sont planifiées et élucidées, le marché analysé et les exigences fonctionnelles et contraintes déterminées ; la **conception abstraite**, où les technologies (matériaux, moyen de production) sont sélectionnées et des alternatives fonctionnelles du système sont comparées ; la **conception préliminaire**, où le produit prend forme et il est dimensionné, les défauts sont atténués, les matériaux et procé-

dés de fabrication sélectionnés ; enfin, la **conception détaillée**, où le produit est défini complètement, les dessins de détail et les instructions pour la fabrication sont terminés. Aujourd’hui la conception de pièces ou de produits peut être guidée, lors des phases de conception abstraite (*conceptual design*) et préliminaires (*embodiment design*), par des méthodes d’optimisations performantes. Trois grandes familles sont considérées [Bendsøe et Sigmund, 2003, Allaire *et al.*, 2019] :

- L’optimisation paramétrique (*sizing/parametric optimisation*), où la pièce est caractérisée par un faible nombre de paramètres (appelés variables de décision (VDs)) et optimisée en fonction de critères sur la performance de la pièce. Cette dernière s’opère à la fin du processus de conception préliminaire.
- L’optimisation de forme (*shape optimisation*). Ici, la forme de la pièce (ses frontières) peut évoluer en fonction d’objectifs et de contraintes. Cependant la topologie de la pièce ne peut évoluer, p. ex. en deux dimensions des trous ne peuvent pas se former à l’intérieur de la pièce. Comme pour l’optimisation paramétrique, l’optimisation de forme intervient à la fin du processus de conception préliminaire.
- L’optimisation topologique (OT). Contrairement à l’optimisation de forme, l’optimisation topologique permet d’optimiser la pièce avec sa topologie. Cela offre plus de latitude quant au rendu final. En d’autres mots, l’OT permet à partir d’un modèle physique de remplir optimalement un espace avec de la matière en fonction d’objectifs et de contraintes. Ces méthodes sont utilisées le plus souvent lors de la phase de conception préliminaire, car les pièces nécessitent souvent un post-traitement, bien qu’il soit possible de les employer directement pour des problèmes industriels [Reddy K. *et al.*, 2016].

Ainsi, ce travail se focalise sur les méthodes d’OT, car elles offrent non seulement plus de liberté sur le choix de la topologie finale, mais aussi elles se situent en amont du processus de conception détaillé (voir lors de la phase de conception abstraite), ce qui permet de mettre en exergue les qualités des approches de DfX. De plus, les méthodes d’OT sont bien adaptées au procédé de FA en raison des formes complexes qui peuvent être fabriquées [Reddy K. *et al.*, 2016].

Afin de prendre en compte les imperfections dues au procédé de fabrication, la première solution consiste à considérer le manque de fiabilité du produit (ou de la pièce) au travers de son cycle de vie, celle-ci est nommée conception pour la fiabilité (DfRe) ; la seconde est de considérer le manque de robustesse, dénommée conception pour la robustesse (DfRo). La fiabilité et la robustesse répondent à des définitions et objectifs différents

[Lemaire, 2014]. La première consiste à s'assurer des performances du produit durant l'entièreté de son cycle de vie malgré ses variations de performances ; la caractérisation de la fiabilité est donc fortement liée à une notion de durée. La seconde consiste à garantir les performances optimales d'un produit ou d'une pièce malgré ses variations de performances. Dans tous les cas, il est nécessaire de pouvoir recueillir les informations pour caractériser ces variations (manifestation du manque de répétabilité des pièces fabriquées). Ces variations sont dues aux incertitudes émanant du produit, de la pièce et de leur environnement. Leurs intégrations au sein de problèmes d'optimisation se font avec des méthodes numériques dédiées [Schuëller et Jensen, 2008]. La distinction entre robustesse et fiabilité se retrouve aussi dans les méthodes d'optimisation. Pour la fiabilité, il est question d'optimisation pour une conception s'appuyant sur la fiabilité (RBDO) ; la fonction objectif est décrite sous forme de probabilité de défaillance. Enfin, l'étude de la robustesse fait intervenir les méthodes d'optimisation pour une conception robuste (RDO) ; dans ce cas la fonction objectif doit refléter les variations induites par les incertitudes. Cela se fait souvent par le calcul de sa moyenne et de son écart-type. Ces méthodes peuvent aussi être utilisées dans le cadre de l'OT [Maute, 2014], il est alors sujet d'optimisation topologique robuste (OTR) ou d'OT fiable. Cependant, le choix des incertitudes et leurs modélisations restent des questions largement ouvertes en OT robuste ou fiable [Maute, 2014]. Pour tous les systèmes physiques, les incertitudes émanent soit de la géométrie, des paramètres physiques, des conditions aux limites et des conditions initiales [Roy et Oberkampf, 2011]. Parmi les sources d'incertitudes, seules les incertitudes s'appliquant à la géométrie sont prises en compte, bien qu'un travail de collecte et d'analyse des différentes causes d'incertitudes est effectué lors de la revue de la littérature.

Problématique de recherche

Au regard de la section précédente, de nombreuses questions restent ouvertes. En l'espèce, la problématique est formulée par cette question :

Comment, lors de la **conception**, intégrer les **incertitudes** issues d'un procédé de **fabrication additive** et atténuer leurs effets sur la performance de la topologie d'une pièce, afin que celle-ci soit **robuste** ?

Cette problématique est décomposée en plusieurs problématiques associées :

1. Quelles sont les différentes sources d'incertitudes rencontrées en fabrication additive ? Où interviennent-elles dans le cycle de vie du produit ? Comment sont-elles modélisées ?
2. Comment les incertitudes sont-elles modélisées, représentées et leurs effets atténués pour un processus basé sur des modèles ?
3. L'optimisation topologique est un processus numérique complexe. Quels sont les effets des incertitudes sur le résultat généré ? Comment sont-elles intégrées dans le processus d'optimisation topologique ?
4. L'optimisation topologique regroupe de nombreuses approches, en vue d'intégrer les incertitude identifiés par le concours des questions précédentes, les interrogations suivantes prévalent. Comment ces approches fonctionnent-elles ? Est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des boîtes noires ? Comment être le plus extensif si possible ?
5. Les données expérimentales, la modélisation des imperfections géométriques et l'OT ne manipulent pas forcément la même description numérique du produit. Les différentes descriptions sont-elles compatibles ?

Méthodologie de recherche

Afin de répondre à la problématique, le travail a été décomposé en plusieurs étapes. Une revue et une analyse de la littérature sont consacrées aux trois grands axes qui constituent le projet :

- La compréhension des procédés de FA par extrusion de matière, notamment la mise en relation entre le produit et le procédé, ainsi que les différentes sources d'incertitudes.
- L'étude de la gestion des incertitudes lors de la phase de conception.
- L'exploration des diverses méthodes d'OT et leurs utilisations sous incertitudes.

À la suite de cette revue bibliographique, plusieurs hypothèses ont été formulées et des contraintes ont été identifiées, ces dernières sont exposées et précisées dans le manuscrit. La revue de la littérature nous a permis d'élaborer une stratégie quant à l'intégration des incertitudes affectant la topologie de la pièce. Entretemps, des expérimentations ont été faites avec **MatLab** [The MathWorks Inc., 2023] et les codes d'OT partagé par le DTU [Technical University of Denmark, 2024], afin de commencer à manipuler les différents

outils et méthodes qui servent de fondation au travail mené en milieu de thèse. Par la suite, des solutions techniques ont été proposées, afin de : vérifier la validité de certaines hypothèses et de répondre aux questions posées dans la section précédente. Celles-ci sont présentées aux chapitres 2 et 3.

Le chapitre 2 présente la méthodologie et les solutions techniques aux problèmes soulevés par la revue et l'analyse de la littérature. Enfin, le chapitre 3 aborde la vérification des modèles proposés. Cette dernière est découpée en plusieurs phases, dont : l'analyse de la répétabilité de la méthode de simulation utilisée ; l'examen du modèle proposé ; et l'étude de différents niveaux de robustesse. Malheureusement, l'entièreté de cette méthodologie n'a pas pu être menée à son terme, en effet la validation n'a pu être réalisée, toutefois elle est détaillée en conclusion de cette thèse.

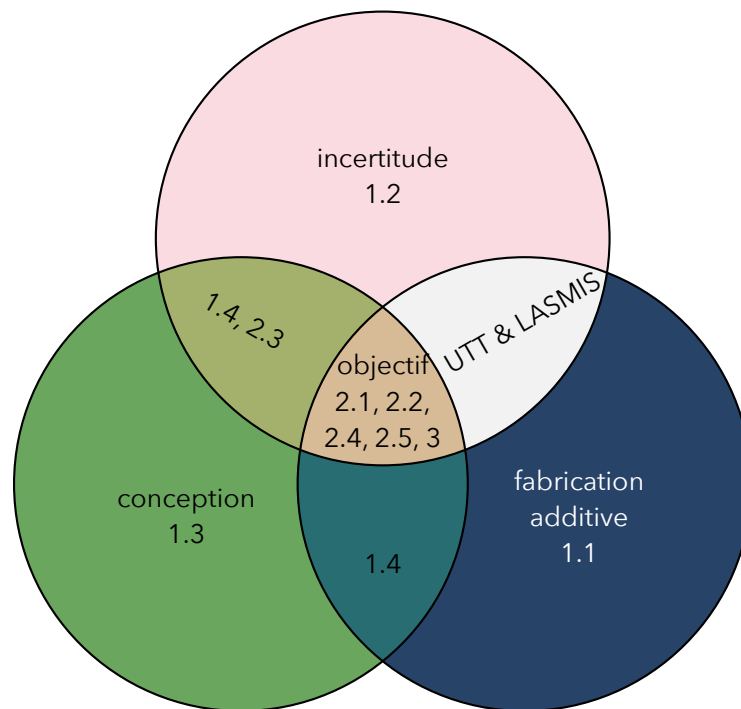


Figure II – Diagramme de Venn représentant les champs d'action de la thèse et leurs sections correspondantes.

Afin d'aider le lecteur à se retrouver entre les thématiques abordées, la figure II référence les chapitres et sections en fonction de leurs thèmes principaux, qui sont :

- Le procédé de **fabrication additive**,
- Le processus de **conception**,
- La gestion des **incertitudes**.

Chapitre 1

Analyse de la gestion des incertitudes lors de la phase de conception

L'objectif de ce chapitre est de faire le lien entre les trois thèmes de cette thèse. La première section introduit les procédés de fabrication additive (FA) au travers d'une courte revue de la littérature et permet d'établir les attentes vis-à-vis de l'optimisation topologique (OT). La section 1.2 dessine les interactions entre le processus de conception et la gestion des incertitudes ; elle ne s'arrête pas à la conception robuste de pièces et aborde le sujet de manière plus large. La section 1.3 permet d'entrevoir comment l'OT et la FA peuvent se fédérer dans le cadre des activités de conception pour X (DfX) ; elle introduit les concepts de l'optimisation topologique et de l'optimisation topologique robuste. Finalement, une conclusion est dressée à la dernière section, afin de synthétiser les éléments clés sur lesquels est construite notre contribution.

Sommaire du chapitre

| | | |
|-----|---|----|
| 1.1 | Le cycle de vie d'un produit fabriqué additivement | 10 |
| 1.2 | Considération des incertitudes lors de la phase de conception | 23 |
| 1.3 | L'optimisation topologique comme outil d'aide à la conception | 38 |
| 1.4 | L'optimisation topologique sous incertitudes | 58 |
| 1.5 | Bilan : conception robuste pour la fabrication additive | 73 |

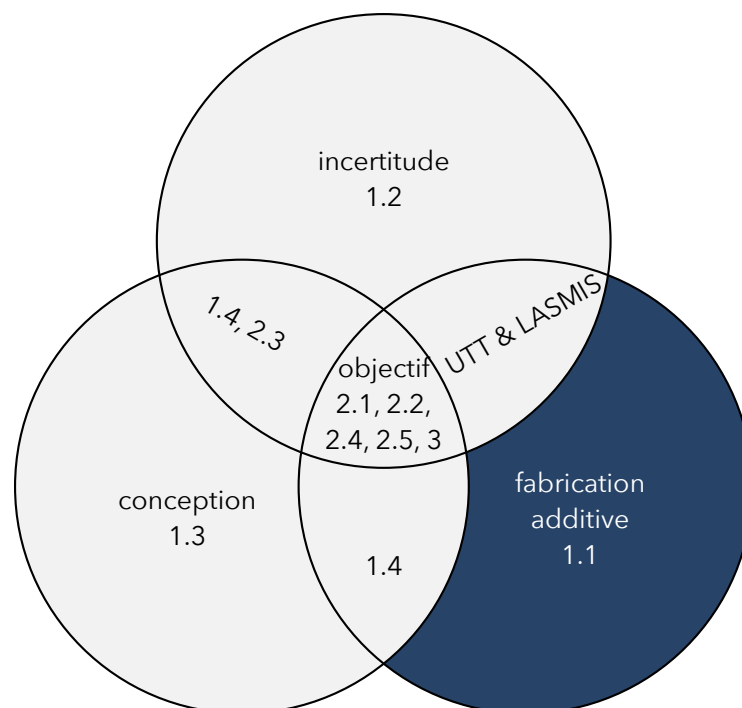
1.1 Le cycle de vie d'un produit fabriqué additivement

Cette section a pour finalité de répondre à la sous-problématique suivante :

Quelles sont les différentes **sources** d'incertitudes rencontrées en fabrication additive ? Où interviennent-elles dans le **le cycle de vie** du produit ?

Comment sont-elles **modélisés** ?

Pour cela, après une brève introduction de la FA, cette dernière est resituée dans le processus de conception succinctement décrit dans l'introduction. Les différents indicateurs de performances d'un produit fabriqué additivement sont abordés et les différentes sources d'incertitudes émanant du procédé et affectant le produit sont recueillies. Pour ce faire, la sous-section 1.1.1 introduit la FA et les procédés de FA utilisés dans le projet RobustAM. La sous-section 1.1.2 présente les critères de performances qui doivent être considérés lors de la phase de conception et s'intéresse aux liens entre le processus de fabrication et la conception de pièces. En dernier, les sources d'incertitudes influençant le produit fabriqué additivement sont indentifiées dans la sous-section 1.1.3.



1.1.1 Introduction aux procédés de fabrication additive

La fabrication additive est un procédé de fabrication dont les applications se sont multipliées ces dernières années [Gardan, 2015, Astolfi *et al.*, 2016, Rajaguru *et al.*, 2020]. Ce procédé n'est pas nouveau et la fabrication du papyrus usait déjà de ce principe. Son histoire moderne commence avec le prototypage rapide, créé en France dans les années 80 [André *et al.*, 1984]; l'objectif était de produire des spécimens fonctionnels et de guider le concepteur dans ses choix. Aujourd'hui, la FA est normée et est définie comme étant un [ISO/ASTM, 2021] :

Procédé d'assemblage de matériaux pour fabriquer des pièces à partir de **données de modèle 3D**, en général **couche après couche**, à l'inverse des méthodologies de fabrication **soustractive** et de fabrication **mise en forme**.

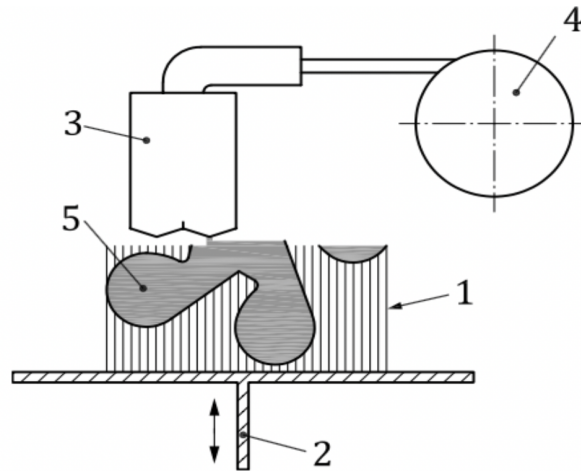
Comparée aux procédés de fabrication classiques, la FA permet une plus grande flexibilité quant au choix de la géométrie; elle est adaptée à la production de petites séries et de pièces détachées. Ces avantages permettent de limiter le nombre de composants dans un produit et de réduire la quantité de matériaux nécessaire à la fabrication d'une pièce [Gardan, 2015, Astolfi *et al.*, 2016]. Cependant, ces procédés de fabrication ne sont pas exempts de contraintes, il est parfois nécessaire, qu'importe l'orientation de la structure, d'ajouter des supports à la pièce pour maîtriser les géométries suspendues [Reddy K. *et al.*, 2016, Zhu *et al.*, 2021] ou pour favoriser la dissipation thermique lors de la fabrication [Allaire et Jakabčín, 2018, Zhou *et al.*, 2019]. L'orientation de la structure sur la plateforme de fabrication ne limite pas uniquement le nombre de supports, mais modifie aussi la rugosité ou les propriétés mécaniques dans certaines directions [Brackett *et al.*, 2011]. La nécessité d'avoir le moins de géométries internes fermées [Brackett *et al.*, 2011, Zhu *et al.*, 2021], p. ex. pour évacuer les excédents de matières résiduels, dangereux dans un contexte médical [Chmielewska *et al.*, 2022]. La résolution de la machine [Zhu *et al.*, 2021] peut restreindre la taille des motifs imprimables. Enfin, les dimensions de la plateforme de fabrication, limitant la taille du produit, hors assemblage [Astolfi *et al.*, 2016]. Un autre obstacle de la FA réside dans la certification des pièces obtenues, en raison du manque d'exactitudes des modèles des processus physiques intervenant lors de la fabrication [Seifi *et al.*, 2016].

Les procédés de FA sont regroupés selon leur manière de manipuler et de fusionner la matière pour en assembler des couches [Gardan, 2015]. Ces derniers sont référencés dans le tableau 1.1. Dans le cadre du projet RobustAM, la classe de procédé utilisé est par

Table 1.1 – Taxonomie des procédés en fabrication additive (FA), adaptée de [ISO, 2016, ISO/ASTM, 2021]

| Nom du procédé | Matière | Définition |
|---|---------------------------------|---|
| Dépôt de matière sous énergie concentrée | Métallique | Procédé de fabrication additive dans lequel l'énergie thermique focalisée sert à faire fondre les matériaux au fur et à mesure qu'ils se déposent. |
| Fusion sur lit de poudre | Métallique, polymère, céramique | Procédé de fabrication additive dans lequel l'énergie thermique fait fondre de manière sélective certaines zones d'un lit de poudre. |
| Stratification de couches | Métallique, polymère | Procédé de fabrication additive dans lequel des couches de matériau sont liées pour former un objet. |
| Extrusion de matière | Polymère | Procédé de fabrication additive dans lequel le matériau est distribué de manière sélective par une buse ou à travers un orifice. |
| Projection de matière | Polymère | Procédé de fabrication additive dans lequel des gouttelettes du matériau fabriqué sont déposées de manière sélective. |
| Projection de liant | Polymère | Procédé de fabrication additive dans lequel un agent de liaison liquide est déposé de manière sélective pour lier des matériaux en poudre. |
| Photopolymérisation en cuve | Polymère | Procédé de fabrication additive dans lequel un photopolymère liquide plongé dans une cuve est durci de manière sélective par polymérisation activée par la lumière. |

extrusion de matière et par dépôt de matière sous énergie concentrée.



Légende

| | | | |
|---|--|---|----------------------------------|
| 1 | structure support | 4 | alimentation en matière première |
| 2 | plateforme de fabrication et élévateur | 5 | produit |
| 3 | buse chauffée | | |

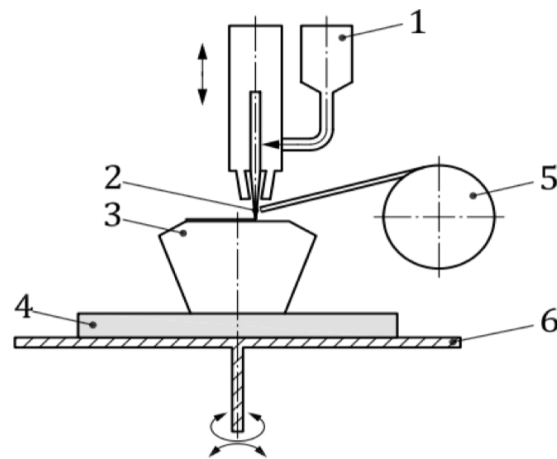
Figure 1.1 – Schématisation du procédé de fabrication additive (FA) par extrusion de matière, issue de [ISO, 2016].

Pour le premier, c'est un « procédé de fabrication additive dans lequel le matériau est distribué de manière sélective par une buse ou à travers un orifice » [ISO, 2016], la figure 1.1 illustre le fonctionnement du procédé par extrusion de matière. Dans ce procédé, le filament de matière est généralement chauffé pour permettre son adhérence à la structure déjà existante ou à la plateforme de fabrication. La fusion se fait par l'intermédiaire d'une buse (chauffée). L'imprimante peut avoir une ou plusieurs buses pour permettre la fabrication de pièces constituées de plusieurs matériaux. La multiplicité de matériaux est utilisée pour faciliter le retrait des supports (avec des matériaux solubles), ou pour obtenir des propriétés mécaniques particulières [Gardan, 2015]. En particulier, les technologies qui sont supportées dans le projet sont ADAM (*Atomic Diffusion Additive Manufacturing*) et CCF (*Continuous Carbon Fibre*). Ces deux procédés se distinguent par l'usage d'une matière première différente respectivement une poudre métallique liée avec du plastique et des fibres de carbones liées à une matrice en polymère.

Le second, est un « procédé de fabrication additive dans lequel l'énergie thermique focalisée sert à faire fondre les matériaux au fur et à mesure qu'ils se déposent » [ISO, 2016]. Ici, l'adhésion entre la matière première et la structure est réalisée grâce à un faisceau d'énergie concentrée. La distinction entre les deux procédés est parfois omise

et le dépôt de matière sous énergie concentrée peut être vu comme une catégorie du procédé par extrusion de matière [Gardan, 2015]. Dans le cas du projet RobustAM, le procédé employé est le WAAM (*Wire Arc Additive Manufacturing*). Ce procédé est une extension des procédés de soudages automatisés. Un fil métallique est déposé à l'aide d'un arc électrique servant d'énergie thermique.

Dans les trois cas, la matière première est présentée sous la forme d'un fil, laissant entrevoir la possibilité d'identifier des modes d'imperfections communs [Dantan *et al.*, 2017]. Malgré tout, le mécanisme d'adhésion et les étapes de parachèvements de ces processus sont dissimilaires.



Légende

| | | | |
|---|---|---|--------------------------|
| 1 | trémie de poutre | 4 | substrat |
| 2 | faisceau d'énergie concentrée, par exemple: laser, faisceau d'électrons ou plasma d'arc | 5 | bobine de fil (filament) |
| 3 | produit | 6 | table de fabrication |

Figure 1.2 – Schématisation du procédé de fabrication additive (FA) par dépôt de matière sous énergie concentrée, issue de [ISO, 2016].

Cette sous-section introduit les procédés de FA. Malgré quelques similarités, qui peuvent donner lieu à des imperfections apparentés, ces procédés sont disparates et cela doit être considéré lors de la constitution de méthodes pour la conception robuste. La sous-section ci-après, met en relation les procédés de FA avec le processus de conception. Généralement, des objectifs sur la performance de la pièce sont requis en amont. À cet effet, les critères de performances sont caractérisés et les différentes étapes du processus de fabrication sont restituées par rapport à la tâche de conception.

1.1.2 Caractérisation du processus de fabrication

Lors du processus de fabrication d'une pièce, la phase de conception est celle qui est le plus en amont. Ce faisant, c'est l'étape qui apporte le plus d'opportunités quant aux gains sur les performances du produit [Al-Meslemi, 2021, pp. 35–39]. La figure 1.3 présente un diagramme *Ishikawa* des causes possibles amenant à des problèmes de qualité sur les pièces fabriquées. Ce diagramme sert de fil conducteur à cette section et illustre les apports bibliographiques. Ce diagramme se lit aussi dans un sens chronologique ; les premières étapes du cycle de vie commencent à gauche avec la conception de la pièce, où la qualité peut être influencée par le concept et les analyses numériques de la performance ; après quoi, le modèle de la pièce est transmis au fabricant, qui procède et valide le pavage de la pièce, choisit les paramètres du procédé en fonction de la technologie choisie ; ensuite, l'opérateur choisit la machine, il modifie éventuellement certains paramètres et il effectue un ensemble d'étapes de parachèvements, dans le cas du procédé WAAM, usiner la pièce sur les surfaces fonctionnelles est souvent requis ; enfin, les pièces doivent être inspectées et évaluées pour être certifiées et entrer en service.

Traditionnellement, la fabrication d'une pièce suit ce schéma linéaire. Cependant, en vue d'améliorer la qualité des pièces, dont la fiabilité et la robustesse, il est possible d'intégrer les connaissances métiers de chacun de ces acteurs. Cela permet d'avoir une conception basée sur un processus qui devient rétroactif et sur les besoins des métiers entourant la pièce [Skander *et al.*, 2008]. Cette phase rétroactive a cours, tout au long du processus de conception de façon **synchrone** ou **asynchrone** et est considérée dans l'approche de validation proposée en conclusion. Ce processus itératif est connu sous le

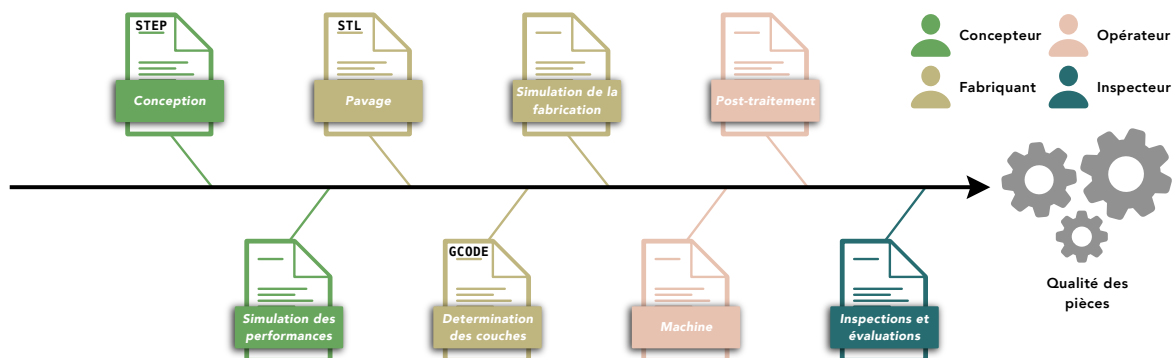


Figure 1.3 – Diagramme *Ishikawa* des causes possibles menant à un problème de qualité, adapté de [Al-Meslemi, 2021].

nom de la conception pour X (DfX). La figure 1.4 illustre cette méthodologie où chaque métier est représenté par la lettre X.

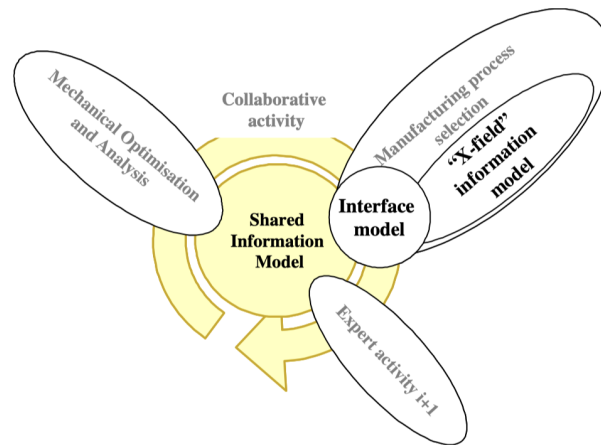


Figure 1.4 – Conception avec intégration des connaissances métiers autour du produit, issue de [Skander *et al.*, 2008].

Lors de la conception, l'intégration des connaissances métiers se fait de trois manières [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 47–65] :

- En s'assurant de la fonctionnalité de la pièce, c.-à-d. idéalement optimiser la pièce en fonction de l'analyse fonctionnelle qui en découle : c'est l'approche **fonctionnelle**. L'optimisation paramétrique, l'optimisation de forme et l'optimisation topologique sont toutes des approches fonctionnelles.
- En vérifiant, quantifiant et optimisant la pièce en fonction des **exigences métiers**.
- Ou par une combinaison de ces deux méthodes, c'est l'approche **hybride**. Cette démarche permet de vérifier le caractère fonctionnel de la pièce et la conformité aux exigences métiers. C'est cette approche qui respecte le mieux à l'esprit de la DfX.

Dans le cadre de la conception pour la fiabilité (DfRe) ou de la conception pour la robustesse (DfRo), l'approche basée sur les exigences métiers a été déjà confrontée par de nombreuses études [Venturi et Taylor, 2023]. Dans le contexte de l'approche fonctionnelle, l'OT a été largement utilisée et est donc une base éprouvée pour une approche hybride [Asadollahiyazdi, 2018, Prathyusha et Raghu Babu, 2022].

La caractérisation de la qualité d'une pièce fabriquée additivement se fait à différentes échelles, mais pour le concepteur, il est important de différencier les performances de la pièce et les moyens pour obtenir ces performances, c.-à-d. celles du procédé. Cette

différence de paradigme s'applique à la science des matériaux, mais est aussi généralisable à toute discipline d'ingénierie [Olson, 1997]. La figure 1.5 dépeint les deux cheminements pour la conception (de matériaux) : le **raisonnement déductif**, où à partir des causes, c.-à-d. du procédé, les effets sur les performances sont déduits ; et le **raisonnement inductif**, où des cibles sur les performances sont requises et des moyens sur le procédé sont mis en œuvre. Les démarches de DfX s'inscrivent dans un raisonnement inductif, avec l'intégration du caractère fonctionnel de la pièce, fonction de sa géométrie.

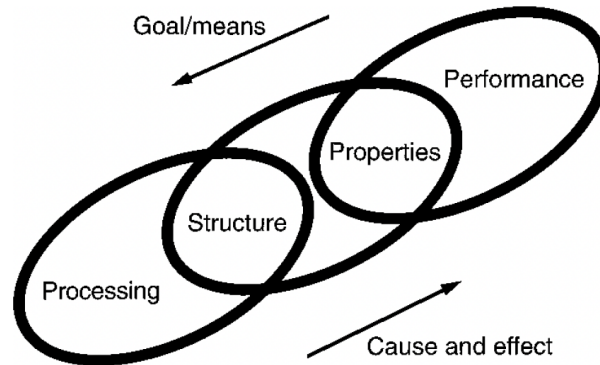


Figure 1.5 – Modèle aux trois maillons, issue de [Olson, 1997].

Pour les procédés de FA, [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 80–87 & pp. 110–128] a identifié les critères de performances à considérer permettant de caractériser une pièce et le tableau 1.2 référence ces critères. Ce tableau met en relation les paramètres du procédé par dépôt de fil fondu et les critères de performances. Certains paramètres influencent de multiples critères de performance, comme l'orientation de la construction, ces paramètres doivent être observés avec attention lors de la caractérisation des incertitudes. Ces critères ne sont pas tous orthogonaux entre eux ! Le comportement mécanique est influencé par la rugosité (l'état de surface). De même, le temps d'impression, le coût et la masse totale sont tous trois liés. Autre exemple, la masse totale d'une pièce n'est pas uniquement liée à sa géométrie, mais aussi à la quantité de supports et aux éventuelles structures en radeaux. Bien qu'il est possible de relier un paramètre procédé aux critères de performance, le plus souvent avec des éprouvettes ou des artéfacts, les observations qui sont faites ne sont pas toujours transposables à la pièce fabriquée [Venturi et Taylor, 2023], ce qui constitue une source d'incertitude (dit de modèle) supplémentaire.

La géométrie de la pièce a une influence sur l'ensemble de ces critères [Asadollahiyazdi, 2018, pp. 80–87]. Malgré des performances identiques du matériau sélectionné, les simulations menées par [Primo *et al.*, 2017] montrent des non-linéarités sur les performances

Table 1.2 – Lien entre performance et paramètres d'un procédé de fabrication additive (FA) par extrusion de matière, adapté de [Asadollahiyazdi, 2018]

| Critères de performance | Paramètres procédé influents pour le procédé dépôt de fil fondu | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|-------------------------|---|---------------------------|----------|--------------------|-------|--------------|---------------------|-----------|-------------------|--------------------------|------------------------------------|-------------------|-----------------|------------------|------------------|----------------------------------|--------------------------|-------------------------------|---------------------------|--------------------|---------------------|--------------------------|---|
| | Comportement mécanique | Conformité dimensionnelle | Rugosité | Temps d'impression | Coûts | Masse totale | Épaisseur de couche | Dimension | Nombre de couches | Densité motif & porosité | Largeur, orientation & choix motif | Coque inf. & sup. | Structure coque | Structure radeau | Densité supports | Caractéristiques tête extrudeuse | Orientation construction | Vitesse de la tête extrudeuse | Débit d'extrusion matière | Structure supports | Température plateau | Température d'impression | |
| | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |

de différentes géométries pour un même apport fonctionnel. Le poids et le temps de fabrication ne sont pas corrélés entre eux. Ainsi, non seulement les paramètres du procédé affectent les performances de la pièce, comme le montre le tableau 1.2, mais sa géométrie aussi.

Restreindre les variations de ces performances est au cœur de la DfRo ou de la DfRe. Ce manque de répétabilité est un frein à la certification des pièces fabriquées additivement et cela restreint une utilisation plus massive dans l'industrie [Venturi et Taylor, 2023]. Néanmoins, le raisonnement inductif nécessite une connaissance des phénomènes compris entre le procédé et la performance résultante de la pièce, au mieux, ou d'une éprouvette au pire. La connaissance et la compréhension des phénomènes sont loin d'être établies [Venturi et Taylor, 2023], nécessitant la prise en compte de ce manque de connaissance, c'est-à-dire des incertitudes. Ces carences sont discutées à la sous-section suivante.

1.1.3 Incertitudes sur les performances d'un produit fabriqué additivement

Les incertitudes émanent de l'ensemble du cycle de vie. Ces sources peuvent être classées en trois groupes [Venturi et Taylor, 2023] :

- Les variations **anté-fabrication**, qui concernent les activités du fabricant, de l'opérateur et du concepteur (en référence à la figure 1.3). Ces variations émanent de la qualité de la matière première, du choix de la machine (pour une même technologie, voire un même fabricant), des logiciels utilisés pour le pavage (tranchage) et la détermination des couches et de la conception de la géométrie.
- Les variations **trans-fabrication**. Du point de vue du fabricant, elles proviennent des paramètres machines contrôlables, comme ceux désignés dans le tableau 1.2 par paramètres procédé. Elles sont la conséquence des phénomènes physiques mal maîtrisés et difficiles à modéliser. En fin de fabrication, une étape de *post-processing* est souvent requise. Elle n'est pas négligeable dans le traitement des imperfections sur la géométrie, notamment pour des surfaces fonctionnelles, et doit être considérée pour la DfRo. Par exemple, l'usinage des surfaces fonctionnelles pour la technologie WAAM.
- Les variations **post-fabrication**. Celles-ci concernent l'inspection et l'évaluation de la pièce, que les techniques d'inspection soient destructives ou non. Cette étape

est essentielle pour la **validation** de la conception et de la quantification de l'incertitude qui s'ensuit (voir la fin de la section 1.2 pour plus de détails).

Toutes ces sources mènent à des incertitudes sur les critères de performances. La revue menée par [Lewandowski et Seifi, 2016] détaille et quantifie les incertitudes impactant les critères de performances mécaniques, parmi ces critères : les propriétés statiques ou quasi statiques, p. ex. le comportement en compression ; les propriétés dynamiques, comme la fatigue ; et les performances contre les effets environnementaux, entre autres la fatigue à la corrosion. Dans cette étude, les performances mécaniques se montrent dépendantes du sens de fabrication. Une forte anisotropie pour la **limite élastique** est observée, mais est moindre pour le **module de Young**. Les expérimentations montrent aussi de l'hétéroscédasticité des critères de performance en fonction des paramètres procédés.

Les imperfections géométriques sont une autre source d'incertitudes sur la performance finale de la pièce. [Zhu *et al.*, 2017] ont procédé à une étude de la littérature sur la modélisation et l'atténuation de cette source d'incertitudes. Deux catégories sont considérées :

- La **compensation des écarts géométriques**. Cette compensation se fait en modifiant la géométrie obtenue après la phase de conception, à savoir après les deux premières étapes de la figure 1.3. Ces modifications ont pour objectif de compenser les écarts géométriques dues aux variations *anté* et *trans* fabrication par le biais de l'ajustement de la représentation numérique de la pièce, qui est généralement contenue dans un fichier STEP.
- La **modification des fichiers sources**. Cette correction s'effectue soit lors du pavage de la géométrie ou en modifiant l'épaisseur de couche (cela peut aussi de réduire le temps de fabrication), ce sont les deux premières étapes de la figure 1.3. Les corrections du pavage se font au travers du fichier STL, qui est une représentation pavée du fichier STEP. Le but est de réduire les erreurs de corde (*chordal error*) ou de hauteur de fronce (*cusp height*) de la géométrie par l'utilisation d'algorithmes de raffinement ou d'optimisation performants.

L'inconvénient de ces approches est qu'elles ne considèrent qu'une partie du cycle de vie. En effet, la conception est une entrée du traitement des écarts géométriques. Cependant, cela ne correspond pas à l'esprit de la DfX, puisque l'atténuation des imperfections géométriques n'est pas incluse dans le processus de conception, mais *a posteriori*.

Pour intégrer les imperfections géométriques à l'optimisation topologique ou à une autre approche de conception, celles-ci doivent être caractérisées, modélisées et mesurées. L'une

des approches courantes, dans le monde du tolérancement, est l'approche peau/squelette (*skin model shapes*) [Zhu *et al.*, 2016]. L'objectif est de modéliser les parties fonctionnelles d'une pièce à l'aide d'une peau où les écarts géométriques sont modélisés [Zhu *et al.*, 2016]. En cohérence avec la DfX, cette méthode a été étendue par l'ajout de connaissances métiers, et notamment avec des modes d'imperfections géométriques adaptés au procédé de fabrication [Dantan *et al.*, 2017], en lieu et place de modes mathématiques souvent abscons. Dans la mesure où la modélisation de la peau se fait avec des surfaces paramétrées par des points, cette modélisation est difficilement conciliable avec les qualités de la FA qui offrent une grande liberté dans la forme des pièces. C'est pourquoi Moroni et ses collègues se sont intéressés aux approches **volumétriques** [Moroni *et al.*, 2017, Moroni et Petrò, 2018]. Les imperfections ne sont plus représentés par un nuage de point, mais par un ensemble de voxels (pixels 3D) de matière, autrement dit des volumes élémentaires réguliers de matière. Les avantages sont multiples : exhaustivité des géométries traitées ; compatibilité avec les outils de métrologie pour la collecte de données (tomographie), donc limite les erreurs de conversion entre les différentes descriptions géométriques de la pièce ; flexibilité d'intégration avec les méthodes d'OT. De plus, les approches volumétriques ont déjà été employées dans des méthodes de validation multiéchelle sous incertitudes en FA [Gorgularslan *et al.*, 2019], ouvrant la voie à une certification de produits ou pièces plus complexes et fabriquées additivement.

Au début de cette section, les questions suivantes sont posées :

Quelles sont les différentes **sources** d'incertitudes rencontrées en fabrication additive ? Où interviennent-elles dans le **le cycle de vie** du produit ?
Comment sont-elles **modélisés** ?

Premièrement, il apparaît que l'utilisation du paradigme de la DfX *via* les approches hybrides est la plus attractive : fonctionnalités et performances d'une conception doivent être considérées et intégrées à la solution proposée. En second lieu, les sources d'incertitudes d'intérêts sont dépendantes de l'acteur considéré. Pour le concepteur, outre l'aspect fonctionnel, ce sont aussi les performances sur la conception qui importent, notamment toute propriété mécanique, le temps de fabrication, le coût, *et cætera*. Cependant, les incertitudes proviennent de l'ensemble du cycle de vie et affectent les performances du produit, ceci est illustré par la figure 1.6. Dans cette figure, les sources d'incertitudes affectant la performance et exposées préalablement sont représentées par des éclairs. La rétroactivité de la DfX et l'ensemble de ces incertitudes doivent être intégrés dans la méthode de quantification de l'incertitude (QI) et dans le processus d'OT.

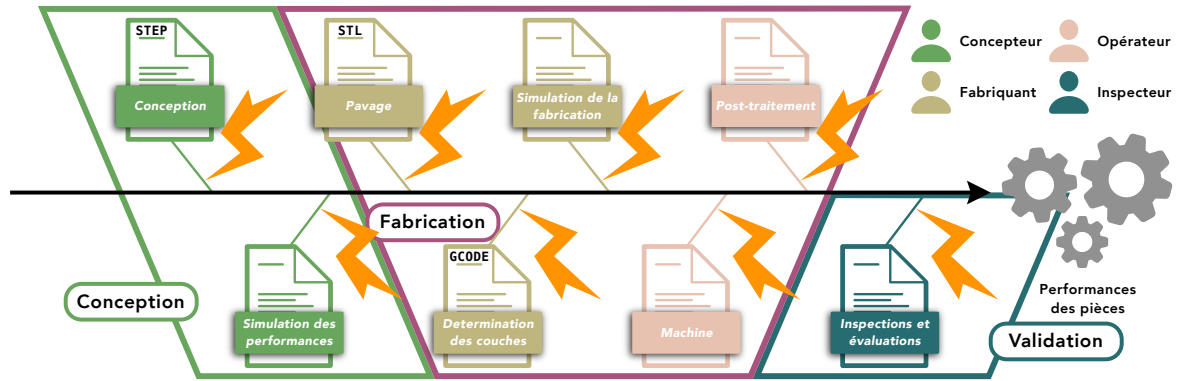


Figure 1.6 – Diagramme *Ishikawa* synthétisant le cycle de vie du produit sous incertitudes d'un procédé de fabrication additive (FA).

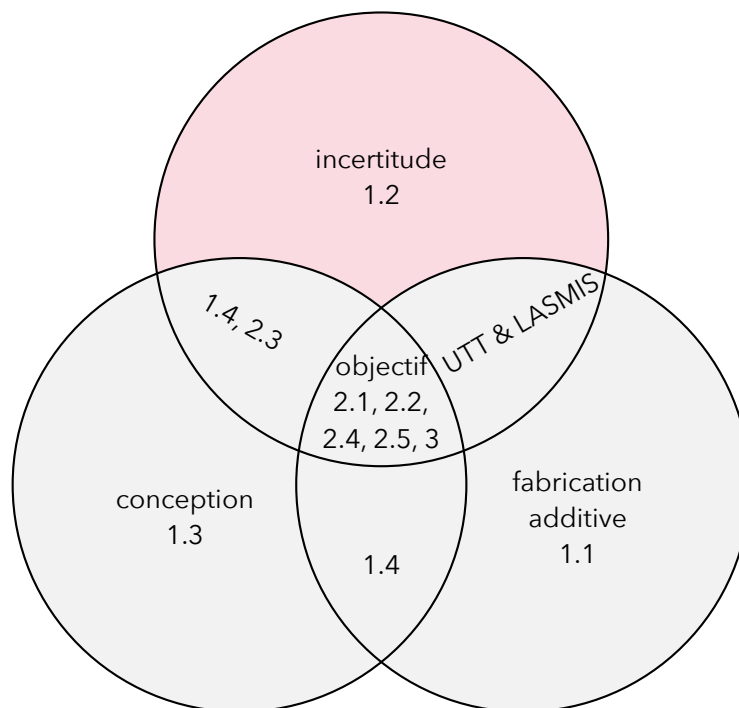
Finalement, parmi les critères de performances, celui portant sur la géométrie est étudié, cela est l'objet de plus amples justifications dans les sections suivantes. Les méthodes actuelles se révèlent peu adaptées pour atténuer les effets des imperfections géométriques tout en se conformant aux approches de DfXs. Mais, la modélisation (représentation) volumétrique concilie la caractérisation des écarts et l'OT. Cela constitue une première étape pour l'établissement de modèle basé sur l'exploitation de données expérimentales, permettant de s'affranchir ou d'appuyer la constitution de modèles basés sur la physique. Par conséquent, les données expérimentales et l'OT peuvent, à première vue, avoir la même représentation de la pièce. Cette affirmation est développée à la sous-section 1.3, mais cette fois-ci relativement à l'OT. Enfin, toujours pour rester fidèles à l'idée de la DfX, nous avons décidé de modéliser les imperfections géométriques avec des modèles modaux basés sur la topologie locale.

1.2 Considération des incertitudes lors de la phase de conception

Cette section a pour objectif de répondre à la sous-problématique suivante :

Comment les incertitudes sont-elles **modélisées**, **représentées** et leurs effets **atténués** pour un processus basé sur des modèles ?

La section précédente est dédiée au procédé de FA. Jusqu'à présent les incertitudes du cycle de vie ont été identifiées et la méthodologie de conception abordée, mais la notion d'incertitudes n'a pas été développée ni définie. C'est pourquoi l'objectif de cette section est de présenter les techniques pour atténuer les effets des incertitudes relatives à des systèmes ou des processus d'ingénierie complexes. La sous-section 1.2.1 aborde la modélisation des incertitudes pour les systèmes complexe avec plusieurs échelles et plusieurs physiques. Pour ce faire, cette section s'appuie essentiellement sur les thèses de [Thunnissen, 2005] et de [Choi, 2005] ; la première n'est pas spécifique à la façon de modéliser les systèmes, alors que dans la seconde les systèmes sont basés des modèles mathématiques. Le volet suivant présente les différentes représentations et modélisations mathématiques possibles pour des incertitudes et clôt cette section.



1.2.1 Vérification des modèles numériques sous incertitudes

Deux écoles permettent d'atténuer les incertitudes impactant un système ou un produit : l'approche **robuste** et l'approche **fiabiliste**. Étant donné que l'aspect temporel n'est pas inclus dans ces travaux (*cf.* définition de fiabilité), l'approche robuste est retenue. La robustesse est définie par [Lemaire, 2014, pp. 32–35] :

En contexte d'ingénierie, une conception robuste est une conception qui détermine les paramètres nominaux d'un produit ou d'un système tels que ses performances soient suffisamment insensibles à tout événement incertain qu'ils pourront rencontrer tout au long de leur cycle de vie.

Il est nécessaire de modéliser le système complexe pour atténuer les effets des incertitudes avec l'approche robuste. Ces systèmes sont souvent multiéchelles et multiphysiques, comme l'illustre la figure 1.5. Ainsi, les incertitudes doivent être propagées au travers de ces échelles distinctes. Le plus souvent, chacune d'elles est modélisée avec des modèles numériques spécialisés ; des opérations d'homogénéisation permettent de faire le lien entre les différentes échelles, comme dans [Choi, 2005, Gorgularslan *et al.*, 2019, Wu *et al.*, 2021]. Les incertitudes affectent cette chaîne numérique au plus de quatre manières [Choi, 2005] :

1. Par des paramètres qui ne sont pas sous le contrôle du concepteur, mais qui sont disponibles dans les modèles et qui ont une signification physique directe. Les conceptions qui sont insensibles aux variations de ses paramètres et qui respectent les performances cibles sont qualifiées de robustes de **type I**.
2. Moyennant les paramètres qui sont pilotables et disponibles dans les modèles. Les conceptions qui sont insensibles aux incertitudes issues de ces paramètres et respectent les performances cibles sont qualifiées de robustes de **type II**.
3. Dans certains cas, l'incertitude peut provenir des modèles eux-mêmes. Dans ce cas, il n'y a aucune paramétrisation possible et plusieurs simulations avec les mêmes entrées donneront des sorties différentes. Ainsi, les conceptions qui sont insensibles à ces variations et qui respectent les performances cibles sont qualifiées de robustes de **type III**.
4. S'agissant de la modélisation d'un système ou d'un processus complexe, les incertitudes des modèles s'accumulent par l'enchaînement des différents modèles. Par conséquent, les conceptions insensibles aux variations dues à la chaîne de simulations et respectant des critères de performance sont dites robustes de **type IV**.

Pour illustrer ces quatre définitions, imaginons que nous voulons minimiser le déplacement maximal d'une structure en treillis en jouant sur l'épaisseur d'un bras. Relativement à une conception robuste de type I, les incertitudes affectent le modèle numérique (les courbes en bleues pleines) sur des paramètres non contrôlables, par exemple les forces s'appliquant à la structure. La figure 1.8 l'illustre : les variations n'impactent pas la variable de décision (VD), ici l'épaisseur, mais impacte la sortie du modèle, ici le déplacement. Dans le cas présent, le minimum global est aussi le minimum robuste de type I, mais ce n'est pas toujours le cas. La figure 1.7 donne deux réalisations du modèle numérique sous incertitudes.

Concernant les conceptions robustes de type II, c'est la VD qui est incertaine. Le procédé de fabrication est capable de produire un bras avec une épaisseur nominale, sans que ce dernier soit capable de délivrer toujours la même valeur. Comme le montre la figure 1.9, au vu des variations sur la sortie, le minimum global n'est pas le minimum robuste de type II. En conception robuste, il est préféré de dégrader la performance optimale attendue.

Sur le plan des conceptions robustes de type III, le modèle numérique est affectée par une variation indépendante des paramètres qui sont accessibles depuis le modèle (contrôlable ou non). La figure 1.10 illustre la recherche de la conception robuste de type III. Ici les variations supplémentaires affichent une hétéroscédasticité et des bornes à 90% donnent les marges de ces variations. Les conceptions robustes sont différentes et la conception robuste de type III n'est ni au minimum local ni au minimum global.

Malgré cela, dans le cadre de l'activité robuste pour l'optimisation topologique appliqué à la FA, il est possible de définir un autre niveau de robustesse. Cela fait l'objet d'une discussion à la sous-section 2.2.2.

Afin d'aider le concepteur à atténuer les effets des incertitudes, les variables qui sont affectées par de l'incertitude doivent être exposées graphiquement à l'aide de diagrammes. Dans sa thèse, [Choi, 2005, pp. 94–100] évalue trois digrammes. Le tableau 1.3 synthétise son travail. Les diagrammes IDEF0 ne peuvent pas représenter un processus incertain, mais ils sont utiles pour représenter des processus industriels complexes, notamment quand un diagramme de flux de données (DFD) leur est associé. Les diagrammes de paramètres (p-diagrammes) utilisés seuls sont incompatibles avec la représentation d'un processus d'optimisation incertain où des objectifs sur la performance robuste d'un pro-

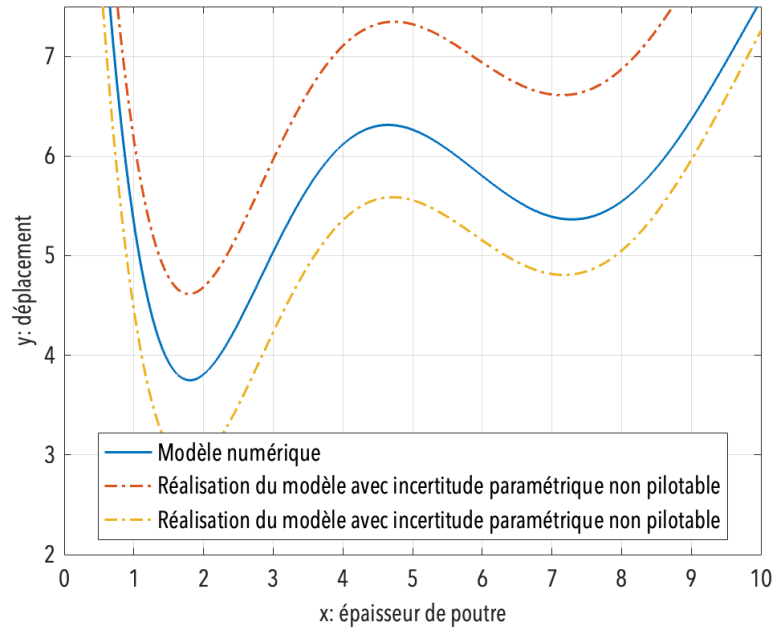


Figure 1.7 – Réalisations du modèle numérique avec des incertitudes.

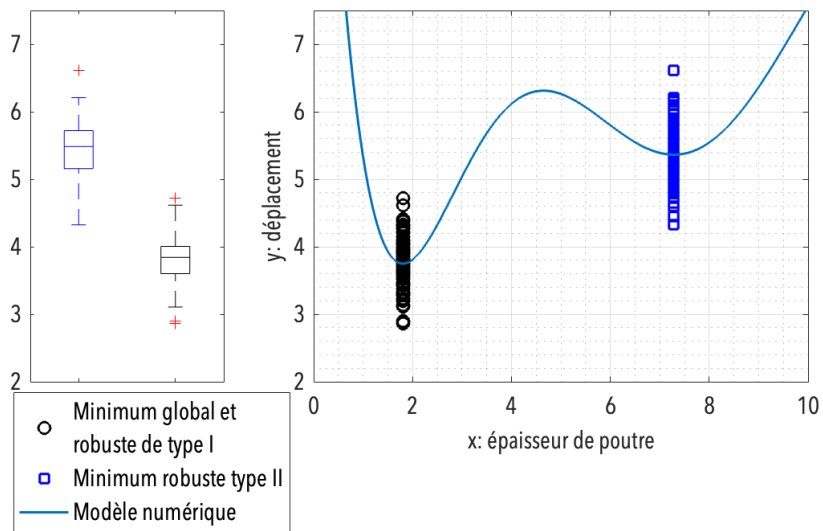


Figure 1.8 – Détermination d'une conception robuste de type I.

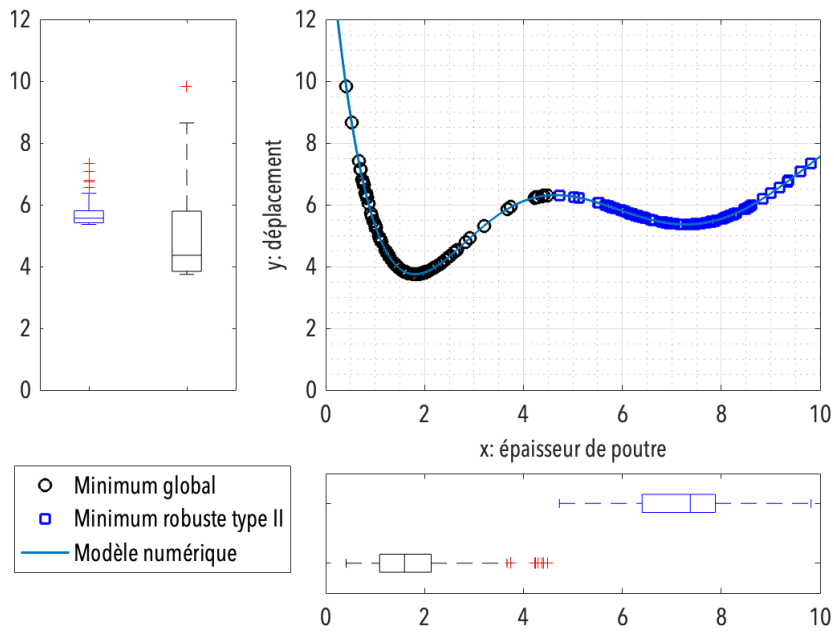


Figure 1.9 – Détermination d’une conception robuste de type II.

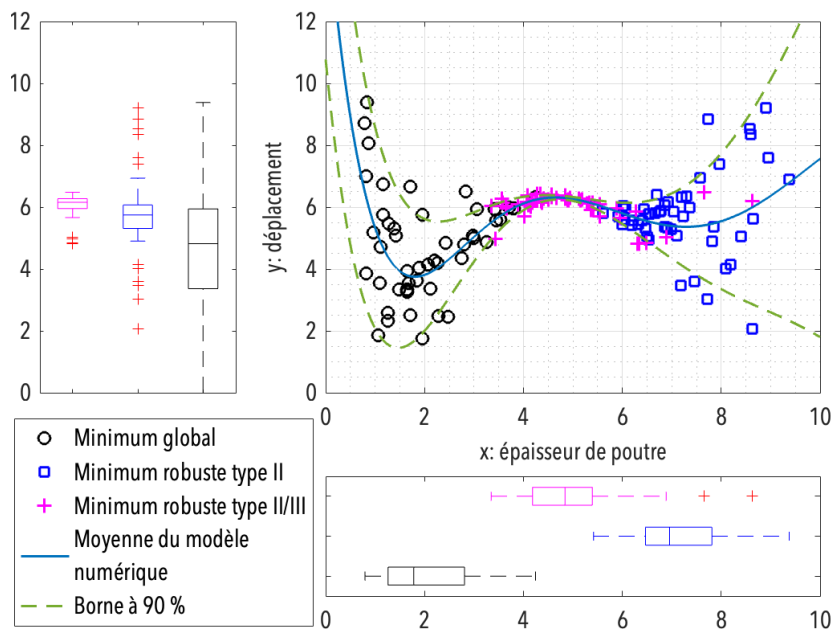


Figure 1.10 – Détermination d’une conception robuste de type II et III.

duit sont recherchés, mais ils sont idéals pour représenter un processus incertain. C'est pourquoi [Choi, 2005, pp. 170–175] a développé un modèle graphique de processus pour la conception robuste (GRDPM). L'avantage de ces diagrammes réside dans l'intégration des notions d'optimisation d'un processus (objectif à minimiser, *et cætera*) ; de plus, ce diagramme permet de représenter toutes les sources d'incertitude, qu'elles proviennent des modèles ou de toutes les entrées d'un modèle. Cependant, le développement de l'aspect logiciel est totalement ignoré, ce qui est crucial pour nous.

Il existe une quatrième alternative qui est l'utilisation d'approches d'ingénierie système basée sur les modèles. Ces approches comptent de nombreux langages de modélisation, dont le langage de modélisation de systèmes (SysML) ou son cousin orienté logiciel le langage de modélisation unifié (UML). Comparé aux modélisations étudiées par [Choi, 2005], le SysML a l'avantage : de proposer plusieurs diagrammes interconnectés qui se complètent permettant une modélisation exhaustive d'un processus ; d'améliorer la traçabilité et la communication entre les différentes équipes d'un projet ; de partager et de transférer les connaissances entre différents métiers spécialisés ; limiter le nombre d'erreurs et favoriser la réutilisation et la mise à jour des documents existants [Friedenthal *et al.*, 2014]. Le SysML est aussi un langage flexible, permettant la modification des diagrammes de base pour y ajouter des fonctionnalités et conserver tous les avantages du SysML [Friedenthal *et al.*, 2014] ; par exemple, [Konczal et Vinarcik, 2007] implémente les p-diagrammes dans le SysML. Même s'il n'existe pas de diagrammes destinés à la robustesse, les consortiums responsables du SysML et du UML commencent à s'intéresser à la question. En effet, [Biggs *et al.*, 2018] et [Biggs *et al.*, 2019] ajoutent des fonctionnalités au langage. Ces dernières sont orientées pour la fiabilité et la sécurité et non l'analyse robuste comme le p-diagramme et le GRDPM. La perspective de modéliser numériquement un processus complexe et incertain se traduit d'un point de vue méthodologique et logiciel par l'utilisation du SysML ou du UML.

Dans le cadre du projet RobustAM, où plusieurs acteurs se côtoient, le SysML est plus adapté. De plus, même si ce langage ne supporte pas en totalité la gestion des incertitudes, il est possible de s'en accommoder et d'utiliser le diagramme d'exigence pour spécifier des objectifs en robustesse. Les diagrammes d'activité et de définition de blocs* permettent respectivement : de représenter les flux de données et leurs transformations par le biais de différentes actions (fonctions) ; et de hiérarchiser les éléments structurels du système, très utilisé en programmation orientée objet (POO) et donc dans une ap-

*. Le diagramme de définition de bloc s'appelle : diagramme de classe dans le UML.

Table 1.3 – Diagrammes utilisés pour représenter pour des systèmes incertains, synthétisés de [Choi, 2005].

| Nom de la méthode | Avantages | Inconvénients |
|-------------------|--|---|
| IDEF0 & DFD | <ul style="list-style-type: none"> – Représente un processus de manière explicite, complète et graphique grâce à un ensemble de fonctions, y compris les relations hiérarchiques entre les fonctions. – Utile pour échanger des informations entre analystes, développeurs, concepteurs et le chef de projet. – À fait ses preuves dans différentes organisations. | <ul style="list-style-type: none"> – Pas de possibilités pour représenter les incertitudes dans les systèmes ou les processus. |
| p-diagram | <ul style="list-style-type: none"> – Classer les paramètres impliqués dans un produit ou un processus en fonction de trois entrées : facteur de bruit, facteur de contrôle, facteurs de signal ; et une sortie : la réponse du système. – Décrire une tâche de conception robuste basée sur une représentation graphique sémantique. – Saisir l'entière du processus de conception. – VD sont représentés dans le processus de conception. – Paramètres interdépendants explicitement représenté. | <ul style="list-style-type: none"> – Il est difficile de représenter une série d'événements. – Représenter un processus de prise de décision est inapproprié, par exemple l'optimisation. – L'influence d'un processus sur les autres tâches est difficilement visualisable. |
| GRDPM | | |

proche logicielle flexible. L'un des objectifs est d'avoir une implémentation numérique modulable et traçable, donc l'utilisation de la POO est un préalable. Ainsi, dans le cadre des activités de cette thèse, utiliser le SysML, en modifiant de manière marginale la sémantique de certains diagrammes est suffisant et une implémentation est proposée en section 2.5.

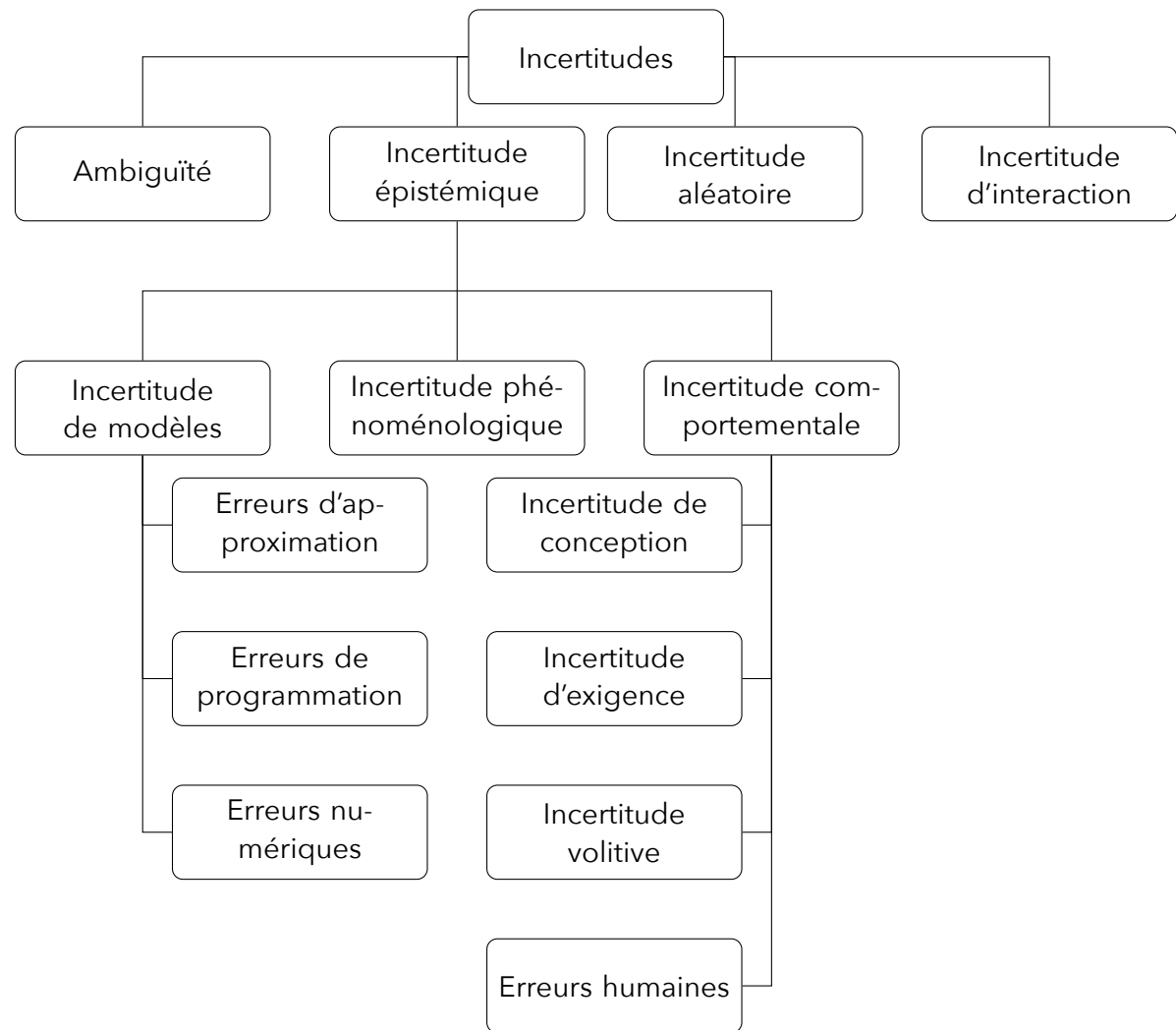


Figure 1.11 – Taxonomie des incertitudes, traduite de [Thunnissen, 2005].

La caractérisation des incertitudes est multidisciplinaire, dans sa thèse [Thunnissen, 2005, pp. 24–35] recense les taxonomies existantes. Elles se sont révélées inadaptées à la caractérisation des incertitudes dans le cas des systèmes ou de processus complexes. C'est pourquoi [Thunnissen, 2005, pp. 35–41] développe une taxonomie reprise par la figure 1.11. Utiliser une taxonomie détaillée permet de faciliter le travail de recueil des différentes sources d'incertitudes et de les inclure dans la modélisation discutée aux pa-

ragraphes précédents. Communément, les incertitudes sont caractérisées en fonction de leurs **réductibilités** [Roy et Oberkamp, 2011]. En d'autres mots, il est possible que l'ajout de **connaissances** et d'**informations** permette de réduire la dispersion observée et tendre vers un caractère certain ou vers un phénomène purement aléatoire. La taxonomie de [Thunnissen, 2005] n'y échappe pas et deux familles d'incertitudes peuvent être distinguées : l'**incertitude aléatoire** et l'**incertitude épistémique**.

L'incertitude aléatoire caractérise des phénomènes qui sont inhérents au procédé ou aux phénomènes physiques étudiés. Ainsi l'ajout de connaissance, au moins à court terme, ne permettra pas de réduire la variation constatée. Par exemple, les séries de mesures, faites pour caractériser la qualité d'une éprouvette fabriquée additivement à isoréglage (comme dans [Lewandowski et Seifi, 2016]), affichent une dispersion qui est inhérente au procédé et l'ajout de plus de mesures (plus d'informations) ne permettra pas de réduire les incertitudes observées.

L'incertitude épistémique est une incertitude qui est réductible, elle est due à un manque de connaissance ou d'informations. Si de la connaissance est ajoutée, par exemple grâce à de meilleurs modèles, des connaissances provenant d'experts, *et cætera*, alors dans ce cas, les variations engendrées par ces incertitudes se réduiront. En théorie, si suffisamment de connaissance est ajoutée, cette incertitude doit disparaître, mais l'ajout de connaissance ou la collecte de nouvelles informations est souvent coûteux [Roy et Oberkamp, 2011]. Les modèles numériques modélisant la physique du procédé de FA sont généralement très coûteux et nécessitent souvent des simplifications [Mahadevan *et al.*, 2022, Venturi et Taylor, 2023]. Ces simplifications sont alors une source inévitable d'incertitudes épistémiques et d'incertitudes de modèles (voir la figure 1.11). La parcimonie, les erreurs de mesures, le traitement des données sont une source d'incertitudes épistémiques ; les entrées des modèles ou les paramètres physiques des modèles sont aussi une source d'incertitudes épistémiques dans le cadre de la FA [Mahadevan *et al.*, 2022]. Percevoir la différence entre incertitude aléatoire et incertitude épistémique se résume dans ces questions : si l'un se demande « quelle est la performance de **cette** pièce (en particulier) », alors la réponse est une valeur précise qui ne peut être connue, car les paramètres du procédé de fabrication sont connus avec imprécision pour cette pièce et les modèles incertains dans leurs prédictions de la physique ; si l'autre se demande « quelle est la performance d'un **ensemble** de pièces », alors la réponse prend la forme de lois de probabilités [Roy et Oberkamp, 2011].

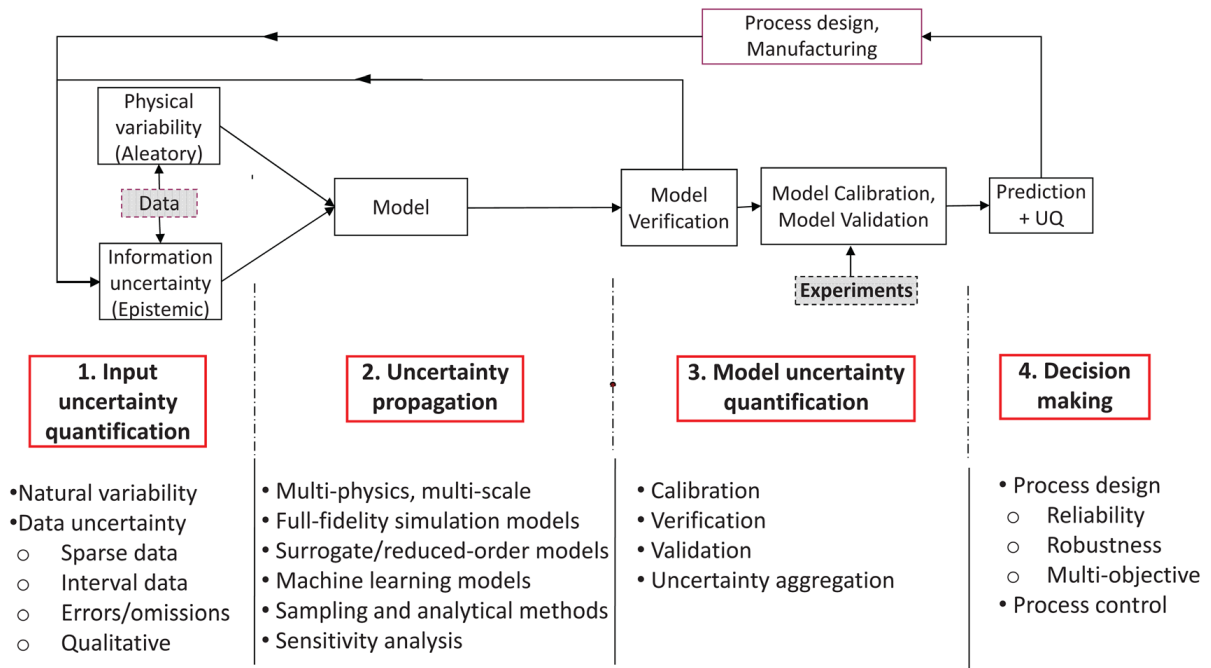


Figure 1.12 – Déroulement des activités de quantification de l’incertitude (QI) pour les processus de fabrication additive (FA), issue de [Mahadevan *et al.*, 2022].

Favoriser l’adoption de la FA passe par l’utilisation de techniques de vérification, validation et la QI [Wang *et al.*, 2020, Mahadevan *et al.*, 2022]. Ces activités consistent à considérer les incertitudes provenant des activités de modélisation mathématique, de la résolution numérique et de la collecte de données expérimentales [Roy et Oberkampf, 2011]. La figure 1.12 montre le flux des activités de la QIs. Ce flux est séparé en trois phases distinctes : la vérification ; la validation et la QI. L’étape de vérification consiste à transcrire les modélisations mathématiques numériquement et à considérer les erreurs de ces implémentations [Roy et Oberkampf, 2011]. La thèse de [Choi, 2005] s’inscrit dans cette démarche[†]. Vient la phase de validation, où les résultats numériques sont comparés avec des données expérimentales afin d’estimer les erreurs d’approximation [Roy et Oberkampf, 2011]. Enfin, l’agrégation de toutes ces sources d’incertitudes permet de quantifier les incertitudes et de prendre des décisions pour atténuer leurs effets. Au moment de l’écriture de ces lignes, l’auteur n’a trouvé aucune adaptation de ces cadres de gestion des incertitudes à l’OT. Des études sur des pièces à isoconception existent, par exemple [Gorgularslan *et al.*, 2019, Nath *et al.*, 2020], mais il semble que pour le moment aucune ne lie l’OT au processus de vérification et de validation pour la QI.

[†]. Les conceptions robustes de type III peuvent être intégrées dans l’étape de validation, mais ce n’est pas dans l’esprit initial de cette notion.

Cette sous-section référence plusieurs travaux qui attestent de la motivation d'intégrer les différents types d'incertitudes. La représentation et la modélisation mathématique des incertitudes épistémiques et incertitudes aléatoires fait l'objet de la sous-section suivante.

1.2.2 Représentation et modélisation mathématique des incertitudes

La sous-section précédente décrit les approches permettant de caractériser, modéliser les incertitudes d'un processus complexe et atténuer leurs effets. Deux grandes familles d'incertitudes y sont décrites : l'incertitude épistémique et l'incertitude aléatoire. Afin de pouvoir estimer les indicateurs de performance d'une pièce ou d'un système sous incertitude, les variables incertaines doivent avoir une représentation et une modélisation mathématique et numérique pour être intégrées aux différents modèles représentant le produit et le procédé de fabrication. L'incertitude aléatoire est décrite par la **théorie des probabilités** ; la théorie des probabilités peut aussi décrire l'incertitude épistémique [Helton *et al.*, 2004, Helton et Oberkampf, 2004]. Pour modéliser l'incertitude épistémique d'autres solutions sont envisageables : la théorie des possibilités, la théorie de *Dempster-Shafer*, intervalles de valeurs maximales et minimales, l'élicitation d'experts, les inférences bayésiennes et la logique floue [Helton *et al.*, 2004, Helton et Oberkampf, 2004, Ferson *et al.*, 2004]. Certaines sous-catégories d'incertitudes ne peuvent être représentées que par des théories spécialisées, par exemple les incertitudes comportementales sont représentés par la théorie des jeux [Thunnissen, 2005, pp. 43–45]. La FA est affectée par de incertitudes comportementales ; par exemple, comment le fabricant va-t-il choisir l'orientation de la pièce sur la plateforme de fabrication ? Ce choix est aussi bien guidé par des contraintes technologiques que par des habitudes du fabricant.

La théorie des probabilités permet d'estimer la vraisemblance d'occurrence d'un événement. Si l'univers est à valeur réelle, dans ce cas la fonction de répartition permet de calculer la probabilité qu'à une variable aléatoire de prendre une valeur inférieure au seuil prescrit. Si Ξ est une variable aléatoire et $a \in \mathbb{R}$ le seuil, dans ce cas la fonction de répartition F_{Ξ} s'écrit :

$$F_{\Xi}(a) = \mathbb{P}(\Xi \leq a) = \int_{-\infty}^a f_{\Xi}(t)dt, \quad (1.1)$$

avec f_{Ξ} la **fonction de densité de probabilité**. La fonction de densité de probabilité (FDP) permet de calculer plusieurs indicateurs de la loi de probabilité \mathbb{P}_{Ξ} , comme ces moments : la moyenne qui représente son barycentre ; l'écart-type ou la variance qui caractérise sa dispersion ; l'asymétrie qui quantifie le gauchissement ; ou encore le kurtosis qui calcul l'aplatissement de la loi de probabilité. La loi de probabilité peut être non spécifique, mais les phénomènes aléatoires sont souvent représentés par des lois de probabilité paramétrées, p. ex. la loi uniforme. Le choix de la loi est important et même s'il est souvent observé que les phénomènes obéissent à des lois normales, le support de la physique doit être respecté, sinon il s'agit de *Quetelisme* [Thunnissen, 2005].

Pour évaluer la robustesse d'un processus incertain, le recours à la moyenne et à l'écart-type est habituel. Habituellement, la fonction coût est **reformulée** comme étant une **somme pondérée** entre : l'estimation de la performance moyenne et l'estimation de la performance de l'écart-type (se référer à la section 1.4 pour plus d'informations). La moyenne est aussi appelée **moment ordinaire** d'ordre 1. Les moments ordinaires se calculent :

$$m_r(\Xi) = \mathbb{E}(\Xi)^r = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_{\Xi}(t) dt , \quad (1.2)$$

avec $r \in \mathbb{N}$ l'ordre La variance est calculée à partir des moments centrés et est appelée **moment centré** d'ordre 2. Les moments centrés s'écrivent :

$$\mu_r(\Xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} [t - m_1(\Xi)]^r f_{\Xi}(t) dt . \quad (1.3)$$

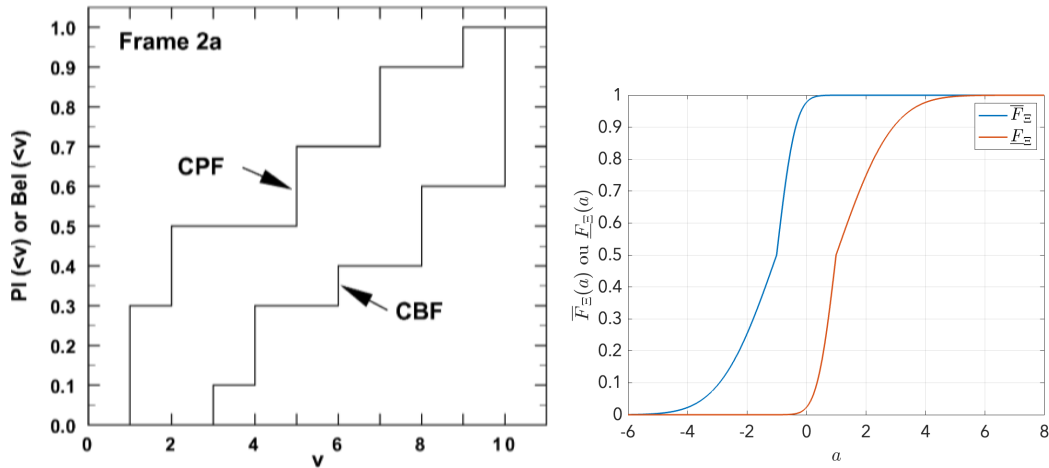
Par construction de la théorie des probabilités, si une personne connaît la vraisemblance d'occurrence d'un événement, alors elle connaît aussi la vraisemblance de son complémentaire. Cette limitation est levée par certaines théories permettant de considérer l'incertitude épistémique. Ainsi, l'occurrence d'un événement ne se résume plus à un scalaire, mais à un intervalle. Comme mentionné précédemment, l'expression la plus basique est un intervalle de valeurs, il est vrai que de nombreuses données expérimentales sont exprimées sous cette forme, mais leurs utilités et représentativités ne font pas le consensus [Ferson *et al.*, 2004]. Dans le cas de la théorie de *Dempster-Shafer* des bornes sont définies pour la fonction de répartition, permettant d'envisager des incertitudes sur la vraisemblance d'occurrence d'un événement. Les deux fonctions de répartition sont définies comme ceci :

- Fonction de répartition de croyance (*cumulative belief function* (CBF)) : Bel_{Ξ} . Elle

est la plus petite probabilité d'occurrence d'un événement.

- Fonction de répartition de plausibilité (*cumulative plausibility function* (CPF)) : Pl_{Ξ} . Elle est la plus grande probabilité d'occurrence d'un événement.

La théorie de *Dempster-Shafer* permet d'agrégier facilement des connaissances d'experts avec des données ou n'importe quelle autre source et de les discriminer en fonction de leurs crédibilités. La figure 1.13a l'illustre, si dix pourvoyeurs (données, experts, modèles, *et cætera*) possédant le même poids et attribuent à v les intervalles (*focal*) suivants : $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 10]$, $[2, 4]$, $[2, 6]$, $[5, 8]$, $[5, 10]$, $[7, 8]$, $[7, 10]$ et $[9, 10]$, alors les fonctions de répartition de la figure 1.13a sont obtenues. Un bénéfice supplémentaire réside dans la proximité de la théorie de *Dempster-Shafer* et la théorie des probabilités (utilisée lors de la propagation des incertitudes).



(a) Fonctions de répartition de plausibilité et de croyance, issue de [Helton *et al.*, 2004].

(b) Fonctions de répartition droite et gauche d'une boîte de probabilité (p-boîtes).

Figure 1.13 – Deux approches pour représenter l'incertitude épistémique.

Une alternative continue est l'utilisation des boîtes de probabilité [Ferson *et al.*, 2003]. Ces dernières sont répandues et sont des outils puissants (bien que coûteux computationnellement) pour la propagation des incertitudes épistémiques en fiabilité [Faes *et al.*, 2021]. Les boîtes de probabilité (p-boîtes) et les structures de *Dempster-Shafer* sont étroitement liées, même si ces dernières peuvent représenter plus de cas [Ferson *et al.*, 2003]. Comme les structures de *Dempster-Shafer*, les p-boîtes permettent de définir des bornes sur la vraisemblance de la fonction de répartition ; autrement dit, une p-boîte peut être définie comme une variable aléatoire incertaine. De façon similaire aux fonctions de répartition de croyance et de plausibilité, les p-boîtes définissent une borne supérieure et

inférieure, respectivement $\overline{F}_{\Xi}(a) = 1 - \underline{\mathbb{P}}(\Xi > a)$ et $\underline{F}_{\Xi}(a) = \underline{\mathbb{P}}(\Xi \leq a)$. La figure 1.13b met en lumière une p-boîte d'une loi normale avec ses paramètres contenus dans un intervalle. Plusieurs approches existent pour construire des p-boîtes [Ferson *et al.*, 2003]. La méthode la plus directe est de considérer les paramètres des lois de probabilité comme étant incertains, c'est l'**hypothèse directe**. Les informations sur les paramètres de la loi peuvent provenir d'experts [Ferson *et al.*, 2003].

Pour représenter les incertitudes épistémiques, la majorité des cas utilisant des théories alternatives à la théorie des probabilités sont appliqués pour la sécurité, c'est-à-dire pour limiter les conséquences d'une défaillance, ou pour de la fiabilité et non pour la robustesse. En conséquence, une méthode permettant de considérer la DfRo par l'utilisation d'indicateurs inspirées des p-boîtes est proposée à la sous-section 2.3.2.

Cependant avant d'utiliser l'une de ces techniques, comme remarqué par [Paté-Cornell, 1996], il est nécessaire de connaître les niveaux de détail requis par le projet pour la prise en compte des incertitudes. En d'autres mots, est-ce qu'un projet est suffisamment sensible pour réclamer un déploiement d'efforts supplémentaires, résultant de techniques de propagation et d'agrégation plus pointues et donc plus coûteuses? Peut-être qu'une simple analyse des moments statiques et des centiles pourrait être suffisante. Pour le projet RobustAM, l'atténuation des effets des incertitudes épistémiques est un livrable. De plus, selon [Helton *et al.*, 2004, Helton et Oberkampf, 2004], il est important de savoir communiquer, aux différentes parties prenantes, les résultats ayant fait l'objet d'une analyse d'incertitudes, parfois difficilement compréhensibles pour des publics néophytes.

En synthèse, la question ci-dessous est traitée :

Comment les incertitudes sont-elles **modélisées**, **représentées** et leurs effets **atténués** pour un processus basé sur des modèles ?

En premiers lieux, les outils de modélisation de processus complexes sous incertitudes ont été revus. Le contexte du projet, fait que la modification des diagrammes existant semble la voie à suivre, afin de modéliser le processus de conception sous incertitudes.

Deuxièmement, l'atténuation des effets des incertitudes se fait par deux méthodes : robuste ou fiabiliste. La seconde considère la durabilité dans le temps du produit, ce qui n'est pas recherché ici. Toutefois, la représentation des incertitudes épistémiques s'utilise essentiellement avec les méthodes fiabilistes, nécessitant une adaptation des méthodes existantes à l'approche robuste.

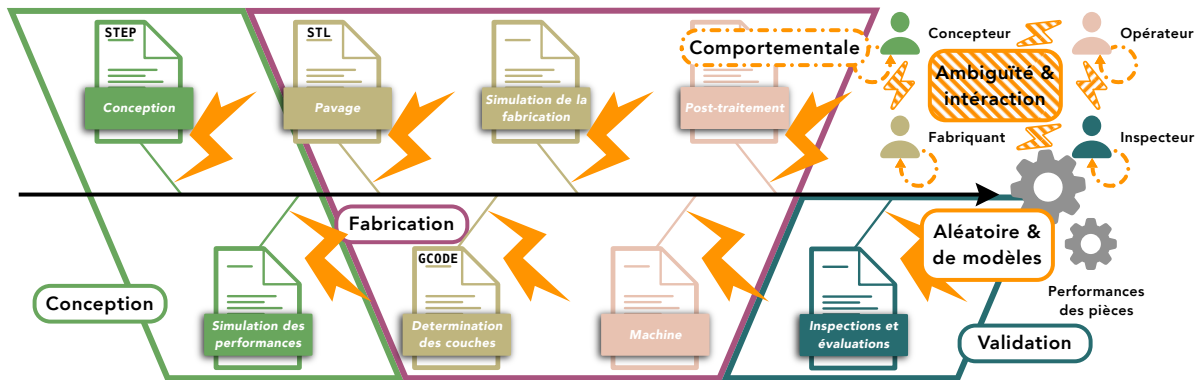


Figure 1.14 – Diagramme *Ishikawa* synthétisant le cycle de vie du produit et la caractérisation des incertitudes pour un procédé de fabrication additive (FA).

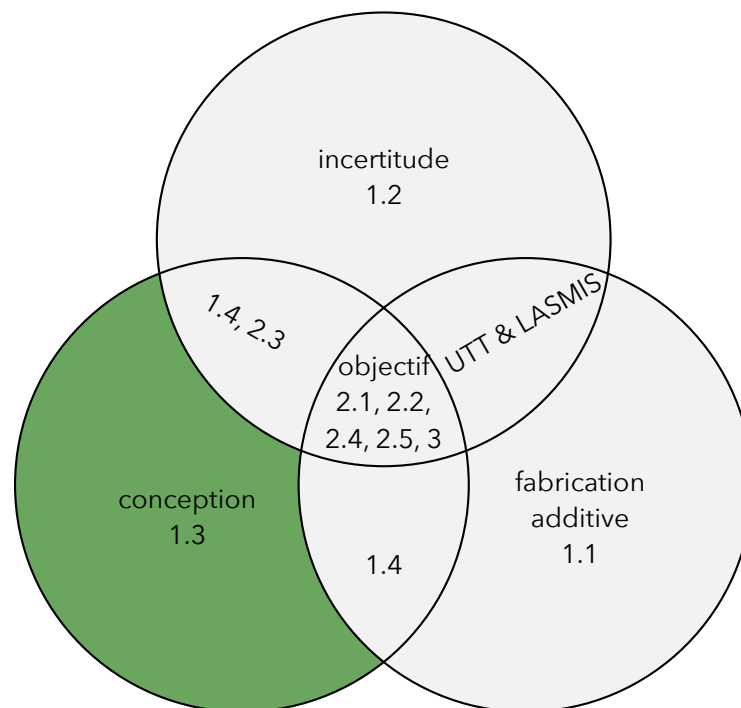
Enfin, les multiples types d'incertitudes ont été revus. La figure 1.14 intègre la taxonomie présentée par la figure 1.11 au diagramme *Ishikawa* vu à la section précédente. La figure 1.14 inclut les différents types d'incertitudes. Les éclairs présents à la figure 1.6 sont caractérisés par l'incertitude aléatoire et de l'incertitude de modèles. L'incertitude entre les acteurs est caractérisée par de l'ambiguïté et de l'incertitude d'interaction, cela est illustré par les éclairs hachurés. Enfin, les acteurs sont eux-mêmes caractérisés par de l'incertitude comportementale, elle est représentée par un cercle pointillé. Toutefois, ce n'est pas un recueil (*elicitation*) rigoureux de toutes les sources d'incertitudes, par exemple il n'y a aucun paramètre physique. De plus, dans cette figure, il manque des acteurs comme le client, les autorités et le public, *et cætera* ; cette omission est volontaire pour des soucis de lisibilité, de concordance avec les thèmes abordés et les figures précédentes.

1.3 L'optimisation topologique comme outil d'aide à la conception

La finalité de cette section est d'apporter des éléments de réponses aux questions suivantes :

L'optimisation topologique regroupe de nombreuses approches, en vue d'intégrer les incertitudes identifiées par le concours des questions précédentes, les interrogations suivantes prévalent. Comment ces approches **fonctionnent-elles**? Est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des **boîtes noires**? Comment le plus **extensif** si possible?

L'utilisation de l'optimisation topologique supporte la conception. Ce faisant, la sous-section 1.3.1 introduit les concepts de l'optimisation topologique. Cela permet à la fois de recueillir les sources d'incertitudes à l'égard de la modélisation numérique et d'expliquer l'approche utilisée. La sous-section 1.3.2 est consacrée à l'étude de la représentation de la topologie (c'est-à-dire de la pièce) en OT et est mise en parallèle avec l'aspect de validation. Ce dernier point permet de compléter l'étude des différentes représentations vues à la fin de la sous-section 1.1.3.



1.3.1 Ce que peut faire l'optimisation topologique

Introduction L'optimisation topologique regroupe un ensemble de méthodes permettant de résoudre des problèmes de conception en fonction :

- D'une **physique** couplée ou non.
- D'un ou plusieurs **objectifs** à optimiser en fonction de la physique.
- De **contraintes** sur les VDs ou d'autres indicateurs de la topologie.
- D'un **espace de conception** où de la matière peut être librement ajoutée ou retirée. En plus de cet espace de conception, il est possible d'ajouter des espaces de **non-conception**, soit pleins ou vides. Dans ce cas l'algorithme d'optimisation ne peut pas ajouter ou retirer de la matière dans ces zones.

Qu'importe les choix faits pour le problème d'optimisation topologique, il est toujours possible de l'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} g & \left(\begin{array}{l} \mathcal{VD} = \{\text{topologie } \Omega, \text{ autres VDs}, \dots\}, \\ \mathcal{HP} = \{\text{hyperparamètres}, \dots\}, \\ \mathcal{PP} = \{\text{paramètres physiques}, \dots\} \end{array} \right) \\ \text{sujet à} & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{CPe} = \{\text{contraintes procédé}, \dots\} \\ \mathcal{CPr} = \{\text{contraintes produit}, \dots\} \\ \mathcal{CM} = \{\text{contraintes méthode d'OT}, \dots\} \\ \mathcal{C}\phi = \{\text{contraintes physique}, \dots\} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, les p fonctions objectifs mesurant la performance de la topologie et n le nombre de VDs[‡], ces variables doivent être choisies pour **minimiser** g . Ces VDs sont contenues dans l'ensemble \mathcal{VD} , la **topologie** est toujours dans cet ensemble, même si cette dernière peut être décrite de manière différente en fonction des méthodes OT choisies [Sigmund et Maute, 2013, van Dijk *et al.*, 2013, Rozvany, 2009]. Quoi qu'il en soit, l'objectif est de répartir la matière, en modifiant la topologie Ω et en minimisant g , dans l'espace de conception et en respectant les contraintes contenues dans les ensembles \mathcal{Cx} . Outre la topologie, d'autres VDs peuvent être ajoutées au problème d'optimisation. \mathcal{HP} est l'ensemble qui contient les hyperparamètres utilisés lors de l'optimisation de la pièce ou du produit, ils peuvent provenir de la méthode d'OT ou aux modèles nécessaires à la résolution du problème physique, par exemple le raffinement, h , d'un maillage d'éléments

‡. Noter que la topologie de la pièce peut être décrite avec n_Ω paramètres ($n = n_\Omega + \dots$), lorsque ces paramètres sont non spécifiés la topologie sera décrite par la forme $\Omega \subset \mathbb{R}^D$ avec $D = 2$ ou $D = 3$.

finis. L'ensemble \mathcal{PP} contient les paramètres physiques. En particulier, ils sont utiles pour résoudre les équations différentielles (contenues dans $\mathcal{C}\phi$). Les valeurs contenues dans les ensembles \mathcal{HP} et \mathcal{PP} sont nécessaires à la résolution du problème d'optimisation (1.4) et pas uniquement g . Les contraintes du problème (1.4) peuvent être sous la forme d'égalités ou d'inégalités. Le premier ensemble, \mathcal{CPe} , décrit l'ensemble des contraintes issues du procédé de fabrication, par exemple, l'espace de fabrication d'une imprimante 3D. Le second, \mathcal{Cpt} , contient les contraintes du produit ou de la pièce, comme l'espace de conception. \mathcal{CM} comprend l'ensemble des contraintes inhérentes à la méthode d'OT, elles sont souvent uniques en fonction de la méthode adoptée. Enfin, $\mathcal{C}\phi$, est lié au respect des équilibres des problèmes physiques.

Le problème d'optimisation donnée par l'équation (1.4) est générique, et le choix de la physique est exhaustif : la mécanique élastique linéaire [Bertolino et Montemurro, 2022], la thermomécanique [Ogawa et Yamada, 2022], *et cætera*. La fonction objectif peut prendre des formes variées : contrôler un comportement, comme des diodes thermomécaniques [Dalkint *et al.*, 2024], maximiser la rigidité d'une structure [Montemurro, 2022], *et cætera*. La forme de la topologie peut être décrite sur plusieurs échelles [Wu *et al.*, 2021], permettant de maximiser la performance de résolution du procédé de FA. Les VDs peuvent être étendues au choix de plusieurs matériaux [Huang et Li, 2021], profitant des avantages du procédé de FA. Enfin, l'OT permet aussi l'assemblage de plusieurs composants, répondant à certaines contraintes posées par le procédé de FA et ouvrant la voie à la constitution de produits plus complexes [Liu et Kang, 2018].

Mécanique élastique linéaire Dans la suite de ce manuscrit, la mécanique élastique linéaire est définie comme étant la physique servant de support à l'OT. Les paragraphes qui suivent décrivent la mécanique élastique linéaire, sa résolution numérique et les fonctions objectifs qui lui sont associées dans le cadre de l'OT.

Une pièce est décrite par la forme $\Omega \subset \mathbb{R}^D$, elle est soumise à plusieurs conditions aux limites. Ces conditions affectent la pièce sur les frontières Γ_d et Γ_t . Γ_d correspond à la frontière où les déplacements sont prescrits, par u_d , et où la structure est généralement attachée (dans ce cas $u_d = \vec{0}$) ; cette condition est appelée condition aux limites de *Dirichlet*. Γ_t correspond à la frontière où sont exercées des forces de traction $t = [t_x \ t_y \ t_z]^T$. Enfin Γ dénote la frontière restante tel que $\partial\Omega \setminus (\Gamma_d \cup \Gamma_t) = \Gamma$, avec $\Gamma_d \cap \Gamma_t = \emptyset$ et $\Gamma_d \neq \emptyset$. De plus, des forces massiques, notées m , peuvent s'appliquer à Ω , p. ex. si

la gravité est considérée. La figure 1.15 présente la configuration classique en élasticité linéaire. La notation de *Voigt* est utilisée pour le reste du document.

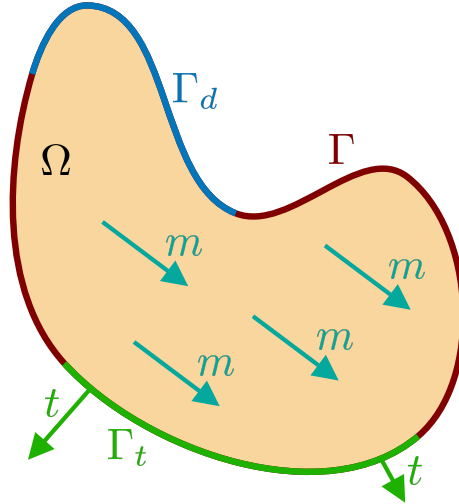


Figure 1.15 – Configuration du problème d'élasticité linéaire.

L'objectif est de pouvoir trouver le champ de déplacements, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^D$, solution du problème d'élasticité linéaire. L'élasticité linéaire est limitée par des hypothèses [Fish et Belytschko, 2007], admises dans la suite de ce manuscrit :

- Les déformations sont petites,
- Le comportement du matériau est linéaire et isotrope,
- Les effets dynamiques et thermiques sont négligés,
- Aucune fissure ni chevauchement de la forme ne sont admis.

Sous l'hypothèse des petites déformations, l'équation (1.5) fait le lien entre les déplacements u et les déformations ε :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nabla_S u, \\ &= \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

avec ∇_S la matrice gradient contenant les dérivées partielles $\{\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z\}$, ε la forme matricielle des déformations, telle que $\varepsilon = [\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \varepsilon_{zz} \ \varepsilon_{xy} \ \varepsilon_{xz} \ \varepsilon_{yz}]^T$. L'équilibre des forces donne la relation suivante :

$$\nabla_S^T \sigma = m, \quad (1.6)$$

avec $m = [m_x \ m_y \ m_z]^T$ le vecteur des forces massiques et σ la forme matricielle des contraintes, telle que $\sigma = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{xz} \ \sigma_{yz}]^T$.

En élasticité linéaire, le lien entre contraintes et déformations est établi grâce à la loi de *Hooke*. Dans le cas d'un matériau **isotrope** et **linéaire**, la loi de comportement est la suivante :

$$\begin{aligned} \sigma &= D\varepsilon, \\ &= \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \varepsilon, \end{aligned} \quad (1.7)$$

avec D la **matrice d'élasticité** pour un matériau isotrope et linéaire. Cette loi dépend de deux coefficients, dits de *Lamé*, λ et μ . Il est fréquent d'utiliser des grandeurs ayant plus de sens physique, E et ν , tel que :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ et } \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (1.8)$$

avec E et ν respectivement le module de *Young* et le coefficient de *Poisson*. Le module de *Young* exprime la rigidité d'un matériau en traction. Le coefficient de *Poisson* traduit, au signe moins prêt, le ratio entre les déformations axiale et transversale. Si la déformation est plus petite que la limite élastique σ_y , alors l'équation (1.7) est valide, sinon la loi de comportement doit traduire la **plasticité** du matériau. Finalement, il reste à faire le lien entre les forces de traction et les contraintes, ce qu'un bilan des forces permet de faire :

$$\begin{aligned} t &= Tn, \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (1.9)$$

avec T la matrice des contraintes et n le vecteur normal unitaire. Ce lien permet de considérer la condition aux limites des forces de traction, aussi appelé condition aux limites de *Neumann*. Ainsi, le problème d'élasticité linéaire consiste à trouver la fonction

vectorielle des déplacements $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla_S^T \sigma = m & \text{dans } \Omega \text{ équilibre des forces} \\ \varepsilon = \nabla_S u & \text{dans } \Omega \text{ relation déformation-déplacement} \\ \sigma = D\varepsilon & \text{dans } \Omega \text{ loi de comportement} \\ t = Tn & \text{sur } \Gamma_t \text{ condition aux limites de } \textit{Neumann} \\ u = u_d & \text{sur } \Gamma_d \text{ condition aux limites de } \textit{Dirichlet} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Ce système est appelé **formulation forte** du problème d'élasticité linéaire. Pour résoudre ce système, les différences finies ou les éléments finis figurent parmi les méthodes les plus populaires [Quarteroni *et al.*, 2006]. Dans le cadre de cette thèse, nous avons décidé de nous baser sur la méthode des éléments finis (MEF), car cette dernière est bien implantée dans la communauté de l'OT et il existe de nombreuses bibliothèques ouvertes avec une communauté active, comme la bibliothèque **DOFINx** de [Baratta *et al.*, 2023]; ce ne sont que des avantages dans le cadre de la conception d'un code ouvert, qui est l'une des exigences de ce travail. Obtenir la **formulation faible** est la première étape qui permet de discrétiser le problème grâce à la MEF. La formulation faible consiste à réécrire le problème (1.10) sous forme d'intégrales sur les différentes parties du domaine. Pour cela, une fonction vectorielle, dite de poids, est définie par $w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$; dans le cas de l'élasticité linéaire, elle est aussi dénommée par le champ des déplacements virtuels. Cette fonction permet de garantir l'équivalence entre la formulation faible (l'équation (1.11)) et forte (l'équation (1.10)) en imposant la condition sur les déplacements (u_d), car $w = \vec{0}$ sur Γ_d et est quelconque ailleurs. Ainsi, la formulation faible permet de trouver le champ des déplacements, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, tel que :

$$\underbrace{\int_{\Omega} (\nabla_S w)^T D \nabla_S u d\Omega}_{\text{énergie contenue dans } \Omega} = \underbrace{\int_{\Gamma_t} w^T t d\Gamma + \int_{\Omega} w^T m d\Omega}_{\text{travaux des forces extérieures}} , \quad (1.11)$$

$$a(u, w) = l(w) .$$

Résolution numérique La MEF **discrétise** la forme Ω par un **maillage**. Ce maillage est composé de n_{el} éléments, dénotés par $\Lambda_e \in \mathcal{L} = \{\Lambda_1, \dots, \Lambda_{n_{el}}\}$, eux-mêmes constitués de nœuds. Le nombre total de nœuds qui composent le maillage est noté par n_{node} et la position d'un nœud s contenue dans le vecteur $\mathbf{X}^s \in \mathbb{R}^D$. Cette méthode permet d'obtenir une solution approximative de u , notée $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{Dn_{node}}$ § . Les déplacements, dans

§. Pour le confort de lecture, les matrices et les vecteurs appartenants au monde du discret sont notés respectivement en gras majuscule et gras minuscule.

Λ_e , sont approchés de cette façon :

$$u(x, y, z) \approx \mathbf{N}^e(x, y, z)\mathbf{u}^e \quad \forall (x, y, z) \in \Lambda_e . \quad (1.12)$$

N^e est appelé la **matrice des fonctions de base** et dépend du type et de l'ordre des éléments qui compose le maillage et \mathbf{u}^e les déplacements calculés aux nœuds de Λ_e . Il est possible d'obtenir la dérivée de ces fonctions, afin de discrétiser complètement l'équation (1.11), elle s'écrit de cette manière $\nabla_S \mathbf{N}^e = \mathbf{B}^e$. Enfin, le lien entre les déplacements dans un élément e et les déplacements aux nœuds dans la structure nécessite des opérations d'**assemblages** réalisés grâce à la matrice de connectivité \mathbf{L}^e , ainsi $\mathbf{u}^e = \mathbf{L}^e \mathbf{u}$. Finalement, la forme discrétisée de la formulation faible (1.11) est la suivante :

$$\mathbf{w}^T \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{eT} \left[\underbrace{\int_{\Lambda_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}_e \mathbf{B}^e d\Omega}_{\mathbf{K}_e} \mathbf{L}^e \mathbf{u} - \underbrace{\left(\int_{\Gamma_t^e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{t}^e d\Gamma + \int_{\Lambda_e} \mathbf{N}^{eT} \mathbf{m}_e d\Omega \right)}_{\mathbf{f}_e} \right] = 0 , \quad (1.13)$$

avec \mathbf{K}_e la **matrice de raideur élémentaire** pour l'élément e et \mathbf{f}_e le vecteur des forces extérieures élémentaire. Généralement, ces intégrales sont résolues à l'aide des méthodes de quadrature de Gauss. Avec ces notations, l'équation (1.13) est simplifiée comme ceci :

$$\mathbf{w}^T \left(\underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{eT} \mathbf{K}_e \mathbf{L}^e}_{\mathbf{K}} \mathbf{u} - \underbrace{\sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{L}^{eT} \mathbf{f}_e}_{\mathbf{f}} \right) = 0 , \quad (1.14)$$

avec \mathbf{K} la **matrice de raideur globale** et \mathbf{f} la matrice des forces extérieures globales. Résoudre l'équation (1.14) pour obtenir \mathbf{u} est l'opération la plus coûteuse en temps lors de l'analyse par la MEF. En effet, même si la matrice \mathbf{K} est creuse, elle est de grande dimension ($D^2 n_{\text{node}} \times n_{\text{node}}$ ou $n_{\text{dof}} \times n_{\text{dof}}$), son inversion est nécessaire pour obtenir \mathbf{u} et la complexité algorithmique est polynomial par rapport au nombre ligne de la matrice ! Dans l'équation (1.14), il y a deux inconnues : les déplacements dans la forme Ω et sur $C_{\partial\Omega} \Gamma_d$, ils sont notés par \mathbf{u}_l ; et les forces de réaction au niveau de Γ_d , elles sont notées par \mathbf{r}_d . En notant les forces de réaction par le vecteur $\mathbf{r} = \mathbf{K}\mathbf{u} - \mathbf{f} = [\mathbf{r}_d \ \mathbf{r}_l]^T$, l'équation (1.14) peut être partitionnée de la manière suivante :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{K}_d & \mathbf{K}_{dl} \\ \mathbf{K}_{dl}^T & \mathbf{K}_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_d \\ \mathbf{u}_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{r}_d \\ \mathbf{f}_l \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}} . \quad (1.15)$$

Plusieurs techniques existent pour résoudre l'équation (1.15), mais elles ont en commun de trouver \mathbf{u}_l , \mathbf{r}_d et d'inverser en partie ou en totalité \mathbf{K} .

Utilisation en optimisation topologique (OT) Dans les paragraphes précédents, le problème d'élasticité linéaire et sa discrétisation avec la MEF ont été introduits. En OT, lorsque la physique utilisée est l'élasticité linéaire, minimiser la souplesse moyenne de la structure est courant dans la littérature [Bendsøe et Sigmund, 2003]. Vouloir minimiser la souplesse moyenne revient à vouloir maximiser la rigidité de la structure et ainsi à garantir sa fonctionnalité et limiter les risques de défaillance [Ji, 2003]. Ces cas sont largement traités dans la littérature, où une contrainte produit sur le volume de la topologie optimisée est ajouté [Bendsøe et Sigmund, 2003]. Avec la notation de l'équation (1.4), ce problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & c(\mathcal{VD} = \{\Omega\}, \mathcal{PP} = \{E, \nu\}) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{CPl} = \{V(\Omega) - V^* = 0, \Omega_{ec} = \Omega_{ec}^*\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.10) \text{ ou } (1.11)\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Avec $c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ la fonction objectif mesurant la souplesse moyenne de Ω , elle est fonction des déplacements u . Les paramètres physiques sont décrits dans la loi de comportement (voir les équations (1.7) et (1.8)) : E et ν . La contrainte produit sur le volume est nécessaire. Cette dernière spécifie que le volume de la pièce $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$ doit être égal à un volume cible V^* . Généralement, le volume cible est remplacé par sa fraction de volume dans l'espace de conception. L'espace de conception est dénoté par $\Omega_{ec} \subset \mathbb{R}^D$ et ceux de non-conception par $\Omega_{vi} \subset \mathbb{R}^D$ et par $\Omega_{pl} \subset \mathbb{R}^D$ respectivement les espaces vide et rempli de matière. L'union des trois espaces est noté par $\Omega_{tot} = \Omega_{ec} \cup \Omega_{vi} \cup \Omega_{pl}$ et s'appelle espace total. En raison de la construction des problèmes d'optimisation topologique $\Omega \subseteq \Omega_{ec}$, la figure 1.16 esquisse le cadre de l'OT en mécanique élastique linéaire.

Dès lors, si V_{ec} correspond au volume de l'espace de conception et φ^* à la fraction de volume voulue, alors $\mathcal{CPl} = \{V(\Omega)/V_{ec} - \varphi^* = 0\}$. Le calcul des différents volumes est donné par les équations suivantes :

$$V(\Omega) = \int_{\Omega} 1d\Omega_{tot} \text{ et } V_{ec} = \int_{\Omega_{ec}} 1d\Omega_{tot} . \quad (1.17)$$

Cette contrainte est nécessaire, car sans elle, la solution optimale serait soit l'espace

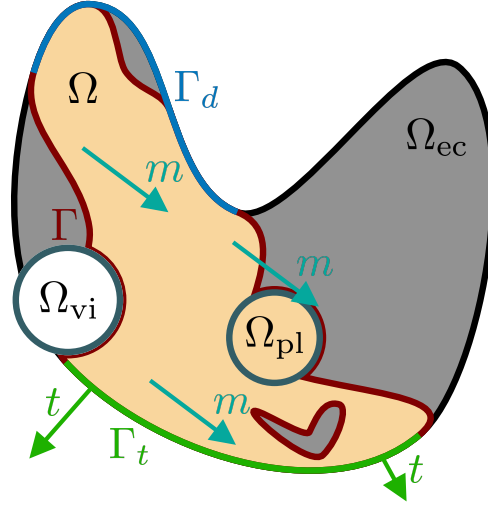


Figure 1.16 – Configuration d'un problème d'optimisation topologique (OT) en élasticité linéaire.

de conception remplie de matière ou de vide en fonction de la description des zones sans matière. En effet, si les zones sans matière sont sans rigidité, dans ce cas l'absence de matériaux dans Ω_{ec} (dans l'espace discrétisé, cela se traduit par $\mathbf{K} = \mathbf{0}_{n_{dof}, n_{dof}}$) est équivalente à une absence de transmission de force et donc à une souplesse nulle. Dans le cas contraire, si les zones sans matière ont une rigidité infinitésimale, l'espace de conception plein est la solution optimale.

Le choix de la fonction pour caractériser la souplesse dans le problème d'optimisation (1.16) nécessite de prendre des précautions notamment en fonction des valeurs prises par la condition aux limites de *Dirichlet* [Montemurro, 2022]. En effet, si $\mathbf{u}_d = \vec{0}$ sur l'ensemble de Γ_d , alors le choix de la fonction n'importe que peu. En revanche, si $\mathbf{u}_d \neq \vec{0}$, alors le **travail des forces extérieures** n'est pas un bon indicateur de la souplesse, ce dernier est égal à [Montemurro, 2022] :

$$c_{tfe} = \mathbf{f}_l^T \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_d^T \mathbf{r}_d = \mathbf{f}^T \mathbf{u} . \quad (1.18)$$

Cet indicateur ne permet pas d'avoir un gradient qui soit fonction uniquement des quantités calculées pour résoudre l'équation (1.15), indispensables pour mettre à jour Ω et résoudre le problème (1.16). Afin de résoudre ce problème, l'indicateur qui doit être

utilisé pour caractériser la rigidité de la structure est l'**énergie potentielle totale** :

$$c_{\text{ept}} = \mathbf{f}_l^T \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_d^T \mathbf{r}_d . \quad (1.19)$$

Si \mathbf{u}_d est nul, ce qui est souvent le cas dans beaucoup de tests de performance dans la littérature, p. ex. [Yago *et al.*, 2022], alors l'équation (1.18) est égale à l'équation (1.19) et la formulation de la fonction objectif n'a pas d'influence sur le résultat.

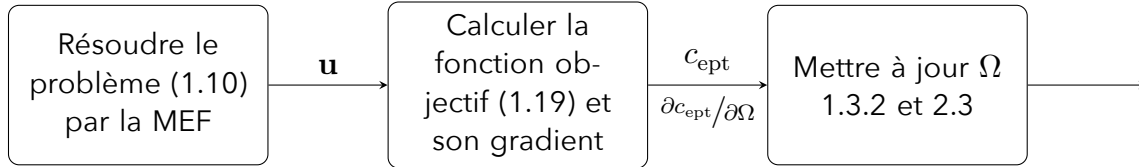


Figure 1.17 – Flux en optimisation topologique (OT) et résumé de la section 1.3.1.

La figure 1.17 synthétise les paragraphes précédents. Dans le cadre de l'OT avec comme physique la mécanique élastique linéaire, la première étape consiste à résoudre le problème (1.10) par la MEF. Cela permet d'obtenir \mathbf{u} et de calculer la fonction objectif et son gradient. Une fois le gradient évalué, la forme Ω peut être mise à jour à l'aide d'un algorithme d'optimisation.

Extension du problème de souplesse en élasticité linéaire Les hypothèses de l'élasticité linéaire imposent que les contraintes de la structure soient inférieures à la limite élastique σ_y . Il est intéressant de pouvoir s'assurer lors de l'optimisation que cette hypothèse soit respectée. En outre, comme décrit à la section 1.1, le procédé de FA montre une anisotropie dans la caractérisation de σ_y en fonction des paramètres du procédé. De plus, intégrer une estimation des contraintes au problème d'OT influence le résultat de la topologie obtenue [Bendsøe et Sigmund, 2003].

Classiquement, la considération des contraintes mécaniques se fait au travers de la minimisation du volume avec une contrainte produit sur les contraintes de *Von Mises* [Bendsøe et Sigmund, 2003]. Le problème s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & V(\mathcal{VD} = \{\Omega\}, \mathcal{PP} = \{E, \nu, \sigma_y, \dots\}) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{C}P t = \{\sigma_{\text{VM}}(\Omega) - \sigma^* = 0\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.10) \text{ ou } (1.11)\} \end{aligned} \quad (1.20)$$

De nombreuses variations du problème (1.20) existent, comme la minimisation de la

souplesse avec comme contrainte produit : les contraintes mécaniques et le volume de Ω [Holmberg *et al.*, 2013] ; ou par l'usage d'autres fonctionnelles afin de caractériser les contraintes mécaniques, comme par exemple [Chen *et al.*, 2024] qui utilisent le critère de fatigue de Crossland.

Pour résoudre numériquement le problème (1.20), la caractérisation de la fonction σ_{VM} influence grandement la topologie obtenue. σ_{VM} peut être caractérisée de manière : **globale**, c.-à-d. connaître et contraindre l'état des contraintes mécaniques maximales *via* un indicateur global sur la topologie Ω , par exemple dans [Fan *et al.*, 2019] ; **locale**, c.-à-d. de connaître et contraindre l'état des contraintes dans chaque élément e , comme dans [París *et al.*, 2009] ; ou encore **régionale**, c'est une solution intermédiaire entre les deux précédentes, notamment dans [Le *et al.*, 2010].

Une autre difficulté est le phénomène de **singularité** [Bruggi, 2008]. La modification de la topologie peut amener à une forme Ω où la moindre modification infinitésimale conduit à une augmentation significative des contraintes mécaniques (et donc à une violation des contraintes produits), mais une modification plus importante pourrait conduire à la pièce optimale. Les méthodes d'optimisation par gradient, souvent utilisées en OT, ne peuvent trouver ces formes singulières.

Malheureusement, en fonction des méthodes choisies, l'ajout des contraintes mécaniques, comme contrainte produit dans le problème d'optimisation (1.4), peut mener à une augmentation du coût de l'optimisation et à des problèmes de convergence, avec des structures moins bien définies, comme souligné dans [Le *et al.*, 2010]. L'augmentation du coût de calcul est critique en optimisation robuste ou fiable. Toutefois, les méthodes d'optimisation sous incertitudes (voir les sections 1.2 et 1.4) sont suffisamment flexibles pour permettre une intégration des contraintes mécaniques et certaines plus économes en coût d'usage, au prix d'une perte d'exactitude ou de justesse ou de fidélité. C'est pourquoi nous avons décidé de ne pas étendre le problème classique de souplesse aux contraintes mécaniques, bien que cette piste soit du plus grand intérêt pour une suite de ces travaux.

La modélisation présentée, dans cette sous-section, est à comparer avec le recueil des incertitudes des procédés de FA. En effet, bien que le comportement choisi pour le matériau ne soit pas idéal, en particulier pour la limite élastique, il peut être utilisé pour propager les incertitudes sur quelques paramètres physiques, à savoir le module de

Young et le coefficient de *Poisson*.

1.3.2 Les méthodes : choix d'un descripteur topologique

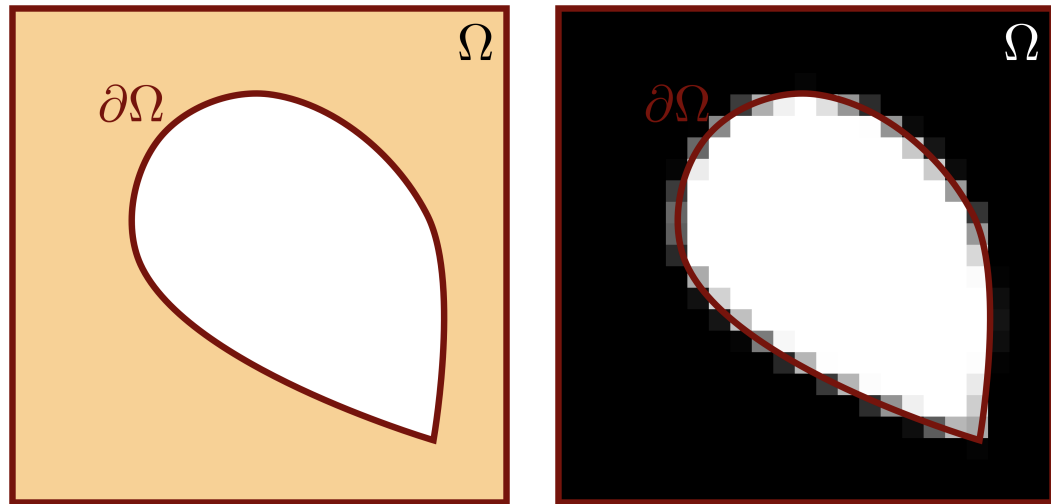
Descripteurs les plus populaires Jusqu'à présent la structure est décrite par la forme Ω . Cependant, numériquement parlant, Ω doit être paramétrée pour pouvoir calculer les sensibilités et être optimisée. Le tableau 1.4 référence les principales méthodes pour paramétrer Ω en OT. Même si elles ont été étendues aux structures multiéchelles, seule l'échelle macroscopique est considérée dans ces travaux. Ces méthodes sont discriminées par leurs **descripteurs** et par la **nature des frontières** pour la forme Ω .

Table 1.4 – Méthodes populaires d'optimisation topologique (OT) et les descripteurs topologique associés.

| Nom de la méthode | Descripteur (VD) | Nature de la frontière | Références |
|-----------------------------|-----------------------|------------------------|---|
| SIMP | pseudo-densité | Pixelisée | [Bendsøe et Sigmund, 2003], [Sigmund et Maute, 2013]. |
| BESO | pseudo-densité | Pixelisée | [Xia <i>et al.</i> , 2018] |
| LSM | Courbe de niveau | Nette | [van Dijk <i>et al.</i> , 2013], [Allaire <i>et al.</i> , 2021]. |
| MMC | Primitives de matière | Nette | [Norato <i>et al.</i> , 2015], [Zhang <i>et al.</i> , 2017b]. |
| MMV | Primitives de vide | Nette | [Zhang <i>et al.</i> , 2017a] |
| SANTO | B-spline ou NURBS | Nette | [Costa <i>et al.</i> , 2018], [Giulio Costa et Pailhès, 2021]. |
| Algorithmes évolutionnistes | pseudo-densité | Pixelisée | [Munk <i>et al.</i> , 2015, p.616] |

Dans le cas de la méthode associée au schéma de pénalisation appelée matériau isotrope avec pénalisation (SIMP) ; à la méthode d'optimisation structurelle évolutive bidirectionnelle (BESO) ou autres méthodes utilisant des algorithmes évolutionnistes, comme l'optimisation par essais particuliers [Luh *et al.*, 2011] ; elles décrivent Ω sous une forme « pixelisée », où la pseudo-densité associée aux éléments, qui discrétisent l'espace de conception, sont les descripteurs de la topologie. Idéalement la topologie obtenue doit être composée uniquement d'éléments vides (blancs) ou pleins (noirs). La frontière, $\partial\Omega$, a une allure pixelisée, comme illustrée par la figure 1.18b. Les éléments peuvent former un maillage régulier de pixels (en 2D) ou de voxels (en 3D), comme pour la figure 1.18b,

mais ce n'est pas une généralité et le maillage peut contenir des éléments triangulaires en 2D si l'espace de conception comporte au moins une courbure. Ces méthodes nécessitent un post-traitement supplémentaire si la pièce doit être fabriquée [Zegard et Paulino, 2016, Prathyusha et Raghu Babu, 2022].

(a) Description nette de $\partial\Omega$.(b) Description pixelisée de $\partial\Omega$.Figure 1.18 – Nature de la frontière $\partial\Omega$.

Les autres méthodes décrivent $\partial\Omega$ soit de manière implicite, p. ex. la méthode des surfaces de niveau (LSM), ou de manière explicite, avec la méthode SIMP et NURBS pour l'optimisation topologique (SANTO). Le rendu de la géométrie est nette ou lisse, comme pointée par la figure 1.18a.

Si la topologie est décrite de façon nette, alors elle doit être cartographiée dans son espace de conception afin de résoudre la physique du problème d'optimisation et calculer les quantités nécessaires pour sa mise à jour. Il existe trois possibilités pour cartographier Ω [van Dijk *et al.*, 2013] :

- Mailler **conformément** Ω dans Ω_{ec} , c'est le cas présenté par la figure 1.19a. L'inconvénient est qu'il faut remailler la géométrie à chaque changement conséquent de topologie lors du processus d'optimisation. Ce qui est coûteux et difficile (surtout en 3D) numériquement parlant.
- Utiliser des méthodes d'**enrichissements des fonctions de base** (*cf.* l'équation (1.12)) au niveau de la frontière de Ω , comme avec la méthode dite des éléments finis étendus [Fries et Belytschko, 2010]. Ces méthodes permettant de décrire avec

plus de précision la frontière sans avoir à remailler, comme illustré par la figure 1.19b. Cependant, elles sont moins populaires que la MEF.

- Utiliser une description **Eulérienne** de Ω en la projetant sur le maillage \mathcal{L} , comme le montre la figure 1.19c. C'est la méthode **basée sur les densités (BD)**. Ainsi, à chaque élément du maillage est associé un niveau de gris représentant sa pseudo-densité. Cette méthode est directe à appliquer, elle est simple à mettre en œuvre, mais elle manque de justesse lors du calcul des contraintes [Wei *et al.*, 2010]. Ce qui en fait une source d'incertitude épistémique, en particulier de l'incertitude de modèles.

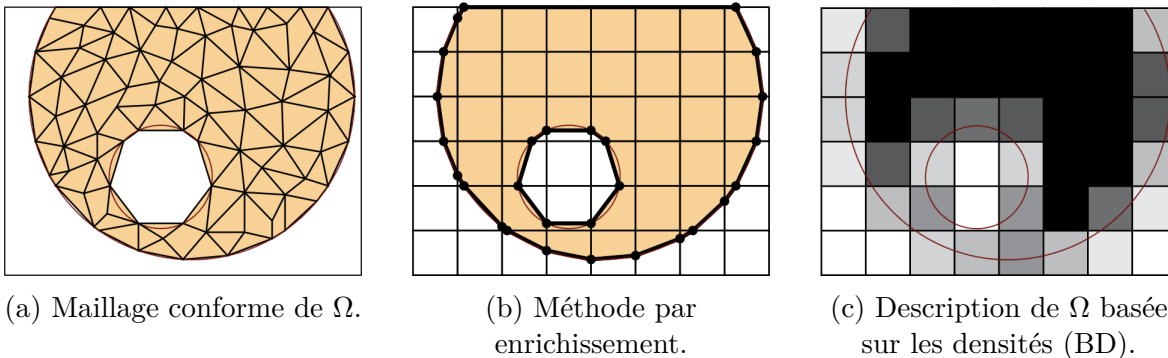


Figure 1.19 – Trois méthodes de cartographie du descripteur topologique, issue de [van Dijk *et al.*, 2013].

La plupart des méthodes dont la nature de la frontière est nette utilisent l'une de ces trois solutions. Par exemple, dans le cas des méthodes par composant alterable et mobile (MMC), [Norato *et al.*, 2015] utilisent une méthode BD, mais [De *et al.*, 2020] utilisent la méthode des éléments finis étendus. Cette remarque est intéressante dans le cas du traitement des incertitudes issues des imperfections géométriques générées par le procédé de FA. En effet, dans le cas d'une cartographie BD, peu importe le descripteur topologique utilisé, à un moment de l'optimisation, l'équation (1.15) doit être résolue sur un maillage semblable à celui des figures 1.18b ou 1.19c ; en d'autres termes, la géométrie est cartographiée grâce à une représentation basée sur les densités pour pouvoir résoudre le problème physique et en calculer une mise à jour, même si son descripteur décrit la frontière de manière nette. Une géométrie cartographiée avec une méthode BD aura **la même apparence** qu'une géométrie décrite via la pseudo-densité de ses éléments, comme avec BESO ou SIMP. Comme nous voulons développer une méthode aussi générale que possible, le modèle d'incertitude sur les imperfections géométriques doit être compatible avec une description BD.

Dans ces travaux, le choix de la méthode d'OT, n'est donc pas lié à son descripteur. Dans la suite de ce manuscrit, nous avons pris la décision d'utiliser la méthode associée au schéma de pénalisation SIMP[¶], car les premiers cas d'usage, développés au démarrage de la thèse, utilisent des codes `MatLab` [The MathWorks Inc., 2023] fournis dans les articles d'[Andreassen *et al.*, 2011] et de [Ferrari et Sigmund, 2020], ainsi que sur le site du [Technical University of Denmark, 2024]. De plus, SIMP est une méthode populaire et est simple à mettre en œuvre. C'est pourquoi nous avons décidé de continuer avec cette méthode. Les prochains paragraphes en donnent les recettes essentielles, en vue de répondre aux questions posées en début de section.

Méthode SIMP Ces paragraphes se limitent à une courte introduction pour la méthode SIMP avec pour physique la mécanique élastique linéaire. De plus, les forces massiques m seront nulles ainsi que les forces de traction t , seules les forces appliquées aux nœuds sont considérées. Pour rappel, la description de la topologie est modélisé par la pseudo-densité (PD) des éléments de l'espace de conception, ce sont aussi des VDs du problème (1.16). Ce qui fait de SIMP une méthode utilisant les cartographies basées sur les densités. Ainsi, chaque élément, e , est associé une **PD** : $\rho_e \in \boldsymbol{\rho} = [\rho_1, \dots, \rho_{n_{el}}]^T$, avec n_{el} le nombre d'éléments discrétisant Ω_{tot} . Le schéma d'interpolation SIMP fait le lien entre les pseudo-densités et la matrice de rigidité élémentaire du matériau fictif \mathbf{K}_e . Les éléments vides ont une PD nulle : $\rho_e = 0$; les éléments pleins, c.-à-d. là où de la matière est présente, ont une PD unitaire : $\rho_e = 1$. Pour SIMP, cette fonction d'interpolation est un **polynôme** de degré p ; il existe de nombreuses variations [Bendsøe et Sigmund, 2003] : fonction rationnelle, décomposition par vaguelette, *et cætera*. Dans le cas présent, ce schéma est utilisé [Andreassen *et al.*, 2011, Ferrari et Sigmund, 2020] :

$$\mathbf{D}_e \oslash \mathbf{D}_e^+ = \alpha + (1 - \alpha)\rho_e^p \text{ avec } \alpha = \mathbf{D}_e^- \oslash \mathbf{D}_e^+ , \quad (1.21)$$

avec α le ratio entre la matrice d'élasticité élémentaire du matériau vide \mathbf{D}_e^- et plein \mathbf{D}_e^+ . \mathbf{D}_e^+ est fonction de E et ν et équivaut à la matrice utilisée pour décrire D dans la loi de comportement décrite par l'équation (1.7). Cette constante permet d'assigner une rigidité **minimale**, même si l'élément est vide; cela évite des problèmes de convergence expliqués tantôt. \mathbf{D}_e est maintenant fonction des pseudo-densités. p est la puissance de la loi de pénalisation SIMP, elle permet de pénaliser les PDs avec des valeurs intermédiaires

¶. Ultérieurement le schéma de pénalisation SIMP et la méthode associée seront tous les deux dénommés par SIMP.

($0 < \rho < 1$) qui n'ont que peu de sens physique. Si $p > 1$, alors les PDs à valeurs intermédiaires ont proportionnellement une rigidité moins importante, dès lors, il est moins intéressant de sélectionner ces valeurs pour minimiser la fonction objectif. Une valeur de $p = 3$ est habituelle et si $p = 1$, alors le problème d'optimisation est convexe [Rozvany, 2009]. C'est la formulation faible de l'équation (1.11), modifiée par l'équation (1.21), qui est employée avec **DOFINx**.

Pour trouver une solution au problème (1.16), il ne reste qu'à exprimer le gradient de la souplesse et du volume en fonction du descripteur topologique choisi. Dans le cas de la souplesse, comme ρ_e est constante dans Λ_e , le gradient de l'équation (1.19) est égal à [Montemurro, 2022] :

$$\frac{\partial c_{\text{ept}}}{\partial \rho_e} = -\mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \rho_e} \mathbf{u} = -p\rho_e^{p-1} (1 - \alpha) \mathbf{u}^T \mathbf{K}_e^+ \mathbf{u} , \quad (1.22)$$

avec $\mathbf{K}_e^+ = \int_{\Lambda_e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D}_e^+ \mathbf{B}^e d\Omega$ la matrice de rigidité élémentaire du matériau plein. Pour le volume, comme $V(\boldsymbol{\rho}) = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \rho_e \int_{\Lambda_e} 1 d\Omega_{\text{tot}}$ et ρ_e est constante dans Λ_e , il s'en suit que :

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_e} = \int_{\Lambda_e} 1 d\Omega_{\text{tot}} = v_e , \quad (1.23)$$

avec v_e le volume de l'élément e . Si ces formules sont appliquées, alors des motifs en **davier d'échec** apparaîtront, ce qui n'est pas souhaitable, car la structure optimisée ne peut pas être fabriquée. Plusieurs méthodes ont été développées pour contrer cet effet, elles sont détaillées dans les références suivantes [Bendsøe et Sigmund, 2003, Rozvany, 2009]. Toutefois, dans la suite de ce manuscrit, seules les méthodes par **filtrage** seront utilisées. Elles permettent de garantir : une taille de bras minimale comme contrainte issue du procédé, c'est le **filtre de convolution** ; de fournir des conceptions sans niveau de PDs intermédiaires difficilement interprétables d'un point de vue physique, c'est le filtre d'*Heaviside*. Cela est nécessaire, dans l'optique valider expérimentalement, la méthode et les modèles avec les procédés de FA.

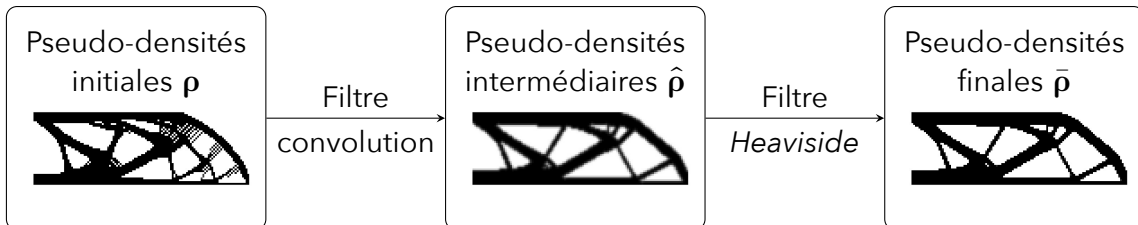


Figure 1.20 – Les filtres utilisés dans SIMP et leurs effets sur la topologie.

Pour cela deux filtres sont utilisés successivement : un filtre de convolution, où le **rayon minimal** est renseigné, ici par la variable r^* ; puis par un **filtre discriminant**, dit d'*Heaviside*. La figure 1.20 donne les géométries obtenues à la fin de la procédure d'optimisation et après l'application d'aucun, d'un ou tout les filtres. Dans la figure gauche de 1.20, les motifs en damier d'échec apparaissent si aucun filtre n'est appliqué ; si le filtre de convolution est appliqué alors, la structure optimisée est floue, mais ce flou disparaît, dès lors que le filtre d'*Heaviside* est utilisé.

Le filtre de convolution modifie les pseudo-densités initiales \mathbf{p} comme de cette manière :

$$\hat{\rho}_e = \frac{\sum_{i \in \mathcal{B}_e} H(\Lambda_i, \Lambda_e) \rho_i v_i}{\sum_{i \in \mathcal{B}_e} H(\Lambda_i, \Lambda_e) v_i}, \quad (1.24)$$

avec $H(\Lambda_i, \Lambda_e) = \max(0, r^* - \|O_i - O_e\|_2)$ un poids associé aux éléments dans le voisinage de Λ_e dans la boule de rayon r^* et de centre O_e . $\mathcal{B}_e = \{i \mid \|O_i - O_e\|_2 \leq r^*\}$ est l'ensemble contenant les indices des éléments inscrits dans la boule de rayon r^* et de centre O_e . La modification des PDs intermédiaires utilise cette approximation de la fonction d'*Heaviside* [Wang *et al.*, 2011] :

$$\bar{\rho}_e = \frac{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(\hat{\rho}_e - \eta))}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))}, \quad (1.25)$$

avec β une constante décrivant l'exactitude de l'approximation de la fonction d'*Heaviside* : plus la valeur de β est importante et plus l'approximation est exacte. La paramètre η est un seuil qui discrimine les pseudo-densités, si $\hat{\rho}_e$ est sous ce seuil, alors $\bar{\rho}_e = 0$ et *vice versa*. Pour le paramètre β des valeurs autour de la centaine sont courantes et pour η des valeurs autour de $1/2$. Dans la littérature des schémas dits de « *continuation* » sont courants. Ils augmentent les valeurs de p et β de manière incrémentale, soit dès que la convergence est atteinte pour un jeu de paramètre ou pour un nombre d'itérations prédéterminées. Le schéma de continuation pour p conduit parfois à de meilleures solutions ; et pour β , ils permettent une meilleure convergence. Des valeurs de p faible augmentent les niveaux de PD intermédiaire, ce qui n'est pas souhaitable lorsque les incertitudes sur la topologie sont considérées [Chen et Chen, 2011]. C'est pourquoi le schéma de continuation n'est appliqué que pour β . Par la suite, les pseudo-densités finales représentent les pseudo-densités utilisées pour résoudre le problème physique ; pour SIMP ce sont les pseudo-densités obtenues après les opérations de filtrages.

Les gradients donnés par les équations (1.22) et (1.23) doivent être modifiés en conséquence. En effet, le champ de PD est maintenant calculer avec $\bar{\rho}$ et l'équation (1.21) doit être reformulée de cette façon :

$$\mathbf{D}_e \circledast \mathbf{D}_e^+ = \alpha + (1 - \alpha)\bar{\rho}_e^p \text{ avec } \alpha = \mathbf{D}_e^- \circledast \mathbf{D}_e^+ . \quad (1.26)$$

Connaissant $\partial z / \partial \bar{\rho}_e$ (il s'agit des équations (1.22) et (1.23) en remplaçant ρ_e par $\bar{\rho}_e$), la modification du gradient se fait par la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial z}{\partial \rho_e} = \sum_{k=1}^{n_{el}} \sum_{j=1}^{n_{el}} \frac{\partial z}{\partial \bar{\rho}_k} \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e} = \sum_{j \in \mathcal{B}_e} \frac{\partial z}{\partial \bar{\rho}_j} \frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e} , \quad (1.27)$$

avec z une fonction qui peut être remplacée par c_{ept} ou V . Finalement, les dérivées partielles de l'équation (1.27) s'obtient de la manière suivante. Pour $\partial \hat{\rho}_j / \partial \rho_e$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e} = \frac{H(\Lambda_j, \Lambda_e)v_e}{\sum_{i \in \mathcal{B}_j} H(\Lambda_i, \Lambda_j)v_i} , \quad (1.28)$$

et pour $\partial \bar{\rho}_j / \partial \hat{\rho}_j$:

$$\frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial \hat{\rho}_j} = \beta \frac{1 - \tanh(\beta(\hat{\rho}_j - \eta))^2}{\tanh(\beta\eta) + \tanh(\beta(1 - \eta))} . \quad (1.29)$$

Tous les éléments sont en place, il ne reste qu'à assigner un champ de PD initial à la première itération. Généralement, la topologie initiale est décrite à l'aide d'un niveau de gris intermédiaire égale à la cible en fraction de volume, par exemple, si l'espace total est égal à l'espace de conception, alors $\boldsymbol{\rho}^0 = \varphi^* \mathbf{1}_{n_{el},1}$. Au début de l'optimisation, aucune frontière n'est visible, elles apparaissent au cours de l'optimisation ; contrairement aux autres méthodes dont la description de la frontière est nette (voir tableau 1.4), où dès le départ des frontières existent. Cela peut influencer grandement la prise en compte des imperfections géométriques et des tests de vérification doivent être effectués.

Conclusion En définitive, le problème de minimisation de la souplesse pour SIMP, s'énonce de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & c_{\text{ept}} \left(\begin{array}{l} \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \\ \mathcal{HP} = \{r^*, \varphi^*, \Omega_{\text{tot}}^*, p, h, \beta, \dots\}, \\ \mathcal{PP} = \{E, \nu\} \end{array} \right) \\ \text{sujet à} \quad & \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{CPe} = \{r_{\min}(\bar{\boldsymbol{\rho}}) - r^* = 0\} \\ \mathcal{CPl} = \{V(\bar{\boldsymbol{\rho}})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \Omega_{\text{tot}} = \Omega_{\text{tot}}^*\} \\ \mathcal{CM} = \{0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 1, \boldsymbol{\rho}^0 = \varphi^* \mathbf{1}_{n_{\text{el}},1}, (1.26), (1.24), (1.25)\} \\ \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\} \end{array} \right. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Noter que l'ensemble \mathcal{HP} est bien plus important. Dans le problème (1.30), il n'y a que les hyperparamètres qui sont généralement considérés comme des entrées du modèle, comme par exemple : les valeurs des contraintes, la pénalité et la finesse du maillage.

L'objectif de la section était de traiter les questions suivantes :

L'optimisation topologique regroupe de nombreuses approches, en vue d'intégrer les incertitudes identifiées par le concours des questions précédentes, les interrogations suivantes prévalent. Comment ces approches **fonctionnent-elles**? Est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des **boîtes noires**? Comment être le plus **extensif** si possible?

Pour cela, la première partie de cette section est dédiée au fonctionnement des méthodes d'optimisation topologique et en particulier la méthode SIMP. Cette étude nous a permis de distinguer les méthodes en fonction de la représentation de la géométrie et des descripteurs associés. Cependant, même s'il est possible de décrire les frontières de manière nette, la géométrie doit être cartographiée pour pouvoir évaluer le modèle physique et les sensibilités associées. Pour cela, trois méthodes sont utilisées dans la littérature, l'approche BD projette Ω dans le maillage \mathcal{L} . Cette approche peut être commune à toutes les méthodes d'OT et est similaire aux méthodes utilisées par [Moroni *et al.*, 2017, Moroni et Petrò, 2018] pour caractériser expérimentalement la similitude entre une pièce fabriquée et sa représentation numérique sous forme de voxels (comme le montre la section 1.1.3). Cette étape de caractérisation est importante pour valider et favoriser la certification de pièce FA (se référer à la section 1.1.3 et la fin de la section 1.2.1). De plus, la représentation de la topologie BD permet une certaine extensivité. Bien que pour les premières itérations SIMP soit incapable de décrire clairement la

frontière, nous avons décidé d'utiliser SIMP comme méthode OT, due au fait que cette méthode soit parfaitement adaptée aux basée sur les densités. De plus, la description des modèles physiques permet de recueillir d'autres sources d'incertitudes, notamment les paramètres physiques de la loi de comportement de l'équation (1.7) et les conditions aux limites.

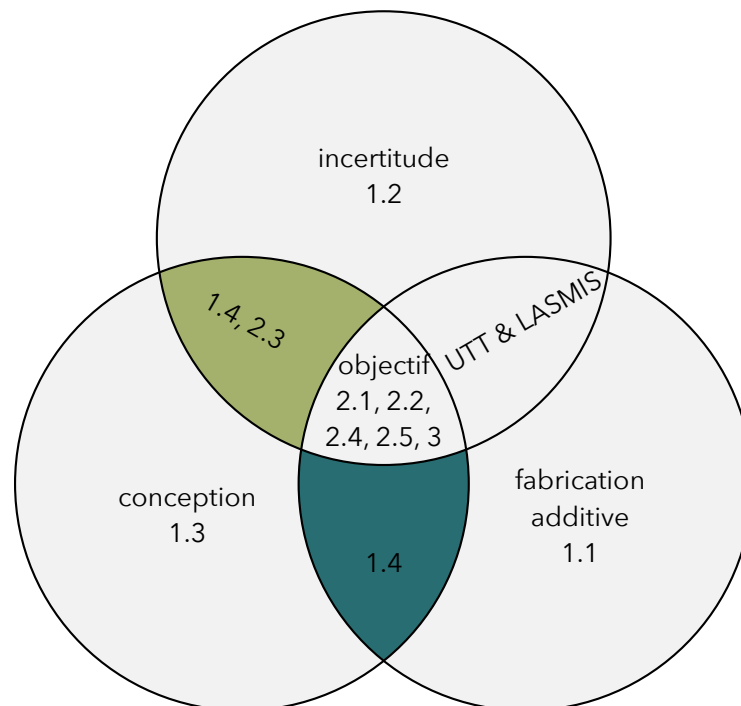
Finalement, il semble difficile de considérer l'OT comme une boîte noire, car une modification sur la topologie entraîne immédiatement une modification de la fonction coût. Inversement, une modification de la fonction objectif entraîne une modification du descripteur topologique. Modification nécessaire pour évaluer la robustesse de la conception. Si la fonction objectif change, alors le gradient doit lui aussi changer. Toutefois, dans la littérature, des simplifications sont parfois utilisées. Cette question est ré-évaluée à la sous-section 1.4.2.

1.4 L'optimisation topologique sous incertitudes

Cette section a pour but de répondre aux questions suivantes :

L'optimisation topologique est un processus numérique complexe. Quels sont les **effets** des incertitudes sur le résultat généré? Comment sont-elles **inté-grées** dans le processus d'optimisation topologique? Et est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des **boîtes noires**?

À cet effet, cette section complète la précédente et est destinée à analyser les différentes méthodes d'optimisation topologique sous incertitudes. La sous-section 1.4.1 introduit les modifications à apporter au problème d'optimisation vu à la section 1.3 en fonction des notions sur la robustesse abordées à la section 1.2. La sous-section 1.4.2 se veut plus spécifique, elle introduit les possibilités offertes par l'optimisation topologique robuste (OTR) et les approches permettant de considérer les incertitudes sur la topologie. Les limitations des techniques actuelles sont établies au regard des sections précédentes.



1.4.1 Optimisation robuste et simulation de Monte Carlo

Dans cette section, les variables incertaines sont entachées d'incertitude aléatoire, la revue de [Schuëller et Jensen, 2008, pp. 6–8] donne plus de détails et de références, mais ne s'attarde pas nécessairement sur la représentation des incertitudes épistémiques, exception faite de la représentation sous forme d'intervalles.

Pour faire de la robustesse en optimisation, il est fréquemment recherché de minimiser deux caractéristiques de la loi de probabilité du système d'intérêt : la moyenne et l'écart-type [Schuëller et Jensen, 2008, Beyer et Sendhoff, 2007]; d'autres indicateurs sont utilisés comme une probabilité de défaillance sur les contraintes du problème d'optimisation. Il est important de souligner que la frontière entre les problèmes d'optimisation pour une conception s'appuyant sur la fiabilité (RBDO) et d'optimisation pour une conception robuste (RDO) est floue; en effet si quelqu'un s'en tient à la définition de la fiabilité, dans ce cas la plupart des méthodes traitant de fiabilité sont en réalité de l'optimisation robuste avec des contraintes exprimées sous forme de probabilité [Schuëller et Jensen, 2008], car il n'y a souvent aucune notion de la durée d'emploi. Plusieurs combinaisons de fonction objectif sont possibles, il est même envisageable d'utiliser des approches d'optimisation multiobjectifs [Schuëller et Jensen, 2008] ou bien un seuil probabiliste [Beyer et Sendhoff, 2007]. Classiquement, la fonction objectif est une somme pondérée entre la moyenne et l'écart-type de la performance du système. Le problème décrit par l'équation (1.30) doit faire apparaître ces deux indicateurs *ipso facto* ce n'est plus la souplesse qui est minimisée, mais sa moyenne et son écart-type qui sont fonction des différentes sources d'incertitudes qui auront été modélisées, agrégées et propagées (*cf.* section 1.2.1). En conséquence, si les incertitudes sont représentées avec la théorie des probabilités, dès lors le problème (1.30) s'écrit :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & \tilde{c}_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_{n_{\text{va}}}\}, \mathcal{VD} = \{\rho\}, \dots) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{CPl} = \{V(\bar{\rho})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \dots\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\}, \dots \end{aligned} \quad (1.31)$$

avec \tilde{c}_{ept} la fonction objectif incluant une quantification de la robustesse de la souplesse, qui est égal à :

$$\tilde{c}_{\text{ept}} = k m_1(\Upsilon) + (2 - k) \sqrt{\mu_2(\Upsilon)}, \quad (1.32)$$

où $k \in [0, 2]$ est un poids utilisé pour pondérer la fonction objectif robuste entre la

moyenne et l'écart-type de Υ : si $k = 0$, alors seul le terme portant sur l'écart-type (μ_2) est minimisé ; au contraire, si $k = 2$, alors c'est uniquement la moyenne (m_1) qui est minimisée ; enfin, si $k = 1$, alors l'optimisation est équilibrée entre la moyenne et l'écart-type de Υ . m_1 et μ_2 sont les moments statistiques donnés par les équations (1.2) et (1.3). En dernier, Υ est la variable aléatoire qui quantifie la souplesse de la structure et est fonction du vecteur aléatoire $\Xi = (\Xi_1, \dots, \Xi_{n_{va}})$, impactant l'état de la pièce, p. ex. la norme et l'angle d'une force, *et cætera*. En gardant les mêmes notations qu'à la section 1.2 :

$$\mathbb{P}_\Upsilon = \mathbb{P}_{c_{\text{ept}}(\mathcal{E}=\{\Xi_1, \dots, \Xi_{n_{va}}\}, \mathcal{VD}=\{\rho\}, \dots)} , \quad (1.33)$$

avec \mathcal{E} l'ensemble qui contient les variables aléatoires qui altèrent c_{ept} de plusieurs façons comme l'illustre la sous-section 1.4.2. Dans le problème (1.31), la contrainte en volume peut être de différente nature, à savoir : une contrainte sur le volume de la topologie qui n'est pas affectée par les incertitudes ; une probabilité de volume à ne pas dépasser ; ou un indicateur sur la moyenne du volume. Dans ce travail, c'est la première solution qui est retenue. De plus, les incertitudes comportementales peuvent affecter le choix de la valeur de la contrainte, mais cet aspect est négligé dans la suite des travaux.

Connaitre avec précision, la FDP de la loi de probabilité \mathbb{P}_Υ n'est possible que dans des cas simples où la fonction inverse de c_{ept} est calculable [Helton *et al.*, 2004], ce qui n'est pas le cas du calcul de la souplesse d'une pièce quelconque. Dans ce cas, un théorème (*the law of the unconscious statistician*) permet d'exprimer les moments en fonction de c_{ept} et non de son inverse. Cependant, les intégrales des moments, une par variable aléatoire, ne sont calculables analytiquement que dans des problèmes simples et nécessitent de connaître la probabilité jointe. Dans ces conditions, il faut **estimer** numériquement les moments et l'état des VDs. Dans cette optique, deux approches existent :

- Les approches **non intrusives** considèrent le système comme une boîte noire, elles n'ont besoin que des mesures sur \mathbb{P}_Υ ou des réalisations du modèle c_{ept} en des points particuliers, mais toujours en concevant le phénomène (et la simulation numérique) comme déterministe.
- Les approches **intrusives**. Dans ce cas, il faut être en mesure de calculer les indicateurs de l'équation (1.31) et les sensibilités associées en intégrant dans les équations qui régissent le système les incertitudes [Stefanou, 2009]. Cela peut être épineux, car il faut développer de nouveaux solveurs.

Dans la mesure où les sensibilités sont connues (*cf.* les équations (1.22), (1.23) et (1.27)) et que nous avons des contraintes logicielles et de temps, les approches non intrusives

sont les plus adaptées. En conséquence, les valeurs de $m_1(\Upsilon)$ et de $\mu_2(\Upsilon)$ doivent être estimées (les estimateurs seront notés par \hat{m}_r et $\hat{\mu}_r$) à partir de réalisations d'un modèle déterministe. Il va de soi qu'en fonction des approches choisies les estimations sont plus ou moins entachées d'incertitude de modèles et d'erreurs numériques.

Pour estimer les moments (donc propager les incertitudes) d'une loi de probabilité, plusieurs méthodes sont à disposition, selon [Schuëller et Jensen, 2008] :

- Les séries de *Taylor* (méthode des perturbations) et autres développements : chaos polynomial, *Karhunen–Loève*, *et cætera*.
- Des schémas d'intégration parfois adaptés à des méthodes de réduction de dimension, comme dans [Xu et Dang, 2019].
- Des méthodes de simulation, p. ex. l'échantillonnage par hypercube latin et la simulation de Monte-Carlo (SMC).

Bien souvent, lorsque des méthodes non intrusives sont utilisées, les estimations des moments prennent la forme d'une somme pondérée de plusieurs réalisations du modèle déterministe, laissant la possibilité, à condition que les codes soient flexibles, de changer avec facilité les méthodes de propagation et de calculer les gradients des moments avec aisance. De par la flexibilité de mise en œuvre de la SMC et de la transparence par rapport à la taille du vecteur aléatoire, Ξ , la SMC est la méthode qui est retenue et sert souvent de référence. En appliquant le théorème discuté précédemment, les moments, du problème de souplesse défini par l'équation (1.31), s'expriment de la façon suivante :

$$\begin{aligned} m_1(\Upsilon) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\Upsilon}(t) dt , \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u_1, \dots, u_{n_{\text{va}}}\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) f_{\Xi}(u) du_1 \dots du_{n_{\text{va}}} , \end{aligned} \quad (1.34)$$

et :

$$\begin{aligned} \mu_2(\Upsilon) &= \int_{-\infty}^{+\infty} [t - m_1(\Upsilon)]^2 f_{\Upsilon}(t) dt , \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) - m_1(\Upsilon)]^2 f_{\Xi}(u) du . \end{aligned} \quad (1.35)$$

Dans le cas de la SMC, les estimateurs des équations (1.34) et (1.35) sont calculés comme suit :

$$\hat{m}_1(\Upsilon) = \frac{1}{n_{\text{smc}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u_1^i, \dots, u_{n_{\text{va}}}^i\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) , \quad (1.36)$$

et :

$$\hat{\mu}_2(\Upsilon) = \frac{1}{n_{\text{smc}} - 1} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} [c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^i\}, \mathcal{VD} = \{\rho\}, \dots) - \hat{m}_1(\Upsilon)]^2, \quad (1.37)$$

avec u_j^i la i -ième réalisation de la variable aléatoire Ξ_j et u^i la i -ième réalisation du vecteur aléatoire Ξ . La méthode d'estimation devra être améliorée en regard de la taille de l'échantillon, n_{smc} , pour avoir une exactitude suffisante dans l'estimation des moments ; cette taille induit nécessairement un temps de calcul sisyphéen dû aux multiples calculs par la MEF utilisés pour évaluer c_{ept} .

Cette sous-section aborde l'optimisation robuste en cas d'incertitudes aléatoires. La formulation du problème d'OT sans incertitude a été modifiée en conséquence. L'évaluation des indicateurs de la robustesse de la structure est détaillée avec la SMC. Cette dernière, bien que coûteuse en temps de calcul, reste une référence et intégrable facilement. De plus, elle est insensible au nombre de variables aléatoires.

1.4.2 Atténuation des effets des incertitudes en optimisation topologique

Introduction Du problème (1.30) tous les paramètres peuvent être incertains. À l'instant où ces lignes sont rédigées, aucune revue récente sur le sujet n'a été trouvée, la seule fut écrite par [Maute, 2014].

L'une des manières d'intégrer les incertitudes émanant du problème physique est par les **forces** (actions) s'appliquant à la structure. Dans la littérature, les incertitudes sur les forces exercées tiennent compte de ces paramètres : la **localisation**, la **norme** et l'**orientation**. Les recherches de [Freitag *et al.*, 2022] considèrent la localisation des forces comme incertaine ; à cet égard, ils ont profité de la formulation en OT lorsque plusieurs forces s'appliquent à une structure, dans ce cas le gradient de la souplesse est égal à la moyenne des gradients pour chacune des forces. Les incertitudes dans l'intensité et l'orientation des forces ont été intégrées par la méthode des perturbations dans [Peng *et al.*, 2018] ; l'utilisation de cette méthode permet de traiter de petites perturbations pour ces deux grandeurs grâce à l'usage des séries de *Taylor*, un gain de coût de calcul est possible, mais le choix de la représentation des incertitudes est restreint sans adaptation. [Torres *et al.*, 2021] ont remplacé les onéreuses SMCs par l'approche des modèles d'ordre réduit stochastiques (*stochastic reduced order models*) ; cette méthode a

pour avantage d'être aussi transparente que la SMC tout en utilisant un nombre limité d'évaluations du modèle d'élément finis et ne requiert que des modifications mineures si un code emploie déjà les SMCs pour estimer la fonction objectif. Dans cette étude, l'intensité et l'orientation des forces sont considérées comme étant incertaines, les lois de probabilité de Ξ sont quelconques. La recherche menée par [Wang et Gao, 2020] traite la localisation de multiples forces ; ici les incertitudes sur la localisation ne prennent pas une forme probabiliste ; la localisation est bornée par un intervalle autour de leurs points d'application nominaux. Le calcul de la structure robuste s'inspire de la doctrine : tirer le meilleur du pire (*make the best out of the worst*). Enfin, les travaux de [Dapogny *et al.*, 2023] parviennent à étudier les incertitudes épistémiques au travers d'une formulation robuste par rapport à la distribution ; en ce sens deux lois de probabilités sont définies \mathbb{P} et \mathbb{Q} , la loi \mathbb{P} est connue à partir de données quelconques (expérimentales par exemple), le but est de trouver la loi \mathbb{Q} la plus éloignée (mais inférieure à un seuil prédéfini) de \mathbb{P} . La méthode permet de considérer des lois génériques pour décrire le vecteur force, et est relativement peu coûteuse en temps de calcul, car toutes les sensibilités sont calculables sans échantillonnage. Ce paragraphe n'a pas pour objectif d'être exhaustif, et de nombreuses autres applications existent en OTR, p. ex. quand des indicateurs fiabilistes sont utilisés [Meng *et al.*, 2020].

Du problème physique, il est possible de considérer la **matrice de rigidité** ou ses paramètres constitutifs. Dans [Asadpoure *et al.*, 2011], les auteurs s'intéressent à de petites variations de la matrice de rigidité, les solutions robustes sont obtenues à partir de la somme entre moyenne et écart-type, les incertitudes sont propagées par un développement de *Taylor*. De nombreuses études considèrent les paramètres physiques de la loi de comportement (pour rappel, il s'agit de l'équation (1.10)) comme étant entachées par des incertitudes. Par exemple dans [Meng *et al.*, 2021] le module de *Young* et le coefficient de *Poisson* sont modélisés soit : par une loi normale dans le cas d'une modélisation probabiliste, c'est un cas de *Quetelisme*, car aucun tronquage n'est mentionné ; ou par des fonctions d'appartenances triangulaires pour une représentation avec la logique floue. Outre une modélisation avec des méthodes de représentations aléatoires ou épistémiques des paramètres physiques, ces derniers ont été modélisés par un champ aléatoire dans [Lazarov *et al.*, 2012] ; un champ aléatoire associe une variable aléatoire à chaque point d'un espace, en d'autres termes, un champ aléatoire permet de décrire un phénomène aléatoire dans un domaine arbitraire et il peut être contraint en certains points de l'espace [Jansen *et al.*, 2015]. Par exemple dans [Lazarov *et al.*, 2012] le module de *Young* est

modélisé par un champ aléatoire uniformément distribué. En OT, il est possible d'optimiser une pièce avec plusieurs matériaux, comme introduit dans la section 1.3.1, l'étude menée par [Kang *et al.*, 2019] considère les incertitudes dues aux réactions à l'interface de deux matériaux différents. Outre ce travail, nous n'avons pas trouvé d'études portant sur les incertitudes dans la disposition des matériaux pour l'OT multimatériaux.

Jusqu'à présent, de l'équation (1.30) seules les incertitudes liées à la physique du problème d'optimisation ont été revues. Comme l'OT intervient précocement dans le processus de conception, au regard de la formulation d'un problème d'OT, il est vraisemblable que l'espace de conception ou l'espace total n'ait pas encore de frontière bien définie, ce qui est une source d'incertitude de conception. Les incertitudes sur l'espace de conception ont été considérées dans [Meng *et al.*, 2020, Meng *et al.*, 2021], où certaines dimensions, de la boîte englobante qui constitue l'espace de conception, sont modélisées soit par une loi de probabilité ou par des fonctions d'appartenances. Dans [Li *et al.*, 2022], les positions des espaces de non-conception (vide ou plein) sont traitées comme mobiles et sont optimisées au cours du processus d'optimisation. De plus, des incertitudes sur la norme, l'orientation des forces et le module de *Young* sont intégrés au processus d'optimisation, ces dernières sont représentées sous forme d'intervalles. Malheureusement, la position (optimisée) de ces espaces est déterministe. Une autre approche récente pour considérer les incertitudes de conception est par les méthodes de **conception générative** [Regenwetter *et al.*, 2022]. Ces méthodes, basées sur des outils d'intelligence artificielle, permettent de générer un éventail de solutions en fonction de contraintes, et cela de manière plus ou moins instantanée. Par exemple, [Jang *et al.*, 2022] génèrent une série de conception en fonction des forces appliquées et de la similarité avec des conceptions existantes. Finalement, les efforts de [Behzadi et Ilies, 2021] permettent de fournir rapidement des conceptions optimisées à partir d'un espace de conception et de configurations sur les conditions aux limites variés.

L'intégration des incertitudes épistémiques dans l'OT est une préoccupation récente. Parmi les articles déjà mentionnés, les incertitudes sous forme d'intervalles sont la représentation la plus commune dans la littérature. Cependant, dans la littérature, l'usage d'intervalles pour décrire les incertitudes épistémiques est une question qui est vivement débattue dans la communauté « incertitude » [Ferson *et al.*, 2004]. Ainsi, d'autres représentations sont employées. Dans [Freitag *et al.*, 2022] les auteurs recourent aux p-boîtes pour agréger : les incertitudes épistémiques représentés sous une forme d'intervalle ; et les incertitudes aléatoires représentés par des lois de probabilité. Les p-boîtes sont en-

suite utilisées pour un problème d'optimisation fiable^{||}. Un aspect délicat de ce travail est que la propagation des incertitudes n'est pas réalisée, en totalité, dans la boucle d'optimisation topologique (uniquement la position des forces y est incluse). Les incertitudes issues de la norme de la force, du module de *Young* et l'épaisseur de la structure sont intégrées après que l'OT ait produit une solution. L'objectif reste de minimiser un volume (fonction de l'épaisseur et de l'aire de Ω) en fonction de ces incertitudes et de contraintes, mais pas la topologie Ω . Dans [Meng *et al.*, 2021], les incertitudes épistémiques sont modélisés à l'aide d'une représentation par la logique floue. L'agrégation des incertitudes épistémiques et des incertitudes aléatoires est faite de manière découplée. Les variables entachées d'incertitude épistémique sont traitées dans un problème d'optimisation à part : la fonction objectif (la souplesse) est minimisée en considérant les fonctions d'appartenances normalisées et se réduit à une étude du pire cas. Enfin, [Zhao *et al.*, 2019] utilisent la théorie de *Dempster-Shafer* (aussi appelé théorie de l'évidence ou de la croyance) pour représenter les incertitudes épistémiques. Le problème d'optimisation est présenté comme un problème d'optimisation fiable, la remarque précédente s'applique aussi. Dans cet article, les auteurs transforment les structures de *Dempster-Shafer* en lois uniformes. Malencontreusement, cette transformation hâtive dans le processus d'optimisation fait que la méthode déployée ne profite pas de tous les avantages de la théorie de *Dempster-Shafer*, en particulier la définition de bornes sur la vraisemblance des fonctions de répartition (CBF et CPF).

Parmi les différentes études susmentionnées, aucune n'essaye de quantifier l'apport de chacune des sources d'incertitudes à la variabilité totale du problème de robustesse (ou de fiabilité). Seul [Javed et Rout, 2014] ont proposé une étude de sensibilité basée sur un plan d'expérience. Malheureusement, les modèles pour considérer les incertitudes géométriques sont hétéroclites et les auteurs n'ont testé que leur modèle, cela dit, ils ont conclu que parmi les forces, le module de *Young*, la géométrie (modélisé au travers de la fraction volumique) et le rayon minimal r^* , la géométrie est le facteur qui a le plus d'influence sur la performance de la topologie résultante. Ceci nous encourage davantage à nous concentrer sur l'atténuation des effets des incertitudes affectant la topologie.

Imperfections géométriques En OTR considérer et atténuer les effets des incertitudes affectant la topologie se fait au travers de trois approches. La figure 1.21 illustre les différentes catégories et positionne ces travaux avec le rectangle pointillé. En effet la

^{||}. Ici, le problème peut être qualifié de : robuste avec des indicateurs fiabiliste.

méthode d'OT utilisé est SIMP et son descripteur sont les pseudo-densités associés aux éléments du maillage. Ces catégories sont définies de la manière suivante :

1. La méthode **lagrangienne** vient perturber la frontière de la géométrie en assignant un déplacement aux nœuds caractérisent la peau de la pièce. Cela peut être réalisé grâce aux nœuds qui composent le maillage du problème d'éléments finis.
2. L'approche **eulérienne** vient perturber la frontière en l'ajustant sur un maillage fixe, généralement un champ de vitesse caractérise les écarts. Cette approche peut être effectuée en affectant par de l'incertitude : certains hyperparamètres associés à la méthode d'OT (et cela de manière plus ou moins intrusive en fonction des paramètres choisis) ; les VDs du problème d'optimisation ; ou le champ de pseudo-densités finales d'une méthode d'OT recourant à une cartographie BD.
3. En modifiant **le problème d'optimisation**. Soit en ajoutant à la fonction objectif des indicateurs plus spécialisés que la souplesse pour traiter les imperfections géométriques ; si les effets des incertitudes sont atténués pour tous les indicateurs, alors il s'agit de « couplage fort », s'ils sont atténués pour une partie, alors il est question de « couplage faible ». Ou bien en traitant l'optimisation de la performance de la topologie (p. ex. la souplesse) et les imperfections géométriques de manière séparée, c'est-à-dire en deux étapes.

Relativement à la méthode eulérienne avec une affectation des incertitudes sur les hyperparamètres, pour SIMP deux hyperparamètres peuvent jouer ce rôle. Le premier est le paramètre η du filtre d'*Heaviside* (équation (1.25)). Les premières intuitions s'amorcent par l'utilisation de filtres basées sur des techniques de **morphologie mathématique** [Sigmund, 2007, Sigmund, 2009], l'implémentation de ces méthodes appartient à la sous-catégorie où les pseudo-densités finales sont modifiées, ce qui pour SIMP est équivalent aux modifications des VDs. La variable η permet de discriminer, en fonction de son niveau, ce qui est plein de ce que est vide, la modifier donne le contrôle du contour de la topologie. La figure 1.22 illustre ces propos ; la figure 1.22a représente la topologie érodée avec une valeur de $\eta = 0.9$, la figure 1.22b est la topologie de référence avec une valeur intermédiaire $\eta = 0.5$ et la figure 1.22c matérialise la topologie dilatée avec $\eta = 0.1$.

C'est ce qu'ont réalisé [Lazarov *et al.*, 2011], dans cette étude des mécanismes flexibles sont conçus, la variable η est représentée par une loi uniforme et les incertitudes sur la souplesse sont propagées à l'aide de méthodes non intrusives qui sont la méthode de collocation stochastique (*stochastic collocation method*) et la SMC. Cette idée a été étendue à un champ aléatoire par les travaux de [Schevenels *et al.*, 2011], permettant d'intégrer

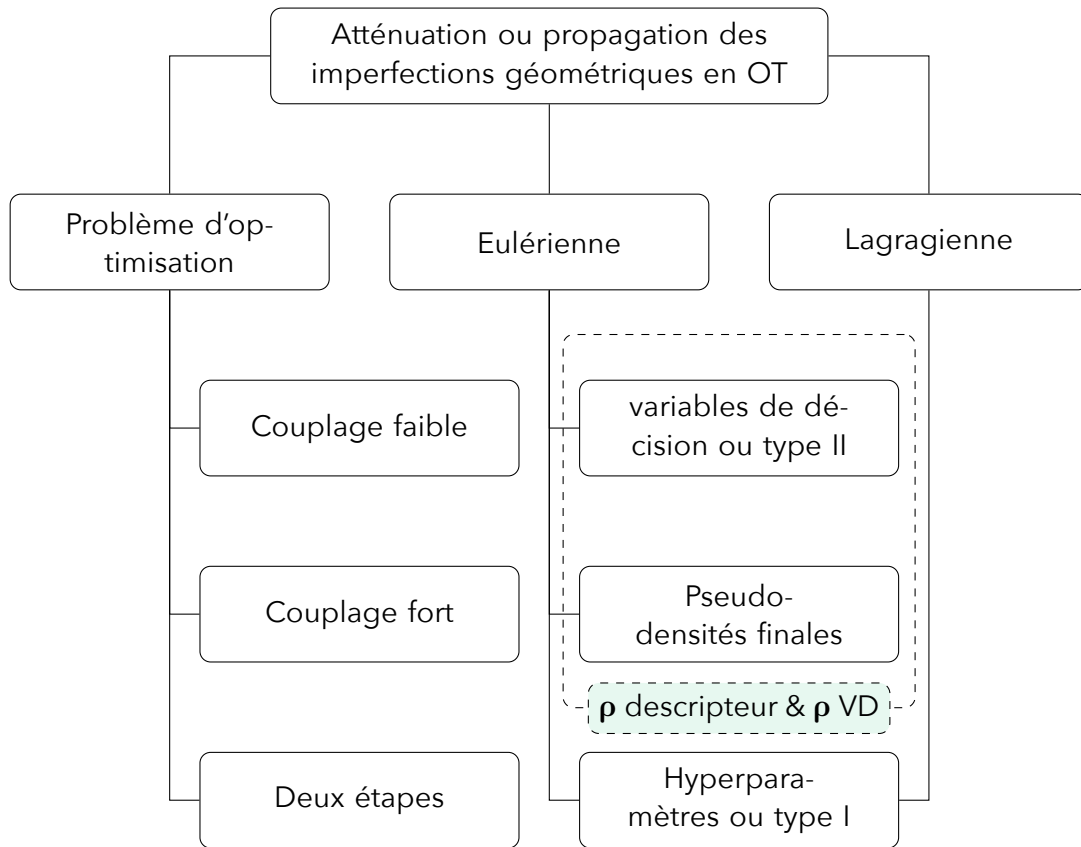


Figure 1.21 – Taxonomie des méthodes pour propager ou atténuer les imperfections géométriques en optimisation topologique (OT).

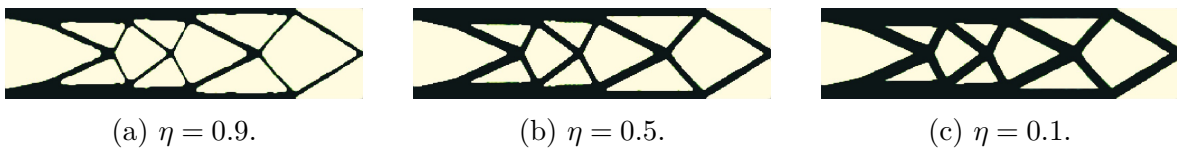


Figure 1.22 – Altération des pseudo-densités finales en passant par l'hyperparamètre η .

une variabilité spatiale au paramètre η . L'estimation des moments a été effectuée au moyen de la SMC. Une amélioration des temps de calcul pour l'estimation des moments est concrétisée grâce aux travaux de [Lazarov *et al.*, 2012]. Le second hyperparamètre est le centre de l'élément du filtre de convolution (équation (1.24)) ; en le considérant comme étant incertain, il est possible de simuler un déplacement de matière plus important qu'avec le paramètre η [Jansen *et al.*, 2013]. L'incertitude est représentée par un champ aléatoire pour tenir compte du caractère dimensionnel des imperfections géométriques. Dans le cas de la méthode des surfaces de niveau (LSM), le descripteur topologique est une courbe de niveau (*cf.* sous-section 1.3.2). La courbe de niveau, ϕ , permet de discriminer le domaine en fonction ses valeurs :

$$\begin{cases} \phi(x) > 0 & \Leftrightarrow x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 & \Leftrightarrow x \in \partial\Omega \\ \phi(x) < 0 & \Leftrightarrow x \in \mathbb{C}_{\Omega_{ec}} \Omega \end{cases}$$

La procédure standard de mise à jour de la courbe de niveau, donc de la topologie, utilise l'équation d'*Hamilton–Jacobi* [van Dijk *et al.*, 2013]. Pour cela, cette équation fait intervenir un champ de vitesse, précisément la composante normale à $\partial\Omega$, déterminée à partir d'analyses de sensibilité et un pseudo-temps représentant le pas de mise à jour. Dans ces conditions [Chen et Chen, 2011] ont perturbé la composante normale du champ de vitesse avec un champ aléatoire. Un nombre fini de réalisations (les topologies perturbées) et le calcul de leurs sensibilités sont utilisés pour mettre à jour la géométrie nominale. Noter qu'une étape de cartographie des sensibilités des géométries perturbées vers la géométrie nominale est nécessaire. Le point, commun entre toute ces méthodes, est que les hyperparamètres entachés par l'incertitude sont peu ou pas accessibles pour l'utilisateur. Plus problématique, la modification de ces paramètres n'a aucun lien direct avec la physique se cachant derrière les imperfections géométriques, et cela exige des modèles intermédiaires pour coupler les deux représentations, augmentant les incertitudes de modèles, car rien ne garantit que l'un peut exprimer les informations contenues dans l'autre. Exception faite des travaux de [Chen et Chen, 2011] qui se basent sur une version non paramétrique de la LSM, ces méthodes ne nécessitent aucun travail supplémentaire dans le calcul des sensibilités.

Une autre approche eulérienne consiste à tirer avantage de la représentation de la topologie et à entacher les VDs par des incertitudes. Dans le cas de la méthode MMC, la

topologie est représentée par des primitives, en particulier cela peut être des rectangles paramétrés par le centre, l’angle, la largeur et la longueur. Les recherches de [De *et al.*, 2020] traitent ces paramètres comme aléatoires. La différence avec la démarche précédente se situe dans la sémantique définie à la sous-section 1.2.1 entre les conceptions robustes de type II et I : dans le cas présent à la fin de l’optimisation, la conception est robuste de type II ; et pour la première approche, elle est robuste de type I. Étant donnée la variété des descripteurs topologiques (*cf.* section 1.3.2), appliquer cette approche à toutes les méthodes d’OT serait fastidieux.

Enfin, parmi les méthodes eulériennes, il est envisageable de modifier le champ de pseudo-densité finale. Comme le précise la section 1.3.2, il est toujours possible de cartographier la géométrie sous forme d’un champ de PDs, peu importe la méthode : c’est une cartographie BD. Cette approche s’étend bien à SIMP et les travaux de [Sigmund, 2009] en sont un exemple. Dans ce cas, l’auteur utilise deux filtres supplémentaires, un d’érosion et un de dilatation, dans un but de simuler les écarts dus au procédé et non pour supprimer les pseudo-densités intermédiaires, comme dans le filtre d’*Heaviside*. Ces deux filtres sont basés sur des fonctions différentiables, l’épaisseur d’érosion ou de dilution sont dépendantes des niveaux de gris générés par le filtre de convolution et est donc fonction de r^* , ce qui rend la méthode délicate à appliquer. La formulation est inspirée du scénario du pire des cas et une géométrie est fournie au concepteur en fin d’optimisation. Toujours dans l’utilisation de filtre sur les pseudo-densités finales, [Sato *et al.*, 2019] emploient un filtre reposant sur l’équation d’*Hamilton–Jacobi* pour perturber les géométries de manière identique que [Chen et Chen, 2011]. Ce filtre permet d’obtenir des déformations géométriques de grande ampleur. Une fois de plus, un champ aléatoire est utilisé pour modéliser le champ de vitesse. Malheureusement, il n’y a pas de lien entre le modèle manipulé et la physique d’un procédé. Enfin, bien que [Javed et Rout, 2014] n’aient pas intégré leur modèle d’incertitudes géométriques dans la boucle d’optimisation, ils se classent dans la même catégorie, c.-à-d. que les PDs obtenues en fin d’optimisation sont utilisées comme base du modèle d’imperfection. Dans leurs travaux, les imperfections sont la combinaison de trois topologies obtenues à différentes fractions de volume. Cependant rien ne garantit que les trois topologies soient semblables, rendant une occurrence de la géométrie peu probable.

Un stratagème distinct consiste à intégrer les incertitudes sur la géométrie à partir de la modification de la fonction coût ou du problème d’optimisation. Dans [Komini *et al.*, 2023], les auteurs changent la fonction objectif, au lieu de minimiser la souplesse,

ils minimisent une somme pondérée de la souplesse (c) et les déplacements provoqués par les déformations résiduelles (π). Ces derniers sont dus au procédé de FA et sont considérés sur les frontières fonctionnelles de l'espace de conception. Les incertitudes affectant les deux indicateurs sont **découplées**, mais le calcul des sensibilités se fait toujours par rapport aux PDs, ici $\boldsymbol{\rho}$ car SIMP est utilisé. Le problème d'optimisation peut être synthétisé comme suit :

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\rho}} \quad & (1 - k_1)\Psi(\mathbf{Z}) + k_1 c(\mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) \\ \text{avec} \quad & \Psi(\mathbf{Z}) = (1 - k_2)\sqrt{\hat{\mu}_2(\mathbf{Z})} + k_2 \hat{m}_1(\mathbf{Z}) \\ & \mathbb{P}_{\mathbf{Z}} = \mathbb{P}_{\pi(\boldsymbol{\varepsilon}=\{\mathbf{f}\}, \mathcal{VD}=\{\boldsymbol{\rho}\}, \dots)} \end{aligned}$$

La fonction mesurant la souplesse ne considère pas les variations induites dans la géométrie par le modèle, ce qui, au regard du résultat des exemples, est une supposition réductrice. Un point marquant de cette étude est qu'ils considèrent un modèle numérique basé sur le procédé pour calculer les déplacements entraînés par le processus de fabrication. Ce qui change fondamentalement à l'égard des autres références, ici le modèle est en lien direct avec le procédé. Finalement, ils parviennent à réduire les déplacements dus au procédé en optimisant sa topologie. Noter que les résultats fournis par la méthode des perturbations ont une performance médiocre par rapport à la SMC. Enfin, comme décrit dans les sections précédentes, [Freitag *et al.*, 2022] séparent les deux problèmes ; le premier, optimise la topologie avec pour indicateur la souplesse, le second vient optimiser l'épaisseur de la structure, dont la valeur nominale est incertaine, obtenue grâce au problème précédent à une fraction d'aire donnée.

Une application de la démarche lagrangienne est de considérer les perturbations dans le maillage, ce qui a été réalisé par [Jansen *et al.*, 2015]. Les perturbations s'expriment alors de la manière suivante :

$$\tilde{\mathbf{X}}^s = \mathbf{X}^s + C(x) \forall x \in \Omega_{ec} ,$$

avec $\tilde{\mathbf{X}}^s$ la position des nœuds perturbée par le modèle des variations géométriques, C , qui est un champ aléatoire modélisant la perturbation dans le maillage de nœuds. Dans cette approche, seulement des petites perturbations au niveau des nœuds peuvent être considérées, car division et fusion ne sont pas faisables. Au vu de la formulation du problème, se servir de la méthode des perturbations permet de diminuer le nombre d'évaluations du modèle physique par rapport à la SMC. Ceci est d'autant plus critique

lorsque les modèles physiques sont plus coûteux à résoudre, comme pour la simulation de structures en grand déplacement [Jansen *et al.*, 2015]. La taille des écarts représentée par les méthodes lagrangiennes est un facteur qui est limitant dans certains cas. Pour contrevenir à cette difficulté, l'utilisation des approches eulériennes est la plus appropriée.

Les différences entre les méthodes résident : dans le choix de l'**oracle** (Ψ) nécessaire pour prédire l'état des géométries perturbées ($\tilde{\Omega}$) qui est fonction de variables entachées par des incertitudes et dans le calcul des sensibilités. Ce modèle permet de caractériser un écart sur la topologie. Le tableau 1.5 résume les différentes stratégies. Dans l'approche type I, en référence à la section 1.2.1, l'état des géométries perturbées est fonction de paramètres inclus dans l'algorithme d'optimisation topologique. Dans ce cas, l'oracle doit faire le lien entre perturbation dans la topologie et les hyperparamètres sélectionnés. Pour faire de la QI, il est nécessaire de s'assurer que l'exactitude entre $\tilde{\Omega}$ et des données issues du procédé $\tilde{\Omega}^{\text{vraie}}$ soit maximale, passer par les paramètres des méthodes d'OT rajoute des difficultés dans la caractérisation de $\tilde{\Omega}$. Les méthodes basées sur les pseudo-densités finales et les VDs ont pour avantage de modifier la paramétrisation de la topologie, ce qui évite les problèmes sus-cités. L'atout de la première réside dans le fait que l'oracle peut être adapté à une multitude de méthodes d'OT étant donné qu'elle utilise des PDs. La méthode lagrangienne n'est applicable que pour des petites variations, car des parties de la topologie sont susceptibles de se chevaucher.

Enfin, la modification de la fonction objectif semble intéressante, car l'obtention des sensibilités peut s'en trouver facilitée et des modèles d'imperfection géométrique, en lien avec le procédé, disponibles sur « étagère » peuvent y être introduits plus facilement. La question de l'exactitude, du choix et de l'intégration des différents oracles reste ouverte : les modèles **numériques** (p. ex. [Elahi *et al.*, 2022]) sont coûteux, et fréquemment insolubles sans simplifications [Venturi et Taylor, 2023], mais ils sont nécessaires pour des processus d'optimisation, comme dans les travaux de [Komini *et al.*, 2023]; les modèles fondés sur les **connaissances métiers**, p. ex. dans [Dantan *et al.*, 2017]; ou les modèles basés sur des **données** [Al-Meslemi, 2021]. Pour des raisons de compatibilité avec les cartographies BD, l'utilisation de modèles altérant les pseudo-densités finales (donc les VDs après filtrages pour la méthode SIMP) nous semble plus adaptée.

Des différentes études proposées, il n'y a que celle de [Jansen *et al.*, 2013] qui ajoute des marges dans la taille de l'espace de conception. Cela permet d'intégrer les variations de la pièce en dehors des frontières naturelles de l'espace de conception. Si la méthode choi-

Table 1.5 – Approches pour intégrer les imperfections géométriques en optimisation topologique robuste (OTR).

| Méthode | Modèle de perturbation | Références |
|--------------------------------|--|---|
| Type I & eulérienne | $\tilde{\Omega} = \Psi(\mathcal{HP})$ | [Lazarov <i>et al.</i> , 2011], [Schevenels <i>et al.</i> , 2011], [Chen et Chen, 2011], [Lazarov <i>et al.</i> , 2012], [Jansen <i>et al.</i> , 2013]. |
| Type I & lagrangienne | $\tilde{\Omega} = \Psi(\mathbf{X}^s)$ | [Jansen <i>et al.</i> , 2015]. |
| Type II | $\tilde{\Omega} = \Psi(\Omega)$ | [Sigmund, 2009], [Sato <i>et al.</i> , 2019], [De <i>et al.</i> , 2020]. |
| pseudo-densités finales | $\tilde{\rho} = \Psi(\bar{\rho})$ | [Sigmund, 2009], [Javed et Rout, 2014], [Sato <i>et al.</i> , 2019]. |
| Couplage faible Deux étapes | $\min_{\rho}(1 - k_1)\Psi(\pi(\rho)) + k_1 c(\rho, \dots)$ $\min_{\Omega} c(\Omega, \dots)$ puis $\min_b V(\Psi(b), \dots)**$ | [Komini <i>et al.</i> , 2023]. [Freitag <i>et al.</i> , 2022]. |

sie n'est pas lagrangienne ou avec le couplage, alors il est nécessaire d'adopter la même démarche, car rien ne garantit que la pièce ne se déforme pas au-delà de cet espace. De plus, remarquer que si l'incertitude épistémique est considérée comme méthode de représentation des incertitudes, les différentes études se contentent de fournir la géométrie qui équivaut au pire des cas. Cela ne correspond pas aux concepts sous-jacents des représentations des incertitudes épistémiques où l'incertitude est délimitée et bornée. Enfin, il est bon de préciser que les topologies obtenues en fin d'RDO proposent des voies de contrainte différentes, peu importe les variables incertaines traitées.

Cette section a pour but de répondre aux interrogations suivantes :

L'optimisation topologique est un processus numérique complexe. Quels sont les **effets** des incertitudes sur le résultat généré ? Comment sont-elles **intégrées** dans le processus d'optimisation topologique ? Et est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des **boîtes noires** ?

Premièrement, l'optimisation topologique se révèle être un outil polyvalent pour l'intégration des incertitudes dues à l'environnement et au procédé de fabrication. À l'environnement, car les conditions aux limites et conditions initiales peuvent être affectées

** . b représente l'épaisseur de la structure.

par de l'incertitude et leurs propagations dans l'OT sont rendues possibles grâce aux diverses méthodes d'RDO. De plus, l'incertitude due au concepteur commencent à être considérées *via* l'espace de conception. Au procédé de fabrication, par la caractérisation des incertitudes pour les matériaux et de la géométrie. Cette section montre certaines limites dans l'intégration des incertitudes épistémiques, même si cela est normal, puisque le sujet est étudié depuis peu. Dernièrement, une revue détaillée et une taxonomie des différentes approches pour considérer les incertitudes géométriques sont réalisées à la figure 1.21 et au tableau 1.5. De bonnes pratiques en résultent, ces dernières sont mises en relation avec les sections précédentes. Malgré tout, de nombreux effort reste à faire, pour intégrer totalement l'optimisation topologique dans un processus de vérification, de validation et de QI.

1.5 Bilan : conception robuste pour la fabrication additive

Au cours de ce chapitre des solutions ont été analysées permettant d'intégrer les effets des incertitudes liées au procédé de fabrication dans le processus de conception, dans le but d'obtenir une pièce robuste vis-à-vis des imperfections géométriques. À cet effet, les différentes sections du chapitre 1 répondent aux problématiques associées suivantes :

1. Quelles sont les différentes sources d'incertitudes rencontrées en fabrication additive ? Où interviennent-elles dans le cycle de vie du produit ? Comment sont-elles modélisées ?
2. Comment les incertitudes sont-elles modélisées, représentées et atténuées pour un processus basé sur des modèles ?
3. L'optimisation topologique est un processus numérique complexe. Quels sont les effets des incertitudes sur le résultat généré ? Comment sont-elles intégrées dans le processus d'optimisation topologique ?
4. L'optimisation topologique regroupe de nombreuses approches, en vue d'intégrer les incertitude identifiés par le concours des questions précédentes, les interrogations suivantes prévalent. Comment ces approches fonctionnent-elles ? Est-il souhaitable de considérer ces méthodes comme des boîtes noires ? Comment être le plus extensif si possible ?
5. Les données expérimentales, la modélisation des imperfections géométriques et

l'OT ne manipulent pas forcément la même description numérique du produit. Les différentes descriptions sont-elles compatibles ?

La section 1.1 introduit le processus de conception et le met en relation avec le cycle de vie du produit et le processus de FA. Il est apparu que l'utilisation des approches hybrides permet d'intégrer l'aspect fonctionnel de la conception et d'en maximiser ses performances en regard d'un critère X , qui est ici la robustesse. De plus, comme le montrent les sections 1.2 et 1.4, il est complaisant d'associer un processus mathématique et l'RDO. L'optimisation topologique faisant partie des approches hybrides et étant un processus adapté pour l'optimisation robuste, c'est pourquoi cette méthode a été retenue.

D'autre part, la section 1.1 recueille de nombreuses sources d'incertitudes relativement aux procédés de FA : performance mécanique, géométrie, masse totale, coûts, *et cætera*. Ces sources sont à rapprocher avec la modélisation numérique du problème d'OT présentée à la section 1.3. La mécanique élastique linéaire ne permet pas de considérer l'entièreté des sources d'incertitudes recueillies. Cependant, il ressort que l'approche volumétrique, employée dans la littérature pour caractériser les incertitudes sur la géométrie, est conciliante avec l'optimisation topologique. En outre, les incertitudes affectant la géométrie semblent être la source d'incertitude ayant le plus d'influence lorsque la souplesse est utilisée pour mesurer la performance de la topologie. C'est pour cela que les incertitudes affectant la géométrie sont considérés prioritairement dans ces travaux.

Qui plus est, parmi les méthodes d'OT, il est apparu que les approches BD utilisent aussi une représentation volumétrique de la conception pour calculer la physique sous-jacente. Ce qui permet d'assurer une continuité entre la collecte des données et ouvre la voie au développement d'une méthode de validation pour la QI. De par la popularité de la méthode SIMP, de la disponibilité de codes, des premières orientations de la thèse et de sa compatibilité naturelle avec la représentation BD, cette méthode d'OT a été choisie pour la suite de ces travaux.

Finalement, la dernière section aborde l'OT sous le jour des incertitudes : c'est l'OTR. Une taxonomie a été développée, il s'avère que les approches modifiant le champ de pseudo-densité finale sont les plus complaisantes par rapport aux autres approches. Ainsi, les modèles qui sont développés par la suite s'inscrivent dans ces méthodes.

Chapitre 2

Optimisation topologique robuste sous imperfections géométriques

Ce chapitre propose un cadre méthodologique pour atténuer les effets des incertitudes aléatoires et incertitudes épistémiques pour les systèmes complexes. La méthodologie, détaillée à la section 2.1, s’amorce sur le recueil des incertitudes, commencé au chapitre 1 ; puis sur une taxonomie des niveaux de robustesse adaptée à la conception pour X (DfX) et une caractérisation des incertitudes présentée à la section 2.2.

Les sections 2.3 à 2.5 explorent les ajustements nécessaires pour intégrer ces incertitudes au processus d’optimisation topologique robuste (OTR), incluant la modélisation des imperfections géométriques et une représentation graphique *via* le SysML. Ce cadre théorique et pratique permet de concevoir des topologies robustes face aux incertitudes.

Sommaire du chapitre

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Cadre méthodologique | 76 |
| 2.2 | Taxonomie des incertitudes et des problèmes de conception robuste . . . | 78 |
| 2.3 | Optimisation topologique robuste sous incertitude aléatoire et épistémique | 85 |
| 2.4 | Modélisation des imperfections géométriques | 97 |
| 2.5 | Modélisation orientée objet pour l’optimisation topologique robuste . . . | 106 |
| 2.6 | Bilan | 115 |

2.1 Cadre méthodologique

Cette section décrit la méthodologie qui synthétise l'ensemble des étapes à conduire pour rendre un système complexe robuste. Elle est illustrée par la figure 2.1. La première étape est détaillée au chapitre 1. Ce chapitre établit un **recueil** (*elicitation*) des différentes sources d'incertitudes, ceci constitue la première étape de la méthodologie proposée.

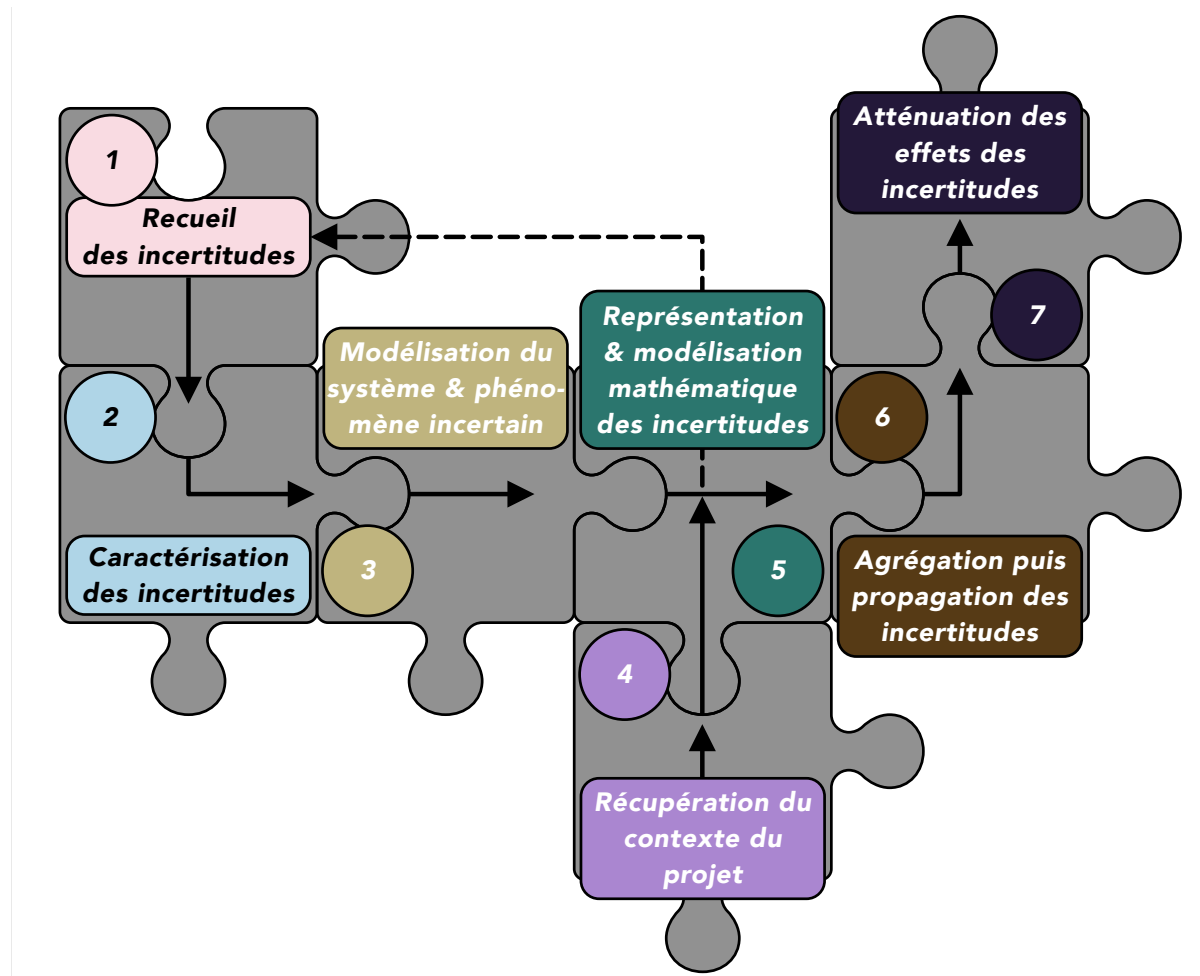


Figure 2.1 – Synthèse et méthode de traitement des incertitudes, adapté de [Noal *et al.*, 2024a].

Une fois les sources d'incertitudes recueillies (*elicited*), celles-ci sont **caractérisées** en fonction de leur type. Caractériser les incertitudes, c'est donner un type aux variables qui sont contenues dans le système. Ce type permet de discriminer les incertitudes, elles sont : soit épistémiques et dues à un manque d'information ou de connaissance ; ou bien elles sont aléatoires. Les détails concernant l'étape de caractérisation des incertitudes

sont donnés à la sous-section 2.2.1. La figure 2.3 la résume et une application au cycle de vie d'un produit fabriqué additivement est illustrée par la figure 1.6 de la sous-section 1.5.

La troisième étape consiste à **modéliser** le système complexe sous incertitudes de façon graphique et les phénomènes incertains. Concernant la modélisation du système complexe, qui consiste en une représentation graphique des flux incertains d'un système, une discussion a été menée à la sous-section 1.2.1. Elle conclue que l'utilisation du langage de modélisation de systèmes (SysML) avec des modifications mineures est adaptée. Une application est faite aux sous-sections 2.4 et 2.5 modélisant respectivement le phénomène incertain (imperfections géométriques) et le processus d'OTR avec le SysML.

La phase subséquente est de collecter des informations sur la **sensibilité** du projet, cela sert à guider le concepteur robuste dans le choix de la représentation des incertitudes. En fonction des besoins, des acteurs du projet et des données à disposition, la qualité de représentation doit être appropriée. Cette phase a été menée dans l'introduction de ce manuscrit et le projet RobustAM exige de traiter ces deux types d'incertitudes.

La cinquième étape consiste à **représenter** et **modéliser mathématiquement** les paramètres entachés d'incertitudes par les théories et les modèles mathématiques sélectionnés en fonction des phases précédentes, par exemple avec la théorie de *Dempster-Shafer* ou celle des probabilités. Les différentes représentations des incertitudes font l'objet de la sous-section 1.2.2 et une application à notre problème est conduite à la section 2.3. La conception et le déploiement de cette méthode ne sont pas linéaires. Des itérations entre les cinq premières phases sont envisageables et ont été observées tout au long de ces trois années.

Une fois ces choix effectués, les différentes représentations et modélisations des incertitudes doivent être **agrégées**. Par exemple, si deux paramètres d'entrées sont représentés respectivement par une loi normale et par un intervalle, dans ce cas, l'étape d'agrégation doit permettre de représenter de manière commune les incertitudes en sortie de modèle. Une fois les incertitudes agrégées si besoin, elles doivent être propagées dans les différents modèles qui composent le processus complexe. La sous-section 1.4.1 donne plusieurs méthodes qui peuvent s'appliquer à notre cas et détaille l'une d'elle : la simulation de Monte-Carlo (SMC). Les sous-sections 2.3.1 et 2.3.2 décrivent et implémentent les solutions techniques retenues.

Reste à choisir les indicateurs caractérisant la performance robuste de la conception, afin d'**atténuer** les effets des incertitudes. Cette dernière étape est examinée et appliquée aux imperfections géométriques pour l'OTR aux sections 2.3 et 2.4. La propagation des incertitudes et l'atténuation de leurs effets se font en plusieurs itérations et elles sont indissociables en optimisation pour une conception robuste (RDO). La propagation consiste à estimer les moments statistiques qui composent la fonction coût « robuste » (*cf.* l'équation (1.32)) et l'atténuation à mettre à jour les variables de décision (VDs) à l'aide d'algorithmes d'optimisation et les dérivées partielles associées à la nouvelle fonction objectif.

L'étape de **quantification** des incertitudes intervient après l'étape 5 (représentation et modélisation mathématique des incertitudes). Elle n'est pas mentionnée dans la figure 2.1, car elle n'a pas été appliquée, faute de temps et de données. Cette étape vise à attribuer des valeurs aux incertitudes par la collecte de données issues du système incertain *via* un plan d'expérience. Cela s'entend qu'une étape d'**analyse** intervient lorsque la solution obtenue est optimisée et robuste. Elle consiste à analyser les conceptions obtenues et à examiner les gains ou pertes en robustesse et en performance.

2.2 Taxonomie des incertitudes et des problèmes de conception robuste

Cette section vise à proposer notre taxonomie des types d'incertitude (sous-section 2.2.1) et une classification des niveaux de robustesse atteignables par une conception optimisée *via* l'OTR pour la fabrication additive (FA) (sous-section 2.2.2). Cette section est un développement de la seconde étape du cadre méthodologique et est une étape préliminaire à la modélisation du phénomène incertain (imperfections géométriques), à sa modélisation graphique avec le SysML et à son implémentation numérique.

2.2.1 Caractérisation des incertitudes

Dans la sous-section 1.2.1, les différents types d'incertitude sont présentés. Plusieurs taxonomies existent, mais elles ont toutes un même point en commun, elles différencient les incertitudes en fonction de leur **réductibilité**. Si les écarts entre les prédictions et

les observations peuvent être réduits, il s'agit d'incertitude épistémique; dans le cas contraire, il s'agit d'incertitude aléatoire.

L'objectif de la taxonomie présenté est d'illustrer les différents types d'incertitude par l'intermédiaire d'une représentation graphique simple, permettant aux différentes disciplines d'y associer leurs propres sous-catégories. Cette ouverture est importante étant donné la spécificité de certains domaines. À cet effet, les incertitudes épistémiques seront discriminées en fonction de leur origine, à savoir : un manque de **connaissances** ou un manque d'**informations**.

Supposons qu'un phénomène quelconque (un comportement, un procédé de fabrication, *et cætera*) doit être prédit, la première étape consiste à trouver un modèle mathématique* permettant, à partir d'hypothèses sur la nature de l'environnement et du phénomène, de prédire sa réponse. Le manque d'exactitude dans ses prédictions caractérise son niveau d'incertitude. Ce manque peut provenir d'un niveau de connaissance insuffisant. Par **connaissance**, nous désignons :

La capacité des modèles mathématiques à reproduire avec **exactitudes** le comportement de toutes activités, tous systèmes ou phénomènes, sur une période donnée.

La création de connaissances ne nécessite *a priori* pas d'observation directe ou une quantité minimale d'informations ; par exemple, l'existence de *Neptune* a été déterminée avant qu'elle soit observée. La réponse du phénomène n'est pas nécessairement **déterministe** et peut être aléatoire, p. ex. en physique quantique. Dans ces conditions, si les prédictions (donc les modèles) sont exactes, mais probabilistes, peut-on vraiment parler d'incertitudes? Heureusement, à notre échelle, les variations observées sur les expérimentations sont l'émanation d'incertitudes aléatoires (ces dernières sont irréductibles) et les modèles sont déterministes.

La modélisation mathématique n'est pas l'apanage de la prédiction d'un phénomène. Des modèles peuvent être construits directement à partir de ces informations et sans lien apparent avec la physique sous-jacente. De nouvelles connaissances peuvent être initiées ou provenir de nouvelles informations, la sérendipité est un exemple. Pour compléter notre taxonomie, nous désignons par **information** :

*. Au sens strict de l'incertitude qui est le calcul d'un écart entre deux valeurs, l'une prédite et l'autre mesurée, avoir un modèle mathématique est idéal, mais il peut être remplacé par une estimation faite au doigt mouillé.

Toutes sources de données directes et significatives émanant des activités, des systèmes ou des phénomènes considérés, sur une période donnée.

L'exemple suivant illustre ces deux définitions et il est mis en lumière par la figure 2.2. Si une urne, dont le contenu n'est pas visible, contient des boules de couleur qui sont mélangées avant d'être sorties une à une, connaître la couleur de la boule n'est pas possible; et la meilleure prédiction possible est une probabilité sur chacune des boules. Cependant, si le contenu est visible avant de les mélanger, dans ce cas, il serait concevable de modéliser la position des boules pour connaître avec exactitude la valeur des boules tirées. Ici, le manque d'informations provient des conditions initiales qui ne sont pas connues. Un manque de connaissance vient des modèles mathématiques servant modéliser la position des boules lors du mélange. Cela dit, est-il possible de savoir quel était l'état initial de la boîte? Distinguer le manque d'information, du manque de

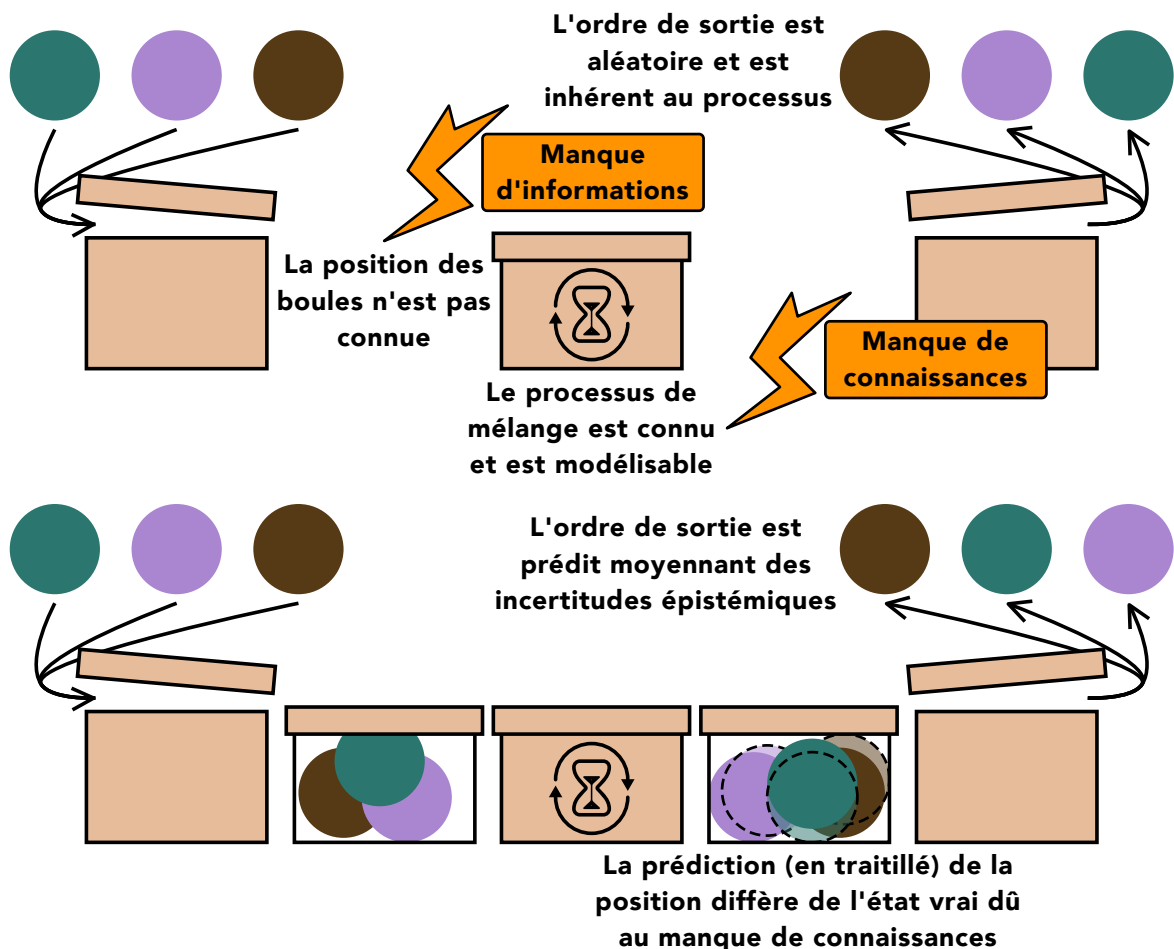


Figure 2.2 – Illustration du manque de connaissances et du manque d'informations.

connaissance n'est pas évident. De même la représentation mathématique de ces deux classes d'incertitudes épistémiques est différente : l'inférence bayésienne est idéale pour représenter le manque d'information ; et les structures de *Dempster-Shafer* ou les boîtes de probabilité (p-boîtes) (voir la sous-section 1.2.2) pour un manque de connaissance.

D'un autre côté, le type d'incertitude est aussi dépendant de l'échelle de départ considéré ou lors de la caractérisation des indicateurs de performances d'intérêts (par la collecte d'informations). Par exemple, pour prédire le module de *Young* d'un nouvel alliage, le concepteur peut utiliser des méthodes multiéchelles (*cf.* [Olson, 1997]). Dans ce cas, des modèles basés sur la physique quantique vont être utilisés à la plus petite des échelles, puis des opérations d'homogénéisations qui permettent de remonter jusqu'à l'échelle macroscopique, où le critère de performance est estimé (le module de *Young*). Initialement, les entrées des modèles sont nécessairement probabilistes, l'utilisation de modèles imparfaits conduit à un ajout d'incertitude épistémique due à un manque de connaissance, ces manques vont affecter toute la chaîne de simulation. Le module de *Young* sera entaché d'incertitudes aléatoires et d'incertitudes épistémiques dues à un manque de connaissance et d'information ; ces incertitudes dont la représentation n'est pas identique doivent être agrégées entre elles au fil des échelles ! Toutefois, le concepteur peut fabriquer puis mesurer les performances d'éprouvettes et en admettant que l'échantillon soit représentatif de la population, le module de *Young* sera entaché uniquement d'incertitudes aléatoires. Évidemment, estimer les incertitudes de l'une ou de l'autre façon n'a pas le même coût en temps et en argent.

La taxonomie que nous proposons est dépeinte par la figure 2.3. Cette dernière est représentée par un diagramme de Venn et comporte quatre grandes catégories : l'incertitude aléatoire, l'incertitude épistémique qui est décomposée en fonction du manque de connaissance ou d'information et enfin l'incertitude phénoménologique qui est un manque (voire une absence) de connaissances et d'informations. Les autres types d'incertitude de la taxonomie de Thunnissen ont été rajoutés, afin de montrer la modularité de notre proposition. Grâce à ce diagramme, les relations et les définitions des types d'incertitude sont immédiatement lisibles. En effet, l'incertitude aléatoire n'est ni un manque de connaissance, ni un manque d'information, mais est le résultat de la variation naturelle d'un phénomène qui est estimée à l'aide une population statistique ; l'incertitude épistémique est soit le fait d'un manque de connaissances souvent associé aux incertitudes de modèles ou d'information comme des données parcimonieuses, enfin l'association des deux est de l'incertitude phénoménologique.

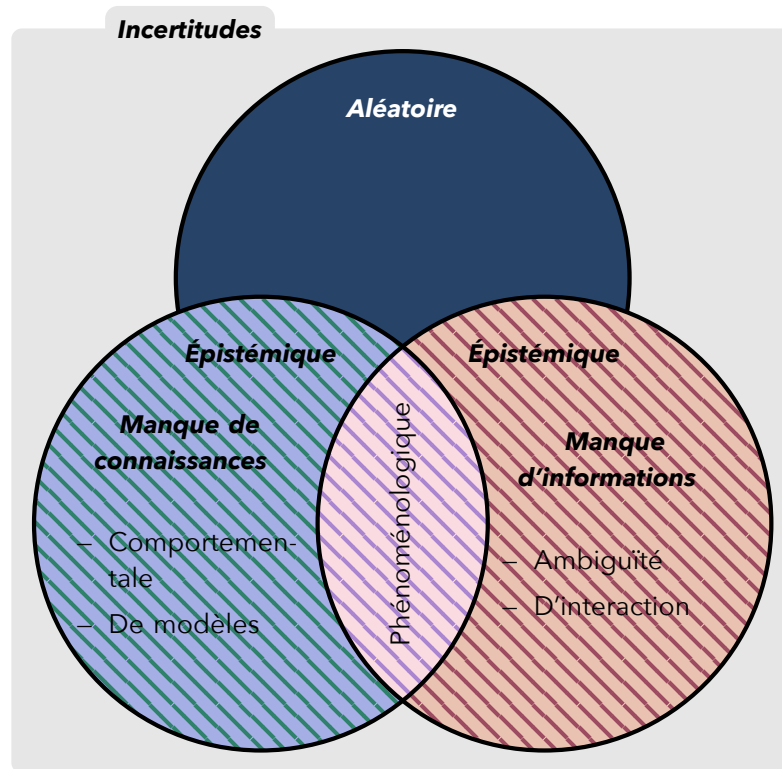


Figure 2.3 – Diagramme de Venn représentant les différents types d'incertitudes, adapté de [Noal *et al.*, 2024a].

Cette caractérisation, comme voulu, n'entraîne que des modifications mineures par rapport à celle de Thunnissen et illustre graphiquement les définitions et le sens des incertitudes. Le prochain paragraphe, traite les différents niveaux de robustesse atteignables par une conception appliquée au contexte de la FA.

2.2.2 Niveaux de robustesse

Les travaux de [Choi, 2005] distinguent trois niveaux de conception robuste. Elles sont classées en fonction du contrôle qu'a le concepteur sur les paramètres et en fonction du caractère incertain des paramètres appartenant à la succession des modélisations (se référer à la sous-section 1.2.1). Connaître le niveau de robustesse souhaité pour la conception influence le choix de la modélisation et de la représentation des variables incertaines. Ce choix influence aussi la modélisation graphique du système incertain. Quatre niveaux de robustesse sont définis. Les modèles numériques utilisés dans ce travail le sont pour des problèmes d'optimisation avec l'ajout de connaissances issues du

procédé de FA, toutefois le procédé n'est pas directement modélisé dans notre chaîne de simulation. La taxonomie proposée par Choï est incomplète par rapport à notre contexte et les paragraphes le montrent et ils corrigent cette lacune.

Nous avons décidé de discriminer les conceptions robustes en fonction de deux critères : la **pilotabilité** et la **paramétrabilité**. Le tableau 2.1 synthétise les définitions. La classification présentée est une extension de celle de Choï et elle s'inscrit dans les démarches de DfX par l'ajout du niveau de robustesse de type V. La conception robuste de type V inclut explicitement les paramètres qui sont pilotables lors du processus de conception, comme l'orientation de la structure, mais qui, faute de moyen existant ne sont pas optimisables bien qu'ils impactent les critères cibles de performance : la géométrie dans ce travail. Cette dernière catégorie est à mettre en parallèle avec la sous-section précédente et elle résulte d'un manque de connaissance. Le tableau 2.1 n'inclut pas les conceptions robustes de type IV, puisqu'il s'agit de la propagation et de l'agrégation des incertitudes entre les différents modèles d'un système complexe.

Le recueil des différentes sources d'incertitude faite au chapitre 1 et le problème décrit par l'équation (1.30) servent de source à l'application de la taxonomie proposée. Le tableau 2.2 référence les résultats. Pour cette application, un seul paramètre est à la fois pilotable et paramétrable relativement au modèle numérique, il s'agit de la géométrie. Cependant, en fonction du problème d'optimisation topologique (OT), il est envisageable d'ajouter d'autres paramètres comme les matériaux. Les paramètres non pilotables, mais paramétrables à l'égard du modèle numérique sont les matériaux caractérisés par leurs paramètres physiques, l'espace de conception, les conditions aux limites et les conditions initiales. En outre, la source d'incertitude peut être ni pilotable ni paramétrable en regard des modèles numériques. Par exemple, les hypothèses simplificatrices de la mécanique élastique linéaire sont source d'incertitude épistémique. De plus, à cause de la discrétisation de la géométrie par une cartographie basée sur les densités (BD) (dans le cas de SIMP), des écarts sur la prédiction des champs de contraintes mécaniques et de déplacements sont observés (comme souligné à la sous-section 1.3.2). Ces écarts sont une source d'incertitude épistémique et ils ne sont ni pilotables ni paramétrables vis-à-vis du modèle numérique. Enfin, la dernière catégorie permet de référencer les paramètres pilotables du point de vue du concepteur de DfX, mais ils sont non paramétrables à l'égard du modèle numérique. En l'espèce, tous les paramètres du procédé par dépôt de fil fondu vu au tableau 1.2 font partis de cette catégorie. Ils impactent les performances du produit, mais ne sont pas paramétrables à cause d'un manque de connaissance.

Table 2.1 – Classement des niveaux de conception robuste pour un modèle numérique, traduit de [Noal *et al.*, 2024a].

| | Paramétrable vis-à-vis du modèle numérique | Non paramétrable vis-à-vis du modèle numérique |
|-------------------------|---|---|
| Paramètre pilotable | Une conception est robuste de type II , si le système modélisé respecte des critères cibles de performance, malgré la variation des paramètres sous le contrôle du concepteur et incorporés au modèle ; ces paramètres sont des VDs, afin que les cibles soient respectés. | Une conception est robuste de type V , si le système modélisé respecte des critères cibles de performance malgré la variation des paramètres sous le contrôle du concepteur, mais dont ces paramètres ne peuvent pas être considérés comme des VDs car ils sont absents de la modélisation du système. |
| Paramètre non pilotable | Une conception est robuste de type I , si le système modélisé respecte des critères cibles de performance, malgré la variation de paramètres incorporés au modèle et non pilotables. | Une conception est robuste de type III , si le système modélisé respecte ses critères cibles de performance malgré des variations internes au modèle. |

Table 2.2 – Classement des niveaux de conception robuste pour le problème (1.30), traduit de [Noal *et al.*, 2024a].

| | Paramétrable vis-à-vis du modèle numérique | Non paramétrable vis-à-vis du modèle numérique |
|-------------------------|---|---|
| Paramètre pilotable | – Géométrie Ω . | – Paramètres procédé (cf. tableau 1.2). |
| Paramètre non pilotable | – Matériaux, – Espace de conception, – Conditions aux limites, – Conditions initiales. | – Souplesse de Ω , – Volume de Ω . |

Cette section présente des taxonomies toutes appliquées au problème d'OT. La première taxonomie permet de caractériser les sources d'incertitude et la seconde de classer les différents niveaux de robustesse d'un système ou processus complexe, comme l'OT.

2.3 Optimisation topologique robuste sous incertitude aléatoire et épistémique

Cette section vise à détailler les solutions mathématiques permettant de propager les incertitudes polymorphes et d'atténuer leurs effets. À cet égard, cette section est divisée en deux parties. La première a pour objectif de propager les incertitudes aléatoires et d'atténuer leurs effets sur la conception à l'aide de la SMC. La sous-section 2.3.2 a le même objectif, mais pour les incertitudes épistémiques. Par la suite, nous considérons que les topologies sont entachées d'incertitudes aléatoires ou d'incertitudes épistémiques, autrement dit il n'y a pas d'agrégation des incertitudes. En effet, dans ces travaux, seule la géométrie est considérée comme incertaine, il n'y a pas d'autres paramètres incertains. Il n'y a donc pas besoin d'agrèger les incertitudes. Ces sous-sections correspondent aux étapes 5 et 6 de la méthodologie illustrée par la figure 2.1.

2.3.1 Optimisation topologique robuste sous incertitudes aléatoires

La sous-section 1.4.1 montre comment la moyenne et l'écart-type d'un modèle quelconque sont **estimés** avec la SMC. Dès lors, comme les valeurs exactes des moments statistiques sont inconnues, le problème (1.31) est réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & \hat{c}_{\text{ept}} (\mathcal{E} = \{\Xi_1, \dots, \Xi_{n_{\text{va}}}\}, \mathcal{VD} = \{\rho\}, \dots) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{C}\mathcal{P}t = \{V(\bar{\rho})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \dots\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\}, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec \hat{c}_{ept} une estimation de \tilde{c}_{ept} telle que :

$$\hat{c}_{\text{ept}} = k \hat{m}_1(\Upsilon) + (2 - k) \sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}, \quad (2.2)$$

avec $\hat{m}_1(\Upsilon)$ et $\hat{\mu}_2(\Upsilon)$ les estimations des moments obtenues avec les équations (1.36) et (1.37). En OTR, la contrainte en volume de l'équation (2.1) peut être déterminée avec un seuil sur : le volume de la topologie sans altération due aux incertitudes ; la moyenne du volume ; la probabilité que le volume dépasse un autre seuil. Dans notre cas, nous utilisons une contrainte sur le volume de la topologie obtenue sans incertitude.

Pour optimiser une fonction objectif, comme la souplesse, les gradients de la fonction coût et des contraintes doivent être calculés. En effet, utiliser un algorithme d'optimisation différentiable est incontournable, ces derniers utilisent les dérivées partielles des fonctions coûts et des contraintes par rapport aux VDs pour trouver l'extremum de la fonction coût. L'avantage immédiat à l'égard des algorithmes d'optimisation non différentiable est de limiter les coûts calculatoires, ce qui dans notre contexte est prépondérant. Effectivement, chaque évaluation de la souplesse c_{ept} implique une simulation par la méthode des éléments finis (MEF) et cette simulation est coûteuse computationnellement : la complexité de l'algorithme est polynomiale ($\approx O(n_{\text{dof}}^3)$) par rapport au nombre de degrés de liberté n_{dof} . De plus, les estimations des moments et des dérivées partielles associées sont calculées avec n_{smc} simulations par la MEF. Sans incertitude, le gradient de la fonction objectif est donné par les équations (1.22) et (1.27) et celui de la contrainte par les équations (1.23) et (1.27). Soit opt une fonction qui définit le comportement d'un algorithme d'optimisation, pour le problème déterministe décrit par l'équation (1.30), la procédure de mise à jour des VDs est la suivante :

$$\boldsymbol{\rho}^{j+1} = opt(c_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}^j), \nabla c_{\text{ept}}, V(\bar{\boldsymbol{\rho}}^j)/V_{\text{ec}} - \varphi^*, \nabla V) , \quad (2.3)$$

avec j l'indice de l'itération. $c_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}^j)$ et $V(\bar{\boldsymbol{\rho}}^j)/V_{\text{ec}} - \varphi^*$ sont respectivement la fonction objectif avec comme indicateur la souplesse et la contrainte sur la fraction de volume. Les gradients de la souplesse et du volume en $\boldsymbol{\rho}$ sont notés respectivement par ∇c_{ept} et ∇V . Dans le cas du problème sous incertitudes défini par l'équation (2.1), les variables de la fonction opt changent, car la fonction objectif est substituée par l'équation (2.2) ; c'est pourquoi l'équation (2.3) est réécrite de la manière suivante :

$$\boldsymbol{\rho}^{j+1} = opt(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}^j), \nabla \hat{c}_{\text{ept}}, V(\bar{\boldsymbol{\rho}}^j)/V_{\text{ec}} - \varphi^*, \nabla V) , \quad (2.4)$$

avec $\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}^j)$ la fonction coût utilisée pour atténuer les effets des incertitudes aléatoires (cf. l'équation (2.2)) et $\nabla \hat{c}_{\text{ept}}$ le gradient en $\boldsymbol{\rho}$.

Dans ces conditions, si une fonction est entachée d'incertitude aléatoire, la procédure de mise à jour ne change pas par rapport à un cas déterministe utilisant un algorithme d'optimisation différentiable ; seules les dérivées partielles changent et elles incluent des indicateurs sur la robustesse. La figure 2.4 illustre le protocole de mise à jour des VDs dans deux configurations. La performance est mesurée par la fonction f , la VD est entachée d'incertitude aléatoire et l'incertitude est représentée mathématiquement par une loi normale. Dans cet exemple, le processus a une erreur systématique importante. De ce fait, l'optimisation des VDs, avec la procédure décrite par l'équation (2.4), est altérée. Ici, *opt* est l'**algorithme de descente de gradient**, avec un pas de discrétisation de 1.0. En $x = 1.0$ la non-prise en compte des incertitudes conduit à une mise à jour importante de x ($f(x^1)$), alors que la solution robuste de type II ($\hat{f}(x^1)$) est située approximativement dans cette zone (car la conception change peu).

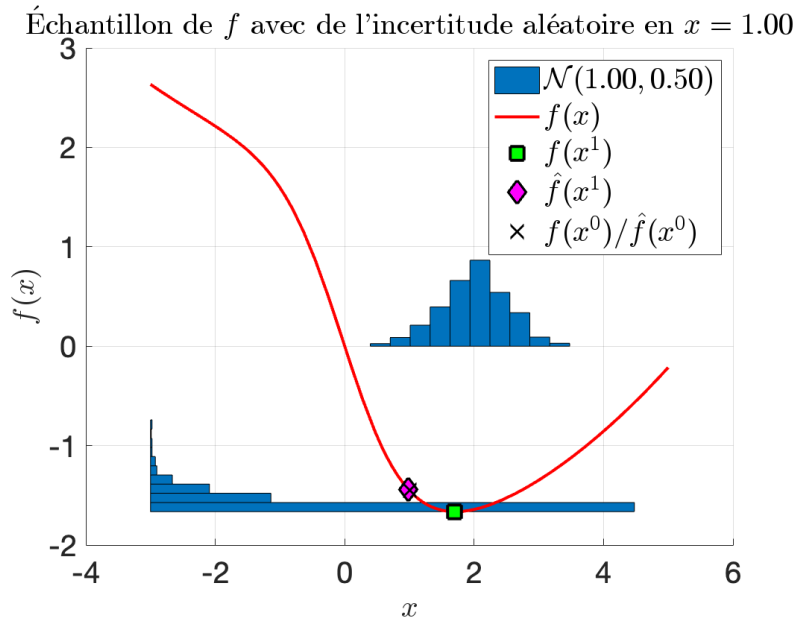


Figure 2.4 – Procédure de mise à jour pour une itération d'une fonction entachée d'incertitudes aléatoires.

La fonction *opt* permet de mettre à jour la topologie décrite par le vecteur \mathbf{p} . Pour la méthode SIMP deux algorithmes d'optimisation sont fréquemment utilisés : les critères d'optimalité (CO) et la méthode des asymptotes mobiles (MAM) [Svanberg, 1987]. La solution technique proposée à la sous-section 2.5 utilise les CO qui sont fournis par [Ferrari et Sigmund, 2020] et est traduite en **Python**. Néanmoins dans la version transcrite η n'est pas optimisé, car ce paramètre influence directement la géométrie comme ce qui a été vu à la sous-section 1.4.1. L'utilisation de la MAM [Svanberg, 1987] est importée

depuis la bibliothèque **NLOpt** [Johnson, 2007]. Du point de vue de l'utilisateur, pour les CO, la contrainte en volume est une égalité. Cependant, pour la MAM, la contrainte en volume doit être donnée sous forme d'une inégalité. C'est pourquoi, lorsque la MAM est utilisée, le volume de la topologie optimisé est borné à l'aide de deux inégalités, afin d'être centré autour de la contrainte φ^* plus ou moins une tolérance.

Pour évaluer l'équation (2.4), le gradient souple robuste doit être évalué en $\boldsymbol{\rho}$ à partir des équations (1.36) et (1.37). Avant cela, pour diminuer les erreurs d'arrondi (source d'erreurs numériques) du calcul de la variance [Tony F. Chan et Leveque, 1983], la formule de *Koenig-Huygens* ($\mathbb{V}(\Upsilon) = \mathbb{E}[\Upsilon^2] - \mathbb{E}[\Upsilon]^2$) et la propriété d'invariance par translation ($\mathbb{V}(\Upsilon - C) = \mathbb{V}(\Upsilon)$) permettent de réécrire l'équation (1.37) de cette manière :

$$\hat{\mu}_2(\Upsilon) = \frac{n_{\text{smc}}}{n_{\text{smc}} - 1} \left[\frac{1}{n_{\text{smc}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} [c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^i\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) - C]^2 - \left(\frac{1}{n_{\text{smc}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^i\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) - C \right)^2 \right], \quad (2.5)$$

avec C une constante qui peut être égale à la souplesse de la topologie sans incertitude :

$$C = c_{\text{ref}} = c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \emptyset, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots),$$

le champ de pseudo-densité finale utilisé pour calculer c_{ref} est appelé par la suite **conception de référence**. La constante, C , peut être égale à souplesse de la première réalisation utilisée pour le calcul de l'estimation de la moyenne :

$$C = c_1 = c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^1\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots),$$

dans ce cas, les sommes du côté droit de l'équation (2.5) commencent à $i = 2$. Pour minimiser les erreurs d'arrondi, la constante C doit être la plus proche de la « vraie » moyenne de la souplesse, à savoir $m_1(\Upsilon)$. La première approche est vraisemblablement la plus exacte et est donc choisie : en effet u^1 peut mener à une valeur aberrante de la souplesse.

Le calcul des dérivées partielles de l'estimation de la moyenne par rapport à ρ_e est donné par :

$$\frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \rho_e} = \frac{1}{n_{\text{smc}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} \frac{\partial c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^i\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots)}{\partial \rho_e}, \quad (2.6)$$

ainsi, le gradient de la moyenne est égal à la moyenne des gradients des différentes réalisations. Si l'incertitude n'entache pas des paramètres pilotables et paramétrables (*cf.* le tableau 2.1), alors les sensibilités ne nécessitent aucune modification et sont égales aux équations (1.22) et (1.27) évaluées aux différentes réalisations. Les dérivées partielles de la variance estimée par rapport à ρ_e sont calculées comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mu}_2}{\partial \rho_e} = & \frac{2}{n_{\text{smc}} - 1} \left[\sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} [c_{\text{ept}}(u^i, \boldsymbol{\rho}, \dots) - c_{\text{ref}}] \frac{\partial c_{\text{ept}}(u^i, \boldsymbol{\rho}, \dots)}{\partial \rho_e} \right. \\ & \left. - \frac{\partial \hat{m}_1}{\partial \rho_e} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} [c_{\text{ept}}(u^i, \boldsymbol{\rho}, \dots) - c_{\text{ref}}] \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Lors du processus d'optimisation robuste, nous avons fait le choix de générer une nouvelle réalisation pour chaque nouvelle itération, de telle sorte que l'algorithme d'optimisation ne surajuste pas cette population initiale. Ce n'est pas toujours le cas, comme ces exemples de la littérature examinés précédemment l'attestent [Jansen *et al.*, 2013, De *et al.*, 2020]. De plus, comme les variables indexées dans les sommes des équations (2.5) et (2.7) sont calculables indépendamment pour diminuer le temps de calcul, la technique du *multiprocessing* est utilisée. Elle permet d'exécuter des tâches de manière concomitante sur les différentes unités de calcul. Ainsi, les individus qui composent l'échantillon peuvent être calculés en même temps, le coût de calcul reste identique, mais le temps d'exécution du programme diminue. L'inconvénient réside dans la quantité de mémoire vive utilisée. En effet, chaque individu est maintenant copié en plusieurs exemplaires pour les unités de calcul. Pour diminuer la quantité de mémoire vive utilisée, les opérateurs d'incrémentations sont utilisés; cependant en *multiprocessing*, il faut être prudent en raison de la non-atomicité des opérations [Gorelick et Ozsvald, 2020].

2.3.2 Optimisation topologique robuste sous incertitudes épistémiques

Dans cette sous-section, la méthode permettant de propager les incertitudes épistémiques et d'atténuer leurs effets est décrite. La sous-section 1.2.2 référence les représentations et modélisations classiques des incertitudes pour des incertitudes épistémiques ou des incertitudes aléatoires. Pour les incertitudes épistémiques, leur représentation ou modélisation mathématique est généralement bornée. Cela permet de considérer les types

d'incertitude dépeints à la section 2.2.1. Par exemple, elles peuvent être utilisées pour décrire le manque de confiance dans les modèles d'imperfections géométriques, dans la méthode utilisée pour estimer les moments, *et cætera*.

Qui plus est, en OTR lorsque les incertitudes sont épistémiques, une seule conception résulte de l'optimisation. Pour rester dans l'esprit de l'incertitude épistémique, comme pour les fonctions de répartition de croyance (la plus petite probabilité d'occurrence d'un événement) ou de plausibilité (la plus grande probabilité d'occurrence d'un événement), nous avons décidé de fournir au concepteur deux conceptions de référence : **optimiste** et **pessimiste**. Ces deux conceptions permettent au concepteur de faire des choix quant à son aversion pour les incertitudes et la confiance qu'il porte aux simplifications, aux estimations et aux modélisations. La **conception de référence optimiste** est la conception qui est obtenue avec un niveau élevé de confiance ou une peur moindre des effets des incertitudes sur la topologie. Inversement, la **conception de référence pessimiste** traduit la conception qui est obtenue avec un niveau minime de confiance ou une peur substantielle des effets des incertitudes sur la topologie. Dans le cas présent, les p-boîtes servent d'outils pour représenter les incertitudes épistémiques et les paramètres des lois de probabilités sont bornés (approche directe).

La figure 2.5 illustre la problématique. À gauche, une p-boîte représente l'incertitude épistémique ; à droite une collection de fonctions de densité de probabilité (FDPs) caractérise les effets de l'incertitude épistémique sur la fonction f . Savoir comment cette collection de FDPs est utilisée dans le cadre de notre méthode d'OTR sous incertitude épistémique est l'objet des propos développés subséquemment. En quelques mots, le concept est de sélectionner, pour la topologie optimiste, la conception qui maximise sa performance (la fonction coût) malgré le fait que les paramètres des lois de probabilités soient bornés. Semblablement, la topologie pessimiste est la topologie qui minimise sa performance en dépit du fait que les paramètres des lois de probabilités soient bornés.

Soit H une variable aléatoire quantifiant la valeur d'un paramètre du problème d'OT, comme ceux vus à la sous-section 1.4.2, et \mathbb{P}_H sa loi de probabilité paramétrée par $\{\tau_1, \dots, \tau_l\}$ valeurs. Par exemple, si \mathbb{P}_H est une loi normale, c'est-à-dire $\mathbb{P}_H = \mathcal{N}(\tau_1, \tau_2)$, alors deux paramètres sont nécessaires pour la caractériser : la moyenne et l'écart-type respectivement $\tau_1 = m_1(H)$ et $\tau_2 = \mu_2(H)$. En admettant que certains paramètres soient bornés, car ils sont entachés par de l'incertitude épistémique, l'ensemble \mathcal{P} contient des ensembles de nombres réels tels que $\mathcal{P} = \{\mathcal{I}_1, \dots, \mathcal{I}_l\}$ avec $\tau_1 \in \mathcal{I}_1$, $\tau_2 \in \mathcal{I}_2$, *et cætera*.

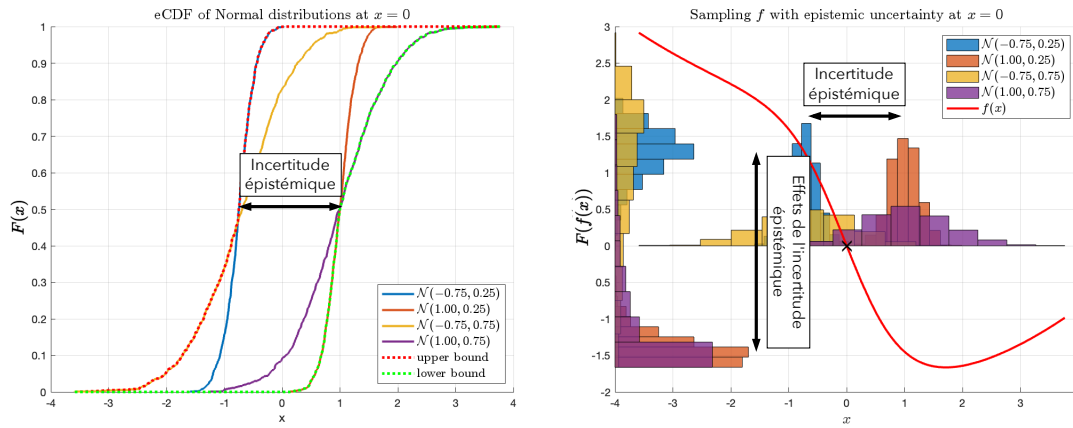


Figure 2.5 – Illustration des effets des incertitudes épistémiques sur une fonction.

Autrement dit, l'ensemble \mathcal{P} contient les intervalles des paramètres des lois de probabilité. La figure 2.6 montre des fonctions de répartition empirique de lois normales si $\mathcal{I}_1 = \{0\}$ et $\mathcal{I}_2 = [1, 4]$. Dans l'exemple présenté par la figure 2.6, l'ensemble des lois générées sont comprises entre les lois $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\mathcal{N}(0, 4)$. La figure 2.7 montre la propagation des lois normales de la figure 2.6 au travers d'une fonction non linéaire notée par f . Cette fonction illustre le comportement d'un système quelconque et elle sert d'exemple. Par le biais de cette non-linéarité, au moins trois lois normales sont nécessaires pour quantifier l'impact de l'incertitude épistémique. Si ce système est linéaire, alors il n'y a nul besoin de multiplier les valeurs intermédiaires d'écart-type; la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle suffisent à quantifier l'impact des incertitudes épistémiques.

La borne supérieure (en pointillé rouge) et la borne inférieure (en pointillé vert) des fonctions de répartition sont affichées aux figures 2.6 et 2.7 et déterminent la plus grande et la plus petite occurrence d'un événement tel que x ou de $f(x)$ soit inférieure aux valeurs données en abscisse. Autrement dit, une valeur de x ou de $f(x)$ résulte en un écart sur la probabilité (et non plus à une valeur de probabilité); inversement, à une valeur de probabilité donnée correspond à un écart de x ou $f(x)$. Malencontreusement, même si ces méthodes sont largement appliquées à l'optimisation pour une conception s'appuyant sur la fiabilité (RBDO), dans la formulation d'RDO choisie (voir l'équation (2.1)) connaître l'occurrence d'un événement n'a pas d'intérêt.

Ainsi, par **analogie** deux géométries sont fournies en fin d'optimisation pour atténuer les effets des incertitudes épistémiques. Ces deux géométries sont définies par les problèmes

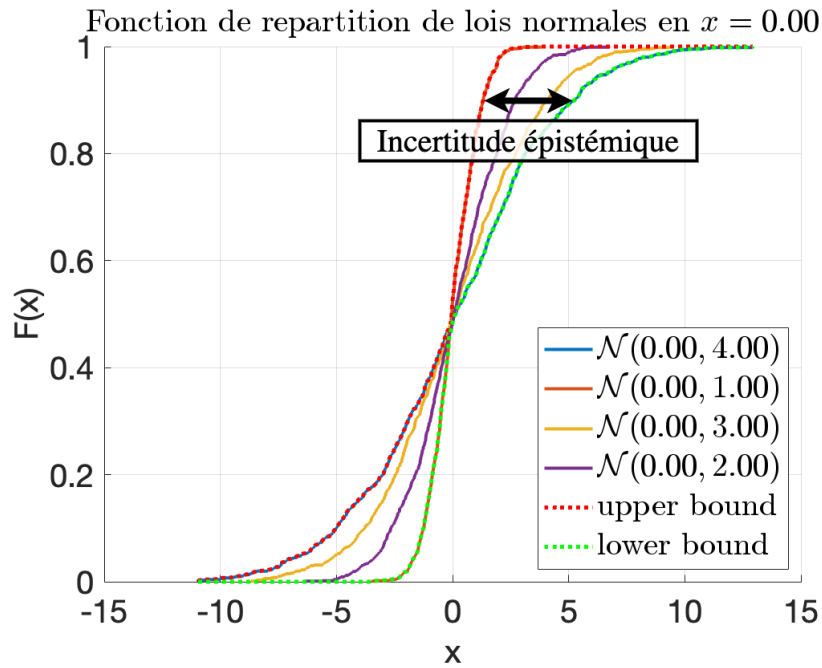


Figure 2.6 – Fonctions de répartition empirique de quatre lois normales dont l'écart-type est borné entre 1 et 4.

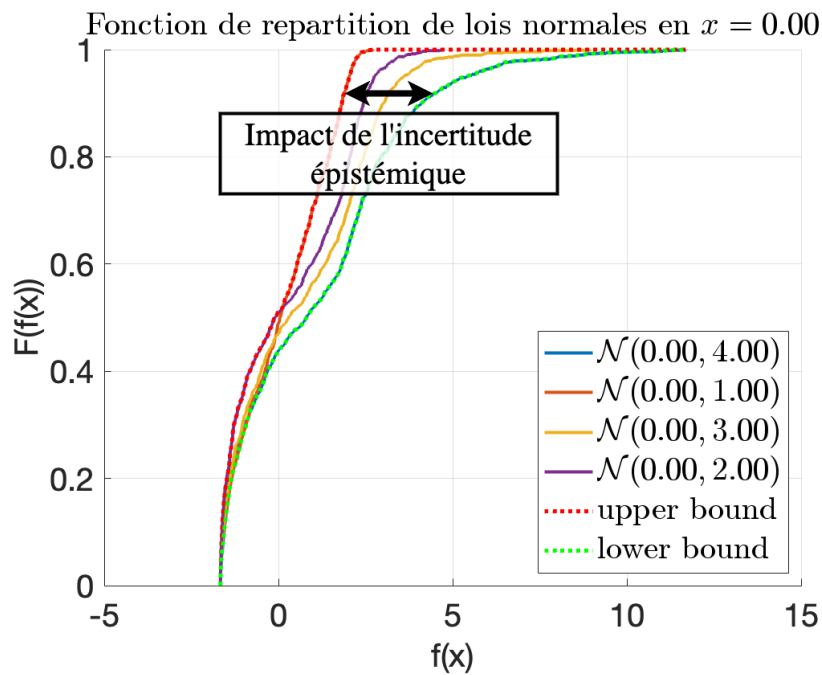


Figure 2.7 – Fonctions de répartition empirique du système incertain f de lois normales dont l'écart-type est borné entre 1 et 4.

d'optimisation suivant :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{op}} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} \hat{c}_{\text{ept}} \left(\boldsymbol{\rho}, \arg \min_{\tau_i \in \mathcal{I}_i} \hat{c}_{\text{ept}} (\boldsymbol{\rho}, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_l) \right), \quad (2.8)$$

pour la conception optimiste et :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} \hat{c}_{\text{ept}} \left(\boldsymbol{\rho}, \arg \max_{\tau_i \in \mathcal{I}_i} \hat{c}_{\text{ept}} (\boldsymbol{\rho}, \tau_1, \dots, \tau_i, \dots, \tau_l) \right), \quad (2.9)$$

pour la conception pessimiste. Les problèmes d'optimisation (2.8) et (2.9) peuvent être résolus numériquement. Ainsi, l'objectif est toujours de minimiser la fonction objectif, ici \hat{c}_{ept} ; mais aussi de choisir le jeu de paramètre des lois de probabilités qui minimise la fonction objectif pour la topologie optimiste et le jeu de paramètre des lois de probabilités qui maximise la fonction objectif pour la topologie pessimiste.

Cependant, considérant le coût calculatoire de la fonction objectif, résoudre le problème de minimisation ou maximisation qui est imbriqué dans les équations (2.8) et (2.9) n'est pas raisonnable. Au lieu de trouver une valeur optimale (locale ou globale) pour les τ_i à l'aide d'un algorithme d'optimisation, nous échantillons plusieurs valeurs de τ_i dans les intervalles \mathcal{I}_i . Ce dernier est modifié en conséquence et contient des ensembles de nombres réels correspondant à l'échantillon. Par exemple, dans le cas de la figure 2.6 : $\mathcal{I}_2 = \{1, 2, 3, 4\}$.

Pour cela, nous avons décidé de modifier la procédure de mise à jour décrite par l'équation (2.4) en ajoutant une étape supplémentaire. Elle consiste à calculer dans un premier temps l'état de $\boldsymbol{\rho}$ à l'itération suivante pour l'ensemble des jeux de paramètres des lois de probabilité. Soit \mathcal{D}_{op} un ensemble contenant les géométries à jour obtenues à l'aide de la topologie optimiste, à une itération j et pour l'ensemble de **tous les couples** des ensembles \mathcal{I}_i . Il est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{\text{op}}^j = \left\{ \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^j, \tau_1, \dots, \tau_l), \dots \right) \mid \tau_1 \in \mathcal{I}_1 \wedge \dots \wedge \tau_l \in \mathcal{I}_l \right\} \forall j \in \mathbb{N}, \quad (2.10)$$

et \mathcal{D}_{pe} est construit de la même manière, mais pour la conception pessimiste, il s'en suit que :

$$\mathcal{D}_{\text{pe}}^j = \left\{ \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^j, \tau_1, \dots, \tau_l), \dots \right) \mid \tau_1 \in \mathcal{I}_1 \wedge \dots \wedge \tau_l \in \mathcal{I}_l \right\} \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.11)$$

Il convient de préciser que pour $j = 0$ les deux ensembles $\mathcal{D}_{\text{op}}^0$ et $\mathcal{D}_{\text{pe}}^0$ sont identiques puisqu'à l'initialisation : $\rho_{\text{op}}^0 = \rho_{\text{pe}}^0$.

La figure 2.8 illustre la procédure de mise à jour des VDs optimistes et pessimistes. Dans cette figure, l'ensemble \mathcal{I}_1 est égal à $\mathcal{I}_1 = \{0, 1\}$ et \mathcal{I}_2 vaut $\mathcal{I}_2 = \{0.5, 0.75\}$. Le point de départ de cette optimisation est matérialisé par la croix noire située en $x = 1.5$. C'est pourquoi $\mathcal{D}_{\text{op}}^j$ et $\mathcal{D}_{\text{pe}}^j$ sont égaux et dans le cas présent ils s'écrivent de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{\text{op}}^0 = \left\{ \underset{\tau_1}{\text{opt}}(\hat{f}(x^0, \underset{\tau_2}{0}, 0.5)), \underset{\tau_1}{\text{opt}}(\hat{f}(x^0, 1, 0.5)), \underset{\tau_1}{\text{opt}}(\hat{f}(x^0, 0, 0.75)), \underset{\tau_1}{\text{opt}}(\hat{f}(x^0, 1, 0.75)) \right\} .$$

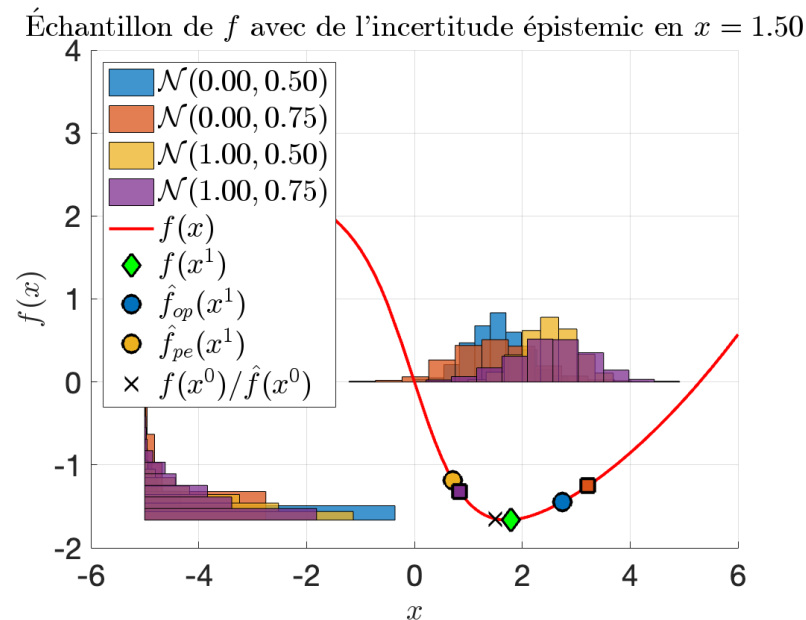


Figure 2.8 – Sélection des conceptions optimiste et pessimiste par notre approche.

Dans la figure 2.8, ces quatre éléments sont représentés par des carrés ou des ronds. Noter que la cardinalité de \mathcal{D} vaut $\#\mathcal{D} = \#\mathcal{I}_1 \cdot \dots \cdot \#\mathcal{I}_l$. Ainsi, pour un petit jeu de paramètres, le nombre de conceptions à mettre à jour est raisonnable.

Ensuite, la conception optimiste correspond à la meilleure conception des ensembles \mathcal{D}_{op} et \mathcal{D}_{pe} , elle s'obtient selon l'expression suivante :

$$\rho_{\text{op}}^{j+1} = \arg \min_{\rho} \left(\left\{ \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{op}}^j), \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{pe}}^j) \right\} \right) \forall j \in \mathbb{N} , \quad (2.12)$$

de manière analogue la conception pessimiste correspond à la plus mauvaise conception

des deux ensembles :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^{j+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\rho}} \left(\left\{ \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{op}}^j), \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{pe}}^j) \right\} \right) \forall j \in \mathbb{N}, \quad (2.13)$$

où les champs de pseudo-densité (PD) pour les conceptions optimiste et pessimiste à l'itération $j + 1$ sont notés respectivement par $\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^{j+1}$ et $\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^{j+1}$.

L'objectif de cette modification est de trouver la distribution (parmi la collection de distributions) qui minimise, dans le cas de la conception optimiste, ou maximise, dans le cas de la conception pessimiste, la fonction coût qui sert d'indicateur à la robustesse. Avec le schéma de mise à jour qui est proposé avec les équations (2.12) et (2.13), le calcul des deux géométries est couplé. Autrement dit, la j -ième géométrie optimiste peut devenir la $j + 1$ -ième géométrie pessimiste.

La sélection entre les deux géométries se fait par l'estimation de la fonction coût \hat{c}_{ept} . Cependant, cette fonction est coûteuse à évaluer de part l'utilisation de la SMC pour l'estimation des moments statistiques. Même si deux de ces évaluations sont réutilisées pour le calcul de l'itération suivante le coût reste prohibitif. Deux solutions peuvent être apportées : construire une approximation de la fonction coût robuste en fonction de son historique, ceci nécessiterait *a priori* de découpler le calcul des géométries optimiste et pessimiste ; ou la remplacer par sa valeur déterministe, c'est-à-dire :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^{j+1} = \arg \min_{\boldsymbol{\rho}} \left(\left\{ c_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{op}}^j), c_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{pe}}^j) \right\} \right) \forall j \in \mathbb{N}, \quad (2.14)$$

et :

$$\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^{j+1} = \arg \max_{\boldsymbol{\rho}} \left(\left\{ c_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{op}}^j), c_{\text{ept}}(\mathcal{D}_{\text{pe}}^j) \right\} \right) \forall j \in \mathbb{N}. \quad (2.15)$$

De cette manière, l'équation (2.14) traduit le fait que la conception optimiste suivante est la conception la plus performante de façon déterministe, mais est calculée à partir du gradient robuste. De même pour l'équation (2.15), la conception pessimiste est la conception la moins performante d'une manière déterministe, mais toujours mise à jour en fonction du gradient robuste, c'est-à-dire tenant compte des incertitudes épistémiques. Un autre avantage de la méthode proposée est qu'elle ne demande pas de modifier le calcul des sensibilités ; elle est peu intrusive, donc elle répond à nos objectifs. La figure 2.8 représente ce choix entre les quatre possibilités par des ronds. Celui qui a la valeur la plus faible devient la conception optimiste ; celui avec la valeur la plus importante

devient la conception pessimiste.

Dans la mesure où la procédure de mise à jour a été modifiée et que deux géométries sont optimisées simultanément, un nouveau critère de convergence est proposé, il prend la forme suivante :

$$\epsilon = \frac{|\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^j) - \hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^{j+1})|}{|\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^j)| + |\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^{j+1})|} + \frac{|\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^j) - \hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^{j+1})|}{|\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^j)| + |\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^{j+1})|}. \quad (2.16)$$

Ce critère permet de prendre en considération l'état de la fonction objectif robuste. Ces deux valeurs sont nécessairement calculées avant l'évaluation du critère (2.16), donc il n'y a pas de coût calculatoire supplémentaire. Le but est de limiter les répercussions apportées par les simplifications faites aux équations (2.14) et (2.15).

Dans cette section, les effets des incertitudes aléatoires et des incertitudes épistémiques sont atténués. Dans ce travail, l'utilisation d'algorithmes d'optimisation différentiable est nécessaire, octroyant un coût informatique plus faible. La première sous-section est consacrée aux incertitudes aléatoires. Les modifications engendrées par rapport au cas déterministe sont minimales. Seul le calcul des sensibilités change et leurs calculs sont donnés aux équations (2.6) et (2.7). Mieux encore, dans certaines conditions, le calcul du gradient de la fonction coût robuste revient à des sommations des réalisations aux points requis par la SMC, ce qui permet de minimiser les modifications à apporter au cas déterministe. Enfin, nous avons dérivé spécialement le calcul des sensibilités pour minimiser les erreurs sur le calcul de la variance. Erreurs qui ont été observées dans les premières versions du cas d'usage utilisant **MatLab** [The MathWorks Inc., 2023].

Dernièrement, la sous-section 2.3.2 est consacrée au traitement des incertitudes épistémiques. Étant donné que les incertitudes épistémiques sont utilisés en RBDO pour estimer des niveaux de fiabilité, nous avons adapté le schéma de mise à jour. Ce nouveau schéma permet de considérer les incertitudes épistémiques pour de la RDO et donc pour de l'OTR. Il permet aussi, de manière innovante, de proposer deux conceptions à l'utilisateur : l'une optimiste et l'autre pessimiste. Les méthodes adaptées et développées permettent de représenter les incertitudes aléatoires avec des lois de probabilités ; et des incertitudes épistémiques représentées avec des p-boîtes grâce à la méthode directe. Une adaptation est nécessaire, si d'autres méthodes de représentation ou de modélisation mathématiques sont utilisées.

2.4 Modélisation des imperfections géométriques

Cette section présente les différents modèles des imperfections géométriques qui sont déployés dans le code et analysés au chapitre 3. La sous-section 2.4.1, fait un rapide rappel du modèle présenté dans les travaux de [Lazarov *et al.*, 2011]. Ce rappel est suivi d'éléments mathématiques liant les différentes notions vues et introduisant les modèles que nous avons développés. Après quoi, la sous-section 2.4.2 introduit un modèle dit **naïf**. Ce modèle introduit les éléments de la formulation qui servent au modèle de la sous-section 2.4.3. Enfin, le dernier modèle est une décomposition en **mode statistique**. Il est relié à la nature locale de la géométrie. Les sous-sections subséquentes renvoient à la phase trois du cadre méthodologique référencée par la figure 2.1.

2.4.1 Altération de l'hyperparamètre η

Le tableau 1.5 et la figure 1.21 de la sous-section 1.4.2 présentent une taxonomie des modèles considérant les imperfections de la géométrie. La méthode d'altération sur la topologie issue de l'article de [Lazarov *et al.*, 2011] est dite de type I. Dans ce modèle, l'hyperparamètre η est affecté par de l'incertitude. Dans la méthode SIMP, cet hyperparamètre permet de modifier localement les niveaux de PD grâce au filtre d'*Heaviside* donné par l'équation (1.25). Ces modifications sont illustrées par la figure 1.22 page 67.

Soit H la variable aléatoire associée à la valeur de η . La loi de probabilité est notée $\mathbb{P}_H = \mathcal{U}(\tau_1, \tau_2)^\dagger$, avec τ_1 et τ_2 la borne inférieure et supérieure de la loi de probabilité uniforme. Dans ces conditions, le problème d'optimisation (2.1) est modifié de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{H\}, \mathcal{VD} = \{\rho\}, \dots) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{C}\mathcal{P}t = \{V(\bar{\rho})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \dots\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\}, \dots \end{aligned} \tag{2.17}$$

L'avantage de cette modélisation réside dans le calcul des sensibilités. En effet, les dérivées partielles qui sont référencées par les équations (1.27), (2.6) et (2.7) ne changent pas. Ainsi, la souplesse et ses sensibilités doivent être évaluées qu'aux points tirés pour simuler un échantillon de H . Dans ce qui suit, $\tilde{\rho}$ est considéré comme étant le champ PD

[†]. La notation $H \sim \mathcal{U}(\tau_1, \tau_2)$ est aussi utilisé dans le document pour assigner une loi de probabilité à une variable aléatoire.

altéré par les modèles d'imperfection géométriques. Ce champ prend soit la forme d'une variable aléatoire (p. ex. l'équation (2.18)) ou d'une réalisation (p. ex. l'équation (3.4)). La nature est triviale ou clairement spécifiée pour éviter toute confusion.

Cette modélisation n'est que peu intrusive, mais comme le souligne la section 1.4.2 et comme le démontre la section 3.1.2, elle manque de sens physique. Néanmoins, la reproduction de ce modèle dans notre solution technique permet de valider l'architecture logicielle conçue et implémentée et sert d'élément de comparaison avec les modèles développés.

2.4.2 Modélisation naïve des imperfections

Le modèle naïf vient modifier la pseudo-densité finale, d'après la taxonomie présentée à la sous-section 1.4.2 : il s'agit d'une modélisation de type II. Dans ce cadre, nous avons décidé de modéliser les imperfections qui affectent la géométrie comme ceci :

$$\tilde{\rho}_e = \bar{\rho}_e + \Delta(\bar{\rho}) , \quad (2.18)$$

avec $\tilde{\rho}_e$ la pseudo-densité affectée par de l'incertitude définie par un modèle $\Delta : \mathbb{R}^{n_{el}} \rightarrow \mathbb{R}$ qui agit comme la fonction Ψ présentée au tableau 1.5. L'application Δ modélise les imperfections géométriques et génère des écarts en fonction de l'état de la topologie et du champ de pseudo-densité finale, c'est-à-dire $\bar{\rho}$ pour la méthode SIMP. Ce modèle peut provenir de différentes sources : connaissances expertes, données expérimentales, basées sur la physique avec des équations différentielles ou n'importe quelle combinaison.

Dans cette sous-section, le modèle est dit : « naïf », car l'écart, Δ , n'est pas fonction du procédé de fabrication ni de la géométrie et agit comme un bruit blanc. L'ajout de ce modèle permet à la fois de valider l'architecture conçue et de vérifier la pertinence de l'équation (2.18). Ainsi, l'équation (2.18) se réécrit de la manière suivante :

$$\tilde{\rho}_e = \bar{\rho}_e + \underbrace{P_e}_{\Delta_{\text{naïf}}} . \quad (2.19)$$

Dans l'équation précédente, le modèle d'imperfection géométrique naïf est noté par $\Delta_{\text{naïf}} = P_e$ et P_e est une variable aléatoire simulant une imperfection pour l'élément

e . La loi de probabilité de l'imperfection est notée $\mathbb{P}_{P_e} = \mathcal{N}(\tau_1, \tau_2)$ avec τ_1 la moyenne et τ_2 l'écart-type de la loi normale. Il peut advenir lors d'un tirage que la PD $\tilde{\rho}_e$ soit plus grande que 1 ou plus petite que 0; en effet, le support d'une loi normale est dans \mathbb{R} . Dans ce cas, la pseudo-densité $\tilde{\rho}_e$ est remise dans $[0, 1]$. Cela est systématisé pour tous les tirages pouvant aboutir à des grandeurs qui n'ont pas de sens physique.

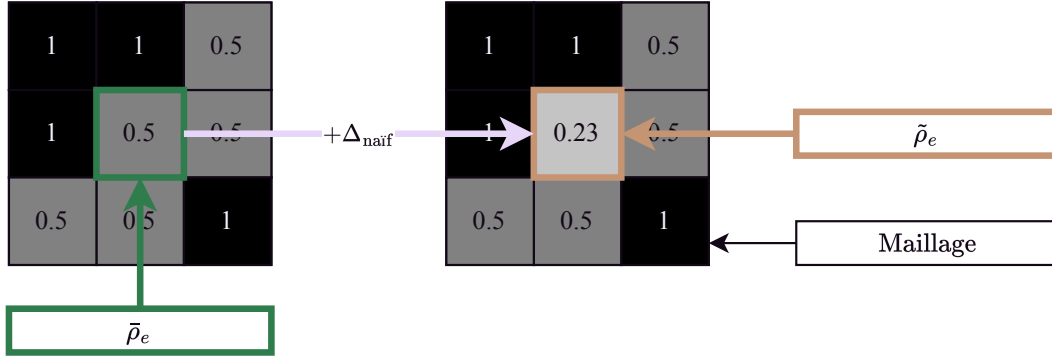


Figure 2.9 – Principe de la modélisation naïve des imperfections géométriques.

La figure 2.9 illustre la procédure du modèle naïf. Pour tous les éléments qui constituent le maillage (même dans les espaces de non-conception), la pseudo-densité finale est altérée de manière aléatoire. Étant donné que l'altération de la PD d'un élément est fonction d'une variable aléatoire, cela peut être vu comme une version discrète d'un champ aléatoire où la longueur de corrélation serait faible devant la taille de l'élément. Les travaux menés n'intègrent pas de champ aléatoire. Cependant le filtre de convolution (cf. équation (1.24)) peut servir à corrélérer spatialement les P_e . Cette modification peut être envisagée sans trop modifier la solution déjà déployée, puisque les quantités sont déjà calculées et aucune adaptation n'est à prévoir grâce à la SMC.

Dans ces conditions, le problème d'optimisation (2.1) est modifié de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \min_{\mathcal{VD}} \quad & \hat{c}_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{P = (P_1, \dots, P_{n_{\text{el}}})\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) \\
 \text{sujet à} \quad & \mathcal{CP}t = \{V(\bar{\rho})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \dots\} \\
 & \mathcal{CM} = \{0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 1, \dots, (1.25), (2.19)\} \\
 & \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\}, \dots
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Cette méthode est *a priori* plus intrusive que le modèle présenté à la sous-section 2.4.1, car le problème physique est maintenant résolu à partir des réalisations du champ de

PD $\tilde{\rho}$ et $\partial c_{\text{ept}}/\partial \tilde{\rho}_e$ est le gradient qui est calculé pour les tirages obtenus en fonction des réalisations du vecteur aléatoire P . Dès lors, la règle de la chaîne (1.27) doit être mise à jour, comme ceci :

$$\frac{\partial z}{\partial \rho_e} = \sum_{l=1}^{n_{\text{el}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{el}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{el}}} \frac{\partial z}{\partial \tilde{\rho}_l} \underbrace{\frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \tilde{\rho}_k}}_{=1} \frac{\partial \tilde{\rho}_k}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e} = \sum_{j \in \mathcal{B}_e} \frac{\partial z}{\partial \tilde{\rho}_j} \frac{\partial \tilde{\rho}_j}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e}. \quad (2.21)$$

Le terme de droite de l'équation (2.21) se simplifie, car $\partial \tilde{\rho}_l/\partial \tilde{\rho}_k = 1$ (voir l'équation du modèle (2.19)). Ainsi, les équations (2.21) et (1.27) sont égales : le modèle naïf n'est donc pas intrusif. Comme pour le modèle précédent, les sensibilités sont déjà connues et doivent être évaluées en fonction des réalisations du vecteur aléatoire P .

L'avantage de cette formulation, décrite par l'équation (2.18), réside dans l'interprétabilité : l'écart est fonction de la géométrie. Cependant, avec le modèle naïf, l'écart est élémentaire. C'est pourquoi la sous-section 2.4.3 propose une solution qui intègre des informations sur les motifs géométriques locaux.

2.4.3 Modélisation des imperfections des modes statistiques

Comme pour le modèle précédent, le modèle par modes statistiques vient modifier la pseudo-densité finale et est une modélisation de type II. La modélisation des imperfections est identique à celle présentée par l'équation (2.18). Néanmoins, l'écart est calculé en fonction des PDs contenue dans le voisinage de l'élément e . Autrement dit, la fonction Δ comporte les informations sur la topologie locale au voisinage de Λ_e . Les indices de ces éléments locaux sont contenus dans l'ensemble \mathcal{S}_e . Cet ensemble est défini de la sorte que :

$$\mathcal{S}_e = \{i \mid \|O_i - O_e\|_{p_{\text{loc}}} \leq r_{\text{loc}}\}, \quad (2.22)$$

où r_{loc} est un paramètre définissant le rayon de la boule ayant pour centre O_e et est muni de la norme- p . Le paramètre p_{loc} peut définir des fenêtres carrées à condition qu'il soit suffisamment élevé, par exemple si p_{loc} est supérieur à $p_{\text{loc}} \geq 10$. L'ensemble \mathcal{S}_e est utilisé pour collecter les pseudo-densités finales locales, elles sont contenues dans l'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_e$. Ce dernier est défini en procédant ainsi :

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \{\bar{\rho}_i \mid i \in \mathcal{S}_e \wedge i \neq e\}. \quad (2.23)$$

L'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_e$ est utilisé comme support pour le modèle Δ_{stat} et exclut la pseudo-densité finale de l'élément e : $\bar{\rho}_e$. Ainsi, l'équation (2.18) est modifiée comme suit :

$$\tilde{\rho}_e = \bar{\rho}_e + \Delta_{\text{stat}}(\bar{\mathbf{q}}_e) . \quad (2.24)$$

Le modèle proposé à deux objectifs, il permet de :

- Détecter la frontière de la topologie. En effet, pour SIMP (et les autres méthodes ayant l'élément comme descripteur de la topologie) la frontière n'est pas explicitement décrite et ceci constitue une lacune de ces méthodes [Chen et Chen, 2011] pour nos besoins, afin de considérer le procédé de fabrication. Dans notre modèle, la frontière est détectée grâce à la fonction indicatrice, $\mathbb{1}$, définie à partir de l'écart-type sur l'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_e$.
- Distinguer des motifs géométriques locaux, signature d'un défaut de fabrication et d'y associer un niveau d'écart. Dans notre modèle, les motifs géométriques sont caractérisés par une analyse statistique des éléments locaux.

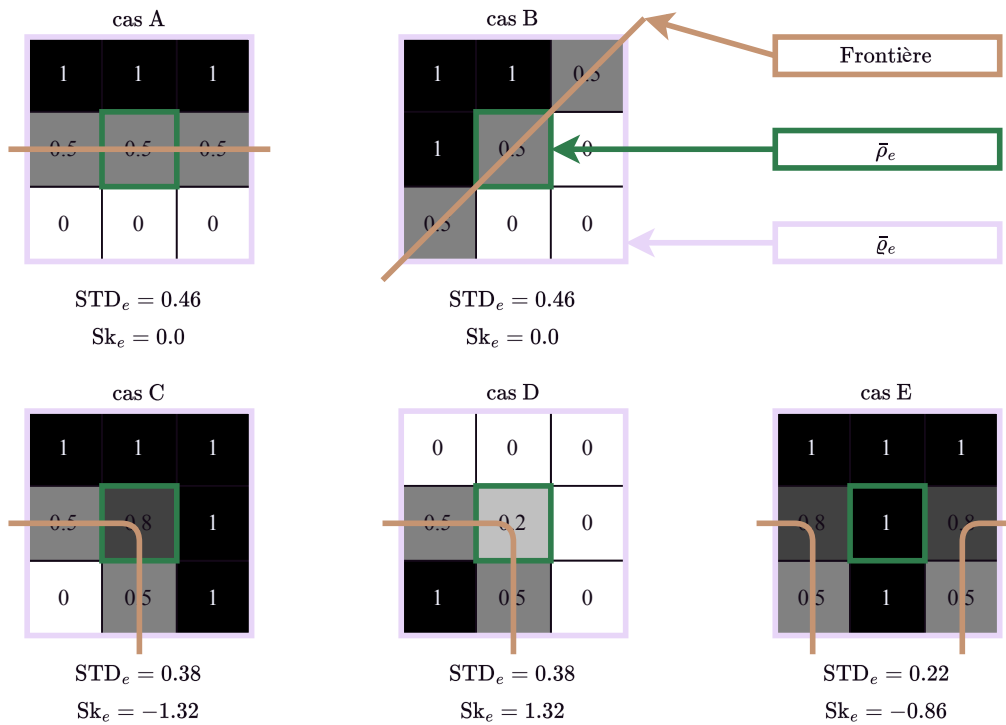


Figure 2.10 – Exemple de motifs géométriques locaux et leurs valeurs d'asymétrie et d'écart-type associés.

La figure 2.10 illustre les valeurs d'asymétrie et d'écart-type pour certains motifs géométriques locaux considérés représentatifs en deux dimensions. Les cas A et B affichent des frontières rectilignes, ce qui conduit à une valeur d'asymétrie[‡] nulle et un écart-type élevé. Dans les cas C et D, la présence d'un rayon de raccordement à proximité de Λ_e entraîne une réduction de l'écart-type, mais une augmentation de l'asymétrie. L'invariance par rotation est démontrée dans les cas A et B. Les cas C et D sont également invariants par rotation. Cependant, il est possible de les distinguer. En effet, si le raccordement est un congé (cas C), alors l'asymétrie est négative ; à l'inverse, lorsque le raccordement est un arrondi tangent (cas D), l'asymétrie a la même norme, mais est de signe opposé. Enfin, le cas E représente une connexion entre deux branches topologiques, entraînant une réduction de l'écart-type et de l'asymétrie.

En conséquence, la modélisation des imperfections géométriques proposée est bien adaptée à SIMP ou aux méthodes utilisant une cartographie BD. En effet, la modélisation prend en compte la courbure et les motifs locaux au niveau des frontières à partir d'un champ de PD. Compte tenu des observations et des analyses mentionnées ci-dessus, le modèle de l'équation (2.24) est exprimé comme suit :

$$\Delta_{\text{stat}}(\bar{\mathbf{q}}_e) = \mathbb{1}_{\text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) \geq a} (k_{\text{STD}} \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) + k_{\text{Sk}} |\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_e)|) \mathbf{P}_e^{\text{AM}}, \quad (2.25)$$

les poids k_{STD} et k_{Sk} sont utilisés pour attribuer un niveau d'écart à un motif géométrique en fonction des valeurs de l'écart-type local (estimé avec la fonction STD) et de l'asymétrie locale (estimé avec la fonction Sk). En outre, dans l'équation (2.25), la fonction indicatrice est définie de cette manière :

$$\mathbb{1}_{\text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) \geq a} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) \geq a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Dans ces conditions, le problème d'optimisation (2.1) est réécrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \min_{\mathcal{VD}} \quad & \hat{c}_{\text{ept}} (\mathcal{E} = \{\mathbf{P} = (\mathbf{P}_1^{\text{AM}}, \dots, \mathbf{P}_{n_{\text{el}}}^{\text{AM}})\}, \mathcal{VD} = \{\boldsymbol{\rho}\}, \dots) \\ \text{sujet à} \quad & \mathcal{CPt} = \{V(\hat{\rho})/V_{\text{ec}} - \varphi^* = 0, \dots\} \\ & \mathcal{CM} = \{0 \leq \boldsymbol{\rho} \leq 1, \dots, (1.25), (2.25)\} \\ & \mathcal{C}\phi = \{(1.15)\}, \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

‡. C'est le moment centré d'ordre 3 : μ_3 , pour rappel se reporter à l'équation (1.3).

Dans les équations ci-dessus, les fonctions STD et Sk sont respectivement des estimateurs de l'écart-type et de l'asymétrie de l'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_e$. Les poids k_{STD} et k_{Sk} caractérisent l'influence des deux modes statistiques. Enfin, P_e^{AM} est une variable aléatoire associée à l'élément e et est fonction de la répétabilité des géométries fabriquées. Comme pour le modèle naïf, ces variables aléatoires ne sont pas corrélées en position.

Pour ajouter ce modèle à SIMP, la règle de la chaîne doit être revue :

$$\frac{\partial z}{\partial \rho_e} = \sum_{l=1}^{n_{\text{el}}} \sum_{k=1}^{n_{\text{el}}} \sum_{j=1}^{n_{\text{el}}} \frac{\partial z}{\partial \tilde{\rho}_l} \frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \bar{\rho}_k} \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e} = \sum_{l \in \mathcal{S}_e} \sum_{j \in \mathcal{B}_e} \frac{\partial z}{\partial \tilde{\rho}_l} \frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \bar{\rho}_j} \frac{\partial \bar{\rho}_j}{\partial \hat{\rho}_j} \frac{\partial \hat{\rho}_j}{\partial \rho_e}. \quad (2.28)$$

Contrairement au modèle antérieur, $\partial \tilde{\rho}_l / \partial \bar{\rho}_j$ n'est pas toujours égal à 1 et vaut :

$$\frac{\partial \tilde{\rho}_l}{\partial \bar{\rho}_j} = \begin{cases} 1 & \text{si } l = j, \\ \frac{\partial \Delta_{\text{stat}}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.29)$$

Pour calculer $\partial \Delta_{\text{stat}}(\bar{\mathbf{q}}_l) / \partial \bar{\rho}_j$, il faut préalablement calculer la dérivée partielle de l'écart-type. Elle est obtenue de la manière suivante :

$$\frac{\partial \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} = \frac{\partial \text{Var}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} \frac{1}{2\sqrt{\text{Var}(\bar{\mathbf{q}}_l)}}, \quad (2.30)$$

avec la fonction Var qui calcule la variance de l'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_l$. Cette fonction et son gradient sont calculés de la manière suivante :

$$\text{Var}(\bar{\mathbf{q}}_l) = \frac{1}{n_{\#} - 1} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} \bar{\rho}_i^2 - \frac{n_{\#}}{n_{\#} - 1} \underbrace{\left(\frac{1}{n_{\#}} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} \bar{\rho}_i \right)^2}_{\hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l)}, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial \text{Var}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} = \frac{2}{n_{\#} - 1} \left(\bar{\rho}_j - \frac{2}{n_{\#}} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} \bar{\rho}_i \right), \quad (2.32)$$

avec $n_{\#}$ représentant la cardinalité de l'ensemble $\bar{\mathbf{q}}_l$. La seconde étape est de calculer la dérivée partielle de l'asymétrie par rapport à $\bar{\rho}_j$. L'asymétrie et sa dérivée partielle sont

obtenues ainsi :

$$\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l) = \frac{\frac{1}{n_{\#}} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^3}{\left(\frac{1}{n_{\#}-1} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^2 \right)^{3/2}}, \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} &= \frac{3}{2} \left(\sum_{i \in \mathcal{S}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^3 \right) \\ &\frac{\left(\frac{2}{n_{\#}} \sum_{i \in \mathcal{T}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l)) + 2 \left(\frac{1}{n_{\#}} - 1 \right) (\bar{\rho}_j - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l)) \right)}{n_{\#}(n_{\#}-1) \left(\frac{1}{n_{\#}-1} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^2 \right)^{3/2+1}} \\ &- \frac{\frac{3}{n_{\#}} \sum_{i \in \mathcal{T}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^2 + 3 \left(\frac{1}{n_{\#}} - 1 \right) (\bar{\rho}_j - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^2}{n_{\#} \left(\frac{1}{n_{\#}-1} \sum_{i \in \mathcal{S}_l} (\bar{\rho}_i - \hat{m}_1(\bar{\mathbf{q}}_l))^2 \right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

où l'ensemble \mathcal{T}_l est identique à \mathcal{S}_l , mais avec l'indice j en moins, c'est-à-dire $\mathcal{T}_l = \mathcal{S}_l \setminus j$. Les équations (2.33) et (2.34) sont biaisées. Pour corriger l'estimation de l'asymétrie, un facteur correcteur $n_{\#}^2 / (n_{\#}-1)(n_{\#}-2)$ doit être ajouté au terme de droite.

Dans le modèle issu de l'équation (2.25), la valeur absolue et la fonction indicatrice ne sont pas continues. Pour exprimer les gradients, les approximations continues suivantes sont utilisées. La fonction indicatrice est approximée avec la fonction sigmoïde :

$$\mathbb{1}_{\text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) \geq a} \approx \frac{1}{\exp(10(a - \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_l))) + 1}, \quad (2.35)$$

et les dérivées partielles de l'équation précédente valent :

$$\frac{\partial \mathbb{1}_{\text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_e) \geq a}}{\partial \bar{\rho}_j} = \frac{\partial \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} \frac{10 \exp(a - \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_l))}{(\exp(10(a - \text{STD}(\bar{\mathbf{q}}_l))) + 1)^2}. \quad (2.36)$$

Enfin la valeur absolue est approximée par une expression fonction de la fonction d'erreur (erf) [Bagul et Chesneau, 2021], tel que :

$$|\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)| \approx \text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l) \text{erf}(10 \text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)). \quad (2.37)$$

Enfin, les dérivées partielles de l'équation (2.37) sont égales à :

$$\frac{\partial |\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)|}{\partial \bar{\rho}_j} = \frac{\partial \text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)}{\partial \bar{\rho}_j} \left(\text{erf}(10\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l)) + \frac{2\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l) \exp(-100\text{Sk}(\bar{\mathbf{q}}_l))}{10\sqrt{\pi}} \right). \quad (2.38)$$

En conséquence, toutes les sensibilités sont connues et l'équation (2.29) peut être évaluée. Cependant, pour limiter l'intrusion dans SIMP, nous avons fait le choix de considérer $\partial \Delta_{\text{stat}}(\bar{\mathbf{q}}_l) / \partial \bar{\rho}_j$ comme étant nul. Ainsi, le gradient du modèle statistique (2.28) a la même forme que celui du modèle naïf (2.21) ou du modèle de [Lazarov *et al.*, 2011] (1.27). L'impact de cette hypothèse n'a pas encore pu être vérifié et fera l'objet d'un travail ultérieur. Toutefois, considérant l'architecture du code proposé à la sous-section suivante, les modifications apportées au programme sont minimales.

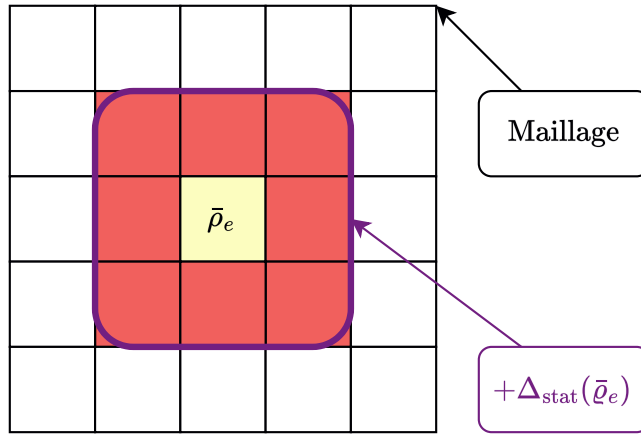


Figure 2.11 – Exemple de génération d'un type d'imperfection dont la taille est plus importante que l'élément.

Enfin et surtout, un désavantage de la modélisation proposée réside dans le fait que la taille de l'élément est identique à la taille de l'imperfection. La figure 2.11 illustre une modification possible du modèle si l'imperfection est plus grosse que la taille de la maille. Par exemple, leurs formes pourraient être en fonction des éventuels traitements de surface. En outre, l'imperfection présentée à la figure 2.11 est carrée, mais par exemple il serait possible de leur donner une forme ovoïde. Dans le cas contraire où les imperfections sont plus petites, l'OT apporte une solution. En effet, l'optimisation peut être faite sur plusieurs échelles (comme précisé dans la sous-section 1.3.1), permettant de diminuer *de facto* la taille caractéristique des éléments à l'échelle inférieure : les imperfections peuvent

affecter la topologie aux plus petites échelles.

Dans cette section plusieurs modélisations des imperfections géométriques pour l'OTR sont revues et toutes appliquées à SIMP. À l'exception du modèle issu de la littérature, tous les autres modèles que nous avons proposés sont compatibles avec une représentation basée sur les densités. Les deux modélisations proposées sont adaptables si une cartographie BD est utilisée. En fonction du modèle choisi, différents niveaux d'intrusivité dans le calcul des dérivées partielles peuvent être observés. Toutefois, sous certaines hypothèses simplificatrices, aucune modification supplémentaire n'est nécessaire pour le calcul des gradients. La section suivante introduit notre solution technique conçue et implémentée en Python [Python Software Foundation, 2023].

2.5 Modélisation orientée objet pour l'optimisation topologique robuste

Cette section vise à introduire notre outil de simulation. Ce dernier utilise le paradigme de programmation orientée objet (POO) et permet, de par sa flexibilité de conception, d'ajouter facilement une multitude de modèles d'imperfections géométriques.

Premièrement, un digramme de définition de bloc permet d'illustrer l'organisation des différents composants d'un système, d'un procédé ou d'un processus. Cette sous-section présente une solution technique au processus d'OTR.

Le digramme proposé est subdivisé en six catégories et la figure 2.12 les référence, notamment : la topologie de la conception, les algorithmes ou la procédure d'optimisation, les gradients de la fonction objectif ou des contraintes, la résolution de la physique par la MEF, les paramètres modifiables par l'utilisateur et des classes réservées à l'affectation des incertitudes à d'autres classes. Ces catégories sont les briques élémentaires nécessaires au processus d'OTR. Aucune modification n'est apportée à la sémantique de ce diagramme contrairement au digramme d'activité. Les paragraphes suivants présentent la typologie adoptée, qui apporte une solution, développée en POO, à la variété des méthodes d'optimisation topologique vues à la sous-section 1.3.1. Le diagramme de définition de bloc est disponible en format A3 dans l'annexe page 172.

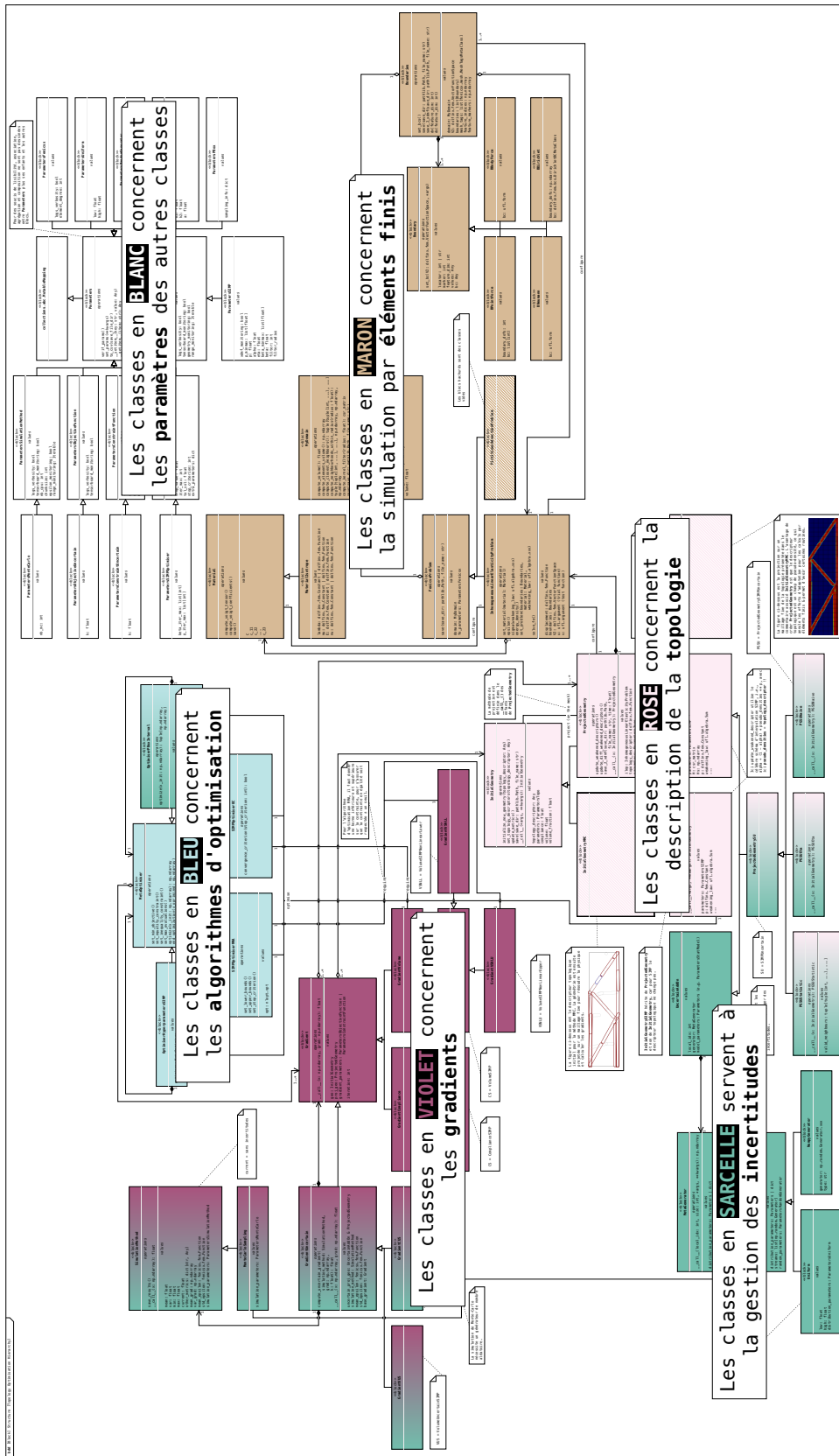


Figure 2.12 – Vue d'ensemble du diagramme de définition de bloc de la solution implémenté.

La modélisation de la topologie est une conséquence des observations faites à la sous-section 1.3.2. La figure 2.13 met l'accent sur cette partie du diagramme. Pour répondre aux différentes spécifications des méthodes d'OT, deux métaclases sont définies : **InitialGeometry** contenant le descripteur topologique servant de VD au problème d'optimisation et leurs **projections** sur un maillage fixe avec la classe **ProjectedGeometry**. En effet, le descripteur topologique est souvent cartographié à l'aide d'une représentation BD. Même si cela n'a pas été implémenté dans le code, la figure 2.13 illustre ce changement de descripteur pour la méthode par composant alterable et mobile (MMC)[§]. Ici, le descripteur de la topologie est modélisé par des rectangles dont l'orientation et la longueur peuvent être ajustées. La projection est effectuée par la création d'un objet **ProjectedGeometryMMC** (puis par l'utilisation de sa méthode `__call__()`). Normalement, les classes contenant le descripteur topologique (les VDs) doivent hériter de **InitialGeometry**, cependant dans le cas de SIMP les descripteurs topologiques sont identiques et la différence entre les deux résulte de l'utilisation des filtres par convolution et d'Heaviside (*cf.* les équations (1.24) et (1.25)). Dès lors, il paraît plus naturel de faire hériter la géométrie initiale de la classe **ProjectedGeometry** lorsque SIMP est utilisée.

La pléthore de liens d'héritage (représentés graphiquement par une flèche se terminant d'un triangle blanc) entre les différents blocs permet de conserver et de réutiliser un nombre important d'attributs et de méthodes. Par exemple, toutes les classes ont un descripteur topologique (`topology_descriptor`). Si ce dernier est dépendant de la méthode d'OT pour la classe **InitialGeometry**, il devient unique lorsque les géométries sont projetées. Une fois de plus l'utilisation de l'héritage est un vrai atout. Par exemple, cela permet d'avoir une compatibilité entre tous les enfants (classes dérivées) de **ProjectedGeometry** et les classes responsables de la résolution du problème physique par MEF avec **D0FINx** [Baratta *et al.*, 2023]. En effet, si une nouvelle méthode d'OT est implémentée, il n'est pas nécessaire de recoder les classes servant à la résolution du problème physique des topologies projetées sur le maillage fixe par la méthode BD. De même, de nombreuses méthodes peuvent être réutilisées, en particulier, celles servant à la sérialisation des objets, par exemple `save()` ou `save_2_xdmf()`. Cela est critique dans plusieurs situations : afin d'être capable de restaurer le résultat d'une optimisation pour faire des analyses ultérieures ; de pouvoir communiquer entre plusieurs systèmes, par exemple entre un fournisseur de calcul intensif, comme *Cassiopee* pour le LCFC, et nos systèmes ou d'échanger

§. Les deux figures illustratives sont issues de [Norato *et al.*, 2015].

avec l'UTT ; enfin, lors de l'emploi du *multiprocessing* pour réduire le temps de calcul de l'échantillon.

Au fur et à mesure de la particularisation les classes deviennent de plus en plus spécialisées. Ainsi, la classe **InitialGeometrySIMP** contient les attributs nécessaires au schéma de pénalisation comme la valeur de la pénalité de l'équation (1.26). De plus, pour la classe **ProjectedGeometrySIMP** la matrice servant au filtre de convolution (équation (1.24)) **H** est présente. Ce principe réapparaît pour les autres catégories.

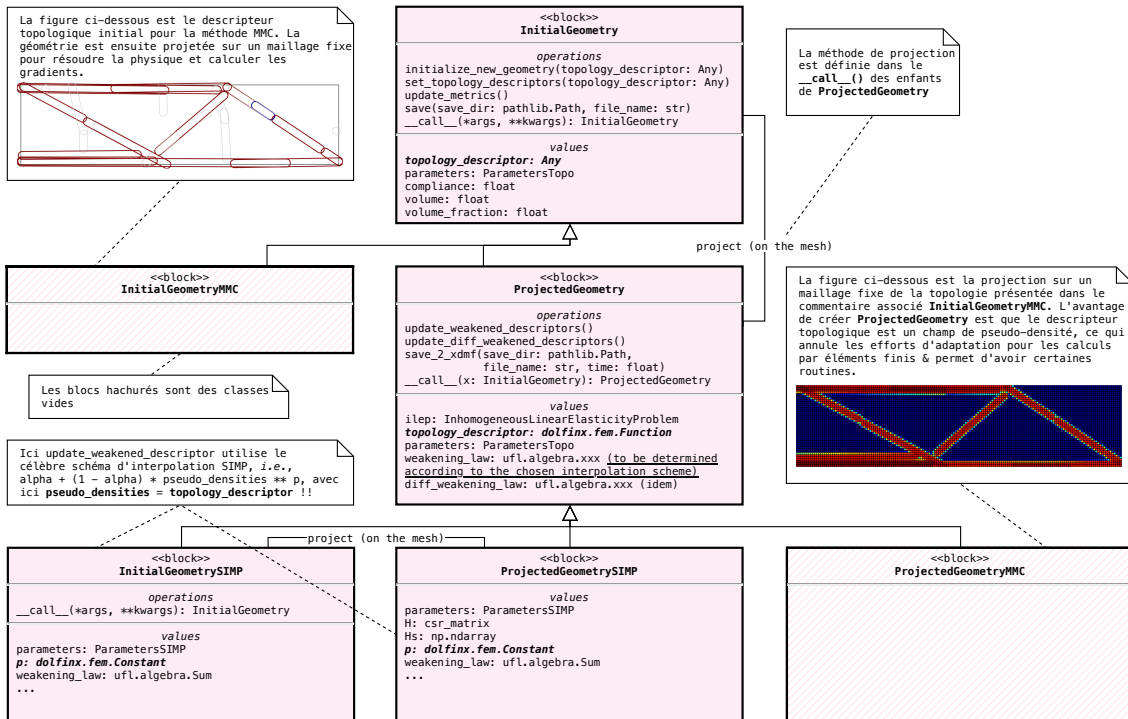


Figure 2.13 – Détail des classes servant à décrire la topologie.

La figure 2.14 représente le digramme de définition de bloc avec les ajustements apportés pour affecter la topologie avec des incertitudes. Il ressort de la sous-section 1.4.1 que les méthodes de propagation non intrusives, fréquemment utilisées dans la littérature et prennent la forme de la SMC dans notre cas, en RDO prennent la forme d'une somme pondérée, dont les variables indexées de la série sont le résultat d'évaluations des modèles déterministes en des points connus. Dans le code présenté, ce choix a été privilégié et se matérialise par la classe **UncertainAddOn** et l'attribut `local_idx`. Cette classe peut affecter avec de l'incertitude n'importe quelle autre classe (p. ex. avec la classe **Material**), elle contient un générateur de valeurs. Ces valeurs sont utilisées pour évaluer le modèle

déterministe à des valeurs particulière avec l'attribut `local_idx`.

Comme vu au chapitre 1, les matériaux sont affectés par de l'incertitude. Avec cette architecture, affecter la classe **Material** peut se faire grâce au multihéritage (comme pour la classe **ProjectedGeometrySU**), l'affectation des incertitudes à des classes est facilitée. Qui plus est, un autre avantage à utiliser la SMC est qu'elle est insensible au nombre de variables aléatoires, ajouter d'autres sources d'incertitudes est enfantin. Malheureusement, cela n'a pas été possible par manque de temps. Enfin, les modèles d'imperfections géométriques vues à la section 2.4 sont transcrits chacun dans une classe et ils ne prennent que quelques lignes.

Par la suite, lorsque les incertitudes sur la topologie seront considérées, la surcharge (c'est-à-dire de modifier le comportement d'une méthode fille) de la méthode `__call__()` dévoile toute son utilité. En effet, chaque appel d'une instance de la topologie affectée par de l'incertitude renvoi un champ de pseudo-densité altéré par l'un des modèles présentés à la section 2.4 et au point `local_idx`. Pour la SMC, présentée à la sous-section 1.4.1 et à la sous-section 2.3.1, chaque réalisation u^i est générée par une instance des enfants de la classe **RandomGenerator**. Cette réalisation permet d'altérer la géométrie en fonction du modèle choisi en un point tiré aléatoirement. Ici aussi, l'héritage permet de personnaliser le comportement de certaines classes. Ainsi, d'autres lois de probabilité peuvent être programmées si elles ne sont disponibles dans la bibliothèque NumPy [Harris *et al.*, 2020].

L'organisation des classes permettant d'optimiser le descripteur topologique initiale (les VDs) est en accord avec celle de la librairie **NLOpt** [Johnson, 2007], même si un interfaçage est réalisé pour être en correspondance avec SIMP. Ces classes ne regroupent pas uniquement des algorithmes d'optimisation, elles réunissent aussi les procédures d'optimisation décrites préalablement. Les classes sont mises en lumière par la figure 2.15. La procédure d'optimisation classique pour SIMP se manifeste dans ce diagramme avec la classe **OptimiserHyperparametersSIMP**. Cette classe permet de lancer plusieurs optimisations avec la MAM ou les CO pour incorporer les schémas de continuation, vus à la sous-section 1.3.1, sur la pénalité p et l'hyperparamètre β . La méthode permettant d'atténuer les incertitudes épistémiques, proposée à la sous-section 2.3.2, est également présente. En effet, la procédure d'optimisation consiste à trouver une géométrie optimiste et pessimiste à partir d'une collection de géométrie actualisée en fonction de la valeur prise par les paramètres de la distribution, paramètres qui sont entachés d'incerti-

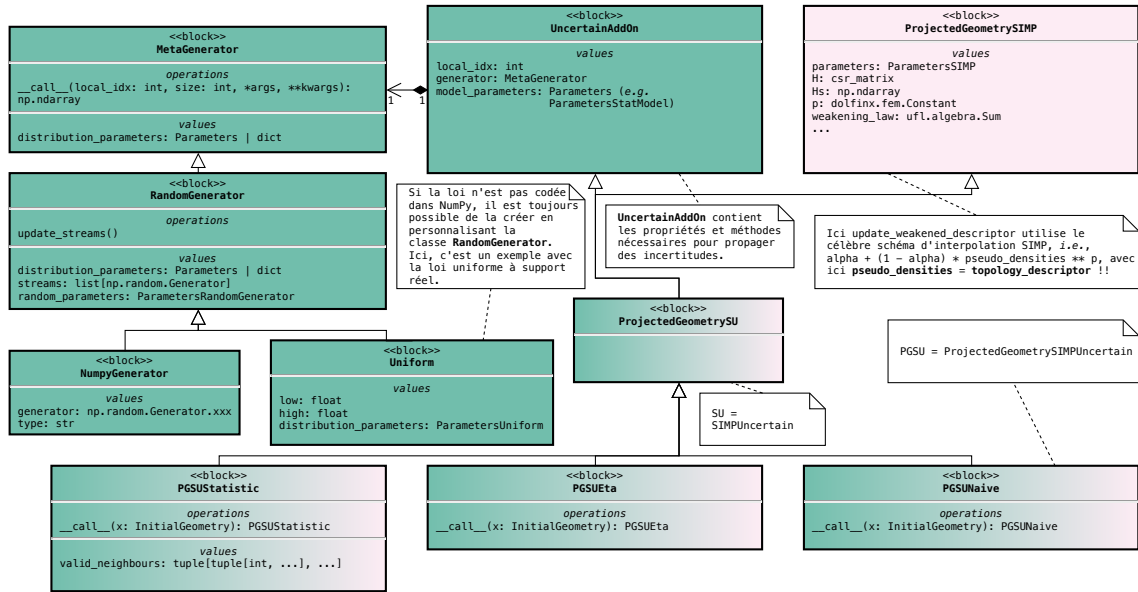


Figure 2.14 – Détail des classes servant à décrire la topologie et leurs affectations par de l’incertitude.

tude épistémique. Ainsi, aucune nouvelle formulation de gradient n’est calculée et notre méthode s’insère dans un cadre classique pour atténuer les incertitudes aléatoires et considère les algorithmes d’optimisation comme des boîtes noires, octroyant la possibilité de changer facilement d’algorithme d’optimisation.

Enfin, l’architecture proposée inclut un groupement de classes spécialisées pour le calcul du gradient. Ces classes sont présentées à la figure 2.16. Parallèlement aux classes pour décrire la topologie d’une pièce, les classes pour les gradients se spécialisent en fonction de l’algorithme d’optimisation utilisé et de la classe pour décrire la topologie et de la présence d’incertitudes. En effet, comme la sous-section 2.3.1 le renseigne, l’algorithme d’optimisation associé aux CO n’a besoin que d’un gradient pour respecter la contrainte en volume ; mais, pour la MAM la borne inférieure et supérieure doivent être renseignée. Ces modifications sont mineures, mais essentielles au bon fonctionnement de cet algorithme fourni par `NLopt` [Johnson, 2007]. Finalement, une classe est réservée au calcul du gradient robuste, ce dernier est fonction d’une méthode pour estimer les moments et les dérivées partielles nécessaires au calcul de la fonction objectif robuste vu à la section 2.3.1. Étant donné que la fonction objectif et ses dérivées partielles sont dépendantes de l’évaluation du modèle déterministe en quelques points, les classes réservées au calcul du gradient du problème déterministe sont réutilisées grâce à l’attribut `base_gradient`. Cet

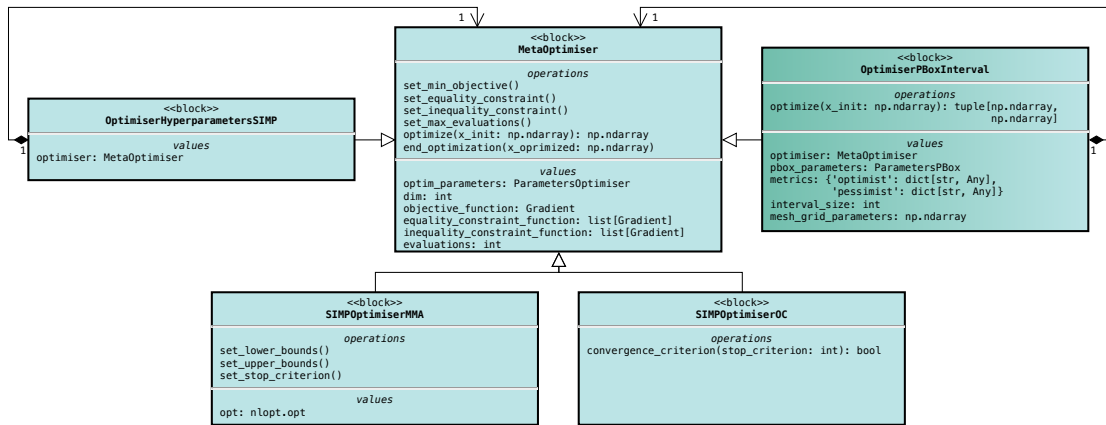


Figure 2.15 – Détail des classes servant à optimiser les descripteurs topologiques initiaux avec ou sans incertitude épistémique.

attribut peut être aussi utilisé si la modélisation des imperfections est intrusive nécessitant de modifier le calcul des dérivées partielles. Ainsi, les efforts de programmation sont à la fois limités et la solution est flexible par rapport aux modifications que d'autres modèles d'incertitudes apporteraient.

Les paragraphes précédents discutent de la hiérarchie de la solution proposée. Cette dernière permet d'avoir une grande flexibilité par rapport :

- À la description de la topologie,
- À la sérialisation (l'enregistrement des données structurées),
- Aux modèles sur les incertitudes,
- Aux méthodes pour calculer les moments et sensibilités utilisés pour évaluer la fonction coût,
- À la procédure d'optimisation.

La modélisation de la hiérarchie n'est pas suffisante pour comprendre le comportement dynamique du processus d'OTR; pour cela il faut un diagramme d'activité. Dans ces travaux, deux diagrammes d'activités ont été développés et actualisés tout au long du projet. Le premier diagramme d'activité, à retrouver à l'annexe aux pages 174 et 175, présente le processus sans incertitude. Faire cette première modélisation est une étape préliminaire, au recueil des sources d'incertitude et à la modélisation graphique du processus incertain, de la méthode présentée à la figure 2.1. En outre, cette étape permet de catalyser les réflexions autour de l'intégration des incertitudes et doit pouvoir être modifiée en fonction de la caractérisation des incertitudes, c'est-à-dire si le concepteur

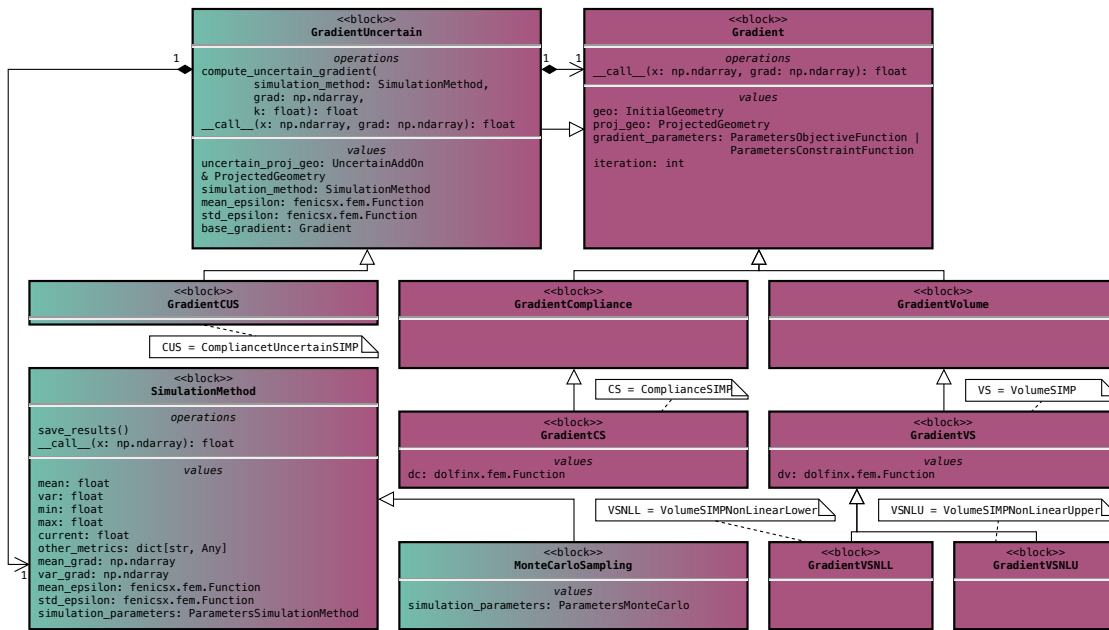


Figure 2.16 – Détail des classes servant à calculer les gradients des contraintes ou de la fonction objectif robuste ou déterministe.

est en présence d'incertitude aléatoire ou d'incertitude épistémique.

La seconde modélisation inclut une sémantique revue sur l'étiquetage des flux. Le diagramme d'activité du processus d'OTR avec les incertitudes est donné dans l'annexe aux pages 177 et 178. Ce genre d'ajout est parfaitement toléré par le SysML [Friedenthal *et al.*, 2014]. Dans le cas présent, les flux sont étiquetés suivant la caractérisation que prend l'incertitude. Il a été préféré de modéliser uniquement le type d'incertitude plutôt que sa représentation ou modélisation mathématique, car leur traitement influence inévitablement le processus d'optimisation et donc le comportement dynamique de l'OTR. La figure 2.17 montre les modifications apportées par rapport aux fonctionnalités de base. Les flux peuvent être étiquetés de trois manières : `<<uncertain>>`, `<<aleatory>>` et `<<epistemic>>`. La première permet à l'utilisateur de caractériser un flux comme étant **incertain** conformément à la taxinomie présentée à la figure 2.3. La seconde étiquette est à utiliser en présence d'incertitude aléatoire et enfin la dernière pour de l'incertitude épistémique. Étant donné que dans notre cas certains paramètres sont entachés d'incertitude aléatoire ou d'incertitude épistémique, les flux sont majoritairement étiquetés comme `<<uncertain>>`. L'un des avantages du SysML est de relier les différents diagrammes entre eux. Les activités sont partitionnées avec les blocs définis dans le

diagramme de définition de bloc. Cela permet de lier les composants du processus avec leurs actions. De plus, de nombreuses « *operations* » sont reprises dans les actions. C'est dans le diagramme d'activité qu'il est aisé de représenter les perturbations qui peuvent affecter le système ou le processus.

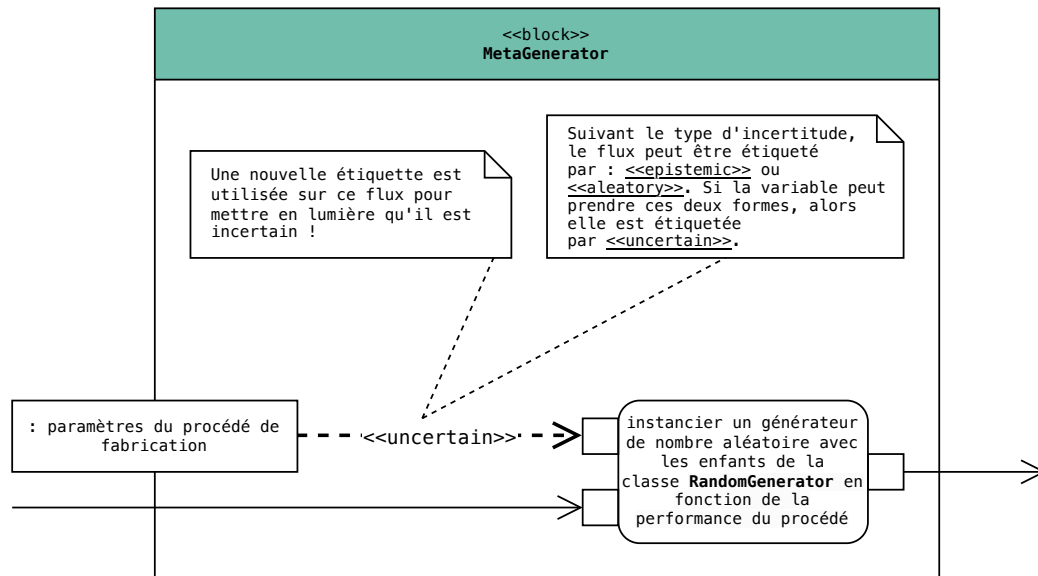


Figure 2.17 – Aperçu du diagramme d'activité illustrant la première étape pour propager des incertitudes.

La taxonomie présentée à la figure 1.21 transparaît aussi dans l'organisation des classes dérivées de **ProjectedGeometrySU** et tout est fait pour limiter les efforts lors du changement de modèle modélisant les imperfections géométriques. Si la modélisation des imperfections se fait en altérant η (type I), alors la perturbation de cet hyperparamètre doit se faire avant l'application des filtres. Concrètement, l'appel au générateur de nombres aléatoires se fait avant l'appel de la classe parente, c'est-à-dire en amont de l'application des filtres. Dans le cas contraire si la modélisation des imperfections se fait en altérant le descripteur topologique (type II), alors l'appel au générateur de nombres aléatoires se fait en aval de l'application des filtres, à savoir après sa « projection ». Du point de vue de processus, presque rien ne change.

Dans cette section, le processus d'optimisation est modélisé graphiquement avec le SysML. La structure est modélisée grâce à un diagramme de définition de bloc, comporte les classes intégrées au code et illustre la modularité à l'égard des modèles d'imperfections. Le processus est, quant à lui, modélisé par un diagramme d'activité ; il présente

des modifications nécessaires à la modélisation d'un processus sous incertitudes. Cet exemple met en exergue le fait qu'un simple diagramme de flux, comme un digramme IDEF ou un p-diagram ou encore le GRDPM, n'est pas suffisant pour décrire et déployer un processus aussi complexe que l'OTR. En effet, les liens entre le diagramme de définition de bloc et le diagramme d'activité sont essentiels pour garantir une vision complète du processus, d'avoir une modélisation cohérente entre le comportement statique et dynamique. En outre, cela permet de recueillir des sources d'incertitude et de savoir comment les intégrer au processus d'OT. De plus, la modélisation graphique du processus d'OT permet de soutenir les classifications faites à la sous-section 1.4.2. Finalement, cette modélisation est implémentée en `Python`. Ce code répond aux attentes de l'ANR vues au chapitre introductif.

2.6 Bilan

Ce chapitre présente un cadre théorique et pratique à l'atténuation des effets des incertitudes. La section 2.1 propose notre cadre méthodologique. Celle-ci, illustrée par la figure 2.1, a été appliquée lors de la réalisation de ces travaux. Le chapitre 1 sert au recueil des sources d'incertitude affectant à la fois le processus d'OT et le procédé de FA.

La sous-section 2.2.1 vise à attribuer aux variables incertaines un type d'incertitude. A cet effet, une représentation graphique sous forme d'un diagramme de Venn est proposée. Les avantages de cette représentation sont son adaptabilité et son intelligibilité. Une taxonomie des niveaux de robustesses atteignables en fonction de la pilotabilité des variables et de leur paramétrisation vis-à-vis du système est présentée à la sous-section 2.2.2. Cette taxonomie a été adaptée à la DfX. La caractérisation et le choix concernant le niveau de robustesse voulu influencent les étapes subséquentes.

La section 2.3 déroule la méthodologie permettant d'atténuer les effets des incertitudes aléatoires et des incertitudes épistémiques. Les modifications à apporter par rapport au cas déterministe sont détaillées. Qui plus est, atténuer des effets des incertitudes épistémiques offre au concepteur deux topologies : optimiste et pessimiste. Ces deux géométries permettent d'atténuer les effets du manque de connaissances ou d'informations. Si le concepteur pense que les effets de ces incertitudes sont moindres, alors il doit s'appuyer sur la conception optimiste et *vice versa*.

La modélisation du phénomène aléatoire portant sur les imperfections géométriques est effectuée à la section 2.4; tandis que la modélisation graphique du processus d'OTR l'est à la section 2.5. Dans la section 2.4, diverses approches de modélisation des imperfections géométriques sont examinées et appliquées à la méthode SIMP. Les deux modèles développés dans ce travail sont adaptables aux méthodes d'OT utilisant une cartographie BD. Sous certaines conditions simplificatrices, tous les modèles ne sont pas intrusifs par rapport aux méthodes de propagation des incertitudes aléatoires et incertitudes épistémiques.

Enfin le processus d'OTR est représenté graphiquement à l'aide du SysML. Cet exemple souligne que pour représenter le processus d'OTR, les liens établis entre le diagramme de définition de blocs et le diagramme d'activité sont essentiels pour offrir une vision globale du processus et assurer une cohérence entre la modélisation statique et dynamique. Cette représentation est implémentée en **Python**.

L'ensemble de ces méthodes ainsi que la modélisation du processus d'OT ont permis la réalisation d'expérimentations numériques permettant de vérifier concrètement le fonctionnement de l'approche proposée.

Chapitre 3

Analyse des performances des modèles et des méthodes

Ce chapitre conclut la méthodologie décrite à la figure 2.1. Il a pour objectif de vérifier les modèles d'imperfection développés à la sous-section 2.4 grâce à la solution technique présentée à la sous-section 2.5. De plus, l'atténuation des incertitudes suit les approches formalisées à la section 2.3. Premièrement, la section 3.1 présente le cas d'étude et ses résultats déterministes, puis une analyse des modèles d'imperfections géométriques présentés aux sous-sections 2.4.1 et 2.4.2. Cette analyse est suivie de la vérification du modèle d'imperfections géométrique statistique au moyen d'un plan d'expériences numérique. Dans les sections 3.1 et 3.2, les effets des incertitudes aléatoires sont atténués ; contrairement à la section 3.3, où les effets des incertitudes épistémiques sont atténués avec le modèle dit « statistique ». Finalement, la dernière section dégage les conclusions et tire un bilan.

Sommaire du chapitre

| | | |
|-----|---|-----|
| 3.1 | Étude des problèmes (2.17) et (2.20) | 118 |
| 3.2 | Vérification du modèle d'imperfections géométriques statistique | 132 |
| 3.3 | Atténuation des effets des incertitudes épistémiques | 147 |
| 3.4 | Bilan | 152 |

3.1 Étude des problèmes (2.17) et (2.20)

La finalité de cette section est d’apporter une analyse critique des modèles présentés aux sous-sections 2.4.1 et 2.4.2, de justifier les hypothèses formulées et de vérifier et valider la flexibilité du code développé. Ainsi, la première sous-section présente le cas d’étude en 2D qui est utilisé dans ce chapitre et les résultats obtenus dans le cas déterministe, c.-à-d. sans incertitudes. La sous-section 3.1.2 présente une analyse du modèle de la littérature formalisé à la sous-section 2.4.1 ; il en va de même pour la sous-section 3.1.3 qui propose une analyse du modèle dit « naïf » de la sous-section 2.4.2.

3.1.1 Résultats sans incertitude et comparaison d’algorithmes d’optimisation

Présentation du cas d’étude Le cas d’étude 2D est présenté à la figure 3.1. La forme de l’espace de conception est rectangulaire avec un ratio longueur sur largeur de 4, soit une longueur de $L = 160$ mm pour une largeur de $H = 40$ mm. Une force $F = (0, -1)$ N est appliquée au nœud situé au milieu de la face droite, c’est-à-dire en $(L, H/2)$. Les nœuds de la face gauche sont encastés, ainsi en $x = 0$ et $\forall y : u_x = u_y = 0$. Comme mentionné précédemment, l’espace de conception est entouré par une zone de non-conception vide de matière, mais altérable par les modèles d’incertitudes. Cette zone n’enveloppe pas les faces gauche et droite, là où il y a des conditions aux limites.

Le maillage de l’espace de conception du modèle d’éléments finis est constitué de 160×40 éléments. Les éléments sont des quadrilatères de degré 1. Enfin, l’épaisseur de l’espace de non-conception est composé de deux éléments, donc l’espace total est maillé par 164×40 éléments. Le maillage et l’annotation des différents espaces de conception sont réalisés avec **Gmsh** [Geuzaine et Remacle, 2009] et la résolution du problème d’éléments finis avec la version 0.6 de **DOFINx** [Baratta *et al.*, 2023]. Le module de *Young* et le ratio de *Poisson* sont respectivement égaux à $E = 1$ MPa et $\nu = 0.3$.

Parmi les contraintes produits le rayon du filtre de convolution est égal à $r^* = 1.3$ mm, ce qui est la taille de rayon minimal pour éviter les motifs en damier d’échec. De plus, la contrainte en fraction de volume est égale à $\varphi^* = 40$ %. Pour la méthode des asymptotes mobiles (MAM) la tolérance est de ± 5 %, car les contraintes sont systématiquement

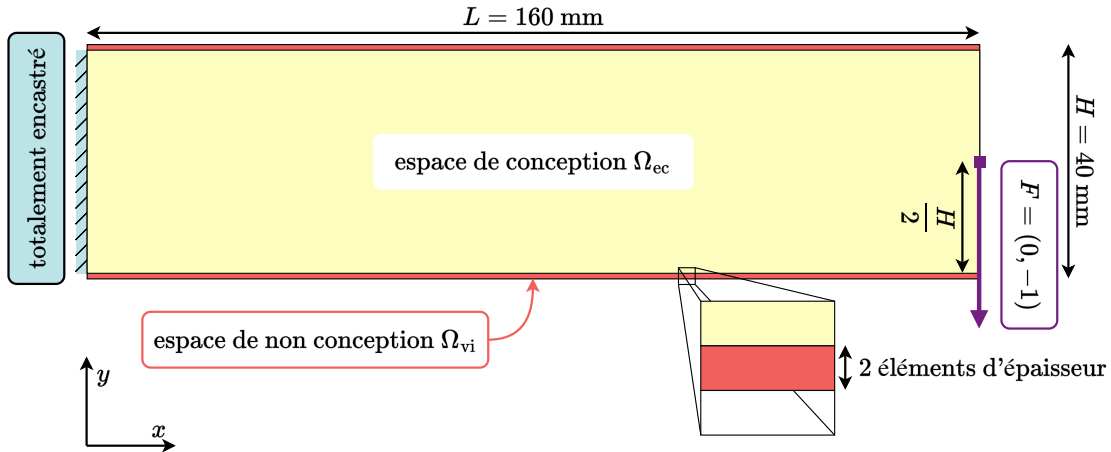


Figure 3.1 – Configuration du cas d'étude en 2D, de l'espace de conception et des conditions aux limites.

violées lorsque la tolérance est de ± 1 %.

Les algorithmes d'optimisation utilisent les paramètres par défaut donnés par [Ferrari et Sigmund, 2020, Johnson, 2007] (cf. la sous-section 2.3.1). Par ailleurs, pour les critères d'optimalité (CO), η est constant et égal à $\eta = 0.5$ sauf indication contraire. Pour rappel, le schéma de continuation n'est pas utilisé pour la pénalité p de l'équation (1.26) et est égal à $p = 3$. Enfin pour β , le schéma de continuation suivant est utilisé. Dans la première étape, le paramètre β est fixé à $\beta = 1$ et reste constant pendant 250 itérations. Par la suite, β est augmenté à $\beta = 4$. Après 20 itérations supplémentaires, β est mis à jour à $\beta = 8$. Enfin, la valeur de β est doublée toutes les 5 itérations jusqu'à atteindre $\beta = 64$, et l'optimisation se termine avec 5 itérations avec comme valeur de β : $\beta = 64$. En outre, le critère d'arrêt est sur le nombre d'itérations, sauf mention contraire.

Optimisation topologique déterministe Lorsque les paramètres mentionnés au paragraphe précédent sont appliqués au problème (1.30), les résultats obtenus sont montrés à la figure 3.2. Les topologies obtenues sont classiques pour le type de problème, elles comportent de nombreuses branches topologiques plus ou moins épaisses suivant leur localisation. Les topologies montrent des différences importantes après le premier tiers (lorsque $x > L/3$ et $\forall y$). La valeur de la fonction coût est plus faible lorsque la MAM est utilisée pour résoudre le problème d'optimisation ; en effet, la fraction de volume de la topologie optimisée est de $V(\bar{\rho})/V_{ec} = \varphi \approx 43\% \leq 45\%$, ce qui veut dire qu'il y a plus

de matière utilisée pour minimiser la souplesse.

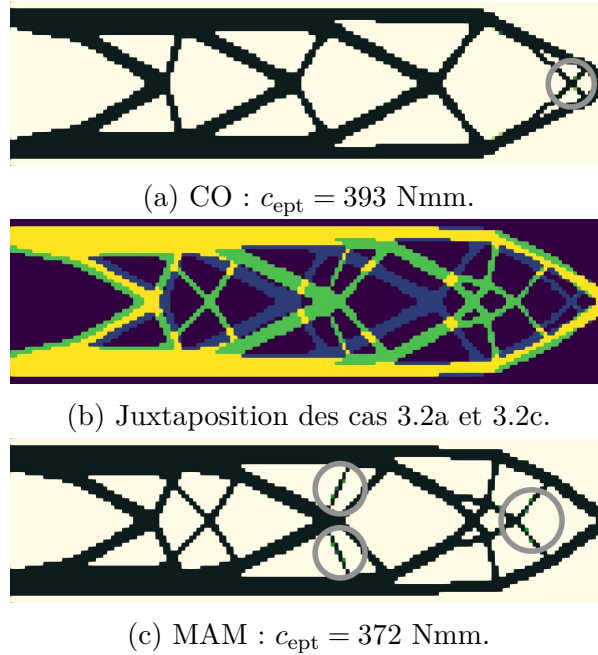


Figure 3.2 – Topologies optimisées obtenues sans incertitudes avec les CO (3.2c) et la MAM (3.2a).

De plus, plusieurs charnières à un noeud (ce motif est illustré par la figure 3.3) apparaissent dans les deux structures, elles sont mises en évidence par des cercles gris. La topologie obtenue avec MAM en contient 16 et celle des CO en comporte 2. Les charnières prennent la forme d'un damier d'échec local et elles sont atténuables : en augmentant r^* , en augmentant l'ordre des éléments ou avec les différents modèles d'imperfections géométriques. La première solution a le désavantage d'ôter le lien entre le procédé de fabrication additive (FA) et optimisation topologique (OT) ; la seconde solution d'augmenter les coûts de calcul. Enfin, les deux conceptions sont symétriques par rapport au plan horizontal passant par la force.

Même pour le cas déterministe, l'espace de non-conception est actif et comme le montrent les figures 3.2a et 3.2c, ils sont bien sans matière. Pour le cas déterministe, ajouter ou retirer l'espace de non-conception modifie les topologies optimisées obtenues, comme le montrent les figures D.1 et D.2 situées en annexe. Cela est vraisemblablement dû à la manière dont le gradient est calculé. En effet, lors de l'ajout d'un espace de non-conception, ce sont les pseudo-densités (PDs) qui sont annulées dans cet espace et non les dérivées partielles. De plus, contrairement au cas avec l'espace de conception, le volume

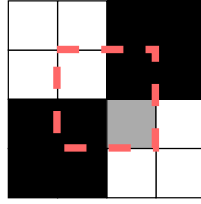


Figure 3.3 – Illustration d’un motif dit de charnière à un nœud indésirable en optimisation topologique (OT).

de la topologie obtenue avec la MAM (cf. la figure D.2) est un petit peu inférieur à 40%. En dernier, il est intéressant de remarquer que les deux topologies obtenues avec et sans l’ajout d’un espace de non-conception sont distinctes, mais leurs valeurs de souplesse sont équivalentes ! Cela montre qu’il existe plusieurs minimums locaux.

3.1.2 Analyse du modèle altérant η

L’objectif de cette sous-section est de vérifier et valider la modularité du code développé. De plus, les écarts générés par le modèle sont examinés. Dans cette sous-section, le modèle des imperfections géométriques utilisé est décrit à la sous-section 2.4.1 et le problème (2.17) est résolu à l’aide des deux algorithmes d’optimisation, à savoir les CO et la MAM. Seules les incertitudes aléatoires sont atténuées grâce à la méthode présentée à la sous-section 2.3.1. La taille de l’échantillon n_{smc} utilisé pour estimer les moments à l’aide de la simulation de Monte-Carlo (SMC) est de $n_{\text{smc}} = 4000$, cela permet d’assurer en partie la répétabilité des conceptions de référence, comme le montre la sous-section 3.2.2. En outre, le poids k associé à la fonction objectif, défini par l’équation (2.2), prend la valeur $k = 1$. Enfin la variable aléatoire décrite dans le problème (2.17) suit une loi uniforme avec les paramètres suivant :

$$H \sim \mathcal{U}(0.1, 0.9) . \quad (3.1)$$

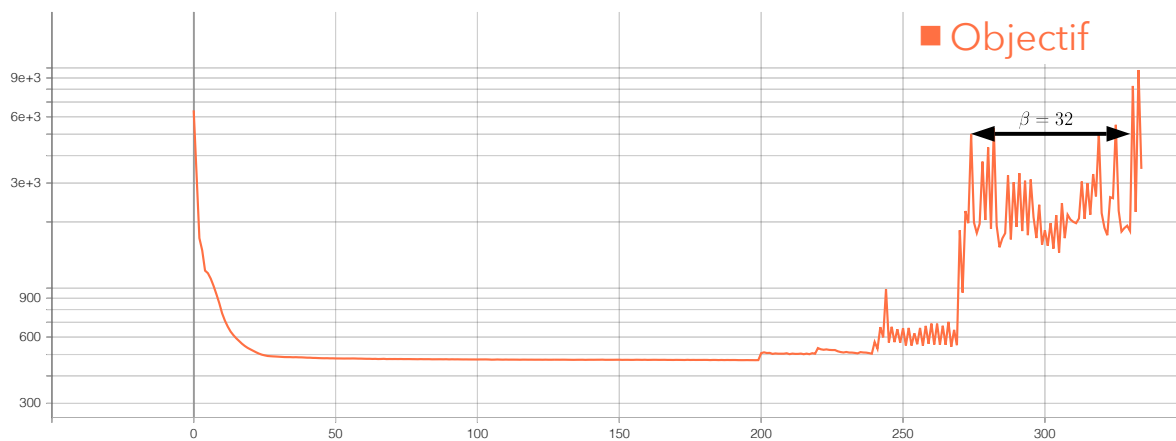
Les paramètres utilisés pour optimiser les topologies sont identiques à ceux de la sous-section 3.1.1. Néanmoins, des problèmes de convergence sont apparus lorsque β augmente de manière trop rapide pour les CO. Ainsi, à la première étape, le paramètre β est fixé

à $\beta = 1$ et reste constant pendant 200 itérations. Par la suite, β est augmenté à $\beta = 4$. Après 20 itérations supplémentaires, β est mis à jour à $\beta = 8$. Puis, la valeur de β passe à $\beta = 16$ en 20 itérations additionnelles. Le passage de $\beta = 16$ à $\beta = 32$ prend 30 itérations. Ensuite, après 60 itérations β change à $\beta = 64$. Enfin, l'optimisation se termine avec 5 itérations avec comme valeur de β : $\beta = 64$.

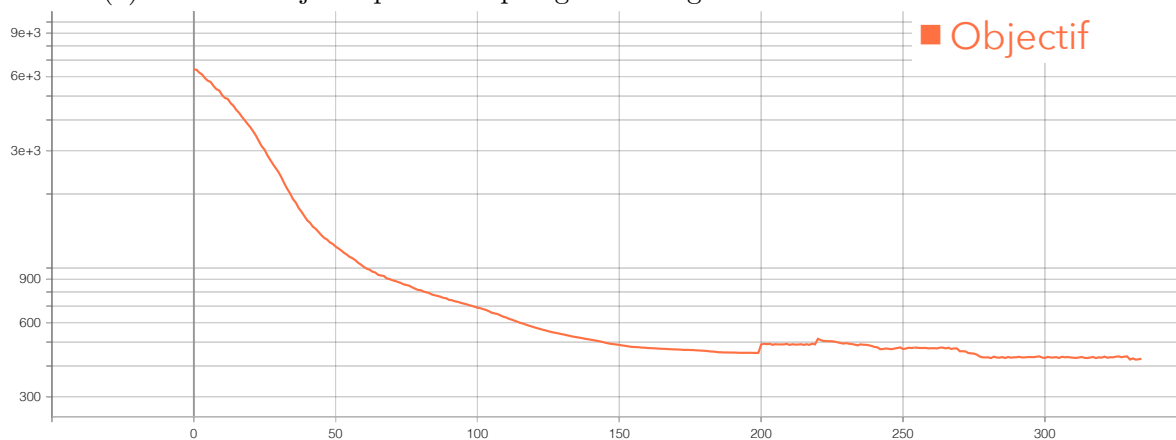
Malgré l'augmentation du nombre d'itérations, la convergence est difficile pour les CO, spécialement pour des valeurs de β supérieure à $\beta > 32$; la MAM n'est pas affectée comme l'illustre la figure 3.4. La figure 3.5 montre les topologies obtenues à la dernière itération avec les CO et la MAM. Dans le cas des CO (cf. la figure 3.5a), la topologie obtenue est indistincte avec de nombreuses parties flottantes dans la structure. Même la topologie obtenue avec la MAM (cf. la figure 3.5b) n'est pas aussi nette que celles obtenues précédemment. En conséquence, les topologies optimisées sélectionnées sont celles obtenues à la 269-ème itération, soit à la dernière itération où β est égal à $\beta = 16$. Néanmoins, des valeurs de β autour de la centaine sont souvent utilisées dans la littérature lorsque l'optimisation est déterministe. En conséquence, la modélisation des incertitudes affectant la topologie avec ce modèle rend le processus d'optimisation versatile.

Les figures 3.6 et 3.7 montrent les topologies robustes obtenues respectivement avec les CO et la MAM. Visuellement la topologie de la figure 3.6a n'a plus de charnière à un nœud. Le voisinage du centre de la topologie montre le plus de variations, avec la multiplication de petites branches topologiques. En général, ces branches permettent de diminuer la souplesse de la structure. Comme le montre la figure 3.5a, lorsque β augmente jusqu'à 64, l'algorithme d'optimisation essaye de supprimer ces petites branches topologiques et la topologie tend vers la solution déterministe sans les deux branches topologiques en forme de X situées à la fin de la structure (en $x = L$). La topologie obtenue avec la MAM présente le plus de différences. Par ailleurs, les charnières à nœud n'ont pas toutes été éliminées et sont localisées toutes au dernier quart de la structure, c'est-à-dire lorsque x est supérieur à $x > 3L/4$. Finalement, la symétrie par rapport au plan horizontal passant par la force est maintenue pour les deux topologies.

L'avantage d'utiliser la SMC est que d'autres indicateurs statistiques de la performance de la topologie sont accessibles sans modification des schémas d'intégration servant au calcul des moments statistiques (se référer aux équations (1.2) et (1.3)). Tout d'abord, le maximum et le minimum de la souplesse sont estimés avec les différentes réalisations



(a) Fonction objectif pour la topologie de la figure 3.6a obtenue avec les CO.



(b) Fonction objectif pour la topologie de la figure 3.7a obtenue avec la MAM.

Figure 3.4 – Courbes représentant \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération.



(a) CO : $c_{ref} = 431$ Nmm.



(b) MAM : $c_{ref} = 389$ Nmm.

Figure 3.5 – Topologies optimisées robustes obtenues par le modèle altérant η .

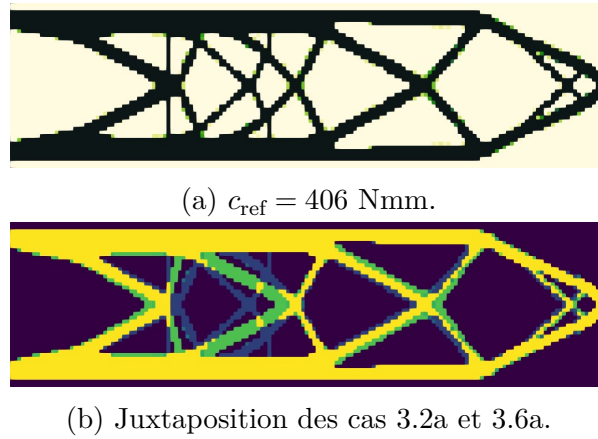


Figure 3.6 – Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$).

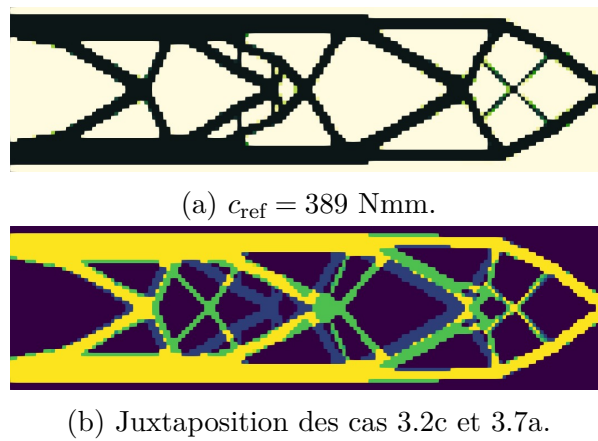


Figure 3.7 – Topologie optimisée robuste obtenue avec la MAM et le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$).

Table 3.1 – Souplesses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a, 3.6a, 3.2c et 3.7a.

| Cas | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\hat{m}\text{ax}(\Upsilon)$ | $\hat{m}\text{in}(\Upsilon)$ |
|-----------|------------------|-----------------------|--------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Fig. 3.2a | 393 | 1.74×10^5 | 9.13×10^4 | 9.98×10^5 | 353 |
| Fig. 3.6a | 406 | 442 | 110 | 918 | 334 |
| Fig. 3.2c | 372 | 944 | 2.31×10^3 | 1.74×10^4 | 322 |
| Fig. 3.7a | 389 | 407 | 64.7 | 693 | 320 |

calculées :

$$\widehat{\text{m\aa{x}}}(\Upsilon) = \max \{c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^1\}, \dots), \dots, c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^{n_{\text{smc}}}\}, \dots)\} , \quad (3.2)$$

et une estimation du minimum de la souplesse est donnée par :

$$\widehat{\text{m\i{n}}}(\Upsilon) = \min \{c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^1\}, \dots), \dots, c_{\text{ept}}(\mathcal{E} = \{u^{n_{\text{smc}}}\}, \dots)\} . \quad (3.3)$$

En outre, des estimations de la moyenne et de la variance des écarts générés par les modèles d'imperfections géométriques sont calculées et sont notées respectivement $\widehat{m}_1(\Delta^e)$ et $\widehat{\mu}_2(\Delta^e)$. Dans les faits, il s'agit de la moyenne et de la variance de la différence entre les pseudo-densités de la conception de référence ($\bar{\rho}_e$) et des pseudo-densités aux différentes réalisations ($\tilde{\rho}_e(\mathcal{E} = \{u^i\})$) des modèles d'imperfections géométriques pour l'élément e . Ainsi, $\widehat{m}_1(\Delta^e)$ est défini par l'équation suivante :

$$\widehat{m}_1(\Delta^e) = \frac{1}{n_{\text{smc}}} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} \tilde{\rho}_e(\mathcal{E} = \{u^i\}) - \bar{\rho}_e , \quad (3.4)$$

et $\widehat{\mu}_2(\Delta^e)$ est donné par :

$$\widehat{\mu}_2(\Delta^e) = \frac{1}{n_{\text{smc}} - 1} \sum_{i=1}^{n_{\text{smc}}} [\tilde{\rho}_e(\mathcal{E} = \{u^i\}) - \bar{\rho}_e - \widehat{m}_1(\Delta^e)]^2 . \quad (3.5)$$

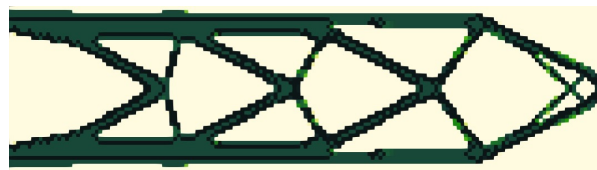
Pour limiter les erreurs dans l'estimation de la variance, la même stratégie que celle expliquée à la sous-section 2.3.1 a été employée.

Dans ces conditions, les indicateurs estimés par la SMC pour les topologies des figures 3.6 et 3.7 sont référencés au tableau 3.1. Qui plus est, le modèle altérant η est appliqué aux topologies déterministes illustrées à la figure 3.2. Le paramétrage est identique à celui utilisé pour obtenir les topologies optimisées robustes (pour une comparaison juste, la valeur de β est égale à $\beta = 16$).

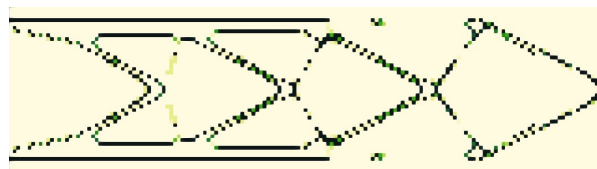
Premièrement, les topologies obtenues avec les CO (*cf.* figure 3.6a) et la MAM (*cf.* figure 3.7a) ont une estimation de la moyenne de la souplesse ($\widehat{m}_1(\Upsilon)$) légèrement supérieure à la souplesse de la conception de référence (c_{ref}). Les estimations du maximum ($\widehat{\text{m\aa{x}}}(\Upsilon)$) et du minimum ($\widehat{\text{m\i{n}}}(\Upsilon)$) de la souplesse bornent les valeurs de $\widehat{m}_1(\Upsilon)$ et c_{ref} . Cela veut dire que ce modèle d'imperfections géométriques est capable de produire des réalisations

avec une souplesse plus faible, c'est-à-dire avec une meilleure performance. Comme le révèlent les sous-sections suivantes, ces comportements changent en fonction du modèle choisi.

Deuxièmement, $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ et l'étendue sont plus faibles pour les topologies robustes que pour les topologies déterministes. Autrement dit, les incertitudes affectant la topologie *via* l'hyperparamètre η ont été atténuées. Cette meilleure performance sur les indicateurs de la robustesse est acquise en dégradant la performance nominale ; en effet, la souplesse des conceptions de référence est systématiquement plus élevée. Pour les topologies obtenues avec les CO (*cf.* les figures 3.2a et 3.6a), la différence est considérable. Cela s'explique par la manière dont les imperfections géométriques sont traitées. Effectivement, dans la méthode SIMP les pseudo-densités initiales (les variables de décision (VDs) du problème d'optimisation, soit le vecteur ρ) sont transformées par une série de filtres, dont le dernier est le filtre d'*Heaviside*. Ce filtre transforme la PD d'un élément e en fonction de son niveau de remplissage et du seuil η . Le champ de pseudo-densité initiale de la topologie présentée à la figure à 3.2a est illustré à la figure 3.8a. Le champ ρ est composé essentiellement d'éléments dont la densité est approximativement égale à 0.8 (en vert foncé). En conséquence, si la variable η est tirée à $\eta = 0.9$, alors le champ de PD final (après filtrage) est presque constitué entièrement d'éléments sans matière, comme le montre la figure 3.8b. C'est pour cela que les indicateurs de la robustesse de la figure 3.2a sont si médiocres. Ceci démontre les limites de ce modèle conjecturées à la sous-section 1.4.2. Les imperfections sur la géométrie sont en fonction de paramètres qui ne sont reliés à aucune caractéristique physique de la géométrie.



(a) Champ de pseudo-densité initial de la topologie 3.2a.



(b) Champ de pseudo-densité final de la topologie 3.2a avec $\eta = 0.9$ et $\beta = 64$.

Figure 3.8 – Analyse des champs de pseudo-densités de la topologie 3.2a.

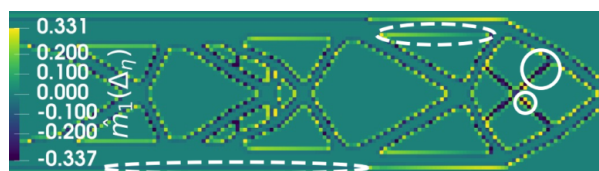


(a) $\hat{m}_1(\Delta_\eta)$.

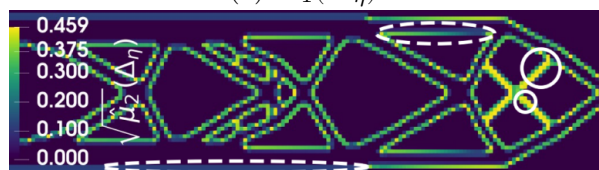


(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_\eta)}$.

Figure 3.9 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.6a.



(a) $\hat{m}_1(\Delta_\eta)$.



(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_\eta)}$.

Figure 3.10 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.7a.



(a) CO : $c_{\text{ref}} = 403$ Nmm.



(b) MAM : $c_{\text{ref}} = 406$ Nmm.

Figure 3.11 – Topologie optimisée robuste obtenue avec le modèle affectant η à l'itération 269 ($\beta = 16$) et sans espace de non-conception.

Par ailleurs, le manque de lien entre motifs géométriques et les écarts générés par le modèle se retrouve dans l'analyse des champs données aux équations (3.4) et (3.5). Les figures 3.9 et 3.10 représentent ces champs pour les topologies donnée respectivement aux figures 3.6a et 3.7a. L'épaisseur des branches topologiques ne semble pas impacter les écarts générés par le modèle. Par exemple, les cercles et les ellipses blanches des figures 3.9 et 3.10 référencent des branches topologiques d'épaisseur différentes. Certaines branches topologiques moins épaisses sont moins affectées par le modèle. De plus, les branches les plus fines de la topologie représentée à la figure 3.7a présentent à la fois un fort et un faible retrait de matière dans leurs voisinages immédiats. En outre, les branches topologies rectilignes, référencées par des ellipses en traitillé (traits discontinues), ne présentent pas de logiques apparentées. Certaines ont des niveaux d'écarts importants, d'autres ne semblent pas affectées par le modèle. Ce manque de cohérence est flagrant pour la topologie obtenue à la fin de l'optimisation avec les CO, illustrée par la figure 3.5a. Les écarts, référencés par la figure D.3, montrent des valeurs extrêmes dans des régions sans matière.

Dernièrement, l'ajout d'un espace de non-conception influence la topologie obtenue, comme pour les optimisations déterministes. Effectivement, la figure 3.11 montre les topologies robustes obtenues avec les CO et la MAM sans l'espace de non-conception. Les topologies obtenues, et cela peut importe l'algorithme d'optimisation utilisé, montrent des différences notables dans le positionnement des branches topologiques.

3.1.3 Analyse du modèle naïf

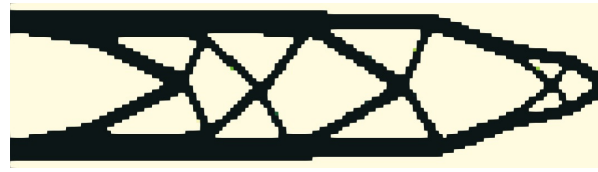
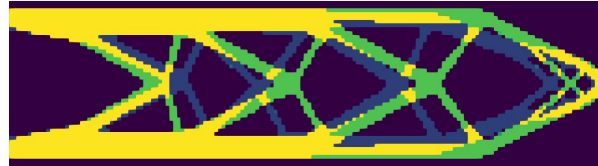
L'objectif de cette sous-section est de vérifier et valider la modularité du code. En outre, le concept visant à perturber le champ de pseudo-densité finale est aussi analysé. Le modèle des imperfections géométriques détaillé à la sous-section 2.4.2 et le problème (2.20) sont résolus. Seules les incertitudes aléatoires sont atténuées grâce à la méthode décrite dans la sous-section 2.3.1. La taille de l'échantillon utilisé pour la SMC est de $n_{\text{smc}} = 4000$. Le poids k de la fonction objectif, de l'équation (2.2), est égal à $k = 1$. Les paramètres pour la méthode SIMP et pour les algorithmes d'optimisation sont similaires à ceux donnés à la sous-section 3.1.1. D'autre part, les variables aléatoires du modèle issues de l'équation (2.19) suivent une loi normale, dont les paramètres sont les suivants :

$$P_e \sim \mathcal{N}(0, 0.4) . \quad (3.6)$$

La figure 3.12a donne la topologie issue du processus d'optimisation topologique robuste (OTR), c'est-à-dire la conception de référence obtenue à la fin de l'optimisation et en atténuant les effets du modèle décrit à la sous-section 2.4.2. Cette figure est accompagnée de sa juxtaposition (cf. figure 3.12b) avec le cas déterministe issu de la figure 3.2a. Uniquement l'algorithme d'optimisation basé sur les CO a convergé vers un résultat fabriable, c'est pourquoi la topologie optimisée par la MAM n'est pas fournie. Qui plus est, le tableau 3.2 synthétise les différents indicateurs de la robustesse déjà évoqués. Comme pour le cas précédent, le modèle issu de l'équation (2.19) est appliqué à la géométrie présentée à la figure 3.2a avec le même paramétrage. Il s'ensuit que l'écart-type et l'étendue des estimations de la souplesse sont plus élevés pour la géométrie déterministe, mais la souplesse de la conception de référence et l'estimation de la souplesse moyenne est moindre. Cela démontre que l'OTR a atténué les effets des incertitudes sur la géométrie, tout en dégradant la performance nominale de la topologie.

Visuellement, les deux topologies sont distinctes. Effectivement, la conception robuste est globalement plus épaisse et elle ne contient plus de motif en charnière à un nœud. Bien que cela ne soit pas visible au premier coup d'œil, la symétrie est perdue. Si la taille de l'échantillon de la SMC est diminuée, alors la topologie optimisée devient de moins en moins symétrique. Cette perte de symétrie peut être corrigée *a posteriori* par le concepteur si besoin. Les effets primordiaux résident dans la position des branches topologiques. Effectivement, l'inclinaison des branches topologiques supérieures et inférieures commence plus tôt (environ à la moitié de l'espace de conception), la fin de la structure est donc plus élancée. À l'exception de la partie supérieure et inférieure de la géométrie, les positions des branches topologiques sont toutes modifiées. L'utilisation d'un espace de non-conception influence la topologie obtenue par l'OTR, comme l'illustrent les figures 3.14a et 3.14b. La disposition des branches topologiques change, par exemple, l'inclinaison est plus tardive.

Ce modèle est caractérisé par une instabilité, comme l'illustrent les courbes de la figure 3.13. En effet, la fonction objectif (cf. figure 3.13a) comporte de nombreux pics. Ils sont dus à une variance extrême; en effet, la moyenne de souplesse (courbe rouge de la figure 3.13b) reste lisse par rapport au maximum. Il s'agit de cas où le tirage diminue systématiquement les PDs de la conception de référence. Qui plus est, les valeurs de $\hat{\min}(\Upsilon)$ sont invariablement supérieures aux valeurs de c_{ref} . Pour les CO, ces maxima n'ont pas d'influence négative sur la souplesse de la conception de référence et la fonction objectif, celles-ci ne font que diminuer au cours de l'optimisation.


 (a) $c_{\text{ref}} = 398 \text{ Nmm}$.


(b) Juxtaposition des cas 3.2a et 3.12a.

Figure 3.12 – Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle naïf.

Table 3.2 – Souplesses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a et 3.12a.

| Cas | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\text{m}\hat{\text{a}}\text{x}(\Upsilon)$ | $\text{m}\hat{\text{i}}\text{n}(\Upsilon)$ |
|------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|--|--|
| Fig. 3.2a | 393 | 738 | 30.8 | 1.82×10^3 | 639 |
| Fig. 3.12a | 398 | 740 | 29.8 | 1.55×10^3 | 675 |

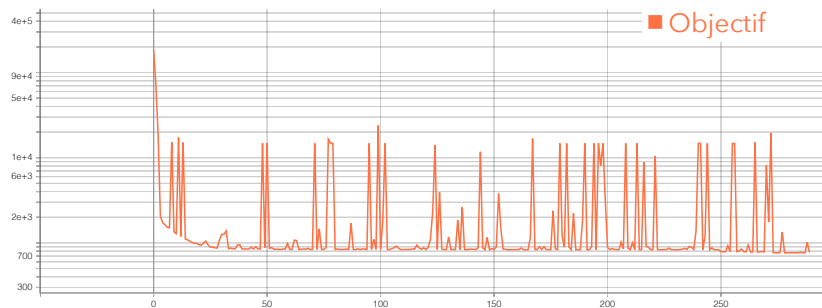
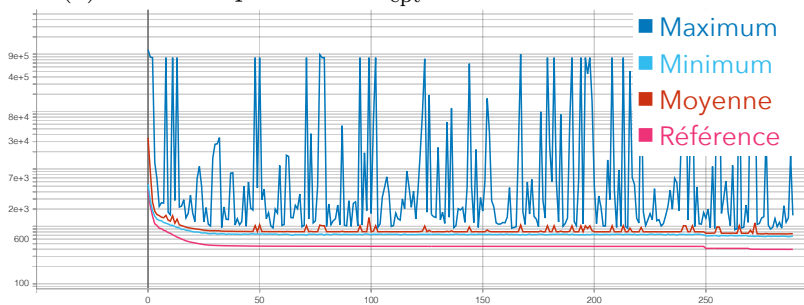

 (a) Courbe représentant \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération.

 (b) Courbes représentant c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\text{m}\hat{\text{a}}\text{x}(\Upsilon)$ et $\text{m}\hat{\text{i}}\text{n}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération.

Figure 3.13 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour des indicateurs de la robustesse en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.12a.

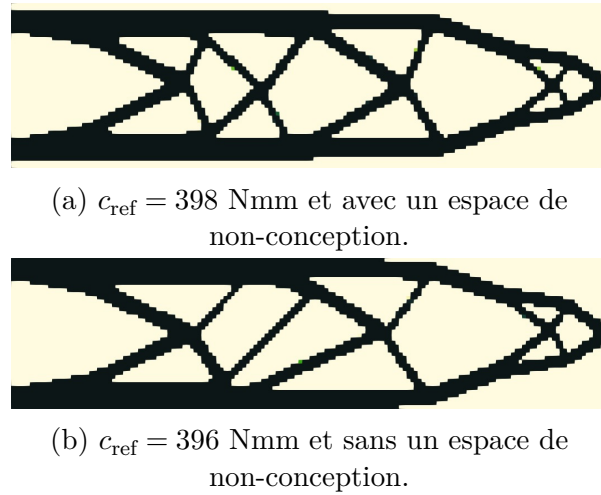


Figure 3.14 – Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et le modèle naïf et avec ou sans l'espace de non-conception.

Les écarts calculés avec les équations (3.4) et (3.5) pour le modèle $\Delta_{\text{naïf}}$ de l'équation (2.19) sont illustrés à la figure 3.15. Conformément à la modélisation, $\hat{m}_1(\Delta_{\text{naïf}})$ et $\hat{\mu}_2(\Delta_{\text{naïf}})$ sont semblables à un fond diffus, la matière est retirée ou ajoutée aléatoirement dans l'espace total.

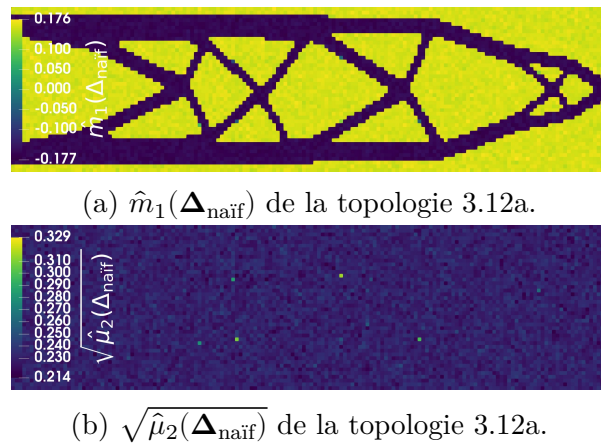


Figure 3.15 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle naïf.

Ce modèle simpliste a pour objectif de vérifier et valider l'architecture choisie. La classe associée à ce modèle est rapide à programmer et intégrer au reste du code grâce aux liens d'héritage : il ne prend que quelques lignes de code. Par ailleurs, la topologie optimisée est influencée par les imperfections géométriques. La modélisation des imperfections, qui altère le champ de pseudo-densité finale, conduit à une augmentation de l'épaisseur sur toute la structure. Malheureusement, la simplicité du modèle est un désavantage. En

effet, sa fonction objectif est caractérisée par des fluctuations importantes tout au long de l'optimisation, qui sont directement inhérentes à la modélisation.

Dans cette section, les deux problèmes (2.17) et (2.20) ont été analysés avec le cas d'étude décrit à la sous-section 3.1.1. Les deux modèles décrits sont peu intrusifs et simples à mettre en œuvre. Toutefois, les résultats manquent de sens physique. Qui plus est, les topologies robustes obtenues varient en fonction du modèle d'imperfections géométriques, et sont toutes différentes des configurations déterministes. L'ajout d'un espace de non-conception modifie les topologies obtenues.

3.2 Vérification du modèle d'imperfections géométriques statistique

Les sous-sections qui suivent ont pour objectif de vérifier plusieurs propriétés du modèle d'imperfections géométrique statistique (*cf.* sous-section 2.4.3). Cette vérification se déroule en plusieurs étapes. Premièrement, les résultats du modèle avec ses paramètres nominaux sont analysés. La seconde sous-section vérifie la répétabilité de la méthode de simulation. Ensuite, le poids de la fonction objectif est ajusté en fonction de l'appréhension aux incertitudes qu'a le concepteur. Dernièrement, les motifs géométriques obtenus et les effets des modes statistiques sont évalués à la dernière sous-section.

3.2.1 Résultats du paramétrage nominal

La paramétrisation de SIMP et des algorithmes d'optimisation correspond à celle donnée à la sous-section 3.1.1. La taille de l'échantillon utilisé pour la SMC est de $n_{\text{smc}} = 4000$. La constante k de la fonction objectif (2.2) est égale à $k = 1$. Le modèle statistique est utilisé et ses paramètres sont définis dans l'équation (2.25). En particulier, la valeur de la constante discriminant la frontière, a , est égale à $a = 10^{-4}$ et la variable aléatoire P_e^{AM} caractérisant les écarts géométriques issus du procédé de FA suit une loi normale, telle que :

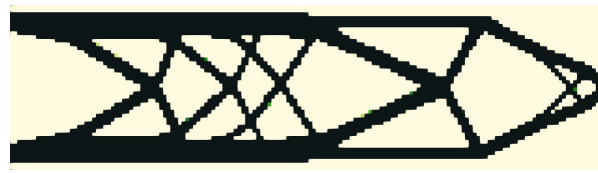
$$P_e^{\text{AM}} \sim \mathcal{N}(0, 0.4) . \quad (3.7)$$

Ces paramètres ne sont pas modifiés dans les sous-sections suivantes, sauf indication contraire. Le paramétrage du modèle nominal est déterminé en fonction des poids donnés aux différents modes statistiques. Pour les valeurs nominales, la constante liée à l'écart-type des PDs des éléments locaux est égale à $k_{\text{STD}} = 1.6$ et celle liée à l'asymétrie est égale à $k_{\text{SK}} = 0.2$.

Les figures 3.16 et 3.17 illustrent les topologies optimisées robustes qui atténuent les écarts géométriques générés par le modèle statistique. Ces figures montrent les juxtapositions avec les topologies optimisées sans les effets des incertitudes. Le tableau 3.3 référence les valeurs de souplesse et les estimations des indicateurs de robustesse des solutions optimisées. Comme pour les cas précédents, le modèle statistique est utilisé pour affecter les topologies optimisées sans incertitude (*cf.* les figures 3.2a et 3.2c) et avec le même paramétrage.

Visuellement, les charnières à un nœud disparaissent pour les deux algorithmes d'optimisation. Ceci est confirmé dans l'analyse des indicateurs de la robustesse, les estimations de l'écart-type et de l'étendue sont plus faibles pour les géométries robustes, cependant la souplesse moyenne et la souplesse de la conception de référence sont plus élevées. Ainsi, les deux topologies présentent une variation de la souplesse moindre, mais une plus mauvaise performance nominale. De plus, les estimations de la souplesse minimale et de la moyenne de la souplesse sont supérieures à la souplesse de la conception de référence. Ce qui veut dire, qu'avec la loi choisie (*cf.* équation (3.7)), notre modèle dégrade nécessairement la performance, ici la souplesse, de la topologie.

Les deux structures présentent une réduction de l'épaisseur lorsque x est supérieur à $x > L/2$. La position des branches est modifiée par rapport aux cas déterministes. Cette nouvelle disposition et l'augmentation d'épaisseur des branches topologiques permettent d'atténuer les effets des incertitudes. La symétrie est perdue et peut être corrigée dans une étape ultérieure. Finalement, l'utilisation d'un espace de non-conception influence les topologies obtenues. Les figures E.1 et E.2 montrent des changements dans la disposition des branches topologiques pour les deux algorithmes d'optimisation.


 (a) $c_{\text{ref}} = 403 \text{ Nmm}$, $k_{\text{STD}} = 1.6$ et $k_{\text{Sk}} = 0.2$.

 (b) Juxtaposition des cas 3.16a et 3.2a
(déterministe).

Figure 3.16 – Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO et les paramètres nominaux du modèle statistique.

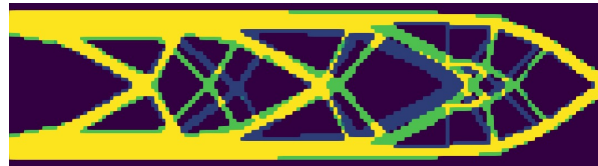

 (a) $c_{\text{ref}} = 385 \text{ Nmm}$, $k_{\text{STD}} = 1.6$, $k_{\text{Sk}} = 0.2$.

 (b) Juxtaposition des cas 3.17a et 3.2c
(déterministe)

Figure 3.17 – Topologie optimisée robuste obtenue avec la MAM et les paramètres nominaux du modèle statistique.

Table 3.3 – Souplesses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.16 et 3.17.

| Cas | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\text{m}\hat{\text{a}}\text{x}(\Upsilon)$ | $\text{m}\hat{\text{i}}\text{n}(\Upsilon)$ |
|------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|--|--|
| Fig. 3.2a | 393 | 510 | 10.3 | 666 | 480 |
| Fig. 3.16a | 403 | 520 | 7.50 | 561 | 499 |
| Fig. 3.2c | 372 | 485 | 11.7 | 685 | 459 |
| Fig. 3.17a | 385 | 490 | 6.60 | 524 | 468 |

3.2.2 Étude de la répétabilité

L'exactitude des estimations de la méthode SMC est dépendante de la taille de l'échantillon, c'est-à-dire de la variable n_{smc} . Pour vérifier l'influence de la SMC sur l'exactitude des estimations, l'approche choisie consiste à modifier la graine aléatoire pour différentes tailles d'échantillon. La graine aléatoire est un nombre servant d'identifiant pour initialiser un générateur de nombres aléatoires qui est utilisé pour tirer les réalisations, c'est-à-dire les vecteurs u^i des équations (1.36) et (1.37). Si les moments et les gradients associés sont estimés avec suffisamment d'exactitude, alors la topologie optimisée doit être insensible au changement de graine.

Dans ces conditions, cinq valeurs pour la taille de l'échantillon sont choisies, à savoir 4000, 2000, 1000, 500, 100 et cinq valeurs de graine aléatoire différentes. Idéalement, une nouvelle liste de nombre aléatoire ne doit pas changer le résultat de l'optimisation, faute de quoi les incertitudes de modèles (erreurs numériques) s'accumulent et la topologie optimisée obtenue devient unique en fonction de la graine choisie. Le résultat n'est pas répétable et il est possible qu'un utilisateur chanceux tombe sur la « bonne » graine aléatoire qui rendra la conception réelle plus robuste, ce comportement n'est pas désirable.

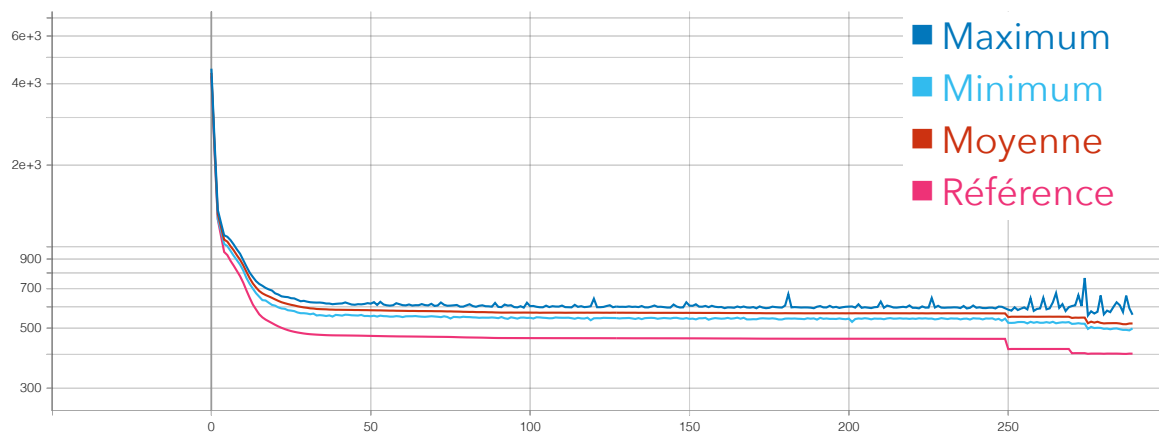
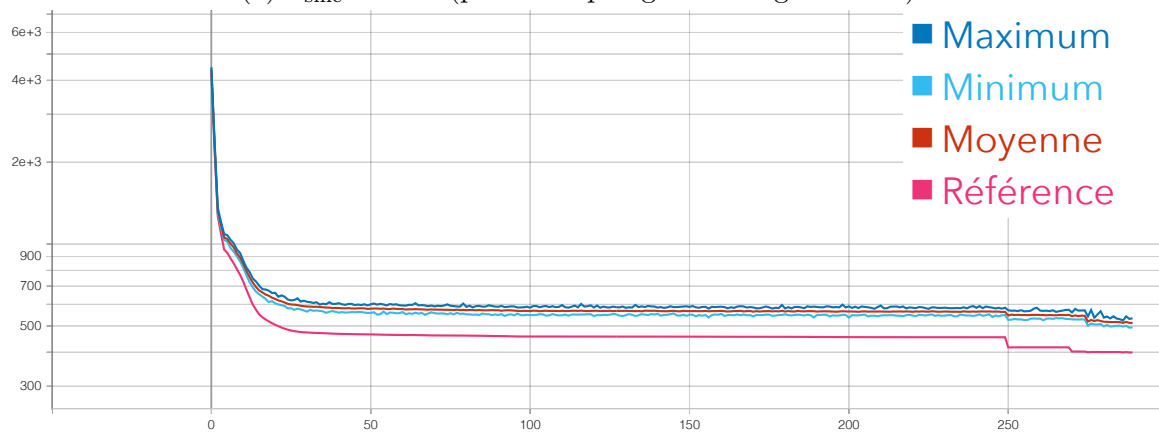
La figure 3.19 illustre des boîtes à moustaches décrivant la distribution statistique des indicateurs de robustesse de la topologie en fonction de la taille de l'échantillon et des algorithmes d'optimisation. La variabilité observée des indicateurs est obtenue en changeant, au démarrage du processus d'optimisation robuste, la graine aléatoire. La moyenne des valeurs de c_{ref} converge pour les CO et la MAM ; bien que la convergence soit plus rapide et la variabilité moindre pour les CO que pour la MAM. En effet, pour la MAM, les fractions de volume, φ , des topologies optimisées sont plus faibles pour des petites tailles d'échantillon et augmentent de $\varphi \approx 42\%$ lorsque $n_{\text{smc}} = 100$ à $\varphi \approx 43\%$ quand $n_{\text{smc}} = 4000$. Cette variation explique pourquoi la moyenne des valeurs de c_{ref} diminue plus fortement pour la MAM que pour les CO. La moyenne des valeurs de $\hat{\text{m}}\text{in}(\Upsilon)$, de $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ et de $\hat{m}_1(\Upsilon)$ converge, à l'exception près de la moyenne des valeurs de $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ pour les CO, qui avec un échantillon de $n_{\text{smc}} = 4000$ ne converge pas. Cela s'explique par le fait que plus la taille de l'échantillon augmente et plus le nombre de valeurs aux extrémités de la distribution augmente. En effet, même si l'étendue augmente avec la taille de l'échantillon, la dispersion des valeurs de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ diminue. Cela est confirmé par la figure 3.18. Cette figure illustre l'état des indicateurs de robustesse en fonction de

l'itération, à ω graine aléatoire et avec un échantillon égal à $n_{\text{smc}} = 4000$ pour la figure 3.18a et $n_{\text{smc}} = 100$ pour la figure 3.18b. L'estimation du maximum de la souplesse comporte plus de pics lorsque l'échantillon est égal à $n_{\text{smc}} = 4000$ que pour un échantillon de taille $n_{\text{smc}} = 100$. Enfin, la convergence de la moyenne des valeurs de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ n'est pas clairement établie. Cependant, les variations observées diminuent avec la taille de l'échantillon.

Le fait que la moyenne de $\hat{m}_1(\Upsilon)$ converge et que la variabilité des valeurs $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ diminue indique que les conceptions obtenues en faisant varier la graine aléatoire commencent à converger les unes des autres. Mais, malgré une taille d'échantillon importante, lancer une optimisation robuste avec une graine différente conduit à une variabilité de la souplesse des topologies robustes optimisées.

Cela est confirmé par l'analyse des conceptions de référence obtenues en faisant varier la graine aléatoire. Les figures 3.20 et 3.21 illustrent la moyenne et l'entropie des PDs des cinq conceptions de référence pour différentes tailles d'échantillon. Une entropie élevée indique que les (cinq) conceptions de référence sont identiques. Inversement, une entropie faible indique des disparités entre les (cinq) conceptions de référence. Les résultats des topologies des figures 3.20 et 3.21 sont obtenus respectivement avec la MAM et les CO. Lorsque la taille de l'échantillon est égale à $n_{\text{smc}} = 100$, les conceptions de référence obtenues avec les deux algorithmes d'optimisation présentent une grande variabilité localisée respectivement au dernier tiers pour la MAM (*cf.* les figures 3.20i et 3.20j) et au centre pour les CO (*cf.* les figures 3.21i et 3.21j). Pire encore, la MAM ne mène pas toujours à une convergence de la fonction objectif robuste. Les conceptions de référence convergent au fur et à mesure que la taille de l'échantillon augmente. La localisation des zones présentant de fortes variabilités ne change pas, mais elles se réduisent à la fois en taille et en intensité. En effet, il est clair que visuellement l'entropie augmente dans l'ensemble de l'espace de conception. Qui plus est, même avec une taille d'échantillon de $n_{\text{smc}} = 4000$, la topologie optimisée robuste n'est toujours pas identique en changeant la graine aléatoire. Cependant les conceptions de référence convergent respectivement vers le cas de la figure 3.17a pour la MAM et le cas de la figure 3.16a pour les CO.

Donner une règle pour choisir la taille de l'échantillon de la SMC est difficile. En effet, une taille trop faible, comme lorsque $n_{\text{smc}} = 100$, conduit à une estimation médiocre des indicateurs de la robustesse. Cela engendre un manque de répétabilité, autrement dit si le concepteur change de graine aléatoire la disposition des branches topologiques

(a) $n_{\text{smc}} = 4000$ (pour la topologie de la figure 3.16a).(b) $n_{\text{smc}} = 100$.Figure 3.18 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ et $\hat{\text{m}}\text{in}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération à $i\omega$ graine aléatoire et obtenues avec les CO.

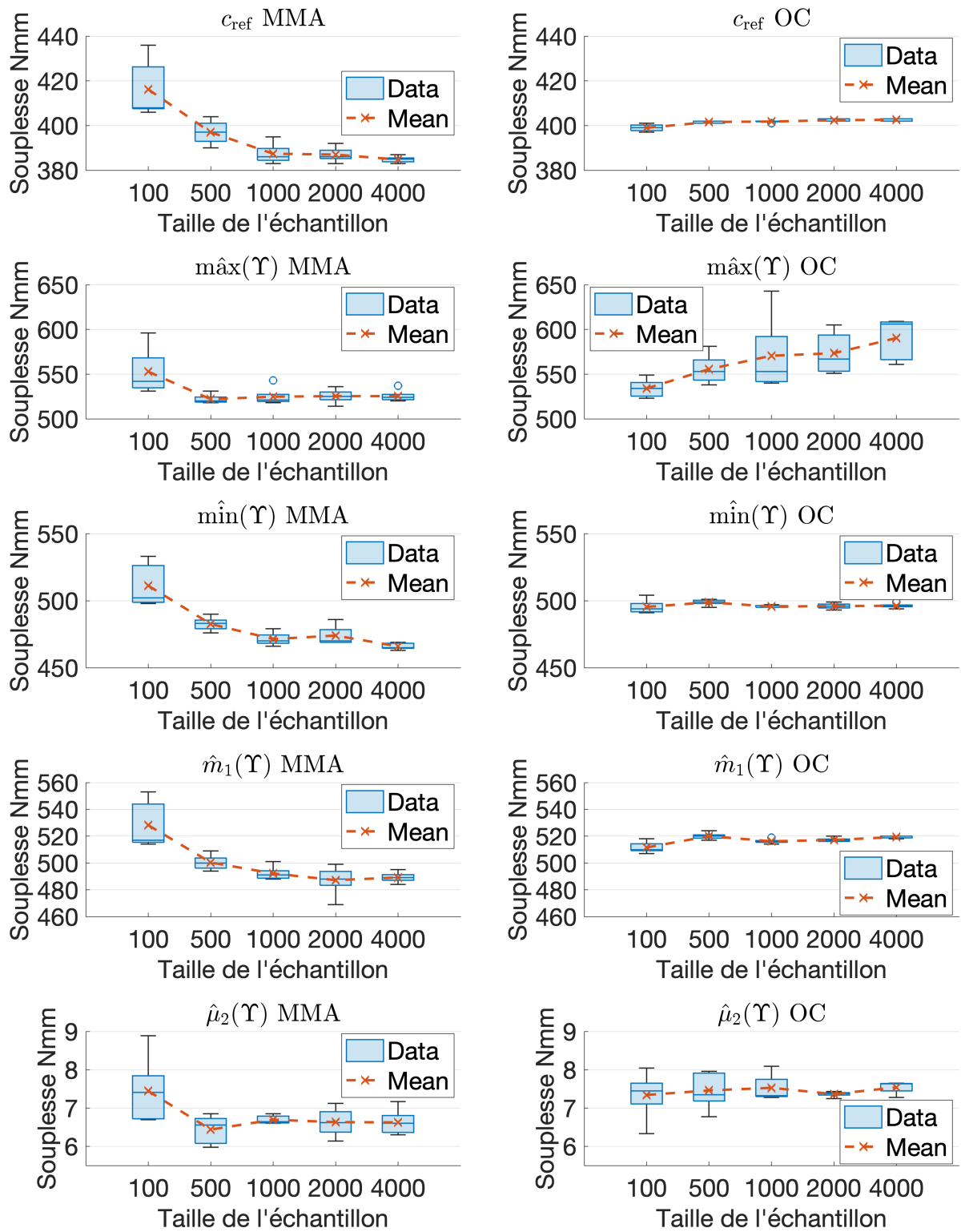


Figure 3.19 – Boîte à moustaches des valeurs de c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{m}_{\max}(\Upsilon)$ et \hat{m}_{\min} avec 5 répétitions pour chaque taille d'échantillon avec la MAM à gauche et les CO à droite.

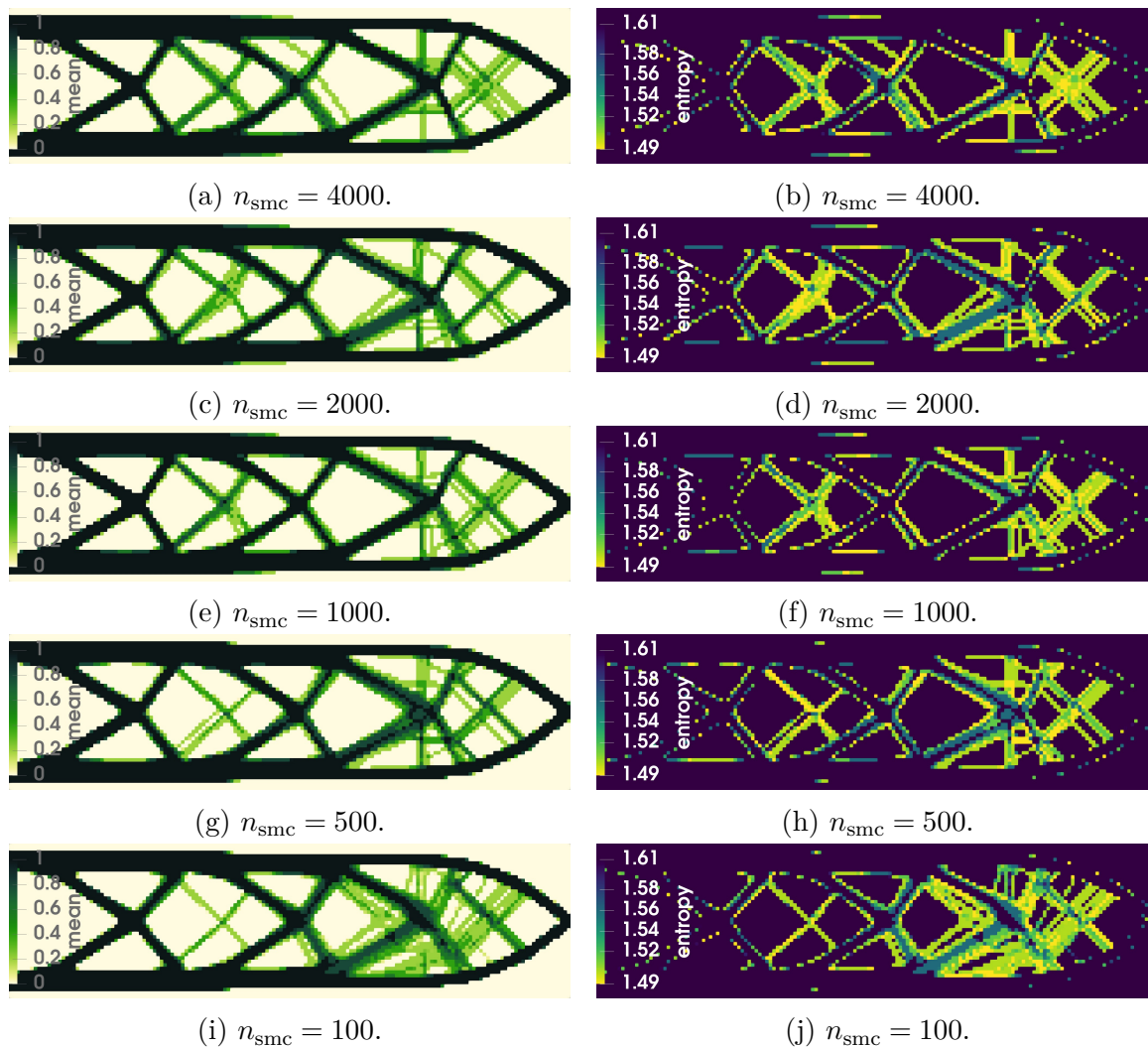


Figure 3.20 – Moyenne (gauche) et entropie (droite) des conceptions de référence avec la MAM.

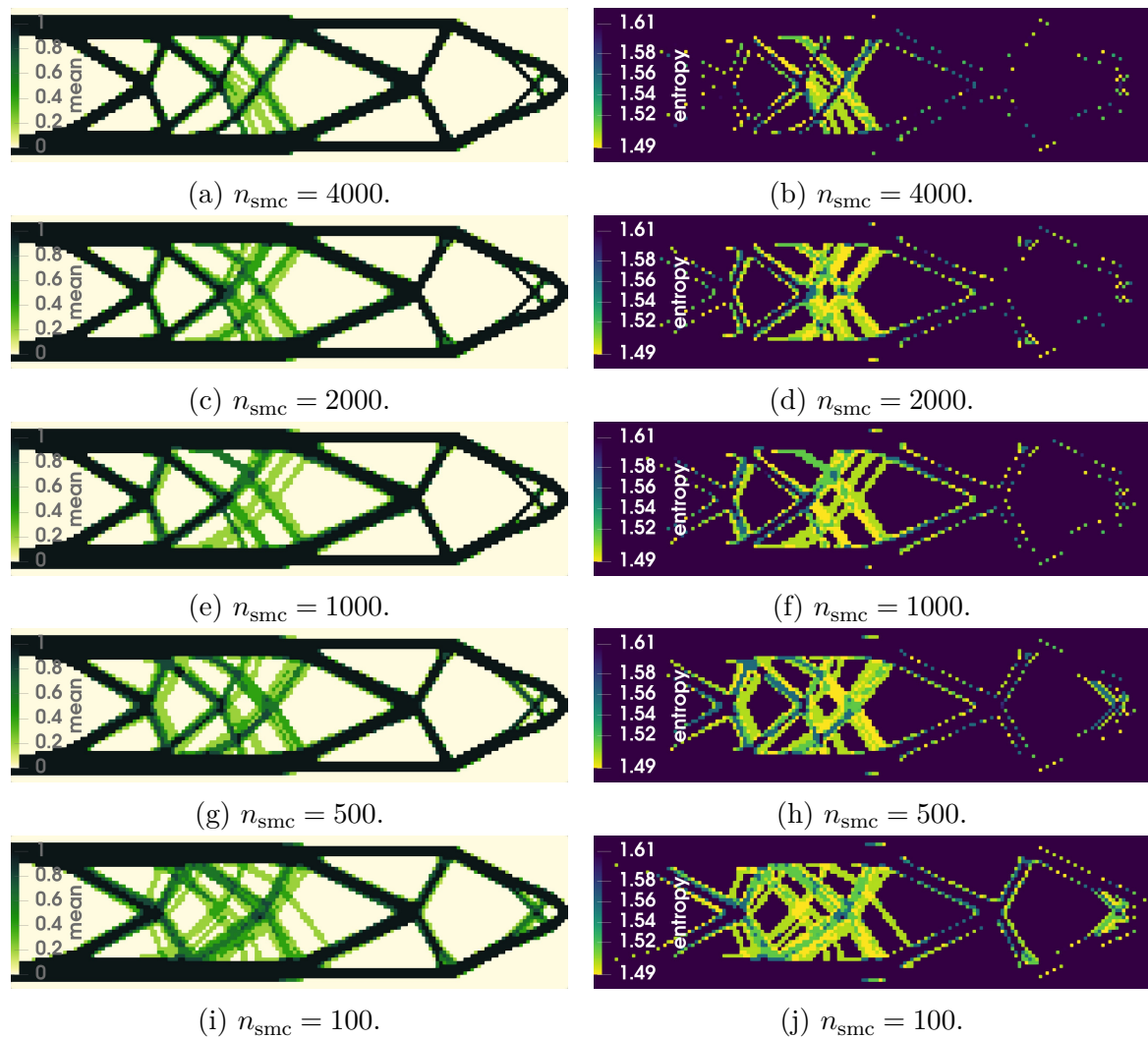


Figure 3.21 – Moyenne (gauche) et entropie (droite) des conceptions de référence avec les CO.

est perturbée. Une taille de l'échantillon trop important entraîne un coût calculatoire prohibitif. Dans le cas d'étude présenté, le coût calculatoire est faible. En effet, le nombre de degrés de liberté, n_{dof} , reste faible, car il y a peu d'éléments 2D. De plus, la physique est linéaire et statique. Ainsi, le coût calculatoire reste abordable si le *multiprocessing* est utilisé ; dans notre cas, la solution de la figure 3.16a est obtenue après une quinzaine d'heures avec un Core i9-14900K, 64 Go de mémoire vive. Mais, pour des applications industrielles, l'utilisation de la SMC et la vérification de la répétabilité ont un coût qui est trop élevé.

3.2.3 Sensibilités des topologies optimisées au poids de la fonction objectif

Dans cette sous-section la constante k , de la fonction objectif présentée à l'équation (2.2), est modifiée. L'objectif de cette modification est de caractériser l'influence de k sur les estimations de la moyenne et de l'écart-type de la conception de référence. En effet, si k est égal à $k = 0$, alors seul le terme de l'estimation de l'écart-type de la souplesse ($\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$) est minimisé ; inversement, si k est égal à $k = 2$, alors le terme de l'estimation de la moyenne de la souplesse ($\hat{m}_1(\Upsilon)$) est uniquement minimisé. Dans ces conditions, les valeurs de k suivantes ont été utilisées : 0.01, 0.05, 0.1, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0. De plus, les solutions optimisées robustes sont obtenues avec la MAM et les CO. Enfin, dans cette sous-section, un échantillon égal à $n_{\text{smc}} = 4000$ est utilisé avec le même numéro de graine aléatoire pour toutes les expérimentations.

La figure 3.22 montre deux graphiques à bulle représentant les valeurs normalisées de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ en fonction de $\hat{m}_1(\Upsilon)$, où l'aire des bulles indiquent les valeurs de k correspondantes, obtenues avec la MAM (3.22a) et les CO (3.22b). Pour aider à la lecture, les indicateurs de la robustesse ont été normalisés. Les figures 3.22a et 3.22b affichent les mêmes tendances. Lorsque la constante k est diminuée, alors il est observé que les valeurs de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ ont tendances à diminuer. En outre, si la constante k est augmentée, alors les valeurs de $\hat{m}_1(\Upsilon)$ ont tendance à diminuer.

La MAM a produit des topologies optimisées et robustes avec des valeurs de k allant de $k = 0.5$ à $k = 2.0$. Pour les autres valeurs de k , l'algorithme d'optimisation n'a pas convergé vers une solution viable. En ce qui concerne les CO, l'algorithme d'optimisation converge pour toutes les valeurs de k . Toutefois, les conceptions de référence, pour des

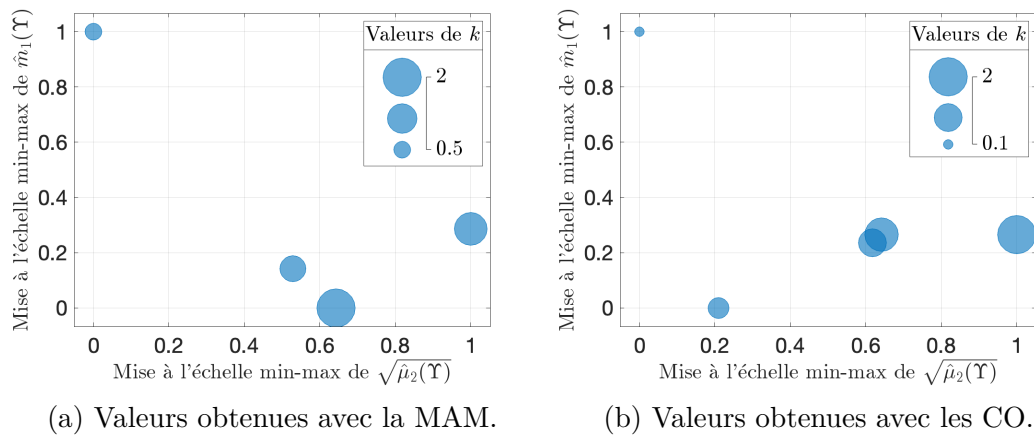
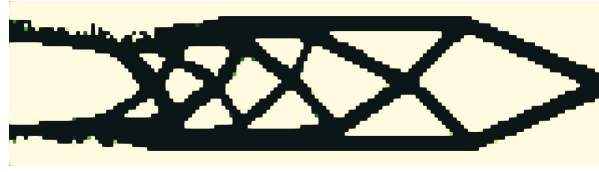


Figure 3.22 – Graphiques à bulles représentant les valeurs de $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ en fonction de $\hat{m}_1(\Upsilon)$ avec l'aire des bulles représentant la valeur de la constante k .

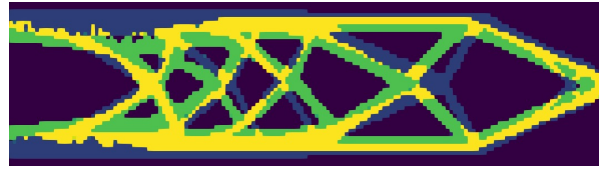
valeurs de k inférieure à $k < 0.1$, montrent des parties irréalistes. La figure 3.23a est la conception de référence pour une valeur de k égale à $k = 0.05$. Comme l'illustre la juxtaposition affichée à la figure 3.23b, l'épaisseur des branches topologiques de cette topologie est augmentée dans presque toute la structure. La structure est aussi plus effilée que le cas déterministe (*cf.* figure 3.2a) et que le cas obtenu avec les paramètres nominaux (*cf.* figure 3.16a). Seul le premier quart de la pièce est amplement moins épais et est mal défini, conduisant à une augmentation de la souplesse, passant de $c_{\text{ref}} = 403$ Nmm à $c_{\text{ref}} = 858$ Nmm (se référer au tableau E.1 pour les résultats complet). Ces résultats peuvent être dus à :

- Un problème mal posé, car minimiser uniquement l'écart-type de la souplesse mène à des conceptions qui n'ont plus de sens physique. Par exemple, un champ de PDs uniforme est déjà sans variance, les dérivées partielles sont nulles et la conception reste telle quelle. De tels champs surviennent à l'initiation de SIMP. En particulier, les indicateurs de la robustesse pour $k = 0.01$ révèlent que la souplesse moyenne et la souplesse de la conception de référence augmentent sur les 250 premières itérations (*cf.* la figure E.3a), pendant que la souplesse de l'écart-type atteint un palier puis diminue après une centaine d'itérations (*cf.* la figure E.3b).
- L'algorithme d'optimisation n'est pas capable de concilier la contrainte en volume. Comme l'illustrent les figures E.3a et E.4a, c_{ref} augmente fortement après la 250-ème itération, soit lorsque β passe de $\beta = 1$ à $\beta = 4$. Cela est dû à une quantité importante d'éléments avec des niveaux de PD intermédiaires (ces derniers sont retirés par l'augmentation de β). Quand bien même ces niveaux de densité ne sont

pas intéressants d'un point de vue structurel (*cf.* l'équation (1.26)).



(a) $c_{\text{ref}} = 858 \text{ Nmm}$, $k = 0.05$.



(b) Juxtaposition des cas 3.23a et 3.2a
(déterministe)

Figure 3.23 – Topologie optimisée robuste obtenue avec les CO, les paramètres nominaux du modèle statistique et $k = 0.05$.

L'indicateur $\hat{m}_1(\Delta^e)$ défini par l'équation (3.4) estime l'écart moyen produit par les modèles d'imperfections géométrique pour l'élément e . Comme l'illustre la figure 3.24, il est notable de remarquer, qu'en diminuant la valeur de k , la quantité total de ces écarts moyens, soit :

$$s_{\Delta} = \sum_{e=1}^{n_{\text{el}}} \hat{m}_1(\Delta^e) V_e , \quad (3.8)$$

augmente. Autrement dit, si le concepteur privilégie la minimisation de la moyenne de la souplesse, alors le modèle statistique génère moins d'écarts à partir des géométries optimisées et *vice versa*. D'autre part, toutes les valeurs de $s_{\Delta_{\text{stat}}}$ sont négatives signifiant que le modèle a tendance à retirer plus de matière qu'il n'en ajoute. Cette observation est en accord avec le fait que la souplesse estimée moyenne, minimale et maximale est systématiquement plus importante que la souplesse de la conception de référence.

3.2.4 Sensibilités des topologies optimisées aux paramètres du modèle statistique

Dans cette sous-section, les poids, k_{STD} et k_{SK} , de l'équation (2.25), sont fluctué afin de vérifier l'influence des modes statistiques sur la topologie optimisée. Pour cela, la paramétrisation de la méthode SIMP est identique aux paramètres décrits à la sous-section 3.1.1. De plus, le paramétrage du modèle statistique est identique à celui présenté à la

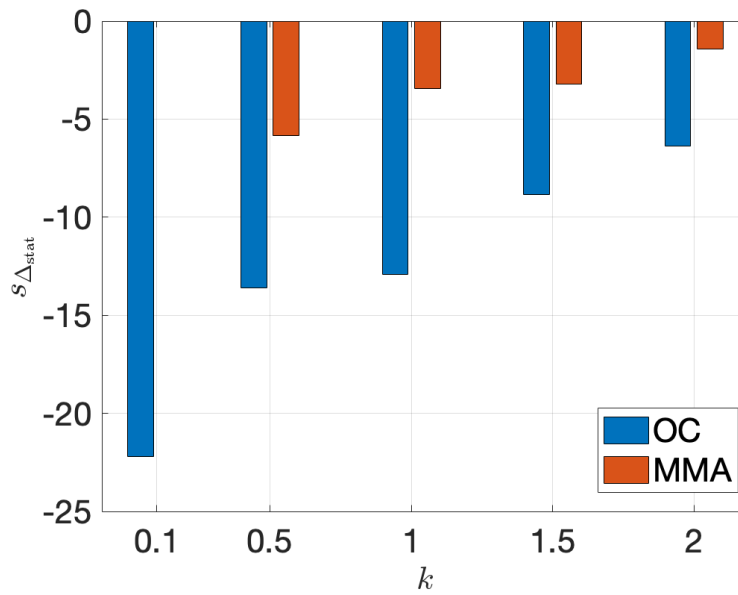


Figure 3.24 – Écart moyen total produit par le modèle statistique, $s_{\Delta_{stat}}$, en fonction de la valeur de k .

sous-section 3.2.1, seules les valeurs des poids sont modifiées. Trois jeux de paramètres sont testés :

1. Le paramétrage nominal où k_{STD} est égal à $k_{STD} = 1.6$ et k_{Sk} est égal à $k_{Sk} = 0.2$.
2. Le cas où le poids associé à l'asymétrie est nul $k_{Sk} = 0$ et k_{STD} est égal à $k_{STD} = 2$.
3. Enfin, le cas où le poids associé à l'écart-type est nul $k_{STD} = 0$ et k_{Sk} est égal à $k_{Sk} = 0.4$.

Ces paramètres ont été choisis pour garantir que le maximum absolu de $\hat{m}_1(\Delta^e)$ soit similaire à la dernière itération entre les trois exemples.

Les indicateurs de performance des topologies optimisées sont référencés au tableau 3.4 et les conceptions de référence sont montrées à la figure 3.25. Les résultats montrés dans cette sous-section n'utilisent que les CO. En effet, la MAM n'a pas convergé vers un résultat viable lorsque k_{STD} et k_{Sk} sont respectivement égaux à $k_{STD} = 0$ et $k_{Sk} = 0.4$. En outre, la fonction objectif comporte de nombreux pics, ceci est illustré par la figure E.5 située en annexe.

Premièrement, le mode responsable de l'épaississement et de la suppression des charnières à un nœud de la topologie est celui portant sur l'écart-type. Effectivement, les charnières à un nœud sont absentes de la figure 3.25b et les branches topologiques si-

Table 3.4 – Souplesse [Nmm] des solutions montrées à la figure 3.25.

| Cas | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ | $\hat{\text{m}}\text{in}(\Upsilon)$ |
|------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Fig. 3.25a | 403 | 520 | 7.50 | 561 | 499 |
| Fig. 3.25b | 403 | 514 | 6.82 | 547 | 492 |
| Fig. 3.25c | 396 | 437 | 2.44 | 447 | 429 |

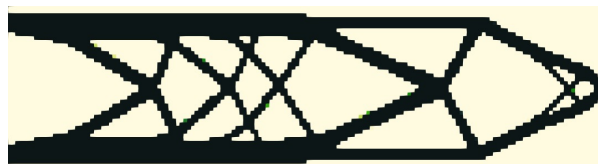
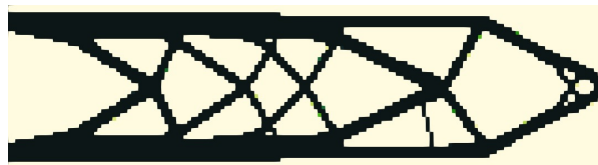
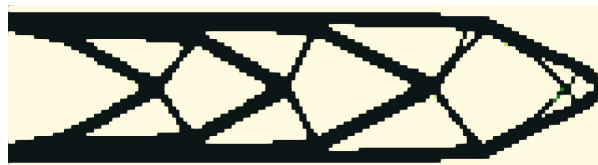
(a) $c_{\text{ref}} = 403$ Nmm, $k_{\text{STD}} = 1.6$ et $k_{\text{Sk}} = 0.2$.(b) $c_{\text{ref}} = 403$ Nmm, $k_{\text{STD}} = 2$ et $k_{\text{Sk}} = 0$.(c) $c_{\text{ref}} = 396$ Nmm, $k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$.

Figure 3.25 – Topologies optimisées robustes obtenues avec les CO.

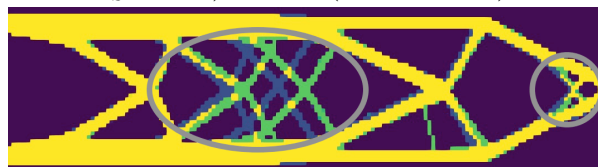
(a) Juxtaposition des cas 3.25c ($k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$) et 3.2a (déterministe).(b) Juxtaposition des cas 3.25b ($k_{\text{STD}} = 2$ et $k_{\text{Sk}} = 0$) et 3.25a ($k_{\text{STD}} = 1.6$ et $k_{\text{Sk}} = 0.2$).

Figure 3.26 – Juxtaposition de topologies optimisées robustes obtenues avec les CO.

tuées à la fin de la structure (en $x = L$) en forme de X sont les plus épaisses des trois cas présentés à la figure 3.25. De plus, la conception de référence est similaire à celle obtenue avec les paramètres nominaux, à savoir celle présentée à la figure 3.25a. En effet, la figure 3.26b montre la juxtaposition entre les figures 3.25b et 3.25a. Seules les branches topologiques situées aux environs de $x = L/2$ sont légèrement décalées, et de manière originale au vu des résultats sur la répétabilité (cf. les figures 3.21a et 3.21b).

Deuxièmement, le mode ayant le moins d'influence sur la topologie optimisée est celui portant sur l'asymétrie. La conception de référence, présentée à la figure 3.25c, affiche de nombreuses charnières à un nœud comme pour la structure déterministe et la figure 3.26a montre sa juxtaposition avec le cas déterministe. Dans cette juxtaposition les deux topologies sont très proches. Toutefois, la topologie robuste est légèrement plus épaisse au niveau des deux branches topologiques situées au dernier quart ($x > 3L/4$). Le tableau 3.4 référence les indicateurs de performances et ce mode ne les influence que peu. Par exemple, l'écart-type de la souplesse est trois fois plus petit que le cas nominal. Malgré tout, ce mode influence la topologie des manières suivantes :

- Les deux branches topologiques supérieure et inférieure sont plus rectilignes.
- La disposition de certaines branches topologiques est légèrement modifiée. Mais au regard de la variabilité due au manque de répétabilité, cette nouvelle disposition est peut-être fortuite.

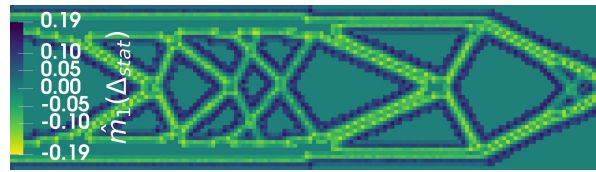
Le dernier et non le moindre, pour observer comment le modèle statistique altère la géométrie, les figures 3.27, 3.28 et 3.29 illustrent les champs $\hat{m}_1(\Delta_{\text{stat}})$ et $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{\text{stat}})}$ pour les trois configurations de cette section et à la 249-ème itération, soit avant l'augmentation de β (permettant d'éliminer les niveaux de PD intermédiaires). Les effets des différents modes sont facilement décelables. Ainsi, dans la seconde configuration ($k_{\text{STD}} = 2$ et $k_{\text{Sk}} = 0$) illustrée avec la figure 3.28, les écarts produits sont localisés uniformément au niveau de la frontière de la topologie. Ce comportement est souhaité et correspond à celui envisagé à la sous-section 2.4.3 et illustré par la figure 2.10. De plus, la troisième configuration ($k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$), illustrée par la figure 3.28, fait apparaître une concentration des écarts géométriques au niveau des intersections des branches topologiques (se reporter aux cercles blancs). Comme le montrent les ellipses pointillées, les branches topologiques rectilignes sont peu affectées par les imperfections géométriques. Ces deux caractéristiques sont voulues et elles concordent avec ce qui a été projeté à la sous-section 2.4.3. Cependant, les ellipses traitillées indiquent des valeurs de $\hat{m}_1(\Delta_{\text{stat}})$ et $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{\text{stat}})}$ très élevés à des endroits où il n'y a pas de matière

ou à l'intérieur de certaines branches topologiques inclinées et d'une certaine épaisseur. Cela est dû à la valeur du paramètre a de l'équation (2.26). En effet, ce paramètre est responsable de la détection de la frontière de la topologie : s'il est trop faible, alors trop d'éléments sont considérés comme appartenant à la frontière ; s'il est trop élevé, alors aucune frontière n'est détectée. Les figures E.6 et E.7 illustrent la topologie optimisée et robuste avec une valeur de a égale respectivement à $a = 0.1$ et $a = 0.3$, lorsque k_{STD} et k_{Sk} valent respectivement $k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$. Le comportement indésirable est uniquement atténué. Enfin, la configuration nominale présente ces deux particularités.

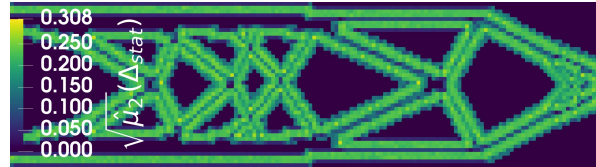
Le modèle statistique a été analysé dans cette section. Premièrement, la topologie obtenue avec le paramétrage nominal atténue les incertitudes générées par le modèle. En effet, les indicateurs de la robustesse, à savoir les estimations de l'étendue et de l'écart-type de la souplesse, sont plus faibles et donc meilleurs. De plus, la topologie ne présente plus de charnières à un nœud. Secondement, la répétabilité de la méthode permettant l'estimation des moments statistiques et les gradients associés, soit la SMC, est vérifiée en changeant la graine aléatoire pour plusieurs tailles d'échantillons. Il en ressort que même pour une taille substantielle, la répétabilité n'est pas assurée. Cela dit, un comportement de convergence est observé et est presque réalisé pour les CO contrairement à la MAM. *Tertio*, nous avons fait varier le poids k de la fonction objectif robuste pour renseigner l'aversion aux incertitudes qu'a le concepteur. Bien que la relation entre le poids de la fonction coût et les estimations de la moyenne et de l'écart-type de la souplesse ne soit pas linéaire ; modifier ce poids est efficace pour choisir entre : minimiser les variations dues aux incertitudes ou la performance nominale. Ainsi, la souplesse est un indicateur de performance permettant de considérer les imperfections géométriques. Enfin, les deux modes statistiques, c'est-à-dire ceux portant sur l'écart-type et l'asymétrie des éléments locaux, ont été examinés. Bien que celui assigné à l'asymétrie montre quelques comportements non désirés, par exemple des écarts importants et éloignés de la frontière des branches topologiques ; les deux modes sont capables de décrire localement la topologie et d'y associer un niveau de perturbations.

3.3 Atténuation des effets des incertitudes épistémiques

Cette section a pour objectif d'atténuer les effets des incertitudes épistémiques en appliquant la méthode développée à la sous-section 2.3.2. Ces incertitudes peuvent provenir :

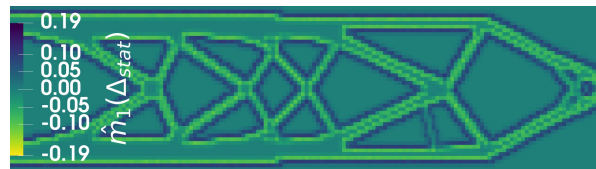


(a) $\hat{m}_1(\Delta_{stat})$ de la topologie 3.25a.

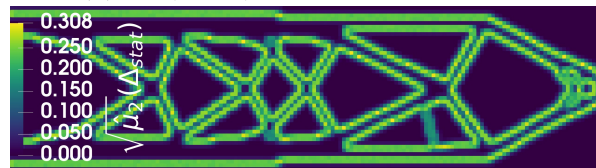


(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{stat})}$ de la topologie 3.25a.

Figure 3.27 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25a à l'itération 249 (avant l'augmentation de β).

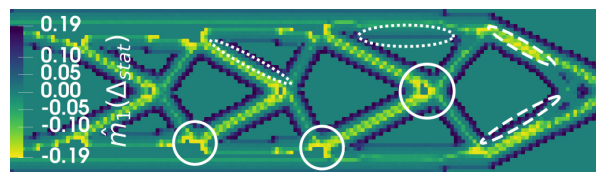


(a) $\hat{m}_1(\Delta_{stat})$ de la topologie 3.25b.

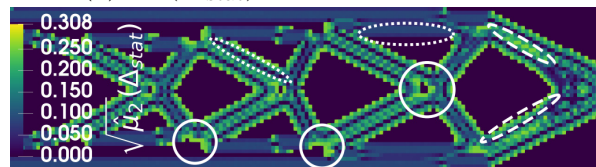


(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{stat})}$ de la topologie 3.25b.

Figure 3.28 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25b à l'itération 249 (avant l'augmentation de β).



(a) $\hat{m}_1(\Delta_{stat})$ de la topologie 3.25c.



(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{stat})}$ de la topologie 3.25c.

Figure 3.29 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique sur la topologie 3.25c à l'itération 249 (avant l'augmentation de β).

de la méconnaissance dans la modélisation des écarts, des erreurs dues au manque de répétabilité, comme le montre la sous-section 3.2.2, *et cætera*. La paramétrisation des CO et de la méthode SIMP est identique à celle présentée à la sous-section 3.1.1. La MAM n'a pas été utilisée dans cette section, bien que cela est envisageable sans modification du programme existant. Enfin, il est bon de rappeler que la nouvelle proposition réside dans la modification du processus d'optimisation pour une conception robuste (RDO), ainsi pour atténuer les effets des incertitudes épistémiques deux conceptions de référence sont obtenues. L'une est pessimiste, elle marque, par exemple, une méconnaissance dans la modélisation ou une aversion pour les incertitudes et l'autre est optimiste, qui traduit l'opposé.

La paramétrisation de SIMP et des algorithmes d'optimisation correspond à celle donnée à la sous-section 3.1.1. À l'exception du nombre d'itérations pour les différentes valeurs de β . Ainsi, β est égal à $\beta = 1$ pour 60 itérations. Puis, β est augmenté à $\beta = 4$ pour 15 itérations. Enfin, la valeur de β est doublée toutes les 5 itérations jusqu'à atteindre $\beta = 64$. L'optimisation se termine par 5 itérations supplémentaires. La diminution du nombre d'itérations est due au coût calculatoire. De plus, le critère de convergence décrit par l'équation (2.16) n'a pas été testé, bien qu'implémenté, et fera l'objet de futures publications. La taille de l'échantillon utilisé pour la SMC est de $n_{\text{smc}} = 1000$. La constante k de la fonction objectif (2.2) est égale à $k = 1$. En outre, les paramètres de la loi de probabilité présentée à l'équation (3.7) sont affectés par de l'incertitude. En accord avec les notations de la sous-section 2.3.2, les paramètres de la loi normale prennent la forme suivante :

$$\mathbf{P}_e^{\text{AM}} \sim \mathcal{N}(\tau_1, \tau_2) \forall e \in n_{\text{el}} \text{ avec } \tau_1 \in \mathcal{I}_1 = \{0\} \text{ et } \tau_2 \in \mathcal{I}_2 = \{0.2, 0.6\} . \quad (3.9)$$

Il convient de noter que le paramètre τ_2 de la loi normale ne prend que deux valeurs, à savoir 0.2 ou 0.6. Ces deux valeurs sont identiques dans tout le maillage. En effet, en réécrivant les équations (2.10) et (2.11) au cas d'usage présenté ici, l'ensemble $\mathcal{D}_{\text{op}}^j$ est reformulé de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{\text{op}}^j = \left\{ \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^j, 0, 0.2), \dots \right), \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{op}}^j, 0, 0.6), \dots \right) \right\} \forall j \in \mathbb{N} , \quad (3.10)$$

et $\mathcal{D}_{\text{pe}}^j$ est réécrit de la manière suivante :

$$\mathcal{D}_{\text{pe}}^j = \left\{ \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^j, 0, 0.2), \dots \right), \text{opt} \left(\hat{c}_{\text{ept}}(\boldsymbol{\rho}_{\text{pe}}^j, 0, 0.6), \dots \right) \right\} \forall j \in \mathbb{N} . \quad (3.11)$$

La figure 3.30 affiche la topologie optimiste et pessimiste, ainsi que leurs juxtapositions. Les conceptions de référence sont dissemblables lorsque les effets des incertitudes aléatoires et des incertitudes épistémiques sont atténués. En outre, comme le tableau 3.5 le référence, il est intéressant de noter que les valeurs de la souplesse des conceptions de référence sont réparties de la plus petite à la plus grande valeur :

- La topologie optimiste (*cf.* la figure 3.30a).
- La topologie obtenue en atténuant les effets des incertitudes aléatoires (*cf.* la figure 3.16a).
- La topologie pessimiste (*cf.* la figure 3.30c).

D'autre part, la différence entre les indicateurs de robustesse de la topologie atténuant les effets des incertitudes aléatoires et des topologies optimiste et pessimiste réside dans le choix du paramètre de l'écart-type pour la loi normale de l'équation (3.9) : τ_2 . Effectivement, lors de la dernière itération, l'écart-type est égal à $\tau_2 = 0.2$ pour la topologie optimiste et pessimiste.

Visuellement, les branches topologiques de la conception de référence pessimiste sont plus épaisses. La fin de la structure est légèrement plus effilée. Cela est confirmé par les indicateurs de robustesses référencés dans le tableau 3.5. La topologie optimiste bénéficie d'une meilleure souplesse, mais les estimations de la moyenne, de l'écart-type et de l'étendue de la souplesse sont plus mauvaises, c'est-à-dire plus élevées.

Dans la mesure où le concepteur dispose de plus d'informations sur la forme relative produite par différents niveaux d'incertitudes et que les topologies optimistes et pessimistes ont une forme similaire; cela peut l'aider de savoir où augmenter la taille des branches topologiques. Enfin, le fait que les géométries apparaissent similaires, avec des branches topologiques plus ou moins épaisses, ne constitue pas une conclusion générale; des précautions doivent être prises et des investigations supplémentaires doivent être menées avec d'autres cas d'études. En effet, rien n'indique que les topologies optimistes et pessimistes doivent avoir la même configuration.

Si la fonction objectif était linéaire tout au long du processus d'optimisation, la topologie optimiste serait obtenue avec la valeur d'écart-type la plus petite et la topologie pessimiste avec la valeur d'écart-type la plus grande. Cependant, au vu de la figure 3.31, il est à remarquer qu'à de nombreuses reprises au cours de l'optimisation, la topologie optimiste a été mise à jour avec la plus grande valeur d'écart-type, et inversement pour la topologie pessimiste. En conséquence, pour des expérimentations ultérieures, il sera

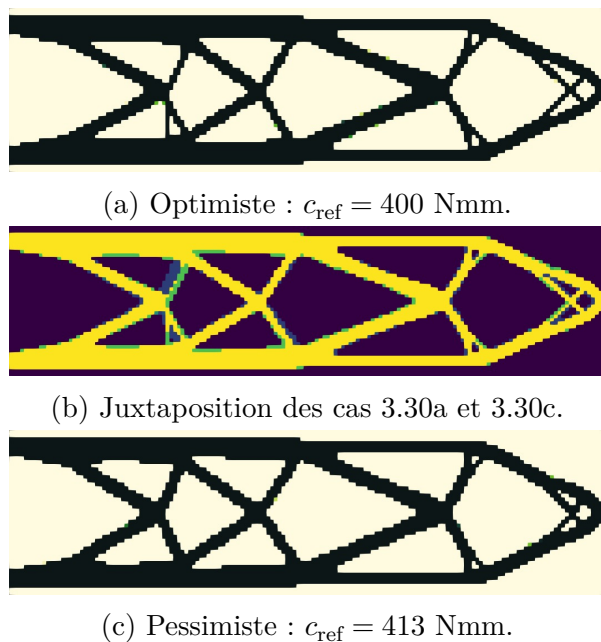


Figure 3.30 – Topologies optimisées obtenues en atténuant les effets des incertitudes épistémiques, adaptée de [Noal *et al.*, 2024b].

Table 3.5 – Souplesses [Nmm] des solutions montrées aux figures 3.2a et 3.16a et 3.30, traduit de [Noal *et al.*, 2024b].

| Cas | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ | $\hat{\text{m}}\text{in}(\Upsilon)$ |
|------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| Fig. 3.2a | 393 | s.o. | s.o. | s.o. | s.o. |
| Fig. 3.16a | 403 | 520 | 7.50 | 561 | 499 |
| Fig. 3.30a | 400 | 449 | 2.86 | 460 | 442 |
| Fig. 3.30c | 413 | 463 | 3.11 | 474 | 453 |

intéressant d'analyser la sensibilité des topologies optimiste et pessimiste au nombre de valeurs intermédiaires dans l'ensemble \mathcal{P}_2 .

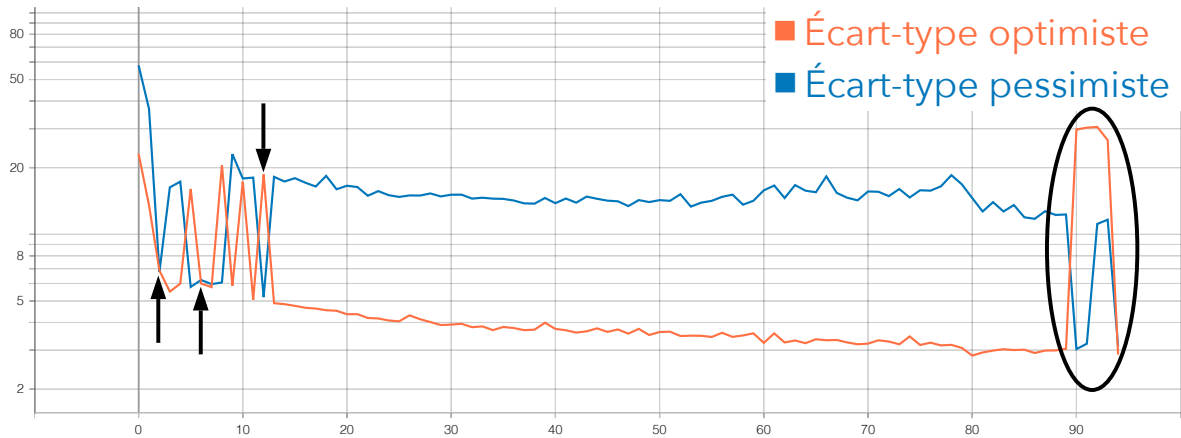


Figure 3.31 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour l'estimation de l'écart-type en fonction de l'itération pour les topologies de la figure 3.30.

Dans cette section, la méthode développée à la sous-section 2.3.2 pour atténuer les effets des incertitudes épistémiques a été appliquée au cas d'étude présenté à la sous-section 3.1.1 avec le modèle présenté à la sous-section 2.4.3. Les résultats sont cohérents, la conception de référence optimiste à une meilleure performance que la pessimiste, mais ses indicateurs de robustesses sont plus mauvais. La méthode présentée et appliquée pour atténuer les effets des incertitudes épistémiques permet au concepteur en fonction de sa confiance dans la modélisation ou plus globalement ses craintes vis-à-vis des autres sources d'incertitude épistémique de choisir la conception qui lui convient le mieux.

3.4 Bilan

Ce chapitre a permis de vérifier et tester les approches développées au chapitre 2. Un cas d'étude en deux dimensions, dont l'espace de conception prend la forme d'un rectangle et est illustré par la figure 3.1, sert de fil d'Ariane aux différentes sections. Étant donné que la topologie est considérée comme étant incertaine, un espace de non-conception a été ajouté autour de l'espace de conception, sauf aux faces où des conditions aux limites s'appliquent. L'ajout d'un espace de non-conception modifie non seulement les topologies robustes obtenues, mais aussi les topologies obtenues pour les cas déterministes.

Plusieurs modèles produisant des écarts sur la géométrie ont été conçus, codés, évalués

et vérifiés. Ces comparaisons ont pour but de vérifier la modularité du code et leurs représentativités. Le premier est issu de la littérature et est simple à mettre en œuvre. Cependant, les écarts produits manquent de cohérence. En effet, ces écarts générés ne dépendent pas des motifs de la topologie locale. En effet, de fortes variations dans la génération des écarts peuvent même apparaître dans des zones sans matière. De plus, l'utilisation de ce modèle est intrinsèquement liée à la méthode SIMP. C'est le seul modèle qui ne supprime pas totalement les charnières à un nœud. Le second est facile à implémenter. Le modèle n'est plus aussi dépendant de la méthode d'OT. Toutefois, la modélisation simpliste ne permet pas de considérer les motifs topologiques locaux. Le dernier modèle est directement exploitable sous certaines hypothèses. Ce modèle permet de considérer des motifs géométriques locaux, même si la modélisation est perfectible. Le code s'est montré complaisant, fonctionnel et robuste lors de l'ajout des différents modèles. En outre, plusieurs propriétés du processus d'OTR sont vérifiées. À savoir :

- La fonction coût, en permettant au concepteur de choisir s'il préfère minimiser les variations induites par les incertitudes ou le comportement moyen de la topologie. Cette analyse montre qu'il est possible de choisir un poids adapté en fonction des besoins exprimés et les topologies optimisées sont cohérentes en regard des valeurs choisies.
- La répétabilité due aux erreurs lors de l'estimation des moments avec la SMC. Cette étude montre que l'exactitude des estimations des moments statiques influence grandement la conception de référence. Le choix de la taille de l'échantillon est connexe au coût informatique et à l'exactitude voulue.
- Les modes du modèle statistique. Ces dernières permettent d'assigner une quantité d'écart en fonction des motifs géométriques locaux. Ce modèle est aussi plus conforme avec le champ de pseudo-densité finale et de la forme de la topologie.

Qui plus est, les effets des incertitudes épistémiques ont été atténués grâce à la méthode décrite à la sous-section 2.3.2. Il s'ensuit que deux topologies, l'une optimiste et l'autre pessimiste. Ces deux conceptions permettent au concepteur d'avoir plus d'information et de prendre des décisions en fonction de son aversion aux incertitudes. Les deux conceptions de référence sont en accord avec le concept d'incertitude épistémique et avec les définitions des conceptions de référence optimiste et pessimiste.

Les modèles ont permis d'atténuer les effets des imperfections géométriques et d'optimiser la performance de la pièce, à savoir sa souplesse. Les topologies robustes montrent des similarités, celles-ci sont plus étroites à partir de la moitié ($x > L/2$) et ce phénomène

est accentué par l'ajout d'un non-espace de conception. La souplesse est un indicateur qui permet d'évaluer, au moins en partie, les écarts géométriques. Malgré tout, la taille des imperfections restreinte à la taille d'un élément est probablement un facteur limitant quant aux modifications apportées de topologies optimisées et robustes.

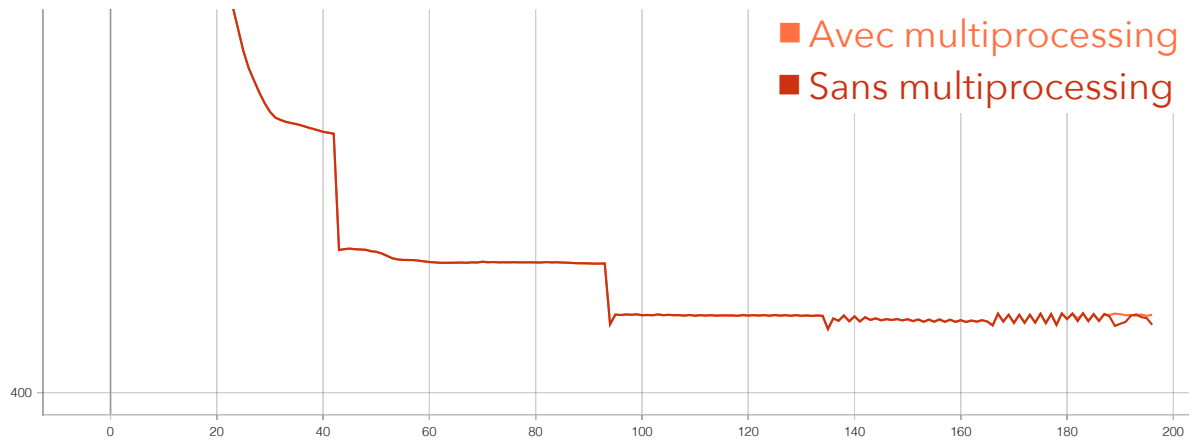


Figure 3.32 – Valeurs de souplesse [Nmm] de \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération pour une topologie obtenue avec ou sans le *multiprocessing*.

Dernièrement, même si cela ne fait pas l'objet d'une section, des incertitudes phénoménologiques ont été recueillies lors du déploiement et de l'utilisation des programmes. La plus importante est lors de l'utilisation d'un ou plusieurs processeurs avec le service de calculs intensifs *Cassiopee*. En effet, des différences infinitésimales apparaissent à la fin du processus d'optimisation, lorsque la valeur de β est la plus élevée. Ces erreurs numériques n'impactent que très peu les conceptions de référence. Sa source exacte est difficile à déterminer, car le comportement n'est pas toujours répétable en fonction de la machine utilisée. Il s'agit probablement de pertes dans la précision arithmétique des copies des objets lors de la distribution des processus lors de leur parallélisation. La figure 3.32 illustre les courbes de la fonction objectif avec ou sans le *multiprocessing* et montre des écarts à la fin de l'optimisation.

Conclusions et perspectives

Dans un premier temps, une revue et une analyse de la littérature ont été effectuées. L'analyse du processus de conception nous a conduits à nous baser sur une approche de conception pour la robustesse (DfRo) appuyé par l'optimisation topologique (OT). L'OT est un outil numérique qui permet de considérer à la fois l'aspect fonctionnel de la pièce et d'optimiser des indicateurs de performances de la topologie. L'optimisation pour une conception robuste (RDO) implique une adaptation des indicateurs pour considérer les effets des incertitudes sur la conception, par l'intermédiaire du calcul des moments statistiques de la réponse devenue incertaine. Dans la mesure où l'optimisation de la souplesse de la topologie se fait au moyen d'algorithme d'optimisation différentiable, la modification intervient dans le calcul du gradient et est dépendante de la méthode de simulation servant à l'estimation de la fonction objectif. Une première limite intervient dans l'atténuation des effets des incertitudes épistémiques, les approches revues conduisent à l'obtention d'une seule topologie : elles manquent de cohérence avec l'esprit de l'incertitude épistémique. De plus, l'atténuation des effets des incertitudes épistémiques est effectuée par l'approche de l'optimisation pour une conception s'appuyant sur la fiabilité (RBDO) et non pour l'RDO, qui est l'un des objectifs de ces travaux. Du point de vue des procédés de fabrication additive (FA), les incertitudes affectent les propriétés mécaniques, le coût, la géométrie, *et cætera*. Parmi ces sources d'incertitudes, celle qui affecte le plus la souplesse d'une topologie (c'est-à-dire sa performance) est la géométrie. C'est pourquoi cette voie a été privilégiée. En outre, la méthode SIMP est adoptée pour la cohérence de la description de la topologie avec la caractérisation expérimentale des imperfections géométriques par une approche volumétrique. L'approche volumétrique est capable de décrire les formes complexes fabriquées par le procédé de FA ou conçues par l'optimisation topologique. C'est pour cela que les modèles quantifiant les écarts géométriques que nous avons développés considèrent les approches utilisant les cartographies basées sur les densités (BDs), qui sont populaires en OT. La majorité des modèles issue de la

littérature altère des hyperparamètres pour affecter les topologies avec des incertitudes. Toutefois, cette approche manque de conformité avec la caractérisation expérimentale des écarts géométriques ou avec la topologie.

Le chapitre 2 propose des solutions aux manques observés. Il présente un cadre méthodologique pour atténuer les effets des incertitudes, qu'elles soient incertitudes aléatoires ou incertitudes épistémiques. Ce cadre se décompose en une taxonomie des niveaux de robustesse atteignable par une conception. Cette taxonomie est basée sur la pilotabilité et la paramétrisation des variables incertaines et est adaptée au contexte de la conception pour X (DfX). Elle oriente la mise en œuvre de la méthode d'optimisation topologique robuste (OTR). La méthodologie proposée met à disposition du concepteur des outils graphiques pour caractériser les différentes sources d'incertitudes (sous la forme d'un diagramme de Venn) et pour la modélisation du processus d'OTR (sous la forme de diagrammes issus d'une adaptation du langage de modélisation de systèmes (SysML)). Ces outils graphiques ont abouti à l'écriture d'un code flexible, permettant d'ajouter facilement : d'autres approches d'OT utilisant une cartographie BD, des modèles d'imperfection géométrique, affecter des paramètres physiques avec l'incertitude, *et cætera*. Dans ce chapitre une méthode d'atténuation des effets des incertitudes épistémiques est développée. Deux conceptions de référence sont obtenues à la fin du processus d'OTR : l'une dite optimiste et l'autre dite pessimiste. Ces deux conceptions octroient au concepteur plus d'information et permettent d'améliorer la prise de décision en fonction de sa tolérance aux incertitudes et à la qualité de la modélisation. Enfin, un modèle des imperfections géométriques a été développé. Ce dernier est caractérisé par une plus grande cohérence de la topologie et de la caractérisation expérimentale des imperfections. Qui plus est, il est capable de décompresser des motifs géométriques locaux grâce à une modélisation par des modes statistiques.

Finalement, le troisième chapitre illustre la mise en pratique des méthodes introduites précédemment au travers d'une étude de cas en deux dimensions. Les résultats soulignent l'importance de considérer un espace de non-conception pour atténuer les effets des incertitudes géométriques, et démontrent l'efficacité de notre modèle de perturbations et d'atténuation des incertitudes épistémiques. En outre, une étude approfondie montre qu'une estimation des moments statistiques plus ou moins exacts conduit à des modifications importantes des topologies. Cette dernière exhibe une convergence des résultats si une taille d'échantillon assez importante est utilisée. Dans l'ensemble, ces travaux confirment la possibilité d'intégrer et d'atténuer les effets des incertitude issue

du procédé de FA dans le processus de conception, afin que la conception soit robuste face aux incertitudes aléatoires et incertitudes épistémiques. La solution technique offre aux concepteurs une approche modulable.

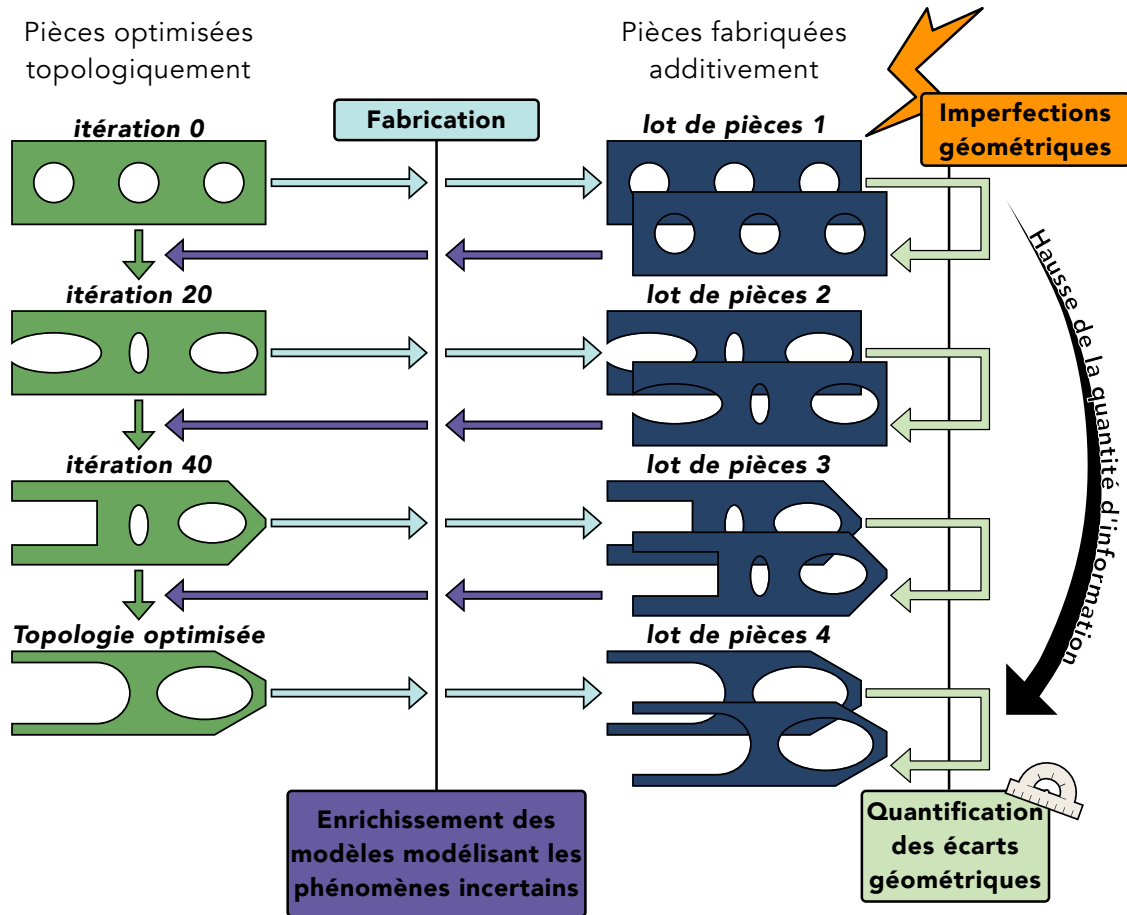


Figure I – Méthode de quantification de l'incertitude (QI) envisagée pour l'optimisation topologique et la fabrication additive.

Néanmoins, plusieurs sujets nécessitent des améliorations. En effet, pour une utilisation industrielle, le remplacement de la simulation de Monte-Carlo (SMC) paraît nécessaire. Cette dernière nécessite une grande taille d'échantillon qui n'est pas compatible avec les coûts de calcul de simulations 3D. En outre, il sera intéressant de développer les modèles pour des tailles et formes de défauts différents sur des maillages non structurés. Afin de rendre la modélisation toujours plus réaliste, d'autres sources d'incertitudes doivent être considérées, comme le module *Young*. De même, la physique doit être plus représentative, en utilisant une formulation basée sur l'élasticité non linéaire. Enfin, l'utilisation de données expérimentales pour recalibrer les modèles d'imperfections géométriques doit

être considérée. À cette fin, nous avons développé une méthodologie pour la vérification, la validation et quantification de l'incertitude (QI), qui n'a, malheureusement, pas été déployée. La figure I illustre cette méthode. Cette méthode consiste à faire des instantanés des conceptions de référence à différentes itérations du processus d'OTR. Ces topologies intermédiaires sont ensuite fabriquées avec le processus de FA en vue de quantifier et mesurer les écarts géométriques. Dans un troisième temps, ces données sont utilisées pour enrichir les modèles des phénomènes incertains. Cette méthode est en accord avec la DfX, où le procédé guide la conception au travers de l'RDO. Qui plus est, l'incertitude épistémique a toute sa place, cette dernière diminue progressivement au fur et à mesure que la quantité de données augmente, diminuant le manque d'information. Cette méthode peut être mise en parallèle des méthodes d'apprentissage par transfert (*transfer learning*) si des données sont disponibles pour de multiples cas d'études.

Bibliographie

- [Al-Meslemi, 2021] Al-Meslemi, Y. I. (2021). *Modélisation prédictive pour la Fabrication Additive métallique : Caractéristiques clés et applications à la caractérisation de la porosité*. Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay.
- [Allaire *et al.*, 2019] Allaire, G., Cavallina, L., Miyake, N., Oka, T. et Yachimura, T. (2019). The homogenization method for topology optimization of structures : Old and new. *Interdisciplinary Information Sciences*, 25(2) :75–146.
- [Allaire *et al.*, 2021] Allaire, G., Dapogny, C. et Jouve, F. (2021). Shape and topology optimization. In Bonito, A. et Nochetto, R. H., éditeurs : *Geometric partial differential equations, part II*, volume 22 de *Handbook of Numerical Analysis*.
- [Allaire et Jakabčín, 2018] Allaire, G. et Jakabčín, L. (2018). Taking into account thermal residual stresses in topology optimization of structures built by additive manufacturing. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28(12) :2313–2366.
- [André *et al.*, 1984] André, J., Le Méhauté, A. et De Witte, O. (1984). Dispositif pour réaliser un modèle de pièce industrielle.
- [Andreassen *et al.*, 2011] Andreassen, E., Clausen, A., Schevenels, M., Lazarov, B. S. et Sigmund, O. (2011). Efficient topology optimization in matlab using 88 lines of code. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(1) :1–16.
- [Asadollahiyazdi, 2018] Asadollahiyazdi, E. (2018). *Integrated Design of Additive Manufacturing Based on Design for Manufacturing and Skin-skeleton Models*. Thèse de doctorat, Université de Technologie de Troyes.
- [Asadpoure *et al.*, 2011] Asadpoure, A., Tootkaboni, M. et Guest, J. K. (2011). Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness – application to truss structures. *Computers & Structures*, 89(11) :1131–1141. Computational Fluid and Solid Mechanics 2011.

- [ASME, 2022] ASME (2022). Verification, validation, and uncertainty quantification terminology in computational modeling and simulation. Standard VVUQ 1-2022, The American Society of Mechanical Engineers.
- [Astolfi *et al.*, 2016] Astolfi, C.-P., Constantin, É. et Moulet, A. (2016). *Fabrication additive : mobiliser les forces françaises*. Ecole nationale supérieure des Mines, Paris.
- [Bagul et Chesneau, 2021] Bagul, Y. J. et Chesneau, C. (2021). Sigmoid functions for the smooth approximation to the absolute value function. *Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis*, 7(1) :12–19.
- [Baratta *et al.*, 2023] Baratta, I. A., Dean, J. P., Dokken, J. S., Habera, M., Hale, J. S., Richardson, C. N., Rognes, M. E., Scroggs, M. W., Sime, N. et Wells, G. N. (2023). DOLFINx : the next generation FEniCS problem solving environment. preprint.
- [Behzadi et Ilieş, 2021] Behzadi, M. M. et Ilieş, H. T. (2021). Real-time topology optimization in 3d via deep transfer learning. *Computer-Aided Design*, 135 :103014.
- [Bendsøe et Sigmund, 2003] Bendsøe, M. P. et Sigmund, O. (2003). *Topology optimization : theory, methods, and applications*. Springer Science & Business Media.
- [Bertolino et Montemurro, 2022] Bertolino, G. et Montemurro, M. (2022). Two-scale topology optimisation of cellular materials under mixed boundary conditions. *International Journal of Mechanical Sciences*, 216 :106961.
- [Beyer et Sendhoff, 2007] Beyer, H.-G. et Sendhoff, B. (2007). Robust optimization – a comprehensive survey. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(33) :3190–3218.
- [Biggs *et al.*, 2018] Biggs, G., Juknevičius, T., Armonas, A. et Post, K. (2018). Integrating safety and reliability analysis into mbse : overview of the new proposed omg standard. *INCOSE International Symposium*, 28(1) :1322–1336.
- [Biggs *et al.*, 2019] Biggs, G., Post, K., Armonas, A., Yakymets, N., Juknevičius, T. et Berres, A. (2019). Omg standard for integrating safety and reliability analysis into mbse : Concepts and applications. *INCOSE International Symposium*, 29(1) :159–173.
- [Brackett *et al.*, 2011] Brackett, D., Ashcroft, I. et Hague, R. (2011). Topology optimization for additive manufacturing. *In 2011 International Solid Freeform Fabrication Symposium*. University of Texas at Austin.
- [Bruggi, 2008] Bruggi, M. (2008). On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 36(2) :125–141.

- [Chen et Chen, 2011] Chen, S. et Chen, W. (2011). A new level-set based approach to shape and topology optimization under geometric uncertainty. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 44(1) :1–18.
- [Chen et al., 2024] Chen, Y., Monteiro, E., Koutiri, I. et Favier, V. (2024). Stress-constrained topology optimization using the constrained natural element method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 67(4) :65.
- [Chmielewska et al., 2022] Chmielewska, A., Jahadakbar, A., Wysocki, B., Elahinia, M., Świąszkowski, W. et Dean, D. (2022). Chemical polishing of additively manufactured, porous, nickel–titanium skeletal fixation plates. *3D Printing and Additive Manufacturing*, 9(4) :269–277.
- [Choi, 2005] Choi, H.-J. (2005). *A robust design method for model and propagated uncertainty*. Thèse de doctorat, Georgia Institute of Technology.
- [Costa et al., 2018] Costa, G., Montemurro, M. et Pailhès, J. (2018). A 2d topology optimisation algorithm in nurbs framework with geometric constraints. *International Journal of Mechanics and Materials in Design*, 14(4) :669–696.
- [Dalklint et al., 2024] Dalklint, A., Alexandersen, J., Frederiksen, A. H., Poullos, K. et Sigmund, O. (2024). Topology optimization of contact-aided thermo-mechanical regulators.
- [Dantan et al., 2017] Dantan, J.-Y., Huang, Z., Goka, E., Homri, L., Etienne, A., Bonnet, N. et Rivette, M. (2017). Geometrical variations management for additive manufactured product. *CIRP Annals*, 66(1) :161–164.
- [Dapogny et al., 2023] Dapogny, C., Iutzeler, F., Meda, A. et Thibert, B. (2023). Entropy-regularized wasserstein distributionally robust shape and topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 66(3) :42.
- [De et al., 2020] De, S., Hampton, J., Maute, K. et Doostan, A. (2020). Topology optimization under uncertainty using a stochastic gradient-based approach. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(5) :2255–2278.
- [Elahi et al., 2022] Elahi, S., Tavakoli, R., Boukellal, A., Isensee, T., Romero, I. et Tourret, D. (2022). Multiscale simulation of powder-bed fusion processing of metallic alloys. *Computational Materials Science*, 209 :111383.
- [Faes et al., 2021] Faes, M. G., Daub, M., Marelli, S., Patelli, E. et Beer, M. (2021). Engineering analysis with probability boxes : A review on computational methods. *Structural Safety*, 93 :102092.

- [Fan *et al.*, 2019] Fan, Z., Xia, L., Lai, W., Xia, Q. et Shi, T. (2019). Evolutionary topology optimization of continuum structures with stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(2) :647–658.
- [Ferrari et Sigmund, 2020] Ferrari, F. et Sigmund, O. (2020). A new generation 99 line matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3d. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 62(4) :2211–2228.
- [Ferson *et al.*, 2004] Ferson, S., Joslyn, C. A., Helton, J. C., Oberkampf, W. L. et Sentz, K. (2004). Summary from the epistemic uncertainty workshop : consensus amid diversity. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1) :355–369. Alternative Representations of Epistemic Uncertainty.
- [Ferson *et al.*, 2003] Ferson, S., Kreinovich, V., Ginzburg, L. et Sentz, F. (2003). Constructing probability boxes and dempster-shafer structures. Rapport technique, Sandia National Lab.(SNL-NM), Albuquerque, NM (United States) ; Sandia.
- [Fish et Belytschko, 2007] Fish, J. et Belytschko, T. (2007). *Finite Element Formulation for Vector Field Problems – Linear Elasticity*, chapitre 9, pages 215–247. John Wiley & Sons, Ltd.
- [Freitag *et al.*, 2022] Freitag, S., Peters, S., Edler, P. et Meschke, G. (2022). Reliability-based optimization of structural topologies using artificial neural networks. *Probabilistic Engineering Mechanics*, page 103356.
- [Friedenthal *et al.*, 2014] Friedenthal, S., Moore, A. et Steiner, R. (2014). *A practical guide to SysML : the systems modeling language*. Morgan Kaufmann.
- [Fries et Belytschko, 2010] Fries, T.-P. et Belytschko, T. (2010). The extended/generalized finite element method : An overview of the method and its applications. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84(3) :253–304.
- [Gardan, 2015] Gardan, J. (2015). Additive manufacturing technologies : state of the art and trends. *Additive Manufacturing Handbook*, pages 149–168.
- [Geuzaine et Remacle, 2009] Geuzaine, C. et Remacle, J.-F. (2009). Gmsh : A 3-d finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11) :1309–1331.
- [Giulio Costa et Pailhès, 2021] Giulio Costa, M. M. et Pailhès, J. (2021). Nurbs hyper-surfaces for 3d topology optimization problems. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 28(7) :665–684.
- [Gorelick et Ozsvald, 2020] Gorelick, M. et Ozsvald, I. (2020). *High Performance Python : Practical Performant Programming for Humans*. O’Reilly Media.

- [Gorguluarslan *et al.*, 2019] Gorguluarslan, R. M., Grandhi, R. V., Choi, H.-J. et Choi, S.-K. (2019). Prediction assessment and validation of multiscale models for additively manufactured lattice structures under uncertainty. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 33(3) :1365–1379.
- [Gouvernement du Canada, 2024] Gouvernement du Canada (2024). Termium plus®. <https://www.btb.termiumplus.gc.ca/tpv2alpha/alpha-fra.html?lang=fra>.
- [Harris *et al.*, 2020] Harris, C. R., Millman, K. J., van der Walt, S. J., Gommers, R., Virtanen, P., Cournapeau, D., Wieser, E., Taylor, J., Berg, S., Smith, N. J., Kern, R., Picus, M., Hoyer, S., van Kerkwijk, M. H., Brett, M., Haldane, A., del Río, J. F., Wiebe, M., Peterson, P., Gérard-Marchant, P., Sheppard, K., Reddy, T., Weckesser, W., Abbasi, H., Gohlke, C. et Oliphant, T. E. (2020). Array programming with NumPy. *Nature*, 585(7825) :357–362.
- [Helton *et al.*, 2004] Helton, J., Johnson, J. et Oberkampf, W. (2004). An exploration of alternative approaches to the representation of uncertainty in model predictions. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1) :39–71. Alternative Representations of Epistemic Uncertainty.
- [Helton et Oberkampf, 2004] Helton, J. et Oberkampf, W. (2004). Alternative representations of epistemic uncertainty. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1-3) :1–10.
- [Holmberg *et al.*, 2013] Holmberg, E., Torstenfelt, B. et Klarbring, A. (2013). Stress constrained topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(1) :33–47.
- [Huang et Li, 2021] Huang, X. et Li, W. (2021). A new multi-material topology optimization algorithm and selection of candidate materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 386 :114114.
- [ISO, 2016] ISO (2016). Fabrication additive – principe généraux – partie 2 : Vue d’ensemble des catégories de procédés et des matières premières. Standard 17296-2:2016-12 FR, International Organization for Standardization.
- [ISO/ASTM, 2021] ISO/ASTM (2021). Fabrication additive – principe généraux – fondamentaux et vocabulaire. Standard 52900:2021 FR, International Organization for Standardization.
- [Jang *et al.*, 2022] Jang, S., Yoo, S. et Kang, N. (2022). Generative design by reinforcement learning : Enhancing the diversity of topology optimization designs. *Computer-Aided Design*, 146 :103225.

- [Jansen *et al.*, 2013] Jansen, M., Lombaert, G., Diehl, M., Lazarov, B. S., Sigmund, O. et Schevenels, M. (2013). Robust topology optimization accounting for misplacement of material. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 47(3) :317–333.
- [Jansen *et al.*, 2015] Jansen, M., Lombaert, G. et Schevenels, M. (2015). Robust topology optimization of structures with imperfect geometry based on geometric nonlinear analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 285 :452–467.
- [Javed et Rout, 2014] Javed, A. et Rout, B. (2014). Tolerance range selection of topologically optimized structures with the effects of uncertainties of manufacturing process. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, 228(18) :3441–3461.
- [Ji, 2003] Ji, T. (2003). Concepts for designing stiffer structures. *Structural Engineer*, 81(21) :36–42.
- [Johnson, 2007] Johnson, S. G. (2007). The NLopt nonlinear-optimization package. <https://github.com/stevengj/nlopt>.
- [Kang *et al.*, 2019] Kang, Z., Wu, C., Luo, Y. et Li, M. (2019). Robust topology optimization of multi-material structures considering uncertain graded interface. *Composite Structures*, 208 :395–406.
- [Komini *et al.*, 2023] Komini, L., Langelaar, M. et Kriegesmann, B. (2023). Robust topology optimization considering part distortion and process variability in additive manufacturing. *Advances in Engineering Software*, 186 :103551.
- [Konczal et Vinarcik, 2007] Konczal, K. et Vinarcik, M. (2007). The use of sysml activity diagrams to support taguchi methods & robust design.
- [Lazarov *et al.*, 2011] Lazarov, B. S., Schevenels, M. et Sigmund, O. (2011). Robust design of large-displacement compliant mechanisms. *Mechanical Sciences*, 2(2) :175–182.
- [Lazarov *et al.*, 2012] Lazarov, B. S., Schevenels, M. et Sigmund, O. (2012). Topology optimization considering material and geometric uncertainties using stochastic collocation methods. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 46(4) :597–612.
- [Le *et al.*, 2010] Le, C., Norato, J., Bruns, T., Ha, C. et Tortorelli, D. (2010). Stress-based topology optimization for continua. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 41(4) :605–620.
- [Lemaire, 2014] Lemaire, M. (2014). *Mécanique et incertain*. ISTE Group.
- [Lewandowski et Seifi, 2016] Lewandowski, J. J. et Seifi, M. (2016). Metal additive manufacturing : A review of mechanical properties. *Annual Review of Materials Research*, 46(Volume 46, 2016) :151–186.

- [Li *et al.*, 2022] Li, Z., Wang, L. et Luo, Z. (2022). A feature-driven robust topology optimization strategy considering movable non-design domain and complex uncertainty. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 401 :115658.
- [Liu et Kang, 2018] Liu, P. et Kang, Z. (2018). Integrated topology optimization of multi-component structures considering connecting interface behavior. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 341 :851–887.
- [Luh *et al.*, 2011] Luh, G.-C., Lin, C.-Y. et Lin, Y.-S. (2011). A binary particle swarm optimization for continuum structural topology optimization. *Applied Soft Computing*, 11(2) :2833–2844. The Impact of Soft Computing for the Progress of Artificial Intelligence.
- [Mahadevan *et al.*, 2022] Mahadevan, S., Nath, P. et Hu, Z. (2022). Uncertainty Quantification for Additive Manufacturing Process Improvement : Recent Advances. *ASCE-ASME J Risk and Uncert in Engrg Sys Part B Mech Engrg*, 8(1) :010801.
- [Maute, 2014] Maute, K. (2014). *Topology Optimization under Uncertainty*, pages 457–471. Springer Vienna, Vienna.
- [Meng *et al.*, 2020] Meng, Z., Pang, Y., Pu, Y. et Wang, X. (2020). New hybrid reliability-based topology optimization method combining fuzzy and probabilistic models for handling epistemic and aleatory uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 363 :112886.
- [Meng *et al.*, 2021] Meng, Z., Wu, Y., Wang, X., Ren, S. et Yu, B. (2021). Robust topology optimization methodology for continuum structures under probabilistic and fuzzy uncertainties. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(8) : 2095–2111.
- [Montemurro, 2022] Montemurro, M. (2022). On the structural stiffness maximisation of anisotropic continua under inhomogeneous neumann–dirichlet boundary conditions. *Composite Structures*, 287 :115289.
- [Moroni et Petrò, 2018] Moroni, G. et Petrò, S. (2018). Segmentation-free geometrical verification of additively manufactured components by x-ray computed tomography. *CIRP Annals*, 67(1) :519–522.
- [Moroni *et al.*, 2017] Moroni, G., Petrò, S. et Polini, W. (2017). Geometrical product specification and verification in additive manufacturing. *CIRP Annals*, 66(1) :157–160.
- [Munk *et al.*, 2015] Munk, D. J., Vio, G. A. et Steven, G. P. (2015). Topology and shape optimization methods using evolutionary algorithms : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 52(3) :613–631.

- [Nath *et al.*, 2020] Nath, P., Olson, J. D., Mahadevan, S. et Lee, Y.-T. T. (2020). Optimization of fused filament fabrication process parameters under uncertainty to maximize part geometry accuracy. *Additive Manufacturing*, 35 :101331.
- [Noal *et al.*, 2024a] Noal, F., Etienne, A., Gardan, J. et Dantan, J.-Y. (2024a). Uncertainty taxonomy for topology optimisation in additive manufacturing. *Procedia CIRP*, 128 :66–71. 34th CIRP Design Conference.
- [Noal *et al.*, 2024b] Noal, F., Etienne, A., Montemurro, M., Dantan, J.-Y. et Gardan, J. (2024b). A density-based topology optimisation method including geometrical uncertainties. *ECCOMAS*.
- [Norato *et al.*, 2015] Norato, J., Bell, B. et Tortorelli, D. (2015). A geometry projection method for continuum-based topology optimization with discrete elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 293 :306–327.
- [Ogawa et Yamada, 2022] Ogawa, S. et Yamada, T. (2022). Topology optimization for transient thermomechanical coupling problems. *Applied Mathematical Modelling*, 109 : 536–554.
- [Olson, 1997] Olson, G. B. (1997). Computational design of hierarchically structured materials. *Science*, 277(5330) :1237–1242.
- [Pahl *et al.*, 1996] Pahl, G., Beitz, W., Feldhusen, J., Grote, K.-H. *et al.* (1996). *Engineering design : a systematic approach*, volume 3. Springer.
- [París *et al.*, 2009] París, J., Navarrina, F., Colominas, I. et Castelleiro, M. (2009). Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 39(4) :419–437.
- [Paté-Cornell, 1996] Paté-Cornell, M. (1996). Uncertainties in risk analysis : Six levels of treatment. *Reliability Engineering & System Safety*, 54(2) :95–111. Treatment of Aleatory and Epistemic Uncertainty.
- [Peng *et al.*, 2018] Peng, X., Li, J., Jiang, S. et Liu, Z. (2018). Robust topology optimization of continuum structures with loading uncertainty using a perturbation method. *Engineering Optimization*, 50(4) :584–598.
- [Prathyusha et Raghu Babu, 2022] Prathyusha, A. et Raghu Babu, G. (2022). A review on additive manufacturing and topology optimization process for weight reduction studies in various industrial applications. *Materials Today : Proceedings*, 62 :109–117. International Conference on Advances in Materials and Mechanical Engineering.
- [Primo *et al.*, 2017] Primo, T., Calabrese, M., Del Prete, A. et Anglani, A. (2017). Additive manufacturing integration with topology optimization methodology for innova-

- tive product design. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 93(1) :467–479.
- [Python Software Foundation, 2023] Python Software Foundation (2023). Python language reference, version : 3.10.12. <http://www.python.org>.
- [Quarteroni *et al.*, 2006] Quarteroni, A., Saleri, F., Gervasio, P. *et al.* (2006). *Scientific computing with MATLAB and Octave*, volume 3. Springer.
- [Rajaguru *et al.*, 2020] Rajaguru, K., Karthikeyan, T. et Vijayan, V. (2020). Additive manufacturing - state of art. *Materials Today : Proceedings*, 21 :628–633.
- [Reddy K. *et al.*, 2016] Reddy K., S. N., Ferguson, I., Frecker, M., Simpson, T. W. et Dickman, C. J. (2016). Topology optimization software for additive manufacturing : A review of current capabilities and a real-world example. volume Volume 2A : 42nd Design Automation Conference de *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. American Society of Mechanical Engineers.
- [Regenwetter *et al.*, 2022] Regenwetter, L., Nobari, A. H. et Ahmed, F. (2022). Deep generative models in engineering design : A review. *Journal of Mechanical Design*, 144(7).
- [Roy et Oberkampf, 2011] Roy, C. J. et Oberkampf, W. L. (2011). A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(25) :2131–2144.
- [Rozvany, 2009] Rozvany, G. I. N. (2009). A critical review of established methods of structural topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 37(3) :217–237.
- [Sato *et al.*, 2019] Sato, Y., Izui, K., Yamada, T., Nishiwaki, S., Ito, M. et Kogiso, N. (2019). Reliability-based topology optimization under shape uncertainty modeled in eulerian description. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 59(1) :75–91.
- [Schevenels *et al.*, 2011] Schevenels, M., Lazarov, B. et Sigmund, O. (2011). Robust topology optimization accounting for spatially varying manufacturing errors. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(49) :3613–3627.
- [Schuëller et Jensen, 2008] Schuëller, G. et Jensen, H. (2008). Computational methods in optimization considering uncertainties – an overview. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(1) :2–13. Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties.

- [Seifi *et al.*, 2016] Seifi, M., Salem, A., Beuth, J., Harrysson, O. et Lewandowski, J. J. (2016). Overview of materials qualification needs for metal additive manufacturing. *JOM*, 68(3) :747–764.
- [Sigmund, 2007] Sigmund, O. (2007). Morphology-based black and white filters for topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33(4) :401–424.
- [Sigmund, 2009] Sigmund, O. (2009). Manufacturing tolerant topology optimization. *Acta Mechanica Sinica*, 25(2) :227–239.
- [Sigmund et Maute, 2013] Sigmund, O. et Maute, K. (2013). Topology optimization approaches. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(6) :1031–1055.
- [Skander *et al.*, 2008] Skander, A., Roucoules, L. et Klein Meyer, J. S. (2008). Design and manufacturing interface modelling for manufacturing processes selection and knowledge synthesis in design. *The international journal of advanced manufacturing technology*, 37(5) :443–454.
- [Stefanou, 2009] Stefanou, G. (2009). The stochastic finite element method : Past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9) : 1031–1051.
- [Svanberg, 1987] Svanberg, K. (1987). The method of moving asymptotes—a new method for structural optimization. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2) :359–373.
- [Technical University of Denmark, 2024] Technical University of Denmark (2024). TopOpt. <https://www.topopt.mek.dtu.dk>.
- [The MathWorks Inc., 2023] The MathWorks Inc. (2023). Matlab version : 23.2.0.2391609 (r2023b) update 2. <https://www.mathworks.com>.
- [Thunnissen, 2005] Thunnissen, D. P. (2005). *Propagating and mitigating uncertainty in the design of complex multidisciplinary systems*. Thèse de doctorat, California Institute of Technology.
- [Tony F. Chan et Leveque, 1983] Tony F. Chan, G. H. G. et Leveque, R. J. (1983). Algorithms for computing the sample variance : Analysis and recommendations. *The American Statistician*, 37(3) :242–247.
- [Torres *et al.*, 2021] Torres, A. P., Warner, J. E., Aguiló, M. A. et Guest, J. K. (2021). Robust topology optimization under loading uncertainties via stochastic reduced order models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 122(20) : 5718–5743.

- [van Dijk *et al.*, 2013] van Dijk, N. P., Maute, K., Langelaar, M. et van Keulen, F. (2013). Level-set methods for structural topology optimization : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 48(3) :437–472.
- [Venturi et Taylor, 2023] Venturi, F. et Taylor, R. (2023). Additive manufacturing in the context of repeatability and reliability. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 32(15) :6589–6609.
- [Wang et Gao, 2020] Wang, D. et Gao, W. (2020). Robust topology optimization under multiple independent uncertainties of loading positions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 121(22) :4944–4970.
- [Wang *et al.*, 2011] Wang, F., Lazarov, B. S. et Sigmund, O. (2011). On projection methods, convergence and robust formulations in topology optimization. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(6) :767–784.
- [Wang *et al.*, 2020] Wang, Z., Jiang, C., Liu, P., Yang, W., Zhao, Y., Horstemeyer, M. F., Chen, L.-Q., Hu, Z. et Chen, L. (2020). Uncertainty quantification and reduction in metal additive manufacturing. *npj Computational Materials*, 6(1) :175.
- [Wei *et al.*, 2010] Wei, P., Wang, M. Y. et Xing, X. (2010). A study on x-fem in continuum structural optimization using a level set model. *Computer-Aided Design*, 42(8) :708–719. Application-driven Shape Development.
- [Wu *et al.*, 2021] Wu, J., Sigmund, O. et Groen, J. P. (2021). Topology optimization of multi-scale structures : a review. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 63(3) :1455–1480.
- [Xia *et al.*, 2018] Xia, L., Xia, Q., Huang, X. et Xie, Y. M. (2018). Bi-directional evolutionary structural optimization on advanced structures and materials : A comprehensive review. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 25(2) :437–478.
- [Xu et Dang, 2019] Xu, J. et Dang, C. (2019). A new bivariate dimension reduction method for efficient structural reliability analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 115 :281–300.
- [Yago *et al.*, 2022] Yago, D., Cante, J., Lloberas-Valls, O. et Oliver, J. (2022). Topology optimization methods for 3d structural problems : A comparative study. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 29(3) :1525–1567.
- [Zegard et Paulino, 2016] Zegard, T. et Paulino, G. H. (2016). Bridging topology optimization and additive manufacturing. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 53(1) :175–192.

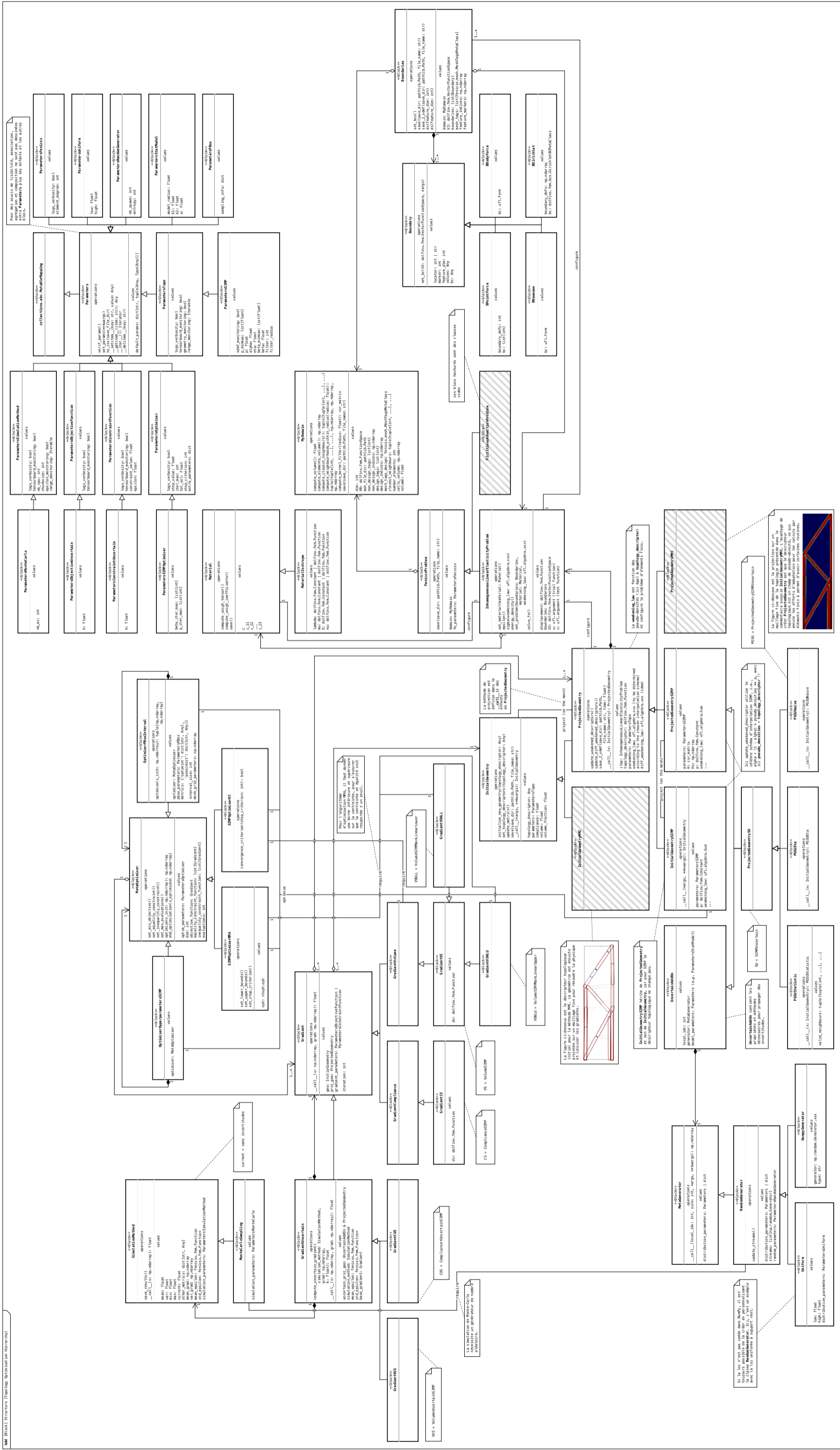
- [Zhang *et al.*, 2017a] Zhang, W., Chen, J., Zhu, X., Zhou, J., Xue, D., Lei, X. et Guo, X. (2017a). Explicit three dimensional topology optimization via moving morphable void (mmv) approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 322 : 590–614.
- [Zhang *et al.*, 2017b] Zhang, W., Li, D., Yuan, J., Song, J. et Guo, X. (2017b). A new three-dimensional topology optimization method based on moving morphable components (mmcs). *Computational Mechanics*, 59(4) :647–665.
- [Zhao *et al.*, 2019] Zhao, Q., Zhang, H., Zhang, T., Hua, Q., Yuan, L. et Wang, W. (2019). An efficient strategy for non-probabilistic reliability-based multi-material topology optimization with evidence theory. *Acta Mechanica Solida Sinica*, 32(6) : 803–821.
- [Zhou *et al.*, 2019] Zhou, M., Liu, Y. et Lin, Z. (2019). Topology optimization of thermal conductive support structures for laser additive manufacturing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 353 :24–43.
- [Zhu *et al.*, 2021] Zhu, J., Zhou, H., Wang, C., Zhou, L., Yuan, S. et Zhang, W. (2021). A review of topology optimization for additive manufacturing : Status and challenges. *Chinese Journal of Aeronautics*, 34(1) :91–110.
- [Zhu *et al.*, 2017] Zhu, Z., Keimasi, S., Anwer, N., Mathieu, L. et Qiao, L. (2017). *Review of Shape Deviation Modeling for Additive Manufacturing*, pages 241–250. Springer International Publishing, Cham.
- [Zhu *et al.*, 2016] Zhu, Z., Qiao, L. et Anwer, N. (2016). An improved tolerance analysis method based on skin model shapes of planar parts. *Procedia CIRP*, 56 :237–242. The 9th International Conference on Digital Enterprise Technology – Intelligent Manufacturing in the Knowledge Economy Era.

Annexe

Sommaire du chapitre

| | | |
|---|---|-----|
| A | Diagramme de définition de bloc | 171 |
| B | Diagramme d'activité sans incertitudes | 173 |
| C | Diagramme d'activité avec incertitudes | 176 |
| D | Données supplémentaires pour la section 3.1 | 179 |
| E | Données supplémentaires pour la section 3.2 | 182 |

A Diagramme de définition de bloc



Pour des détails de l'API, consultez le fichier de documentation approprié et consultez le code source des classes de base.

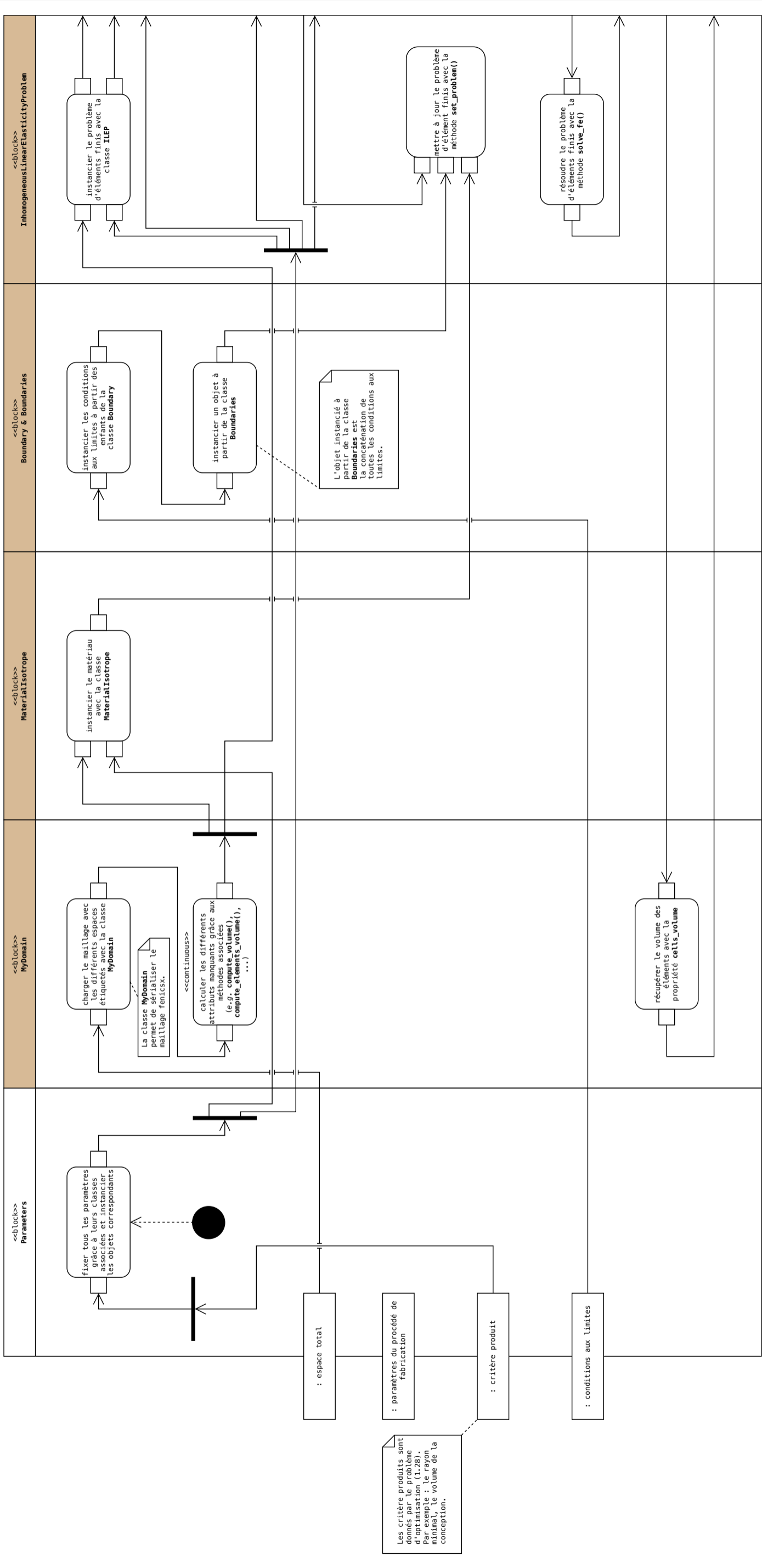
La figure ci-dessous est le diagramme hiérarchique initial pour le module...

Si la loi n'est pas écrite dans NumPy, il est toujours possible de la coder en personnalisant avec la loi définie à l'appartenance...

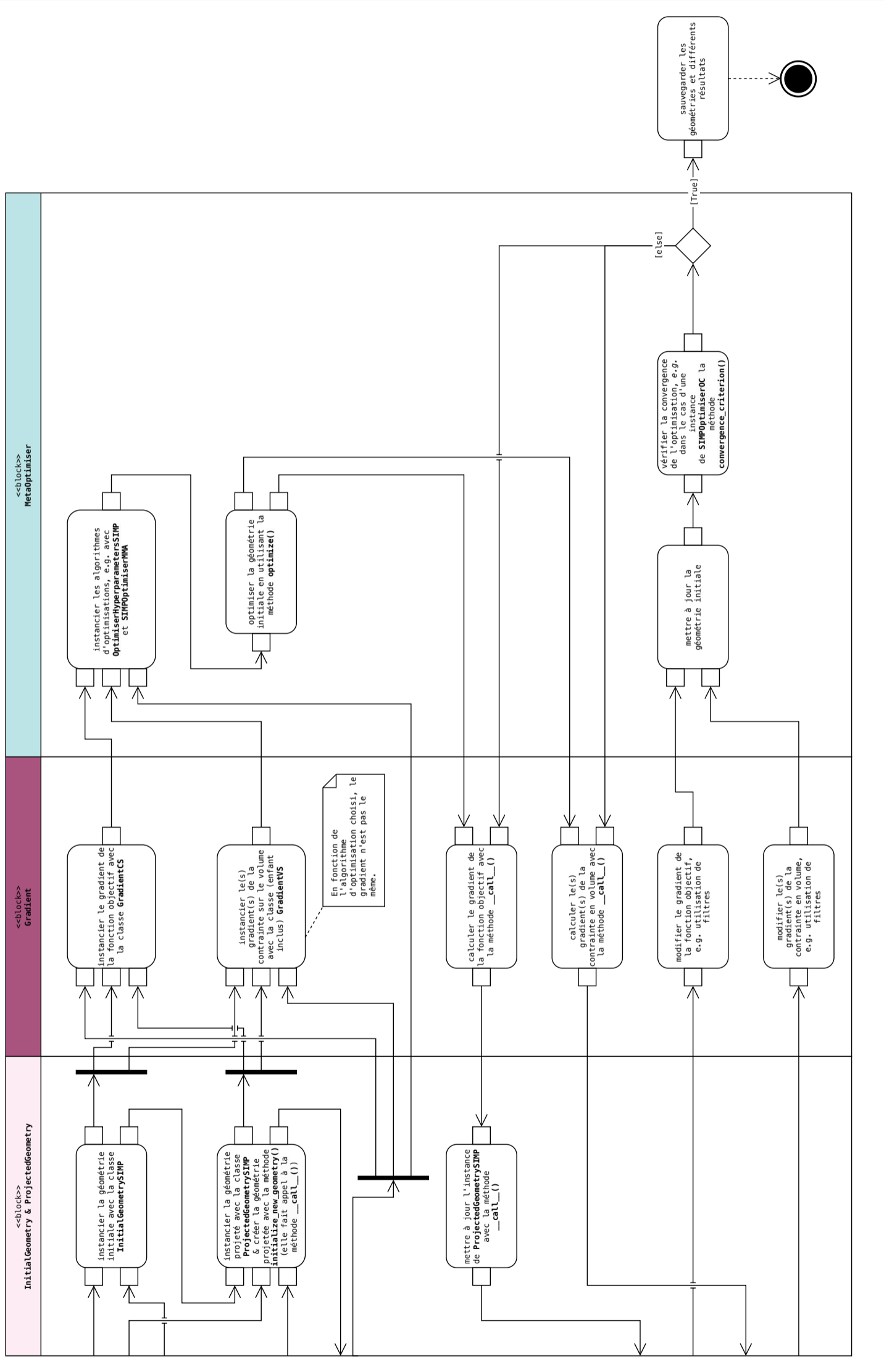
La figure ci-dessous est le diagramme hiérarchique initial pour le module...

PSU = ProjectGeometry2DParameterSet

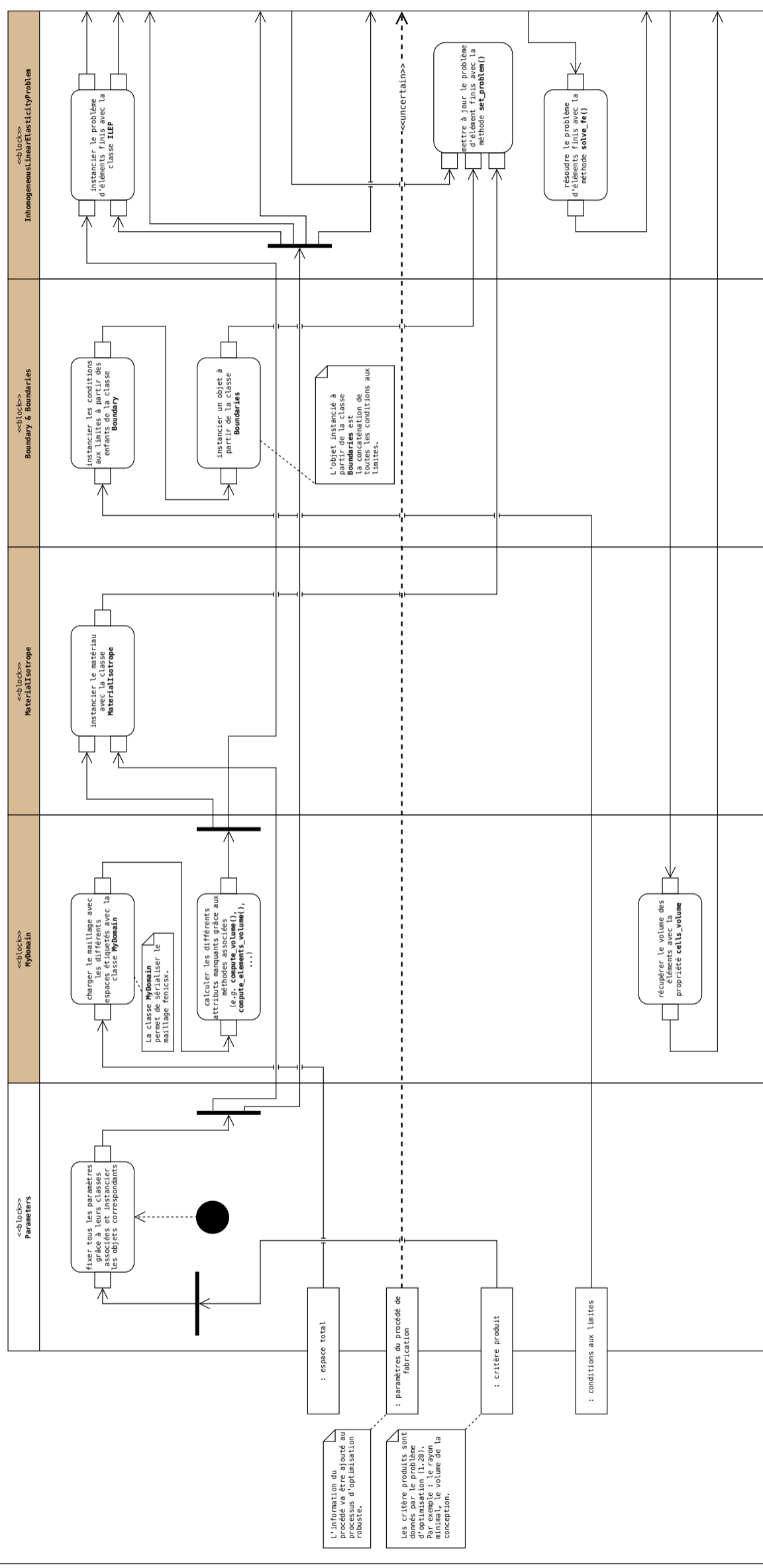
B Diagramme d'activité sans incertitudes



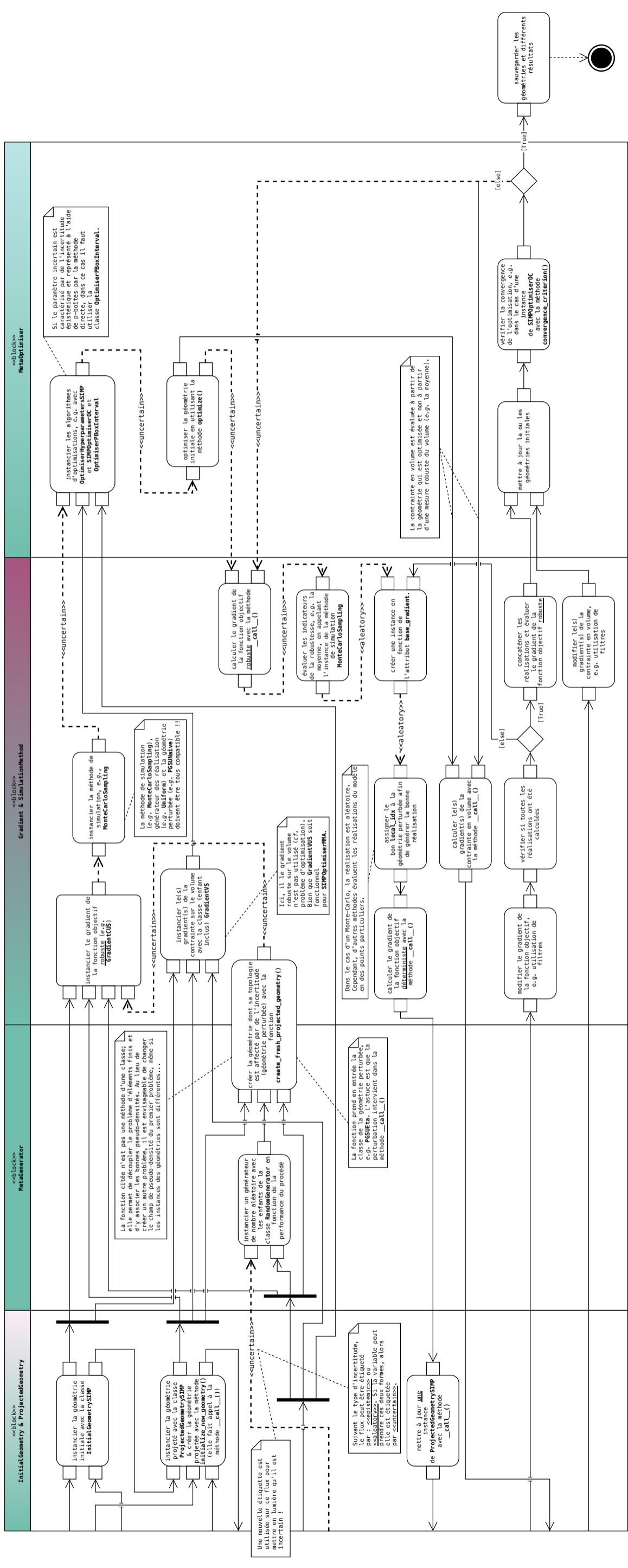
act [Activity] Optimise Design Without Uncertainties



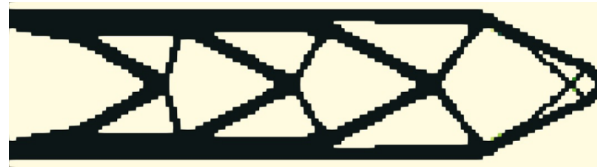
C Diagramme d'activité avec incertitudes



act [Activity] Optimise Design With Uncertainties



D Données supplémentaires pour la section 3.1

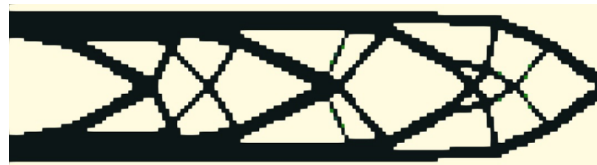


(a) $c_{\text{ept}} = 393$ Nmm avec un espace de non-conception.

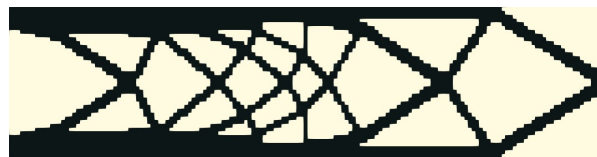


(b) $c_{\text{ept}} = 393$ Nmm sans un espace de non-conception.

Figure D.1 – Topologies optimisées obtenues avec les CO.

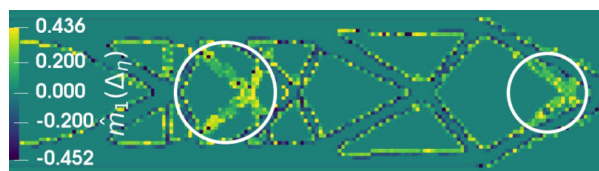


(a) $c_{\text{ept}} = 372$ Nmm avec un espace de non-conception.

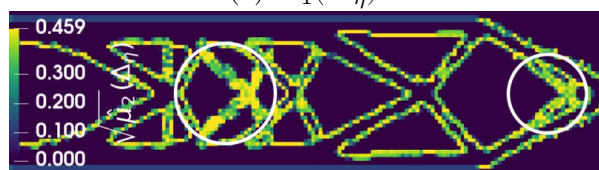


(b) $c_{\text{ept}} = 395$ Nmm sans un espace de non-conception.

Figure D.2 – Topologie optimisée obtenue avec la MAM.



(a) $\hat{m}_1(\Delta_\eta)$.



(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_\eta)}$.

Figure D.3 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle affectant η pour la topologie 3.5a.

E Données supplémentaires pour la section 3.2

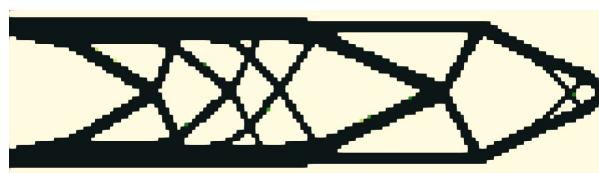
(a) $c_{\text{ept}} = 403$ Nmm avec un espace de non-conception.(b) $c_{\text{ept}} = 405$ Nmm sans un espace de non-conception.

Figure E.1 – Topologies optimisées obtenues avec les CO.

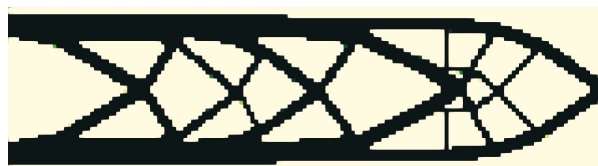
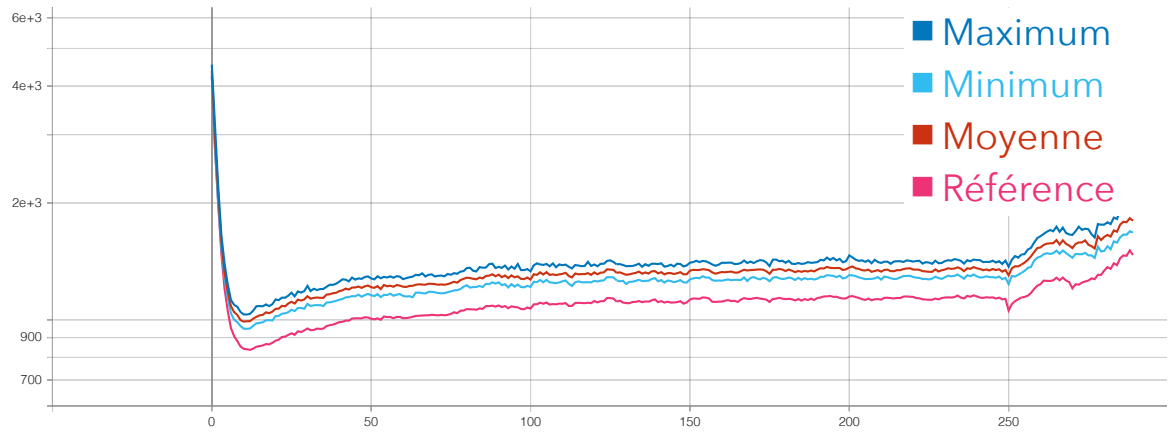
(a) $c_{\text{ept}} = 385$ Nmm avec un espace de non-conception.(b) $c_{\text{ept}} = 418$ Nmm sans un espace de non-conception.

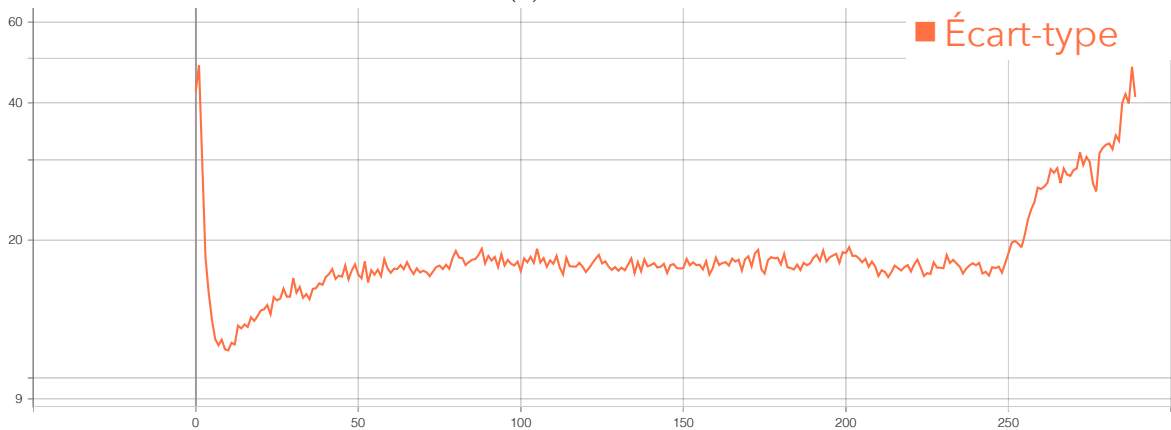
Figure E.2 – Topologie optimisée obtenue avec la MAM.

Table E.1 – Souplesse [Nmm] obtenue pour toutes les valeurs de k et avec les CO.

| k | c_{ref} | $\hat{m}_1(\Upsilon)$ | $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$ | $\hat{\text{m}}\text{ax}(\Upsilon)$ | $\hat{\text{m}}\text{in}(\Upsilon)$ |
|-------------|------------------|-----------------------|--------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 0.01 | 1469 | 1800 | 41.2 | 1994 | 1679 |
| 0.05 | 858 | 1120 | 38.0 | 1262 | 1010 |
| 0.1 | 429 | 546 | 7.00 | 589 | 524 |
| 0.5 | 400 | 512 | 7.17 | 614 | 490 |
| 1 | 403 | 520 | 7.50 | 561 | 499 |
| 1.5 | 402 | 521 | 7.52 | 576 | 498 |
| 2 | 402 | 521 | 7.81 | 590 | 497 |

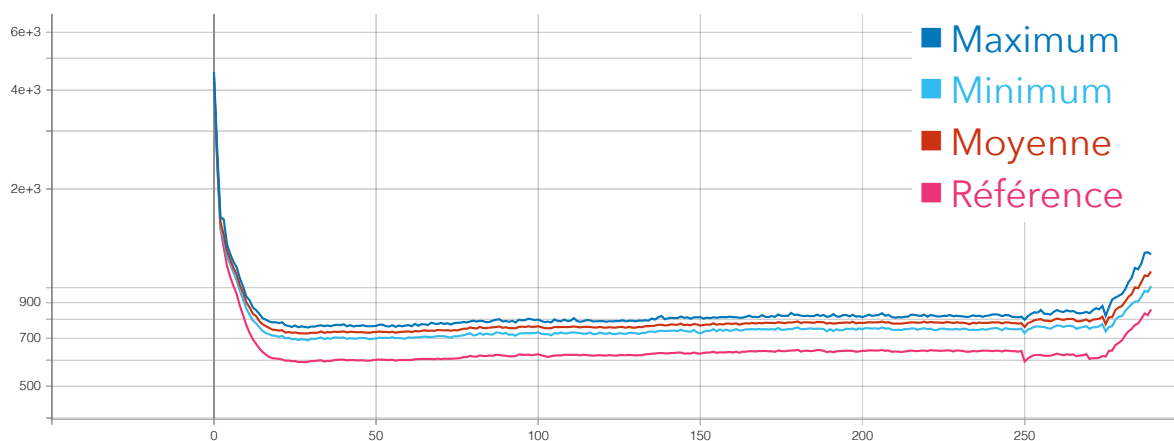


(a) $k = 0.01$.

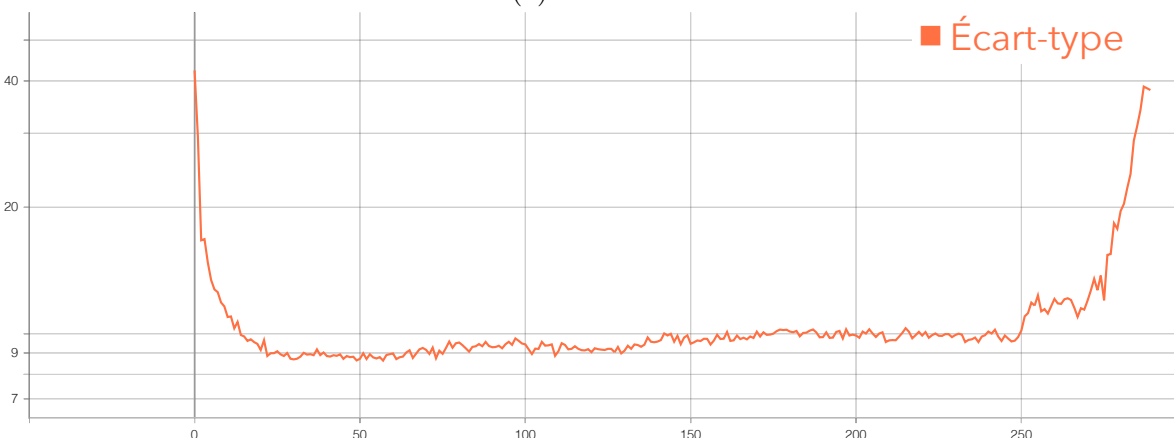


(b) $k = 0.01$.

Figure E.3 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{\text{mâx}}(\Upsilon)$ et $\hat{\text{mîn}}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération et obtenues avec les CO.

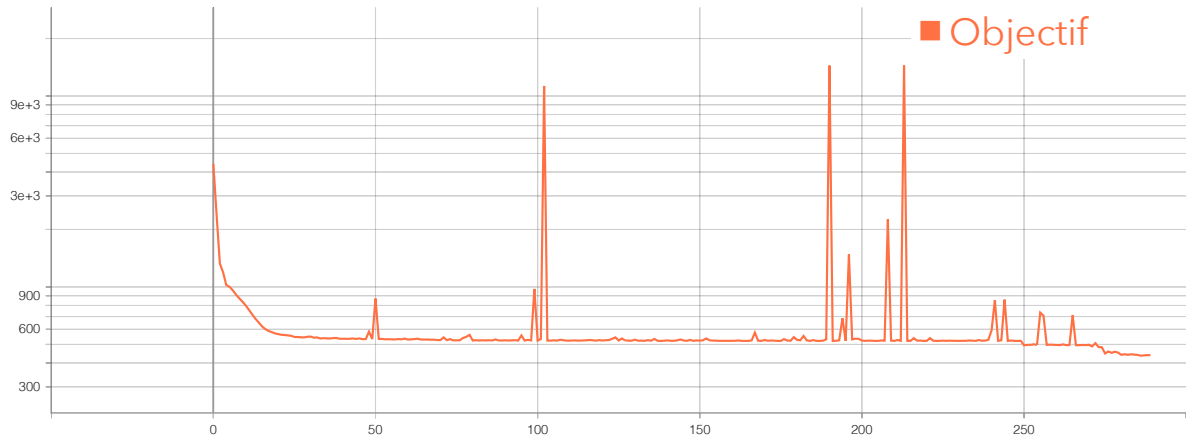


(a) $k = 0.05$.

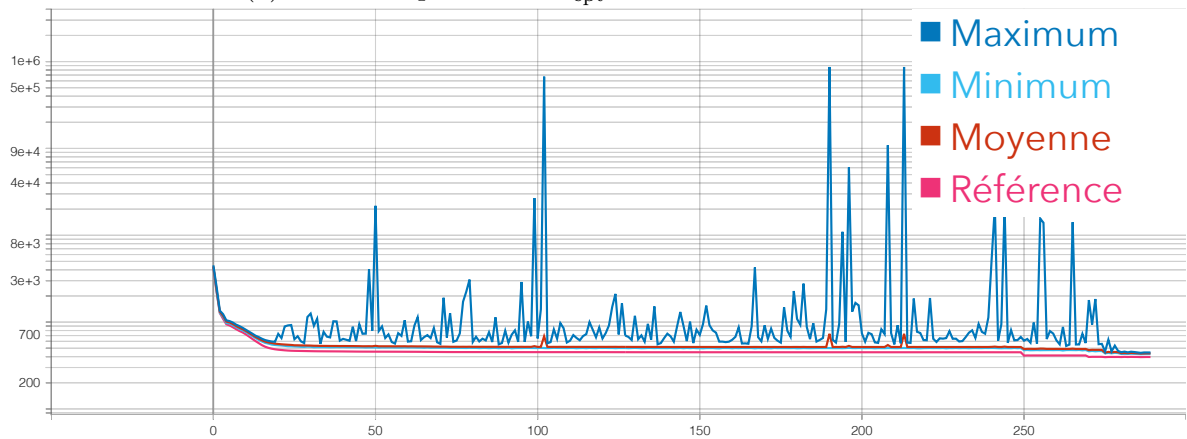


(b) $k = 0.05$.

Figure E.4 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Upsilon)}$, $\hat{m}\text{x}(\Upsilon)$ et $\hat{m}\text{i}\text{n}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.23a.

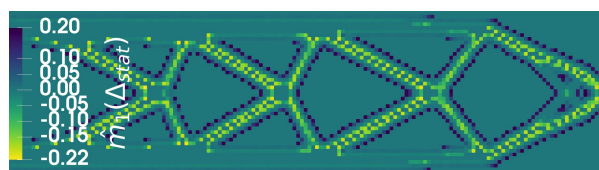


(a) Courbe représentant \hat{c}_{ept} en fonction de l'itération.

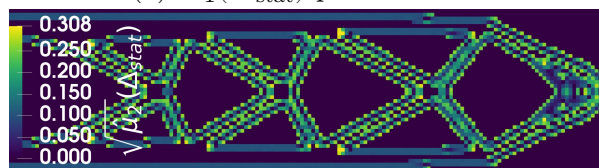


(b) Courbes représentant c_{ref} , $\hat{m}_1(\Upsilon)$, $\hat{m}_{\text{ax}}(\Upsilon)$ et $\hat{m}_{\text{in}}(\Upsilon)$ en fonction de l'itération.

Figure E.5 – Valeurs de souplesse [Nmm] pour des indicateurs de la robustesse en fonction de l'itération pour la topologie de la figure 3.25c.

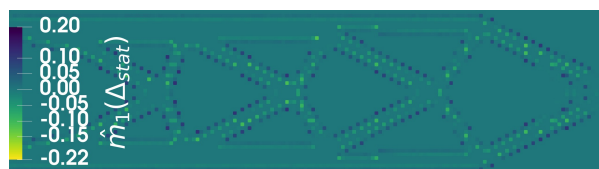


(a) $\hat{m}_1(\Delta_{\text{stat}})$ pour $a = 0.1$.

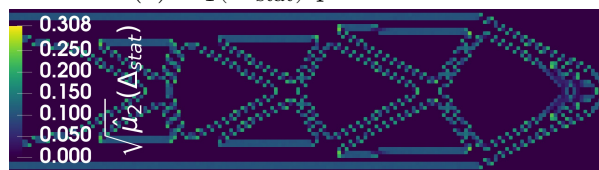


(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{\text{stat}})}$ pour $a = 0.1$.

Figure E.6 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique à l'itération 249 (avant l'augmentation de β) pour $k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$.



(a) $\hat{m}_1(\Delta_{\text{stat}})$ pour $a = 0.3$.



(b) $\sqrt{\hat{\mu}_2(\Delta_{\text{stat}})}$ pour $a = 0.3$.

Figure E.7 – Moyenne et écart-type des écarts modélisés par le modèle statistique à l'itération 249 (avant l'augmentation de β) pour $k_{\text{STD}} = 0$ et $k_{\text{Sk}} = 0.4$.

Résumé : La fabrication additive est un procédé de fabrication innovant permettant de fabriquer des pièces aux formes complexes. Toutefois, à cause des effets des incertitudes, ce procédé de fabrication manque de répétabilité. Les pièces produites affichent *ipso facto* des imperfections géométriques. Le but de cette thèse est d'intégrer les informations venues du procédé dans le processus de conception. C'est pourquoi une approche basée sur l'optimisation topologique a été développée. L'optimisation topologique permet de guider le concepteur en fournissant des topologies aux formes complexes et optimisées vis-à-vis de critères de performance. La formulation est modifiée pour atténuer les effets des incertitudes aléatoires et épistémiques. Pour atténuer les effets des imperfections géométriques avec l'optimisation topologique, plusieurs nouveautés sont développées. Tout d'abord, des taxonomies dédiées à l'optimisation topologique robuste sous des imperfections géométriques, à la caractérisation des incertitudes et des problèmes d'optimisation robuste sont développés. De plus, un cadre méthodologique est développé et est appliqué. Puis, un modèle caractérisant les écarts géométriques en fonction des motifs géométriques est utilisé et est analysé aux cas déterministes et à un modèle de la littérature. Enfin, une méthode permettant d'atténuer les effets des incertitudes épistémiques est spécialement développée pour l'optimisation topologique robuste, permettant au concepteur de choisir entre une conception optimiste ou pessimiste en fonction de l'exactitude des modèles et du contexte du projet. Les travaux se sont révélés efficaces dans l'atténuation des effets des imperfections géométriques lors du processus de conception pour la robustesse.

Mots clés : optimisation topologique, incertitudes aléatoires, incertitudes épistémiques, conception pour la robustesse, fabrication additive.

Abstract: Additive manufacturing is an innovative manufacturing process enabling the production of parts with complex geometries. However, due to the effects of uncertainties, this process lacks repeatability. Consequently, the produced parts inherently exhibit geometric imperfections. The aim of this thesis is to integrate process-related information into the design workflow. To achieve this, a topology optimisation approach was developed. Topology optimisation assists designers by providing complex and performance-optimised geometries. The formulation has been modified to mitigate the effects of both aleatory and epistemic uncertainties. To address the impact of geometric imperfections in topology optimisation, several innovations were introduced. First, dedicated taxonomies for robust topology optimisation under geometric imperfections, uncertainty characterisation, and robust optimisation problems are developed. Moreover, a comprehensive methodological framework was conceived and applied. Subsequently, a model characterising geometric deviations as a function of local geometric features is compared against deterministic cases and a reference model from the literature. Finally, a method specifically designed to reduce the effects of epistemic uncertainties in robust topology optimisation is developed. This method allows the designer to adopt an optimistic or pessimistic approach depending on the accuracy of the models and the project context. The proposed work has proven effective in mitigating the impact of geometric imperfections during the design process for robustness.

Keywords: topology optimisation, aleatory uncertainties, epistemic uncertainties, design for robustness, additive manufacturing.